RAČUNALNA TERMOPLASTIČNOST U UVJETIMA VELIKIH DEFORMACIJA TEMELJENA NA VIŠERAZINSKIM METODAMA

Munjas, Neven

Doctoral thesis / Disertacija

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:190:255782

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Image not found or type unknown *Repository / Repozitorij:*

Repository of the University of Rijeka, Faculty of Engineering

UNIRI DIGITALNA KNJIŽNICA

Image not found or type unknown

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

Neven Munjas

RAČUNALNA TERMOPLASTIČNOST U UVJETIMA VELIKIH DEFORMACIJA TEMELJENA NA VIŠERAZINSKIM METODAMA

DOKTORSKI RAD

Rijeka, 2015.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

Neven Munjas

RAČUNALNA TERMOPLASTIČNOST U UVJETIMA VELIKIH DEFORMACIJA TEMELJENA NA VIŠERAZINSKIM METODAMA

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Marko Čanađija

Rijeka, 2015.

UNIVERSITY OF RIJEKA
FACULTY OF ENGINEERING

Neven Munjas

COMPUTATIONAL THERMOPLASTICITY OF LARGE DEFORMATIONS BEHAVIOR BASED ON MULTISCALE METHODS

DOCTORAL THESIS

Rijeka, 2015.

Mentor rada: prof. dr. sc. Marko Čanađija

Doktorski rad obranjen je dana _____ na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci pred povjerenstvom u sastavu:

1. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing. (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, predsjednik)
2. prof. dr. sc. Marko Čanađija, dipl. ing. (Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, mentor, član)
3. prof. dr. sc. Zdenko Tonković, dipl. ing. (Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, član)

Sveučilište u Rijeci
TEHNIČKI FAKULTET
-Fakultetsko vijeće-
Klasa: 602-04/10-02/50
Ur. br.: 2170-57-43-10-37
Rijeka, 24. rujna 2010.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 50. (14.) sjednici u akad. god. 2007./08./09./10 održanoj 24. rujna 2010., donijelo je sljedeću

ODLUKU

Sukladno izvješću Stručnog povjerenstva, u sastavu: red. prof. dr. sc. Marko Čanađija, red. prof. dr. sc. Josip Brnić, red. prof. dr. sc. Goran Turkalj te pozitivne ocjene prijave i obrane teme doktorskog rada, utvrđuje se da pristupnik ***Neven Munjas, dipl. ing.*** ispunjava Zakonom propisane uvjete za prijavu i izradu teme doktorskog rada naslovljenog:

„Računalna termoplastičnost u uvjetima velikih deformacija temeljena na višerazinskim metodama"

Mentorom se imenuje red. prof. dr. sc. Marka Čanađiju.

Dekan

Prof. dr. sc. Tonči Mikac

REPUBLIKA HRVATSKA - SVEUČILIŠTE U RIJECI - TEHNIČKI FAKULTET RIJEKA

Dostaviti:
1. Neven Munjas, dipl. ing.
2. Mentor, red. prof. dr. sc. Marko Čanađija
3. Služba studentske evidencije
4. Pismohrana FV

Sažetak

U radu je prezentirana metoda višerazinskog modeliranja termoplastičnih deformacija heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije prvoga reda. Koncept analize koja se vrši na makro i mikro razini sastoji se od prijenosa naprezanja i varijabli stanja s jedne razine na drugu. Problem se na mikrorazini tretira kao izoterman, dok je na makrorazini isti neizoterman. Korištena je teorija velikih plastičnih deformacija. Razvijen je model reprezentativnog volumenskog elementa (RVE) na koji su primijenjeni periodični rubni uvjeti. Rješavanjem problema rubnog uvjeta (BVP) dobiven je numerički konstitutivni zakon koji daje odnos između naprezanja i deformacije u svakoj integracijskoj točki makrorazine. Numerička procedura razvijena je za probleme ravninskog stanja deformacije i temelji se na teoriji prvog reda. Procedura je verificirana na više primjera i doneseni su odgovarajući zaključci.

Abstract

This paper presents the multiscale modeling of thermoplastic deformation of heterogeneous materials by using the first-order computational homogenization. The concept of the analysis at the macro and microscale consists of transfer of stress and the state variables from one level to another. The problem at the microscale, is treated as isothermal, while at the macroscale as non-isothermal. The theory of large plastic deformation has been used. A model of a representative volume element (RVE) has been developed, on which periodic boundary conditions have been applied. By solving the boundary value problem (BVP), numerical constitutive law was obtained, that gives the relation between stress and strain in every integration point at the macroscale. Numerical procedure was developed for the problems of the plane strain condition and it is based on the theory of the first order. The procedure was verified at several examples and appropriate conclusions were adopted.

Predgovor

Neizmjerno i veliko hvala mentoru prof. dr. sc. Marku Čanađiji, na podršci i vodstvu tijekom dokrorskog studija, na pruženim profesionalnim savjetima i usvojenim praktičnim vještinama. Njegove izuzetne pedagoške sposobnosti i pristupačnost, kao i široko znanje i dugogodišnje iskustvo iz područja termomehanike te primjene računalnih metoda u inženjerstvu, uvelike su doprinijeli kvaliteti ovoga doktorskog rada.

Osjećam ugodnu dužnost srdačno se zahvaliti prof. dr. sc. Josipu Brniću, predstojniku Zavoda za tehničku mehaniku koji mi je ukazao povjerenje i pružio priliku da se pridružim kao član istraživačkog tima na projektu "Numerička analiza odziva konstrukcija za određena područja eksploatacije", br. 069-0691736-1737, uz potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta. Zahvaljujem se također i prof. dr. sc. Goranu Turkalju, dekanu Tehničkog fakulteta, na podršci te korisnim savjetima i sugestijama.

Ovim putem želim se zahvaliti i kolegama Igoru Pešiću, Sanjinu Kršćanskom, Edinu Merdanoviću, Marinu Brčiću, Domagoju Lancu i Damjanu Baniću, kao i ostalim članovima Zavoda za tehničku mehaniku, koji su me svakodnevno bodrili te davali konstruktivne i pozitivne savjete kroz cijeli doktorski studij ali i u privatnom životu.

Zahvaljujem se svima ostalima koji su mi pomagali pri izradi ovo ovog doktorskog rada, te konačno na kraju, jedno veliko hvala i mojoj obitelji, rodbini i prijateljima za pomoć, strpljenje i razumjevanje u raznim situacijama, uz svakodnevnu podršku i ljubav što mi puno znači u životu.

Za svaku primjedbu i odgovarajuću kritiku na moguće propuste u ovome radu unaprijed se srdačno zahvaljujem svima, što bi uvelike olakšalo poboljšanje i razvoj predloženih metoda u ovome radu.

Neven Munjas

Sadržaj

1. Uvod 1
2. Osnove mehanike kontinuuma 9
2.1. Notacija 9
2.1.1. Tenzorska algebra 9
2.1.2. Deriviranje tenzora 10
2.2. Kinematika i deformacija gibanja (kinematika kontinuuma) 11
2.2.1. Materijalno tijelo i konfiguracije 11
2.2.2. Gibanje materijalnog tijela 12
2.2.2.1. Lagrangeov i Eulerov opis gibnja 12
2.2.2.2. Pomak, brzina i ubrzanje čestice kontinuuma 14
2.2.3. Gradijenti deformiranja 14
2.2.4. Tenzori deformiranosti i tenzori deformacije 16
2.2.4.1. Tenzori deformiranosti 16
2.2.4.2. Tenzori deformacije 17
2.2.4.3. Veza tenzora deformacije s gradijentima pomaka 18
2.2.4.4. Tenzor infinitezimalne deformacije 19
2.2.4.5. Tenzor brzine deformacije 19
2.2.4.6. Veza tenzora gradijenta brzine s tenzorom gradijenta deformiranja 21
2.2.4.7. Tenzor zakreta i tenzor izduženja 21
2.2.4.8. Prirodna ili logaritamska deformacija 21
2.3. Materijalno tijelo, sila i naprezanje 21
2.3.1. Opterećenje tijela 22
2.3.2. Cauchyjev tenzor naprezanja 23
2.3.3. Piola-Kirchhoffovi tenzori naprezanja 24

2.3.4. Kirchhoffov tenzor naprezanja ... 24
2.4. Opći zakoni mehanike kontinuuma ... 25
2.4.1. Zakon održanja mase ... 25
2.4.2. Zakon održanja količine gibanja ... 26
2.4.3. Zakon održanja momenta količine gibanja ... 27
2.4.4. Prvi zakon termodinamike ... 28
2.4.5. Drugi zakon termodinamike ... 30
2.4.6. Termodinamički potencijali i jednadžbe stanja ... 33
2.4.7. Evolucija temperature pri plastičnim deformacijama ... 36
2.4.8. Disipacija ... 37
2.4.9. Plastično deformiranje i funkcija tečenja ... 38
3. Višerazinsko modeliranje ... 45
3.1. Uvodna razmatranja ... 45
3.2. Problem na mikrorazini ... 49
3.3. Rubni uvjeti ... 50
3.3.1. Propisani linearni pomaci ... 50
3.3.2. Prirodni rubni uvjeti ... 50
3.3.3. Periodični rubni uvjeti ... 50
3.4. Sprega između dvije razine ... 52
3.4.1. Usrednjeni gradijent deformiranja ... 52
3.4.2. Ekvivalentni mikroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja ... 53
3.4.3. Ekvivalentni mikroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja ... 54
3.4.4. Izvršeni rad ... 54
3.5. Makroskopska tangentna matrica krutosti ... 56
3.5.1. Uvod ... 56
3.5.2. Newton-Raphsonova metoda ... 56
3.5.3. Metoda numeričkog diferenciranja ... 58
4. Implementacija u programu ABAQUS ... 61
4.1. Programski paket ABAQUS ... 61
4.2. Postavljanje periodičnih rubnih uvjeta u ABAQUS-u ... 62
4.3. Osnovne značajke korisničkih potprograma UMAT ... 65
4.3.1. Najznačajnije varijable kod višerazinskog proračuna ... 65
4.3.2. Numerička implementacija ... 66
4.4. Postavljanje proračuna u ABAQUS-u ... 67

4.4.1. Makrorazina ... 68
4.4.2. Mikrorazina ... 71
5. Numerički proračuni ... 73
5.1. Analitički primjer i verifikacija modela ... 73
5.1.1. Geometrija jednodimenzijskog štapa ... 74
5.1.2. Značajke materijala i analitički proračun ... 74
5.1.3. Numerički proračun ... 76
5.2. Aksijalno opterećenje štapa ... 77
5.2.1. Model makrorazine ... 78
5.2.2. Mehanički primjer modela serijskog i paralelnog spoja ... 79
5.2.2.1. Model mikrorazine ... 80
5.2.2.2. Numerički proračun ... 82
5.2.3. Spregnuti termomehanički primjer modela punog presjeka ... 83
5.2.3.1. Model mikrorazine ... 83
5.2.3.2. Numerički proračun ... 85
5.2.4. Spregnuti termomehanički primjer modela serijskog spoja ... 87
5.2.4.1. Numerički proračun ... 88
5.2.5. Spregnuti termomehanički primjer modela s porom ... 90
5.2.5.1. Model mikrorazine ... 90
5.2.5.2. Numerički proračun ... 91
5.2.6. Usporedba rezultata dobivenih s različitim mikrorazinama ... 94
5.3. Savijanje grede ... 96
5.3.1. Model makrorazine ... 97
5.3.2. Spregnuti termomehanički primjer modela punog presjeka ... 98
5.3.2.1. Numerički proračun ... 98
5.3.3. Spregnuti termomehanički primjer modela serijskog spoja ... 102
5.3.3.1. Numerički proračun ... 102
5.3.4. Spregnuti termomehanički primjer modela s porom ... 106
5.3.4.1. Numerički proračun ... 106
5.3.5. Usporedba rezultata dobivenih s različitim mikrorazinama ... 110
6. Zaključak ... 113
Popis literature ... 115
Popis oznaka i simbola ... 123
Popis slika ... 131

Popis tablica 135
Životopis..... 137

1. Uvod

Zanimanje znanstvenika za određivanjem odziva heterogenih materijala dovelo je u drugoj polovici 19. stoljeća do prvih značajnijih radova na području mehanike materijala. J. C. Maxwell eksperimentalno istražuje razne oblike opterećenja tijela uz značajno grafičko dokumentiranje, te objavljuje rad (Maxwell, 1867) o gibanju tijela koje se sastoji od heterogenog materijala. J. W. Strutt (Lord Reyleigh) u svome radu (Strutt, 1892) opisuje utjecaj cilindričnih ojačanja na svojstva materijala. Određivanju mehaničkih svojstava heterogenih materijala pridonijeli su radovi W. Voigta i A. Reussa, (Voigt, 1889; Voigt 1928) i (Reuss, 1929) koji su predložili analitičko određivanje efektivnog modula elastičnosti preko volumnih udjela komponenata, što je u mehanici poznato kao „pravilo mješanja“. Ova metoda se također i danas koristi u mehanici kompozita, međutim nedostatak je što u osnovnom obliku uzima u obzir samo volumni udio komponenata bez ostalih utjecaja unutar materijala. Budući da kreću od postavljanja jednolikog stanja naprezanja ili deformacije unutar kompozita, koje nije opravdano usvojiti u stvarnim problemima, te metode predstavljaju dva granična slučaja ponašanja materijala.

Sredinom 20. stoljeća razvijene su i druge analitičke metoda koje su nudile razna rješenja oko određivanja materijalnih svojstava heterogenih materijala, prilagođene posebno za složenije oblike ojačanja, kao što je npr. eliptični oblik. Svakako valja spomenuti Eshelbyjevu metodu (Eshelby, 1957; Eshelby, 1959) gdje se efektivna svojstva materijala određuju pomoću tzv. teorije ekvivalentnih inkluzija tj. postavljanja transformacijskih jednadžbi za određivanje deformacije između vlaknastog dijela (koji predstavlja inkluzije[1] u materijalu), koje je podvrgnuto promjenama oblika i veličine, i okruženja koje predstavlja matrica

[1] Inkluzija je volumni defekt kristalne rešetke, u obliku stranog tijela.

elastičnog tijela. Ova metoda funkcionira uglavnom za slučaj kada imamo manji broj inkluzija u jednoj beskonačnoj matrici, međutim pokazuje nedostatke u slučaju kada se poveća volumen ojačanja u heterogenom materijalu. Stoga je kasnije i proširena pomoću Mori-Tanaka metode koja, iako polazi od Eshelbyjevog pristupa, daje rezultate koji se približno poklapaju sa eksperimentalnim podacima (Mori & Tanaka, 1973; Mura, 1987). Kod ove metode inkluzija koja se ponaša kao odvojena jedinka u odnosu na ostale, izložena je stanju usrednjenog naprezanja koje se dobije od ostalih inkluzija metodom superpozicije. Za razliku od ove metode koja pretpostavlja usrednjeno polje naprezanja i deformacije, samokonzistentna metoda koju su predložili i neovisno razvili autori A.V. Hershey, E. Kröner, B. Budiansky, R.J. O'Connell i R. Hill, uzima u obzir nehomogenost naprezanja i deformacije u modelu mikrostrukture. Svojstva mikrostrukture heterogenog materijala određena su implicitno pomoću jedne eliptične inkluzije, oko koje se nalazi beskonačni medij koji predstavlja utjecaj ostalih elemenata u mikrostrukturi na tu inkluziju (Budiansky, 1965; Budiansky & O'Connell, 1976; Hill, 1965). Geometrijska metoda koja primjenjuje varijacijski princip teorije elastičnosti za određivanje svojstava kompozitnih materijala je tzv. CSA metoda ili metoda koncentričnih kugli (eng. *composite spheres assemblage*), prema radovima autora Z. Hashina, i u suradnji sa S. Shtrikmanom (Hashin, 1962; Hashin & Shtrikman, 1963). Model se sastoji od niza koncentričnih kompozitnih kugli, koje sadrže okruglu česticu unutar koncentrične ljuske materijala matrice. Koncentrične kugle imaju jednaki volumni udio čestice i materijala matrice, dok je veličina same kugle proizvoljna. Izveden je varijacijski proračun te su određene među ostalim rubne vrijednosti i izrazi za ukupna svojstva kompozitnog materijala. Kasnije je istraživanje prošireno i na vlaknaste kompozite pomoću CCA metode ili metode koncentričnih valjaka, u suradnji sa B. Rosenom (Hashin & Rosen, 1964). Rezultati u oba slučaja uglavnom se dobro slažu sa eksperimentalnim podacima.

Razvojem komercijalnih programa koji se temelje na metodi konačnih elemenata (MKE) nastale su i napredne računalne metode modeliranja, koje omogućuju lakše razumijevanje ponašanja materijala i odziva inženjerskih konstrukcija. Jedna od tih metoda je tzv. višerazinska (dvorazinska) metoda modeliranja, koja se temelji na računalnoj homogenizaciji materijalne strukture te povezivanju proračuna na različitim razinama. Ova metoda, koju danas primjenjuju znanstvenici diljem svijeta, praktična je jer uzima u obzir i povezuje složene materijalne i geometrijske karakteristike na mikrorazini, koje možemo pratiti pomoću tzv. reprezentativnog volumenskog elementa (RVE), koji zauzima važnu ulogu modeliranju. Termin RVE se po prvi put spominje u radu autora R. Hilla (Hill, 1963) prilikom određivanja elastičnih svojstava materijala.

Radovi P. Suqueta (Suquet, 1985; Suquet, 1987) predstavljaju značajne publikacije na području računalne homogenizacije, gdje su prikazani razni numerički primjeri i usporedba rubnih uvjeta sa rezultatima eksperimenata. U ovim se radovima također po prvi puta spominju termini kao što je homogenizacija, odnosno lokalizacija. U radu dvojice autora F. Feyela, i J.-L. Chabochea, (Feyel & Chaboche, 2000) modelirani su kompozitni materijali pomoću periodične mikrostrukture, uz pomoć paralelnog MKE proračuna na dvije razine. Uz testiranje različitih vrsta mreže konačnih elemenata i detaljnu usporedbu tijeka proračuna na dva elementarna primjera, prezentiran je i model turbinske lopatice opterećene centrifugalnom silom, čiji je centralni dio izrađen od kompozitnog materijala. Rad autora C. Miehea (Miehe, 2003) prikazuje metodu računalne homogenizacije za slučaj velikih deformacija za elastoplastični model, uz usporedbu raznih načina postavljanja rubnih uvjeta na mikrorazini. Od iznimnog su značaja radovi grupe autora M.G.D. Geersa, W.A.M. Brekelmansa, V.G. Kouznetsove i suradnika (Kouznetsova et al., 2004; Kouznetsova & Geers, 2008; Geers et al., 2010; Kouznetsova et al., 2010; Geers et al., 2011) koji prikazuju metodu računalne homogenizacije i prvog i drugog reda, uz teorijske osnove i razne primjere za više slučaja opterećenja, te primjenu na termomehaničke probleme. Termomehanička analiza heterogenih materijala metodom računalne homogenizacije prvog reda prikazana je u radu (Özdemir et al., 2008). Na modelu se javljaju veće plastične deformacije uslijed savijanja ploče ojačane vlaknastim materijalom. Na mikrorazini je proveden nelinearni proračun za dvofazne metalne materijale koji uključuje nelinearnu ovisnost mehaničkih i termičkih veličina, zajedno sa ovisnosti o temperaturi. Razvijena je procedura mehaničke i termičke homogenizacije. U posljednje vrijeme ova grupa znanstvenika radi na području višerazinskog modeliranja prijelaza s atomističke razine na razinu mehanike kontinuuma, odnosno modeliranjem pojava kao što je dislokacija na granicama zrna metala (van Beers et al., 2013; van Beers et al., 2015).

Primjer višerazinskog proračuna u komercijalnom programu predstavljen je u radu A. Tchalle i suradnika (Tchalla et al., 2013), gdje je modeliran heterogeni materijal metodom računalne homogenizacije prvog reda, pomoću paralelnog MKE proračuna na dvije razine.

Sprega temperaturne i mehaničke analize u višerazinskom kontekstu predstavljena je u radu A. Alzine i suradnika (Alzina et al., 2007) gdje je modeliran stup od elastičnog kompozitnog materijala primjenom periodične homogenizacije, a u njemu se javlja nelinearna raspodjela temperature o kojoj ovisi i mehanički odziv. U radovima autora H. Zhanga i suradnika (Zhang et al., 2013; Zhang et al., 2014) predstavljene su metode višerazinskog modeliranja termoelastičnih materijala uz razne primjere i rubne uvjete. U radu autora G.

Regniera i suradnika (Regnier et al., 2007) predstavljen je primjer modeliranja zavara od termoplastičnog kompozitnog materijala.

Metoda računalne homogenizacije prvog reda za slučaj heterogenog termoelastičnog materijala predstavljena je u radu autora I. Temizera i P. Wriggersa (Temizer & Wriggers, 2011), na način da je rješavanje problema rubnog uvjeta (BVP) razdvojeno na dva nadovezana proračuna, prvo na mehanički proračun, zatim na termički proračun, koji kao početnu konfiguraciju ima rezultate iz mehaničkog proračuna.

Teorijske i matematičke osnove klasične teorije elastoplastičnosti na području mehanike kontinuuma razrađene su još 1950.-tih i 1960.-tih godina u knjigama od kojih su najznačajnije one autora R. Hilla, C. Truesdella i R.A. Toupina, C. Truesdella i W. Nolla, L.M. Kačanova (Hill, 1950; Truesdell & Toupin, 1960; Truesdell & Noll, 1965; Kachanov, 1969; Kačanov, 1974). Primjena prikazanih koncepata svodila se uglavnom na rješavanje problema pomoću predloženih analitičkih metoda, koje nisu baš bile efikasne kada su problemi postali složeni, bilo zbog složenosti geometrije, kao i zbog nelinearnog ponašanja materijala, što je dovodilo do rezultata koji često nisu bili usklađeni sa rezultatima eksperimenata jer su modeli često bili pojednostavljeni. Narednih godina razvojem računala i računalnih metoda kao što je MKE počinje primjena i na složenije inženjerske probleme.

Autori J.C. Simo, C. Miehe i T.J.R. Hughes predstavljaju na suvremen način u radovima i literaturi (Simo, 1988; Simo & Miehe, 1992; Simo, 1998; Simo & Hughes, 1998) detaljnu teorijsku formulaciju te algoritme za računalnu implementaciju za područje elastoplastičnosti pri konačnim deformacijama, dok u novijim radovima pokrivaju i spregu mehanike i topline te njihov međusobni utjecaj, što predstavlja osnove za analizu sve složenijih sustava.

Kontrakcija presjeka cilindrične epruvete tijekom vlačnog testa prikazana je u radovima (Wriggers et al. 1992; Armero & Simo, 1993) gdje su autori P. Wriggers sa suradnicima te F. Armero i J.C. Simo razvili algoritam i računalni MKE model. Naglašen je utjecaj kontrakcije presjeka na proizvedenu količinu topline koja se javlja uslijed neelastičnih deformacija u cilindričnoj epruveti. Također je prikazan i utjecaj izmjene topline na kontrakciju presjeka te su navedene usporedbe modela za razne primjere.

U metalima prilikom plastične obrade dolazi do disipacije mehaničke energije, koja se pretvara u toplinu, dok se od 5 do 15% energije deformacije pohranjuje u tijelu. Ova se energija se zove latentna energija hladnog rada. Autori W. S. Farren, G. I. Taylor i H. Quinney su u radovima (Farren & Taylor, 1925; Taylor & Quinney, 1934) eksperimentalnim putem su mjerili energiju hladnog rada pomoću vlačnog testa metalne šipke. Kod ovih pristupa disipacija se određuje kao dio plastičnog rada utrošenog na trajno deformiranje tijela.

Novije spoznaje na području pretvorbe plastičnog rada u toplinu te određivanje parametara pretvorbe plastičnog rada u toplinu kod elastoplastičnih materijala prikazani su u radu P. Rosakisa i suradnika (Rosakis et al., 2000). Naglašava se korištenje eksperimantalnih podataka koji su bili korisni radi usporedbe i verifikacije parametara pretvorbe, što je u konačnici važno radi utvrđivanja odziva materijala u raznim slučajevima eksploatacije.

Istraživanje i postavljanje općih okvira termoplastičnosti na području velikih deformacija cilj je radova skupine autora M. Čanađije, J. Brnića i J. Moslera (Čanađija & Brnić, 2004; Čanađija & Brnić, 2009; Čanađija & Brnić, 2010; Čanađija & Mosler, 2011), koji naglašavaju važnost utjecaja temperature na razne parametre i svojstva materijala, što je predloženo na temelju raznih primjera kao što je npr. niskociklički zamor u energetskim postrojenjima, gdje je važno odrediti kada dolazi do stvaranja pukotine radi plastičnih deformacija, koje nastaju radi pojave termičkih naprezanja.

Moderniji pristup k određivanju disipacije plastičnog rada pomoću Helmholtzove slobodne energije predložen je u radovima autora L. Staniera, M. Ortiza i Q. Yanga (Yang et. al, 2006; Stanier & Ortiz, 2010). Njihovi konstitutivni modeli temelje se na tzv. varijacijski konzistentnoj formulaciji pomoću varijacijskog računa i energijskih potencijala. Uz navedene numeričke primjere pouzdanost metode potvrđena je i eksperimentalnim putem. Rad autora M. Čanađije i J. Moslera (Čanađija & Mosler, 2011) primjena je varijacijskog računa na složenije oblike plastičnog ponašanja materijala, odnosno na određivanje povećanja temperature uslijed plastične deformacije koje ne prati standardni pristup Taylor-Quinney već razvija drugi pristup temeljen na zakonima termodinamike. Numerička implementacija i proširenje varijacijski konzistentne formulacije na područje višerazinskog modeliranja predložena je u radu N. Bleiera i J. Moslera (Bleier & Mosler, 2013.) koji naglašavaju na utjecaj odabira materijalnog modela i primijenjenim konstitutivnim odnosima na makrorazini i mikrorazini što u konačnici rezultira boljim rezultatima konačno elementne analize.

Ovaj doktorski rad temelji se na dvorazinskom numeričkom modeliranju termoplastičnih materijala s izotropnim očvršćenjem. Detaljno su izvedeni konstitutivni odnosi te je kao novitet predložena primjena varijacijski konzistentne formulacije na područje višerazinskog modeliranja materijala, što je ranije navedena u radovima kao jedna od obećavajućih metoda za uspješno modeliranje termomehanički spregnutih problema. Model je razvijen za adijabatske procese. Razlike u odnosu na rad (Özdemir et al., 2008) koji se također bavi termomehaničkim višerazninskim problemima jest upravo korištenje varijacijski konzistentne formulacije. Također, spomenuti rad ograničen je na manje plastične deformacije te je stoga

plastična disipacija zanemarena. Ovaj rad nadilazi takva ograničenja i omogućava šire područje primjene. U ovome radu se po prvi put prezentira numerička implementacija modela razvijenog u komercijalnom programskom paketu ABAQUS za slučaj višerazinskog modeliranja u uvjetima velikih deformacija koje uključuju povećanje temperature, određene preko plastičnog rada uz korištenje Taylor-Quinneyjevog pristupa. Velike plastične deformacije također obrađuje rad (Miehe, 2003), no problemi su ograničeni na izotermne procese. Model je razvijen pomoću vlastitog programskog koda ugrađenog u tzv. korisnički potprogram standardnog konačno elementnog okruženja. Verifikacija izrađenog programskog modela temeljena je, u situaciji gdje je to bilo moguće, na analitičkoj provjeri modelima. Tamo gdje nije postojalo mogućnost postavljanja analitičke provjere, verifikacija je provedena pomoću modela u konačno elementnom programu. Motivaciju autora za izradu vlastitog programskog rješenja bio je svakako nedostatak dostupnih spoznaja na širem području znanstvene i stručne literature koja obuhvaća numeričko modeliranje termoplastičnih materijala pomoću dvorazinske metode te primjena na područje velikih deformacija upravo pomoću varijacijskih metoda u mehanici deformabilnih tijela.

Rad je podijeljen po tematskim cjelinama u pet poglavlja i koje obrađuju problem koji se obrađuje.

U drugome poglavlju dan je kratki pregled osnovnih teorijskih pristupa i zakona mehanike kontinuuma. Mehanika kontinuuma jedna je od osnovnih znanstvenih disciplina kojom se svakodnevno koristi veliki broj znanstvenika, poput matematičara i fizičara, do inženjera i stručnjaka prilikom primjene teorijskih spoznaja na praktičnim problemima. Pregled matematičkih formulacija i dosadašnjih teorijskih razmatranja predstavlja osnovu na temelju koje je razvijen i vlastiti programski kod, te su razvijeni konačnoelementni modeli.

Treće poglavlje daje pregled osnovnih teorijskih formulacija na području višerazinskog modeliranja materijala i konstrukcija, primjenom računalne homogenizacije koja koristi teoriju prvoga reda. Kao što ukazuje sam naziv ove metode, višerazinska metoda predstavlja jedan od načina modeliranja kontinuuma spajanjem različitih razina unutar samog materijala. Modeliranje materijala i diskretizacija samog modela pomoću reprezentativnog volumenskog elementa za slučaj periodičnog ponavljanja osnovnih elementarnih dijelova konstrukcije predstavlja osnovnu ideju u ovome radu, s ciljem stvaranja pouzdane veze koja daje idejna rješenja na području termomehanički spregnutih problema.

U četvrtom poglavlju povezane su ove dvije cjeline, mehanika kontinuuma i termoplastičnost s jedne strane, odnosno višerazinsko modeliranje i programski paket s druge strane. Dan je kratak pregled osnovnih informacija o programskom paketu koji je korišten za izradu numeričkih modela, odnosno primjera za provođenje višerazinskog proračuna. Predstavljena su teorijska riješenja za homogeniziranje varijabli stanja za slučaj termoplastičnog modeliranja na području velikih deformacija. Postavljene su, dodatno, neke od osnovnih postavki u konačnoelementnom programu što su ključne kod ispravnog modeliranja heterogenih materijala. Postavljanje problema rubnih uvjeta na mikrorazini predstavlja jedan od važnijih segmenata postavki što dovodi do ispravnog rješavanja i homogeniziranja rezultata na proračunu makrorazine.

Peto poglavlje sadrži numeričke primjere izrađene u konačnoelementnom programu, koji su modelirani metodom višerazinskog modeliranja. Primjeri su verificirani i uspoređeni sa dostupnim analitičkim rješenjima. Pokrivaju područje velikih plastičnih deformacija, uz naglasak na utjecaj mikrorazine i postavki proračuna na ispravnost rezultata. Rezultati i usporedbe prikazani su u pripadnim dijagramima i tablicama radi jednostavnijeg praćenja i usporedbe raznih proračuna.

Šesto i završno poglavlje daje pregled provedenih istraživanja u ovome radu te analizu numeričkih proračuna. Iznesen je zaključak o primijenjenoj metodi višerazinskog modeliranja te su navedeni nedostaci vlastitog istraživanja. Ograničenja navedenih metoda iznesenih u ovome radu također predstavljaju ključni dio za tumačenje rezultata istraživanja, stoga su također ovdje i razmotrena. Predložene su smjernice za buduća istraživanja. Dani su konkretni prijedlozi za poboljšanje rezultata istraživanja.

Pored toga, rad sadrži popis korištene literature, popis oznaka i simbola, popis slika i tablica.

2. Osnove mehanike kontinuuma

U ovome poglavlju prikazat će se osnovna teorijska razmatranja iz područja mehanike kontinuuma. Na početku poglavlja prikazan je ukratko pregled notacije i zapisa osnovnih matematičkih veličina na tome području, čiji je izbor jako važan jer omogućuje kasnije jednostavniju implementaciju u standarne programske jezike.

2.1. Notacija

Sve skalarne, vektorske i tenzorske veličine prikazane su u Descartes-Cartesius koordinatnom sustavu, u skladu sa Einsteinovom konvencijom prema kojoj se zbrajanje vrši po ponovljenim indeksima. Ortogonalni bazni jedinični vektori se mogu zapisati kao $\mathbf{e}_i$ (i = 1, 2, 3).

Matematički zapis i terminologija usklađena je sa literaturom (Truesdell & Toupin, 1960; Truesdell & Noll, 1965; Marsden & Hughes, 1983; Jarić, 1988; Alfirević, 2003; Mase, 2010; Gurtin et al., 2010).

2.1.1. Tenzorska algebra

Kroneckerov tenzor drugog reda ili skraćeno jedinični tenzor, $\mathbf{I} = \delta_{ij}$, ili ponekad Kroneckerov simbol δ definira se:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \tag{2.1}$$

Permutirajući simbol ima oblik:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{za } ijk \text{ u nizu } 12312, \\ -1 & \text{za } ijk \text{ u nizu } 32132, \\ 0 & \text{za } ijk \text{ u nekom drugom nizu.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Neke od osnovnih operacija su trag tenzora (eng. *trace*):

$$\operatorname{tr}\mathbf{S} = S_{ii}, \tag{2.3}$$

transponiranje tenzora:

$$\mathbf{S}^T = \left(\mathbf{S}^T\right)_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = S_{ji}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,, \tag{2.4}$$

aditivna dekompozijija na *simetrični* (eng. *symetric part*) i *antisimetrični* dio (eng. *skew part*):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathrm{sym}(\mathbf{S}) + \mathrm{skw}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{S}+\mathbf{S}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{S}-\mathbf{S}^T\right)\\ S_{ij} &= \left[\frac{1}{2}\left(S_{ij}+S_{ji}\right)+\frac{1}{2}\left(S_{ij}-S_{ji}\right)\right]\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\end{aligned}\right\}, \tag{2.5}$$

pravilo dvostrukog unutarnjeg umnoška simetričnog i antisimetričnog tenzora:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{S}:\mathbf{T}=0\\ &S_{ij}T_{ij}=0\end{aligned}\right\}\text{, za } \mathbf{S} \text{ simetrične i } \mathbf{T} \text{ antisimetrične tenzore,} \tag{2.6}$$

tenzorski umnožak – *dijada* dva vektora:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}=\mathbf{uv}\\ &T_{ij}=u_iv_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

skalarni umnožak dva tenzora:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}\\ &T_{ij}=U_{ik}V_{kj}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\end{aligned}\right\}, \tag{2.8}$$

dvostruki unutarnji umnožak tenzora:

$$\left.\begin{aligned}&S:T=\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}^T\mathbf{T}\right)\\ &S_{ij}T_{ij}=S_{ji}^TT_{ij}\end{aligned}\right\}, \tag{2.9}$$

dvostruki unutarnji umnožak tenzora višeg reda:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}={}^4\mathbf{U}:\mathbf{V}\\ &T_{ij}=U_{ijmn}V_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\end{aligned}\right\}. \tag{2.10}$$

2.1.2. Deriviranje tenzora

Promjene baznih vektora na pravcu koordinatnih osi mogu se izraziti pomoću tzv. *Hamiltonovog diferencijalnog operatora* (del ili nabla) tj. vektorskog operatora ∇:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \partial_i\,. \tag{2.11}$$

Gradijent skalarnog polja može se izraziti kao vektorsko polje:

$$\mathrm{grad}\,\phi = \nabla\phi = \phi_{,i}\mathbf{e}_i\,, \tag{2.12}$$

gradijent vektorskog polja može se izraziti kao tenzorsko polje:

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} = u_{i,j}\mathbf{e}_i\,, \tag{2.13}$$

divergencija vektorskog polja može se izraziti kao skalarno polje:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{i,i}, \tag{2.14}$$

dok divergencija tenzorskog polja može se izraziti kao vektorsko polje:

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{S} = S_{ij,j}. \tag{2.15}$$

Pored toga valja naglasiti na važnost *integralnih teorema* za određivanje raznih veličina na području mehanike kontinuuma, a svakako treba spomenuti i *Gaussov teorem o divergenciji*.

Za tenzorsko polje može se odrediti veza između površinskog integrala na zatvorenoj rubnoj površini S i volumnog integrala na prostoru V pomoću izraza u simboličnom zapisu:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{T}dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}dV = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}dS, \tag{2.16}$$

ili u indeksnom zapisu:

$$\int_V T_{ij,j}dV = \int_S T_{ij}n_j dS. \tag{2.17}$$

gdje je **n** jedinični vektor normale zatvorene rubne površine.

Za vektorsko polje može se odrediti veza između površinskog integrala na zatvorenoj rubnoj površini S i volumnog integrala na prostoru V pomoću izraza u simboličnom zapisu:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{u}dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u}dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS, \tag{2.18}$$

ili u indeksnom zapisu:

$$\int_V u_{i,i}dV = \int_S u_i n_i dS, \tag{2.19}$$

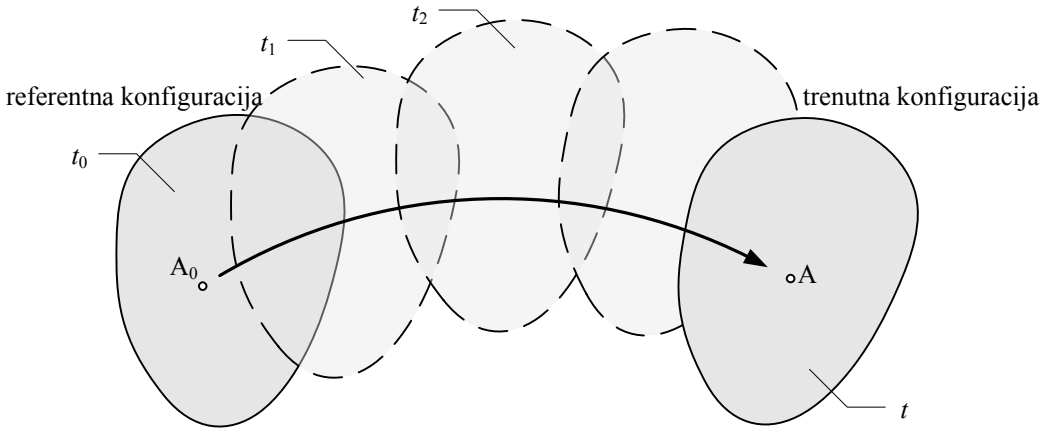
gdje je **n** jedinični vektor normale zatvorene rubne površine.

2.2. Kinematika i deformacija gibanja (kinematika kontinuuma)

2.2.1. Materijalno tijelo i konfiguracije

U mehanici kontinuuma razmatraju se gibanja realnih tijela. Realno tijelo se može razmatrati kao *materijalno tijelo*, odnosno neprekidni prostor ispunjen materijom koji ima određenu masu. U tome slučaju na to tijelo se može primijeniti diferencijalni račun.

Materijalno tijelo $\mathcal{B}$ je skup elementarnih materijalnih točaka X, zvanih *čestice*, koje su smještene u trodimenzijskom Euklidovom prostoru u položaju određenom sa točkom x, koji se naziva *položaj čestice*. Svaka materijalna točaka, kao i samo materijalno tijelo, pod djelovanjem opterećenja neprekidno mijenja svoj položaj, oblik i veličinu, Sl. 2.1.



Slika 2.1 – Položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji.

Položaj svih čestica u određenom vremenskom trenutku t određuje *konfiguraciju* tijela, $\mathcal{B}(t)$. Radi jednostavnijeg razmatranja tijela može se izabrati jednu potpuno određenu konfiguraciju u određenom trenutku t_0, koja najčešće predstavlja nedeformirani oblik tijela. Tako izabrana konfiguracija naziva se *referentna konfiguracija*, $B = \mathcal{B}(t_0)$. Ako referentna konfiguracija predstavlja položaj tijela u početnom vremenskom trenutku, tada je riječ o *početnoj referentnoj konfiguraciji*. U tom prvom slučaju najčešće se razmatra prirodni nedeformirani oblik tijela u kojem nema naprezanja, koji se zove *nedeformirana konfiguracija*.

Kretanjem tijela u prostoru, u promatranom trenutku t, ono zauzima tzv. *trenutnu konfiguraciju*, $b = \mathcal{B}(t)$. U tome drugome slučaju najčešće se razmatra deformirani oblik tijela koji se zove *deformirana konfiguracija*.

2.2.2. Gibanje materijalnog tijela

2.2.2.1. Lagrangeov i Eulerov opis gibnja

U fizičkom trodimenzijskom Euklidovom prostoru prikladno je definirati dva pravokutna *Descartes-Cartesiusova* koordinatna sustava, jedan s jediničnim vektorima $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ za referentnu konfiguraciju, a drugi sa jediničnim vektorima $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ za trenutnu konfiguraciju. Koordinate točaka su određene zapisom X_A i x_i (i, A = 1, 2, 3).

Čestici (A_0) u početnom vremenskom trenutku (Sl. 2.2) može se dodijeliti jedinstveni vektor položaja u odnosu na ishodište koordinatnog sustava $OX_1X_2X_3$ u referentnoj konfiguraciji B:

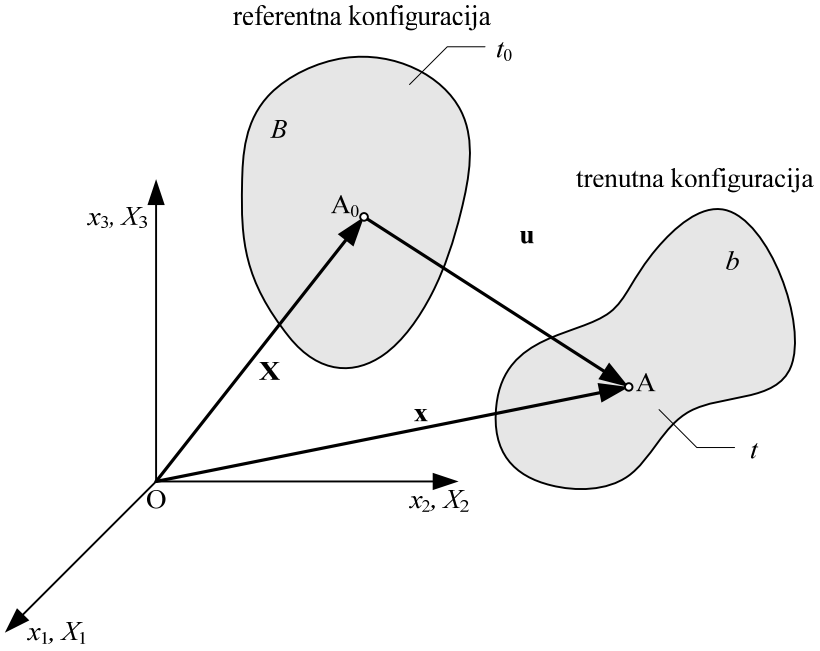
$$\mathbf{X} = X_A \mathbf{E}_A, \qquad A = 1,2,3, \tag{2.20}$$

čije se koordinate $A_0(X_1, X_2, X_3)$ zovu *materijalne koordinate*, ili ponekad *referentne koordinate* ili *Lagrangeove koordinate* čestice.

Čestica A_0 se u trenutnom vremenskom trenutku t nalazi u točki prostora A (Sl. 2.2), gdje joj se može dodijeliti jedinstveni vektor položaja u odnosu na ishodište koordinatnog sustava $Ox_1x_2x_3$ u trenutnoj konfiguraciji b:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \qquad i = 1,2,3, \tag{2.21}$$

gdje se koordinate čestice $A(x_1, x_2, x_3)$ zovu *prostorne koordinate*, ili ponekad *prostorne koordinate* ili *Eulerove koordinate* čestice.



Slika 2.2 – Vektori položaja i pomaka.

Prema tome i gibanje tijela se može matematički prikazati pomoću *materijalnog opisa*, odnosno *Lagrangeova opisa*, gdje su neovisne materijalne koordinate **X** i vrijeme t, što možemo zapisati pomoću izraza:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \tag{2.22}$$

Kako se na jednom mjestu istovremeno ne mogu naći dvije ili više čestica, preslikavanje **x**→**X** je (1–1) preslikavanje.

Uz pretpostavku da vrijedi inverzija izraza (2.22) u svakom trenutku t, gibanje tijela se može matematički prikazati također pomoću *prostornog opisa*, odnosno *Eulerova opisa*, gdje su neovisne prostorne koordinate **x** i vrijeme t, što možemo zapisati pomoću izraza:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \tag{2.23}$$

Kako se na jednom mjestu istovremeno ne mogu naći dvije ili više čestica, preslikavanje **X**→**x** je također (1–1) preslikavanje (Mićunović, 1990).

2.2.2.2. Pomak, brzina i ubrzanje čestice kontinuuma

Prilikom prijelaza iz referentne konfiguracije u trenutnu konfiguraciju čestica tijela $\mathcal{B}$ doživljava pomak:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}\,. \tag{2.24}$$

Takav odnos vrijedi i za druge čestice tijela tako da izraz (2.24) predstavlja *polje pomaka* tijela.

Za određivanje brzine i ubrzanja može se iskoristiti činjenica da materijalne koordinate koje prikazuju položaj čestice u referentnoj konfiguraciji ne ovise o vremenu.

Brzina čestice je derivacija vektora položaja **x** po vremenu *t*:

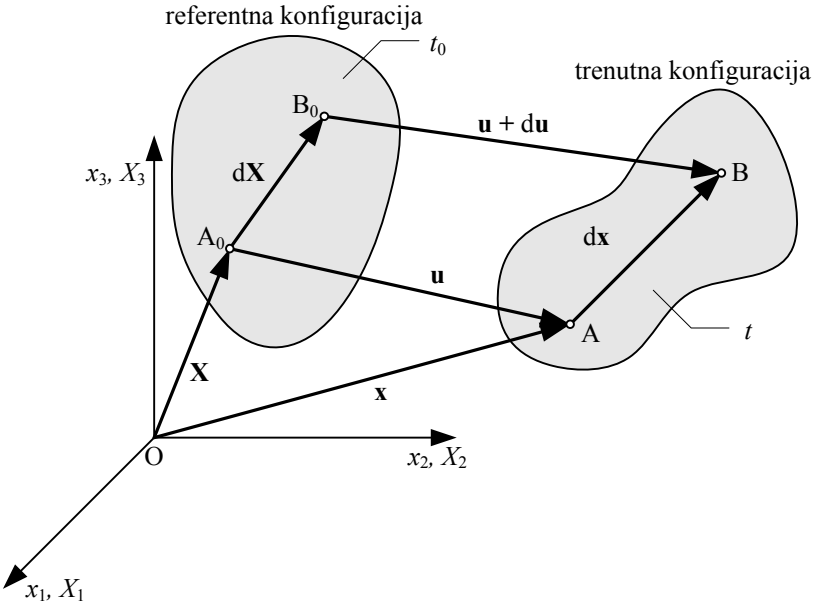
$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{u} + \mathbf{X}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{u}}\,. \tag{2.25}$$

Ubrzanje čestice je druga derivacija vektora položaja **x** po vremenu *t*:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{u}}\,. \tag{2.26}$$

2.2.3. Gradijenti deformiranja

Lokalna osobina deformacije može se razmotriti položajem dvije bliske čestice tijela $\mathcal{B}$ u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji, Sl.2.3.



Slika 2.3 – Deformiranje tijela.

