Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru

Protrka, Ivana

Doctoral thesis / Disertacija

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:938710

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Protrka

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Protrka

Constant mean curvature surfaces and associated focal curves and surfaces in Minkowski space

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2019

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Protrka

Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2019.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ivana Protrka

Constant mean curvature surfaces and associated focal curves and surfaces in Minkowski space

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2019

Mojim roditeljima i dragom Bogu!

Zahvala

Prvenstveno i najviše, zahvaljujem se mojoj mentorici, prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš koja je prekrasna osoba i sjajna mentorica koja me je uvijek znala potaknuti na rad. Hvala Vam draga profesorice na nesebičnoj pomoći, potpori, razgovorima, razumijevanju i vjeri u mene. Nadalje, zahvaljujem se profesoru Rafaelu Lópezu Caminu. Hvala Vam što ste me ugostili u Granadi, saslušali moj dotadašnji znanstveni rad, dali ideju što bih mogla napraviti dalje i pomogli mi oko istog. Sljedeće se želim zahvaliti mojoj predivnoj kolegici i prijateljici Ljiljani Primorac Gajčić koja mi je bila na raspolaganju cijelo vrijeme za sve što mi je trebalo. Hvala ti draga kolegice na nesebičnoj pomoći i uvijek lijepim i blagim riječima ohrabrenja! Nadalje, zahvaljujem se svojoj, kako volim reći, "šefici" profesorici Emi Jurkin i cimerici Nikolini Kovačević na pomoći u svemu što sam ih zamolila, razumijevanju, potpori, te na ugodnoj i poticajnoj radnoj sredini. Hvala i mojim najboljim roditeljima na svijetu koji su mi cijelog života pružali bezuvjetnu ljubav i potporu, mojoj seki koja mi je kuhala i čistila i mojoj braći koji su vjerovali u mene. Na kraju zahvaljujem se dragom Bogu. Hvala Ti na svim ovim predivnim ljudima koje si stavio na moj životni put, na snazi i strpljenju. Proslavljaj se!

Sažetak

Ključne riječi: Minkowskijev prostor; minimalne plohe; maksimalne plohe; CMC plohe; α-evoluta; harmonijska evoluta; kvazi-umbiličke plohe; cikloidne krivulje; cikloidne maksimalne plohe

U radu su proučavane plohe konstantne srednje zakrivljenosti (CMC plohe) i njima pridružene fokalne krivulje, odnosno plohe u Minkowskijevom prostoru. Minkowskijev prostor je specijalan ambijentni prostor u kojemu, s obzirom na definiranu pseudo-metriku, razlikujemo tri vrste vektora, krivulja, odnosno ploha.

U prva tri poglavlja (1, 2, 3) opisani su osnovni pojmovi koje koristimo u radnji te su prikazana osnovna svojstva, primjeri i klasifikacija minimalnih, maksimalnih i pravih CMC ploha u Minkowskijevom prostoru.

U poglavlju 4 proučavana je α-evoluta i njen poseban slučaj, harmonijska evoluta plohe. U prvom dijelu istraživana su svojstva harmonijskih evoluta pravčastih, helikoidalnih i translacijskih ploha. Dobiveni rezultati su analogni rezultatima u euklidskom prostoru. U drugom dijelu proučavana su svojstva harmonijskih evoluta kvazi-umbiličkih ploha. Kod takvih ploha harmonijska evoluta degenerira u krivulju što se ne može dogoditi u euklidskom prostoru. Štoviše, dokazano je da harmonijska evoluta i bazna krivulja B-namotajne plohe konstantne srednje zakrivljenosti ($H = const. \neq 0$) čine svjetlosni Bertrandov par. Nadalje, pokazano je kako od zadane krivulje konstruirati B-namotajnu plohu čija je harmonijska evoluta zadana krivulja. Na kraju poglavlja istraživana su svojstva α-evolute, a dobiveni rezultati predstavljaju znatna proširenja rezultata u euklidskom prostoru.

U poglavlju 5 proučavane su cikloidne krivulje. Izvedena je njihova parametrizacija i pokazano je da se iste mogu dobiti kao projekcije sfernih općih zavojnica. Konstruirani su novi primjeri maksimalnih ploha pomoću Björlingove formule, tzv. cikloidne maksimalne plohe. Dan je njihov Weierstrassov prikaz i pokazano je da su dobivene plohe algebarske te da dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Summary

Keywords: Minkowski space; minimal surfaces; maximal surfaces; CMC surfaces; α-evolute; harmonic evolute; quasi-umbilical surface, cycloidal curves; cycloidal maximal surfaces

In this doctoral thesis, the surfaces of constant mean curvature (CMC surfaces) and associated focal sets in Minkowski space are studied. Minkowski space is a special ambient space in which, with respect to defined pseudo-metric, we distinguish three types of vectors, curves and surfaces.

In the first three chapters of the thesis, we give an overview of basic concepts and theorems in Minkowski space, local theory of curves and surfaces, as well as examples and classification of minimal, maximal and CMC surfaces in Minkowski space.

In the chapter 4, the α-evolute and its special case, the harmonic evolute of a surface, are analyzed. In the first part, we studied harmonic evolute of ruled, helicoidal and translation surfaces, respectively. Obtained results are analogous to the results in Euclidean case. In the second part, we studied the harmonic evolute of the quasi-umbilic surfaces. Contrary to the results in Euclidean case, the harmonic evolute of such surfaces is a curve. Moreover, it is proved that the harmonic evolute of a B-scroll of constant non-vanishing mean curvature, together with its base curve forms a null Bertrand pair. Furthermore, it is shown how to reconstruct B-scroll from a given harmonic evolute. At the end of the chapter, we studied properties of α-evolute and the obtained results present significant extension of the results in Euclidean case.

In the chapter 5, the cycloidal curves are considered. Their parametrization is presented, as well as shown that they can be obtained as projections of spherical generalized helices. By using the Bjorling formula, new examples of maximal surfaces are constructed, so-called cycloidal maximal surfaces. We derived their Weierstrass representations and proved that given surfaces are algebraic surfaces which admit rational parametrization.

Sadržaj

Uvod **1**

Doprinosi doktorskog rada . . . 3
Pregled doktorskog rada po poglavljima . . . 4
Notacija . . . 6

1 Osnovni pojmovi i teoremi **7**

1.1 Trodimenzionalni prostor Minkowskog . . . 7
1.2 Lokalna teorija krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 10
1.2.1 Lokalna teorija krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 10
1.2.2 Lokalna teorija ploha u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 13
1.2.3 Rotacijske plohe u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 23
1.2.4 Pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 25
1.2.5 Helikoidalne plohe u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 28

2 Minimalne i maksimalne plohe u $\mathbb{R}^3_1$ **30**

2.1 Minimalne i maksimalne plohe . . . 30
2.2 Rotacijske minimalne i maksimalne plohe . . . 36
2.3 Pravčaste minimalne i maksimalne plohe . . . 40
2.3.1 Razvojne minimalne i maksimalne plohe . . . 40
2.3.2 Vitopere minimalne i maksimalne plohe . . . 41
2.4 Translacijske minimalne i maksimalne plohe . . . 44
2.5 Ostale minimalne i maksimalne plohe . . . 45

3 Prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti u $\mathbb{R}^3_1$ **48**

3.1 Rotacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . 48
3.2 Pravčaste i helikoidalne prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . 55
3.3 Translacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti . . . 59

4 Krivulje i plohe pridružene danoj plohi u $\mathbb{R}^3_1$ **60**

4.1 Harmonijska evoluta u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 60
4.1.1 Harmonijska evoluta pravčastih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 62
4.1.2 Harmonijska evoluta translacijskih CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ . . . 65

4.1.3 Harmonijska evoluta helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ 66
4.1.4 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe u $\mathbb{R}^3_1$ 71
4.1.5 Rekonstrukcija B-namotajne plohe iz prostorne krivulje 80
4.1.6 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe i singulariteti 94
4.2 α-evolute u $\mathbb{R}^3_1$ 97
4.2.1 α-evoluta rotacijske plohe 101
4.2.2 Ploha i njena α-evoluta su paralelne plohe 105
4.2.3 α-evoluta degenerira u beskonačnost 116
4.2.4 α-evoluta prstenastog torusa 119

5 Novi primjeri maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ 129
5.1 Cikloidne krivulje u $\mathbb{R}^2_1$ 129
5.2 Björlingova i Weierstrassova reprezentacijska formula 136
5.3 Cikloidne maksimalne plohe 138
5.3.1 Maksimalne plohe i Minkowskijeve cikloide 138
5.3.2 Maksimalne plohe i euklidske cikloide 151

Zaključak 157

Bibliografija 158

Popis slika 163

Popis tablica 165

Životopis 167

Uvod

Prvi zapisi u kojima se počinje razvijati teorija ploha konstantne srednje zakrivljenosti pojavljuju se u 18. stoljeću. Od tada pa sve do danas plohe konstantne srednje zakrivljenosti važna su klasa ploha i intenzivno područje istraživanja u klasičnoj diferencijalnoj geometriji. Sadrže dvije temeljne potklase – minimalne plohe (plohe srednje zakrivljenosti $H = 0$), i prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti, tzv. CMC plohe (plohe srednje zakrivljenosti $H = const. \neq 0$). Obje se potklase realiziraju kao lokalna rješenja izoperimetrijskih problema, minimalne plohe kao plohe najmanje površine sa zadanim rubom, a CMC plohe kao plohe najmanje površine uz zadani volumen. Mogu se fizički realizirati kao plohe od sapunice, tzv. "soap films" i "soap bubbles". Temeljna svojstva tih ploha opisana su u monografijama, primjerice Hopfa, Lópeza, Nietschea i Ossermana ([28, 43, 61, 66]). U ovom doktorskom radu istražuju se neki otvoreni problemi povezani s plohama konstantne srednje zakrivljenosti, ali ne u euklidskom, nego u Lorentz-Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$, trodimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ koji je snabdjeven indefinitnim skalarnim produktom. Posljedica takve strukture Lorentz-Minkowskijevog ambijentnog prostora je postojanje različitih vrsta vektora, krivulja i ploha - prostornih, vremenskih i svjetlosnih (izotropnih ili nul-vektora), što čini tu geometriju raznovrsnijom i bogatijom od euklidske. Primjerice, u Minkowskijevom prostoru kod ploha kojima je $H = 0$ razlikujemo prostorne maksimalne i vremenske minimalne plohe te se uobičajno njihova teorija razvija zasebno ([2, 8, 9, 12, 32, 33, 35, 44, 46, 52, 58]). Detaljan pregled pseudo-Riemannove geometrije dan je u ([64]), dok je klasična teorija krivulja i ploha u Minkowskijevom prostoru razvijena u ([29, 44, 77]).

U prvom dijelu ove radnje proučavaju se krivulje i plohe pridružene polaznim krivuljama i plohama, pod zajedničkim nazivom α-evolute. To su krivulje i plohe povezane s točkama koje su središta zakrivljenosti plohe. Preciznije, α-evoluta je skup središta zakrivljenosti α-loksodroma, integralnih krivulja familije tangencijalnih vektora, odnosno izogonalnih trajektorija familije u-krivulja ($v = const.$). Poseban slučaj α-evolute su fokalni skupovi ($\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$), te harmonijske evolute ($\alpha = \frac{\pi}{4}$). Fokalni skupovi kao predmet proučavanja u euklidskom prostoru javljaju se, primjerice, u optičkim fenomenima povezanim s lomom svjetlosti. Za CMC plohu i njezinu harmonijsku evolutu u euklidskom prostoru poznato je da se harmonijske evolute dobivaju kao Darbouoxove tran-

sformacije pomoću ovojnica kongruencije sfera ([27]). U Minkowskijevom prostoru evolute pravčastih ploha proučavane su u ([78]), a svojstva harmonijskih evoluta u ([57]) gdje je pokazano da su harmonijske evolute ploha konstantne srednje zakrivljenosti ponovno plohe konstantne srednje zakrivljenosti. Nadalje, fokalne plohe i binormalne indikatrise pridružene izotropnim Cartanovim krivuljama u Minkowskijevom prostoru proučavane su i u kontekstu teorije singularnosti ([76]). Također, izotropne krivulje u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru povezane su s krivuljama u euklidskoj ravnini i kao njihove tzv. L-evolute (i obratno), odnosno, kao familija oskulacijskih kružnica krivulje u ravnini ([62]). U radnji naš prvi cilj je istražiti svojstva harmonijskih evoluta pravčastih, translacijskih i helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Nadalje, poznato je da za razliku od euklidske situacije kada su harmonijske evolute ploha uvijek plohe, u Lorentz-Minkowskijevom prostoru one mogu biti i krivulje ([57]). To se događa kod tzv. kvazi-umbiličkih ploha, ploha za koje operator oblika plohe nije dijagonalizabilan, i to je situacija koja ne postoji u euklidskom slučaju. Naš drugi cilj je istražiti svojstva te krivulje. Pokazat ćemo njenu vezu s tzv. Bertrandovim krivuljama ([48]) i teorijom singularnosti. Zatim ćemo pokazati kako od polazne krivulje rekonstruirati plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. Na kraju cilj nam je proučiti svojstva α-evolute ploha, o kojima ne postoje rezultati u Minkowskijevom prostoru, a u euklidskom slučaju proučavao ih je Manhart ([51]). Odgovorit ćemo na pitanja kada je rotacijska ploha paralelna sa svojom α-evolutom te kada α-evoluta degenerira u točku u beskonačnosti. Završit ćemo s α-evolutom prstenastog torusa za koju ćemo pokazati da je koaksijalna rotacijska ploha kojoj je generatrisa konika.

U drugom dijelu radnje cilj je konstruirati nove primjere maksimalnih ploha, prostornih ploha kojima je $H = 0$, u Minkowskijevom prostoru. Plohe ćemo konstruirati uz pomoć Björlingove formule koja je jedan koristan alat za konstrukciju maksimalnih ploha uz pomoć zadane krivulje tzv. krivulje jezgre i vektorskog polja ([2, 49]). Za krivulje jezgre odabrat ćemo cikloidne krivulje ([49, 63]), a za vektorsko polje odabrat ćemo linearnu kombinaciju polja normale i binormale kao u ([33, 46, 53]). Budući da su nam krivulje jezgre Minkowskijeve cikloide, onda ćemo najprije izvesti parametrizaciju cikloidnih krivulja. Parametrizacije cikloidnih krivulja izvest ćemo koristeći njihov tzv. kinematički način tvorbe, gibanjem Minkowskijeve kružnice po drugoj kružnici. U Minkowskijevom prostoru postoje tri temeljne klase kružnica, kružnice u prostornim ravninama (odnosno vremenskim, svjetlosnim) kao krivulje koje su (euklidske) elipse (odnosno hiperbole, parabole). Zatim ćemo pokazati da se iste mogu dobiti i kao projekcije sfernih općih zavojnica ([56]). Nakon što smo izveli parametrizacije cikloidnih krivulja u Minkowskijevom prostoru konstruirali smo od njih uz pomoć Björlingove formule nove primjere maksimalnih ploha tzv. cikloidne maksimalne plohe. Izvest ćemo i njihov Weierstrassov prikaz te ćemo pokazati da su dobivene plohe algebarske plohe koje dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Neki od rezultata koji su navedeni u disertaciji nalaze se u sljedećim radovima:

- R. López, Ž. Milin Šipuš, Lj. Primorac Gajčić, I. Protrka, *Harmonic Evolutes Of B-Scrolls with Constant Mean Curvature in Lorentz-Minkowski Space*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., https://doi.org/10.1142/S0219887819500762, (2019).
- I. Protrka, *The harmonic evolute of a helicoidal surfaces in Minkowski space*, Differential Geometry in Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Young Researcher Workshop on Differential Geometry in Minkowski Space, Granada (2017), 133-142.
- Ž. Milin Šipuš, LJ. Primorac Gajčić, I. Protrka, *Spherical generalized helices in 3-dimensional Lorenzt-Minkowski space.* submitted (2019).

Neki od rezultata su predstavljeni na tri međunarodna znanstvena skupa:

- 4th Croatian Conference on Geometry and Graphics, Vodnjan (Peroj), Hrvatska, 2018., Naslov izlaganja: *"Harmonic Evolutes of B-scrolls with Constant Mean Curvature in Minkowski Space"*;
- 20th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Fužine, Hrvatska, 2017., Naslov izlaganja: *"New examples of maximal surfaces in Minkowski space"*;
- 18th Scientific-Professional Colloquium on Geometry and Graphics, Beli Manastir, Hrvatska, 2015., Naslov izlaganja: *"Harmonic Evolutes of Timelike Ruled Surfaces in Minkowski Space"*.

Doprinosi doktorskog rada

Doprinos ovog rada su svojstva harmonijskih evoluta pravčastih, translacijskih i helikoidalnih ploha u Minkowskijevom prostoru. Zatim, svojstva krivulja koja su harmonijske evolute kvazi-umbiličkih ploha čije analogone nemamo u euklidskom prostoru. Nadalje, rekonstrukcija kvazi-umbiličkih ploha iz zadane krivulje kojima je ta krivulja harmonijska evoluta. Doprinos su i svojstva α-evoluta u Lorentz-Minkowskijevom prostoru koja do sada nisu proučavana. Naposljetku, doprinos ovog rada je i konstrukcija novih primjera maksimalnih ploha u Lorentz-Minkowskijevom prostoru tzv. cikloidnih maksimalnih ploha koje smo dobili iz prethodno izvedenih parametrizacija cikloidnih krivulja. Istaknimo za kraj da je svakako važan znanstveni doprinos ove doktorske disertacije u tome što će ona donijeti boljem shvaćanju sličnosti i razlika između Lorentz-Minkowskijevog prostora i euklidskog prostora. Kao rezultat disertacije očekuje se nekoliko znanstvenih članaka.

Pregled doktorskog rada po poglavljima

Radnja je podijeljena na pet poglavlja. U prva tri poglavlja nema novih rezultata. Cilj tih poglavlja je opisati osnovne pojmove koje koristimo u radnji te prikazati osnovna svojstva, primjere i klasifikaciju minimalnih, maksimalnih i pravih CMC ploha u Minkowskijevom prostoru. U četvrtom i petom poglavlju prikazani su novi rezultati vezani za α-evolute i nove primjere maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$. U nastavku dajemo detaljan opis.

Prvo poglavlje posvećeno je definiranju osnovnih pojmova i teorema u Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$, za koje ne vrijede definicije iz euklidskog prostora koje su potrebne za razumijevanje radnje. Nakon toga, dan je sažeti prikaz lokalne teorije krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3_1$, te su navedene definicije, parametrizacije i klasifikacije rotacijskih, pravčastih i helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ (vidi [4, 10, 29, 30, 31, 52]).

Drugo poglavlje posvećeno je minimalnim i maksimalnim plohama. Navedena su njihova najznačajnija svojstva i dokazan je karakterizacijski teorem koji opravdava njihove nazive tj. tvrdnju da minimalne i maksimalne plohe lokalno minimiziraju, odnosno maksimiziraju površinu. Nadalje, naveli smo primjere rotacijskih, pravčastih i translacijskih minimalnih i maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ ([2, 8, 9, 12, 32, 33, 35, 44, 46, 52, 58]).

Treće poglavlje posvećeno je pravim CMC plohama u $\mathbb{R}^3_1$. Preciznije, prikazana je klasifikacija rotacijskih CMC ploha, tzv. Delaunayevih ploha, zatim je dan pregled pravčastih i helikoidalnih ne nužno pravčastih CMC ploha. Poglavlje smo završili klasifikacijom translacijskih pravih CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ ([12, 25, 37, 38, 41, 45]).

Četvrto poglavlje posvećeno je proučavanju krivulja i ploha pridruženih polaznim krivuljama i plohama, pod zajedničkim nazivom α-evolute. To su krivulje i plohe povezane s točkama koja su središta zakrivljenosti plohe. Poseban slučaj α-evolute su klasične fokalne plohe ($\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$), te harmonijske evolute ($\alpha = \frac{\pi}{4}$). U prvom dijelu ovoga poglavlja istraživana su svojstva harmonijskih evoluta pravčastih, translacijskih i helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Pokazano je da vrijede analogni rezultati kao u $\mathbb{R}^3$. Zatim su istraživana svojstva harmonijskih evoluta tzv. kvazi-umbiličkih ploha čije analogone nemamo u euklidskom prostoru. U tom slučaju harmonijska evoluta je krivulja ([57]). U drugom dijelu ovog poglavlja istraživana su svojstva te krivulje. Pokazana je njena veza s tzv. Bertrandovim krivuljama (vidi [48]) i teorijom singularnosti, te je pokazano kako od polazne krivulje rekonstruirati plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. U zadnjem dijelu ovog poglavlja proučavane su α-evolute ploha, o kojima ne postoje rezultati u Minkowskijevom

prostoru. Pokazano je da svaka točka plohe $\mathbb{S}$, α-evolute i fokalnih ploha na svakoj normali plohe $\mathbb{S}$ čini fiksan dvoomjer. Odgovorili smo na pitanja kada je rotacijska ploha paralelna sa svojom α-evolutom te kada α-evoluta degenerira u točku u beskonačnosti. Poglavlje smo završili s α-evolutom prstenastog torusa gdje smo pokazali da je to koaksijalna rotacijska ploha kojoj je generatrisa konika, krivulja 2. reda.