Neka su dvije susjedne čestice tijela, A i B, u referentnoj konfiguraciji položaja $\mathbf{X}_\mathrm{A}$ i $\mathbf{X}_\mathrm{B}$. Položaj točke B u odnosu na točku A može se odrediti pomoću vektora linijskog elementa d**X**:

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}X_A \mathbf{E}_A, \quad A = 1,2,3. \tag{2.27}$$

Duljina vektora linijskog elementa tj. njegova *norma* ili *intenzitet* može se izraziti u kvadriranom obliku:

$$(\mathrm{d}X)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{2.28}$$

Prilikom procesa deformiranja ove čestice prelaze u položaj $\mathbf{x}_a$ i $\mathbf{x}_b$, u tom slučaju vektor linijskog elementa glasi:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x_i \mathbf{e}_i, \qquad i = 1,2,3. \tag{2.29}$$

Duljinu vektora linijskog elementa d**x** može se izraziti u kvadriranom obliku:

$$(\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.30}$$

Ako su promatrane dvije točke u referentnoj konfiguraciji *B* bile dovoljno bliske, one ostaju bliske i u trenutnoj konfiguraciji *b*. Ako se na izraz (2.22) primjeni diferencijalni računa za neprekidnu funkciju dobije se *prvi Eulerov izraz* (Truesdell & Toupin, 1960):

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{2.31}$$

Veličina **F** u prethodnom izrazu može se zapisati u simboličnom zapisu[1]:

$$\mathbf{F} = \mathrm{Grad}\,\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{x}\nabla_{\mathbf{X}} = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x})^T, \tag{2.32}$$

ili indeksnom zapisu:

$$F_{iA} = x_{i,A} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = x_i \partial_A, \tag{2.33}$$

te se naziva *materijalni tenzor gradijenta deformiranja*, ili ponekad samo *tenzor gradijenta deformiranja* ili *Lagrangeov gradijent deformiranja*.

Slijedom toga, može se definirati i matematički uvjet postojanja inverzne transformacije izraza (2.33), a to je postojanje *Jacobijeve determinante J* u svakom trenutku, tj. ako vrijedi:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right) \neq 0. \tag{2.34}$$

Veću točnost duljine vektora linijskog elementa iz izraza (2.31) može se postići korištenjem derivacije višeg reda, npr. ako se razmatra drugi red tada izraz glasi:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} + O\left(|\mathrm{d}\mathbf{X}|^2\right) \tag{2.35}$$

odnosno u razvijenom obliku:

[1] Vrijednosti Grad(•), Div(•),itd. predstavljaju derivaciju po materijalnim koordinatama.

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{X}} : \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} + O\left(\left|\mathrm{d}\mathbf{X}\right|^3\right) \tag{2.36}$$

U izrazima (2.35) i (2.36) $O(|\mathrm{d}\mathbf{X}|^2)$ i $O(|\mathrm{d}\mathbf{X}|^3)$ se odnose na članove koji imaju red veličina umnoška vektora linijskog elementa, ili višeg.

Ako se na izraz (2.23) primjeni diferencijalni račun za neprekidnu funkciju dobijemo *drugi Eulerov izraz* (Truesdell & Toupin, 1960):

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \,. \tag{2.37}$$

Veličina $\mathbf{F}^{-1}$ u prethodnom izrazu može se zapisati u simboličnom zapisu[1]:

$$\mathbf{F}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{X} \nabla_{\mathbf{x}} = \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}\right)^T \tag{2.38}$$

ili indeksnom zapisu:

$$F_{Ai} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i} = X_{A,i} = X_A \partial_i \,, \tag{2.39}$$

te se naziva *prostorni tenzor gradijenta deformiranja*, ili ponekad samo *recipročni gradijent deformiranja* ili *Eulerov gradijent deformiranja*.

2.2.4. Tenzori deformiranosti i tenzori deformacije

2.2.4.1. Tenzori deformiranosti

Prema izrazu (2.30) duljina vektora linijskog elementa u trenutnoj konfiguraciji, zapisana u kvadriranom obliku, može se izraziti pomoću diferencijalnog izraza (2.31), prema tome vrijedi:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}\right) \cdot \left(\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}\right) = \\ &= \left(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}\right) : \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \\ &= \mathbf{C} : \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

gdje je:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \,, \tag{2.41}$$

te se naziva *desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti*, prema terminologiji u literaturi (Truesdell & Noll, 1965), ili ponekad samo *Greenov tenzor deformiranosti*. Radi se o simetričnom i pozitivno definiranom tenzoru.

Prema izrazu (2.28) duljina vektora linijskog elementa u referentnoj konfiguraciji, zapisana u kvadriranom obliku, može se izraziti pomoću diferencijalnog izraza (2.37) kako slijedi:

[1] Vrijednosti grad(•), div(•),itd. predstavljaju derivaciju po prostornim koordinatama.

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}X)^2 &= \left(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\right)\cdot\left(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\right)= \\ &= \left(\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right):\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x}= \\ &= \mathbf{b}^{-1}:\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{2.42}$$

gdje je:

$$\mathbf{c}=\mathbf{b}^{-1}=\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}, \tag{2.43}$$

te se naziva *Cauchyjev tenzor deformiranosti*. Prema tome može se definirati da je:

$$\mathbf{b}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{T}, \tag{2.44}$$

što predstavlja *lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti*, prema terminologiji u literaturi (Truesdell & Noll, 1965), ili ponekad *Fingerov tenzor deformiranosti* (Lubliner, 2006, str. 468). Radi se o simetričnom i pozitivno definiranom tenzoru.

2.2.4.2. Tenzori deformacije

Radi jednostavnije primjene tenzora za određivanje deformacije, obično se koristi onaj oblik tenzora koji ima samo materijalne, ili samo prostorne indekse. Ako se zapiše razlika kvadrata duljine vektora linijskih elemenata d**x** i d**X** koji spajaju dvije infinitezimalno bliske čestice A i B (Sl. 2.3) slijedi:

$$(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}X)^2=\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}-\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.45}$$

odnosno primjenom Kroneckerovog tenzor **I**, prvog Eulerovog izraz (2.31) i tenzora deformiranosti (2.41) slijedi:

$$(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}X)^2=\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot 2\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.46}$$

gdje

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{F}-\mathbf{I}\right) \tag{2.47}$$

predstavlja *Lagrangeov tenzor deformacije*, poznat također kao *Green-Lagrangeov tenzor deformacije*.

Ako se sada zapiše razlika kvadrata duljina vektora linijskih elemenata d**x** i d**X** prema izrazu (2.45), primjenom Kroneckerovog tenzor **I**, drugog Eulerovog izraza (2.37) i tenzora deformiranosti (2.43) slijedi:

$$(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}X)^2=\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot 2\mathbf{e}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.48}$$

gdje

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right) \tag{2.49}$$

predstavlja *Eulerov tenzor deformacije*, poznat također kao *Almansi-Eulerov tenzor deformacije*.

2.2.4.3. Veza tenzora deformacije s gradijentima pomaka

Lagrangeov i Eulerov tenzor deformacije može se izraziti pomoću materijalnog, odnosno prostornog gradijenta pomaka, koji je također tenzor drugog reda.

Ako se primijeni parcijalna derivacija po materijalnim koordinatama na izraz za vektor pomaka (2.24) slijedi:

$$\operatorname{Grad}\mathbf{u} = \left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{I} = \mathbf{F} - \mathbf{I}\,, \tag{2.50}$$

što predstavlja *materijalni gradijent pomaka*. To se može i zapisati u obliku:

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{I} = \left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T + \mathbf{I}\,, \tag{2.51}$$

te uvrstiti u izraz (2.47) za Lagrangeov tenzor deformacije pa se dobije:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[\left(\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T + \mathbf{I}\right)^T \cdot \left(\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T + \mathbf{I}\right) - \mathbf{I}\right], \tag{2.52}$$

što se nakon sređivanja može napisati u simboličnom zapisu:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}\left[\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\cdot\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{Grad}\mathbf{u} + \left(\operatorname{Grad}\mathbf{u}\right)^T + \left(\operatorname{Grad}\mathbf{u}\right)^T \cdot \operatorname{Grad}\mathbf{u}\right],\end{aligned} \tag{2.53}$$

ili indeksnom zapisu:

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\left(u_{A,B} + u_{B,A} + u_{i,A}u_{i,B}\right). \tag{2.54}$$

Izrazi (2.53) i (2.54) predstavljaju Lagrangeov tenzor deformacije prikazan pomoću gradijenta pomaka.

Ako se primijeni parcijalna derivacija po prostornim koordinatama na izraz za vektor pomaka (2.24) slijedi:

$$\operatorname{grad}\mathbf{u} = \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}\,, \tag{2.55}$$

što predstavlja *prostorni gradijent pomaka*. Ako se prethodni izraz zapiše u obliku:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \operatorname{grad}\mathbf{u} = \mathbf{I} - \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T = \mathbf{I} - \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{x}}\,, \tag{2.56}$$

tada uvrštavanjem u izraz (2.49) dobije se:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T\right)^T \cdot \left(\mathbf{I} - \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathbf{I} - \mathbf{I} + \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\cdot\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T\right],\end{aligned} \tag{2.57}$$

odnosno nakon sređivanja slijedi konačan izraz u simboličnom zapisu:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}\left[\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\cdot\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\mathbf{u} + \left(\mathrm{grad}\mathbf{u}\right)^T + \left(\mathrm{grad}\mathbf{u}\right)^T\cdot\mathrm{grad}\mathbf{u}\right],\end{aligned} \tag{2.58}$$

ili indeksnom zapisu:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{A,i}u_{A,j}\right). \tag{2.59}$$

Izrazi (2.58) i (2.59) predstavljaju Eulerov tenzor deformacije prikazan pomoću gradijenta pomaka.

2.2.4.4. Tenzor infinitezimalne deformacije

Kada su vrijednosti pomaka, odnosno gradijenta pomaka vrlo male tada se u izrazima (2.53) i (2.58) može zanemariti umnoške komponenti gradijenta pomaka. Tada se ti izrazi mogu pojednostaviti na:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right)^T + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}\mathbf{u} + \left(\mathrm{Grad}\mathbf{u}\right)^T\right], \tag{2.60}$$

odnosno

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left[\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right)^T + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\mathbf{u} + \left(\mathrm{grad}\mathbf{u}\right)^T\right]. \tag{2.61}$$

Kako su vrijednosti pomaka, odnosno gradijenta pomaka vrlo male tada je razlika između materijalnih i prostornih koordinata također vrlo mala, pa Lagrangeov tenzor deformacije približno odgovara Eulerovom tenzoru deformacije, $\mathbf{E} \approx \mathbf{e}$, što se može zapisati konačnim izrazom za tenzor *infinitezimalne deformacije* $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{E} \approx \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left[\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T + \nabla\mathbf{u}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{grad}\mathbf{u} + \left(\mathrm{grad}\mathbf{u}\right)^T\right]. \tag{2.62}$$

2.2.4.5. Tenzor brzine deformacije

Nakon razmatranja raznih pristupa za opis deformacije tijela, potrebno je definirati i brzinu promjene konfiguracija. Ako se razmotri dvije susjedne čestice tijela, neka čestica A ima brzinu $\mathbf{v}$, dok čestica B ima brzinu $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$, Sl. 2.4, te stoga vrijedi:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}\,. \tag{2.63}$$

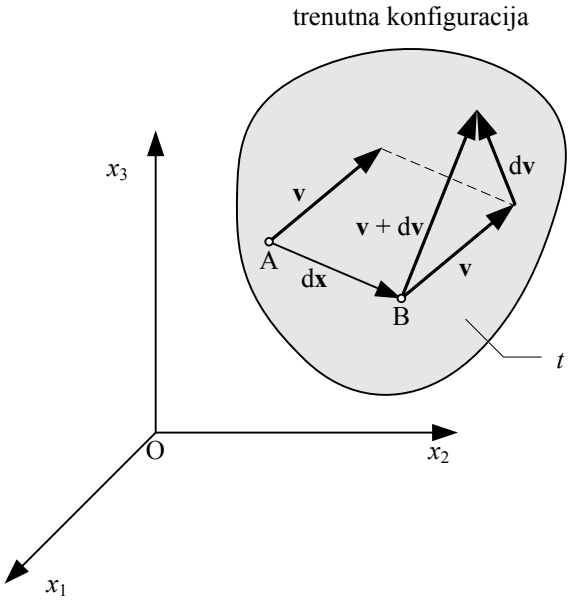
Veličina u izrazu (2.63) može se zapisati u simboličnom zapisu:

$$\boldsymbol{l} = \mathrm{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}} = \left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right)^T, \tag{2.64}$$

ili indeksnom zapisu:

$$l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = v_i \partial_j \,, \tag{2.65}$$

te se naziva *tenzor gradijenta brzine*.



Slika 2.4 – Gradijent brzine

Tenzor gradijenta brzine može se jednoznačno rastaviti na simetrični i antisimetrični dio prema izrazu (2.5) u obliku:

$$\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T\right) = \mathbf{d} + \mathbf{w} \,. \tag{2.66}$$

U izrazu (2.66) veličina **d** se može zapisati:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right)^T + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right), \tag{2.67}$$

te se naziva *tenzor brzine deformacije*, koji je simetrični tenzor, odnosno za njega vrijedi svojstvo $\mathbf{d} = \mathbf{d}^T$.

U izrazu (2.66) veličina **w** se može zapisati:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right)^T - \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right), \tag{2.68}$$

te se naziva *tenzor vrtložnosti*, koji je antisimetrični tenzor, odnosno za njega vrijedi svojstvo $\mathbf{w} = -\mathbf{w}^T$.

2.2.4.6. Veza tenzora gradijenta brzine s tenzorom gradijenta deformiranja

Uobičajeno je u literaturi izraziti tenzor gradijenta brzine tenzorom gradijenta deformiranja. Izraz za tenzor gradijenta brzine (2.64) može se preurediti pomoću izraza (2.25) te stoga slijedi:

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} . \tag{2.69}$$

Promjenom redoslijeda deriviranja, uz izraze (2.32) i (2.38) slijedi:

$$\boldsymbol{l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathbf{F} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} , \tag{2.70}$$

tj. kraće zapisano:

$$\boldsymbol{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} . \tag{2.71}$$

2.2.4.7. Tenzor zakreta i tenzor izduženja

Na tenzor gradijenta deformiranja može se primjeniti multiplikativna dekompozicija kako slijedi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} , \tag{2.72}$$

gdje je

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} = \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{T}} \tag{2.73}$$

simetrični *lijevi tenzor izduženja*, odnosno

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^{T} \cdot \mathbf{F}} \tag{2.74}$$

je simetrični *desni tenzor izduženja*, dok je **R** ortogonalni *tenzor zakreta*.

2.2.4.8. Prirodna ili logaritamska deformacija

Kod konačnih deformacija često se koristi *Henckyjev tenzor logaritamske deformacije*:

$$\mathbf{E}^{(\ln)} = \ln \mathbf{U} , \tag{2.75}$$

koji ima iste glavne pravce kao i tenzor **U**, dok se glavne vrijednosti određuju logaritmom glavnih vrijednosti desnog tenzora izduženja (Rudnicki, 2015).

2.3. Materijalno tijelo, sila i naprezanje

Konstrukcijski materijali imaju složenu mikrostrukturu, gdje se javljaju unutarnje sile poput jakih međumolekularnih sila, čiji se utjecaj na stanje naprezanja u mehanici kontinuuma općenito zanemaruje. Za razliku od tog slučaja, može se razmatrati utjecaj raznih vrsta opterećenja na ponašanje materijalnog tijela.

2.3.1. Opterećenje tijela

Na promatrano materijalno tijelo mogu djelovati mehaničke, elektromagnetske, kemijske ili neke druge sile. Ove sile, neovisno o fizičkoj prirodi, općenito se dijele na *vanjske* i *unutarnje sile*. Vanjske sile mjera su djelovanja drugih tijela na promatrano tijelo, dok su unutarnje uzrokovane međusobnim djelovanjem čestica ili dijelova tijela. Vanjske sile koje djeluju na promatrano tijelo dijele se na *volumenske* (Brnić, 1996) i *površinske (kontaktne) sile*.

Vanjske volumenske sile su sile $\Delta\mathbf{F}$ kojima udaljeno tijelo $\mathcal{B}_1$ djeluje na promatrano materijalno tijelo $\mathcal{B}$ preko malog volumenskog elementa ΔV koji sadrži točku A. Stoga se može odrediti *srednja gustoća volumenske sile*:

$$\mathbf{b}_{\mathrm{sr}} = \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta V}. \tag{2.76}$$

Odnos $\Delta\mathbf{F}/\Delta V$ je vektor koji se od vektora $\Delta\mathbf{F}$ razlikuje samo po intenzitetu. Ako opterećenje nije ravnomjerno raspodijeljeno tada se može govoriti o intenzitetu opterećenja u promatranoj točki A. Ako se volumenskom elementu, koji u sredini sadrži točku A, može smanjivati volumen ΔV prema nuli na način da on ostaje stalno volumen i obuhvaća točku A (volumen tada ne smije težiti nuli da se pretvori u element plohe ili linije), tada je pomoću granične vrijednosti moguće odrediti pravu *gustoću volumenske sile*:

$$\mathbf{b} = \lim_{\Delta V \to 0} \mathbf{b}_{\mathrm{sr}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}V}. \tag{2.77}$$

Najčešće volumenske sila su gravitacijske i inercijalne sile.

Vanjske površinske sile javljaju se kao posljedica djelovanja drugih tijela u dodiru, tj. ako se tijela dodiruju u površini ili nekom dijelu površine promatranog tijela. U specijalnom slučaju intenzitet opterećenja može biti konstantan, primjerice kada je opterećenje ravnomjerno raspoređeno po dodirnoj površini tijela (Gastev, 1966):

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{F}}{S}, \tag{2.78}$$

gdje je $\mathbf{F}$ veličina opterećenja, S površina na kojoj djeluje opterećenje. Ako opterećenje djeluje na dijelu njegove površine, *srednja gustoća površinske sile* na maloj elementarnoj površini ΔS koja u sredini sadrži točku A jest:

$$\mathbf{t}_{\mathrm{sr}} = \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}, \tag{2.79}$$

odnosno ako opterećenje nije ravnomjerno raspodijeljeno tada se može govoriti o intenzitetu opterećenja u promatranoj točki A. Ako se elementarnoj površini koja u sredini sadrži točku

A, može smanjivati površina ΔS prema nuli na način da ona ostaje stalno površina i obuhvaća točku A, tada je pomoću granične vrijednosti moguće odrediti pravu *gustoću površinske sile*:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta V \to 0} \mathbf{t}_{\mathrm{sr}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S}. \tag{2.80}$$

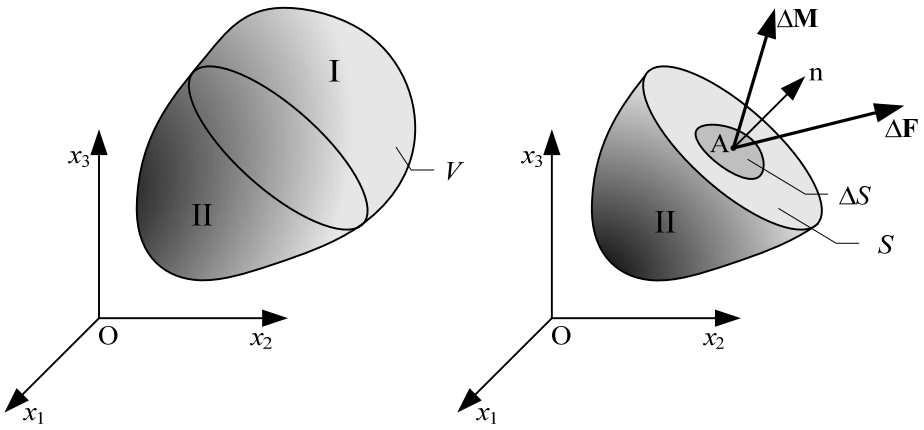
Gustoća površinske sile **t** naziva se još *kontinuirano opterećenje* ili skraćeno *trakcija*, (Alfirević, 2003) a ponekad i *kontaktno opterećenje* (Mićunović, 1990).

Ako su dimenzije površine kojoj je priloženo opterećenje male u odnosu na dimenzije tijela, tada se dimenzije tijela mogu zanemariti i opterećenje se može prikazati u vidu sile priložene u točki tijela. Takvo opterećenje se zove *koncentrirano opterećenje*.

2.3.2. Cauchyjev tenzor naprezanja

Neka se promatra deformabilno materijalno tijelo $\mathcal{B}$ koje ima zatvorenu rubnu (konturnu) površinu S i volumen V, koje je pod utjecajem proizvoljnog opterećenja silom. U trenutku kada završi proces deformiranja tada je uspostavljena ravnoteža između vanjskih i unutarnjih sila.

Ako se sada to tijelo presiječe na dva dijela ravninom kroz unutarnju točka A dobije se površina S definirana vanjskom normalom **n**. Tada se, odstranjivanjem dijela I, na dio II može postaviti uvjet ravnoteže. Da bi dio II bio u ravnoteži, na presječnoj površini S moraju se javiti unutarnje sile koje nadomještaju utjecaj odstranjenog dijela, kao što su se prije javljale površinske sile u slučaju istog opterećenja kada je tijelo bilo spojeno. Rezultanta unutarnjih sila jednaka je rezultanti vanjskog opterećenja odstranjenog dijela I, a također je jednaka rezultanti vanjskog opterećenja promatranog dijela II samo je suprotnog smjera (Sl. 2.5).



Slika 2.5 – Sila i moment na presječnoj površini.

Ako se na presječnoj površini S izdvoji elementarna površina ΔS koja sadrži točku A, redukcijom unutarnjih sila u točku A dobije se rezultirajuću silu $\Delta \mathbf{F}$ i rezultirajući moment

$\Delta\mathbf{M}$. Ako se tada elementarnoj površini koja u sredini sadrži točku A smanjuje površina ΔS prema nuli na način da ona ostane stalno površina i obuhvaća točku A, u tome je slučaju moguće pomoću granične vrijednosti odrediti (pravu) gustoću površinskih sila:

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S}, \tag{2.81}$$

i

$$\mathbf{m} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta S} = 0, \tag{2.82}$$

gdje je **t** (pravi) vektor naprezanja a **m** (pravi) spreg naprezanja. Vektor naprezanja općenito nije kolinearan sa normalom **n** presječne površine *S*, ali ovisi o smjeru normale.

Vektor naprezanja proizvoljne površine kroz točku A može se odrediti kao linearna funkcija tenzora naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ u toj točki, pomoću *Cauchyjeva zakona*:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \tag{2.83}$$

gdje $\boldsymbol{\sigma}$ predstavlja *Cauchyjev tenzor naprezanja*. Radi se o simetričnom tenzoru drugog reda, što će biti dokazano kasnije.

2.3.3. Piola-Kirchhoffovi tenzori naprezanja

Vektor naprezanja proizvoljne površine kroz točku A može se odrediti kao linearna funkcija tenzora naprezanja **P** u toj točki:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}, \tag{2.84}$$

gdje **P** predstavlja *prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja*. Prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja može se odrediti korištenjem Cauchyjevog tenzora naprezanja pomoću izraza:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \tag{2.85}$$

Radi se općenito o nesimetričnom tenzoru drugog reda. Iz praktičnih razloga je uveden simetrični *drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja*,

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \tag{2.86}$$

koji nema fizičko značenje za razliku od Cauchyjevog i prvog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja. Veza između prvog i drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja može se prikazati izrazom:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}. \tag{2.87}$$

2.3.4. Kirchhoffov tenzor naprezanja

Kirchhoffov tenzor naprezanja se dobije množenjem Cauchyjevog tenzora naprezanja sa Jacobijevov determinantom, odnosno uz korištenje izraza (2.87) slijedi:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{T}. \tag{2.88}$$

2.4. Opći zakoni mehanike kontinuuma

2.4.1. Zakon održanja mase

Realno tijelo može se smatrati *materijalnim*, ako je neprekidno i ispunjeno materijom koje ima određenu masu. Djelovanjem opterećenja materijalno tijelo mijenja svoj oblik i dimenzije u toku vremena. Pri tom se kod tijela javlja otpor protiv promjene stanja u kojem se nalazi, poznatiji kao tromost ili inercija. Masa je uzrok otpora tijela promjeni stanja.

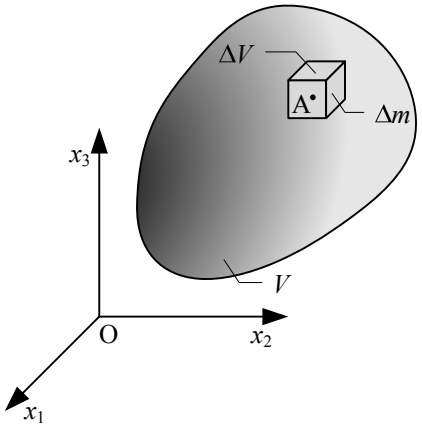
Ako masa nije jednako raspoređena po tijelu $\mathcal{B}$ onda se može odrediti *srednju gustoću mase* volumenskog elementa ΔV, mase Δm, koji u sredini sadrži točku A (Sl. 2.6):

$$\rho_{\mathrm{sr}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{2.89}$$

Položaj točke unutar volumenskog elementa ΔV određuje njenu pravu *gustoću mase*. Za slučaj točke A gustoća se može odrediti graničnom vrijednošću smanjivanjem volumenskog elementa tako da uvijek u sredini sadrži točku A:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}. \tag{2.90}$$

To znači da je masa neprekidno raspoređena, stoga se materijalno tijelo $\mathcal{B}$ volumena V može rastaviti na beskonačno mnogo infinitezimalnih volumenskih elemenata dV, mase dm, i onda se može definirati gustoću. Masa i gustoća skalarne su veličine.



Slika 2.6 – Materijalno tijelo sa volumenskim elementom.

Ukupna masa tijela može se odrediti integralom:

$$m = \int_V \mathrm{d}m = \int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{2.91}$$

Ukupna masa tijela ne mijenja se prilikom deformiranja tijela, što znači da se radi o skalarnoj invarijanti, tj. m = konst. Stoga se može definirati *globalni zakon očuvanja mase*:

$$m = \int_{V_0} \rho_0 \mathrm{d}V_0 = \int_V \rho \mathrm{d}V \,, \tag{2.92}$$

gdje su ρ_0 i ρ gustoće u referentnoj odnosno trenutnoj konfiguraciji. Vezu elementarnog volumena u trenutnoj konfiguraciji u odnosu na elementarni volumen u referentnoj konfiguraciji može se izraziti pomoću Jacobijeve determinante odnosno pomoću tenzora gradijenta deformiranja:

$$\mathrm{d}V = J\mathrm{d}V_0 = \det(\mathbf{F})V_0 \,. \tag{2.93}$$

Posebni je slučaj tzv. *izohorno deformiranje* (J = 1), tj. tada nema promjene volumena tijekom deformacije.

Prema tome izraz (2.92) može se zapisati:

$$\int_{V_0} (\rho_0 - \rho J)\mathrm{d}V_0 = 0 \,. \tag{2.94}$$

Ako izraz (2.94) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, tada se iz tog uvjeta dobije *lokalni zakon očuvanja mase*:

$$\rho_0 = J\rho \,, \tag{2.95}$$

odnosno:

$$\rho = J^{-1}\rho_0 \,. \tag{2.96}$$

Kod izohorne deformacije također vrijedi da je $\rho_0 = \rho$.

Kako je gustoća prilikom deformacije ili gibanja tijela funkcija prostorne koordinate **x** i vremena t izraz (2.92) može se derivirati po vremenu pomoću *operatora materijalnog deriviranja*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \,, \tag{2.97}$$

te se tada dobije Eulerovu *globalnu jednadžbu kontinuiteta*:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathrm{d}V = \int_V (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathrm{d}V = 0 \,. \tag{2.98}$$

Ako izraz (2.98) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, tada se iz tog uvjeta dobije *lokalni zakon očuvanja mase*:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \,. \tag{2.99}$$

2.4.2. Zakon održanja količine gibanja

Ako na tijelo sa trenutnim volumenom V djeluje volumenska sila **b**, a na graničnoj zatvorenoj površini S se javlja naprezanje, to uzrokuje promjenu količine gibanja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \int_V \rho\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_S \mathbf{t}\,\mathrm{d}S\ , \tag{2.100}$$

što predstavlja *globalni zakon održanja količine gibanja*. Ako se u gornjem izrazu uvrsti izraz (2.83) uz korištenje Gaussovog teorema o divergenciji, izraz (2.16), slijedi:

$$\begin{aligned}&\int_V \rho\,\dot{\mathbf{v}}\,\mathrm{d}V = \int_V \rho\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V,\\ &\int_V \left(\rho\,\dot{\mathbf{v}} - \rho\,\mathbf{b} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathrm{d}V = 0.\end{aligned} \tag{2.101}$$

Ako izraz (2.101) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, tada se iz tog uvjeta dobije *lokalni zakon održanja količine gibanja* odnosno *Cauchyjev prvi zakon gibanja*:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\mathbf{b} = \rho\,\dot{\mathbf{v}}\ . \tag{2.102}$$

Ako promatramo tijelo sa referentnim volumenom V_0 na koje djeluje volumenska sila **B**, sa graničnom zatvorenom površinom S_0 gdje se javlja naprezanje, to uzrokuje promjenu (prirast) količine gibanja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_0} \rho_0\,\mathbf{V}\,\mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho_0\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}V_0 + \int_{S_0} \mathbf{p}\,\mathrm{d}S_0\,, \tag{2.103}$$

što predstavlja drugi oblik *zakona održanja količine gibanja*. Iz tog izraza slijedi također i *lokalni zakon održanja količine gibanja*:

$$\operatorname{Div}\mathbf{P} + \rho_0\,\mathbf{B} = \rho_0\,\dot{\mathbf{V}}\ . \tag{2.104}$$

2.4.3. Zakon održanja momenta količine gibanja

Ako se postavi da je promjena momenta količine gibanja u odnosu na određenu točku u trenutnoj konfiguraciji jednaka ukupnom momentu volumenskih sila i površinskih sila na graničnoj zatvorenoj površini, dobije se izraz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathbf{x}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \int_V \rho\,\mathbf{x}\times\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_A \mathbf{x}\times\mathbf{t}\,\mathrm{d}A\,, \tag{2.105}$$

što predstavlja *globalni zakona momenta količine gibanja*. Ako se u gornjem izrazu uvrsti izraz (2.83) uz korištenje Gaussovog teorema o divergenciji, izraz (2.16), slijedi:

$$\begin{aligned}&\int_V \rho\mathbf{x}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \int_V \rho\mathbf{x}\times\mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \int_V \left(\operatorname{div}\left(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}\right)\right)\mathrm{d}V,\\ &\int_V \mathbf{x}\times\underbrace{\left(\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \rho\mathbf{b} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\right)}_{=\mathbf{0}}\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{e}_{ijk}\sigma_{kj}\,\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{2.106}$$

odnosno:

$$\int_V \mathrm{e}_{ijk}\sigma_{kj}\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{2.107}$$

Ako izraz (2.107) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, tada se iz tog uvjeta dobije *lokalni zakon momenta količine gibanja* odnosno *Cauchyjev drugi zakon gibanja* koji se svodi na simetriju tenzora naprezanja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T . \tag{2.108}$$

Drugi *lokalni zakon momenta količine gibanja* može se zapisati u odnosu na referentnu konfiguraciju pomoću izraza:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T , \tag{2.109}$$

odnosno:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T . \tag{2.110}$$

2.4.4. Prvi zakon termodinamike

Neka se promatra tijelo s trenutnim volumenom V i graničnom zatvorenom površinom S. Kinetička energija je:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}V . \tag{2.111}$$

Unutarnja energija je:

$$\mathcal{E} = \int_V \rho e \mathrm{d}V , \tag{2.112}$$

gdje e predstavlja predstavlja specifičnu unutarnju energiju, koja se prvenstveno odnosi u ovome razmatranju na energiju mehaničkog i toplinskog (termičkog) porijekla.

Tijelu dovedena toplina može se odrediti pomoću izraza:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\mathrm{b} + \mathcal{Q}_\mathrm{c} = \int_V \rho r \mathrm{d}V - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S , \tag{2.113}$$

gdje $\mathcal{Q}_\mathrm{b}$ predstavlja dovedenu toplinu iz toplinskih izvora, npr. zračenjem (radijacijom) sa veće udaljenosti te se izražava specifičnom snagom izvora topline r po jedinici mase, dok $\mathcal{Q}_\mathrm{c}$ predstavlja dovedenu toplinu na kraćim udaljenostima toplinskim tokom, koja se razvija u točkama granične površine tijela prijenosom topline kondukcijom ili konvekcijom, te se izražava vektorom gustoće toplinskog toka $\mathbf{q}$ i vanjskom normalom $\mathbf{n}$ na elementarnu površinu.

Mehanička snaga vanjskih sila može se odrediti izrazom:

$$\mathcal{P} = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV , \tag{2.114}$$

gdje prvi dio određuje snagu površinskih sila, dok drugi dio snagu volumenskih sila. *Prvi zakon termodinamike* ili *zakon o održanju energije* može se izraziti u sljedećem obliku:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{K}+\mathcal{E}\right)=\mathcal{P}+\mathcal{Q}, \tag{2.115}$$

Ako se sada uvrsti izraz (2.83) uz korištenje Gaussovog teorema o divergenciji, izraz (2.16), slijedi:

$$\begin{aligned}&\int_V \mathbf{v}\cdot\rho\dot{\mathbf{v}}\mathrm{d}V+\int_V \rho\dot{e}\mathrm{d}V=\int_S \mathbf{v}\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right)dS+\int_V \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV+\int_V \rho r\mathrm{d}V-\int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S,\\&\int_V \mathbf{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V+\int_V \rho\dot{e}\mathrm{d}V=\int_V \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\right)dV+\int_V \rho r\mathrm{d}V-\int_V \mathrm{div}\mathbf{q}dV.\end{aligned} \tag{2.116}$$

Pravilo umnoška može se zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\right)&=\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma},\\\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}&=\mathrm{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\right)-\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{2.117}$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u izraz (2.116) slijedi:

$$\begin{aligned}&\int_V \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\right)dV-\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}\mathbf{v}dV+\int_V \rho\dot{e}\mathrm{d}V=\int_V \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}\right)dV+\int_V \rho r\mathrm{d}V-\int_V \mathrm{div}\mathbf{q}dV,\\&\int_V \rho\dot{e}\mathrm{d}V=\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{l}dV+\int_V \rho r\mathrm{d}V-\int_V \mathrm{div}\mathbf{q}dV,\end{aligned} \tag{2.118}$$

odnosno uz korištenje izraza (2.66) uz uvjet (2.6) slijedi:

$$\int_V \rho\dot{e}\mathrm{d}V=\int_V \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}dV+\int_V \rho r\mathrm{d}V-\int_V \mathrm{div}\mathbf{q}dV\ . \tag{2.119}$$

Ako izraz (2.119) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, tada se iz tog uvjeta dobije *lokalni zakon o održanju energije*, zapisan u odnosu na trenutnu konfiguraciju:

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}+\rho r-\mathrm{div}\mathbf{q}\ . \tag{2.120}$$

Prethodna jednadžba može se izraziti također i prema referentnoj konfiguraciji. Veza između pojedinih veličina u referentnoj i u trenutnoj konfiguraciji određuje se prema izrazima (Marsden & Hughes, 1983):

- specifična unutarnja energija, $E\left(X,t\right)=e\left(x,t\right)$,
- specifična snaga izvora topline, $R\left(X,t\right)=r\left(x,t\right)$,
- vektor gustoće toplinskog toka, $\mathbf{Q}\left(X,t\right)=J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{q}\left(x,t\right)$, uz odnos $\mathrm{Div}\,\mathbf{Q}=J\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}$,
- lokalni zakon očuvanja mase, izraz (2.95).

Uvrštavanjem navedenih izraza u lokalni zakon o održanju energije, izraz (2.120), koja se prethodno pomnoži sa Jacobijevom determinantom J, slijedi:

$$\begin{aligned}J\rho\dot{e}&=J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}+J\rho r-J\mathrm{div}\mathbf{q},\\\rho_0\dot{E}&=J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}+\rho_0 R-\mathrm{Div}\mathbf{Q}.\end{aligned} \tag{2.121}$$

Derivacija po vremenu tenzora gradijenta deformiranja definiranog izrazom (2.32) može se zapisati:

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} . \tag{2.122}$$

Korištenjem izraza (2.87), (2.88) i (2.122) slijedi:

$$J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} . \tag{2.123}$$

Derivacijom desnog Cauchy-Greenova tenzora deformiranosti po vremenu, izraz (2.41), uz korištenje izraza (2.66) slijedi:

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{D}, \tag{2.124}$$

gdje

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \tag{2.125}$$

predstavlja *materijalni tenzor brzine deformacije*. Izraz (2.123) se može preurediti pomoću izraza (2.87) i (2.88) te se tada može pisati:

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T\right) : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \left(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}\right), \tag{2.126}$$

što se u konačnom obliku može transformirati:

$$\mathscr{P}_{\text{int}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{S} : \mathbf{D} . \tag{2.127}$$

što predstavlja *snagu naprezanja* (eng. *stress power*).

Prema tome slijedi drugi oblik *lokalnog zakona o održanju energije*, zapisan u odnosu na referentnu konfiguraciju:

$$\rho_0 \dot{E} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R - \text{Div}\mathbf{Q} , \tag{2.128}$$

odnosno

$$\rho_0 \dot{E} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} + \rho_0 R - \text{Div}\mathbf{Q} . \tag{2.129}$$

2.4.5. Drugi zakon termodinamike

Nepovrativost različitih procesa možemo izraziti pomoću entropije. Entropija definira prirast dovedene topline u odnosu na apsolutnu temperaturu. Na tijelu trenutnog volumena V entropija se definira kako slijedi:

$$\mathscr{N} = \int_V \rho\eta \mathrm{d}V . \tag{2.130}$$

Ako je proces nepovrativ dolazi do stvaranja entropije koja je uvijek veća ili jednaka brzini promjene dovedene topline u odnosu na apsolutnu temperaturu θ:

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{N}}{\mathrm{d}t} \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} \mathrm{d}V - \int_S \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \mathrm{d}S , \tag{2.131}$$

što predstavlja *globalni drugi zakon termodinamike* odnosno *Clausius-Duhemovu nejednadžbu* ili *nejednadžbu proizvodnje entropije* zapisanu u odnosu na trenutnu konfiguraciju. Prethodna jednadžba može se pojednostaviti uvrštavanjem izraza (2.130) uz korištenje Gaussovog teorema o divergenciji, izraz (2.16):

$$\begin{aligned} &\int_V \rho \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} \mathrm{d}V - \int_S \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S, \\ &\int_V \left(\rho \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \rho \frac{r}{\theta} \right) \mathrm{d}V \geq 0. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Ako nejednadžba $(2.132)_2$ vrijedi za cijelo materijalno tijelo, iz tog se uvjeta dobije *lokalnu nejednadžbu proizvodnje entropije*, zapisanu u odnosu na trenutnu konfiguraciju:

$$\rho \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 . \tag{2.133}$$

Pri tome vrijedi pravilo umnoška:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \mathrm{div}\left(\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \right) = \frac{1}{\theta} \mathrm{div}\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathrm{grad} \frac{1}{\theta}, \tag{2.134}$$

odnosno uz

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad}\left(\frac{1}{\theta} \theta \right) = \theta \mathrm{grad} \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} \mathrm{grad}\theta = \mathbf{0}, \\ &\mathrm{grad} \frac{1}{\theta} = -\frac{1}{\theta^2} \mathrm{grad}\theta, \end{aligned} \tag{2.135}$$

slijedi

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \mathrm{div}\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{\theta^2} \cdot \mathrm{grad}\theta . \tag{2.136}$$

Ako se izraz (2.136) uvrsti u (2.133) slijedi

$$\rho \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\theta} \mathrm{div}\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}}{\theta^2} \cdot \mathrm{grad}\theta - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 . \tag{2.137}$$

Prethodni izraz može se zapisati u razvijenom obliku uvrštavanjem zakona o održanju energije, izraz (2.120):

$$\rho \left(\theta \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathrm{grad}\theta \geq 0. \tag{2.138}$$

Helmholtzova slobodna energija predstavlja potencijal za termodinamičko naprezanje:

$$\psi = e - \theta\eta . \tag{2.139}$$

Na prethodni izraz može se primijeniti diferencijalni račun:

$$\theta \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \eta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right). \tag{2.140}$$

Ako se to uvrsti u izraz (2.140) dobije se drugi oblik Clausius-Duhemove nejednadžbe koja sadrži i termodinamički potencijal u obliku Helmholtzove slobodne energije:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \eta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right) - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathrm{grad}\theta \geq 0 . \tag{2.141}$$

Entropija na tijelu referentnog volumena V_0 može se definirati kako slijedi:

$$\mathcal{N}_0 = \int_{V_0} \rho_0 N \mathrm{d}V_0 . \tag{2.142}$$

Kod nepovrativog procesa dolazi do stvaranja entropije koje je uvijek veće ili jednako brzini promjene dovedene topline u odnosu na apsolutnu temperaturu Θ:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}_0}{\mathrm{d}t} \geq \int_{V_0} \rho_0 \frac{R}{\Theta} \mathrm{d}V_0 - \int_{S_0} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}}{\Theta} \mathrm{d}S_0 , \tag{2.143}$$

što predstavlja *globalni drugi zakon termodinamike* odnosno *Clausius-Duhemovu nejednadžbu* ili *nejednadžbu proizvodnje entropije* zapisanu u odnosu na referentnu konfiguraciju. Prethodna jednadžba može se pojednostaviti uvrštavanjem izraza (2.142) uz korištenje Gaussovog teorema o divergenciji, izraz (2.16):

$$\int_V \left(\rho_0 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) - \rho_0 \frac{R}{\Theta} \right) \mathrm{d}V \geq 0. \tag{2.144}$$

Budući da nejednadžba (2.144) vrijedi za cijelo materijalno tijelo, iz tog se uvjeta dobije *lokalnu nejednadžbu proizvodnje entropije*, zapisanu u odnosu na referentnu konfiguraciju:

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) - \rho_0 \frac{R}{\Theta} \geq 0 . \tag{2.145}$$

Pri tome vrijedi pravilo umnoška:

$$\mathrm{Div}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) = \mathrm{Div}\left(\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \right) = \frac{1}{\Theta} \mathrm{Div}\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \mathrm{Grad}\frac{1}{\Theta} , \tag{2.146}$$

odnosno uz

$$\mathrm{Grad}\frac{1}{\Theta} = -\frac{1}{\Theta^2} \mathrm{Grad}\Theta \tag{2.147}$$

slijedi

$$\mathrm{Div}\left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) = \frac{1}{\Theta} \mathrm{Div}\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2} \cdot \mathrm{Grad}\Theta . \tag{2.148}$$

Ako se izraz (2.148) uvrsti u (2.145) slijedi

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\Theta}\mathrm{Div}\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2}\cdot\mathrm{Grad}\Theta - \rho_0 \frac{R}{\Theta} \geq 0\,. \tag{2.149}$$

Prethodni izraz može se zapisati u razvijenom obliku uvrštavanjem zakona o održanju energije, izraz (2.129):

$$\rho_0\left(\Theta\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}\cdot\mathrm{Grad}\Theta \geq 0. \tag{2.150}$$

Helmholtzova slobodna energija predstavlja potencijal za termodinamičko naprezanje:

$$\Psi = E - \Theta N\,. \tag{2.151}$$

Na prethodni izraz može se primijeniti diferencijalni račun:

$$\Theta\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right). \tag{2.152}$$

Ako se to uvrsti u izraz (2.150) dobije se drugi oblik Clausius-Duhemove nejednadžbe koja sadrži i termodinamički potencijal u obliku Helmholtzove slobodne energije:

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}\cdot\mathrm{Grad}\Theta \geq 0\,. \tag{2.153}$$

Izraz (2.153) se može zapisati u obliku:

$$D = \rho_0\Theta\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div}\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}\cdot\mathrm{Grad}\Theta - \rho_0 R \geq 0\,, \tag{2.154}$$

gdje je *D ukupna disipacija*. Ukupna disipacija se sastoji od *(lokalne) unutarnje disipacije* ili *mehaničke disipacije* D_{int} i *disipacije nastale radi provođenja topline* odnosno *termičke disipacije* D_{con}:

$$D = D_{\mathrm{int}} + D_{\mathrm{con}}\,, \tag{2.155}$$

$$D_{\mathrm{int}} = \rho_0\Theta\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \mathrm{Div}\mathbf{Q} - \rho_0 R \geq 0\,, \tag{2.156}$$

$$D_{\mathrm{con}} = -\frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2}\cdot\mathrm{Grad}\Theta\,. \tag{2.157}$$

2.4.6. Termodinamički potencijali i jednadžbe stanja

Izraz (2.152) može se zapisati u kraćem razvijenom obliku:

$$\Theta\dot{N} = \dot{E} - N\dot{\Theta} - \dot{\Psi}. \tag{2.158}$$

Ako se to uvrsti u izraz (2.156) slijedi:

$$D_{\mathrm{int}} = \rho_0\dot{E} - \rho_0 N\dot{\Theta} - \rho_0\dot{\Psi} + \mathrm{Div}\mathbf{Q} - \rho_0 R \geq 0\,, \tag{2.159}$$

odnosno uz transformiranje izraza (2.129) dobije se:

$$D_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 N\dot{\Theta} - \rho_0\dot{\Psi} \geq 0\,. \tag{2.160}$$

Termodinamičko podstanje sustava je funkcija parametara podstanja. U slučaju termoplastičnosti Helmholtzovu slobodnu energiju možemo zapisati kao funkciju parametara podstanja, odnosno $\Psi = \Psi(\mathbf{C}_e, \boldsymbol{\alpha}, \Theta)$, gdje je $\mathbf{C}_e$ *elastični desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti*, $\boldsymbol{\alpha}$ parametar očvršćenja (ovisi o povijesti ili promjeni plastične deformacije, (Alfirević, 2003)). Promjena Helmholtzove slobodne energije glasi:

$$\dot{\Psi} = \partial_{\mathbf{C}_e}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_e + \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \partial_{\Theta}\Psi\,\dot{\Theta}. \tag{2.161}$$

Ako se gornja jednadžba uvrsti u izraz (2.160) slijedi:

$$D_{\text{int}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 N\dot{\Theta} - \rho_0\left(\partial_{\mathbf{C}_e}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_e + \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \partial_{\Theta}\Psi\,\dot{\Theta}\right) \geq 0\,. \tag{2.162}$$

U slučaju velikih deformacija, materijalni tenzor gradijenta deformiranja može se prikazati kao umnožak elastičnog i plastičnog dijela tzv. *Kröner-Leejevom multiplikativnom dekompozicijom* (Kröner, 1959; Lee, 1969):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p\,. \tag{2.163}$$

Aditivnom dekompozicijom tenzor brzine deformacije razlaže se na elastični i plastični dio:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p\,. \tag{2.164}$$

Elastični tenzor gradijenta brzine dan je izrazom:

$$\boldsymbol{l}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{F}_e^{-1}\,. \tag{2.165}$$

čiji simetrični dio predstavlja *elastični tenzor brzine deformacije*:

$$\mathbf{d}_e = \text{sym}(\mathbf{l}_e) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l}_e + \mathbf{l}_e^T\right). \tag{2.166}$$

Brzina plastične distorzije (Mandel, 1972):

$$\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}\,. \tag{2.167}$$

Plastični tenzor gradijenta brzine određen je izrazom:

$$\mathbf{l}_p = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{L}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \tag{2.168}$$

čiji simetrični dio predstavlja plastični tenzor brzine deformacije:

$$\mathbf{d}_p = \text{sym}(\mathbf{l}_p) = \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \text{sym}(\mathbf{C}_e \cdot \mathbf{L}_p) \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \tag{2.169}$$

simetrični dio umnoška $\mathbf{C}_e$ i $\mathbf{L}_p$ zapišemo pomoću tenzora:

$$\mathbf{D}_p = \text{sym}(\mathbf{C}_e \cdot \mathbf{L}_p), \tag{2.170}$$

odnosno ako se taj izraz vrati u izraz (2.169) dobije se pojednostavljeni oblik plastičnog tenzora brzine deformacije:

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1}\,. \tag{2.171}$$

Elastični desni Cauchy-Greenov tenzor brzine deformiranosti može se zapisati:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}, \tag{2.172}$$

iz čega derivacijom slijedi:

$$\dot{\mathbf{C}}_{\mathrm{e}} = 2\mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T} \cdot \mathbf{d}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \tag{2.173}$$

Izraz (2.162) može se zapisati uz korištenje izraza (2.164) i (2.173):

$$D_{\mathrm{int}} = \left\{\boldsymbol{\tau} - \rho_0 \left(2\mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \partial_{\mathbf{C}_{\mathrm{e}}} \Psi \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T}\right)\right\} : \mathbf{d}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_{\mathrm{p}} - \rho_0 \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \rho_0 \left(N + \partial_{\Theta} \Psi\right)\dot{\Theta} \geq 0. \tag{2.174}$$

Ako se razmotri hipotetski termodinamički proces u kojem elastična deformacija nastupa pri konstantnoj i jednolikoj temperaturi ($\dot{\Theta} = 0$, $\mathrm{Grad}\Theta = \mathbf{0}$) bez plastične deformacije ($\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$), prema tome prethodna jednadžba poprima pojednostavljeni oblik:

$$D_{\mathrm{int}} = \left\{\boldsymbol{\tau} - \rho_0 \left(2\mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \partial_{\mathbf{C}_{\mathrm{e}}} \Psi \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T}\right)\right\} : \mathbf{d}_{\mathrm{e}} = 0, \tag{2.175}$$

čime se dobiva konstitutivna relacija za naprezanje:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 2\mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \partial_{\mathbf{C}_{\mathrm{e}}} \Psi \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T}. \tag{2.176}$$

Razmotri li se pak drugi hipotetski proces – čistu termičku (toplinsku) deformaciju bez pojave naprezanja uz $\mathrm{Grad}\Theta = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_{\mathrm{p}} = \mathbf{0}$, pri proizvoljnoj temperaturi, dolazi se do definicije entropije:

$$\begin{aligned} &D_{\mathrm{int}} = \rho_0 \left(N + \partial_{\Theta} \Psi\right)\dot{\Theta} \geq 0, \\ &N = -\partial_{\Theta} \Psi. \end{aligned} \tag{2.177}$$

Prema izrazu (2.171) vrijedi:

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_{\mathrm{p}} = \mathbf{S}_{\mathrm{e}} : \mathbf{D}_{\mathrm{p}}, \tag{2.178}$$

gdje je simetrični *elastični drugi Piola-Kirchhoffov tenzor* definiran izrazom:

$$\mathbf{S}_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{-T} = \rho_0 2\partial_{\mathbf{C}_{\mathrm{e}}} \Psi. \tag{2.179}$$

Kinematička varijabla može se pridružiti parametru očvršćenja $\boldsymbol{\alpha}$, što se može zapisati:

$$\mathbf{Q} = -\rho_0 \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi. \tag{2.180}$$

Ako se to zajedno sa izrazom (2.178) uvrsti u pojednostavljeni izraz (2.174) slijedi:

$$\begin{aligned} &D_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_{\mathrm{p}} + \mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0, \\ &D_{\mathrm{int}} = \left(\mathbf{C}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{e}}\right) : \mathbf{L}_{\mathrm{p}} + \mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.181}$$

Mandelov tenzor naprezanja (općenito nesimetrični tenzor) može se zapisati sljedećim izrazom:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{S}_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{-T} = \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{T} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{e}}^{-T}, \tag{2.182}$$

za koji vrijedi uvjet simetrije $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{T} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{e}}^{-1}$. Tada je moguće zapisati konačni izraz za disipaciju pomoću Mandelovog tenzora, koji glasi:

$$D_{\text{int}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_p + \mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \,. \tag{2.183}$$

2.4.7. Evolucija temperature pri plastičnim deformacijama

Kod nepovrativih procesa, kao što su plastična deformacija, trenje, itd., dolazi do disipacije mehaničke energije koja se pretvara u toplinu. Budući da se radi o nepovrativom, odnosno ireverzibilnom procesu, sustav se tada nemože vratiti u početno stanje (Thomson, 1882, čl. LIX).