Zadnje poglavlje posvetili smo konstrukciji novih primjera maksimalnih ploha, prostornih ploha kojima je $H = 0$, u Minkowskijevom prostoru. Poglavlje smo počeli s izvodom parametrizacija cikloidnih krivulja. Parametrizacije cikloidnih krivulja izveli smo najprije koristeći njihov tzv. kinematički način tvorbe, gibanjem Minkowskijeve kružnice po drugoj kružnici. Zatim je pokazano da se iste mogu dobiti i kao projekcije sfernih općih zavojnica ([56]). Nakon što smo izveli parametrizacije cikloidnih krivulja u Minkowskijevom prostoru konstruirali smo od njih uz pomoć Björlingove formule nove primjere maksimalnih ploha tzv. cikloidne maksimalne plohe. Na kraju dan je Weierstrassov prikaz dobivenih ploha te je pokazano da su dobivene plohe algebarske plohe koje dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Oznake, kratice i slično

U radu je korištena sljedeća notacija:

$\mathbb{R}^3$ realan vektorski prostor dimenzije 3
$\mathbb{R}^3_1$ Minkowskijev prostor dimenzije 3
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ pseudo-skalarni produkt
$\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$
$\mathbb{S}_\alpha$ α-evoluta plohe $\mathbb{S}$
$\mathbb{S}^2_1(p, r)$ pseudo-sfera sa središtem u točki p i radijusom r
$\mathbb{H}^2(p, r)$ hiperbolička ravnina sa središtem u točki p i radijusom r
$\mathbb{LC}$ svjetlosni stožac
L_p operator oblika plohe u točki p
I prva fundamentalna forma
II druga fundamentalna forma
E, F, G fundamentalne veličine prvog reda
L, M, N fundamentalne veličine drugog reda
K Gaussova zakrivljenost plohe
H srednja zakrivljenost plohe

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i teoremi

U ovom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi i teoremi potrebni za razumijevanje disertacije. Preciznije, u poglavlju 1.1 dane su definicije pojmova u Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$, za koje ne vrijede definicije iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$. U poglavlju 1.2 dan je sažeti prikaz lokalne teorije krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3_1$ te su navedeni osnovni rezultati vezani za rotacijske, pravčaste i helikoidalne plohe u $\mathbb{R}^3_1$.

1.1 Trodimenzionalni prostor Minkowskog

Neka je $\mathbb{R}^3$ realan vektorski prostor s bazom $\{e_1, e_2, e_3\}$, gdje su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$.

Definicija 1.1 Minkowskijev (Lorentzov, Lorentz-Minkowskijev) prostor je metrički prostor $\mathbb{R}^3_1 = (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, gdje je metrika (pseudo-skalarni produkt indeksa 1) definirana s

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Definirana metrika je pseudo-metrika budući da ne zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti. Neki autori, poput [44], definiraju metriku s minusom na trećoj koordinati ($\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$), dok ćemo se mi u radu služiti definicijom 1.1.
S obzirom na definiranu pseudo-metriku u Minkowskijevom prostoru razlikujemo tri vrste vektora koje definiramo kao slijedi:

Definicija 1.2 Za vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je

1. prostorni ako je $\langle x, x\rangle > 0$ ili $x = 0$,
2. vremenski ako je $\langle x, x\rangle < 0$,
3. svjetlosni (nul, izotropni) ako je $\langle x, x\rangle = 0$ i $x \neq 0$.

Napomena 1.3 Svojstvo biti *prostorni* (odnosno *vremenski, svjetlosni*) kraće se naziva kauzalni karakter vektora.

Definicija 1.4 Za vektore $x,\ y \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da su okomiti (ortogonalni) ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

Neka su v i w ortogonalni vektori u $\mathbb{R}^3_1$.

1. Ako je v vremenski vektor, onda je w prostorni vektor.
2. Ako je v prostorni vektor, onda je w ili prostorni ili vremenski ili svjetlosni vektor.
3. Ako je v svjetlosni vektor, onda je w prostorni ili svjetlosni vektor.

Svjetlosni ortogonalni vektori su kolinearni vektori.

Definicija 1.5 Pseudo-norma vektora $x \in \mathbb{R}^3_1$ definirana je s $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x\rangle|}$.

Napomena 1.6 Za vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je jedinični (normiran) ako je $\|x\| = 1$. Svaki prostorni vektor različit od $\vec{0}$ i svaki vremenski vektor može se normirati. Ako je $x \in \mathbb{R}^3_1$ prostorni ili vremenski vektor, onda postoji jedinični vektor $y \in \mathbb{R}^3_1$ koji je kolinearan s x. Taj vektor je jedinstven do na orijentaciju i dan je formulom $y = \pm\dfrac{x}{\|x\|}$. Svjetlosni vektori se ne mogu normirati.

Definicija vektorskog produkta je analogna definiciji vektorskog produkta u $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.7 Vektorski produkt $v \times_L w$ vektora v i w u $\mathbb{R}^3_1$ dan je s $v \times_L w = J(v \times w)$, gdje $\times$ označava euklidski vektorski produkt, a matrica J je dana s

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalje u radu ispuštamo indeks L u oznaci $\times_L$, te će oznaka $\times$ predstavljati vektorski produkt u Minkowskijevom prostoru, osim ako nije istaknuto drugačije.

U Minkowskijevom prostoru možemo govoriti o vremenskoj orijentaciji vektora koja nam je potrebna za definiciju kuta između vektora.

Definicija 1.8 Neka je $e_1 = (1, 0, 0)$. Za dani vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je orijentiran u budućnost (odnosno prošlost) ako vrijedi $\langle x, e_1\rangle < 0$ (odnosno $\langle x, e_1\rangle > 0$).

Kut u $\mathbb{R}^3_1$ definiran je s obzirom na kauzalni karakter vektora koji ga zatvaraju ([70]).

Definicija 1.9 Neka su x i y vremenski vektori istog smjera u $\mathbb{R}^3_1$. Tada postoji jedinstven realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y\rangle = -\|x\|\|y\| \cosh\theta.$$

Broj θ se naziva hiperbolički kut između vektora x i y.

Definicija 1.10 Neka su x i y prostorni vektori u $\mathbb{R}^3_1$ koji razapinju vremenski potprostor. Tada postoji jedinstven realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \theta.$$

Broj θ se naziva središnji kut između vektora x i y.

Definicija 1.11 Neka su x i y prostorni vektori u $\mathbb{R}^3_1$ koji razapinju prostorni potprostor. Tada postoji jedinstven realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta.$$

Broj θ se naziva prostorni kut između vektora x i y.

Definicija 1.12 Neka je x prostorni, a y vremenski vektor u $\mathbb{R}^3_1$. Tada postoji jedinstven realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \sinh \theta.$$

Broj θ se naziva Lorentzov vremenski kut između vektora x i y.

Kut između dva vektora od kojih je jedan svjetlosnog karaktera se ne definira.

Definicija i svojstva baze za Minkowskijev prostor analogni su onima u euklidskom prostoru tako da ćemo ih izostaviti. Navest ćemo samo definiciju svjetlosne baze i jednu propoziciju koju nemamo u euklidskom prostoru.

Definicija 1.13 Trobrid (A, B, C) koji se sastoji od dva svjetlosna i jednog prostornog vektora za koje vrijedi:

$$\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1 \quad \langle A, B \rangle = 1, \quad \langle A, C \rangle = 0, \quad \langle B, C \rangle = 0$$

nazivamo svjetlosni (nul) trobrid ili svjetlosna baza.

Propozicija 1.14 Svaka ortonormirana baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ za $\mathbb{R}^3_1$ ($a_i \perp a_j$ za sve $i \neq j$ i $\|a_i\| = 1$ za $i \in \{1, 2, 3\}$) sastoji se od točno dva prostorna i jednog vremenskog vektora.

Sada ćemo definirati različite tipove potprostora prostora Minkowskog i navesti neka njihova svojstva.

Definicija 1.15 Za potprostor $W \leq \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je:

1. prostorni ako je svaki vektor $x \in W$ prostorni,
2. vremenski ako sadrži neki vremenski vektor,
3. svjetlosni ako sadrži neki svjetlosni vektor, ali ne sadrži vremenski vektor.

Definicija 1.16 Neka je $W \leq \mathbb{R}^3_1$ potprostor. Za pseudo-skalarni produkt u $\mathbb{R}^3_1$ kažemo da je degeneriran na W ako postoji vektor $v \in W$, $v \neq 0$ takav da je $v \perp x$ za svaki $x \in W$. U suprotnom kažemo da je pseudo-skalarni produkt nedegeneriran na W.

Pseudo-skalarni produkt na potprostoru $W \leq \mathbb{R}^3_1$ je degeneriran ako i samo ako je W svjetlosni potprostor.

Propozicija 1.17 Ako je $W \leq \mathbb{R}^3_1$ potprostor.

1. W je prostorni ako i samo ako je $W^\perp$ vremenski.
2. W je vremenski ako i samo ako je $W^\perp$ prostorni.
3. W je svjetlosni ako i samo ako je $W^\perp$ svjetlosni.

U prva dva slučaja je $W \cap W^\perp = \{0\}$, a u trećem je $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

1.2 Lokalna teorija krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3_1$

U ovom odjeljku dan je prikaz lokalne teorije krivulja i ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za krivulje i plohe, lokalna teorija je u mnogočemu analogna lokalnoj teoriji krivulja i ploha u euklidskom prostoru. No ipak postoje neke razlike uzrokovane indefinitnošću pseudo-metrike. Na primjer, u euklidskom prostoru ne postoje svjetlosne krivulje i Weingartenovo preslikavanje (koje će kasnije biti definirano) je operator koji se uvijek može dijagonalizirati, dok za vremenske plohe u Minkowskijevom prostoru to općenito ne vrijedi.

1.2.1 Lokalna teorija krivulja u $\mathbb{R}^3_1$

Krivulje u Minkowskijevom prostoru definiramo kao i u euklidskom.

Definicija 1.18 Svako glatko preslikavanje $c\colon I \to \mathbb{R}^3_1$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, zovemo krivulja (parametrizirana krivulja) u $\mathbb{R}^3_1$.

Definicija 1.19 Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ krivulja i $t \in I$. Za točku $c(t)$ kažemo da je regularna ako je $\dot{c}(t) \neq 0$. U suprotnom kažemo da je točka $c(t)$ singularna. Za krivulju c kažemo da je regularna ako je točka $c(t)$ regularna za svaki $t \in I$. U suprotnom kažemo da je krivulja c singularna.

Definicija 1.20 Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna krivulja. Tada vektor $\dot{c}(t)$ nazivamo tangencijalni vektor ili vektor brzine krivulje c u točki $c(t)$. Funkciju $\|\dot{c}(t)\|$ nazivamo brzinom krivulje c u točki $c(t)$.

Kauzalni karakter krivulje u Minkowskijevom prostoru određen je kauzalnim karakterom njezinog tangencijalnog vektora.

Definicija 1.21 Krivulja $c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) u točki $t_0 \in I$ ako je vektor $\dot{c}(t_0)$ prostorni (odnosno vremenski, svjetlosni).

Krivulja $c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) ako je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u svakoj točki $t \in I$.

Definicija 1.22 Za prostornu (vremensku) krivulju $c\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je $\|\dot{c}(s)\| = 1$ ($\|\dot{c}(s)\| = -1$), $s \in I$.

Napomena 1.23 Svjetlosnu krivulju c ne možemo parametrizirati parametrom duljine luka jer vrijedi $\|\dot{c}(s)\| = 0$, ali je možemo parametrizirati tzv. parametrom duljine pseudoluka. Kasnije ćemo opisati tu reparametrizaciju.

Napomena 1.24 Derivaciju krivulje c po parametru duljine luka s označavat ćemo s c', a derivaciju po općem parametru t s $\dot{c}$.

Budući da se teorija prostornih i vremenskih krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ razlikuje od teorije svjetlosnih krivulja prvo ćemo navesti rezultate koje koristimo u radnji za prostorne i vremenske krivulje, zatim za svjetlosne krivulje. Nadalje, prostorne krivulje dijelimo s obzirom na kauzalni karakter njene normale, koji može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni. Vremenske krivulje i prostorne krivulje s prostornom ili vremenskom normalom nazivamo Frenetove krivulje.

Za svaku Frenetovu krivulju c u $\mathbb{R}^3_1$ definiramo ortonormirani trobrid (reper), tj. ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3_{1,c(s)}$ u svakoj točki krivulje $c(s)$. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ Frenetova krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje $T(s) = c'(s)$ je jedinično tangencijalno polje od c. Polje vektora glavnih normala dano je s $N(s) = \dfrac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$, $c''(s) \neq 0$, a polje binormala s $B(s) = T(s) \times N(s)$. Tada je $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3_{1,c(s)}$ i nazivamo je Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje c ([44]).

Definiramo sada za krivulju parametriziranu duljinom luka i sljedeće funkcije:

Definicija 1.25 Neka je $c\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ Frenetova krivulja parametrizirana duljinom luka.

1. Funkciju $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje c u točki $c(s)$.

2. Funkciju $\tau\colon I \to \mathbb{R}$, $\tau(s) = \langle N(s), B'(s)\rangle$ nazivamo torzijom (sukanjem) krivulje c u točki $c(s)$.

U $\mathbb{R}^3_1$ također vrijede Frenetove formule analogne onima u euklidskom prostoru

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\eta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

pri čemu je $\varepsilon = \langle T, T\rangle = \pm 1$, $\eta = \langle N, N\rangle = \pm 1$.

Autor u ([75]) prostorne krivulje sa svjetlosnom normalom naziva pseudo-nul prostorne krivulje (*eng. pseudo null spacelike curves*). U tom slučaju Frenetove formule su

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

gdje zakrivljenost κ poprima samo dvije vrijednosti, 0 ili 1. Ako je $\kappa = 0$, onda je $c(u)$ pravac. Vrijedi i obrat. Ako je $c(u)$ pravac, onda je $c''(u) = 0 = T'(u)$, što znači da je $\kappa = 0$. Ako $c(u)$ nije pravac, onda postoji interval na kojem je $c''(u) \neq 0$. $N(u)$ je definiran kao $N(u) = c''(u) = T'(u)$, prema tome $\kappa = 1$. Polje binormala $B(u)$ je svjetlosni vektor okomit na $T(u)$ u svakoj točki krivulje $c(u)$ takav da vrijedi $\langle N, B\rangle = 1$. (T, N, B) je svjetlosna baza (vidi definiciju 1.13). Torzija krivulje $c(u)$ je definirana s $\tau = \langle N', B\rangle$ i autor u ([44]) je naziva pseudo-torzija.

Sada ćemo definirati funkcije zakrivljenosti svjetlosne krivulje i reparametrizaciju iste pseudo-lukom.

Teorem 1.26 (Osnovni teorem za svjetlosne krivulje, [29])
Ako su zadani početni podatci (p, k_0, k_1, k_2, k_3), gdje je p fiksna točka i k_0, k_1, k_2, k_3 funkcije klase C^1, tada postoji jedinstvena svjetlosna Frenetova krivulja $(c(t), (A(t), B(t), C(t)))$ takva da $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = k_0(t)A(t)$ i vrijede Frenet-Serretove formule:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Svjetlosnu krivulju $c(t)$ možemo reparametrizirati $t = t(u)$ tako da je $k_1 = 0$. Duggal i Bejancu ([13]) zovu parametar u *istaknuti parametar* od c i krivulju $c(u)$ svjetlosna Frenetova krivulja. Funkcije k_2 i k_3 nazivaju se zakrivljenosti krivulje $c(u)$.

Nadalje, svjetlosnu Frenetovu krivulju $c(u)$ za koju vrijedi $\langle \frac{d^2c}{du^2}, \frac{d^2c}{du^2} \rangle > 0$ (pa vrijedi i uvjet $k_2 \neq 0$) mažemo reparametrizirati $u = u(s)$ tako da vrijedi $\langle c_{ss}, c_{ss} \rangle = 1$. Stoga, za trobrid (A, B, C) pridružen krivulji $c(s)$ vrijedi

$$A = c_s = \frac{dc}{ds} \quad \text{i} \quad C = c_{ss} = \frac{d^2c}{ds^2}.$$

Parametar s nazivamo *parametar duljine pseudo-luka* ([16, 29]) i trobrid (A, B, C) krivulje $c(s)$ zadovoljava sljedeće Frenetove formule:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_L \\ -k_L & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Funkciju k_L zovemo *svjetlosna zakrivljenost* od $c(s)$, B binormalni vektor i C glavna normala krivulje $c(s)$ ([29]). Ako je $k_2 = 0$, tada krivulju ne možemo reparametrizirati na opisani način. Neki autori poput ([44]) koriste drugačije definicije i oznake ((T, N, B) za svjetlosni trobrid i τ za odgovarajuću zakrivljenost koju nazivaju pseudo-torzija).

1.2.2 Lokalna teorija ploha u $\mathbb{R}^3_1$

Plohe u $\mathbb{R}^3_1$ definiramo kao i u $\mathbb{R}^3$:

Definicija 1.27 Podskup $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3_1$ je ploha ako za svaku točku $p \in \mathbb{S}$ postoji otvorena okolina $V \subset \mathbb{R}^3_1$ i preslikavanje $f \colon U \to V \cap \mathbb{S}$ s otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^2$ koje je

1. homeomorfizam otvorenih skupova,
2. glatko preslikavanje.

Preslikavanje f nazivamo parametrizacijom (lokalnim koordinatama, koordinatnom kartom) okoline točke p plohe $\mathbb{S}$. Pišemo $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.
Diferencijal preslikavanja f je linearni operator $Df \colon \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^3_1$ koji je u paru kanonskih baza dan Jacobijevom matricom

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Diferencijal je injektivan ako i samo ako je njegova jezgra trivijalna, odnosno ako i samo ako su vektori

$$f_1 := \frac{\partial f}{\partial u} \quad \text{i} \quad f_2 := \frac{\partial f}{\partial v}$$

linearno nezavisni, što je ekvivalentno uvjetu $f_1 \times f_2 \neq 0$. Kada je diferencijal preslikavanja f injektivan, za plohu kažemo da je regularna (tj. da je preslikavanje f regularno).

Neka je $\mathbb{S}$ glatka imerzirana ploha u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru $\mathbb{R}^3_1$ s lokalnom parametrizacijom $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$, gdje je $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Označit ćemo s g ili $\langle\,,\,\rangle$ induciranu metriku na $\mathbb{S}$ (njezinu prvu fundamentalnu formu I), tj. povlak pseudo-skalarnog produkta $\langle\,,\,\rangle$ prostora $\mathbb{R}^3_1$. U lokalnim koordinatama pišemo

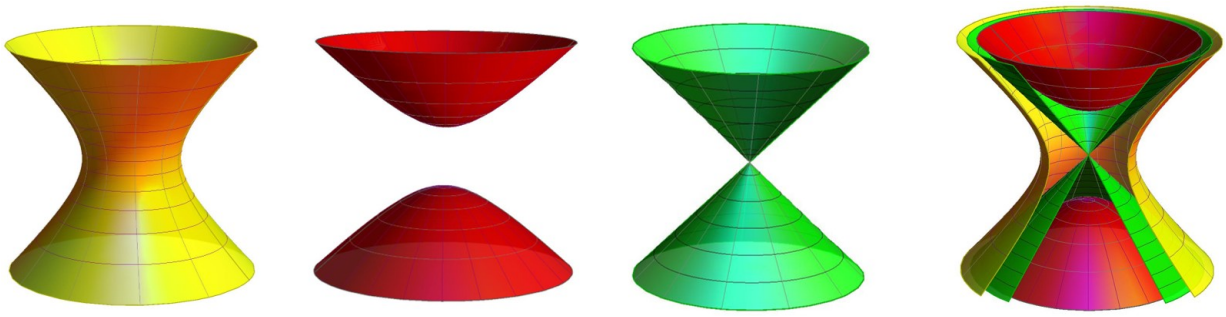
$$g_{11} = \langle f_1, f_1\rangle, \quad g_{21} = \langle f_1, f_2\rangle, \quad g_{22} = \langle f_2, f_2\rangle.$$

Ploha $\mathbb{S}$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) ako je njezina prva fundamentalna forma g pozitivno definitna (odnosno indefinitna, ranga 1). Iz daljnjeg razmatranja isključujemo svjetlosne plohe. Klasifikacija svjetlosnih ploha napravljena je u ([6]). Skup svjetlosnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ čine svjetlosna ravnina, svjetlosni stožac, te pravčaste plohe sa specijalnom baznom krivuljom i svjetlosnim izvodnicama.

U $\mathbb{R}^3_1$ imamo sljedeće kvadrike:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^2_1(p,r) &= \{q \in \mathbb{R}^3_1 \colon \langle (q-p), (q-p)\rangle = r^2\},\\
\mathbb{H}^2(p,r) &= \{q \in \mathbb{R}^3_1 \colon \langle (q-p), (q-p)\rangle = -r^2\},\\
\mathbb{LC}(p) &= \{q \in \mathbb{R}^3_1 \colon \langle (q-p), (q-p)\rangle = 0\}.
\end{aligned}$$

Skup $\mathbb{S}^2_1(p,r)$ se naziva Lorentzova sfera, vremenska sfera ili pseudo-sfera sa središtem u točki p i radijusom $r > 0$, skup $\mathbb{H}^2(p,r)$ je prostorna sfera ili hiperbolička ravnina sa središtem u točki p i radijusom r, a $\mathbb{LC}(p)$ svjetlosni stožac s vrhom p. Skup $\mathbb{S}^2_1(p,r)$ nasljeduje pseudo-metriku indeksa 1, skup $\mathbb{H}^2(p,r)$ Riemannovu metriku, a $\mathbb{LC}(p)$ degeneriranu metriku ranga 1. Pseudo-sferu $\mathbb{S}^2_1(0,1)$ kraće ćemo označavati sa $\mathbb{S}^2_1$, te analogno hiperboličku ravninu $\mathbb{H}^2(0,1)$ s $\mathbb{H}^2$, odnosno svjetlosni stožac $\mathbb{LC}(0)$ s $\mathbb{LC}$.