Izraz (2.158) može se zapisati u obliku:

$$\dot{E} = \Theta\dot{N} + N\dot{\Theta} + \dot{\Psi} \,. \tag{2.184}$$

Ako se izraz (2.184) uvrsti u (2.128) dobije se:

$$\rho_0\Theta\dot{N} + \rho_0 N\dot{\Theta} + \rho_0\dot{\Psi} + \text{Div}\mathbf{Q} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R. \tag{2.185}$$

Helmholtzovu slobodnu energiju moguće je također izraziti kao funkciju parametara podstanja, koja za slučaj termoplastičnosti glasi $\Psi = \Psi\left(\mathbf{C}_\text{e}, \boldsymbol{\alpha}, \Theta\right)$. U izrazu (2.161) za promjenu Helmholtzove slobodne energije nalazi se dio koji definira entropiju, izraz (2.177) koji deriviran po vremenu može se pisati:

$$\dot{N} = -\partial_\Theta\dot{\Psi} \,. \tag{2.186}$$

Prema izrazu (2.185), uvrštavanjem izraza (2.177), (2.186) i (2.161) slijedi:

$$\begin{aligned} &-\rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\mathbf{C}_\text{e}}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_\text{e} - \rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\boldsymbol{\alpha}}\Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\Theta}\Psi\dot{\Theta} + \\ &\qquad + \rho_0\partial_{\mathbf{C}_\text{e}}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_\text{e} + \rho_0\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \text{Div}\mathbf{Q} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R, \end{aligned} \tag{2.187}$$

Kod deformacije u slučaju termoplastičnosti dolazi do pojave *strukturalnog grijanja* (eng. *structural heating*) koje opisuje elastične i plastične promjene u tijelu:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\text{heat} &= \mathcal{H}^\text{e}_\text{heat} + \mathcal{H}^\text{p}_\text{heat}, \\ \mathcal{H}^\text{e}_\text{heat} &= -\rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\mathbf{C}_\text{e}}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_\text{e}, \\ \mathcal{H}^\text{p}_\text{heat} &= -\rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\boldsymbol{\alpha}}\Psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.188}$$

Prvi član $\mathcal{H}^\text{e}_\text{heat}$ predstavlja evoluciju temperature uslijed elastične deformacije, čiji je utjecaj eksperimentalno istražio i objavio u literaturi W. Thomson (Lord Kelvin) (Thomson, 1882, čl. XLVIII). Budući da se radi o malenom utjecaju na evoluciju temperature, ovaj član se najčešće zanemaruje. Drugi član $\mathcal{H}^\text{p}_\text{heat}$ predstavlja evoluciju temperature uslijed plastične deformacije, koja nastaje radi utjecaja temperature na parametre materijala. Kod metala se taj utjecaj najčešće zanemaruje (Čanađija, 2014), odnosno temperatura ne utječe na očvršćenje ($\partial^2_{\Theta\boldsymbol{\alpha}}\Psi = \mathbf{0}$), prema tome vrijedi:

$$\mathcal{H}_\text{heat} = \mathcal{H}^\text{e}_\text{heat} = -\rho_0\Theta\partial^2_{\Theta\mathbf{C}_\text{e}}\Psi : \dot{\mathbf{C}}_\text{e} \,. \tag{2.189}$$

Pri konstantnoj deformaciji i konstantnim parametrima podstanja može se također definirati *specifični toplinski kapacitet* (eng. *specific heat*) po jedinici mase:

$$c = -\Theta \partial^2_{\Theta\Theta} \Psi \,. \tag{2.190}$$

Ako se izraze (2.188) i (2.190) uvrsti u jednadžbu (2.187) slijedi:

$$\mathcal{H}_{\text{heat}} + \rho_0 c\dot{\Theta} + \rho_0 \partial_{\mathbf{C}_\text{e}} \psi : \dot{\mathbf{C}}_\text{e} + \rho_0 \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \text{Div}\mathbf{Q} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R \,. \tag{2.191}$$

Nakon sređivanja izraza (2.179) slijedi:

$$\frac{1}{2}\mathbf{S}_\text{e} = \rho_0 \partial_{\mathbf{C}_\text{e}} \Psi. \tag{2.192}$$

odnosno kada se gornji izraz uvrsti u (2.191) dobije se:

$$\mathcal{H}_{\text{heat}} + \rho_0 c\dot{\Theta} + \frac{1}{2}\mathbf{S}_e : \dot{\mathbf{C}}_e + \rho_0 \partial_{\boldsymbol{\alpha}} \psi : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \text{Div}\mathbf{Q} = \mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R \,. \tag{2.193}$$

Budući da vrijede jednakosti:

$$\mathbf{S}_\text{e} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}_\text{e} = \mathbf{S}_\text{e} : \mathbf{D}_\text{e} \,, \tag{2.194}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_\text{p} = \mathbf{S} : \mathbf{D} - \mathbf{S}_\text{e} : \mathbf{D}_\text{e} \,, \tag{2.195}$$

pomoću izraza (2.180) i (2.195) se dobije:

$$\mathcal{H}_{\text{heat}} + \rho_0 c\dot{\Theta} - \mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \text{Div}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_\text{p} + \rho_0 R, \tag{2.196}$$

odnosno uz korištenje izraza (2.183) slijedi jednadžba:

$$\rho_0 c\dot{\Theta} = \rho_0 R - \text{Div}\mathbf{Q} - \mathcal{H}_{\text{heat}} + D_{\text{int}} \,. \tag{2.197}$$

Izraz (2.197) predstavlja *toplinsku jednadžbu* koja služi za određivanje evolucije temperature uslijed plastične deformacije materijala. U slučaju adijabatskog procesa (Div$\mathbf{Q}$ = 0) bez vanjskog izvora topline (R = 0), izraz (2.197) može se kraće zapisati ako se usvoji pretpostavka da je kod metala mala promjena temperature bez utjecaja na mehaničke parametre ($\mathcal{H}_{\text{heat}}$ = 0) te ako se također zanemari dio vezan uz očvršćenje ($\mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \approx 0$), odnosno

$$\rho_0 c\dot{\Theta} = D_{\text{int}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_p = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_p \,. \tag{2.198}$$

2.4.8. Disipacija

Prilikom cikličkog opterećenja, kao i tijekom obrade materijala poput valjanja i ekstruzije, dolazi do disipacije rada elastoplastičnog materijala, odnosno dio mehaničkog rada pretvara se u toplinu koju tijelo predaje okolini, a u samome materijalu dolazi do očvršćenja. Kod takvih trajnih deformacija dolazi do razlike između rada vanjskih sila i deformacije samog tijela, odnosno dolazi do promjene unutarnje energije materijala u vidu povećanja temperature

(Farren & Taylor, 1925). Ta energija koja se razvija u tijelu kod očvršćenja naziva se *latentna toplinska energija* (eng. *latent heat*).

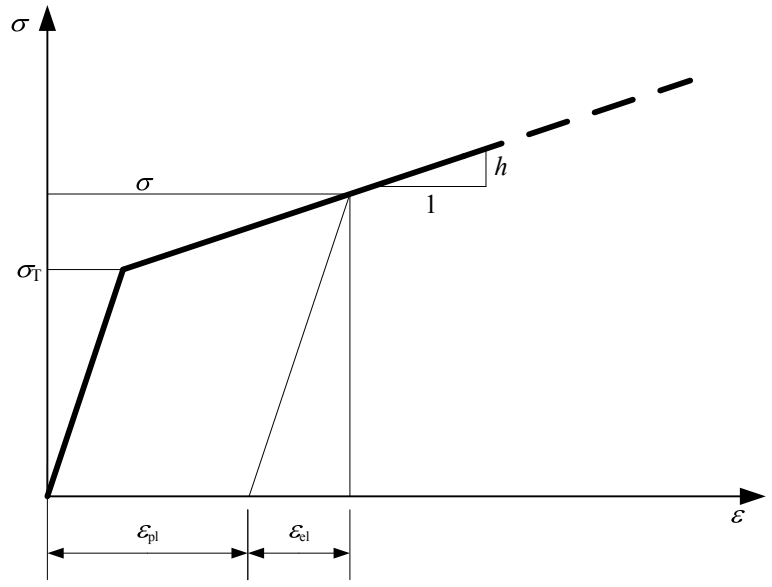
Taylor-Quinneyjev oblik jednadžbe za određivanje disipacije glasi:

$$D_{\text{int}} = \beta\, \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_{\text{p}} = \beta\, \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_{p}\,, \tag{2.199}$$

gdje β predstavlja tzv. *Taylor-Quinneyjev faktor*, koji je za metale najčešće između 0,85 i 0,95 (Taylor & Quinney, 1934; Hakansson et. al., 2008).

2.4.9. Plastično deformiranje i funkcija tečenja

Kod jednoosnog stanja naprezanja uvjet tečenja materijala predstavlja naprezanje na granici tečenja (eng. *yield stress*), odnosno $\sigma = \sigma_{\text{T}}$. Model elastičnog-linearno očvršćujućeg materijala shematski može se prikazati prema Sl. 2.7.



Slika 2.7 – Model elastičnog-linearno očvršćujućeg materijala.

Za slučaj složenijeg naprezanja kao šta je troosno stanje naprezanja granicu tečenja zamjenjuje skalarna *funkcija tečenja* (eng. *yield function* odnosno *yield condition*), koju za slučaj izotropnog očvršćenja (Čanađija & Mosler, 2011; Mosler, 2010) u općem obliku glasi:

$$\begin{aligned} \phi\left(\boldsymbol{\Sigma}, Q_{\text{i}}, \Theta\right) &= \Sigma^{\text{ekv}}\left(\boldsymbol{\Sigma}\right) - Q_{\text{i}} - Q_0^{\text{ekv}} = 0, \\ \phi\left(\boldsymbol{\Sigma}, Q_{\text{i}}, \Theta\right) &= \underbrace{\Sigma^{\text{ekv}}\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)}_{\text{ekvivalentno naprezanje}} - \underbrace{\left(Q_{\text{i}} + Q_0^{\text{ekv}}\right)}_{\text{odziv materijala}} = 0, \end{aligned} \tag{2.200}$$

a ovisi o skalarnim vrijednostima kao što su ekvivalentna vrijednost Mandelovog naprezanja Σ^{ekv}, *varijabla poput naprezanja* (eng. *stress-like variable*) $Q_{\text{i}} = Q_{\text{i}}(\alpha_{\text{i}})$ te početna vrijednost naprezanja $Q_0^{\text{ekv}} = Q_0^{\text{ekv}}\left(\Theta\right)$ koja opisuje početnu plohu. U jednadžbi funkcije tečenja jasno se vidi da je naprezanje tečenja funkcija temperature, odnosno temperatura utječe na naprezanje

tečenja. Eksperimentalni rezultati pokazuju da naprezanje tečenja opada s porastom temperature (Mićunović, 1990).

Prvi dio izraza (2.200) opisuje promjenu ekvivalentnog naprezanja tj. opterećenje ili rasterećenje konstrukcije. Drugi dio izraza opisuje odziv materijala pri opterećenju odnosno rasterećenju konstrukcije.

Naprezanje prema jednadžbi (2.200) mora biti unutar određenog raspona, koje se naziva *elastična domena* (eng. *elastic domain*) te može poprimiti vrijednosti koje su unutar ili na granici plohe tečenja (Sl. 2.8), što možemo zapisati:

$$\mathrm{E}_\sigma = \left\{ (\boldsymbol{\Sigma}, Q_\mathrm{i}, \Theta) \in \mathrm{R}^{9+1+1} \mid \phi(\boldsymbol{\Sigma}, Q_\mathrm{i}, \Theta) \le 0 \right\}. \tag{2.201}$$

Funkcija tečenja mora biti konveksna i neprekidno derivabilna (glatka) funkcija prema kojoj se mogu definirati elastične deformacije za slučaj pri čemu je $(\boldsymbol{\Sigma}, Q_\mathrm{i}, \Theta) \in \operatorname{int} \mathrm{E}_\sigma$, dok je uvjet pojave plastičnih deformacija $(\boldsymbol{\Sigma}, Q_\mathrm{i}, \Theta) \in \partial \mathrm{E}_\sigma$. Slučajevi u kojima je naprezanje izvan elastične domene su nemogući i nemaju fizičke osnove.

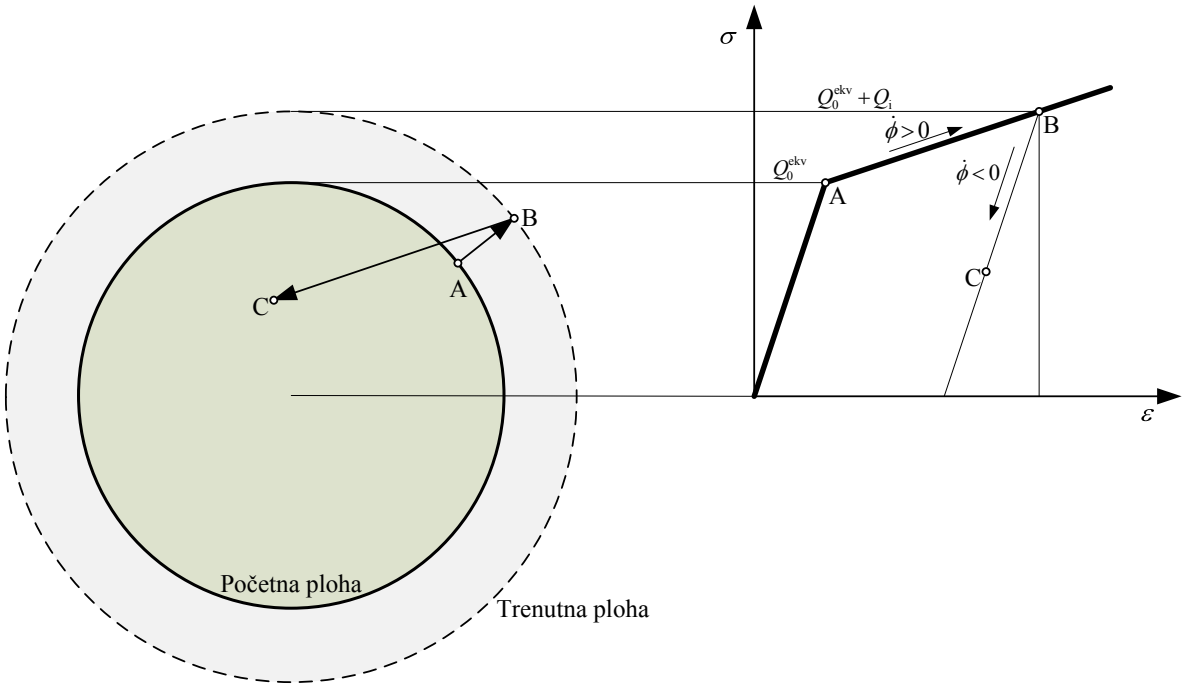
Procese opterećenja i rasterećenja mogu se zapisati u kraćem obliku ako se izraz (2.200) derivira po vremenu, te se dobije tzv. *uvjet konzistentnosti* (Lemaitre & Chaboche, 1990, str. 193):

$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} : \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \phi}{\partial Q_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}\alpha_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \phi}{\partial Q_0^{\mathrm{ekv}}(\Theta)} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} \tag{2.202}$$

Uvjeti opterećenja odnosno rasterećenja glase:

- $\phi < 0$ – elastično ponašanje,
- $\phi = 0$ i $\mathrm{d}\phi = 0$ – neutralno opterećenje (plastično tečenje),
- $\phi = 0$ i $\mathrm{d}\phi > 0$ – opterećenje (plastično očvršćenje),
- $\phi = 0$ i $\mathrm{d}\phi < 0$ – rasterećenje (elastično).

Slučajevi u kojima je $\phi > 0$ su nemogući i nemaju fizičke osnove.



Slika 2.8 – Izotropno očvršćenje prikazano u šestodimenzijskom prostoru te za slučaj vlačnog testa.

Većina metalnih materijala može se modelirati pomuću tzv. *asocijativnog* odnosno *pridruženog zakona tečenja* (eng. *associated plasticity*). Kod te teorije plastični potencijal koji definira smjer plastičnog tečenja u šestodimenzijskom prostoru može se zamijeniti, odnosno pridružiti funkcijom tečenja ϕ. Suprotno od ovog pristupa, postoji i teorija *neasocijativnog* odnosno *nepridruženog zakona tečenja* (eng. *non-associated plasticity*), koja među ostalim ima svoju primjenu najčešće kod kinematičkog očvršćenja metala, u mehanici tla i građevinskoj mehanici (stijene, beton,...).

Unutarnju disipaciju na mikrorazini možemo definirati pomoću izraza:

$$D_{\text{int}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_{\text{p}} + Q_{\text{i}}\dot{\alpha}_{\text{i}} \geq 0\,, \tag{2.203}$$

gdje je varijabla naprezanja Q_{i} energijski konjugirana *varijabli poput deformacije* (eng. *strain-like variable*) α_{i}. Varijablu Q_{i} moguće je izraziti kao:

$$Q_{\text{i}} = -\rho_0 \partial_{\alpha_{\text{i}}} \Psi_{\text{p}}\,. \tag{2.204}$$

Helmholtzovu slobodnu energiju na mikrorazini moguće je također izraziti kao funkciju parametara podstanja, koja za slučaj termoplastičnosti sa izotropnim očvršćenjem glasi $\Psi = \Psi\left(\mathbf{C}_{\text{e}}, \Theta, \alpha_{\text{i}}\right)$.

Ona se može rastaviti aditivnom dekompozicijom na elastični i plastični dio:

$$\Psi = \Psi_{\text{e}}\left(\mathbf{C}_{\text{e}}, \Theta\right) + \Psi_{\text{p}}\left(\alpha_{\text{i}}\right). \tag{2.205}$$

gdje je elastična slobodna energija Ψ_e funkcija elastičnog desnog Cauchy-Greenovog tenzora brzine deformiranosti i polja apsolutne temperature Θ, plastična slobodna energija Ψ_p je funkcija varijable α_i, koja ovisi o plastičnoj deformaciji, dok je termička slobodna energija Ψ_t funkcija polja apsolutne temperature Θ.

Elastična slobodna energija Ψ_e se može zapisati u razvijenom obliku pomoću elastičnih potencijala, prema literaturi (Čanađija, 2014) i (Simo, 1998):

$$\Psi_e(\mathbf{C}_e,\Theta) = W(\mathbf{C}_e,\Theta) + U(J,\Theta) + M(J,\Theta). \tag{2.206}$$

Devijatorski potencijal se određuje prema izrazu:

$$W(\mathbf{C}_e,\Theta) = \frac{1}{2}\mu\left[tr(\mathbf{C}_e) - n_{dim}\right], \tag{2.207}$$

gdje je μ *Lameova konstanta*, n_{dim} je broj dimenzija, npr. za prostorni problem $n_{dim} = 3$. Hidrostatički potencijal se može zapisati:

$$U(J,\Theta) = \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{1}{2}J - 1 - \ln J\right), \tag{2.208}$$

gdje je κ *modul kompresije* (volumenski modul elastičnosti) prema (Brnić, 1996). Spregnuti termoelastični potencijal, prema (Simo, 1998):

$$M(J,\Theta) = (\Theta - \Theta_0)\left[-n_{dim}\alpha\partial_J U(J,\Theta)\right], \tag{2.209}$$

koji ovisi o hidrostatičkom dijelu tenzora brzine deformiranosti $\mathbf{C}_e$. Ovdje je α koeficijent toplinskog rastezanja.

Plastična slobodna energija Ψ_p, prema radu (Čanađija & Mosler, 2011), može se izraziti u obliku:

$$\Psi_p(\alpha_i) = b_{i1}\left(-\alpha_i + \frac{1}{d_{i1}}e^{d_{i1}\alpha_i}\right) + \frac{n_2}{n_2+1}\frac{S_0}{b_2}\left(-b_2\alpha_i\right)^{1+\frac{1}{n_2}}, \tag{2.210}$$

koji sadrži materijalne parametre koji definiraju izotropno očvršćenje.

Prva derivacija izraza (2.210) glasi:

$$\partial_{\alpha_i}\Psi_p = \frac{\partial\Psi_p}{\partial\alpha_i} = b_{i1}\left(-1 + e^{d_{i1}\alpha_i}\right) - S_0\left(-b_2\alpha_i\right)^{\frac{1}{n_2}}, \tag{2.211}$$

odnosno druga derivacija izraza (2.211) glasi:

$$\partial^2_{\alpha_i}\Psi_p = \partial_{\alpha_i}\left(\partial_{\alpha_i}\Psi_p\right) = b_{i1}d_{i1}e^{d_{i1}\alpha_i} + b_2 S_0\frac{1}{n_2}\left(-b_2\alpha_i\right)^{\frac{1}{n_2}-1}. \tag{2.212}$$

Budući da unutarnja disipacija ovisi o brzini plastične distorzije $\mathbf{L}_p$ i o α_i, tada se može postaviti osnovna pretpostavka o maksimalnoj disipaciji:

$$D_{int} = \max_{(\boldsymbol{\Sigma},Q_i,\Theta)\in E_\sigma}\left(\boldsymbol{\Sigma}:\mathbf{L}_p + Q_i:\dot{\alpha}_i\right). \tag{2.213}$$

Kod pridruženog zakona tečenja na temelju izraza (2.213) mogu se zapisati evolucijske jednadžbe u sljedećem obliku:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathrm{p}} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \\ \dot{\alpha}_{\mathrm{i}} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial Q_{\mathrm{i}}} = -\lambda\end{aligned}\right\}, \tag{2.214}$$

gdje se uvodi faktor proporcionalnosti λ. Ovaj faktor proporcionalnosti poznatiji je kao *Lagrangeov multiplikator* (množitelj).

Uvjeti optimalnosti koji ograničavaju matematički nelinearne funkcije mogu se odrediti pomoću tzv. Karush-Kuhn-Tuckerovog uvjeta optimalnosti (Kuhn & Tucker, 1950; Luenberger, 2008; Simo & Hughes, 1998) koji glase:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda \geq 0 \\ &\phi \leq 0 \\ &\lambda\phi = 0\end{aligned}\right\}. \tag{2.215}$$

Tada se Clausius-Duhemova nejednadžba (2.203) može zapisati u obliku koji sadrži evolucijske jednadžbe (2.214):

$$D_{\mathrm{int}} = \lambda \boldsymbol{\Sigma} : \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi + \lambda Q_{\mathrm{i}} \partial_{Q_{\mathrm{i}}} \phi \geq 0, \tag{2.216}$$

Ako se pretpostavi da je funkcija Σ^{ekv} u izrazu (2.200) pozitivna homogena funkcija prvog reda (Mosler, 2010), tada možemo primijeniti *Eulerov teorem za homogene funkcije* (Small, 2007):

$$\Sigma^{\mathrm{ekv}}\left(c|\boldsymbol{\Sigma}|\right) = c\Sigma^{\mathrm{ekv}}\left(\boldsymbol{\Sigma}\right), \tag{2.217}$$

gdje je c proizvoljni pozitivni realni broj.

Korištenjem prethodnog izraza može se zapisati konačni oblik Clausius-Duhemove nejednadžbe:

$$D_{\mathrm{int}} \overset{\phi=0}{=} \lambda Q_0^{\mathrm{ekv}}\left(\Theta\right) \geq 0\,. \tag{2.218}$$

Clausius-Duhemova nejednadžba tada se može zapisati u sljedećem obliku:

$$D_{\mathrm{int}} \overset{\phi=0}{=} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_{\mathrm{p}} - \rho_0 \dot{\Psi}_{\mathrm{p}} = \lambda Q_0^{\mathrm{ekv}}\left(\Theta\right) \geq 0\,, \tag{2.219}$$

Ako se jednadžba (2.160) za mehaničku disipaciju zapiše pomoću snage naprezanja, izraz (2.127), slijedi:

$$D_{\mathrm{int}} = \mathscr{P}_{\mathrm{int}} - \rho_0 N\dot{\Theta} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq 0\,. \tag{2.220}$$

U slučaju izotermnih procesa ($\dot{\Theta} = 0$), kakav se u ovom pristupu odvija na mikrorazini, izraz (2.220) može se kraće zapisati:

$$D_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{int}} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq 0 \,. \tag{2.221}$$

Temelj varijacijski konzistentne formulacije je parametrizacija funkcije tečenja i evolucijskih jednadžbi pomoćnim naprezanjem, odnosno pseudo-naprezanjem $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ (Mosler & Bruhns, 2009; Mosler & Bruhns, 2010),:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{p}} &= \lambda \mathbf{M} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\Big|_{\boldsymbol{\Sigma}=\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \\ \dot{\alpha}_{\text{i}} &= -\lambda \end{aligned}\right\}, \tag{2.222}$$

gdje je $\mathbf{M}\left(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\right) = \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\big|_{\boldsymbol{\Sigma}=\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}$. Pseudo-naprezanje je različito od pripadnog fizičkog naprezanja $\boldsymbol{\Sigma}$ ali im je smjer prirasta plastične deformacije, odnosno smjer plastičnog tečenja isti, odnosno:

$$\mathbf{M} = \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\big|_{\boldsymbol{\Sigma}} = \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\big|_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \,. \tag{2.223}$$

Varijacijski konzistentna formulacija, na mikrorazini prema radovima (Yang et. al, 2006), (Stainier & Ortiz, 2010), (Mosler & Bruhns, 2010), (Čanađija & Mosler. 2011), omogućuje određivanje evolucijskih jednadžbi pomoću minimuma izraza:

Lokalno:

$$\left(\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\right) = \arg \inf_{\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{I}_{\text{inc}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta\right)\Big|_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\text{konst}, \Theta=\text{konst}}$$

Globalno:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) &= \arg \inf_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}} \dot{I}_{\text{inc}}^{\text{red}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) \\ \dot{I}_{\text{inc}}^{\text{red}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) &= \inf_{\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{I}_{\text{inc}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}, \Theta\right)\Big|_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\text{konst}, \Theta=\text{konst}} \end{aligned} \tag{2.224}$$

gdje je:

$$\begin{aligned} I_{\text{inc}} &= \int \dot{I}_{\text{inc}} \mathrm{d}t = \int_{V_0} \mathcal{P}_{\text{int}} \mathrm{d}V - \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) = \int_{V_0} \left(\rho_0 \dot{\Psi} + D_{\text{int}}\right) \mathrm{d}V - \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right), \\ \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) &= \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}V_0 - \int_{\partial_F} \overline{\mathbf{p}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \, \mathrm{d}S_0 . \end{aligned} \tag{2.225}$$

gdje je $\mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}$ snaga radi volumenskih i površinskih sila, $\mathbf{V} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ je brzina u referentnoj konfiguraciji, $\overline{\mathbf{p}}$ je površinsko opterećenje koje predstavlja prirodne rubne uvjete.

Lokalni se problem rješava u svakoj integracijskoj točki mikrorazine, čime se dobiva λ i $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$. Globalni se problem svodi na rješavanje nelinearnog konačnoelementnog problema $[K]\{u\} = \{F\}$ na mikrorazini.

Minimizacijom se dobiva:

Lokalno:

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{I}_{\text{inc}} = 0 \quad &\rightarrow \quad \lambda \boldsymbol{\Sigma} \partial^2_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \phi = 0 \\ \delta_{\lambda} I \geq 0 \quad &\rightarrow \quad -\phi = 0 \end{aligned} \tag{2.226}$$

Globalno:

$$\delta_{\dot{\boldsymbol{\phi}}} \dot{I}^{\text{red}}_{\text{inc}} = 0 \quad \rightarrow \quad P : \delta F - \delta \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}} = 0.$$

Jednadžba (2.226) daje vezu između naprezanja $\boldsymbol{\Sigma}$ i preudo-naprezanja $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$.

3. Višerazinsko modeliranje

Desetljećima unazad znanstvenici su pokazivali veliko zanimanje za određivanje odziva i različitih svojstava heterogenih materijala. Svrha modeliranja materijala je predviđanje unaprijed nekih pojava, uz dostizanje optimalnog rješenja što se tiče sigurnosti i pouzdanosti nekog proizvoda uz eventualno smanjenje troškova materijala. Optimizacijom materijala se može također dizajnirati i materijal s točno određenim svojstvima, što omogućuje razvoj novih materijala u budućnosti. Kompozitni materijali posjeduju važne utjecajne faktore kao što je mala težina, a uz to pružaju veliku čvrstoću u odnosu na konvencionalne materijale u inženjerstvu.

3.1. Uvodna razmatranja

Naizgled homogen materijal pruža sasvim drugu sliku kada smanjimo razinu ispod milimetra, i postaje nehomogen. Stoga je potrebno svojstva takvog materijala odrediti na neki drugi način. Složenost mikrostrukture takvog materijala zahtjeva poseban pristup kod određivanja svojstava materijala, odnosno definiranja elementarnog dijela koji dolično predstavlja mikrostrukturu materijala konstrukcije, odnosno njen je uzorak. Ovaj elementarni dio, uobičajeno se naziva *reprezentativni volumenski element*, odnosno kraće *RVE*, prema definiciji R. Hilla iz 1963. godine (Hill, 1963). RVE omogućuje određivanje svojstava materijala kao i konstitutivnih zakona mikrostrukture proračunom na elementarnoj razini.

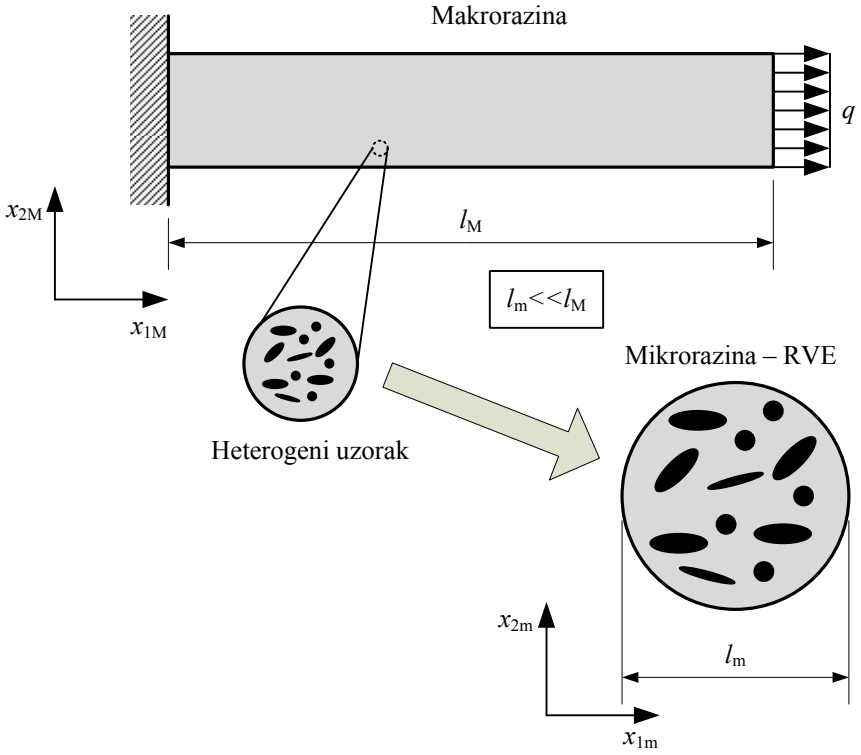
Višerazinsko modeliranje pomoću računalne homogenizacije jedna je od metoda koja pruža mogućnost numeričkog određivanja svojstava materijala na samoj mikrostrukturi, kao što su npr. efektivni modul elastičnosti, efektivni modul kompresije, efektivni Poissonov broj, itd.

Kod teorije homogenizacije potrebno je postaviti tzv. *četiri koraka makro-mikromehanike* za određivanje efektivnih svojstava heterogenog materijala, što je predstavljeno u radu P. Suqueta iz 1985. godine (Suquet, 1985).

Prvi korak je definiranje reprezentativnog volumenskog elementa (RVE) koji bi trebao biti dovoljne veličine da se uoči raznolikost mikrostrukture, ali i da ujedno predstavlja efektivna svojstva heterogenog materijala. Stoga je važno model razdvojiti na makroskopsku razinu (M) i mikroskopsku razinu (m).

Drugi korak je odrediti pomoću usrednjavanja mikroskopskih veličina one makroskopske. Usrednjavanje veličina na polju mikrostrukture izvodi se za većinu varijabli stanja; za naprezanje, deformaciju, unutarnju energiju, slobodnu energiju, entropiju, disipaciju, itd.

Treći korak je određivanje vrijednosti na mikrostrukturi na temelju podataka iz makrorazine, radi čega je podrebno definirati proceduru lokalizacije. Prilikom toga važno je koristiti konstitutivni zakon mikrostrukture, kao i izvršiti usrednjavanje veličina na polju mikrostrukture, dok uz to treba uzeti u obzir i ostale uvjete na temelju jednadžbi ravnoteže te razmatranja same geometrije. Postavljanjem rubnih uvjeta na mikrorazini, koji proizlaze na temelju geometrije heterogene mikrostrukture, možemo odrediti i polje naprezanja i polje deformacije na mikrorazini.

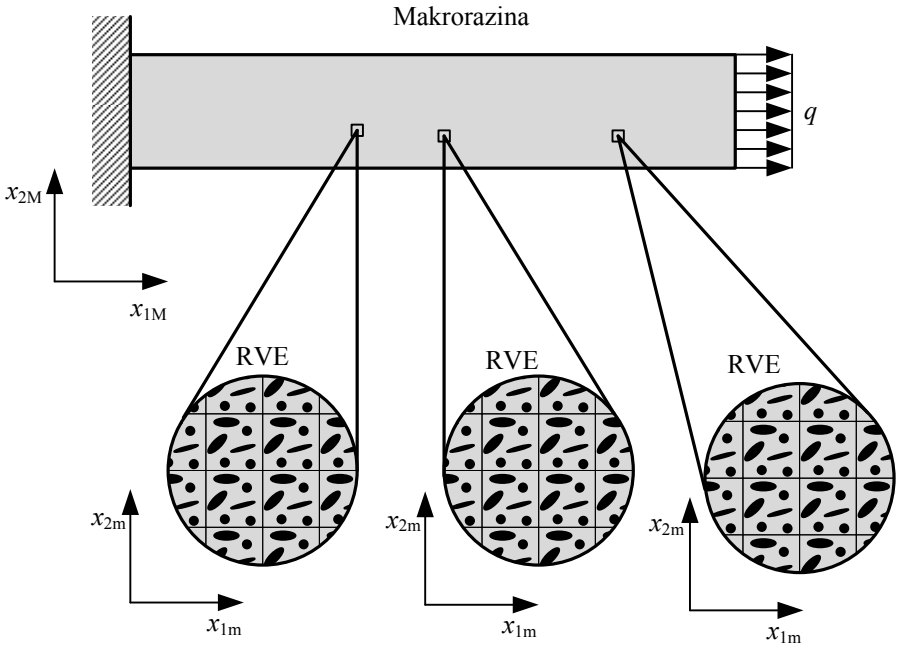


Slika 3.1 – Shematski prikaz konstrukcije s nehomogenim materijalom na mikrorazini.

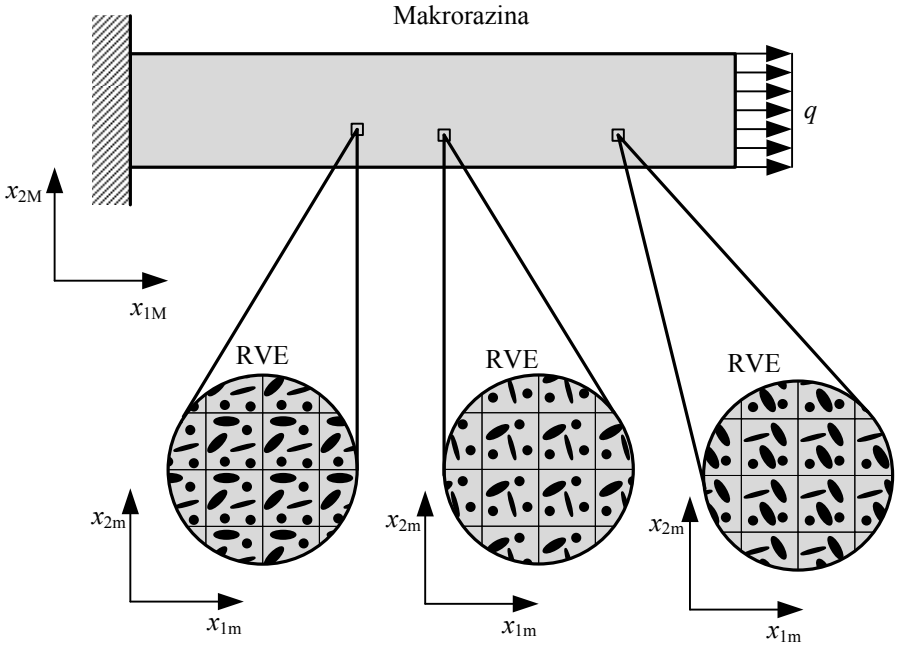
Postavljanje rubnih uvjeta predstavlja tzv. *makro-mikro uvjete lokalizacije* (eng. *mml conditions*). Radi mehaničke konzistentnosti vrijednosti polja naprezanja i deformacije koje zadovoljavaju makro-mikro uvjete lokalizacije moraju zadovoljiti i Hill-Mandelov uvjet

makro-homogenosti, tj. da je usrednjeni rad izvršen na RVE-u jednak lokalnom radu na makrorazini.

Četvrti korak je homogenizacija, jer su do sada poznati konstitutivni odnosi na mikrorazini te odnosi veličina na polju makro i mikrostrukture. Sama homogenizacija zahtjevna je kod nelinearnih problema.



a)



b)

Slika 3.2 – Periodičnost mikrostrukture: a) globalna i b) lokalna.

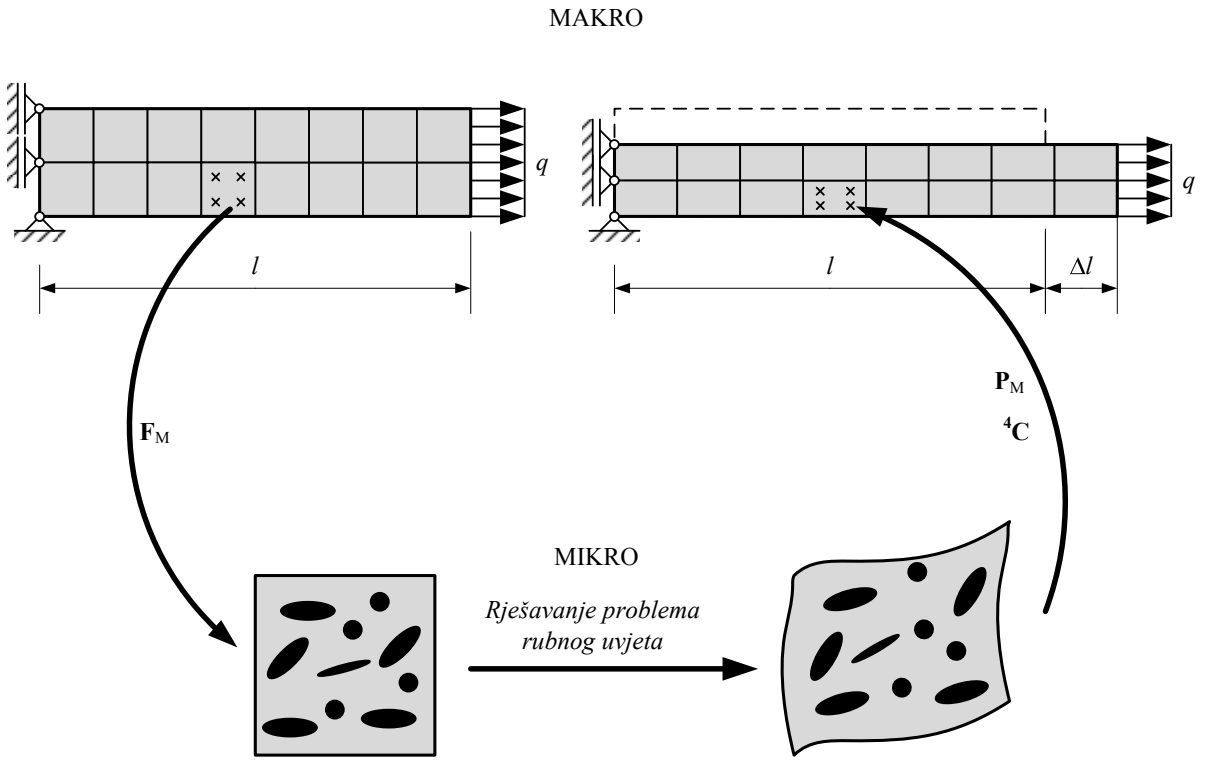
Kod računalne homogenizacije treba definirati mikrostrukturu u svakoj točki tijela tj. makrorazine. Mikrostrukturu tijela možemo prikazati kao sustav elementarnih ćelija (eng. *unit cell*) koje se ponavljaju u prostoru. Ako se jedna jedina elementarna ćelija ponavlja po cijeloj domeni tijela, tada se radi o *globalnoj periodičnosti*. Ako se pak na tijelu postoje samo određena područja koja imaju pripadnu elementarnu ćeliju, tada se radi o *lokalnoj periodičnosti*.

Standardna metoda računalne homogenizacije temelji se na *teoriji prvog reda*, prema kojoj je polje pomaka na makrorazini određeno gradijentom deformiranja prvog reda. Ta teorija vrijedi za jednostavnije slučajeve opterećenja, kod nje vrijede osnovne pretpostavke klasične mehanike kontinuuma.

Za razliku od ovog pristupa postoji i metoda računalne homogenizacije prema *teoriji drugog reda*, koja uzima u obzir polje pomaka i gradijent polja pomaka, odnosno prvu i drugu derivaciju polja pomaka, što dovodi do veće točnosti proračuna, ali i uključuje utjecaj okoline na ponašanje određene točke. Ovaj rad se temelji na teoriji prvog reda, stoga je upravo ta teorija detaljnije prikazana u nastavku.

Računalna homogenizacija prema teoriji prvoga reda provodi na način da se geometrija diskretizira pomoću mreže konačnih elemenata. U svakoj integracijskoj točki elemenata postavlja se diskretizacija pripadne mikrorazine. Rubni uvjet na mikrorazini dobijemo prijenosom deformacije u integracijskoj točki. Rješavanjem problema rubnih vrijednosti (BVP) u svakoj integracijskoj točki MKE metodom dobijemo podatke poput usrednjenog naprezanja i kondenzirane matrice krutosti.