Slika 1.1: Pseudo-sfera $\mathbb{S}^2_1$, hiperbolička ravnina $\mathbb{H}^2$ i svjetlosni stožac $\mathbb{LC}$

Krivulje na plohi definiramo analogno kao u euklidskom prostoru:

Definicija 1.28 Svako glatko preslikavanje $c\colon I \to \mathbb{S}$, $I \subset \mathbb{R}$ nazivamo krivuljom na plohi.

Pritom, za preslikavanje $c\colon I \to \mathbb{S}$ kažemo da je glatko ako je preslikavanje $f^{-1} \circ c\colon I \to U$ glatko, za neku kartu $f\colon U \to \mathbb{S}$, $c(I) \subset f(U)$.

Na plohi možemo definirati i tzv. parametarske krivulje.

Definicija 1.29 Neka je $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{S}$ lokalna parametrizacija plohe $\mathbb{S}$ i $(u_0, v_0) \in U$. Krivulja

$$u \mapsto f(u, v_0) \quad \text{i} \quad v \mapsto f(u_0, v)$$

naziva se redom parametarska u i v-krivulja.

Analogno kao u euklidskom prostoru definiramo i tangencijalni vektor u točki p plohe $\mathbb{S}$.

Definicija 1.30 Neka je $\mathbb{S}$ regularna ploha i $p \in \mathbb{S}$. Tangencijalni vektor u točki p je vektor $v_p \in T_p\mathbb{R}^3_1$ za koji postoji krivulja $c\colon I \to \mathbb{S}$, takva da je $c(0) = p$ i $c'(0) = v_p$. Skup svih tangencijalnih vektora u p označavamo s $T_p\mathbb{S}$.

Teorem 1.31 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ regularna točka. Neka je $T_p\mathbb{S}$ skup svih tangencijalnih vektora plohe $\mathbb{S}$ u točki p. Tada je $T_p\mathbb{S}$ potprostor od $T_p\mathbb{R}^3_1$ dimenzije 2.

Potprostor $T_p\mathbb{S}$ se naziva *tangencijalna ravnina* plohe $\mathbb{S}$ u točki p.

Ako je $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ karta koja parametrizira dio plohe $\mathbb{S}$ oko točke p i $p = f(u, v)$, onda je skup $\{f_1(u, v), f_2(u, v)\}$ baza za $T_p\mathbb{S}$.

Kauzalni karakter plohe možemo odrediti i preko kauzalnog karaktera tangencijalne ravnine.

Definicija 1.32 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ regularna točka. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je

1. prostorna u točki p ako je potprostor $T_p\mathbb{S}$ prostorni,
2. vremenska (Lorentzova) u točki p ako je potprostor $T_p\mathbb{S}$ vremenski,
3. svjetlosna (izotropna) u točki p ako je potprostor $T_p\mathbb{S}$ svjetlosni.

Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska, svjetlosna) u svakoj svojoj točki, onda kažemo da je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska, svjetlosna) ploha.

Teorem 1.33 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ regularna točka. Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ karta koja parametrizira dio plohe $\mathbb{S}$ oko točke $p = f(u, v)$. Pretpostavimo da je vektor $f_1(u, v) \times f_2(u, v)$ prostorni ili vremenski. Tada je $\dim T_p\mathbb{S}^\perp = 1$.

Teorem 1.33 ne vrijedi kada je vektor $f_1(u, v) \times f_2(u, v)$ svjetlosni.

Nadalje, kauzalni karakter plohe u $\mathbb{R}^3_1$ može se odrediti i preko kauzalnog karaktera vektora okomitog na tangencijalnu ravninu plohe, tj. vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.34 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ regularna točka. Neka je $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ karta koja parametrizira dio plohe $\mathbb{S}$ oko točke p i $p = f(u,v)$. Ploha je

1. prostorna ako i samo ako u svakoj točki $p = f(u,v)$ postoji vremenski vektor koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u p, odnosno ako je $f_1(u,v) \times f_2(u,v)$ vremenski vektor,

2. vremenska ako i samo ako u svakoj točki $p = f(u,v)$ postoji prostorni vektor različit od $\vec{0}$ koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u p, odnosno ako je $f_1(u,v) \times f_2(u,v)$ prostorni vektor,

3. svjetlosna ako i samo ako u svakoj točki $p = f(u,v)$ postoji svjetlosni vektor koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u p, odnosno ako je $f_1(u,v) \times f_2(u,v)$ svjetlosni vektor.

Definicija 1.35 Neka je $\mathbb{S}$ regularna prostorna ili vremenska ploha i $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ karta koja pokriva područje $f(U)$ plohe $\mathbb{S}$. Vektor

$$n = \frac{f_1 \times f_2}{\|f_1 \times f_2\|} \in T_p\mathbb{S}^\perp$$

zovemo standardnim jediničnim vektorom normale (jedinična normala) karte f.

Prostorne (odnosno, vremenske) plohe imaju jedinstvenu jediničnu normalu koja je nužno vremenska (odnosno, prostorna), dok svjetlosne plohe imaju jedinstveni jednodimenzionalni normalni potprostor koji je sadržan u tangencijalnoj ravnini.

Za prostorne i vremenske plohe orijentacija u $\mathbb{R}^3_1$ se definira analogno kao u $\mathbb{R}^3$, dok svjetlosne plohe se ne mogu orijentirati poput onih u euklidskom prostoru jer im je normalni prostor degeneriran.

Definicija 1.36 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ili vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Vektorsko polje n na $\mathbb{S}$ koje svakoj točki $p \in \mathbb{S}$ pridružuje neku jediničnu normalu $n(p)$ plohe $\mathbb{S}$ u točki p zovemo jedinično normalno polje plohe $\mathbb{S}$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je orijentabilna ako postoji glatko jedinično normalno polje n plohe $\mathbb{S}$. Tada uređeni par $(\mathbb{S}, n)$ zovemo orijentirana ploha.

Mi u radnji ćemo pretpostaviti da je svaka ploha orijentirana.

Definicija 1.37 Neka je $\mathbb{S}$ regularna prostorna ili vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $f\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ njena karta. Gaussovo preslikavanje za vremenske plohe dano je s $g\colon U \to \mathbb{S}^2_1$, $g(u,v) = n(u,v)$ odnosno, za prostorne plohe s $g\colon U \to \mathbb{H}^2$, $g(u,v) = n(u,v)$.

Definicija 1.38 Neka je p točka na plohi $\mathbb{S}$ i n njezina jedinična normala u toj točki. Weingartenov endomorfizam (operator oblika plohe $\mathbb{S}$) u točki p definiran je s $L_p\colon T_p\mathbb{S} \to T_p\mathbb{R}^3_1$, $L_p v = -D_v n$.

Sada ćemo definirati Gaussovu i srednju zakrivljenost plohe.

Definicija 1.39 (Gaussova i srednja zakrivljenost)
Gaussova zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ u točki p je funkcija $K\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$K = \epsilon \det L_p, \quad \epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}.$$

Srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ u točki p je funkcija $H\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$H = \frac{\epsilon}{2}\mathrm{tr} L_p, \quad \epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}.$$

Sljedeći cilj je odrediti formule za K, H u karti plohe. U tu svrhu definirat ćemo najprije drugu fundamentalnu formu plohe.

Druga fundamentalna forma $\mathbf{II}$ u p je vektor $\mathbf{II}$ ortogonalan na $T_p\mathbb{S}$ za koji vrijedi

$$\langle \mathbf{II}_p(v, w), n\rangle = \langle L_p v, w\rangle. \tag{1.1}$$

Operator oblika plohe L_p je simetričan operator s obzirom na $\langle\ ,\ \rangle$, stoga vrijedi $\langle L_p v, w\rangle = \langle v, L_p w\rangle$, $v, w \in T_p\mathbb{S}$. Za pridruženu skalarnu formu II_p vrijedi

$$\mathbf{II}_p(v, w) = II_p(v, w)n = \epsilon\langle L_p v, w\rangle n,$$

tj. $II_p(v, w) = \epsilon\langle L_p v, w\rangle n$, gdje je $\epsilon = \langle n, n\rangle \in \{-1, 1\}$. U lokalnim koordinatama koeficijente h_{ij} od $\mathbf{II}_p$ definiramo kao $\mathbf{II}_p(f_i, f_j) = h_{ij}n$ i stoga je

$$h_{ij} = \epsilon\langle L_p(f_i), f_j\rangle = -\epsilon\langle n_i, f_j\rangle = \epsilon\langle f_{ij}, n\rangle.$$

Nadalje, vrijedi sljedeća formula

$$L_p(f_i) = -n_i = \epsilon \sum_{k,s} h_{ik} g^{ks} f_s, \quad i = 1, 2$$

gdje je (g^{ij}) inverzna matrica matrice (g_{ij}).

Također koristimo sljedeće oznake

$$E = g_{11},\ F = g_{12} = g_{21},\ G = g_{22},\ L = h_{11},\ M = h_{12} = h_{21},\ N = h_{22}.$$

Veličine E, F, G, odnosno L, M, N zovemo fundamentalnim veličinama prvog, odnosno drugog reda plohe $\mathbb{S}$.

Gaussova zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ definirana je s ([64])

$$K = \epsilon \det L_p = \frac{\langle \mathbf{II}(X,X), \mathbf{II}(Y,Y)\rangle - \langle \mathbf{II}(X,Y), \mathbf{II}(Y,X)\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2},$$

a u lokalnim koordinatama ju računamo po formuli

$$K = \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{1.2}$$

Srednja zakrivljenost vektorskog polja plohe $\mathbb{S}$ definirana je s ([64])

$$H = \frac{\epsilon}{2}\mathrm{tr}\mathbf{II} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 \mathbf{II}(e_1,e_1) + \epsilon_2 \mathbf{II}(e_2,e_2)),$$

gdje je (e_1, e_2) ortonormirana baza na $\mathbb{S}$ u točki p i $\epsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$, $i = 1, 2$. Stavimo li $\mathbf{H} = Hn$, tada (1.1) povlači

$$H\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon_1\langle \mathbf{II}(e_1,e_1), n\rangle + \epsilon_2\langle \mathbf{II}(e_2,e_2), n\rangle) = \frac{1}{2}(\epsilon_1\langle L_p(e_1), e_1\rangle + \epsilon_2\langle L_p(e_2), e_2\rangle)$$

i stoga vrijedi $H = \frac{\epsilon}{2}\mathrm{tr}L_p$. U lokalnim koordinatama srednju zakrivljenost računamo po formuli

$$H = \frac{\epsilon}{2}\frac{LG - 2FM + EN}{EG - F^2}. \tag{1.3}$$

S obzirom na Gaussovu, odnosno srednju zakrivljenost možemo definirati sljedeće vrste ploha.

- Plosnate plohe su plohe kojima je $K(p) = 0$ u svakoj točki.
- Minimalna (maksimalna) ploha je vremenska (prostorna) ploha za koju vrijedi $H(p) = 0$ u svakoj točki plohe.
- Prava ploha konstantne srednje zakrivljenosti tzv. CMC ploha (od engleskog *constant mean curvature*) je ploha za koju vrijedi $H(p) = const. \neq 0$ u svakoj točki plohe.

U radnji naš cilj je proučavati minimalne (maksimalne) i CMC plohe.

U nastavku definirat ćemo glavne zakrivljenosti i glavne vektore, zatim ćemo istražiti svojstva operatora oblika plohe te ćemo definirati normalnu zakrivljenost.

Definicija 1.40 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ točka. Svojstvene vrijednosti $k_1(p)$, $k_2(p) \in \mathbb{C}$ operatora L_p zovemo glavne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u točki p, a pripadne svojstvene (glavne) vektore, glavnim smjerovima plohe $\mathbb{S}$ u točki p.

Svojstvene vrijednosti k_1, k_2 operatora L_p možemo izračunati iz (1.2) i (1.3) pomoću formule

$$k_{1,2} = \epsilon H \pm \sqrt{H^2 - \epsilon K}. \tag{1.4}$$

Za prostorne plohe uvijek vrijedi $H^2 - \epsilon K \geq 0$, a za vremenske plohe samo u točkama s realnim glavnim zakrivljenostima.

U $\mathbb{R}^3$ operator oblika plohe L_p se uvijek može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$. Svojstvene vrijednosti operatora L_p su realne i postoji (ortonormirana) baza $\{e_1, e_2\} \in T_p\mathbb{S}$ takva da je matrični prikaz operatora L_p u toj bazi dijagonalna matrica (koja tada ima svojstvene vrijednosti na dijagonali). Pri tome je e_i svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $k_i(p)$ za $i \in \{1, 2\}$. Isto ne vrijedi u Minkowskijevom prostoru. Ako je ploha prostorna, svojstvene vrijednosti operatora L_p su realne i L_p je dijagonalizabilan nad $\mathbb{R}$ kao i u $\mathbb{R}^3$. Ako je ploha vremenska, svojstvene vrijednosti operatora L_p mogu biti realne i različite (L_p je dijagonalizabilan), realne i jednake (L_p je dijagonalizabilan tzv. umbiličke plohe ili L_p nije dijagonalizabilan tzv. kvazi-umbiličke plohe) ili kompleksno konjugirane (L_p je dijagonalizabilan nad poljem $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). U radnji posebnu pažnju posvetit ćemo kvazi-umbiličkim plohama jer nemamo njihove analogone u euklidskom prostoru. Više o njima navedeno je u poglavlju 1.2.4.

Teorem 1.41 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $p \in \mathbb{S}$ točka.

1. Operator L_p se može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $H(p)^2 - \epsilon K(p) > 0$ ili je točka p umbilička $H(p)^2 - \epsilon K(p) = 0$.

2. Operator L_p se može dijagonalizirati nad $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ako i samo ako je $H(p)^2 - \epsilon K(p) < 0$.

3. Operator L_p se ne može dijagonalizirati nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako je $H(p)^2 - \epsilon K(p) = 0$ i točka nije umbilička.

Nadalje, vrijedi:

$$K(p) = \epsilon\, k_1(p)k_2(p) \quad \text{i} \quad H(p) = \frac{\epsilon}{2}(k_1(p) + k_2(p)). \tag{1.5}$$

Za vremenske plohe čije su glavne zakrivljenosti kompleksno konjugirane poznato je da se takve plohe konstantne zakrivljenosti K mogu dobiti kao rješenja ch-Gordonove jednadžbe $\omega_{uv} = \cosh\omega$, ([22]). U radnji nećemo proučavati vremenske plohe kojima L_p ima kompleksne svojstvene vrijednosti.

Definicija 1.42 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$, $p \in \mathbb{S}$ točka i $v \in T_p\mathbb{S}$ vektor koji nije svjetlosni. Tada broj

$$k(v) := \frac{\langle L_p(v), v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

zovemo normalna zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ u točki p u smjeru vektora v.

Normalna zakrivljenost je dobro definirana, tj. ovisi samo o smjeru vektora v. Neka je

$w \in T_p\mathbb{S}$ neki vektor kolinearan s v, $w = \lambda v$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$k(w) = \frac{\langle L_p(w), w\rangle}{\langle w, w\rangle} = \frac{\langle L_p(\lambda v), \lambda v\rangle}{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \frac{\lambda^2\langle L_p(v), v\rangle}{\lambda^2\langle v, v\rangle} = k(v).$$

Kao i u euklidskom prostoru tako i u Minkowskijevom za prostorne plohe vrijedi da su glavne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u točki p zapravo normalne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u točki p u smjeru glavnih vektora. Nadalje, vrijedi propozicija 1.43 koja se dokazuje analogno kao u euklidskom slučaju.

Propozicija 1.43 Neka je V dvodimenzionalan realan vektorski prostor u $\mathbb{R}^3_1$ i $A\colon V \to V$ simetričan linearan operator. Tada postoji ortonormirana baza za V u kojoj operator A ima dijagonalan matrični prikaz ako i samo ako funkcija $Q(v) = \langle Av, v\rangle$ postiže minimum i maksimum na jediničnoj kružnici $\|v\| = 1$. Tada su svojstvene vrijednosti od A upravo minimum i maksimum funkcije Q na tom skupu.

Ako se operator L_p može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$, onda za $i \in \{1, 2\}$ vrijedi:

$$k(e_i(p)) = \frac{\langle L_p(e_i(p)), e_i(p)\rangle}{\langle e_i(p), e_i(p)\rangle} = \frac{\langle k_i e_i(p), \lambda e_i(p)\rangle}{\langle e_i(p), \lambda e_i(p)\rangle} = k_i(p).$$

Iz čega slijedi da su glavne zakrivljenosti prostorne plohe $\mathbb{S}$ u točki p zapravo normalne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u točki p u smjeru glavnih vektora. Formula (1.5) opravdava naziv srednja zakrivljenost. Naime, iz propozicije 1.43 imamo da su glavne zakrivljenosti $k_1(p)$ i $k_2(p)$ kao svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe minimum i maksimum normalne zakrivljenosti na jediničnoj kružnici i obrnuto, a iz relacije (1.5) imamo da je H aritmetička sredina od $k_1(p)$ i $k_2(p)$.

Točke na plohi klasificiramo na sljedeći način:

1. Za točku $p \in \mathbb{S}$ kažemo da je eliptička ako je $K(p) > 0$. U toj su točki glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 istog predznaka. Primjer takve točke je svaka točka elipsoida.

2. Za točku $p \in \mathbb{S}$ kažemo da je hiperbolička ako je $K(p) < 0$. Glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 su različitog predznaka. Primjer takve točke je svaka točka helikoida.

3. Za točku $p \in \mathbb{S}$ kažemo da je parabolička ako je $K(p) = 0$. Tada je barem jedna glavna zakrivljenost k_1 ili k_2 jednaka 0. Razlikujemo dva slučaja:

   - Samo je jedna glavna zakrivljenost jednaka 0. Primjer takve točke je svaka točka kružnog cilindra.
   - Obje glavne zakrivljenosti su jednake 0. Takvu točku nazivamo ravninskom ili točkom spljoštenosti. Primjer takve točke je svaka točka ravnine.

U Minkowskijevom prostoru vrijedi Eulerov teorem za prostorne i vremenske plohe koje nisu kvazi-umbiličke. Za prostorne plohe, Eulerov teorem je analogan kao u euklidskom prostoru, a kod vremenske plohe moramo razlikovati je li vektor vremenski ili prostorni.

Teorem 1.44 (Eulerov teorem za prostorne plohe)
Neka su e_1 i e_2 jedinični glavni vektori prostorne plohe $\mathbb{S}$ ($\langle e_i, e_i\rangle = 1$, $i = 1, 2$) u točki p i neka je $v_p = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2$ po volji odabran prostorni jedinični tangencijalni vektor u p ($\langle v_p, v_p\rangle = 1$). Tada je

$$k(v_p) = k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha, \tag{1.6}$$

gdje su k_1 i k_2 glavne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u p.

Teorem 1.45 (Eulerov teorem za vremenske plohe koje nisu kvazi-umbiličke)
Neka je e_1 jedinični prostorni, a e_2 jedinični vremenski glavni vektor ($\langle e_1, e_1\rangle = 1$, $\langle e_2, e_2\rangle = -1$) u točki p vremenske plohe $\mathbb{S}$ koja nije kvazi-umbilička.

1. Ako je $v_p = \cosh\alpha\, e_1 + \sinh\alpha\, e_2$ po volji odabran prostorni jedinični tangencijalni vektor u p ($\langle v_p, v_p\rangle = 1$), onda je

$$k(v_p) = k_1 \cosh^2\alpha - k_2 \sinh^2\alpha. \tag{1.7}$$

2. Ako je $v_p = \sinh\alpha\, e_1 + \cosh\alpha\, e_2$ po volji odabran vremenski jedinični tangencijalni vektor u p ($\langle v_p, v_p\rangle = -1$), onda je

$$k(v_p) = -k_1 \sinh^2\alpha + k_2 \cosh^2\alpha. \tag{1.8}$$

gdje su k_1 i k_2 glavne zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$ u p.

Dokaz. Neka je $v_p = \cosh\alpha\, e_1 + \sinh\alpha\, e_2$ prostorni jedinični tangencijalni vektor u p. Računamo normalnu zakrivljenost po definiciji:

$$\begin{aligned} k(v_p) &= \frac{\langle L_p(v_p), v_p\rangle}{\langle v_p, v_p\rangle} = \frac{\langle L_p(\cosh\alpha\, e_1 + \sinh\alpha\, e_2), \cosh\alpha\, e_1 + \sinh\alpha\, e_2\rangle}{1} \\ &= \cosh^2\alpha\langle L_p(e_1), e_1\rangle + \cosh\alpha\sinh\alpha(\langle L_p(e_1), e_2\rangle + \langle L_p(e_2), e_1\rangle) + \sinh^2\alpha\langle L_p(e_2), e_2\rangle \\ &= k_1\cosh^2\alpha - k_2\sinh^2\alpha. \end{aligned}$$

Neka je $v_p = \sinh\alpha\, e_1 + \cosh\alpha\, e_2$ vremenski jedinični tangencijalni vektor u p. Računamo normalnu zakrivljenost po definiciji:

$$\begin{aligned} k(v_p) &= \frac{\langle L_p(v_p), v_p\rangle}{\langle v_p, v_p\rangle} = \frac{\langle L_p(\sinh\alpha\, e_1 + \cosh\alpha\, e_2), \sinh\alpha\, e_1 + \cosh\alpha\, e_2\rangle}{-1} \\ &= -(\sinh^2\alpha\langle L_p(e_1), e_1\rangle + \cosh\alpha\sinh\alpha(\langle L_p(e_1), e_2\rangle + \langle L_p(e_2), e_1\rangle) + \cosh^2\alpha\langle L_p(e_2), e_2\rangle) \\ &= -k_1\sinh^2\alpha + k_2\cosh^2\alpha. \end{aligned}$$

□

Na samom kraju definirat ćemo neke specijalne krivulje na plohi.