Postupak povezanog MKE proračuna homogenizacije pomoću teorije prvoga reda sastoji se od proračuna na dvije razine. Procedura je razvijena za adijabatske procese. Materijalni gradijent deformiranja makrorazine $\mathbf{F}_M$ prenosi se na mikrorazinu radi rješavanja problema rubnih vrijednosti na RVE-u. Rješavanjem problema rubnih vrijednosti dobijemo deformirani oblik RVE-a, te možemo pomoću metode usrednjavanja dobiti usrednjeni makroskopski tenzor naprezanja $\mathbf{P}_M$. Tangentna matrica krutosti ${}^4\mathbf{C}$ također se određuje rješavanjem problema rubnih vrijednosti RVE-a, npr. korištenjem numeričkog diferenciranja.



Slika 3.3 – Položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji.

3.2. Problem na mikrorazini

Položaj svakog čvora mikrorazine definiran je u početnoj konfiguraciji pomoću Lagrangeovih materijalnih koordinata vektorom položaja X, dok je u trenutnoj konfiguraciji definiran pomoću Eulerovih prostornih koordinata vektorom položaja x.

Polje deformacije na mikrorazini možemo opisati pomoću materijalnog gradijenta deformiranja[1]:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \mathrm{Grad}_{\mathrm{m}}\mathbf{x} = \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\mathbf{x}\right)^{T} . \tag{3.1}$$

Ravnotežna jednadžba RVE-a u Lagrangeovom (referentnom) obliku:

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{m}}\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = \nabla_{0\mathrm{m}} \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{m}}^{T} = \mathbf{0} \qquad \text{u } V_0 , \tag{3.2}$$

gdje je $\mathbf{P}_{\mathrm{m}}$ prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, dok V_0 označava referentni ili početni volumen RVE-a.

Ravnotežna jednadžba RVE-a u Eulerovom (trenutnom) obliku:

$$\mathrm{div}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \nabla_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \mathbf{0} \qquad \text{u } V , \tag{3.3}$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}$ Cauchyjev tenzor naprezanja, dok V označava trenutni volumen RVE-a.

[1] Vrijednosti $\mathrm{grad}_{\mathrm{m}}(\bullet)$, $\mathrm{Grad}_{\mathrm{m}}(\bullet)$, itd. predstavljaju derivaciju u odnosu na varijablu mikroskopske razine (m), prema radu (Suquet, 1985).

3.3. Rubni uvjeti

3.3.1. Propisani linearni pomaci

Kod ovog pristupa ograničenja pomaka rubnih čvorova RVE-a predstavljaju rubne uvjete za proračun problema rubnih vrijednosti mikrorazine.

Veza između svakog čvora na granici RVE-a određena je izrazom[1]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{X}\,, \tag{3.4}$$

gdje tenzor $\mathbf{F}_{\mathrm{M}}$ predstavlja materijalni *makroskopski gradijent deformiranja*:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Grad}_{\mathrm{M}}\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\,. \tag{3.5}$$

Pomak svakog čvora mikrorazine određen je vektorom pomaka:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{F}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{X}\,. \tag{3.6}$$

Iz prethodnog izraza slijede pomaci rubnih čvorova RVE-a:

$$\mathbf{u} = \left(\mathbf{F}_{\mathrm{M}} - \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{X}\,. \tag{3.7}$$

3.3.2. Prirodni rubni uvjeti

Ovo je drugi pristup postavljanju rubnih uvjeta. Da bi mogli riješiti problem rubnih vrijednosti mikrorazine potrebno je postaviti ograničenje za površinsko opterećenje tj. postaviti vektor naprezanja koji odgovara makroskopskom tenzoru naprezanja.

Vektor naprezanja moguće je izraziti u početnoj konfiguraciji pomoću prvog Piola-Kirchhoffovog makroskopskog tenzora naprezanja:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{M}}^{T} \qquad \text{na } \Gamma_0\,, \tag{3.8}$$

gdje je $\mathbf{N}$ vektor normale zatvorene rubne površine (Γ_0) u početnoj konfiguraciji, ili u trenutnoj konfiguraciji pomoću Cauchyjevog makroskopskog tenzora naprezanja:

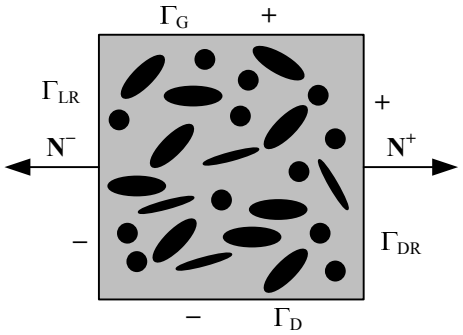
$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} \qquad \text{na } \Gamma\,, \tag{3.9}$$

gdje je n vektor normale zatvorene rubne površine (Γ) u trenutnoj konfiguraciji.

3.3.3. Periodični rubni uvjeti

Uz pretpostavku globalne periodičnosti mikrorazine standardno se koriste periodični rubni uvjeti. Rubovi RVE-a mogu se podijeliti u četiri dijela, "G" gornji rub, "D" donji rub, "DR" desni rub i "LR" lijevi rub (Sl. 3.4).

[1] Vrijednosti $\mathrm{grad}_{\mathrm{M}}(\bullet)$, $\mathrm{Grad}_{\mathrm{M}}(\bullet)$, itd. predstavljaju derivaciju u odnosu na varijablu makroskopske razine (M), prema radu (Suquet, 1985).



Slika 3.4 – Dvodimenzijski RVE za postavljanje rubnih uvjeta.

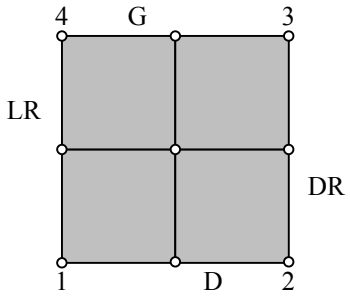
Periodični rubni uvjeti mogu se postaviti na temelju mješovitih uvjeta na granici RVE-a. Periodične deformacije predstavlja geometrijski (kinematički) rubni uvjet koji na granici RVE-a može se zapisati:

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \mathbf{F}_M \cdot \left(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-\right). \tag{3.10}$$

Antiperiodično površinsko opterećenje prikazano u početnoj konfiguraciji predstavlja statički rubni uvjet koji na granici RVE-a može se zapisati kao:

$$\mathbf{p}^+ = -\mathbf{p}^- . \tag{3.11}$$

Ovdje su Γ_0^+ i Γ_0^- suprotne strane granica RVE-a, što prema Sl. 3.5 predstavlja suprotne stane Γ_G i Γ_D, te Γ_{DR} i Γ_{LR}. Normale tih graničnih ravnina definirane su $\mathbf{N}^+ = -\mathbf{N}^-$ za odgovarajuće granične strane geometrije.



Slika 3.5 – Granične strane RVE-a za postavljanje periodičnih rubnih uvjeta.

Periodične rubne uvjete moguće je zapisati i u zapisu usklađenom sa pripadnim MKE modelom. U početnoj konfiguraciji periodičnost RVE-a definirana je odnosima vektora:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_G - \mathbf{X}_D &= \mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{X}_{DR} - \mathbf{X}_{LR} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1, \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje su dani vektori položaja kutnih čvorova 1, 2 i 4. Ako se položaj čvorova izrazi pomoću materijalnog mikroskopskog gradijenta deformiranja u izrazu (3.4), može se napisati:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\mathrm{G}}-\mathbf{x}_{\mathrm{D}}&=\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\left(\mathbf{X}_4-\mathbf{X}_1\right),\\ \mathbf{x}_{\mathrm{DR}}-\mathbf{x}_{\mathrm{LR}}&=\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\left(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Kako su za kutne čvorove vektori položaja u trenutnoj konfiguraciji:

$$\mathbf{x}_i=\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{X}_i,\qquad i=1,2,4\,. \tag{3.14}$$

periodične rubne uvjete može se napisati pomoću trenutnog vektora položaja:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\mathrm{G}}&=\mathbf{x}_{\mathrm{D}}+\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1,\\ \mathbf{x}_{\mathrm{DR}}&=\mathbf{x}_{\mathrm{LR}}+\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1,\end{aligned} \tag{3.15}$$

ili pomoću vektora pomaka:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\mathrm{G}}&=\mathbf{u}_{\mathrm{D}}+\mathbf{u}_4-\mathbf{u}_1,\\ \mathbf{u}_{\mathrm{DR}}&=\mathbf{u}_{\mathrm{LR}}+\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1,\end{aligned} \tag{3.16}$$

gdje za kutne čvorove vektori pomaka se mogu napisati:

$$\mathbf{u}_i=\left(\mathbf{F}_{\mathrm{M}}-\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{X}_i.\qquad i=1,2,4\,. \tag{3.17}$$

U radovima (Terada et al., 2000), (van der Sluis et al., 2000) i (Miehe et al., 2002), primjena periodičnih rubnih uvjeta u većini slučajeva daje točnije rezultate što se tiče ponašanja heterogenih materijala u odnosu na ostale spomenute metode.

3.4. Sprega između dvije razine

Nakon rješavanja problema na mikrorazini potrebno je proslijediti određene usrednjene podatke na makrorazinu, zbog čega je potrebno razmotriti teorem usrednjavanja, poznatiji u radovima (Hirschberger et al., 2008; Kouznetsova et al., 2010 (in Galvanetto)) kao *Hill-Mandelov uvjet makro-homogenosti* (Hill, 1963; Hill, 1972).

3.4.1. Usrednjeni gradijent deformiranja

Hill-Mandelov uvjet za deformacije glasi da je materijalni makroskopski gradijent deformiranja jednak usrednjenoj vrijednosti materijalnog gradijenta deformiranja mikrorazine po volumenu:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}}=\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{V_0}\int_{V_0}\mathbf{F}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V_0=\frac{1}{V_0}\int_{V_0}\mathrm{Grad}_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\mathrm{d}V_0=\frac{1}{V_0}\int_{V_0}\left(\nabla_{0\mathrm{m}}\mathbf{x}\right)^T\mathrm{d}V_0\,. \tag{3.18}$$

Primjenom Gaussova terorema o divergenciji, jednadžba (2.15), slijedi konačni izraz za materijalni makroskopski gradijent deformiranja (Hill, 1972):

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}}=\overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0}\mathbf{x}\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma_0\,. \tag{3.19}$$

Verifikacija izraza (3.19) može se izvršiti pomoću jednadžbe (3.4) koja se uvrsti u (3.19) te se dobije:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{x}\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma_0 = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \left(\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{X}\right)\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma_0 \,. \tag{3.20}$$

Primjenom Gaussova terorema o divergenciji, jednadžba (2.15), slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathrm{M}} &= \frac{1}{V_0}\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\int_{\Gamma_0}\mathbf{X}\mathbf{N}\mathrm{d}\Gamma_0 = \\ &= \frac{1}{V_0}\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\int_{V_0}\mathrm{Grad}\mathbf{X}\mathrm{d}V_0 = \\ &= \mathbf{F}_{\mathrm{M}},\end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje vrijedi jednakost:

$$\mathrm{Grad}_{\mathrm{m}}\mathbf{X} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}} = \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\mathbf{X}\right)^T = \mathbf{I}\,, \tag{3.22}$$

te je time dokazana ispravnost izraza (3.19).

3.4.2. Ekvivalentni mikroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja

Hill-Mandelov uvjet za naprezanja glasi da je makroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja jednak usrednjenoj vrijednosti prvog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja po volumenu:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{M}} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V_0}\int_{V_0}\mathbf{P}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V_0\,. \tag{3.23}$$

Ako se iz prethodne jednadžbe razvije izraz za mikroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, primjenom ravnotežne jednadžbe (3.2) te jednakosti (3.22), odnosno sređivanjem izraza slijedi:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\right)\mathbf{X} + \mathbf{P}_{\mathrm{m}}\cdot\left(\nabla_{0\mathrm{m}}\mathbf{X}\right), \tag{3.24}$$

što se može kraće zapisati pomoću jednadžbe:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{m}} = \nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\left(\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\mathbf{X}\right), \tag{3.25}$$

Prethodni izraz može se uvrstiti u Hill-Mandelov uvjet, dok primjenom Gaussova terorema o divergenciji prema jednadžbi (2.15) slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{M}} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{V_0}\int_{V_0}\nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\left(\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\mathbf{X}\right)\mathrm{d}V_0 = \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0}\mathbf{N}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\mathbf{X}\mathrm{d}\Gamma_0,\end{aligned} \tag{3.26}$$

što uz definiciju vektora naprezanja u početnoj konfiguraciji $\mathbf{p} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T$, daje konačni izraz za makroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{M}} = \overline{\mathbf{P}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}\mathbf{X}\mathrm{d}\Gamma_0 \,. \tag{3.27}$$

3.4.3. Ekvivalentni mikroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja

Hill-Mandelov uvjet za naprezanja glasi da je makroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja jednak usrednjenoj vrijednosti Cauchyjev tenzora naprezanja po volumenu:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V \,. \tag{3.28}$$

Ako se iz prethodne jednadžbe razvije izraz za mikroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja, primjenom ravnotežne jednadžbe (3.3) te jednakosti:

$$\mathrm{grad}_{\mathrm{m}}\mathbf{x} = \left(\nabla_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\right)^{T} = \mathbf{I} \,, \tag{3.29}$$

odnosno sređivanjem izraza slijedi:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \left(\nabla_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\right)\mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} \cdot \left(\nabla_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\right), \tag{3.30}$$

što se može kraće zapisati pomoću jednadžbe:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \nabla_{\mathrm{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\right). \tag{3.31}$$

Prethodni izraz može se uvrstiti u Hill-Mandelov uvjet, dok primjenom Gaussova terorema o divergenciji prema jednadžbi (2.15) slijedi:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \nabla_{\mathrm{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\right)\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma \,, \tag{3.32}$$

što uz definiciju vektora naprezanja u trenutnoj konfiguraciji $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}$, daje konačni izraz za makroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{t}\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma \,. \tag{3.33}$$

3.4.4. Izvršeni rad

Nakon rješavanja problema na mikrorazini potrebno je razmotriti energijski teorem usrednjavanja preko varijacijskog računa koristeći Hill-Mandelov uvjet makro-homogenosti. Uvjet zahtjeva da je volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u jednako lokalnoj varijaciji virtualnog rada na makrorazini:

$$\delta W_{\mathrm{M}} = \delta W_{\mathrm{m}} \,. \tag{3.34}$$

Ako se taj uvjet izrazi pomoću prvog Piola-Kirchhoffovog makroskopskog tenzora naprezanja i materijalnog gradijenta deformiranja, za lokalnu varijaciju virtualnog rada na makrorazini dobije se:

$$\delta W_{\mathrm{M}} = \mathbf{P}_{\mathrm{M}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{M}} \,, \tag{3.35}$$

dok je volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u:

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \mathbf{P}_{\mathrm{m}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \mathbf{P}_{\mathrm{m}} : \mathrm{Grad}_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{x}\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \mathbf{P}_{\mathrm{m}} : \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\delta\mathbf{x}\right)^T \mathrm{d}V_0 \,. \tag{3.36}$$

Primijenom divergencije vektorskog polja u izrazu:

$$\begin{aligned}\nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\left(\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\cdot\delta\mathbf{x}\right) &= \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\right)\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T : \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\delta\mathbf{x}\right) = \\ &= \left(\nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\right)\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{P}_{\mathrm{m}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}},\end{aligned} \tag{3.37}$$

uz jednakost iz ravnotežne jednadžbe (3.2) dobije se:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{m}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\left(\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\cdot\delta\mathbf{x}\right), \tag{3.38}$$

odnosno uvrštavanjem u izraz (3.36), uz primjenu teorema o divergenciji (2.15) i izraza za vektor naprezanja, dobije se konačni izraz za volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u:

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \nabla_{0\mathrm{m}}\cdot\left(\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\cdot\delta\mathbf{x}\right)\mathrm{d}V_0 = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{N}\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{m}}^T\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma_0 = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}^{(\mathbf{N})}\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma_0 \,. \tag{3.39}$$

Verifikacija izraza (3.39) može se izvršiti uvrštavanjem rubnih uvjeta, odnosno provjerom zadovoljavanja uvjeta makro-homogenosti. Ako se to izvrši na temelju rubnih uvjeta propisanih linearnim pomakom, odnosno varijacijom vektora položaja $\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{X}$ i izraza za makroskopski prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja (3.8), slijedi:

$$\begin{aligned}\delta W_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma_0 = \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}\cdot\left(\delta\mathbf{F}_{\mathrm{M}}\cdot\mathbf{X}\right)\mathrm{d}\Gamma_0 = \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{\Gamma_0} \mathbf{p}\mathbf{X}\mathrm{d}\Gamma_0 : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = \mathbf{P}_{\mathrm{M}} : \delta\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = \delta W_{\mathrm{M}},\end{aligned} \tag{3.40}$$

te je time dokazana ispravnost izraza (3.39).

Volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u moguće je izraziti i pomoću Cauchyjevog makroskopskog tenzora naprezanja i tenzora deformacije:

$$\delta W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} : \delta\mathbf{e}_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} : \nabla_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{u}\mathrm{d}V \,, \tag{3.41}$$

gdje je polje deformacije moguće prikazati pomoću virtualnog tenzora deformacije, koje radi simetričnog Cauchyjevog mikroskopskog tenzora naprezanja, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}^T$, poprima oblik:

$$\delta\mathbf{e}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{u} + \left(\nabla_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{u}\right)^T\right) = \nabla_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{u} \,. \tag{3.42}$$

Ako se primijeni divergencija vektorskog polja u izrazu:

$$\nabla_{\mathrm{m}}\cdot\left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\cdot\delta\mathbf{u}\right) = \left(\nabla_{\mathrm{m}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}}\right)\cdot\delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} : \left(\nabla_{\mathrm{m}}\delta\mathbf{u}\right), \tag{3.43}$$

uz jednakost iz ravnotežne jednadžbe (3.3) dobije se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} : \left(\nabla_{\mathrm{m}} \delta\mathbf{u}\right) = \nabla_{\mathrm{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} \cdot \delta\mathbf{u}\right). \tag{3.44}$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u izraz (3.41), uz primjenu teorema o divergenciji (2.15) i izraza za vektor naprezanja, dobije se konačni izraz za volumensko usrednjavanje varijacije izvršenog rada na RVE-u:

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} : \nabla\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \\ &= \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} \cdot \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma = \\ &= \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Verifikacija izraza (3.45) može se izvršiti uvrštavanjem rubnih uvjeta, odnosno provjerom zadovoljavanja uvjeta makro-homogenosti. Ako se to izvrši na temelju rubnih uvjeta propisanih linearnim pomakom, odnosno varijacijom vektora $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{e}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{x}$ i izraza za makroskopski Cauchyjev tenzor naprezanja (3.9), slijedi:

$$\begin{aligned} \delta W_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{t}\cdot\left(\delta\mathbf{e}_{\mathrm{M}} \cdot \mathbf{x}\right)\mathrm{d}\Gamma = \\ &= \frac{1}{V}\int_{\Gamma} \mathbf{t}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\Gamma : \delta\mathbf{e}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} : \delta\mathbf{e}_{\mathrm{M}} = \delta W_{\mathrm{M}}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

te je time dokazana ispravnost izraza (3.45).

3.5. Makroskopska tangentna matrica krutosti

3.5.1. Uvod

U okviru makro-mikro MKE proračuna potrebno je odrediti matricu krutosti u svakoj integracijskoj točki makrorazine, koja daje vezu između nanesenog opterećenja i rezultirajućeg pomaka.

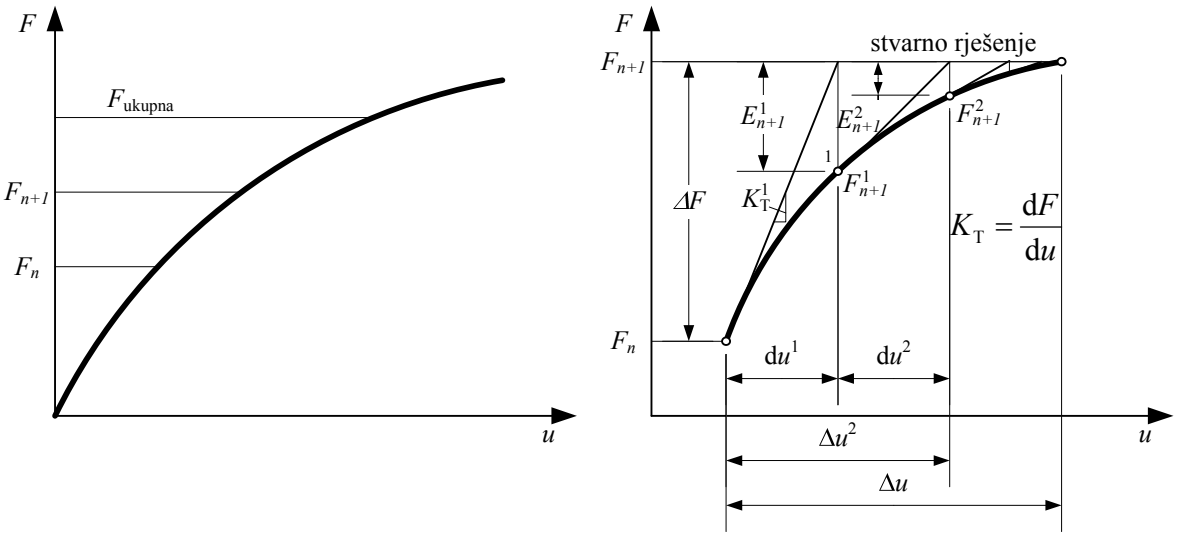
Analitičko određivanje tangentne matrice krutosti može predstavljati zahtjevan zadatak kod složenijih konstitutivnih modela, stoga se ona najčešće određuje numeričkim putem. Tangentna matrica krutosti služi za rješavanje ravnotežne jednadžbe između nanesenog opterećenja i rezultirajućeg pomaka, a metoda rješavanja je iterativna. Kada je veza između sile i pomaka linearna, tangentna krutost postaje konstantna. Često je tangentna krutost funkcija pomaka, ali i vremena, što znači da problem postaje nelinearan.

3.5.2. Newton-Raphsonova metoda

Kod nelinearne veze između sile i pomaka postupak rješavanja se svodi na korištenje *inkrementalno-iterativne metode*. Kod takvog proračuna sila se nanosi postupnim

povećavanjem, na tzv. inkrementalni način upravo radi nelinearne veze. Unutar jednog koraka (inkrementa) za zadani inkrement sile određuje se pripadni pomak iterativnim putem dok se ne postigne ravnotežno stanje. Od inkrementalno-iterativnih metoda najčešće se koristi tzv. *Newton-Raphsonova metoda.*

Ako se Newton-Raphsonovu metodu prikaže pomoću jednoosnog slučaja opterećenja, ukupnu silu treba rastaviti na manje inkrementalne vrijednosti sile, F_1, F_2, itd. dok se ne postigne ukupna sila F (Sl. 3.6). Ako se kreće iz koraka n prema koraku $n+1$, tada nam je poznata vrijednost sile F_n, a cilj je postignuti ravnotežu sa silom F_{n+1}.



Slika 3.6 – Newton-Raphsonova metoda za jednoosni slučaj opterećenja.

Ravnotežna jednadžba je općeg oblika:

$$K_{\mathrm{T}} u = F \,. \tag{3.47}$$

Kreće se iz točke u kojoj je završio prethodni inkrement, jer nam je u njoj poznata vrijednost sile F_n, a treba se odrediti tangentnu krutost K_{T}^1 u početnoj točki jer ona predstavlja nagib tangente na krivulju sila-pomak. Rješavanjem ravnotežne jednadžbe u prvoj iteraciji dolazi se u točku 1, kojoj odgovara sila F_{n+1}^1. Razlika između trenutne vrijednosti sile i stvarnog rješenja predstavlja trenutnu vrijednost greške:

$$E_{n+1}^1 = F_{n+1} - F_{n+1}^1 . \tag{3.48}$$

Nakon postizanja ravnoteže u prvoj iteraciji nastavlja se s drugom iteracijom, gdje se određuje tangentnu krutost K_{T}^2 u točki 1, te rješavanjem ravnotežne jednadžbe u drugoj iteraciji dolazi se u točku 2, kojoj odgovara sila F_{n+1}^2. Razlika između trenutne vrijednosti sile i stvarnog rješenja predstavlja trenutnu vrijednost greške:

$$E_{n+1}^2 = F_{n+1} - F_{n+1}^2 . \tag{3.49}$$

Postupak se ponavlja sve dok greška nije unutar određenih okvira, te se u tom slučaju trenutnu vrijednost pomaka proglašava kao stvarno rješenje, tj. pripadni pomak Δu koji se javlja za zadani inkrement sile ΔF.

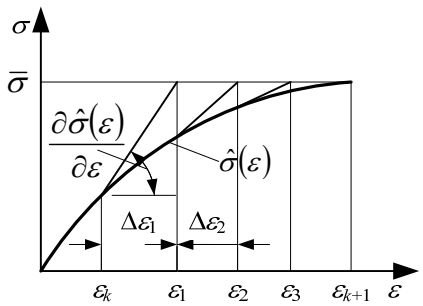
Nedostatak ove metode je što se u svakoj iteraciji treba odrediti tangentna krutost, što značajno produljuje vrijeme trajanja proračuna.

Postoji više podvrsta Newtonove metode, kao što su npr. *modificirana Newtonova metoda*, *kvazi-Newtonova metoda*, itd. što je pregledno prikazano u literaturi (Wriggers, 2008, str. 165).

U okviru računalne homogenizacije najčešće se spominju dvije metode određivanja tangentne matrice krutosti. Prva je metoda određivanja matrice krutosti pomoću *računalne kondenzacije* spriječenih pomaka. Na taj način se postiže manji sustav jednadžbi između nanesenog opterećenja na RVE i pripadnih propisanih rubnih uvjeta. Druga metoda, na kojoj se temelji ovaj rad, je metoda *numeričkog diferenciranja*, prema radu C. Miehea, te kasnije dodatno prilagođena u literaturi P. Wriggersa (Miehe, 1996; Wriggers, 2008).

3.5.3. Metoda numeričkog diferenciranja

Prema ovoj metodi na početku se odredi naprezanje i odziv mikrostrukture, zatim se pomoću malog poremećaja, odnosno perturbacije u pomaku odredi novonastalo stanje naprezanja. Na temelju te dvije vrijednosti određuje se tangentna matrica krutosti (Sl. 3.7). Kod ove metode nedostatak je ponavljanje proračuna u svakoj integracijskoj točki makrorazine, što rezultira duljim vremenom proračuna. Numeričko diferenciranje kvocijentom razlike predstavlja tzv. *diskretnu Newtonovu shemu aproksimacije* (Wriggers, 2008).



Slika 3.7 – Diskretna Newtonova shema aproksimacije.

Tangentna matrica krutosti može se prikazati u vektorskom obliku:

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_k & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

gdje $\mathbf{c}_k$ predstavlja k-ti član matrice, za slučaj da se ima n nepoznanica. Nepoznati k-ti član se određuje numeričkom aproksimacijom prema formuli:

$$\mathbf{c}_k \approx \frac{1}{h_k}\left[f\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i + h_k\boldsymbol{\delta}_k, \overline{\boldsymbol{\sigma}}\right) - f\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right]. \tag{3.51}$$

U gornjem izrazu h_k predstavlja veličinu koraka, a vektor $\boldsymbol{\delta}_k$ sadrži nule i vrijednost 1 u k-tom redu. Veličinu koraka treba odabrati na način da se dobije odgovarajuća matrica krutosti prema preporuci u literaturi (Wriggers, 2008) koja glasi:

$$h_k = \nu\left(\left|\varepsilon_k\right|_i + \tau\right), \tag{3.52}$$

gdje je $\nu = 10^{-3}\ldots10^{-5}$. Broj $\tau = 10^{-3}$ se unosi u izračun veličine koraka tako da se u izrazu (3.51) izbjegne moguće dijeljenje s nulom.

Postoje određeni nedostaci u navedenoj metodi (Wriggers, 2008), no ona je dovoljno pouzdana za razmatranja navedena u ovome radu.

Tangentna krutost može se odrediti i pomoću varijacijskog računa (Geers, 2011), odnosno ona nam daje vezu između tenzora naprezanja i deformacije:

$${}^{4}\mathbf{C}_{\mathrm{M}}^{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{\mathrm{M}}}{\partial \mathbf{F}_{\mathrm{M}}}, \tag{3.53}$$

a može se odrediti metodom numeričkog diferenciranja.

Za slučaj velikih deformacija tangentna krutost se može odrediti pomoću Cauchyjevog naprezanja, prema radovima (Miehe, 1996) i (Waffenschmidt, 2013), u obliku:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{F}\right) \tag{3.54}$$

Za 2-D slučaj, komponente stupca tangentne matrice krutosti (kl) = (11), (22), (12) sa indeksima (ij) = (11), (22), (12) određuju se na temelju naprezanja proračunatog pomoću perturbirane vrijednosti tenzora gradijenta deformiranja koji u indeksnom zapisu glasi:

$$F_{iJ}^{\epsilon(kl)} = F_{iJ}^{(kl)} + \Delta F_{iJ}^{\epsilon(kl)}, \tag{3.55}$$

gdje perturbacija tenzora gradijenta deformiranja iznosi:

$$\Delta F_{iJ}^{\epsilon(kl)} = \frac{\epsilon}{2}\left(\delta_{ik}F_{lJ} + \delta_{il}F_{kJ}\right). \tag{3.56}$$

Parametar perturbacije ϵ može se odrediti prema preporuci u radu (Miehe, 1996), odnosno riječ je o konstanti koja iznosi $\epsilon = 10^{-8}$. Perturbirana vrijednost Cauchyjevog naprezanja tada se može prikazati u obliku:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\epsilon(kl)} = \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{F}^{\epsilon(kl)}\right).$$

Komponente stupca tangentne matrice krutosti (kl) za i, j =1,2 mogu se odrediti prema izrazu:

$$C_{ij(kl)} \approx \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{J^{\epsilon(kl)}}{J}\sigma_{ij}^{\epsilon(kl)} - \sigma_{ij}\right] - \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk} + \sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk}\right), \tag{3.57}$$

gdje Jacobijeva determinanta perturbirane vrijednosti tenzora gradijenta deformiranja glasi:

$$J^{\epsilon(kl)} = \det\left(\mathbf{F}^{\epsilon(kl)}\right). \tag{3.58}$$

4. Implementacija u programu ABAQUS

Strukturna analiza složenijih konstrukcija nezamisliva je bez primjene računala. Tako je za analizu metodom konačnih elemenata (MKE) razvijen krajem 1970-ih komercijalni programski paket ABAQUS (Abaqus Documentation, V6.14, 2014).

4.1. Programski paket ABAQUS

Programski paket ABAQUS sastoji se od komponenata:

- Abaqus/Standard – koji služi za rješavanje širokog raspona linearnih i nelinearnih problema, kao što su statički, termički, itd. ali i spregnuti termomehanički odziv konstrukcija. Nema mogućnost proračuna za područja koja pokrivaju programi Abaqus/Explicit i Abaqus/CFD. Ovaj program je korišten pri izradi ovoga doktorskog rada.
- Abaqus/Explicit – služi za rješavanje nelinearnih, tranzijentnih, itd. problema pomoću tzv. *eksplicitne vremenske integracije* (eng. *explicit time integration*), koja je detaljno opisana u literaturi (Chapra & Canale, 1988).
- Abaqus/CFD – služi za rješavanje problema iz područja računalne mehanike fluida, kao i spregnutih proračuna iz mehanike fluida, termičke i strukturne analize.

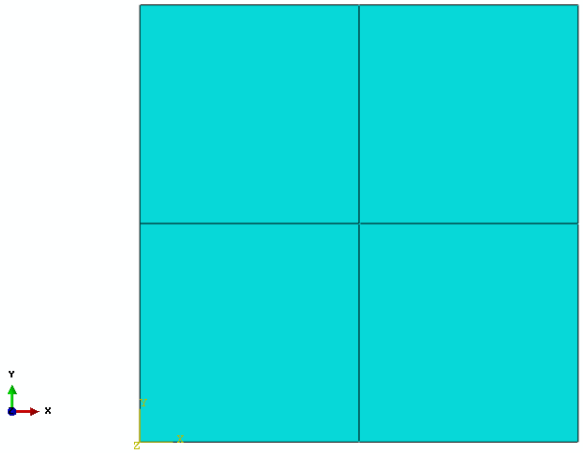
Izrada numeričkih modela primjenom dvorazinske metode u programu Abaqus/Standard moguća je uz korištenje:

- Microsoft Visual Studio – alat za razvoj programskih jezika, ovdje se mogu programirati korisnički potprogrami UMAT. Za potrebe numeričkih proračuna pri izradi ovog rada izrađena su dva korisnička potprograma *UMAT_Macro* i *UMAT_Micro*.
- Intel Fortran Compiler – računalni program za razvoj korisničkih potprograma u Fortranu.

4.2. Postavljanje periodičnih rubnih uvjeta u ABAQUS-u

Prije rješavanja problema rubnog uvjeta, na modelu mikrorazine je potrebno definirati rubne uvjete, pomoću standardne procedure linearnom jednadžbom između čvorova.

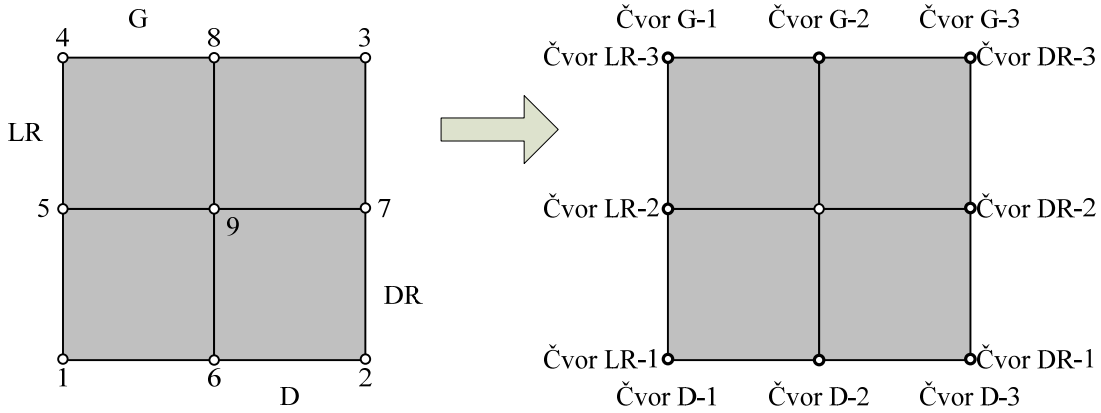
Za slučaj globalne periodičnosti mikrorazine, u slučaju MKE modeliranja najčešće se koriste periodični rubni uvjeti radi jednostavnog postavljanja u samom programu Abaqus/Standard. MKE model RVE-a s četiri kvadratna ravninska elemenata na mikrorazini prikazan je na Sl. 4.1.



Slika 4.1 – Mreža konačnih elemenata na RVE-u

Rubovi RVE-a mogu se podijeliti u četiri dijela, "G" gornji rub, "D" donji rub, "DR" desni rub i "LR" lijevi rub, te se pripadni čvorovi mogu označiti prema Sl. 4.2.

- Čvorovi na lijevom rubu: Čvor LR- sa brojem čvora po redu od donjeg do gornjeg ruba.
- Čvorovi na desnom rubu: Čvor DR- sa brojem čvora po redu od donjeg do gornjeg ruba.
- Čvorovi na gornjem rubu: Čvor G- sa brojem čvora po redu od lijevog do desnog ruba.
- Čvorovi na donjem rubu: Čvor D- sa brojem čvora po redu od lijevog do desnog ruba.



Slika 4.2 – Grupiranje čvorova na rubovima konačnih elemenata RVE-a.

U programu ABAQUS/CAE skup ograničenja za rubne uvjete pomaka postavlja se u modulu **Module: Interaction**. Ograničenje pomaka čvorova konačnih elemenata postavlja se pomoću *linearne jednadžbe ograničenja* (eng. *linear constraint equation*) koja sadrži linearnu kombinaciju varijabli u čvorovima, uz uvjet da je jednadžba jednaka nula.

Spomenutu jednadžbu možemo općenito zapisati prema (Abaqus Documentation, V6.14, 2014) kako slijedi:

$$A_1 u_i^P + A_2 u_j^Q + \ldots + A_N u_k^R = 0\,, \tag{4.1}$$

gdje je

- u_k^R – promjenljiva veličina u čvoru R,
- k – stupanj slobode gibanja (1 odgovara pomaku po osi x; 2 odgovara pomaku po osi y),
- A_N – koeficijenti za određivanje relativnog gibanja čvorova.

Vektor pomaka, definiran jednadžbom (3.16), stoga se može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_{\mathrm{G}} - \mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{u}_{\mathrm{DR}} - \mathbf{u}_{\mathrm{LR}} - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Standardno i nužno ograničenje pomaka modela u ravnini može se postaviti u čvoru 1 (odnosno čvor B-1 ili čvor L-1) koje tada glasi:

$$u_{1x} = u_{1y} = 0\,, \tag{4.3}$$

odnosno:

$$u_{\mathrm{LR}-1,x} = u_{\mathrm{LR}-1,y} = 0 \qquad \text{ili} \qquad u_{\mathrm{D}-1,x} = u_{\mathrm{D}-1,y} = 0\,. \tag{4.4}$$

Primjer linearne jednadžbe za vertikalno ograničenje prema izrazu (4.1) za čvorove T-2 i B-2 glasi:

$$u_{\mathrm{G}-2,y} - u_{\mathrm{D}-2,y} - u_{\mathrm{G}-1,y} + u_{\mathrm{D}-1,y} = 0\,. \tag{4.5}$$

Ako se u prethodni izraz sada uvrsti jednakost (4.4) slijedi kraći zapis linearne jednadžbe za vertikalno ograničenje:

$$u_{\mathrm{G}-2,y} - u_{\mathrm{D}-2,y} - u_{\mathrm{G}-1,y} = 0\,. \tag{4.6}$$

Jednadžba (4.6) može se zapisati u prikladnijem obliku za unos u program, što je prikazano u Tab. 4.1.

Tablica 4.1 – Linearna jednadžba za vertikalno ograničenje između čvorova.

Koeficijent A_N	Skup čvora	Stupanj slobode gibanja	Koordinatni sustav
Coefficient	*Set Name*	*DOF*	*CSYS ID*
1	Čvor T-2	2	globalni
–1	Čvor B-2	2	globalni
–1	Čvor T-1	2	globalni

Primjer linearne jednadžbe za horizontalno ograničenje prema izrazu (4.1) za čvorove T-2 i B-2 glasi:

$$u_{\mathrm{G}-2,x} - u_{\mathrm{D}-2,x} - u_{\mathrm{G}-1,x} + u_{\mathrm{D}-1,x} = 0\,. \tag{4.7}$$

Ako se u prethodni izraz sada uvrsti jednakost (4.4) slijedi kraći zapis linearne jednadžbe za horizontalno ograničenje:

$$u_{\mathrm{G}-2,x} - u_{\mathrm{D}-2,x} - u_{\mathrm{G}-1,x} = 0\,. \tag{4.8}$$

Jednadžba (4.8) može se zapisati u prikladnijem obliku za unos u program, što je prikazano u Tab. 4.2.

Tablica 4.2 – Linearna jednadžba za horizontalno ograničenje između čvorova.

Koeficijent A_N	Skup čvora	Stupanj slobode gibanja	Koordinatni sustav
Coefficient	*Set Name*	*DOF*	*CSYS ID*
1	Čvor T-2	1	globalni
–1	Čvor B-2	1	globalni
–1	Čvor T-1	1	globalni

Jednostavniji unos jednadžbi omogućen je pomoću skripte izrađene u programu *Python*. Pritom je korišten niz naredbi koje omogućavaju unos linearnih jednadžbi za ograničenje

pomaka, koja trenutno funkcionira za slučaj kada postoji jednak broj čvorova na rubu mreže RVE-a.

4.3. Osnovne značajke korisničkih potprograma UMAT

Korisnički potprogrami UMAT služe za implementaciju konstitutivnih jednadžbi materijala. Oni se pozivaju kod svakog proračuna vezanog uz elemente koji imaju definiran tzv. korisnički materijal (eng. *user material*) i to u svim integracijskim točkama elementa.

4.3.1. Najznačajnije varijable kod višerazinskog proračuna

Kod složenijih modela praktično je definirati samo određeni dio pomoću korisničkog materijala što značajno može smanjiti vrijeme trajanja proračuna. Vrlo važna značajka kod korisničkog potprograma UMAT je korištenje tzv. varijabli stanja koje ovise o rješenju (eng. *solution-dependent state variables*) koje omogućuju spremanje rezultata u svakoj integracijskoj točki, što je važno kod određivanja usrednjenih vrijednosti mikrorazine, kod proračuna tangentne krutosti za makrorazinu, ali i kod prikaza samih rezultata na makrorazini.

Najvažnije varijable u korisničkom potprogramu UMAT su:

- STRESS – funkcija koja definira Cauchyjev tenzor naprezanja u vektorskom obliku, koja se obnavlja na kraju svakog inkrementa.
- STRAN – funkcija koja definira ukupnu deformaciju na početku inkrementa. Kod proračuna gdje je u samom korisničkom materijalu definiran koeficijent toplinskog rastezanja, deformacije koje se koriste ovom funkcijom mehaničke su vrste. U slučaju konačnih deformacija ukupna deformacija zamijenjena je logaritamskom deformacijom.
- DFGRD0 (3,3) – funkcija koja sadrži gradijent deformiranja na početku inkrementa.
- DFGRD1 (3,3) – funkcija koja sadrži gradijent deformiranja na kraju inkrementa.
- DDSDDE – *Jacobijeva matrica*, odnosno tangentna matrica krutosti konstitutivnog modela, $\partial\Delta\boldsymbol{\sigma}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, gdje su $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ inkrementi naprezanja, odnosno $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ su inkrementi deformacije.
- SDV – funkcija koja sadrži varijable stanja koje ovise o rješenju, definirane na početku inkrementa. One se definiraju kod unosa materijala u polju **Depvar**.
- SPD – vrijednost specifične plastične disipacije na početku inkrementa, koja se obnavlja na kraju svakog inkrementa.
- RPL – proizvedena količina topline na kraju inkrementa u jedinici vremena i po jedinici volumena.

- DTIME – vremenski inkrement.

4.3.2. Numerička implementacija

Proizvedena količina topline na makrorazini, prema (Abaqus Documentation, V6.14, 2014) definirana je pomoću izraza:

$$r_{\mathrm{pl,M}} = \beta \frac{s_{\mathrm{pd,M}}}{\Delta t_{\mathrm{M}}}, \tag{4.9}$$

gdje je β konstanta koja predstavlja Taylor-Quinneyjev faktor, $s_{\mathrm{pd,M}}$ specifična plastična disipacija na makrorazini, Δt_{M} = DTIME, što predstavlja vremenski korak na makrorazini. Izraz (4.9) ekvivalentan je izrazu (2.199). Specifična plastična disipacija i proizvedena količina topline određuju se na kraju koraka, zajedno s ostalim veličinama poput naprezanja i plastične deformacije. Taylor-Quinneyjev faktor se može definirati u korisničkom materijalu u polju **Inelastic Heat Fraction**. Uobičajena je vrijednost 0,9.

Na mikrorazini se može primijeniti varijacijski konzistentna formulacija prikazana u Pogl. 2.4.9. Primjenom vremenske diskretizacije slijede izrazi:

Lokalno:

$$\begin{aligned} &\left(\Delta\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}\right) = \arg \inf_{\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{I}_{\mathrm{inc}} \Big|_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}=\mathrm{konst},\, \Theta_{n+1}=\mathrm{konst}} \\ &\dot{I}_{\mathrm{inc}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} I_{\mathrm{inc}} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Globalno: (4.10)

$$\begin{aligned} &\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}\right) = \arg \inf_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}} \dot{I}_{\mathrm{inc}}^{\mathrm{red}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) \\ &\dot{I}_{\mathrm{inc}}^{\mathrm{red}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}\right) = \inf_{\lambda, \overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \dot{I}_{\mathrm{inc}} \Big|_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}=\mathrm{konst},\, \Theta_{n+1}=\mathrm{konst}} \end{aligned}$$

gdje je $\Delta\lambda = \Delta a^2$, odnosno:

$$I_{\mathrm{inc}} = \int_{\mathcal{B}} \left(\rho_0 \dot{\Psi}_{n+1} - \rho_0 \dot{\Psi}_n + \Delta t D_{\mathrm{int},n+1}\right) \mathrm{d}V - \Delta t \mathcal{P}_{\boldsymbol{F}}\left(\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{n+1}\right), \tag{4.11}$$

za vremenski interval $t \in \left[t_n; t_{n+1}\right]$.

Minimizacijom na lokalnoj razini mikrorazine se dobivaju stacionarni uvjeti:

$$\begin{aligned} \partial_{\Delta\lambda} I_{\mathrm{inc}} &= \int_{V_0} \left(\partial_{\Delta\lambda} \Psi_{n+1} + \Delta t \partial_{\Delta\lambda} D_{\mathrm{int},n+1}\right) \mathrm{d}V_0 = 0, \\ \partial_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}} I_{\mathrm{inc}} &= \int_{V_0} \left(\partial_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} \Psi_{n+1} + \Delta t \partial_{\Delta\lambda} D_{\mathrm{int},n+1}\right) \mathrm{d}V_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Radi se o nelinearnom problemu koji se rješava pomoću Newton-Raphsonove motode, prema (Luenberger, 2008.). Evolucijske jednadžbe se mogu aproksimirati vremenskom

integracijom, odnosno parametrizirati pseudo-naprezanjem $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ i parametrom $a = \sqrt{\Delta\lambda}$ kako slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathrm{p}}\big|_{n+1} &= \exp\left(a^2 \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\big|_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}}\right) \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{p}}\big|_{n}, \\ \alpha_{\mathrm{i}}\big|_{n+1} &= \alpha_{\mathrm{i}}\big|_{n} - \Delta\lambda \partial_{Q_i} \phi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Jednadžba (4.13) se služi za određivanje:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\big|_{n+1} = \mathbf{F}_{\mathrm{e,\,trial}} \exp\left(-\Delta\lambda \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \phi\big|_{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}}\right),$$

gdje je:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e,\,trial}} = \mathbf{F}_{n+1}\left(\mathbf{F}_{\mathrm{p}}^{-1}\big|_{n}\right).$$

Specifična plastična disipacija na mikrorazini se može odrediti pomoću izraza

$$s_{\mathrm{pd,\,m}} = \mathrm{dev}\boldsymbol{\Sigma} : \left(\mathbf{F}_{\mathrm{p,m}}\big|_{n+1} - \mathbf{F}_{\mathrm{p,m}}\big|_{n}\right) \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{p,m}}^{-1}\big|_{n+1}. \tag{4.14}$$

Na temelju jednadžbe (2.197) temperatura na makrorazini se može izračunati u svakoj integracijskog točki. To znači da je za konzistentan proračun proizvedene topline na makrorazini, kod dvorazinske metode, potrebno usrednjavanje veličina sa mikrorazine, odnosno:

- Cauchyjev tenzor naprezanja:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{M}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V, \tag{4.15}$$

- specifična plastična disipacija:

$$s_{\mathrm{pd,M}} = \overline{s}_{\mathrm{pd,m}} = \frac{1}{V}\int_{V} s_{\mathrm{pd,m}} \mathrm{d}V, \tag{4.16}$$

- varijabla koja ovisi o plastičnoj deformaciji:

$$\alpha_{\mathrm{i,M}} = \overline{\alpha}_{\mathrm{i,m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \alpha_{\mathrm{i,m}} \mathrm{d}V, \tag{4.17}$$

- plastični dio tenzora gradijenta deformiranja:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p,M}} = \overline{\mathbf{F}}_{\mathrm{p,m}} = \frac{1}{V}\int_{V} \mathbf{F}_{\mathrm{p,m}} \mathrm{d}V. \tag{4.18}$$

4.4. Postavljanje proračuna u ABAQUS-u

Postavljanje proračuna u programu Abaqus/Standard provodi se na modelu makrorazine i mikrorazine. Cijeli sustav proračuna može se pratiti na ekranu samog proračuna, tzv. *Job monitor*, ali i putem izlaznih datoteka koje služe za ispis rezultata proračuna.

4.4.1. Makrorazina

Višerazinski proračun se pokreće na makrorazini (Sl. 4.3), iz korisničkog sučelja makromodela te se provodi na dvije razine. Radi se o spregnutom termomehaničkom problemu (eng. *Coupled temperature-displacement*). Stabilnost proračuna je važna, posebno za slučaj velikih plastičnih deformacija, što se definira naredbom:

```
*Hourglass Stiffness
20000., , 0., 0.
```

Korištenje reducirane integracije, međutim, omogućuje i smanjenje vremena proračuna, što je važno posebno kod višerazinskih metoda, jer se radi o računalno zahtjevnim proračunima. Reducirana integracija se definira kod postavki mreže termomehanički spregnutih konačnih elemenata:

```
*Element, type=CPE4RT
```

Početni uvjeti definiraju se u koraku početnih uvjeta (*Initial Step*), tu najčešće spadaju oslonci. Nakon toga se prelazi u glavni korak (*Step*), čime kreće analiza u prvoj integracijskoj točki makrorazine, prvom iteracijom prvog koraka, gdje se poziva korisnički potprogram *UMAT_Macro.for*.

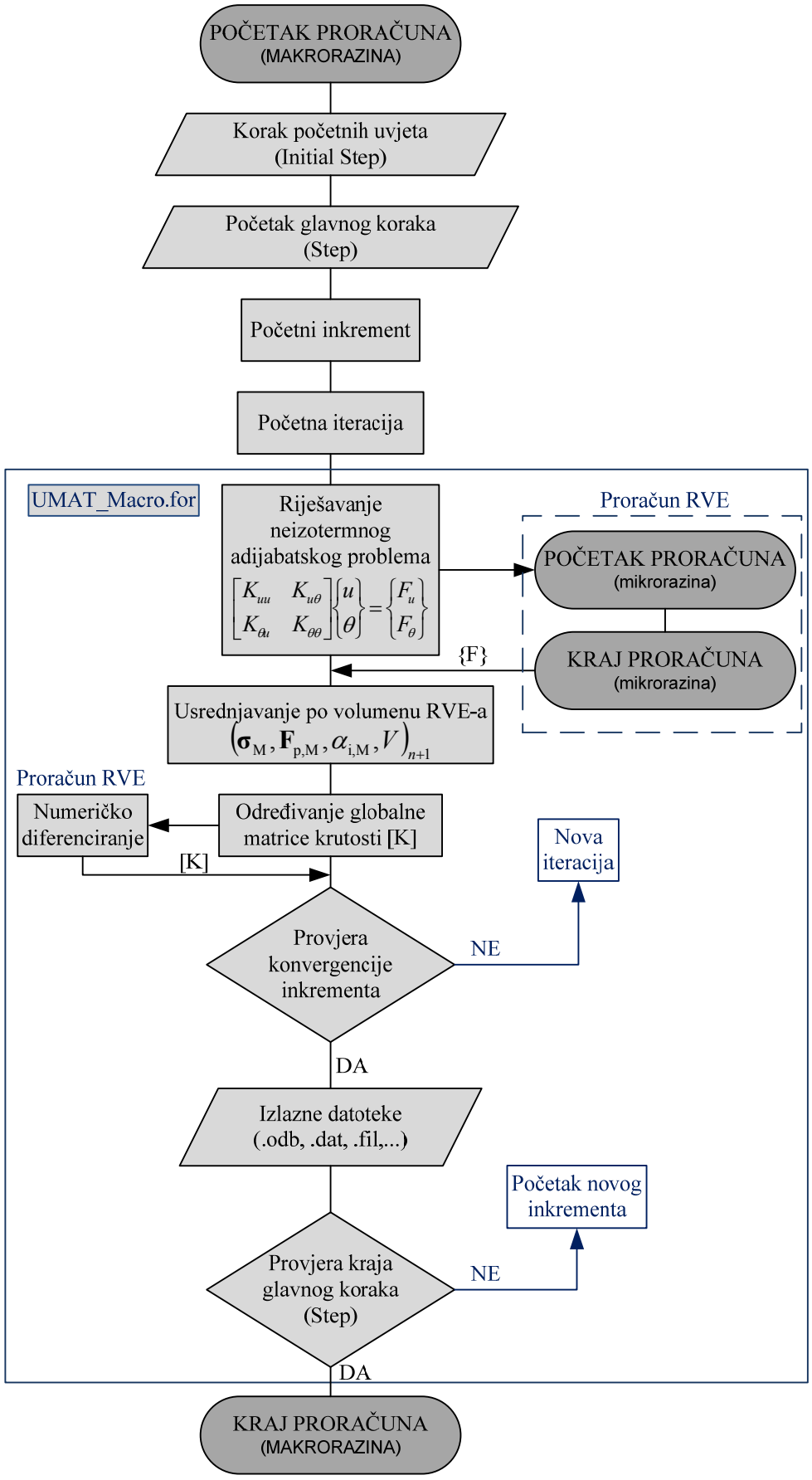
Zadani pomaci, koji predstavljaju rubne uvjete za proračun na mikrorazini, šalju se sa makrorazine, putem tekstualne datoteke koja se uključuje u proračun mikrorazine putem *.inp* datoteke opcijom:

```
*include, input=PrescDis.txt
```

Na taj način se pokreće proračun rubnih vrijednosti na mikrorazini, čiji se izlazni rezultati (poput Cauchyjevog naprezanja σ_m, volumena V, itd.) na kraju proračuna pohranjuju u ABAQUS-ovoj datoteci za rezultate *.fil*. Ispis u datoteku nije automatski već je potrebno prije pokretanja proračuna u *.inp* datoteci, koja predstavlja proračun na mikrorazini, dodati naredbu prije pokretanja proračuna:

```
*EL FILE
IVOL, S, SDV
```

čime se postiže ispis u datoteku za rezultate vrijednosti poput `IVOL` (volumen u integracijskoj točki), `S` (funkcija koja definira Cauchyjevo naprezanje) i `SDV` (varijable stanja).



Slika 4.3 – Dijagram toka proračuna na makrorazini (pojednostavljeni prikaz).

Korisnički potprogram *ABQMAIN*, prikazan u (Abaqus Documentation, V6.14, 2014), očitava datoteku sa rezultatima, te vlastitim unosom može izračunati i izvršiti usrednjavanje određenih vrijednosti. Kod dvorazinske metode vrši se usrednjavanje veličina sa mikrorazine, prema izrazima u Pogl. 4.3.2. To se može izvršiti naredbama kao što su:

```
Za sve integracijske točke mikrorazine:
   S=S+S*IVOL
   Alpha=Alpha+SDV(10)*IVOL
   Fp=Fp+SDV(1..9)*IVOL
   RPL=RPL+SDV(20)*IVOL
   tot_vol=tot_vol+IVOL

Usrednjavanje:
   STRESS=S/tot_vol
   RPL=RPL/tot_vol
   Alpha=Alpha/tot_vol
   Fp=Fp/tot_vol
```

Nakon usrednjavanja vrijednosti sa mikrorazine, potrebno je odrediti tangentnu krutost u integracijskoj točki, prema proceduri opisanoj u Pogl. 3.5.3. Radi toga se pomoću naredbe u korisničkom potprogramu ponovo poziva proračun na mikrorazini te se, kada proračun završi, izvede usrednjavanje varijabli.

Tangentna matrica krutosti određuje se pomoću metode numeričkog diferenciranja, prema Pogl. 3.5.3. Kada je određena tangentna matrica krutosti za prvu integracijsku točku na makrorazini, prelazi se na sljedeću integracijsku točku. Nakon što se odrede pripadne vrijednosti u svim integracijskim točkama radi se provjera konvergencije trenutnog koraka. U slučaju da proračun konvergira, dodaju se rezultati u izlazne datoteke za rezultate, odnosno *.odb*, *.dat*, *.fil*, *.msg*. Ako proračun ne konvergira prelazi se na novu iteraciju sa smanjenom veličinom koraka. Kada proračun konvergira vrši se provjera kraja glavnog koraka. Ukoliko je glavni korak završen, to ujedno predstavlja kraj višerazinskog proračuna (na makrorazini). Ako glavni korak nije gotov, prelazi se na novi inkrement.

Proračun na mikrorazini pokreće se tijekom proračuna makrorazine, direktno iz *DOS Prompt*:

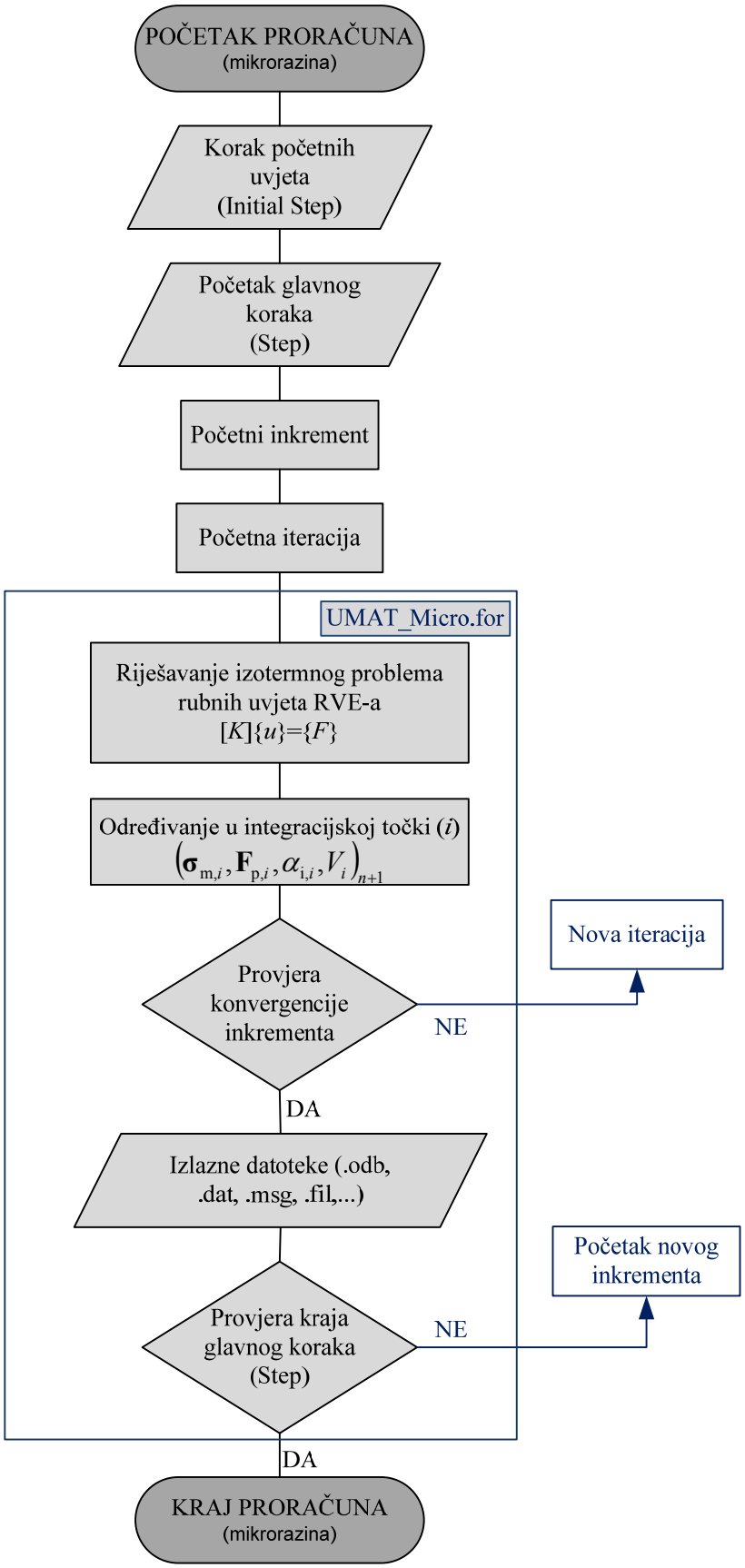
```
cd D:\Folder name & abaqus double job=RVE002_01_03
user=UMAT_Micro scratch=D:\Folder name ask_delete=OFF
interactive
```

Na ovaj se način definira pokretanje proračuna mikrorazine u drugom konačnom elementu makrorazine, prvoj integracijskoj točki u trećem koraku. Proračun se odvija u dvostrukoj preciznosti.

4.4.2. Mikrorazina

Tijek samog proračuna na mikrorazini (Sl. 4.4), značajno je drugačiji od onog na makrorazine. Ovim proračunom upravlja korisnički potprogram *UMAT_Micro.for*. Problem na mikrorazini je izoterman, odnosno kvazistatičan (eng. *Static, general*). Proračun se temelji na varijacijski konzistentnoj formulaciji predstavljenoj u Pogl. 2.4.9. Sama numerička procedura, tj. vremenska diskretizacija ukratko je prikazana u Pogl. 4.3.2. Kao opterećenje koriste se zadani pomaci koji se pak dobivaju temeljem gradijenta deformacije određenog na makrorazini i veličine samog RVE-a (Pogl. 3.3.3). Ovdje se također koriste elementi sa reduciranom integracijom, ponovo zbog poboljšanja stabilnosti proračuna i skraćenja vremena trajanja. Dodatno se skraćenje dobiva uporabom opcije ponovnog pokretanja proračuna (restart) čime se proračun samo nastavlja na izračunate rezultate iz prethodnog koraka.

Svi dobiveni rezultati mikrorazine za svaki korak pohranjuju se na tvrdom disku radi kasnije lakše analize.



Slika 4.4 – Dijagram toka proračuna na mikrorazini (pojednostavljeni prikaz).

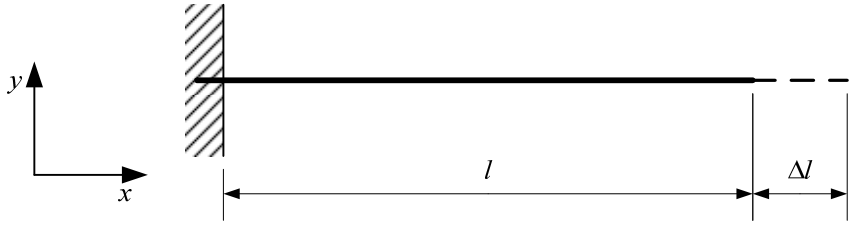
5. Numerički proračuni

Numerički proračuni provedeni su na različitim modelima makro i mikrorazine, koji su povezani s dva vlastita korisnička potprograma. Kod nekih primjera, dodatno su prikazani analitički izrazi za usporedbu rezultata. Na kraju svakog primjera dan je kratki prikaz rezultata svakog proračuna, uz pripadne podatke i grafičke prikaze.

Numerički modeli su izrađeni u programu Abaqus/Standard, a kratak opis prikazan je u nastavku. Modeli makrorazine predstavljaju glavne modele, jer se upravo iz korisničkog sučelja tog modela pokreće višerazinski proračun, koji se u ovome radu provodi na dvije razine. U svakoj integracijskoj točki makrorazine poziva se proračun na mikrorazini, izračunaju se usrednjene vrijednosti određenih varijabli stanja te se računa tangentna krutost. Navedeni modeli su prikladni za proračun pomoću standardnog programskog materijalnog modela i korisničkog materijalnog modela.

5.1. Analitički primjer i verifikacija modela

Na početku je izrađen primjer jednodimenzijskog štapa opterećenog aksijalnim pomakom slobodnog kraja, prema Sl. 5.1 s ciljem razvoja metodologije verifikacije numeričkih rezultata s analitičkima. Proračun je proveden je bez korištenja višerazinskog proračuna, već isključivo pomoću standardnog proračuna na jednoj razini.



Slika 5.1 – Geometrija jednodimenzijskog štapa opterećenog aksijalnim pomakom.

5.1.1. Geometrija jednodimenzijskog štapa

Na geometriji prikazanoj na Sl. 5.1 definirane je duljina štapa i površina poprečnog presjeka prema podacima u Tab. 5.1.

Tablica 5.1 – Dimenzije konstrukcije za aksijalno opterećenje štapa.

Dimenzije konstrukcije	
Duljina štapa	$l = 1$ m
Površina poprečnog presjeka	$A = 0{,}01$ m^2

Geometrija je omrežena s jednodimenzijskim termomehanički spregnutim štapnim konačnim elementom u ravnini (T2D2T element). Osnovne karakteristike mreže konačnog elementa dane su u Tab. 5.2.

Tablica 5.2 – Osnovne karakteristike jednodimenzijskog modela štapa.

Vrsta konačnog elementa	T2D2T
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	2
Ukupan broj elemenata	1

Oslonac je postavljeni na način da su spriječeni kruti pomaci tijela u ravnini, prema Sl. 5.1, odnosno:

- krajnji lijevi kraj štapa je ukliješten, odnosno čvor koji se nalazi na lijevoj strani elementa ima spriječene pomake na pravcima osi x i y.

5.1.2. Značajke materijala i analitički proračun

Na modelu su definirane značajke materijala koje su prikazane u Tab. 5.3. Značajke materijala koje služe za analitički proračun, kod numeričkog proračuna unose se u standardni programski materijalni model.

Rubni uvjet određen je aksijalnom pomakom slobodnog kraja $\Delta l = 50$ mm. Problem se u ovome primjeru tretira kao adijabatski. Naprezanje i plastična deformacija štapa mogu se odrediti analitički, na temelju proračuna koji je prikazan u literaturi (Dunne & Petrinic, 2005, str 136).

Tablica 5.3 – Značajke materijala konstrukcije za aksijalno opterećenje štapa.

Značajke materijala konstrukcije	
Modul elastičnosti	E = 200 GPa
Poissonov broj	ν = 0,3
Granica tečenja materijala	σ_T = 400 MPa
Koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja	H = 1000 MPa
Gustoća	ρ = 7850 kg/m^3
Koeficijent provođenja topline	k = 50 W/mK
Specifični toplinski kapacitet	c_p = 500 J/kgK
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/°C
Taylor-Quinneyjev faktor	β = 0,9

Sila koja uzrokuje tečenje u materijalu iznosi:

$$F_T = \sigma_T A = 4000\,\text{kN}\,, \tag{5.1}$$

te ona uzrokuje elastično produljenje štapa:

$$\Delta l_1 = \frac{F_T l}{AE} = 2\,\text{mm}\,. \tag{5.2}$$

Preostalo je plastično produljenje štapa koje iznosi:

$$\Delta l_2 = \Delta l - \Delta l_1 = 48\,\text{mm}\,. \tag{5.3}$$

Ostatak sile koji uzrokuje plastično produljenje štapa može se odrediti prema izrazu za plastično produljenje:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta F l}{A}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H}\right), \tag{5.4}$$

odnosno:

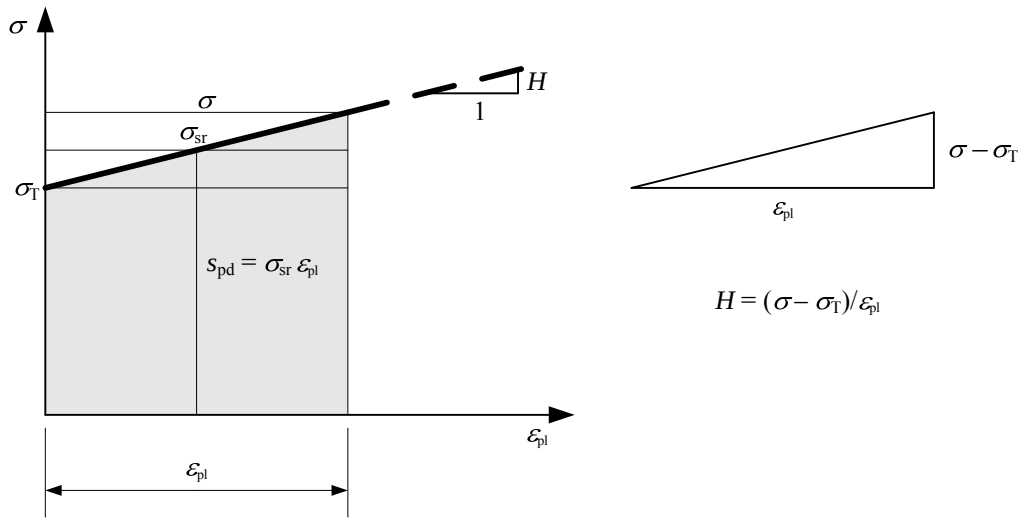
$$\Delta F = \frac{\Delta l_2 A}{l\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H}\right)} = 477{,}6\,\text{kN}. \tag{5.5}$$

Ukupna sila koja djeluje na štap iznosi:

$$F = F_T + \Delta F = 4477{,}6\,\text{kN}. \tag{5.6}$$

Prema tome je vrijednost naprezanja:

$$\sigma = \frac{F}{A} = 447{,}7\,\text{MPa}\,. \tag{5.7}$$



Slika 5.2 – Raspodjela σ–ε_{pl} i određivanje koeficijenta linearnog izotropnog očvršćenja.

Plastična deformacija, prema Sl. 5.2 iznosi:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma - \sigma_T}{H} = 4{,}776 \cdot 10^{-2} . \tag{5.8}$$

Srednje naprezanje, prema Sl. 5.2 iznosi:

$$\sigma_{sr} = \frac{\sigma_T + \sigma}{2} = 423{,}8\,\text{MPa} . \tag{5.9}$$

Pojednostavljeni oblik toplinske jednadžbe, za adijabatske procese pri konstantnom vremenskom intervalu glasi:

$$\rho c \Delta T = \beta \sigma_{sr} \varepsilon_{pl} , \tag{5.10}$$

odnosno slijedi da je povećanje temperature:

$$\Delta T = \beta \frac{\sigma_{sr} \varepsilon_{pl}}{\rho c} = 4{,}642\,^{\circ}\text{C} . \tag{5.11}$$

5.1.3. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je aksijalnim pomakom čvora slobodnoga kraja koji iznosi u_1 = 50 mm. Provedene su dvije vrste proračuna radi provjere utjecaja geometrijske nelinearnosti na rezultate. Prvi niz proračuna je proveden s isključenom geometrijskom nelinearnošću (NLGEOM = no), dok je drugi niz proračuna proveden s uključenom geometrijskom nelinearnošću (NLGEOM = yes). Značajke materijala, definirane prema Tab. 5.3, unesene su pomoću standardnog programskog materijalnog modela. Rezultati numeričkih proračuna, provedenih bez korištenja višerazinske metode, za dva slučaja postavki geometrije modela, prikazani su za različite veličine koraka u Tab. 5.4.

Tablica 5.4 – Rezultati dobiveni jednodimenzijskim MKE modelom pomoću standardnog materijalnog modela.

Broj koraka	Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)		Aksijalno naprezanje / MPa (S11 – Stress)		Plastična deformacija / % (PE11 – Plastic strain)	
	NLGEOM = no	NLGEOM = yes	NLGEOM = no	NLGEOM = yes	NLGEOM = no	NLGEOM = yes
1	2,450	2,381	447,72	446,52	4,7722	4,6519
2	3,588	3,478	447,70	446,50	4,7704	4,6502
4	4,157	4,037	447,70	446,49	4,7695	4,6493
8	4,441	4,319	447,69	446,49	4,7690	4,6489
16	4,583	4,460	447,69	446,49	4,7688	4,6486
32	4,624	4,500	447,69	446,49	4,7688	4,6486
64	4,631	4,508	447,69	446,49	4,7687	4,6486
128	4,634	4,511	447,69	446,49	4,7687	4,6486

Usporedbom numeričkih rezultata vidi se da u posljednja tri proračuna prvog niza proračuna s isključenom geometrijskom nelinearnošću, vrijednost temperature praktički odgovara analitičkom rezultatu. Važno je uočiti da je broj koraka važan podatak za postavljanje proračuna, već kod ovog jednostavnog jednodimenzijskog proračuna. Povećanjem broja koraka postiže se bolja aproksimacija plastične disipacije, prema Sl. 5.2, što u konačnici utječe i na vrijednost temperature, koja se približava analitičkom rješenju. Za razliku od prvog niza proračuna, drugi niz proračuna s uključenom geometrijskom nelinearnošću daje zanemarivo veće vrijednosti temperature u odnosu na analitičko rješenje i na prvi niz numeričkih proračuna, što se može pripisati drugoj vrsti rješavača koja se koristi kod ove vrste proračuna. Ova razlika između dvije vrste proračuna može se također uočiti kod vrijednosti naprezanja i plastičnih deformacija, koje se za razliku od temperature zanemarivo mijenjaju povećanjem broja koraka. Prema tome, može se zaključiti da je kod korištenja standardnog materijalnog modela, neovisno o vrsti geometrijskog modela, veličina koraka značajno utječe na proračun temperature.

5.2. Aksijalno opterećenje štapa

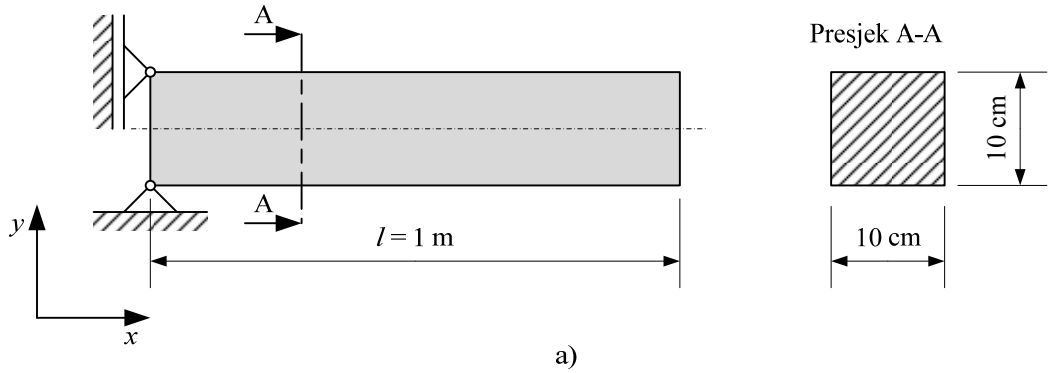
Modeli aksijalnog opterećenja štapa predstavljaju prvu skupinu numeričkih primjera pomoću višerazinske metode. Štap se može prikazati 2-D numeričkih modelom. Proračuni su

provedeni korištenjem višerazinske metode. Rezultati proračuna su uspoređeni, tamo gdje je to bilo moguće, sa rezultatima odgovarajućeg proračuna provedenog na standardan način, odnosno na jednoj razini.

Višerazinski proračuni provedeni su na jednom modelu makrorazine, pomoću korisničkih potprograma UMAT, za razne modele mikrorazine. Model makrorazine predstavlja glavni model, jer se upravo iz korisničkog sučelja tog modela pokreće višerazinski proračun, koji se u ovome radu provodi na dvije razine. U svakoj integracijskoj točki makrorazine poziva se proračun na mikrorazini, izračunaju se usrednjene vrijednosti određenih varijabli stanja te se računa tangentna krutost. Pomoću modela makrorazine može se također izvršiti provjera rezultata višerazinskih proračuna, pokretanjem proračuna sa standardnim programskim materijalom, bez korištenja višerazinskog proračuna. Svi modeli su dvodimenzijski te je postavljena mreža ravninskih konačnih elemenata.

5.2.1. Model makrorazine

Geometrija makrorazine, čije su dimenzije prikazane na Sl. 5.3, omrežena je sa dva dvodimenzijska termomehanički spregnuta konačna elementa za ravninsko stanje deformacije (CPE4RT elementi), s uključenom geometrijskom nelinearnošću i reduciranom integracijom. Stablilnost proračuna, za slučaj velikih deformacija, postiže se korištenjem opcije **Hourglass Stiffness** = 20000. Budući da gustoća mreže utječe na vrijeme trajanja proračuna, korištenje mreže sa dva konačna elementa značajno skraćuje proračun, ali ne utječe na točnost rezultata samog proračuna za slučaj aksijalnog opterećenja.



Slika 5.3 – Model makrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata.

Značajke materijala makrorazine, koje su unesene pomoću korisničkog materijalnog modela, definirane su prema Tab. 5.5.

Tablica 5.5 – Značajke materijala makrorazine.

Značajke materijala makrorazine	
Gustoća	$\rho = 7850$ kg/m^3
Koeficijent provođenja topline	$k = 50$ W/mK
Specifični toplinski kapacitet	$c_p = 500$ J/kgK
Homogenizirani koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/°C
Taylor-Quinneyjev faktor	$\beta = 0{,}9$

Osnovne karakteristike mreže konačnih elemenata dane su u Tab. 5.6.

Tablica 5.6 – Osnovne karakteristike mreže makrorazine.

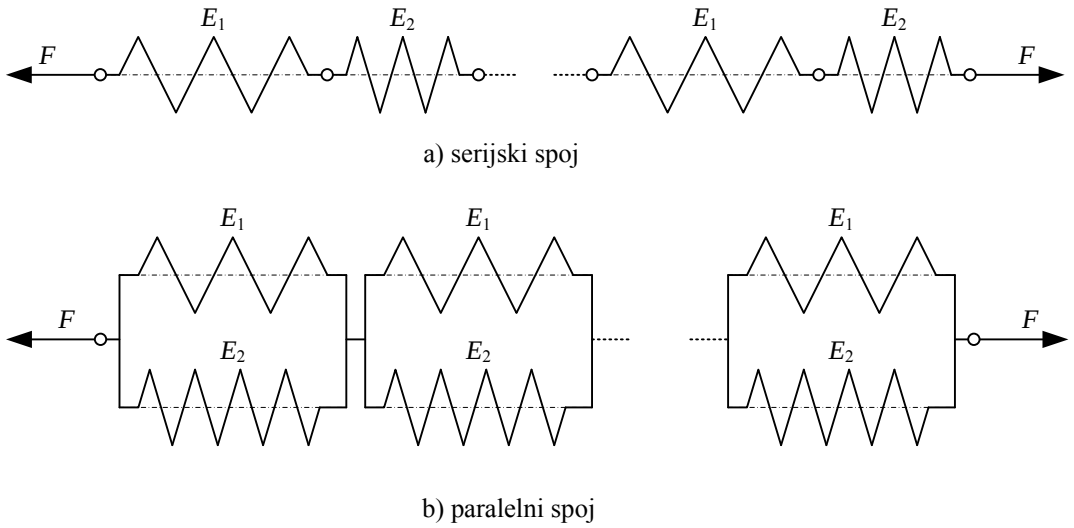
Vrsta konačnih elemenata	CPE4RT
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	6
Ukupan broj elemenata	2

Oslonci su postavljeni na način da su spriječeni kruti pomaci tijela u ravnini, prema Sl. 5.3, odnosno:

- donji krajnji lijevi čvor modela ima spriječen pomak na pravcu osi x i y,
- gornji krajnji lijevi čvor modela ima spriječen pomak na pravcu osi x.

5.2.2. Mehanički primjer modela serijskog i paralelnog spoja

Dvodimenzijski model aksijalno opterećenog štapa, prema Pogl. 5.2.1, korišten je za mehanički primjer proračuna pomoću dvorazinske metode, za serijski i paralelni spoj na mikrorazini. Geometrija modela makrorazine je definirana prema Sl. 5.3, a sastoji se od elastičnog heterogenog materijala. Usporedba rezultata temelji se na analitičkim izrazima za određivanje ukupnog modula elastičnosti kod serijskog i paralelnog spoja opruga, koji se grafički može prikazati prema Sl. 5.4.

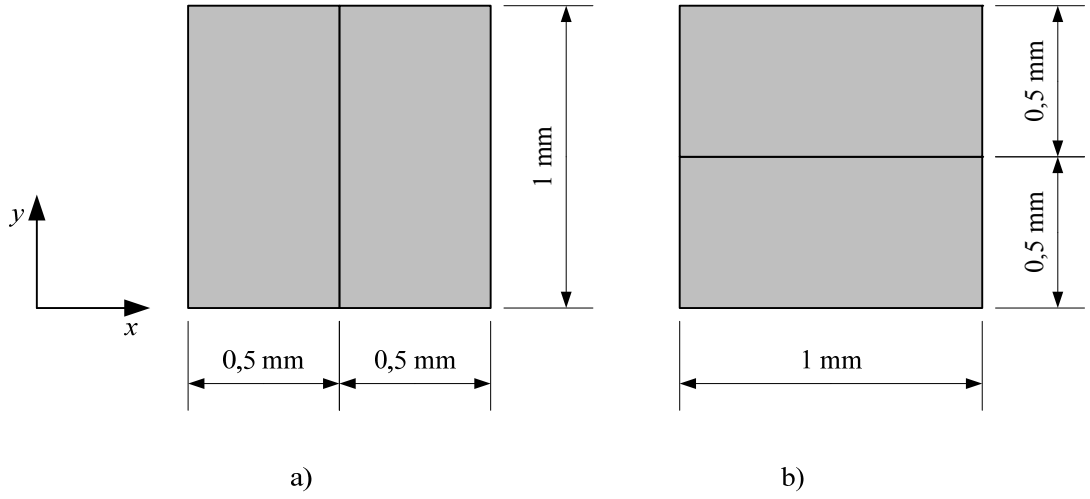


Slika 5.4 – Spoj opruge: a) serijski i b) paralelni.

Iako je model izrađen korištenjem dvodimenzijskih termomehanički spregnutih konačnih elemenata, proračun je izoterman budući da je riječ o elastičnom heterogenom materijalu. Radi provjere vlastitog korisničkog potprograma provedeni su i dodatni numerički proračuni, korištenjem homogeniziranih vrijednosti materijalnih značajki, za serijski i paralelni spoj.

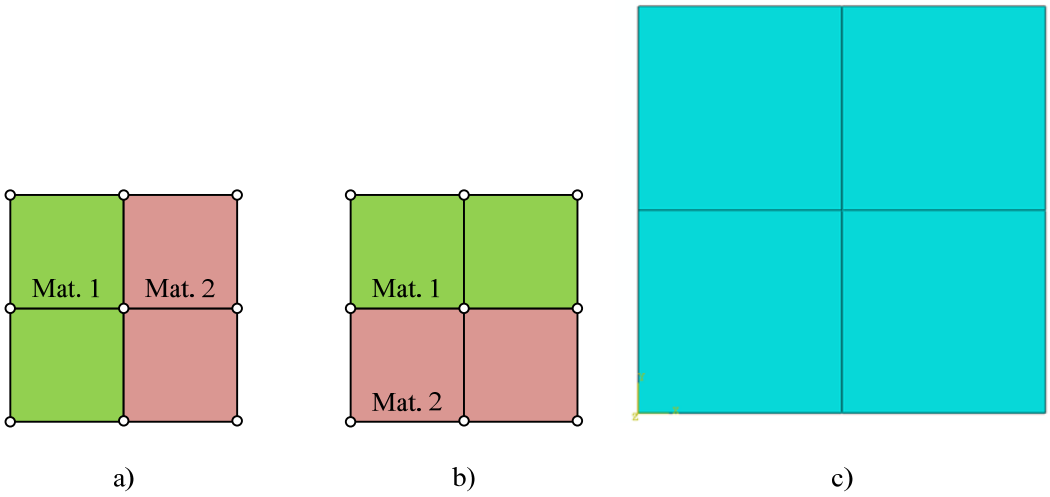
5.2.2.1. Model mikrorazine

Model mikrorazine izrađen je za serijski i paralelni spoj prema geometrijama prikazanim na Sl. 5.5.



Slika 5.5 – Geometrija mikrorazine: a) serijski i b) paralelni spoj.

Značajke materijala različite su u elementima, ovisno tome dali je serijski spoj ili paralelni spoj (prema Sl. 5.6), definirane prema Tab. 5.7.



Slika 5.6 – Mreža konačnih elemenata: a) serijski spoj, b) paralelni spoj, c) prikaz MKE modela.

Tablica 5.7 – Značajke materijala mikrorazine.

Značajke materijala mikrorazine	Materijal 1	Materijal 2
Modul elastičnosti	$E_1 = 180$ GPa	$E_2 = 70$ GPa
Poissonov broj	$\nu_1 = 0{,}3$	$\nu_2 = 0{,}3$

Na geometriji mikrorazine su postavljeni dvodimenzijski bilinearni kvadratni konačni elementi za ravninsko stanje deformacije (CPE4 elementi), s uključenom geometrijskom nelinearnošću. Odabrani su ovi elementi budući da je problem izotermni adijabatski. Osnovne karakteristike mreže konačnih elemenata dane su u Tab. 5.8. Mreža je rijetka prvenstveno radi trajanja proračuna. Kako se u svakoj integracijskoj točki makrorazine poziva proračun mikrorazine, korištenje mreže sa četiri konačna elementa značajno skraćuje proračun, a budući da je riječ o serijskom i paralelnom spoju, svakako se pretpostavlja da to ne utječe na točnost rezultata samog proračuna.

Tablica 5.8 – Osnovne karakteristike mikrorazine.

Vrsta konačnih elemenata	CPE4
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	9
Ukupan broj elemenata	4

Oslonci su postavljeni pomoću periodičnih rubnih uvjeta, prema proceduri opisanoj u poglavlju 4.2.

5.2.2.2. Numerički proračun

Radi jednostavnije usporedbe rezultata numeričkih proračuna provedenih pomoću višerazinske metode, određeni su analitički izrazi koji daju ukupni modul elastičnosti modela, prema radu (Hollister & Kikuchi,1992). Za serijski spoj ukupni modul elastičnosti iznosi:

$$E_{\text{uk}} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} = 100{,}8\,\text{GPa}\,. \tag{5.12}$$

Za paralelni spoj ukupni modul elastičnosti iznosi:

$$E_{\text{uk}} = \frac{E_1 + E_2}{2} = 125\,\text{GPa}\,, \tag{5.13}$$

Ukupna vrijednost Poissonovog broja za serijski i paralelni spoj iznosi:

$$\nu_{\text{uk}} = \nu_1 = \nu_2 = 0{,}3\,. \tag{5.14}$$

Rubni uvjet određen je aksijalnim pomakom slobodnog kraja štapa prikazanog na Sl. 5.3, koji iznosi koji iznosi u_1 = 50 mm. Višerazinski proračuni provedeni su pomoću korisničkih potprograma UMAT. Dodatni numerički proračuni, korištenjem standardnog materijalnog modela gdje su unesene homogenizirane materijalne značajke, provedeni su za serijski i paralelni spoj bez korištenja višerazinske metode, odnosno na jednoj razini (makrorazini).

Rezultati proračuna za serijski spoj prikazani su u Tab. 5.9, odnosno za paralelni spoj u Tab. 5.10.

Tablica 5.9 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima serijskog spoja pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom.

Broj koraka	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)		Naprezanje σ_x / MPa (S11 – Stress component)	
	Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT
2	196,7	203,8	221,3	229,3
10	196,7	203,8	221,3	229,3
20	196,7	203,8	221,3	229,3

Tablica 5.10 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima paralelnog spoja pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom.

Broj koraka	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)		Naprezanje σ_x / MPa (S11 – Stress component)	
	Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT
2	243,9	243,8	274,5	274,3
10	243,9	243,8	274,5	274,3
20	243,9	243,8	274,5	274,3

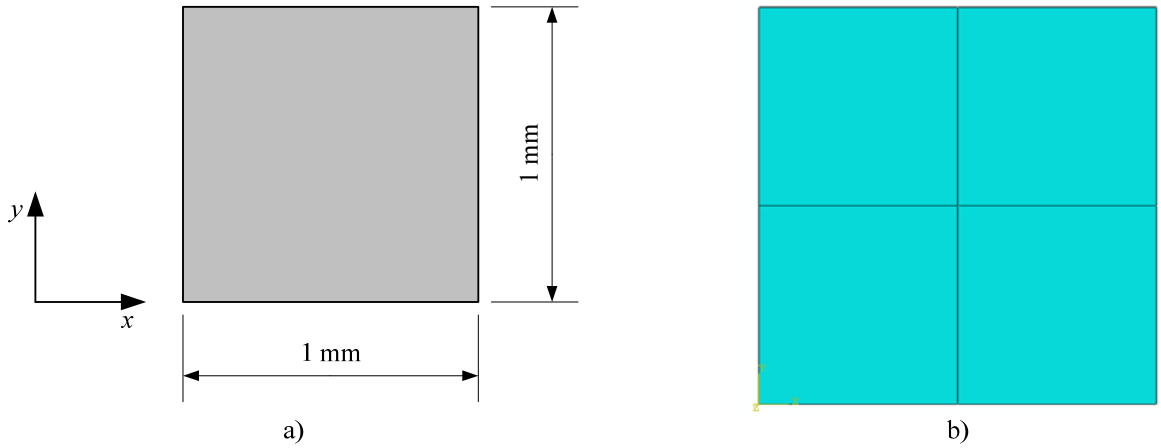
Usporedbom rezultata proračuna za model serijskog i paralelnog spoja možemo zaključiti da veličina koraka nema značajan utjecaj. Vrijednosti naprezanja kod višerazinskog proračuna za model serijskog spoja su malo veće u odnosu na one dobivene proračunom na jednoj razini sa homogeniziranim materijalnim značajkama, radi postavki kod određivanja tangentne krutosti. Rezultati dobiveni višerazinskim proračunom svakako se mogu poboljšati, međutim može se reći da je ova razlika unutar dopuštenih granica. Vrijednosti naprezanja kod višerazinskog proračuna za model paralelnog spoja praktički odgovaraju onima koje su dobivene proračun na jednoj razini.

5.2.3. Spregnuti termomehanički primjer modela punog presjeka

Dvodimenzijski model štapa, prema Pogl. 5.2.1, korišten je za spregnuti termomehanički primjer proračuna aksijalnog opterećenja pomoću dvorazinske metode, za puni presjek na mikrorazini. Radi se o spregnutom termomehaničkom problemu s velikim deformacijama, budući da se razmatra utjecaj plastične deformacije na promjenu temperature tijela. Geometrija modela makrorazine definirana je prema Sl. 5.3, kao i kod prethodnog primjera, ali se sada sastoji se od elasto-plastičnog materijala.

5.2.3.1. Model mikrorazine

Model mikrorazine koji predstavlja puni presjek, definiran je prema geometriji prikazanoj na Sl. 5.7 a).



Slika 5.7 – Model punog presjeka mikrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata.

Značajke materijala definirane prema Tab. 5.11.

Tablica 5.11 – Značajke materijala mikrorazine.

Značajke materijala mikrorazine	
Modul elastičnosti	E = 200 GPa
Poissonov broj	ν= 0,3
Granica tečenja materijala	σ_T = 400 MPa
Koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja	H = 1000 MPa
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/°C

Na geometriji mikrorazine, Sl. 5.7 b), su postavljeni dvodimenzijski bilinearni kvadratni konačni elementi za ravninsko stanje deformacije (CPE4 elementi), s uključenom geometrijskom nelinearnošću, kao i kod prethodnog primjera. Osnovne karakteristike mreže konačnih elemenata dane su u Tab. 5.12. Mreža je rijetka, kao i kod serijskog i paralelnog spoja, iz istog razloga, odnosno radi trajanja proračuna. Ovdje se također pretpostavlja da to ne utječe na točnost rezultata samog proračuna.

Tablica 5.12 – Osnovne karakteristike mikrorazine.

Vrsta konačnih elemenata	CPE4
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	9
Ukupan broj elemenata	4

Oslonci su postavljeni pomoću periodičnih rubnih uvjeta, prema proceduri opisanoj u poglavlju 4.2.

5.2.3.2. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je aksijalnim pomakom slobodnog kraja štapa prikazanog na Sl. 5.3, koji iznosi koji iznosi u_1 = 50 mm. Višerazinski proračuni provedeni su pomoću korisničkih potprograma UMAT. Dodatni numerički proračuni, korištenjem standardnog materijalnog modela gdje su unesene materijalne značajke prema Tab. 5.3, provedeni su za puni presjek bez korištenja višerazinske metode, odnosno na jednoj razini (makrorazini).

Podaci koji služe za analitičku provjeru povećanja temperature su u ovome slučaju ekvivalentno naprezanje prema kriteriju von Misesa te ekvivalentna plastična deformacija.

Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.13. Prema rezultatima niza proračuna sa standardnim programskim materijalnim modelom dobivene su sljedeće vrijednosti:

- ekvivalentno naprezanje prema kriteriju von Misesa, σ_{ekv} = 453,3 MPa,
- ekvivalentna plastična deformacija $\varepsilon_{\text{ekv, pl}} = 5{,}335 \cdot 10^{-2} = 0{,}05335$.

Srednje naprezanje, prema Sl. 5.2 iznosi:

$$\sigma_{\text{sr}} = \frac{\sigma_{\text{T}} + \sigma_{\text{ekv}}}{2} = 426{,}65\,\text{MPa}\,. \tag{5.15}$$

Povećanje temperature, prema izrazu (5.10) za adijabatske procese pri konstantnom vremenskom intervalu, iznosi:

$$\Delta T = \beta \frac{\sigma_{\text{sr}} \varepsilon_{\text{ekv,pl}}}{\rho c} = 5{,}219\,^{\circ}\text{C}\,. \tag{5.16}$$

Prema rezultatima niza proračuna sa korisničkim materijalnim modelom, provedenog sa korisničkim potprogramom UMAT, dobivene su sljedeće vrijednosti (Tab. 5.13):

- ekvivalentno naprezanje prema kriteriju von Misesa, σ_{ekv} = 452,7 MPa,
- ekvivalentna plastična deformacija $\varepsilon_{\text{ekv, pl}} = 5{,}34 \cdot 10^{-2} = 0{,}0534$.