Definicija 1.46 (krivulje zakrivljenosti)
Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ili vremenska ploha s dijagonalizabilnim operatorom oblika plohe nad poljem $\mathbb{R}$. Za krivulju $c\colon I \to \mathbb{S}$ kažemo da je krivulja zakrivljenosti (crta krivine, glavna krivulja) na plohi $\mathbb{S}$ ako je u svakoj njenoj točki vektor c' kolinearan s glavnim vektorom u toj točki.

Svakom točkom prostorne ili vremenske plohe s dijagonalizabilnim operatorom oblika plohe nad poljem $\mathbb{R}$ prolaze dvije krivulje zakrivljenosti i one su međusobno okomite. Prema tome, krivulje zakrivljenosti određuju jednu ortogonalnu mrežu krivulja na plohi koju nazivamo *mrežom krivulja zakrivljenosti*. Od interesa je i znati kada se mreža krivulja zakrivljenosti podudara s parametarskom mrežom plohe.

Propozicija 1.47 Mreža krivulja zakrivljenosti podudara se s parametarskom mrežom plohe ako i samo ako je $F = M = 0$.

Definicija 1.48 (asimptotska krivulja)
Za krivulju $c\colon I \to \mathbb{S}$ kažemo da je asimptotska krivulja na $\mathbb{S}$, ako je u svakoj njenoj točki smjer određen vektorom c' asimptotski, $k(c') = 0$.

Definicija 1.49 (geodetska krivulja)
Za krivulju $c\colon I \to \mathbb{S}$ kažemo da je geodetska ako je u svakoj njenoj točki vektor c'' okomit na plohu.

Ovo poglavlje završit ćemo s *Fundamentalnim teoremom teorije ploha* u $\mathbb{R}^3_1$ koji nam daje odgovor na pitanje kojim veličinama je ploha (do na položaj u prostoru) jednoznačno određena ([34]).

Teorem 1.50 Neka su E, F, G, L, M i N glatke funkcije definirane na otvorenom skupu $U \subset \mathbb{R}^2$, $E \neq 0$, $G \neq 0$ koje zadovoljavaju Gaussovu formulu i Mainardi-Codazzi jednadžbe, te neka je $EG - F^2 \neq 0$. Tada za svaku točku $q \in U$ postoji okolina $V \subset U$ od q i glatki difeomorfizam $f\colon V \to f(V) \subset \mathbb{R}^3_1$ tako da regularna ploha $f(U) \subset \mathbb{R}^3_1$ ima funkcije E, F, G, L, M i N za fundamentalne veličine prvog, odnosno drugog reda. Nadalje, ako je V povezan, a $\overline{f}\colon V \to \overline{f}(V) \subset \mathbb{R}^3_1$ neki drugi glatki difeomorfizam koji zadovoljava navedene uvjete, tada postoji izometrija prostora $F : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ tako da je $\overline{f} = F \circ f$.

Sada ćemo definirati rotacijske plohe, pravčaste plohe i helikoidalne plohe u Minkowskijevom prostoru.

1.2.3 Rotacijske plohe u $\mathbb{R}^3_1$

Rotacijske plohe u Minkowskijevom prostoru definiramo analogno kao u euklidskom.

Definicija 1.51 (**Rotacijske plohe**)
Skup točaka u $\mathbb{R}^3_1$ koji nastaje rotacijom neke ravninske krivulje oko pravca u toj ravnini (koji ne siječe krivulju) nazivamo *rotacijskom plohom*. Krivulju koja rotira nazivamo *generatrisom* plohe, a pravac oko kojeg krivulja rotira *osi rotacije*.

Budući da želimo da svaka ploha bude regularna, u definiciju smo dodali uvjet da generatrisa ne siječe os rotacije. Ako dopustimo da generatrisa siječe os rotacije, onda u točki gdje se one sijeku ploha može imati singularnu točku kao što je npr. vrh u svjetlosnog stošca LC.

Za razliku od euklidskog prostora, u prostoru Minkowskog razlikujemo sedam tipova rotacijskih ploha. Ploha može biti prostorna ili vremenska, a os rotacije može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac.

Odabrat ćemo koordinatni sustav tako da parametrizacija rotacijskih ploha bude najjednostavnija moguća. Za rotaciju oko prostorne i vremenske osi za koordinatni sustav odabrat ćemo kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3_1$, tj. $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ i za vremensku os uzet ćemo x-os, a za prostornu os, z-os. Za rotaciju oko svjetlosne osi biramo svjetlosnu bazu (vidi definiciju 1.13) $\left\{A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C = (0,1,0)\right\}$ i za svjetlosnu os l, odabrat ćemo dijagonalu u xz-ravnini, tj. pravac $l := \{(x,0,x) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

Propozicija 1.52 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise $c \colon I \to \mathbb{S}$ oko prostorne osi, z-osi.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, onda karta $f \colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, koja parametrizira plohu $\mathbb{S}$ je oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u)\cosh v \\ x(u)\sinh v \\ z(u) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

   takva da je generatrisa $c(u) = f(u,0) = (x(u), 0, z(u))$ prostorna krivulja i $x(u) \neq 0$ za sve $u \in I$.

2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, onda karta $f \colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, koja parametrizira plohu $\mathbb{S}$ je

oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y(u) \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(u)\sinh v \\ y(u)\cosh v \\ z(u) \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

takva da je generatrisa $c(u) = f(u,0) = (0, y(u), z(u))$ prostorna krivulja i $y(u) \neq 0$ za sve $u \in I$ ili karta oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u)\cosh v \\ x(u)\sinh v \\ z(u) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

takva da je generatrisa $c(u) = f(u,0) = (x(u), 0, z(u))$ vremenska krivulja i $x(u) \neq 0$ za sve $u \in I$.

Propozicija 1.53 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska) rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise $c\colon I \to \mathbb{S}$ oko vremenske osi, x-osi. Karta $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, koja parametrizira plohu $\mathbb{S}$ je oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u)\cos v \\ y(u)\sin v \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

takva da je generatrisa $c(u) = f(u,0) = (x(u), y(u), 0)$ prostorna (vremenska) krivulja i $y(u) \neq 0$ za sve $u \in I$.

Propozicija 1.54 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska) rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise $c\colon I \to \mathbb{S}$ oko svjetlosne osi, pravca $l := \{(x,0,x)\colon x \in \mathbb{R}\}$. Karta $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, koja parametrizira plohu $\mathbb{S}$ je oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v^2}{2} & 1 & -v \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ -\frac{v^2}{2}x(u) + y(u) \\ v\,x(u) \end{pmatrix}$$

takva da je generatrisa $c(u) = f(u,0) = (x(u), y(u), 0)$ prostorna (vremenska) krivulja i $x(u) \neq 0$ za sve $u \in I$.

Uvjeti $x(u)$, $y(u) \neq 0$ za sve $u \in I$ dolaze iz zahtjeva da krivulja c ne siječe os rotacije. Propozicije 1.52, 1.53 i 1.54 nećemo dokazivati. Dokazi se mogu pronaći u ([52]), propozicija 1.9 S i propozicija 1.9 L.

U propoziciji 1.52, 2. dobivamo dva tipa ploha jer razmatramo dva slučaja. Ravnina u kojoj leže z-os i generatrisa c, može biti prostorna, yz-ravnina ili vremenska, xz-ravnina. Ako je ravnina prostorna, yz-ravnina, onda rotacijom krivulje c koja je nužno prostorna oko z-os možemo dobiti samo vremensku plohu koja je parametrizirana kartom (1.10). Ako je ravnina vremenska, xz-ravnina, onda možemo dobiti prostornu ili vremensku plohu, ovisno o tome je li krivulja c prostorna ili vremenska. Te plohe su parametrizirane kartama (1.9) i (1.11). U propoziciji 1.53 više nemamo dva slučaja jer je tada ravnina nužno vremenska jer sadrži vremenski pravac, x-os. U propozicijama 1.53 i 1.54 ravnina u kojoj leži os i generatrisa ne može biti svjetlosna jer bi u tom slučaju metrika u $\mathbb{R}^3_1$ bila degenerirana, a to ne može biti jer za xy-ravninu vrijedi tvrdnja da je metrika prostora Minkowskog na njoj nedegenerirana (vidi dokaz u [52]). U propoziciji 1.54 je ravnina nužno vremenska (prostorna ne može biti jer sadrži svjetlosni pravac).

U ([37]) i ([38]) se promatra slučaj kad je os rotacije y-os, ali mi ćemo to izostaviti jer se dobiju iste plohe kao kada rotiramo oko z-osi, samo sa zamijenjenim koordinatama.

1.2.4 Pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$

Pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$ definiramo analogno kao u $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.55 (**Pravčasta ploha**)
Skup točaka $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3_1$ dan parametarskim prikazom

$$f(u, v) = c(u) + vr(u),\ u \in I \subset \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

pri čemu su vektori f_u i f_v linearno nezavisni predstavlja jednu C^1-plohu u $\mathbb{R}^3_1$ koju nazivamo pravčasta ploha. Krivulja c se naziva bazna krivulja (direktrisa, vodilica, ravnalica), a pravci određeni vektorom smjera $r(u)$ izvodnice (generatrise) plohe.

Specijalno, krivulja $r(u)$ se naziva direkcijska krivulja pravčaste plohe. Izvodnice pravčaste plohe su zadane s $v \mapsto c(u_0) + v\, r(u_0)$.

Nadalje, ako pretpostavimo da vektor e nije svjetlosni plohu $\mathbb{S}$ možemo reparametrizirati tzv. standardnom parametrizacijom, odnosno parametrizacijom za koju vrijedi da je polje $r(u)$ jedinično i $\langle c', r' \rangle = 0$.

U nastavku ćemo pretpostaviti da je pravčasta ploha parametrizirana standardnom parametrizacijom.

U ([29]) navedene su četiri klase pravčastih ploha koje se pojavljuju u $\mathbb{R}^3_1$:

1. pravčaste ploha čija bazna krivulja, odnosno izvodnice nisu svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisni, klasa M_1,

2. pravčaste plohe čija bazna krivulja je svjetlosnog karaktera, a izvodnice su prostornog, odnosno vremenskog karaktera, te $\langle c', r\rangle \neq 0$,

3. pravčaste plohe čija bazna krivulja je prostornog, odnosno vremenskog karaktera, a izvodnice su svjetlosnog karaktera, te $\langle c', r\rangle \neq 0$,

4. pravčaste plohe čija bazna krivulja i izvodnice su svjetlosnog karaktera i linearno su nezavisni, klasa M_0,

te je pokazano da se uz odgovarajuću reparametrizaciju bazne krivulje, pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3_1$ mogu svesti na plohe klase M_1, odnosno M_0.

S obzirom na kauzalni karakter izvodnice r i njezine derivacije r' plohe klase M_1 dalje možemo podijeliti na

- plohe klase M_1^1, ako r i r' nisu svjetlosnog karaktera,

- plohe klase M_1^0, ako r nije, ali r' je svjetlosnog karaktera.