Srednje naprezanje, prema Sl. 5.2 iznosi:

$$\sigma_{\text{sr}} = \frac{\sigma_{\text{T}} + \sigma_{\text{ekv}}}{2} = 426{,}35\,\text{MPa}\,. \tag{5.17}$$

Povećanje temperature, prema izrazu (5.10) za adijabatske procese pri konstantnom vremenskom intervalu, iznosi:

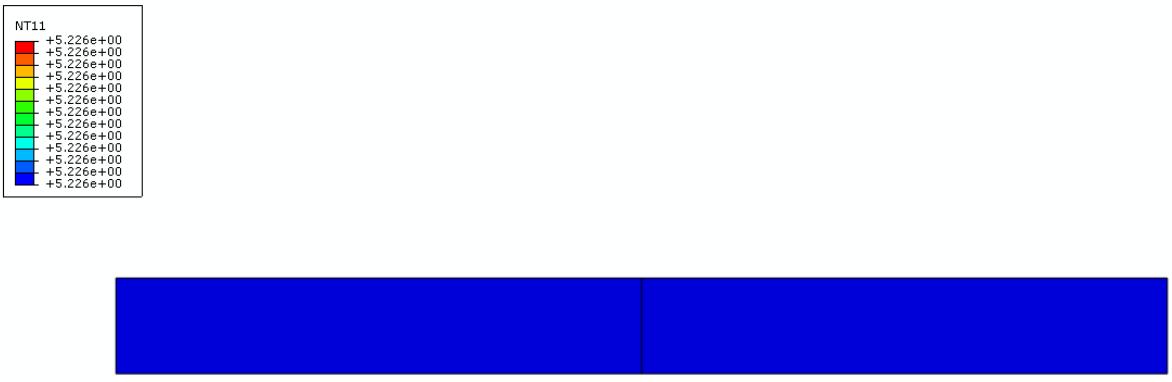
$$\Delta T = \beta \frac{\sigma_{\text{sr}} \varepsilon_{\text{ekv,pl}}}{\rho c} = 5{,}22\,^{\circ}\text{C}\,. \tag{5.18}$$

Tablica 5.13 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima punog presjeka pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom.

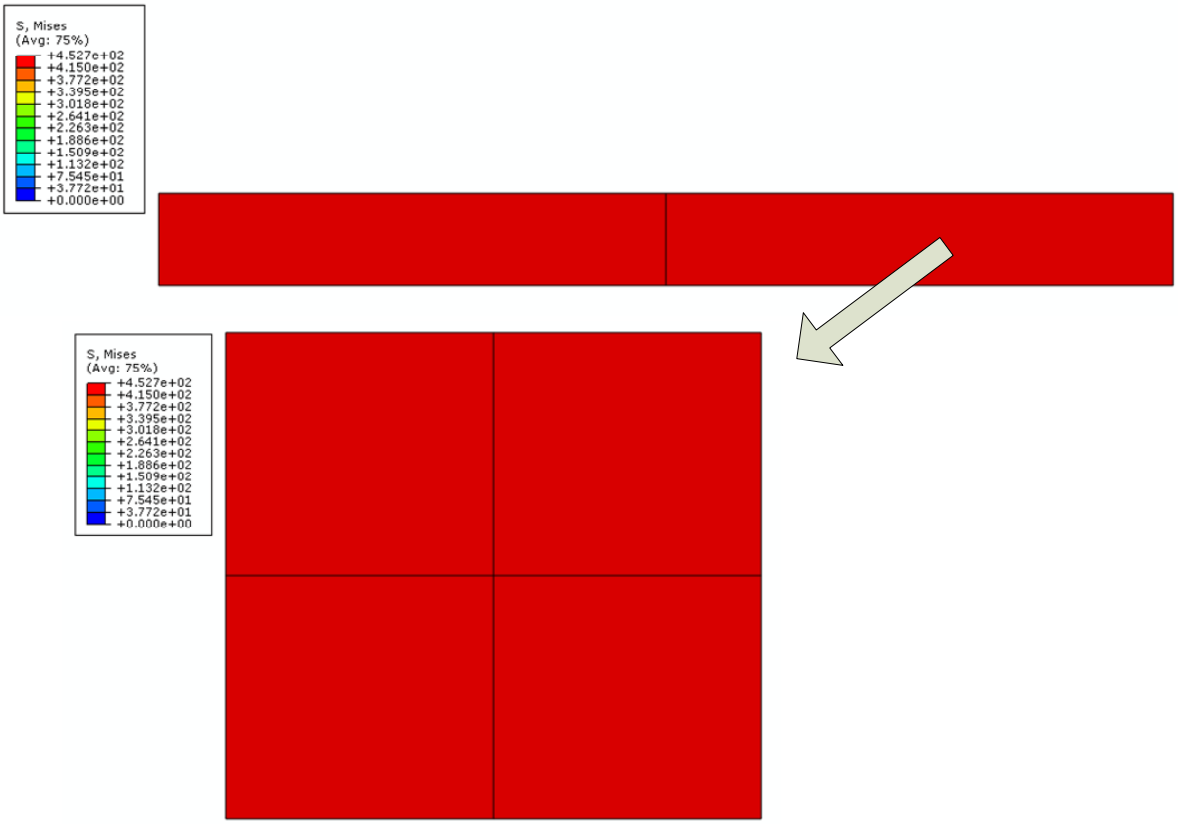
Broj koraka	Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)		Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)		Ekv. plastična deformacija / % (PEEQ – Eq. plastic strain) (SDV – State variable)	
	Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT
5	4,810	5,234	453,3	452,7	5,334	5,338
50	5,217	5,226	453,3	452,7	5,335	5,340

Usporedbom numeričkih rezultata vidi se da vrijednosti temperature dobivene višerazinskim proračunom praktički odgovara analitičkom rezultatu, već i kod manje veličine koraka, za razliku od proračuna na jednoj razini sa istim materijalnim značajkama. To ukazuje na visoku razinu točnosti višerazinskog modeliranja za određivanje temperature. Raspodjela temperature na makrorazini prikazana je na Sl. 5.8. Kao što je to i očekivano, polje temperature je homogeno.

Ekvivalenta von Misesova naprezanja i plastične deformacije imaju praktički jednake vrijednosti u oba proračuna. Njihova je raspodjela kod višerazinskog proračuna jednaka na makrorazini i na mikrorazini, što se može zaključiti na temelju raspodjele prema Sl. 5.9.



Slika 5.8 – Makro model: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT.



Slika 5.9 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT.

5.2.4. Spregnuti termomehanički primjer modela serijskog spoja

Dvodimenzijski model štapa korišten je za spregnuti termomehanički primjer proračuna aksijalnog opterećenja pomoću dvorazinske metode, za serijski spoj na mikrorazini. Geometrija modela makrorazine je definirana prema Sl. 5.3, kao i kod prethodnog primjera, ali se sada sastoji se od dva elasto-plastična materijala spojena u seriji.

Model makrorazine izrađen je kao i model opisan u Pogl. 5.2.1, jedino su značajke materijala makrorazine postavljene prema Tab. 5.14.

Tablica 5.14 – Značajke materijala makrorazine.

Značajke materijala makrorazine	
Gustoća	$\rho = 7850$ kg/m^3
Koeficijent provođenja topline	$k = 50$ W/mK
Specifični toplinski kapacitet	$c_p = 500$ J/kgK
Homogenizirani koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ 1/°C
Taylor-Quinneyjev faktor	$\beta = 0{,}9$

Model mikrorazine za serijski spoj izrađen je kao i model iz Pogl. 5.2.2.1. Značajke materijala mikrorazine postavljene su prema Tab. 5.6.

Tablica 5.15 – Značajke materijala mikrorazine.

Značajke materijala mikrorazine	Materijal 1	Materijal 2
Modul elastičnosti	E_1 = 200 GPa	E_2 = 200 GPa
Poissonov broj	ν_1 = 0,3	ν_2 = 0,3
Granica tečenja materijala	σ_{T1} = 400 MPa	σ_{T2} = 300 MPa
Koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja	H_1 = 1000 MPa	H_2 = 500 MPa
Koeficijent toplinskog rastezanja	$\alpha_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ 1/°C	$\alpha_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ 1/°C

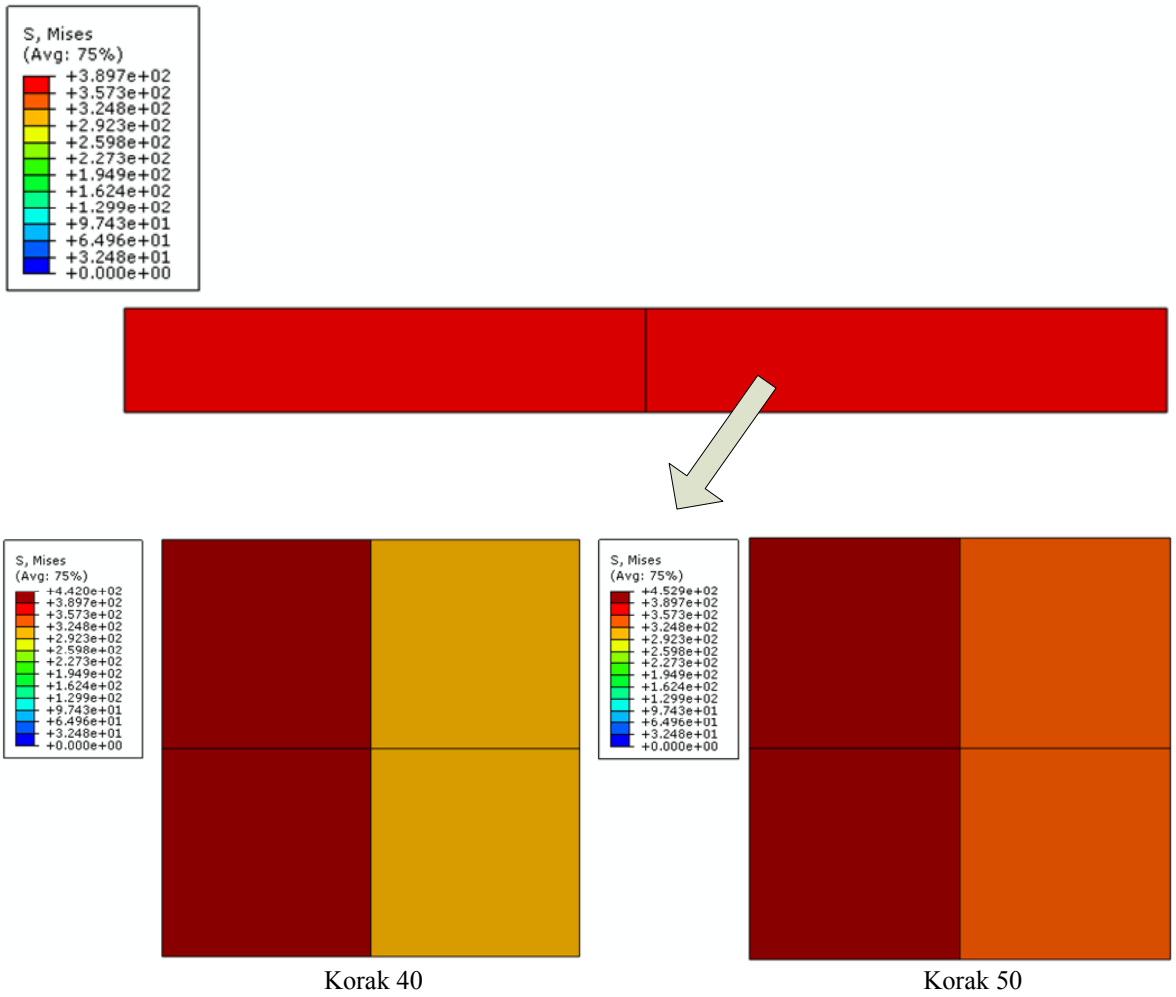
5.2.4.1. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je aksijalnim pomakom slobodnog kraja štapa prikazanog na Sl. 5.3, koji iznosi koji iznosi u_1 = 50 mm. Višerazinski proračuni provedeni su pomoću korisničkih potprograma UMAT. Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.16

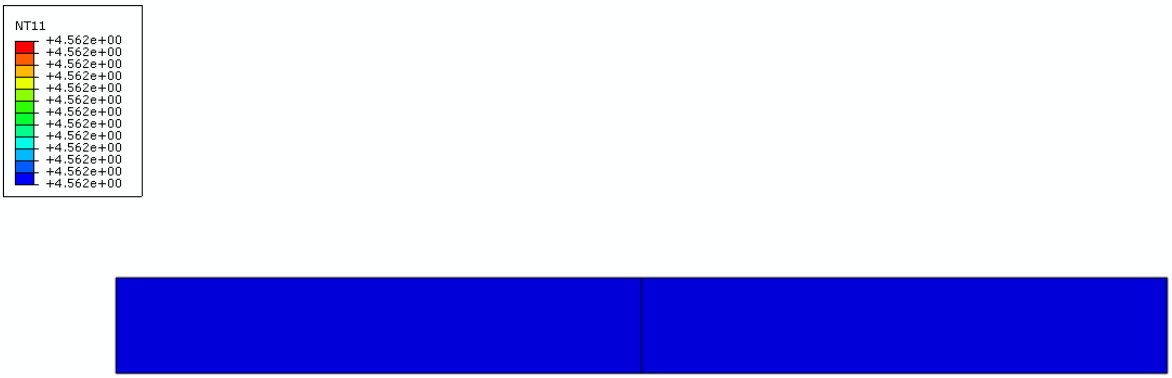
Tablica 5.16 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima serijskog spoja sa vlastitim korisničkim potprogramom.

Broj koraka	Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)	Ekv. plastična deformacija / % (SDV – State variable)
	UMAT	UMAT	UMAT
20	4,563	389,7	5,381
50	4,562	389,7	5,381

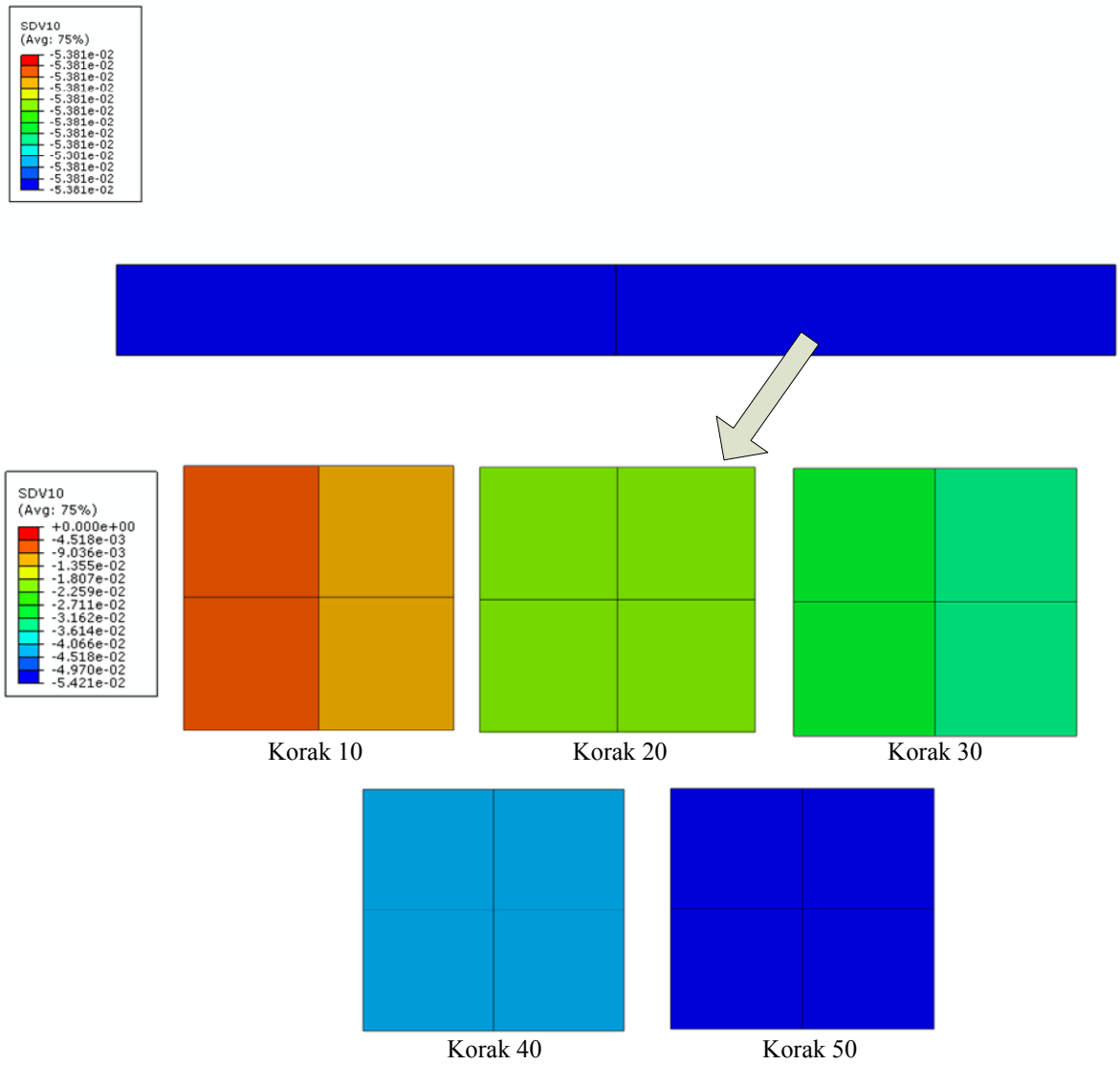
Usporedbom numeričkih rezultata, Tab. 5.16 i Sl. 5.11, vidi se da veličina koraka nema značajan utjecaj na povećanje temperature. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja kod serijskog spoja, Sl. 5.10, jasno daje do znanja da dva materijala imaju različito ponašanje. Iako je polje plastične deformacije nakon zadnjeg koraka homogeno, Sl. 5.12, ekvivalentno naprezanje je kod jednog materijala ipak veće.



Slika 5.10 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT.



Slika 5.11 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT.



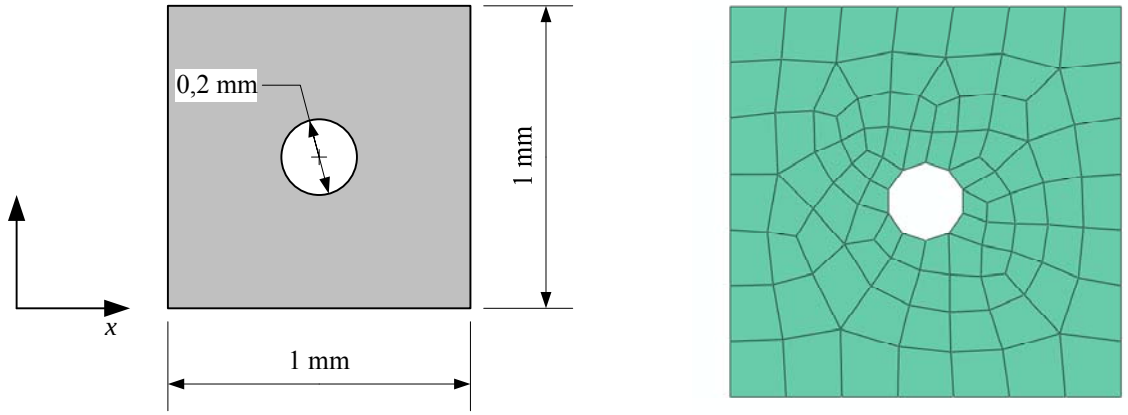
Slika 5.12 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT.

5.2.5. Spregnuti termomehanički primjer modela s porom

Dvodimenzijski model štapa ovdje je korišten za spregnuti termomehanički primjer proračuna aksijalnog opterećenja pomoću dvorazinske metode, za presjek s porom na mikrorazini. Model makrorazine, opisan u Pogl. 5.2.1, kod ovog primjera se sastoji od elasto-plastičnog materijala.

5.2.5.1. Model mikrorazine

Model mikrorazine koji predstavlja presjek s porom, definiran je prema geometriji prikazanoj na Sl. 5.13 a).



Slika 5.13 – Model mikrorazine s porom: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata.

Značajke materijala definirane prema Tab. 5.11. Na geometriji mikrorazine, Sl. 5.13 b), su postavljeni dvodimenzijski bilinearni četverokutni konačni elementi za ravninsko stanje deformacije (CPE4 elementi), s uključenom geometrijskom nelinearnošću, kao i kod prethodnih modela mikrorazine. Osnovne karakteristike mreže konačnih elemenata dane su u Tab. 5.12. Mreža je u ovom primjeru gušća, iz razloga što se ovdje očekuje pojava koncentracije naprezanja u zoni pore.

Tablica 5.17 – Osnovne karakteristike mikrorazine.

Vrsta konačnih elemenata	CPE4
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	108
Ukupan broj elemenata	89

Oslonci su postavljeni pomoću periodičnih rubnih uvjeta, prema proceduri opisanoj u poglavlju 4.2.

5.2.5.2. Numerički proračun

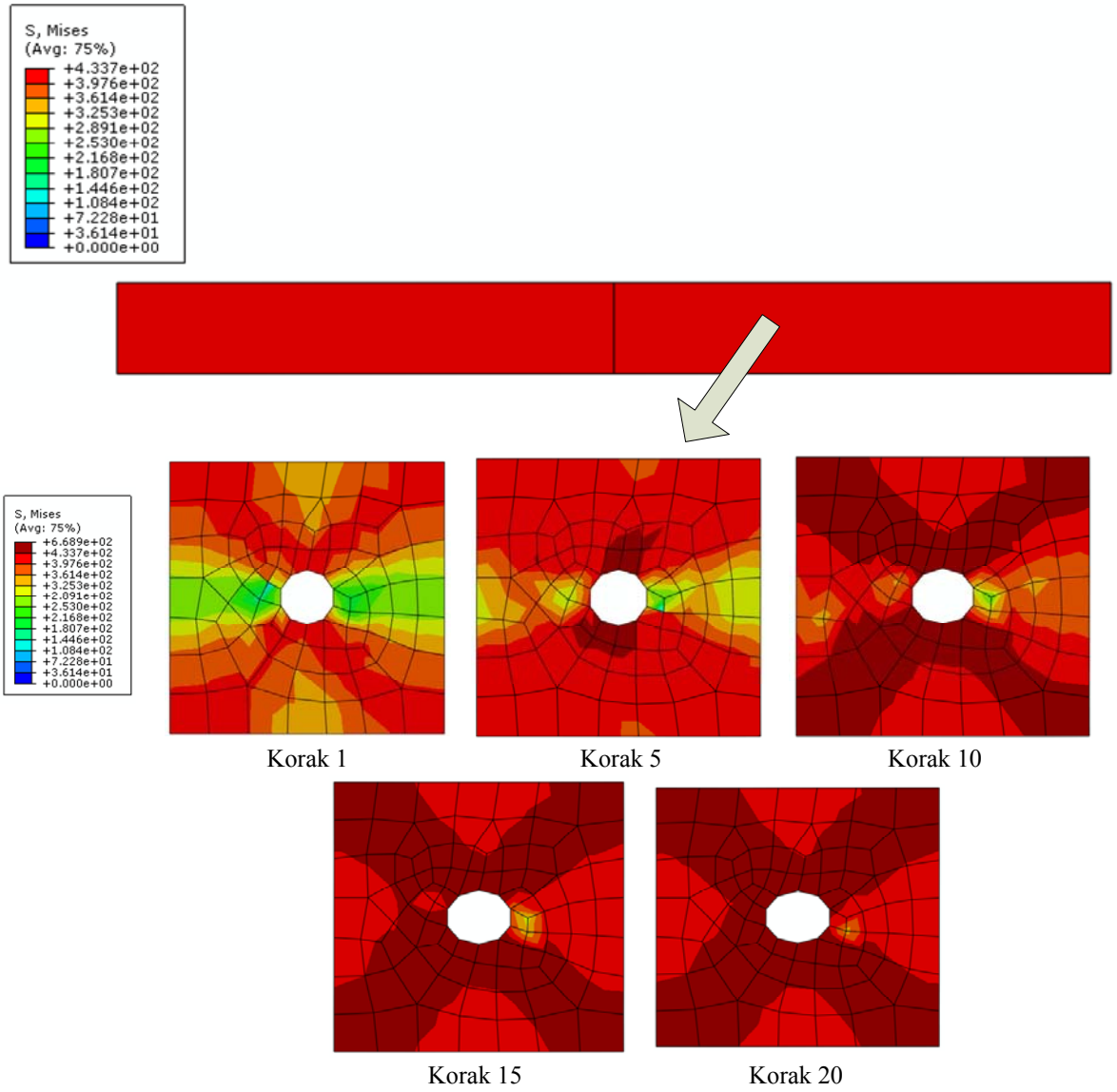
Rubni uvjet određen je aksijalnim pomakom slobodnog kraja štapa prikazanog na Sl. 5.3, koji iznosi koji iznosi u_1 = 50 mm. Višerazinski proračuni provedeni su pomoću korisničkih potprograma UMAT. Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.18.

Tablica 5.18 – Rezultati višerazinskog proračunima za slučaj modela s porom.

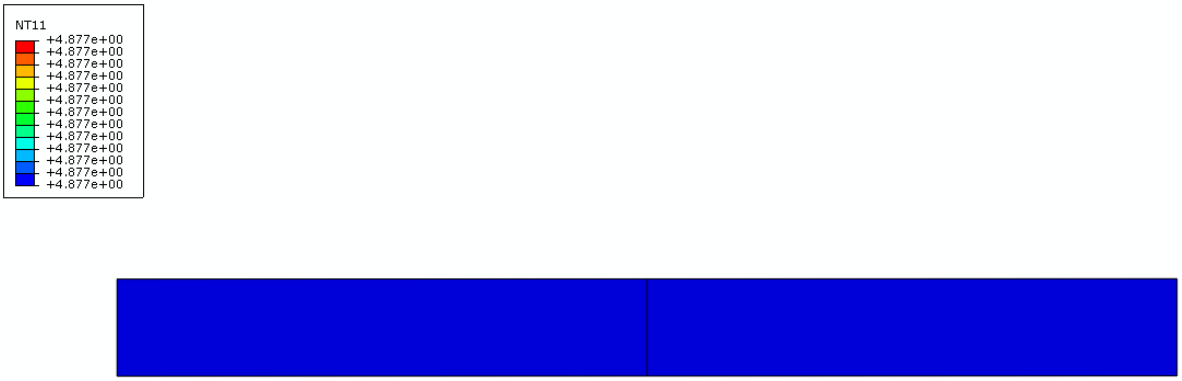
Broj koraka	Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)	Plastična deformacija / % (SDV – State variable)
	UMAT	UMAT	UMAT
20	4,877	433,7	4,837

Raspodjela numeričkih rezultata dobivenih pomoću višerazinskog proračuna prikazana je na Sl. 5.14 – Sl. 5.16. Na Sl. 5.14 je prikazana raspodjela ekvivalentnog naprezanja prema kojoj se vidi da se već u prvom koraku javljaju naprezanja veća od granice tečenja, odnosno u presjeku je počela plastifikacija. Nakon zadnjeg koraka cijeli RVE je plastificiran.

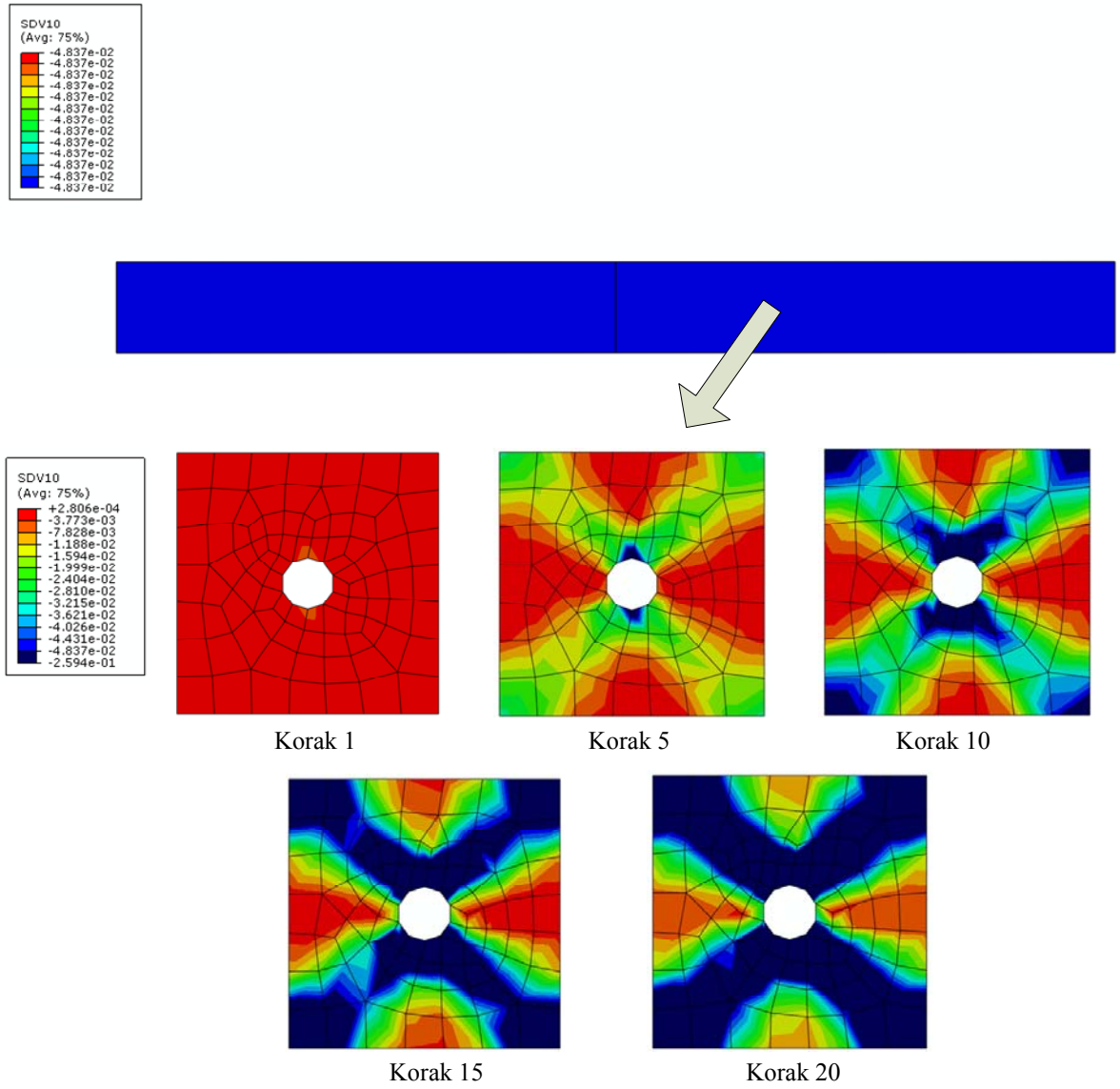
Prema Sl. 5.16 se može uočiti nastanak plastične deformacije oko pore, čije se područje postupno širi, dok na kraju cijeli RVE nije plastificiran. Prema raspodjela plastičnih deformacija, najveće vrijednosti plastičnih deformacija se javljaju na pravcima najvećih tangencijalnih naprezanja



Slika 5.14 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT.



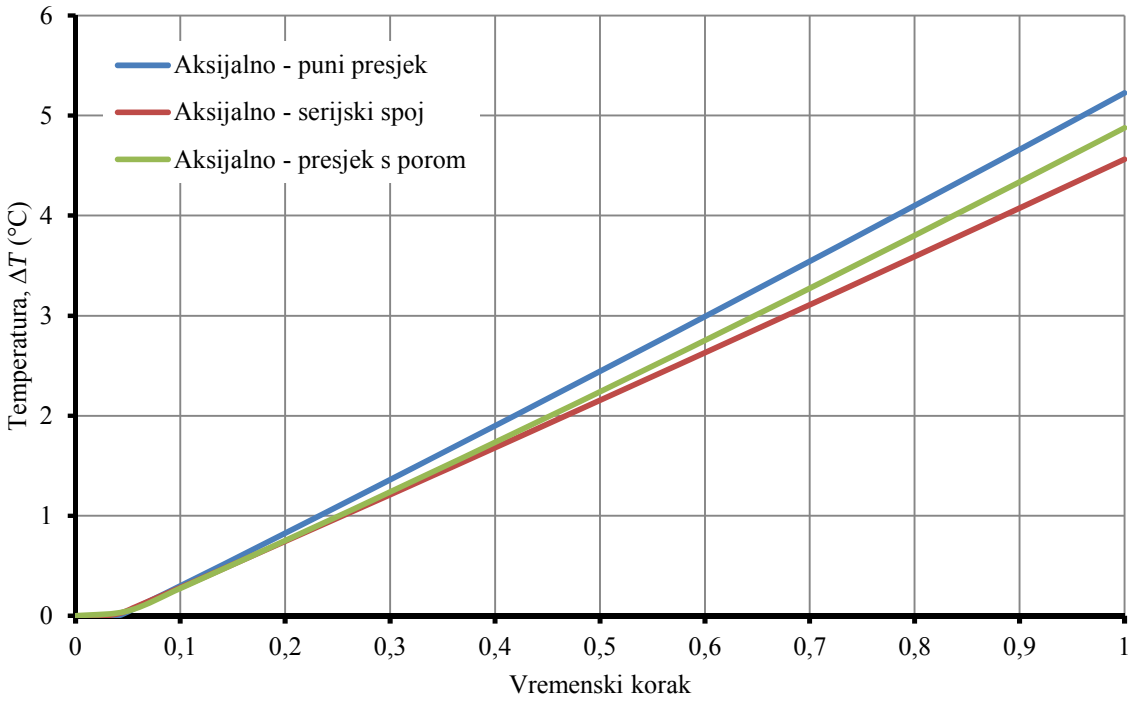
Slika 5.15 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT.



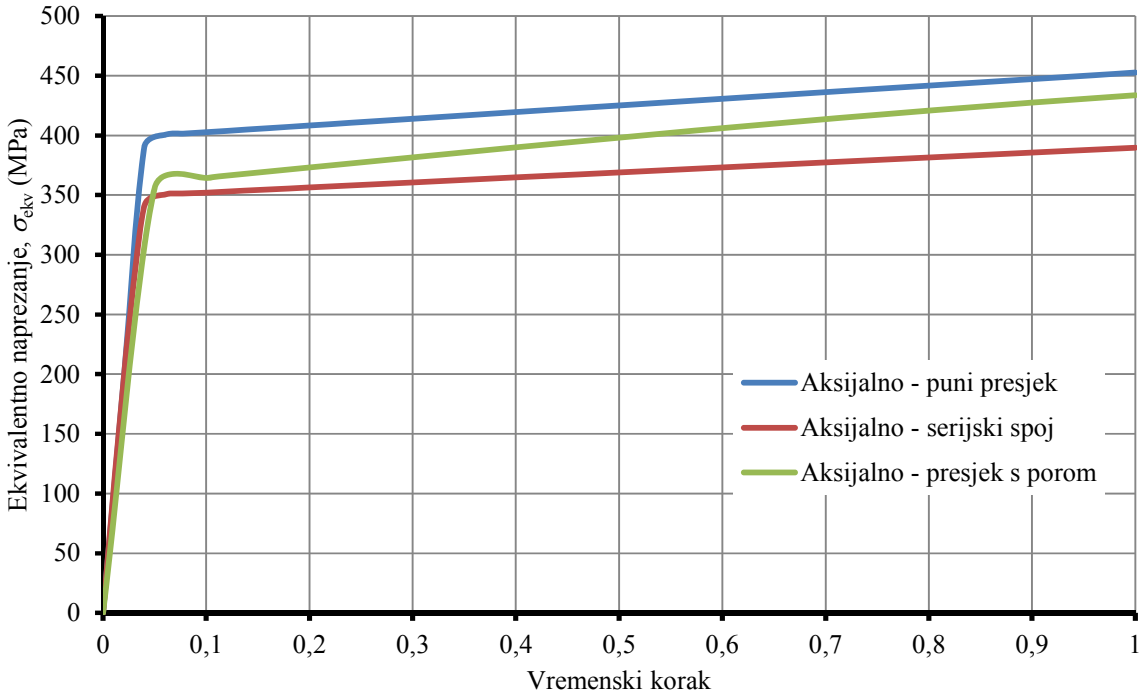
Slika 5.16 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT

5.2.6. Usporedba rezultata dobivenih s različitim mikrorazinama

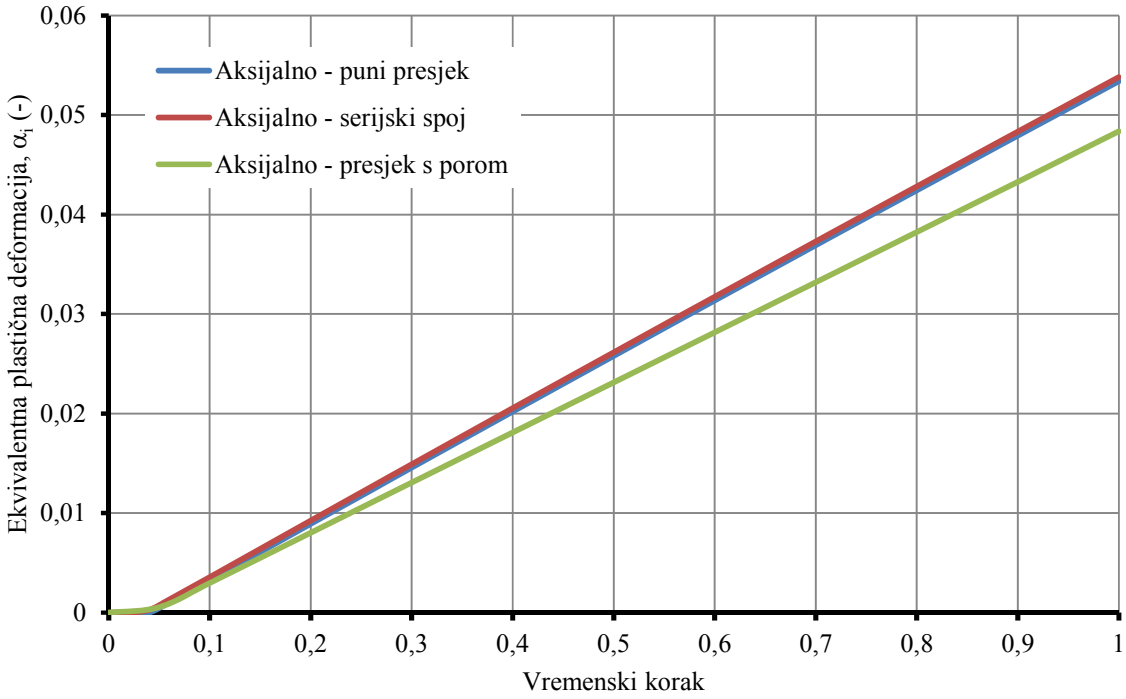
Za elemente makrorazine može se izvršiti usporedba rezultata proračuna kod aksijalnog opterećenja štapa dobivenih za ranije prikazane reprezentativne volumenske elemente mikrorazine. Rezultati proračuna mogu se prikazati dijagramima za temperaturu, naprezanje, odnosno plastičnu deformaciju za drugi element mreže konačnih elemenata, odnosno za njegov čvor, prema Sl. 5.3. Vremenski interval u dijagramima je postavljen tako da vrijednost vremenskog koraka 1 odgovara maksimalnom produljenju zadanom rubnim uvjetom. Ostale vrijednosti linearno su interpolirane.



Slika 5.17 – Dijagram temperatura / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.



Slika 5.18 – Dijagram ekvivalentno naprezanje / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.



Slika 5.19 – Dijagram plastična deformacija / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.

Ekvivalentna plastična deformacija kod serijskog spoja, Sl. 5.19, zanemarivo je veća u odnosu na puni presjek, ali je ekvivalentno naprezanje manje, Sl. 5.18. Vrijednosti temperature, Sl. 5.17. dobivene višerazinskim proračunom nešto su manje o odnosu na isti proračun sa punim presjekom. Razlog je u nižim vrijednostima naprezanja koja se dobivaju radi postojanja materijala sa drugim značajkama, a polje naprezanja se dobije homogenizacijom rezultata sa mikrorazine.

Prema rezultatima proračuna s porom, vidi se da je ekvivalentno naprezanje manje u odnosu na vrijednost kod punog presjeka. Ekvivalentna plastična deformacija također je manja nego kod punog presjeka. To rezultira manjim povećanjem temperature nego kod punog presjeka. U odnosu na serijski spoj pri jednakom aksijalnom pomaku, ekvivalentno naprezanje je veće, ali je ekvivalentna plastična deformacija manja, što rezultira ipak većim povećanjem temperature.

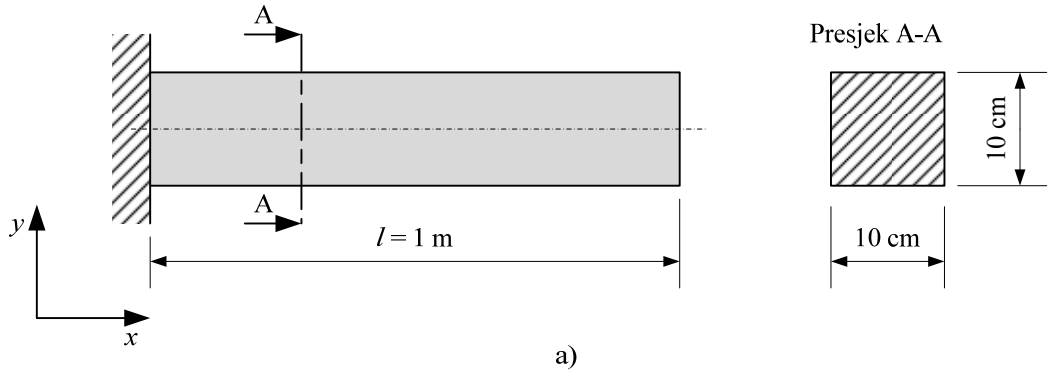
5.3. Savijanje grede

Modeli savijanja grede predstavljaju drugu skupinu numeričkih primjera pomoću višerazinske metode. Greda se može prikazati 2-D numeričkih modelom. Proračuni su provedeni korištenjem višerazinske metode, pomoću korisničkih potprograma UMAT, na promijenjenom modelu makrorazine, u odnosu na primjere aksijalnog opterećenja. Primjeri su

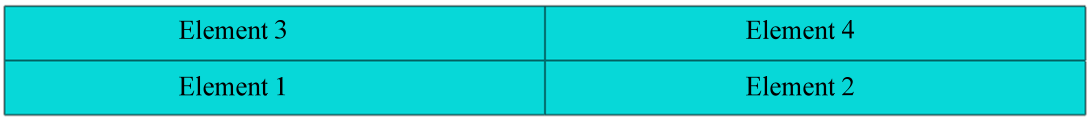
izrađeni korištenjem raznih modela mikrorazine. Pomoću modela makrorazine može se izvršiti provjera rezultata višerazinskih proračuna, pokretanjem proračuna sa standardnim programskim materijalom, bez korištenja višerazinskog proračuna. Modeli su dvodimenzijski te je postavljena mreža ravninskih konačnih elemenata.

5.3.1. Model makrorazine

Na geometriju makrorazine, čije su dimenzije prikazane na Sl. 5.20, postavljena je mreža sa četiri dvodimenzijska termomehanički spregnuta konačna elementa za ravninsko stanje deformacije (CPE4RT elementi), s uključenom geometrijskom nelinearnošću i reduciranom integracijom. Osjetljivost elemenata na velike deformacije ovdje se nadilazi korištenjem opcije **Hourglass Stiffness** = 20000. Ovdje je gustoća mreže nešto veća u odnosu na model makrorazine kod aksijalnog opterećenja, budući da se očekuje nehomogena raspodjela polja naprezanja, deformacije, ali i temperature uslijed savijanja.



a)



b)

Slika 5.20 – Model makrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata.

Značajke materijala makrorazine, koje su unesene pomoću korisničkog materijalnog modela, iste su kao i kod aksijalnog opterećenja, definirane prema Tab. 5.5. Osnovne karakteristike mreže konačnih elemenata dane su u Tab. 5.19.

Tablica 5.19 – Osnovne karakteristike mreže makrorazine.

Vrsta konačnih elemenata	CPE4RT
Karakteristika	Vrijednost
Ukupan broj čvorova	9
Ukupan broj elemenata	4

Oslonci su postavljeni na način da su spriječeni kruti pomaci tijela u ravnini, prema Sl. 5.20, odnosno:

- krajnji lijevi rub modela je ukliješten, odnosno čvorovi koji se nalaze na krajnjem lijevom rubu modela imaju spriječene pomake na pravcima osi x i y.

5.3.2. Spregnuti termomehanički primjer modela punog presjeka

Dvodimenzijski model grede, prema Pogl. 5.3.1, korišten je za spregnuti termomehanički primjer proračuna savijanja pomoću dvorazinske metode, za puni presjek na mikrorazini. Ovo je također spregnuti termomehanički problem, jer se razmatra utjecaj plastične deformacije na promjenu temperature tijela. Geometrija modela makrorazine, definirana prema Sl. 5.20, sastoji se od elasto-plastičnog materijala. Kao model mikrorazine korišten je onaj opisan u Pogl. 5.2.3.1.

5.3.2.1. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je kutom rotacije slobodnoga kraja koji iznosi $u_3 = –0{,}5$ rad. Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.20 i Tab. 5.21

Tablica 5.20 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću standardnog materijalnog modela i vlastitim korisničkim potprogramom za slučaj modela punog presjeka.

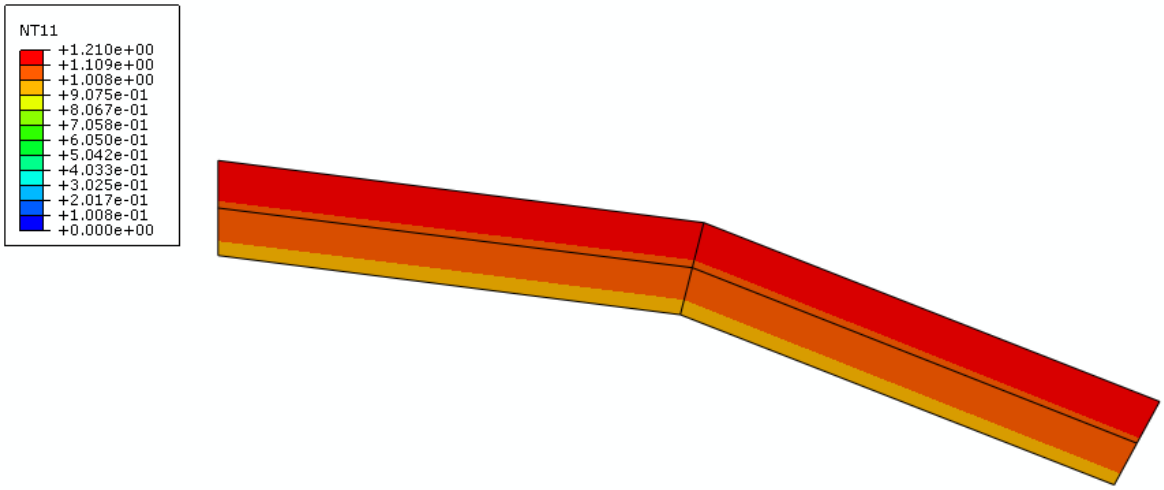
Broj koraka (automatski)		Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)		Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)		Ekv. plastična deformacija / % (PEEQ – Eq. plastic strain) (SDV – State variable)	
		Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT	Stand. mat.	UMAT
20	Max	1,209	1,210	420,1	419,8	2,010	2,032
	Min	0,9632	0,9705	402,5	400,8	0,314	0,287

Tablica 5.21 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću standardnog materijalnog modela i vlastitim korisničkim potprogramom za slučaj modela punog presjeka (nastavak).

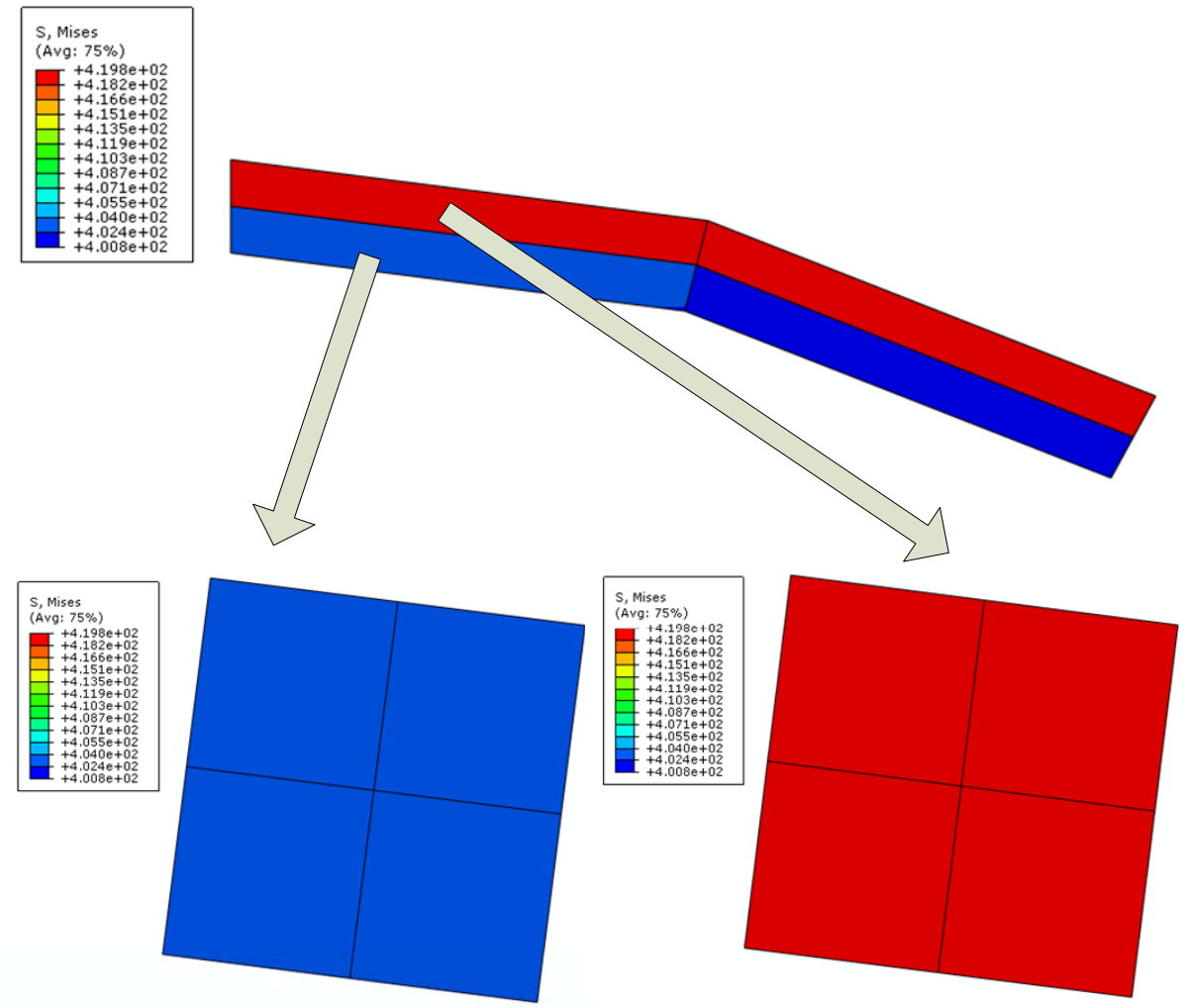
Broj koraka	Vertikalni pomak / mm (U2 – Displacement)	
	Stand. mat.	UMAT
20	253,7	253,6

Usporedbom numeričkih rezultata vidi se da su vrijednosti temperature dobivene višerazinskim proračunom jednake proračunu na jednoj razini sa istim materijalnim značajkama. Naprezanja i plastične deformacije, također, imaju praktički jednake vrijednosti u oba proračuna.

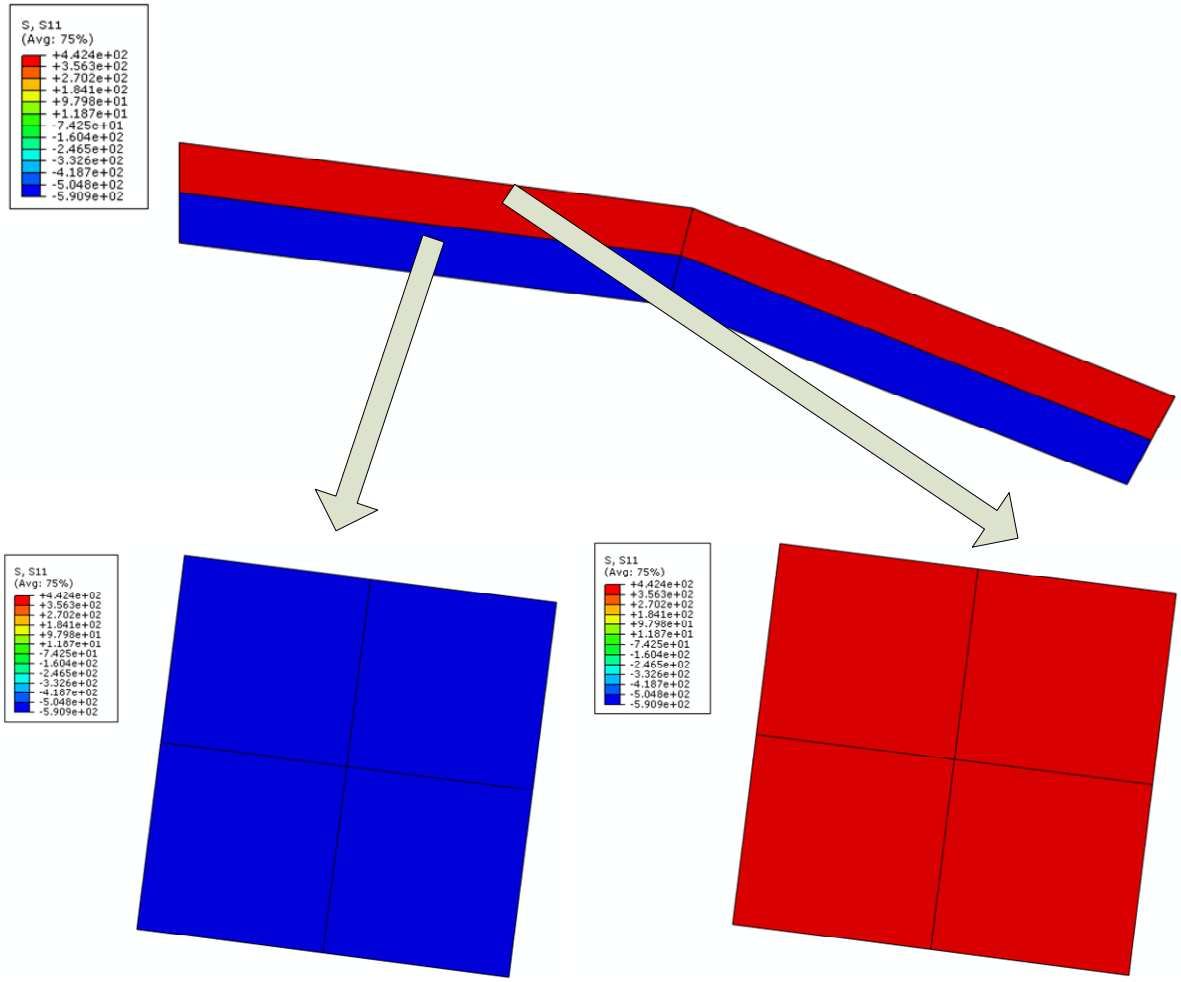
Na dijagramu raspodjele temperature makro razine u odnosu vremenski korak se vidi da je promjena temperature kod savijanja također linearna, kao i kod aksijalnog opterećenja. Raspodjela plastične deformacije, međutim, ipak je nelinearna. Budući da je savijanje u negativnom smjeru osi *y*, normalna naprezanja na pravcu osi *x* su raspoređena tako da je sa gornje strane vlačno naprezanje, odnosno sa donje strane tlačno naprezanje. Ova naprezanja su raspoređena na način da pripadni model mikrorazine ima homogenu raspodjelu, jedan vlačnu, dok drugi tlačnu. Skreće se pažnja da je korišten višerazinski pristup teorijom prvog reda. Ovaj pristup ima manjkavosti spram teorije drugog reda i osnovni je razlog pojave sitnih odstupanja u ovome primjeru.



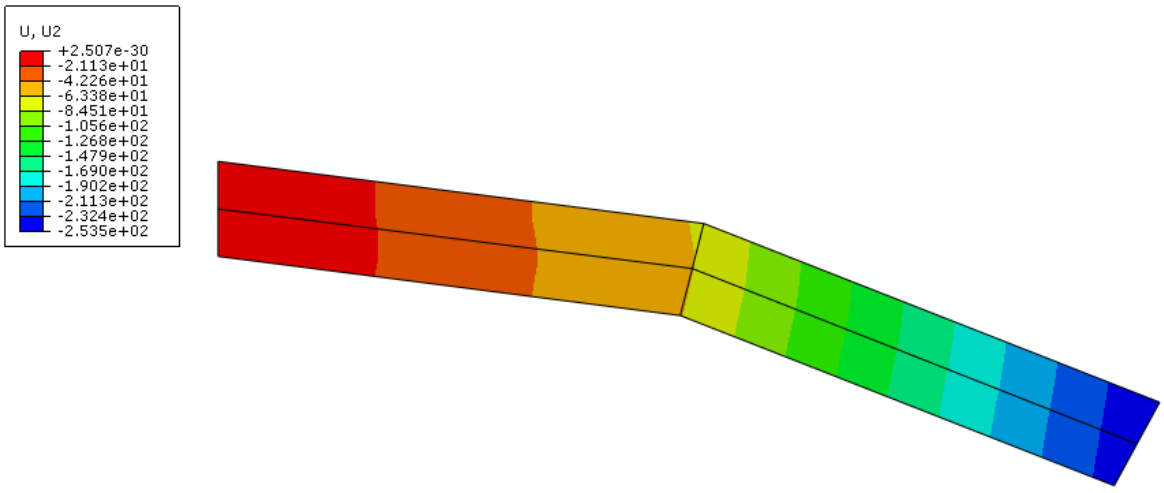
Slika 5.21 – Makrorazina: Raspodjela čvornih temperatura (°C), UMAT.



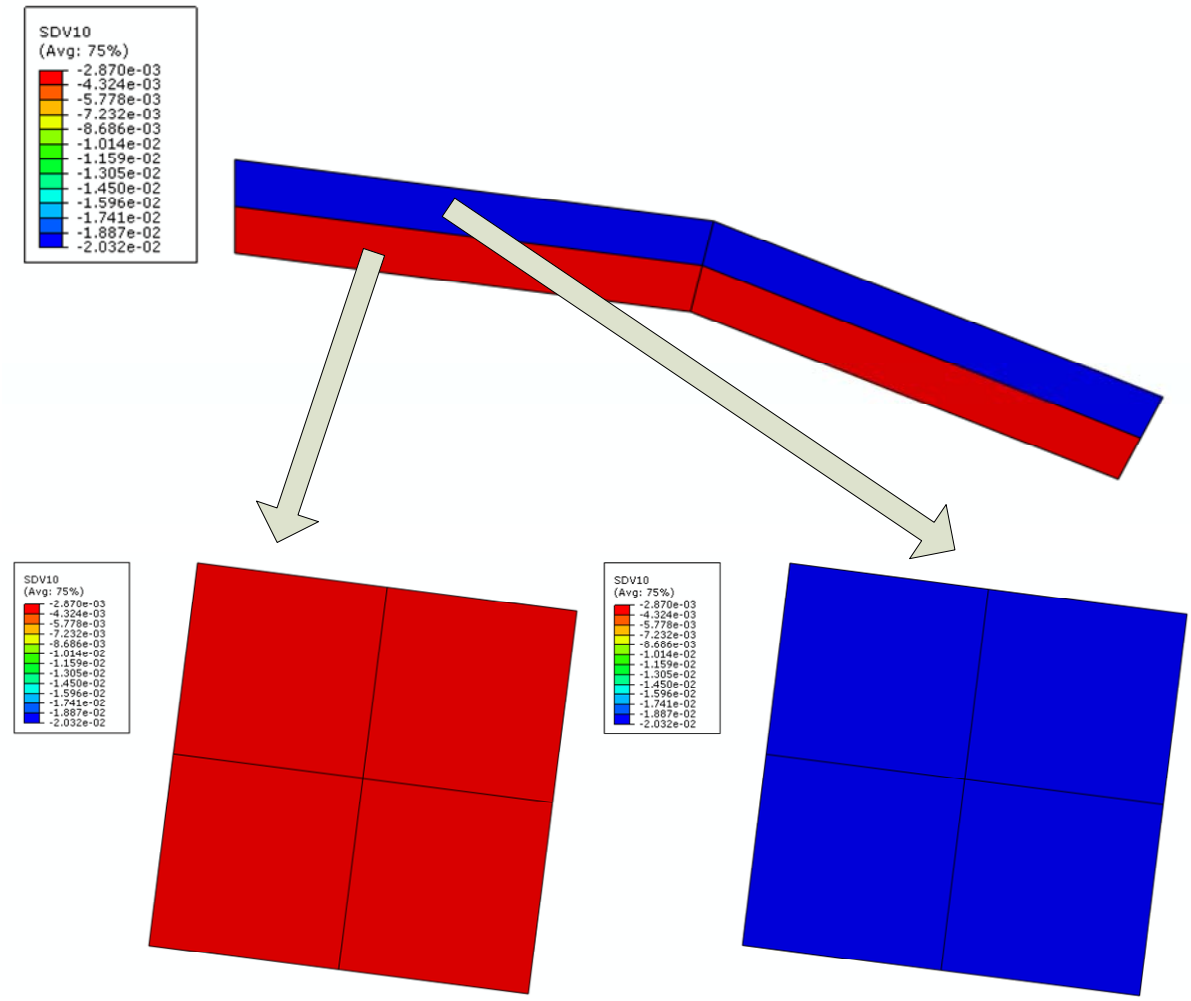
Slika 5.22 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak.



Slika 5.23 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.



Slika 5.24 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT.



Slika 5.25 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT, zadnji korak.

5.3.3. Spregnuti termomehanički primjer modela serijskog spoja

Dvodimenzijski model grede korišten je za spregnuti termomehanički primjer proračuna savijanja pomoću dvorazinske metode, za serijski spoj na mikrorazini.

Geometrija modela makrorazine je definirana prema Sl. 5.20 u Pogl. 5.3.1, kao i kod prethodnog primjera za savijanje, ali se sada sastoji se od dva elasto-plastična materijala spojena u seriji. Značajke materijala makrorazine postavljene su prema Tab. 5.14.

Model mikrorazine za serijski spoj izrađen je kao i model koji je opisan u Pogl. 5.2.2.1. Značajke materijala mikrorazine postavljene su prema Tab. 5.6.

5.3.3.1. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je kutom rotacije slobodnoga kraja koji iznosi $u_3 = –0{,}5$ rad. Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.22 i Tab. 5.23.

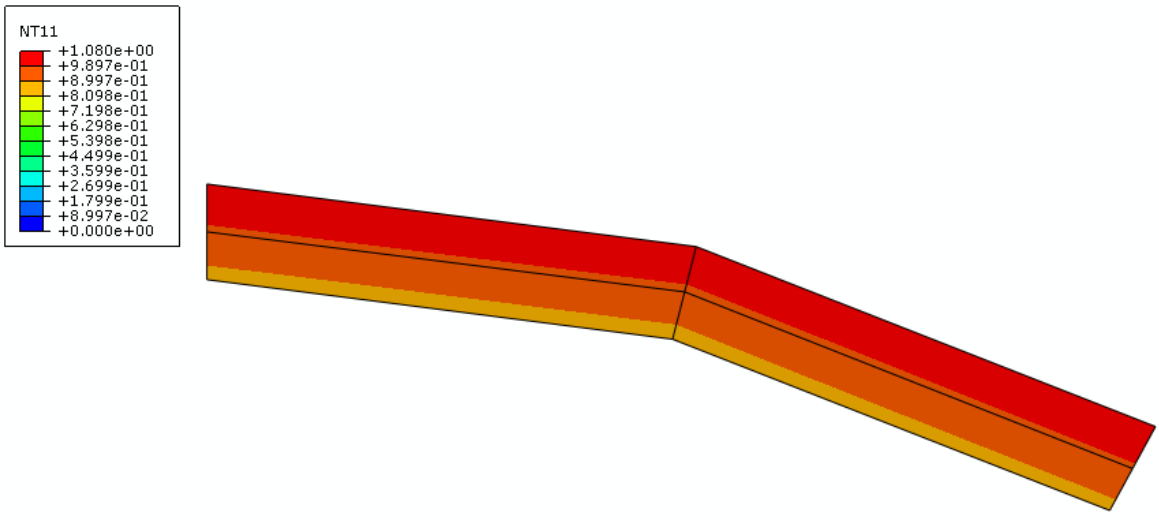
Tablica 5.22 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkog potprograma za slučaj modela serijskog spoja.

Broj koraka (automatski)		Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)	Ekv. plastična deformacija / % (SDV – State variable)
		UMAT	UMAT	UMAT
20	Max	1,079	365,2	2,093
	Min	0,868	349,1	0,290

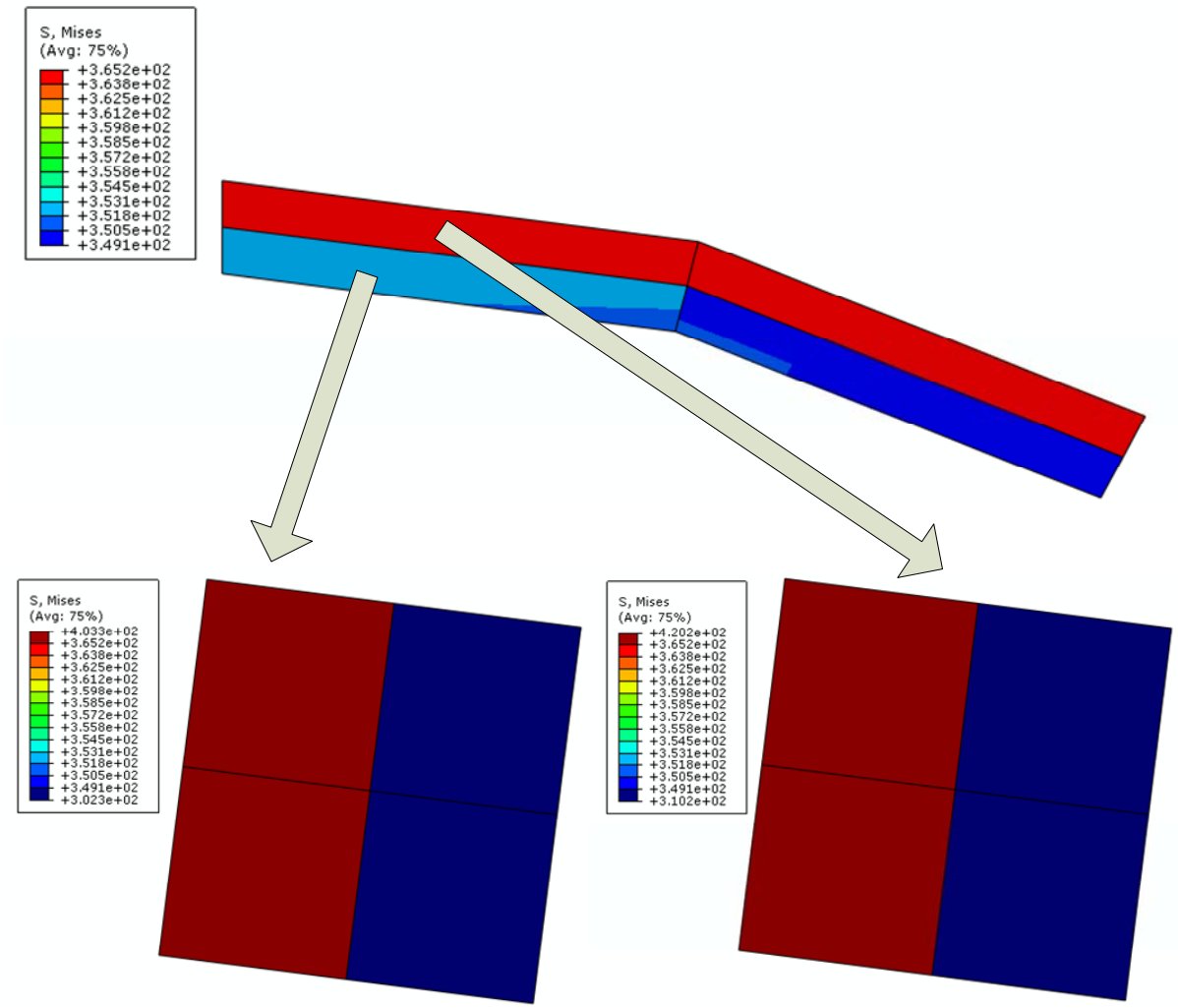
Tablica 5.23 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkog potprograma za slučaj modela serijskog spoja (nastavak).

Broj koraka	Vertikalni pomak / mm (U2 – Displacement)
	UMAT
20	253,6

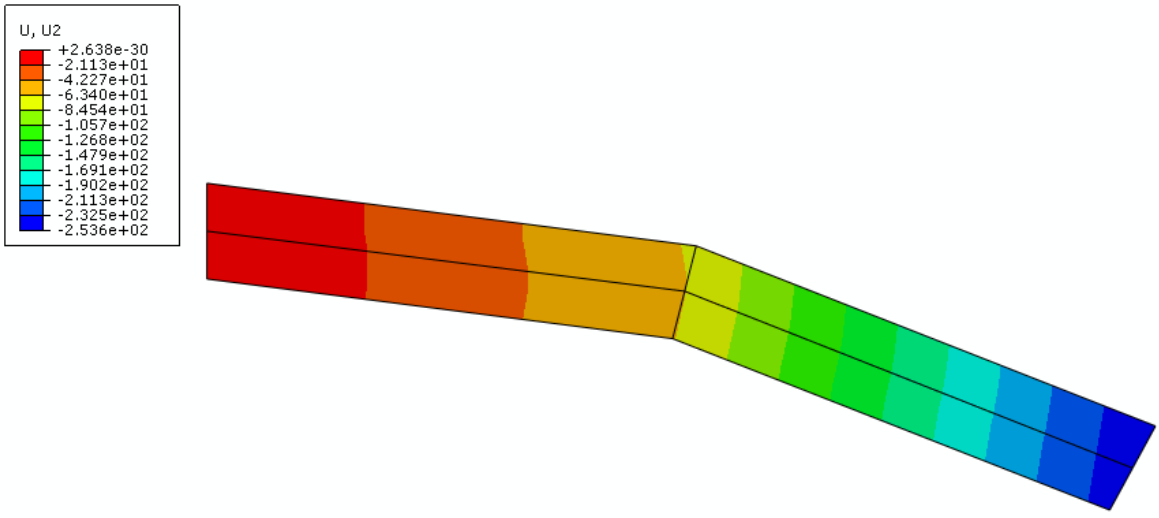
Raspodjela numeričkih rezultata dobivenih pomoću višerazinskog proračuna prikazana je na Sl. 5.26 – Sl. 5.30.



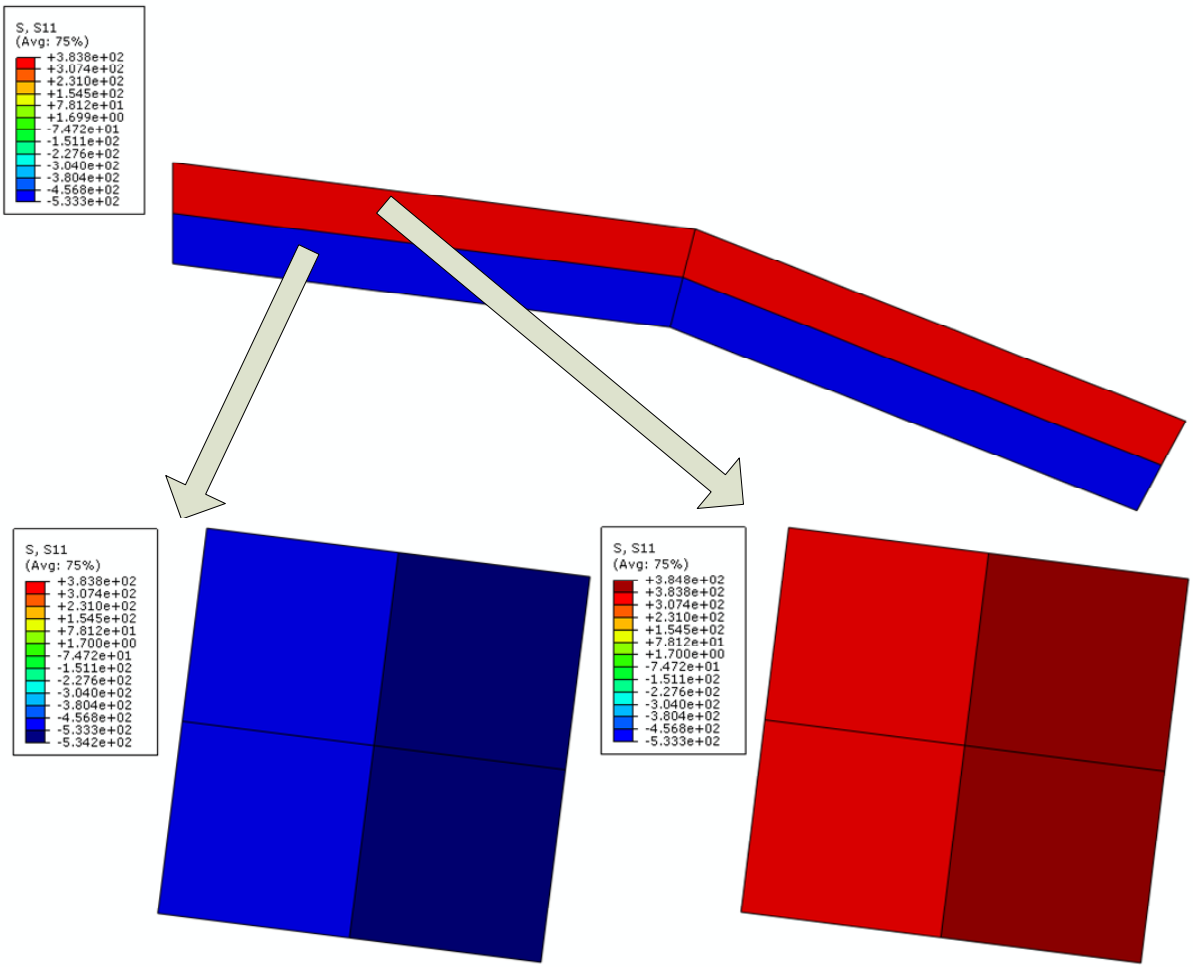
Slika 5.26 – Makrorazina: raspodjela čvornih temperatura (°C), UMAT.



Slika 5.27 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak.

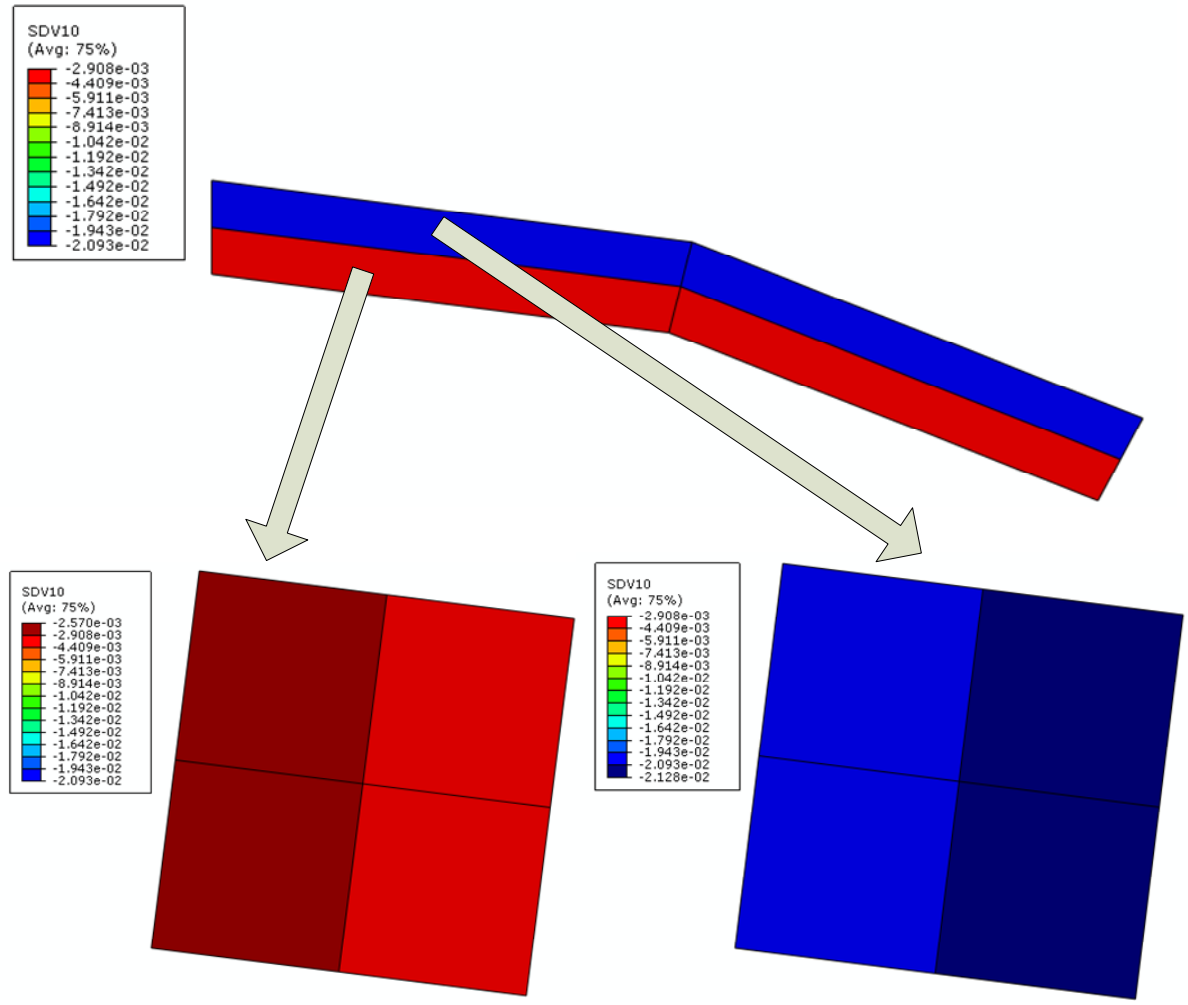


Slika 5.28 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT.



Slika 5.29 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.

Raspodjele naprezanja, prema Sl. 5.27 i Sl. 5.29, prikazuju na makro razini usrednjena naprezanja, odnosno plastične deformacije, sa glavnim rasponom koji je prilagođen raspodjeli na mikrorazini. Naprezanja iznad najveće vrijednosti, odnosno ispod najmanje vrijednosti prikazana su tamnijim bojama radi jednostavnijeg prikaza. Vidi se da su ekvivalentna naprezanja u oba materijala iznad pripadnih granica tečenja, odnosno materijali se nalaze u plastičnom području.



Slika 5.30 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–),UMAT, zadnji korak.

5.3.4. Spregnuti termomehanički primjer modela s porom

Dvodimenzijski model grede, prema Pogl. 5.3.1, korišten je za spregnuti termomehanički primjer proračuna savijanja pomoću dvorazinske metode, za presjek s porom na mikrorazini. Ovo je također spregnuti termomehanički problem, jer se razmatra utjecaj plastične deformacije na promjenu temperature tijela. Geometrija modela makrorazine, definirana prema Sl. 5.20, sastoji se od elasto-plastičnog materijala. Za mikrorazinu je korišten model opisan u Pogl. 5.2.5.1.

5.3.4.1. Numerički proračun

Rubni uvjet određen je kutom rotacije slobodnoga kraja koji iznosi u_3 = –0,25 rad. Rezultati proračuna prikazani su u Tab. 5.24 i Tab. 5.25.

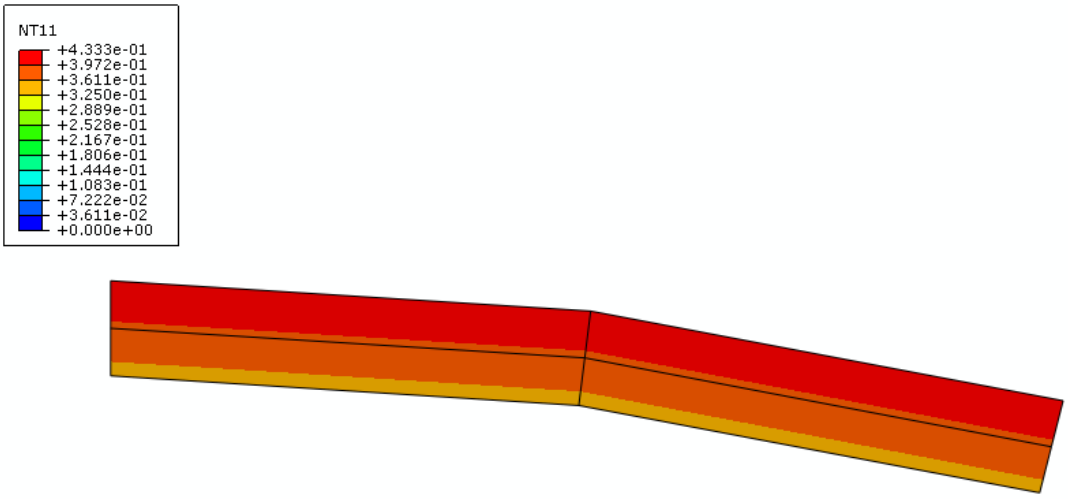
Tablica 5.24 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkom potprograma za slučaj modela sa porom.

Broj koraka		Povećanje temperature / °C (NT – Nodal temperature)	Ekv. naprezanje / MPa (S-Mises – Stress)	Ekv. plastična deformacija / % (SDV – State variable)
		UMAT	UMAT	UMAT
10	Max	0,433	369,7	0,569
	Min	0,348	359,1	0,272

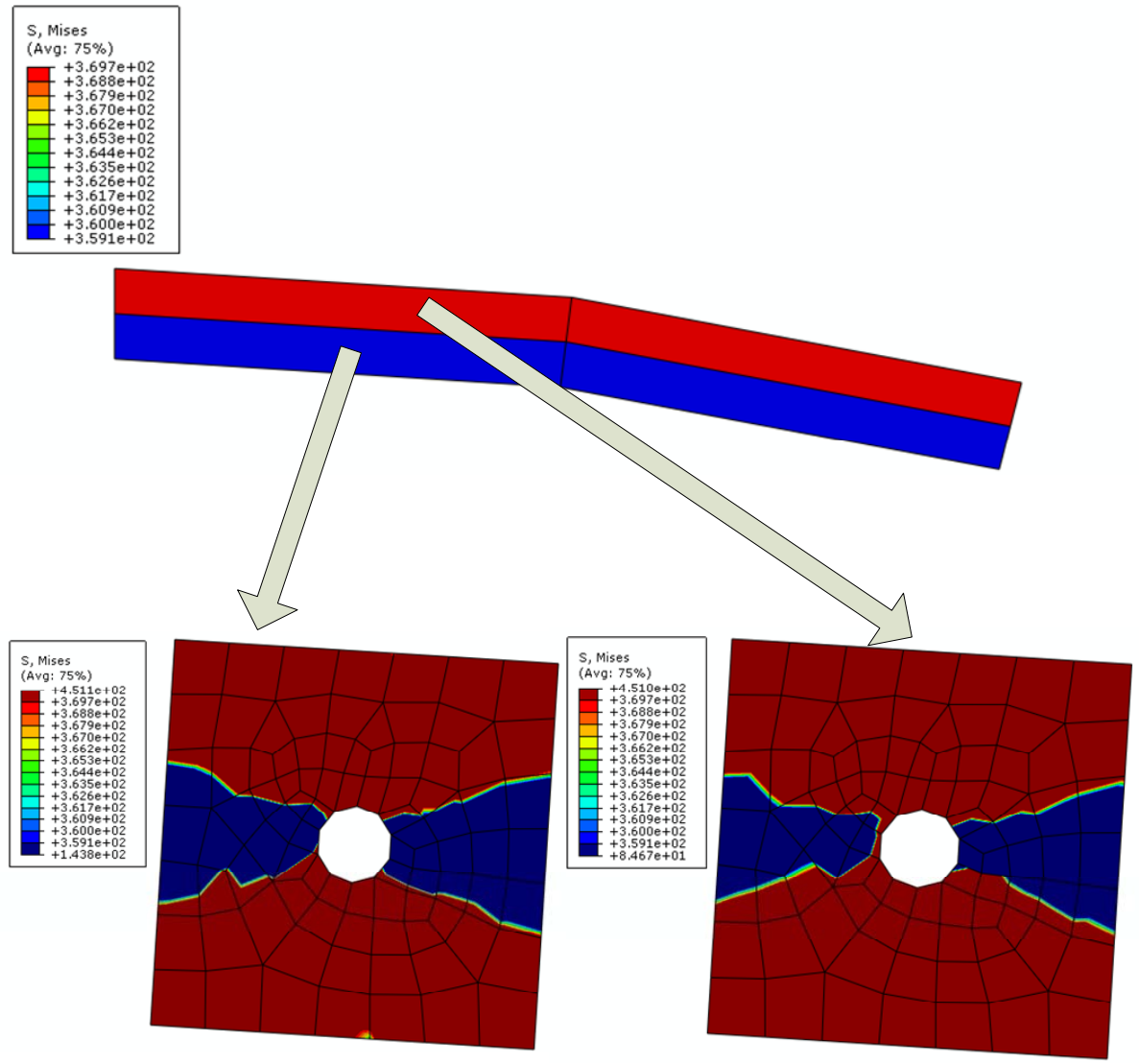
Tablica 5.25 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkom potprograma za slučaj modela sa porom (nastavak).

Broj koraka	Vertikalni pomak / mm (U2 – Displacement)
	UMAT
10	12,62

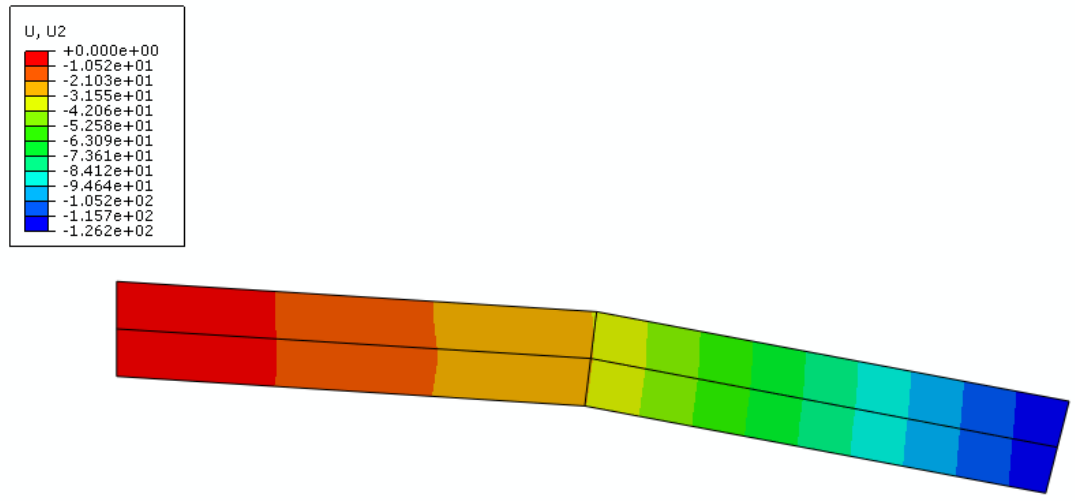
Raspodjele numeričkih rezultata dobivenih pomoću višerazinskog proračuna prikazane su na Sl. 5.31 – Sl. 5.35.



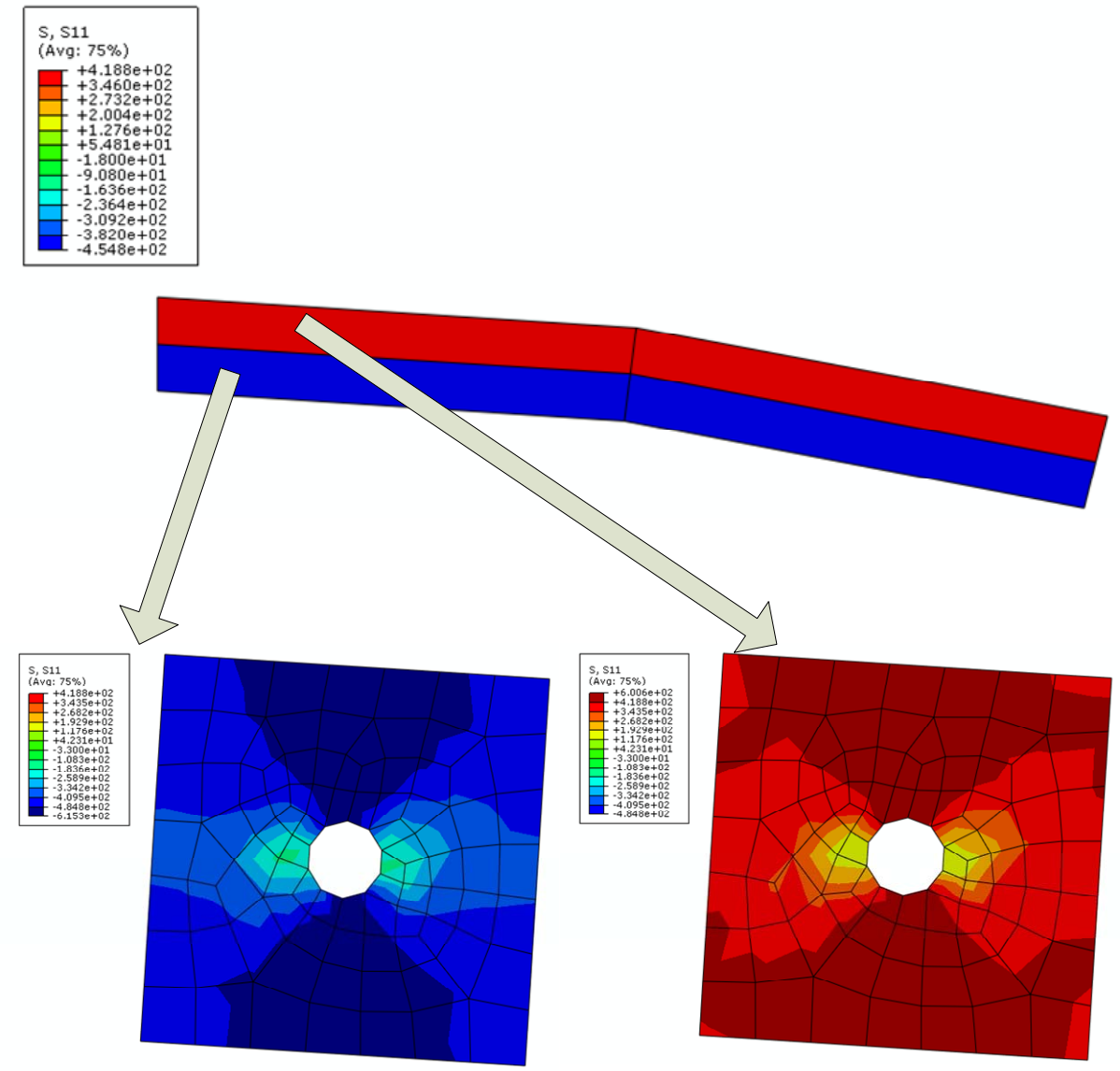
Slika 5.31 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT.



Slika 5.32 – Modeli na dvije razine: raspodjela: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak.

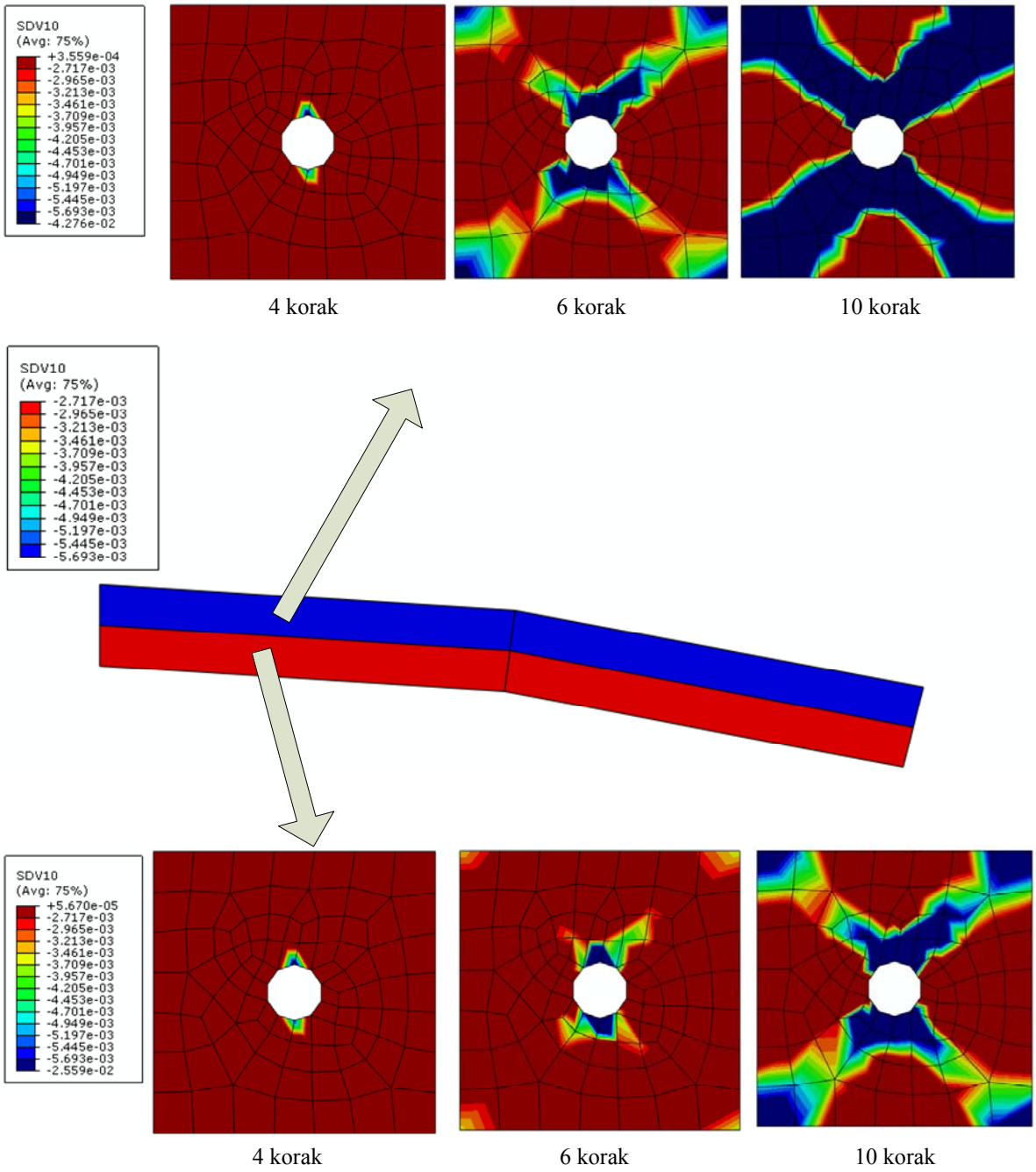


Slika 5.33 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT.



Slika 5.34 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.

Raspodjele naprezanja, prema Sl. 5.32 i Sl. 5.34, prikazuju na makro razini usrednjena naprezanja, sa glavnim rasponom koji je prilagođen raspodjeli na mikrorazini na način da su vrijednosti iznad najveće vrijednosti, odnosno ispod najmanje vrijednosti prikazane tamnijim bojama radi jednostavnijeg prikaza. Jasno se vidi da su naprezanja u većem dijelu prikazanih elemenata mikrostrukture iznad granice tečenja materijala, dok je manji dio još u elastičnom području.



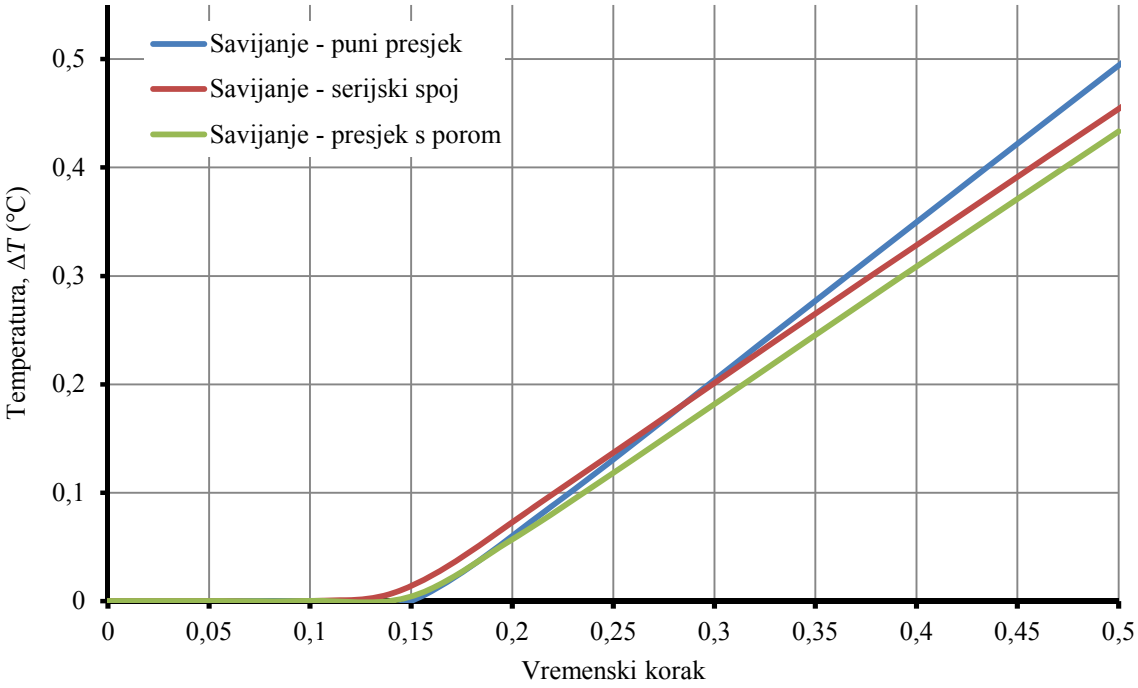
Slika 5.35 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT.

Na Sl. 5.35 je prikazana i raspodjela plastičnih deformacija na mikrorazini, za različite vremenske korake, pri čemu je jasno vidi kako se radi koncentracije naprezanja razvija i plastična deformacija u zoni oko pore. Prema raspodjeli plastične deformacije jasno se vidi da cijeli RVE nije plastificiran, odnosno dio presjeka još je u elastičnom području.

5.3.5. Usporedba rezultata dobivenih s različitim mikrorazinama

Rezultate proračuna možemo prikazati dijagramima za temperaturu, naprezanje i plastičnu deformaciju za treći element mreže konačnih elemenata, odnosno za njegov čvor, prema Sl.

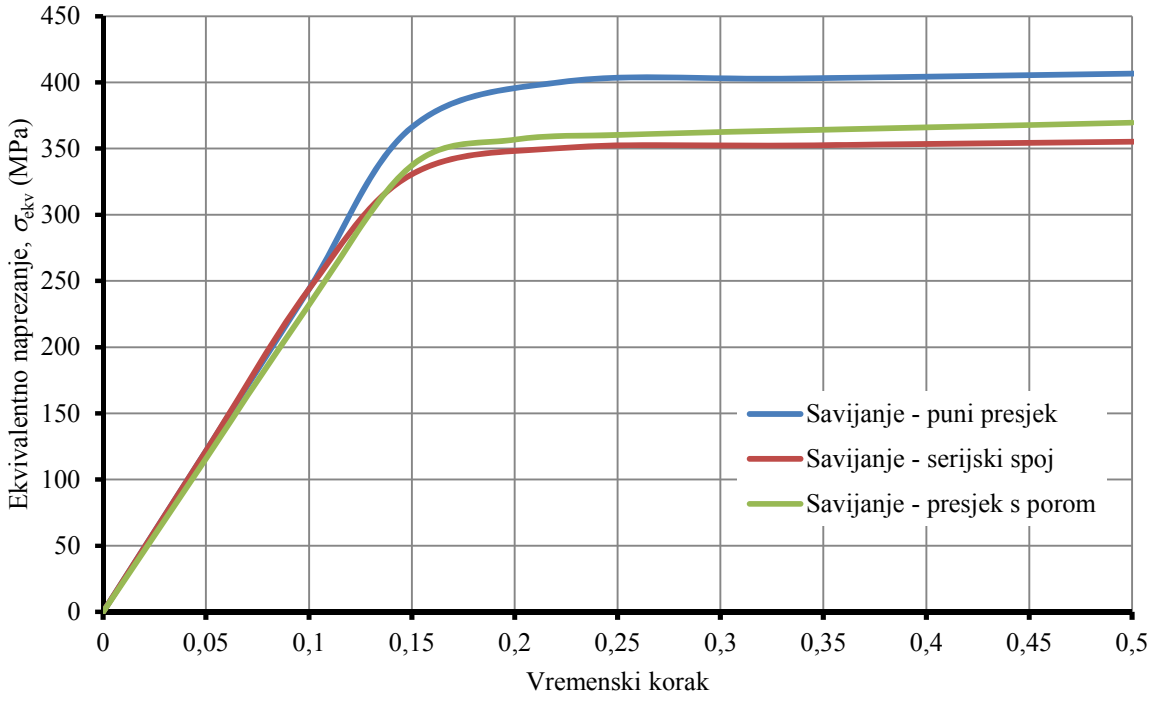
5.20. Vremenski interval u dijagramima je postavljen tako da vrijednost vremenskog koraka 0,5 odgovara kutu kutom rotacije slobodnoga kraja koji iznosi u_3 = –0,25 rad, radi jednostavnije usporedbe rezultata proračuna.



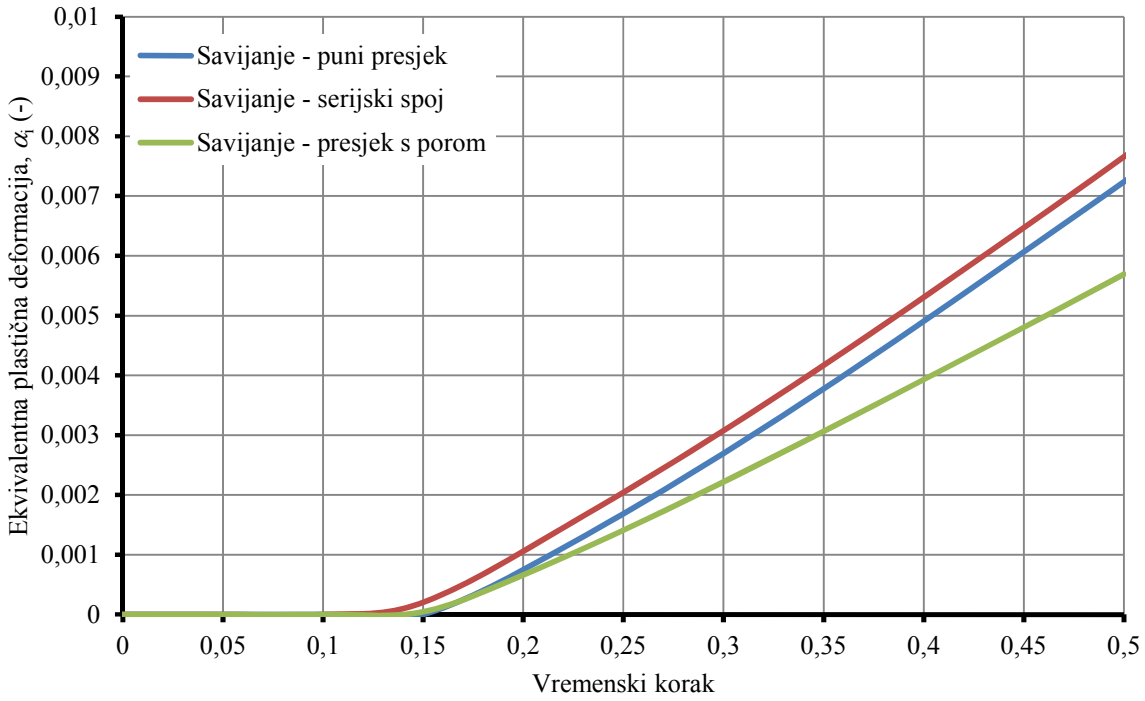
Slika 5.36 – Dijagram temperatura / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.

Numerički rezultati ukazuju da su najveće vrijednosti ekvivalentnog naprezanja serijskog spoja manje u odnosu na vrijednost kod punog presjeka, Sl. 5.30. Ekvivalentna plastična deformacija je međutim veća nego kod punog presjeka. Ovo rezultira zanemarivo manjim povećanjem temperature nego kod punog presjeka. Takav je slučaj bio i kod aksijalnog opterećenja.

Kod presjeka s porom se vidi se da je ekvivalentno naprezanje manje u odnosu na vrijednost kod punog presjeka, pri jednakom rotacijskom pomaku. Ekvivalentna plastična deformacija je također manja nego kod punog presjeka. To rezultira manjim povećanjem temperature nego kod punog presjeka, Sl. 5.31. U odnosu na serijski spoj pri jednakom rotacijskom pomaku, ekvivalentno naprezanje je veće, ali je ekvivalentna plastična deformacija manja, što rezultira manjim povećanjem temperature, Sl. 5.36. Kao i ranije, isti je je slučaj bio i kod aksijalnog opterećenja.



Slika 5.37 – Dijagram ekvivalentno naprezanje / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.



Slika 5.38 – Dijagram plastična deformacija / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom.

6. Zaključak

U ovome radu predstavljeno je višerazinsko modeliranje heterogenih materijala metodom računalne homogenizacije. Obuhvatilo se područje velikih plastičnih deformacija konstrukcija izloženih raznim mehaničkim vrstama opterećenja, kao što su aksijalno opterećenje i savijanje. Izrađeni su vlastiti korisnički potprogrami pogodni za proračune pomoću korisničkog materijalnog modela za heterogene materijale, provedenog na dvije razine modela, makrorazina i mikrorazina. Kod modeliranja i izrade korištena je teorija prvog reda određivanja gradijenta deformacije, što općenito spada u teorijsko područje klasične mehanike kontinuuma.

Budući da prilikom plastične deformacije u materijalima, kao što su npr. metali, dolazi do zagrijavanja dijela izloženog promjeni plastičnog rada, koji je utrošen na trajno deformiranje tijela. Ovo zagrijavanje se prijenosom topline dalje širi na ostatak konstrukcije te je stoga važno precizno odredititi promjenu temperature, jer ona može značajno utjecati na funkcionalnost samog elementa konstrukcije ili sklopa u cijelini. Manji dio plastičnog rada ostaje u raznim oblicima zarobljen u materijalu, dok se veći dio pretvara u toplinu. Dio plastičnog rada koji se pretvara u toplinu, određen je pomoću tzv. Taylor-Quinney faktora, čija je primjena u velikom broju radova potvrđena i eksperimentalno za većinu materijala u tehničkoj praksi. Ovaj pristup obuhvaćen je u standardnom programu za modeliranje metodom konačnih elemenata, te je korišten i u izradi ovog rada, upravo iz razloga česte primjene u praktičnim analizama materijala i konstrukcija izloženih velikim plastičnim deformacija.

Modeliranjem su obuhvaćeni primijeri osnovnih vrsta mehaničkog opterećenja budući da je potrebno odrediti ispravnost i eventualne nedostatke korištenog vlastitog korisničkog potprograma, koji je izrađen u okviru standardnog programskog jezika. Znanstveni doprinos ovog istraživanja je primjena primjena varijacijski konzistentne formulacije na područje

višerazinskog modeliranja termomehanički spregnutih problema. Ovaj rad nadilazi ograničenja postojećih znanstvenih rješenja u pogledu višerazinskog modeliranja problema sa manjim plastičnih deformacija, a to je zanemarivanje disipacije. Predložena su numerička rješenja za slučaj velikih plastičnih deformacija za termomehanički spregnute probleme, za razliku od dostupnih rješenja kod višerazinskog modeliranja za mehaničke probleme. Model je razvijem za adijabatske procese. Numerička implementacija modela za slučaj višerazinskog modeliranja u uvjetima velikih deformacija razvijena je pomoću vlastitog programskog koda u komercijalnom programskom paketu ABAQUS. Svakako postoje i načini poboljšanja rezultata, bilo korištenjem drugih materijalnih modela za područje velike plastične deformacije, bilo razvojem vlastitog programskog rješenja u smjeru teorije drugog reda homogenizacije materijala koje omogućuje rješavanje zahtjevnijih problema na području modeliranja materijala i konstrukcija.

Svakako je cilj nastaviti istraživanje postavljeno na ovim osnovama, na području poboljšanja i optimizacije razvijenog vlastitog korisničkog potprograma, s ciljem smanjenja zahtjevnog računanja i povećanja učinkovitosti samog modela. Prostor istraživanja je svakako dosta velik, interesa za novim spoznajama je puno, pretpostavka je da će biti i više mogućnosti spram budućnosti za nastavak istraživanja ovim smjerom interesa, što bi bila glavna poruka ovog rada.

Popis literature

[1] Abaqus Documentation, V6.14, Dassault Systèmes, 2014

[2] Alfirević, I., Uvod u tenzora i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, Zagreb, 2003

[3] Alzina, A., Toussaint, E., Béakou, A., Multiscale modeling of the thermoelastic behavior of braided fabric composites for cryogenic structures, International Journal of Solids and Structures, Vol. 44 (21), 2007, 6842-6859

[4] Armero, F., Simo, J.C., A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity, International Journal of Plasticity, Vol. 9 (6), 1993, 749-782

[5] Bleier, N., Mosler, J., A hybrid variationally consistent homogenization approach based on Ritz's method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 94 (7), 2013, 625-647

[6] Brnić, J., Elastomehanika i plastomehanika, Školska knjiga, Zagreb, 1996

[7] Budiansky, B., O'Connell, R.J., Elastic moduli of a cracked solid, International Journal of Solids and Structures, Vol. 12 (2), 1976, 81-97

[8] Budiansky, B., On the elastic moduli of some heterogeneous materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13 (4), 1965, 223-227

[9] Chapra, S.C. and Canale, R.C., Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, New York, 1988

[10] Čanađija, M., Brnić, J., A dissipation model for cyclic non-associative thermoplasticity at finite strains, Mechanics Research Communications, Vol. 37 (6), 2010, 510-514

[11] Čanađija, M., Brnić, J., Associative coupled thermoplasticity at finite strain with temperature-dependent material parameters, International Journal of Plasticity, Vol. 20 (10), 2004, 1851-1874

[12] Čanađija, M., Brnić, J., Nonlinear kinematic hardening in coupled thermoplasticity, Materials Science and Engineering: A, Vol. 499 (1-2), 2009, 275-278

[13] Čanađija, M., Mosler, J., On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimization, International Journal of Solids and Structures, Vol. 48 (7-8) 2011, 1120-1129

[14] Čanađija, M., Temperature-dependent thermoplasticity at finite strains, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Netherlands, 2014, 4813-4826

[15] Dunne, F., Petrinic, N., Introduction to computational plasticity, Oxford University Press, 2005

[16] Eshelby, J. D., The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 241 (1226), 1957, 376-396

[17] Eshelby, J. D., The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 252 (1271), 1959, 561-569

[18] Farren, W.S., Taylor, G.I., The heat developed during plastic extension of metals, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 107 (743), 1925, 422-451

[19] Feyel, F., Chaboche, J.L., FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 183 (3-4), 2000, 309-330

[20] Gastev, V.A., Kratki kurs otpornosti materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1966

[21] Geers, M.G.D., Kouznetsova, V.G., Brekelmans, W.A.M., Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 234 (7), 2010, 2175-2182

[22] Geers, M.G.D., Kouznetsova, V.G., Brekelmans, W.A.M., Scale transitions in solid mechanics based on computational homogenization, CISM Advanced Courses, Experimental and Theoretical Multiscale Analysis of Materials and Structures, Udine, 2011

[23] Gurtin, M.E., Fried, E., Anand, L., The mechanics and thermodynamics of continua, Cambridge University Press, 2010

[24] Håkansson, P., Wallin, M., Ristinmaa, M., Prediction of stored energy in polycrystalline materials during cyclic loading, International Journal of Solids and Structures, 2008, Vol. 45 (6), 1570-1586

[25] Hashin, Z., Shtrikman, S., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 11 (2), 1963, 127-140

[26] Hashin, Z., The elastic moduli of heterogeneous materials, Journal of Applied Mechanics, Vol. 29 (1), 1962, 143-150

[27] Hashin, Z.,Rosen, B. W., The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, 1964, 223-232

[28] Hill, R., A self-consistent mechanics of composite materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13 (4), 1965, 213-222

[29] Hill, R., Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 11 (5), 1963, 357-372

[30] Hill, R., On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 326 (1565), 1972, 131-147

[31] Hill, R., The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press, 1950

[32] Hirschberger, C.B., Sukumar, N., Steinmann, P., Computational homogenization of material layers with micromorphic mesostructure, Philosophical Magazine, Vol. 88 (30-32), 2008, 3603-3631

[33] Hollister, S.J., Kikuchi, N., A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites, Computational Mechanics, Vol. 10 (2), 1992, 73-95

[34] Jarić, J., Mehanika kontinuuma, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

[35] Kachanov, L.M., Foundations of the Theory of Plasticity, Mir Publishers, Moscow, 1974

[36] Kačanov, L.M., Osnovy Teorii Plastichnosti, Nauka, Moskva, 1969.

[37] Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., A multi-scale model of martensitic transformation plasticity, Mechanics of Materials, Vol. 40 (8), 2008, 641-657

[38] Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Brekelmans, W.A.M., Computational homogenisation for non-linear heterogeneous solids, In: Galvanetto, U., Aliabadi,

M.H. (eds.): Multiscale Modeling in Solid Mechanics: Computational Approaches, Imperial College Press, London, 2010, 1-42

[39] Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Brekelmans, W.A.M., Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 193 (48-51), 2004, 5525-5550

[40] Kröner, E., Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 4 (1), 1959, 273-334

[41] Kuhn, H.W., Tucker, A.W., Nonlinear Programming, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, 1950, 481-492

[42] Lee, E.H., Elastic-plastic deformation at finite strains, Journal of Applied Mechanics, Vol. 36 (1), 1969, 1-6

[43] Lemaitre, J., Chaboche, J.L., Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1990

[44] Lubliner, J., Plasticity theory, Pearson Education, 2006

[45] Luenberger, D.G., Ye, Y., Linear and Nonlinear Programming, Springer, 2008

[46] Mandel, J., Plasticité classique et viscoplasticité, Springer-Verlag, 1972

[47] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R, Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice Hall, New York, 1983.

[48] Mase, G.T., Smelser, R.E., Mase, G.E., Continuum mechanics for engineers, CRC Press, 2010

[49] Maxwell, J. C., On the dynamical theory of gases, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 157, 1867, 49-88

[50] Mićunović, M., Primenjena mehanika kontinuuma, Naučna knjiga, Beograd, 1990

[51] Miehe, C., Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192 (5-6), 2003, 559-591

[52] Miehe, C., Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 134 (3-4), 1996, 223-240

[53] Miehe, C., Schröder, J., Becker, M., Computational homogenization analysis in finite elasticity: material and structural instabilities on the micro- and macro-scales

of periodic composites and their interaction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191 (44), 2002, 4971-5005

[54] Mori, T., Tanaka, K., Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta Metallurgica, 21 (5), 1973, 571-574

[55] Mosler, J., Bruhns, O.T., On the implementation of rate-independent standard dissipative solids at finite strain - Variational constitutive updates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199 (9-12), 2010, 417-429

[56] Mosler, J., Variationally consistent modeling of finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199 (45-48), 2010, 2753-2764

[57] Mura, T., Micromechanics of defects in solids, Springer, 1987

[58] Özdemir, I., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D., FE^2 computational homogenization for the thermo-mechanical analysis of heterogeneous solids, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198 (3-4), 2008, 602-613

[59] Regnier, G., Nicodeau, C., Verdu, J., Cinquin, J., Chinesta, F., A multiphysic and multiscale approach to model the continuous celding of thermoplastic matrix composites, 16th International Conference on Composite Materials (ICCM-16), Kyoto, 2007

[60] Reuss, A., Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 9 (1), 1929, 49-58

[61] Rosakis, P., Rosakis, A.J., Ravichandran, G., Hodowany, J., A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 48 (3), 2000, 581-607

[62] Rudnicki, J.W., Fundamentals of Continuum Mechanics, Wiley, 2015

[63] Simo, J. C., Hughes, T.J.R., Computational inelasticity, Springer-Verlag, 1998

[64] Simo, J.C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66 (2), 1988, 199-219

[65] Simo, J.C., Miehe, C., Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 98 (1), 1992, 41-104

[66] Simo, J.C., Numerical analysis and simulation of plasticity, In: Ciarlet, P.G., Lions, J.L. (eds.): Handbook of Numerical Analysis, Vol. 6, Elsevier, Amsterdam, 1998

[67] Small, C.G., Functional equations and how to solve them, Problem Books in Mathematics, Springer, 2007

[68] Stainier, L., Ortiz, M., Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity, International Journal of Solids and Structures, Vol. 47 (5), 2010, 705-715

[69] Strutt, J. W. (Lord Rayleigh), On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, Philosophical Magazine Series 5, Vol. 34 (211) , 1892, 481-502

[70] Suquet, P. M., Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, In: Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A. (eds.): Homogenization techniques for composite media, Lecture Notes in Physics 272, Springer-Verlag, 1987, 193-278

[71] Suquet, P. M., Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, Plasticity today: modelling, methods and applications, 1985, 279-310

[72] Taylor, G.I., Quinney, H., The latent energy remaining in a metal after cold working, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 143 (849), 1934, 307-326

[73] Tchalla, A., Belouettar, S., Makradi, A., Zahrouni, H., An ABAQUS toolbox for multiscale finite element computation, Composites Part B: Engineering, Vol. 52 (0), 2013, 323-333

[74] Temizer, I., Wriggers, P., Homogenization in finite thermoelasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 59 (2), 2011, 344-372

[75] Terada, K., Hori, M., Kyoya, T., Kikuchi, N., Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches, International Journal of Solids and Structures, Vol. 37 (16), 2000, 2285-2311

[76] Thomson, W., On a universal tendency in nature to the dissipation of mechanical energy, In: Mathematical and Physical Papers, Vol. I, art. LIX, 1882, 511-514

[77] Thomson, W., On the dynamical theory of heat, In: Mathematical and Physical Papers, Vol. I, art. XLVIII, 1882, 174-315

[78] Truesdell, C., Noll, W., The nonlinear field theories of mechanics, In: Flugge, S. (ed.): Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Springer-Verlag, 1965

[79] Truesdell, C., Toupin, R., The classical field theories, In: Flugge, S. (ed.): Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, Springer-Verlag, 1960

[80] van Beers, P.R.M., Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Tschopp, M.A., McDowell, D.L., A multiscale model of grain boundary structure and energy: From atomistics to a continuum description, Acta Materialia, Vol. 82 (0), 2015, 513-529

[81] van Beers, P.R.M., McShane, G.J., Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Grain boundary interface mechanics in strain gradient crystal plasticity, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 61 (12), 2013, 2659-2679

[82] van der Sluis, O., Schreurs, P.J.G., Brekelmans, W.A.M., Meijer, H.E.H., Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials: effect of microstructural modelling, Mechanics of Materials, Vol. 32 (8), 2000, 449-462

[83] Voigt, W., Lehrbuch der Kristallphysik: mit Ausschluss der Kristalloptik, Teubner-Verlag, Berlin, 1928

[84] Voigt, W., Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper, Annalen der Physik und Chemie, Vol. 38, 1889, 573-587

[85] Waffenschmidt, T., Modelling and simulation of adaptation and degradation in anisotropic biological tissues, PhD Thesis, Technische Universität Dortmund, Institut für Mechanik, Dortmund, 2013

[86] Wriggers, P., Miehe, C., Kleiber, M., Simo, J. C., On the coupled thermomechanical treatment of necking problems via finite element methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33 (4), 1992, 869-883

[87] Wriggers, P., Nonlinear finite element methods, Springer, 2008

[88] Yang, Q., Stainier, L., Ortiz, M., A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 54 (2), 2006, 401-424

[89] Zhang, H.W., Yang, D.S., Zhang, S., Zheng, Y.G., Multiscale nonlinear thermoelastic analysis of heterogeneous multiphase materials with temperature-dependent properties, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 88 (0), 2014, 97-117

[90] Zhang, S., Yang, D.S., Zhang, H.W., Zheng, Y.G., Coupling extended multiscale finite element method for thermoelastic analysis of heterogeneous multiphase materials, Computers & Structures, Vol. 121 (0), 2013, 32-49

Popis oznaka i simbola

Oznaka	Jedinica	Naziv
$(\bullet)_M$	–	Veličine na makroskopskoj razini
$(\bullet)_M$	–	Veličine na mikroskopskoj razini
$\mathbf{0}$	–	Nul vektor
${}^4\mathbf{C}^P_M$	–	Tangentna matrica krutosti četvrtog reda
$\mathbf{a}$	–	Vektor ubrzanja
A	m^2	Površina poprečnog presjeka
A_N	–	Koeficijenti za određivanje relativnog gibanja čvorova
b	–	lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti
$\mathbf{b}$	–	Gustoća volumenske sile, volumenska sila
$\mathbf{B}$	–	Volumenska sila
$B, \mathcal{B}(t)$	–	Trenutna konfiguracija tijela
$b, \mathcal{B}(t_0)$	–	Početna konfiguracija tijela
$\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$	–	Materijalno tijelo
$\mathbf{b}_{sr}$	–	Srednja gustoća volumenske sile
$\mathbf{C}$	–	desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti
c	–	Cauchyjev tenzor deformiranosti
c	J/kgK	Specifični toplinski kapacitet po jedinici mase
c	J/K	Specifični toplinski kapacitet

$\mathbf{C}_\mathrm{e}$	–	Elastični desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti
$\mathbf{c}_k$	Pa	Komponente tangentne matrice krutosti
c_p	J/kgK	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom pritisku
$\mathbf{C}_\mathrm{T}$	–	Tangentna matrica krutosti
$\mathbf{D}$	–	Materijalni tenzor brzine deformacije
D	J/m^{3}s	Ukupna disipacija
$\boldsymbol{d}$, d_{ij}	–	Tenzor brzine deformacije
D_con	J/m^{3}s	Termička disipacija
$\boldsymbol{d}_\mathrm{e}$	–	Elastični dio tenzora brzine deformacije
D_int	J/m^{3}s	Mehanička disipacija
$\boldsymbol{d}_\mathrm{p}$	–	Plastični dio tenzora brzine deformacije
$\mathscr{E}$	J	Unutarnja energija
e	J/kg	specifična unutarnja energija u trenutnoj konfiguraciji
E	J/kg	specifična unutarnja energija u početnoj konfiguraciji
$\mathbf{E}^{(\ln)}$	–	Henckyjev tenzor logaritamske deformacije
$\mathbf{E}$, E_{AB}	–	Lagrangeov tenzor deformacije
$\mathbf{e}$, e_{ij}	–	Eulerov tenzor deformacije
$\boldsymbol{E}_A$, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$	–	Jedinični vektor početne konfiguraciju
$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$	–	Jedinični vektor trenutne konfiguraciju
e_{ijk}	–	Permutirajući simbol
E_σ	Pa	Elastična domena
F	N	Sila
$\mathbf{F}$, F_{iA}	–	Materijalni tenzor gradijenta deformiranja
$\mathbf{F}^{-1}$, F_{Ai}	–	Prostorni tenzor gradijenta deformiranja
$\mathbf{F}_\mathrm{e}$	–	Elastični dio materijalnog tenzora gradijenta deformiranja

$\mathbf{F}_\mathrm{p}$	–	Plastični dio materijalnog tenzora gradijenta deformiranja
F_T	N	Sila koja uzrokuje tečenje u materijalu
H	Pa	Koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja
$\mathcal{H}^\mathrm{e}_\mathrm{heat}$	J/m^3	Strukturalno grijanje uslijed elastične deformacije
$\mathcal{H}^\mathrm{p}_\mathrm{heat}$	J/m^3	Strukturalno grijanje uslijed plastične deformacije
$\mathcal{H}_\mathrm{heat}$	J/m^3	Strukturalno grijanje
h_k	–	Veličina koraka
J	–	Jacobijeva determinanta
J^ϵ	–	Jacobijeva determinanta perturbirane vrijednosti tenzora gradijenta deformiranja
$\mathcal{K}$	J	Kinetička energija
k	–	Stupanj slobode gibanja
k	W/mK	Koeficijent provođenja topline
K_T	N/m	Tangentna krutost
l	m	Duljina
$\boldsymbol{l}$, l_{ij}	–	Tenzor gradijenta brzine
$\boldsymbol{l}_\mathrm{e}$	–	Elastični tenzor gradijenta brzine
$\boldsymbol{L}_\mathrm{p}$	–	Brzina plastične distorzije
$\boldsymbol{l}_\mathrm{p}$	–	Plastični tenzor gradijenta brzine
m	kg	Ukupna masa
$\mathbf{n}$	–	Vektor normale u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{N}$		Vektor normale u početnoj konfiguraciji
$\mathcal{N}$	J/K	Entropija u trenutnoj konfiguraciji
N	J/kgK	specifična entropija u početnoj konfiguraciji
$\mathcal{N}_0$	J/K	Entropija u početnoj konfiguraciji
$\mathbf{p}$	–	Vektor naprezanja

$\mathbf{P}$	–	prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja
$\mathscr{P}$	W	Mehanička snaga
$\mathscr{P}_{\text{int}}$	W	Mehanička snaga
$\mathscr{Q}$	J	Dovedena toplina
$\mathbf{q}$	–	vektorom gustoće toplinskog toka u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{Q}$	–	vektorom gustoće toplinskog toka u početnoj konfiguraciji
$\mathbf{Q}$	–	Kinematička varijabla
Q_0^{ekv}	Pa	Početna vrijednost naprezanja
$\mathscr{Q}_{\text{b}}$	J	Dovedena toplina iz toplinskih izvora
$\mathscr{Q}_{\text{c}}$	J	Dovedena toplina toplinskim tokom
Q_{i}	Pa	Varijabla poput naprezanja
$\mathbf{R}$	–	Tenzor zakreta
r	J/kg	Specifična snaga izvora topline u trenutnoj konfiguraciji
R	J/kg	Specifična snaga izvora topline u početnoj konfiguraciji
r_{pl}	$\text{J/m}^3\text{s}$	Proizvedena količina topline na kraju inkrementa
S	m^2	Površina
$\mathbf{S}$	–	drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja
S_{ij}, $\mathbf{S}$	–	Tenzor drugog reda
s_{pd}	J/m^3	Specifična plastična disipacija
$\mathbf{t}$	–	Površinska sila, vektor naprezanja
t, t_0	s	Određeni vremenski trenutak
T_{ij}, $\mathbf{T}$	–	Tenzor drugog reda
$\mathbf{t}_{\text{sr}}$	–	Srednja gustoća površinske sile
$\mathbf{u}$	–	Vektor pomaka
$\mathbf{U}$	–	Desni tenzor izduženja

u	m	Pomak
u_i, $\mathbf{u}$	–	Vektor
U_{ij}, $\mathbf{U}$	–	Tenzor drugog reda
U_{ijmn}, $^4\mathbf{U}$	–	Tenzor četvrtog reda
u_K^R	–	Promjenjiva veličina u čvoru R
V	m^3	Volumen u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{v}$	–	Vektor brzine
$\mathbf{V}$	–	Lijevi tenzor izduženja
$\mathbf{V}$	–	Vektor brzine
V_0	m^3	Volumen u početnoj konfiguraciji
v_i, $\mathbf{v}$	–	Vektor
V_{ij}, $\mathbf{V}$	–	Tenzor drugog reda
$\boldsymbol{w}$, w_{ij}	–	Tenzor vrtložnosti
x	–	Koordinatna os
$\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_A$	–	Vektor položaja u početnoj konfiguraciji
$\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_i$	–	Vektor položaja u trenutnoj konfiguraciji
x_1, x_2, x_3	m	Koordinate točaka u trenutnoj konfiguraciji
X_1, X_2, X_3	m	Koordinate točaka u početnoj konfiguraciji
y	–	Koordinatna os
E	Pa	Modul elastičnosti
E_{uk}	Pa	Ukupni modul elastičnosti
ϕ	Pa	Funkcija tečenja
ϕ	–	Skalarno polje
∇	–	Hamiltonov diferencijalni operator
δ_{ij}	–	Kroneckerov tenzor ili jedinični tenzor
δW	J	Varijacija virtualnog rada

η	J/kgK	specifična entropija u trenutnoj konfiguraciji
Θ	K	Apsolutna temperatura u početnoj konfiguraciji
θ	K	Apsolutna temperatura u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{\Sigma}$	–	Mandelov tenzor naprezanja
Ψ	J/kg	Helmholtzova slobodna energija u početnoj konfiguraciji
ψ	J/kg	Helmholtzova slobodna energija u trenutnoj konfiguraciji
Ψ_e	J/kg	Elastična Helmholtzova slobodna energija u početnoj konfiguraciji
Ψ_p	J/kg	Plastična Helmholtzova slobodna energija u početnoj konfiguraciji
ΔF	N	Ostatak sile
ΔF	N	Inkrement sile
$\Delta\mathbf{F}$	–	Volumenska sila
ΔF_{iJ}	–	Perturbacija tenzora gradijenta deformiranja
Δl	m	Produljenje
Δm	kg	Elementarna masa
ΔS	m^2	Elementarna površina
ΔT	°C	Povećanje temperature
ΔV	m^3	Elementarni volumen
Γ	–	Granica RVE-a u trenutnoj konfiguraciji
Γ_0	–	Granica RVE-a u početnoj konfiguraciji
Σ^{ekv}	Pa	Ekvivalentna vrijednost Mandelovog naprezanja
α	1/°C	Koeficijent toplinskog rastezanja
$\boldsymbol{\alpha}$	–	Parametar očvršćenja
α_i	–	varijabla poput deformacije
β	–	Taylor-Quinneyjev faktor
$\boldsymbol{\delta}_k$	–	Vektor

ε	–	Ukupna deformacija
ϵ	–	Parametar perturbacije
$\boldsymbol{\varepsilon}$	–	Tenzor infinitezimalne deformacija
$\varepsilon_{ekv,\,pl}$	–	Ekvivalentna plastična deformacija
ε_{pl}	–	Plastična deformacija
λ	–	Lagrangeov multiplikator
ν	–	Poissonov broj
ρ	kg/m^3	Gustoća mase, gustoća u trenutnoj konfiguraciji
ρ_{sr}	kg/m^3	Srednja gustoća mase
ρ_0	kg/m^3	Gustoća u početnoj konfiguraciji
σ	Pa	Naprezanje
$\boldsymbol{\sigma}$	–	Cauchyjev tenzor naprezanja
σ_{ekv}	Pa	Ekvivalentno naprezanje prema kriteriju von Misesa
σ_{sr}	Pa	Srednje naprezanje
σ_T	Pa	Naprezanje na granici tečenja
$\boldsymbol{\tau}$	–	Kirchhoffov tenzor naprezanja

Popis slika

Slika 2.1 – Položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji. 12
Slika 2.2 – Vektori položaja i pomaka. 13
Slika 2.3 – Deformiranje tijela. 14
Slika 2.4 – Gradijent brzine..... 20
Slika 2.5 – Sila i moment na presječnoj površini. 23
Slika 2.6 – Materijalno tijelo sa volumenskim elementom. 25
Slika 2.7 – Model elastičnog-linearno očvršćujućeg materijala. 38
Slika 2.8 – Izotropno očvršćenje prikazano u šestodimenzijskom prostoru te za slučaj vlačnog testa..... 40
Slika 3.1 – Shematski prikaz konstrukcije s nehomogenim materijalom na mikrorazini. 46
Slika 3.2 – Periodičnost mikrostrukture: a) globalna i b) lokalna. 47
Slika 3.3 – Položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji. 49
Slika 3.4 – Dvodimenzijski RVE za postavljanje rubnih uvjeta. 51
Slika 3.5 – Granične strane RVE-a za postavljanje periodičnih rubnih uvjeta. 51
Slika 3.6 – Newton-Raphsonova metoda za jednoosni slučaj opterećenja. 57
Slika 3.7 – Diskretna Newtonova shema aproksimacije. 58
Slika 4.1 – Mreža konačnih elemenata na RVE-u 62
Slika 4.2 – Grupiranje čvorova na rubovima konačnih elemenata RVE-a. 63
Slika 4.3 – Dijagram toka proračuna na makrorazini (pojednostavljeni prikaz). 69
Slika 4.4 – Dijagram toka proračuna na mikrorazini (pojednostavljeni prikaz). 72
Slika 5.1 – Geometrija jednodimenzijskog štapa opterećenog aksijalnim pomakom. 73
Slika 5.2 – Raspodjela σ–ε_{pl} i određivanje koeficijenta linearnog izotropnog očvršćenja. 76
Slika 5.3 – Model makrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata.78
Slika 5.4 – Spoj opruge: a) serijski i b) paralelni. 80

Slika 5.5 – Geometrija mikrorazine: a) serijski i b) paralelni spoj. 80
Slika 5.6 – Mreža konačnih elemenata: a) serijski spoj, b) paralelni spoj, c) prikaz MKE modela. 81
Slika 5.7 – Model punog presjeka mikrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata. 84
Slika 5.8 – Makro model: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT. 86
Slika 5.9 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT. 87
Slika 5.10 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT. 89
Slika 5.11 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT..... 89
Slika 5.12 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT. 90
Slika 5.13 – Model mikrorazine sa porom: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata..... 91
Slika 5.14 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT. 93
Slika 5.15 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT..... 93
Slika 5.16 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT 94
Slika 5.17 – Dijagram temperatura / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 95
Slika 5.18 – Dijagram ekvivalentno naprezanje / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 95
Slika 5.19 – Dijagram plastična deformacija / vremenski korak za aksijalno opterećenje štapa: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 96
Slika 5.20 – Model makrorazine: a) geometrija sa dimenzijama i b) mreža konačnih elemenata..... 97
Slika 5.21 – Makrorazina: Raspodjela čvornih temperatura (°C), UMAT. 99
Slika 5.22 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak.100
Slika 5.23 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.101
Slika 5.24 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT. 101
Slika 5.25 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT, zadnji korak..... 102
Slika 5.26 – Makrorazina: raspodjela čvornih temperatura (°C), UMAT..... 103
Slika 5.27 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak.104
Slika 5.28 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT. 104
Slika 5.29 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.105

Slika 5.30 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–),UMAT, zadnji korak. 106
Slika 5.31 – Makrorazina: raspodjela prirasta čvornih temperatura (°C), UMAT. 107
Slika 5.32 – Modeli na dvije razine: raspodjela: raspodjela naprezanja σ_{ekv} (MPa), UMAT, zadnji korak. 108
Slika 5.33 – Makrorazina: raspodjela vertikalnih pomaka (mm), UMAT. 108
Slika 5.34 – Modeli na dvije razine: raspodjela naprezanja σ_x (MPa), UMAT, zadnji korak.109
Slika 5.35 – Modeli na dvije razine: raspodjela plastične deformacije α_i (–), UMAT. 110
Slika 5.36 – Dijagram temperatura / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 111
Slika 5.37 – Dijagram ekvivalentno naprezanje / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 112
Slika 5.38 – Dijagram plastična deformacija / vremenski korak za savijanje grede: puni presjek, serijski spoj i presjek s porom. 112

Popis tablica

Tablica 4.1 – Linearna jednadžba za vertikalno ograničenje između čvorova. 64
Tablica 4.2 – Linearna jednadžba za horizontalno ograničenje između čvorova. 64
Tablica 5.1 – Dimenzije konstrukcije za aksijalno opterećenje štapa. 74
Tablica 5.2 – Osnovne karakteristike jednodimenzijskog modela štapa. 74
Tablica 5.3 – Značajke materijala konstrukcije za aksijalno opterećenje štapa. 75
Tablica 5.4 – Rezultati dobiveni jednodimenzijskim MKE modelom pomoću standardnog materijalnog modela. 77
Tablica 5.5 – Značajke materijala makrorazine. 79
Tablica 5.6 – Osnovne karakteristike mreže makrorazine. 79
Tablica 5.7 – Značajke materijala mikrorazine. 81
Tablica 5.8 – Osnovne karakteristike mikrorazine. 81
Tablica 5.9 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima serijskog spoja pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom. 82
Tablica 5.10 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima paralelnog spoja pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom. 83
Tablica 5.11 – Značajke materijala mikrorazine. 84
Tablica 5.12 – Osnovne karakteristike mikrorazine. 84
Tablica 5.13 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima punog presjeka pomoću standardnog materijalnog modela i sa vlastitim korisničkim potprogramom. 86
Tablica 5.14 – Značajke materijala makrorazine. 87
Tablica 5.15 – Značajke materijala mikrorazine. 88
Tablica 5.16 – Rezultati dobiveni numeričkim proračunima serijskog spoja sa vlastitim korisničkim potprogramom. 88
Tablica 5.17 – Osnovne karakteristike mikrorazine. 91

Tablica 5.18 – Rezultati višerazinskog proračunima za slučaj modela s porom..... 92
Tablica 5.19 – Osnovne karakteristike mreže makrorazine. 98
Tablica 5.20 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću standardnog materijalnog modela i vlastitim korisničkim potprogramom za slučaj modela punog presjeka.98
Tablica 5.21 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću standardnog materijalnog modela i vlastitim korisničkim potprogramom za slučaj modela punog presjeka (nastavak). 99
Tablica 5.22 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkog potprograma za slučaj modela serijskog spoja. 103
Tablica 5.23 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkog potprograma za slučaj modela serijskog spoja (nastavak). 103
Tablica 5.24 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkom potprograma za slučaj modela s porom. 107
Tablica 5.25 – Rezultati višerazinskog proračunima dobiveni pomoću vlastitog korisničkom potprograma za slučaj modela sa porom (nastavak). 107

Životopis

Neven Munjas rođen je 8. rujna 1985. godine u Rijeci, živi u Opatiji.

Dio osnovnoškolskog obrazovanja pohađao je u Lovranu, zatim u Italiji, a po povratku u Rijeci.

Srednjoškolsko obrazovanje započinje 2000. godine u prirodoslovno-matematičkom smjeru Srednje talijanske školi u Rijeci, gdje je stekao srednju stručnu spremu.

Sveučilišni studij strojarstva upisuje 2004. godine na Tehničkom fakultetu u Rijeci. Tijekom studija radi na stručnoj praksi u inženjerskoj tvrtki Saipem Mediteran Usluge d.o.o. u Rijeci, na poslovima izrade nacrta za naftnu i plinsku industriju. Uspješnom obranom diplomskog rada naslova "Analiza graničnih stanja posude pod tlakom", koji izrađuje pod mentorstvom prof. dr. sc. Marka Čanađije, završava smjer Računalno inženjerstvo u strojarstvu te stječe naziv diplomirani inženjer strojarstva.

Nakon završetka studija 2009. godine zapošljava se na Tehničkom fakultetu u Rijeci. Trenutno radi kao znanstveni novak na Zavodu za tehničku mehaniku. Izvodi auditorne i konstrukcijske vježbe iz predmeta Statika i Čvrstoća konstrukcija I na preddiplomskom sveučilišnom studiju strojarstva i brodogradnje, Mehanika I i Čvrstoća na preddiplomskom stručnom studiju strojarstva i brodogradnje, Mehanika i elementi konstrukcija preddiplomskom stručnom studiju elektrotehnike, Čvrstoća konstrukcija II i Termomehanika na diplomskom sveučilišnom studiju strojarstva. Poslijediplomski doktorski studij smjera Računarska mehanika upisuje 2009. godine na Tehničkom fakultetu u Rijeci. Temu doktorske disertacije pod nazivom "Računalna termoplastičnost u uvjetima velikih deformacija temeljena na višerazinskim metodama" obranio je 2010. godine pod mentorstvom prof. dr. sc. Marka Čanađije.

Član je istraživačkog tima na projektu “Numerička analiza odziva konstrukcija za određena područja eksploatacije”, br. 069-0691736-1737, uz potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta.

Sudjelovao je na stručnom seminaru u organizaciji Međunarodnog centra za znanosti iz područja mehanike CISM, u Udinama, pod nazivom "Experimental and Theoretical Multiscale Analysis of Materials and Structures". Studijski boravak na inozemnoj visokoškolskoj instituciji proveo je u sklopu projekta mobilnosti Erasmus na Strojarskom fakultetu, Visoko tehničko učilište u Brnu, u Češkoj.

Autor je ili koautor osam znanstvenih radova objavljenih u domaćim ili stranim časopisima, odnosno zbornicima domaćih znanstvenih skupova te prezentiran na domaćim znanstvenim skupovima. 2014. godine sudjeluje na radionici "3rd International Workshop on Physics-based Models and Experimental Verification" u organizaciji Europske komisije u Izmiru u Turskoj. Prema međunarodnoj bibliografskoj bazi podataka Scopus, rad mu je citiran jedanput. Materinski jezici su mu hrvatski i talijanski, govori i piše engleski.