Pravčaste plohe klase M_1^1 zovemo ne-nul pravčaste plohe, dok za plohe klase M_0 koristi se termin nul-pravčaste plohe uz napomenu da su ove plohe vremenskog, a ne svjetlosnog karaktera na što bi mogao asocirati termin "nul". Dalje je važno napomenuti da je lokalna teorija ne-nul pravčastih ploha analogna teoriji pravčastih ploha u euklidskom prostoru, dok za nul-pravčaste plohe koje nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru to općenito ne vrijedi.

Pravčaste plohe klase M_1^1 možemo smatrati svojevrsnim analogonima pravčastih ploha iz euklidskog prostora budući da za njih vrijede analogne definicije i teoremi za pravčaste plohe u $\mathbb{R}^3$. U $\mathbb{R}^3_1$ pravčaste plohe možemo razlikovati s obzirom na kauzalni karakter bazne krivulje, odnosno izvodnice. Ako je bazna krivulja c prostornog ili vremenskog karaktera, tada se izvodnice r mogu odabrati tako da su ortogonalne na krivulju c. Budući da u $\mathbb{R}^3_1$ vremenski vektor može biti ortogonalan samo na prostorni vektor ([44]), među plohama klase M_1^1 razlikujemo tri različita tipa ploha s obzirom na kauzalni karakter bazne krivulje, odnosno izvodnice:

- plohe tipa $\mathbb{S}_1$ su pravčaste plohe s prostornom baznom krivuljom i prostornim izvodnicama,

- plohe tipa $\mathbb{S}_2$ su pravčaste plohe s prostornom baznom krivuljom i vremenskim izvodnicama,
- plohe tipa $\mathbb{S}_3$ su pravčaste plohe s vremenskom baznom krivuljom i prostornim izvodnicama.

Plohe tipa $\mathbb{S}_1$ su prostorne plohe, dok su plohe tipa $\mathbb{S}_2$ i $\mathbb{S}_3$ vremenske pravčaste plohe.

Plohe klase M_1^0 su plohe s parametrizacijom (1.13) čije su izvodnice prostornog, a vektorska polja r' svjetlosnog karaktera, tj. $\langle r', r' \rangle = 0$. Ovakve plohe nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru budući da u euklidskom prostoru samo za cilindrične plohe vrijedi $\langle r', r' \rangle = 0$ tj. vektorsko polje r je konstantno. U Minkowskijevom prostoru zbog indefinitnosti metrike imamo specijalan slučaj ploha kojima vektorsko polje r nije konstantno, ali je $\langle r', r' \rangle = 0$. Za takve plohe također možemo reći da je direkcijska krivulja pravčaste plohe svjetlosnog karaktera. Ova klasa ploha analizirana je u ([12, 73]).

Nama su sada od posebnog interesa plohe iz klase M_0 ili nul-pravčaste plohe. Clelland u ([10]) je pokazala da su upravo kvazi-umbiličke plohe, plohe klase M_0 ili nul-pravčaste plohe. To su pravčaste plohe kojima je bazna krivulja i izvodnice svjetlosnog karaktera. Za plohe klase M_0 prema definiciji vrijedi linearna nezavisnost bazne krivulje c i izvodnica r. Budući da su dva svjetlosna vektora linearno zavisna ako i samo ako je njihov pseudoskalarni produkt jednak nuli (vidi [44]), slijedi $\langle c', r \rangle \neq 0$. Nadalje, prema [29, 39] svaku nul-pravčastu plohu za koju vrijedi $\langle c', r \rangle \neq 0$, možemo parametrizirati kao B-namotajnu plohu koju definiramo kako slijedi.

Definicija 1.56 (B**-namotajna ploha**)
Pravčasta ploha sa svjetlosnim izvodnicama i baznom krivuljom c koja je svjetlosna Frenetova krivulja sa svjetlosnim trobridom (A, B, C), pri čemu je

$$c' = A, \;\; \langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \;\; \langle C, C \rangle = 1,$$

$$\langle A, B \rangle = 1, \;\; \langle A, C \rangle = 0, \;\; \langle B, C \rangle = 0,$$

te su izvodnice određene s vektorskim poljem $r = B$, naziva se B-namotajna ploha.

Dakle, B-namotajna ploha ima parametrizaciju oblika

$$f(u, v) = c(u) + vB(u), \;\; u \in I \subset \mathbb{R}, \, v \in \mathbb{R}.$$

Za vektorska polja (A, B, C) vrijede analogoni Frenetovih formula

$$A' = k_2 C, \;\; B' = k_3 C, \;\; C' = -k_3 A - k_2 B,$$

pri čemu se funkcije k_2 i k_3 nazivaju zakrivljenostima krivulje c. B-namotajne plohe su vremenske plohe i njihova prva fundamentalna forma I, odnosno druga fundamentalna forma II, te operator oblika plohe L_p dani su s ([29])

$$I = k_3^2 v^2 \mathrm{d}u^2 + 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

$$II = (k_2 + vk_3' + v^2 k_3^3)\mathrm{d}u^2 + 2k_3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

$$L_p = \begin{pmatrix} k_3 & 0 \\ k_2 + vk_3'^2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Gaussova zakrivljenost K, odnosno srednja zakrivljenost H, B-namotajne plohe su dani s $K = k_3^2$, odnosno s $H = k_3$. Stoga za B-namotajne plohe uvijek vrijedi $H^2 = K$ tako da su one tzv. Weingartenove plohe. Mogu biti totalno umbiličke kao što je pseudo-sfera $\mathbb{S}_1^2(p, r)$ ili kvazi-umbiličke. Primjeri B-namotajnih ploha uključuju plosnate (očito i minimalne) B-namotajne plohe kao što je paraboličkи svjetlosni cilindar, čija će parametrizacija biti prikazana kasnije u radnji, primjer 2.32.

1.2.5 Helikoidalne plohe u $\mathbb{R}_1^3$

Helikoidalne plohe u $\mathbb{R}_1^3$ se definiraju analogno kao u euklidskom prostoru.

Definicija 1.57 (**Helikoidalna ploha**)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}_1^3$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je helikoidalna ako je ona invarijantna za neku jednoparametarsku grupu preslikavanja $G_{L,h}$ koja opisuje tzv. helikoidalno gibanje. $G_{L,h}$ određuje os L i nagib $h \neq 0$. Općenito, helikoidalna ploha $\mathbb{S}$ je parametrizirana kartom $f(u, v) = \phi_v(\gamma(u))$, gdje je $\gamma(u)$ (regularna) krivulja koju zovemo generatrisa plohe $\mathbb{S}$ i $\phi_v \in G_{L,h}$. Krivulju koju dobijemo za fiksirani v zovemo izvodnica helikoidalne plohe.

Napomena 1.58 Nećemo definirati pojam helikoidalnog gibanja. O tome se može pročitati u ([42]). Intuitivno, helikoidalno gibanje točke se sastoji od rotacije oko nekog pravca i istovremeno translacije u smjeru tog pravca (gibanje po zavojnici). Helikoidalne plohe u $\mathbb{R}_1^3$ s vremenskom i prostornom osi proučavane su u ([4]), a u slučaju kada je os svjetlosna u ([30, 31, 60]).

Sada ćemo navesti opću parametrizaciju helikoidalne plohe u slučaju kada je njena os redom z-os, x-os i pravac $l = \{(x, x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$, vidi ([4]).

Helikoidalna ploha sa z-osi.
Ovdje razlikujemo dva slučaja, vidi objašnjenje kod rotacijskih ploha.

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u)\sinh v \\ f(u)\cosh v \\ g(u) + h\, v \end{pmatrix}$$

ili

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u)\cosh v \\ f(u)\sinh v \\ g(u) + h\, v \end{pmatrix}.$$

Autori u ([4]) ove plohe nazivaju redom *helikoidalna ploha tipa I* i *II*.

Helikoidalna ploha s x-osi:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u) + h\, v \\ f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \end{pmatrix}.$$

Autori u ([4]) ovu plohu nazivaju *helikoidalna ploha tipa III*.

Helikoidalna ploha s osi $l = \{(x,x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})f(u) - \frac{v^2}{2}g(u) + h\, v \\ \frac{v^2}{2}f(u) + (1-\frac{v^2}{2})g(u) + h\, v \\ v\,(f(u) - g(u)) \end{pmatrix}.$$

U ([12]) navedeno helikoidalno gibanje se naziva kubno helikoidalno gibanje. Autori u ([4]) dobivenu plohu zovu *helikoidalna ploha tipa IV*.

Ovdje je $h \neq 0$ konstanta, a funkcija $f(u)$ je klase C^1 i $g(u)$ je klase C^2. Ako je generatrisa pravac dobivenu plohu nazivamo *helikoid*. Općenito, helikoidalne plohe su poopćenje helikoida na plohe koje nisu nužno pravčaste, tj. plohe kojima izvodnice nisu nužno pravci. Posebna potklasa helikoidalnih ploha su pravčaste helikoidalne plohe. To su plohe koje su istovremeno helikoidalne i pravčaste. Primjeri ploha iz te klase su helikoidi o kojima će u nastavku biti više riječi. Uz pravčaste helikoidalne plohe, drugi najpoznatiji tip su helikoidalne plohe kojima su izvodnice kružnice, primjer kružni cilindri o kojima ćemo također govoriti u nastavku.

Poglavlje 2

Minimalne i maksimalne plohe u $\mathbb{R}^3_1$

Budući da se teorija minimalnih i maksimalnih ploha odvojeno proučava od teorije pravih CMC ploha u ovom poglavlju najprije ćemo navesti općenita svojstva minimalnih i maksimalnih ploha bez dokaza, zatim klasifikacije rotacijskih, pravčastih i translacijskih minimalnih i maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$.

2.1 Minimalne i maksimalne plohe

U ovom odlomku proučit ćemo neka općenita svojstva minimalnih i maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$.

Definicija 2.1 Neka je $\mathbb{S}$ vremenska (prostorna) ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je minimalna (maksimalna) ako je za nju $H = 0$.

Prvo ćemo dokazati teorem koji opravdava njihove nazive tj. tvrdnju da minimalne i maksimalne plohe lokalno minimiziraju (maksimiziraju) površinu. Taj teorem možemo naći u gotovo svim knjigama iz diferencijalne geometrije, mi smo koristili ([5, 11, 34, 36, 74]).

Definicija 2.2 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ karta. Tada broj

$$P(\mathbf{x}(U)) = \int_U |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, n)|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

zovemo površina dijela $\mathbf{x}(U)$ plohe $\mathbb{S}$.

Za dokaz teorema 2.5 potrebne su nam definicije 2.3 i 2.4.

Definicija 2.3 Neka je $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ karta i $\epsilon > 0$. Neka je $\psi\colon U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3_1$ glatka funkcija takva da je $\psi(u, v, 0) = \mathbf{x}(u, v)$ za sve $(u, v) \in U$. Tada familiju karata $\{\mathbf{x}_s : \epsilon < s < \epsilon\}$, gdje je karta $\mathbf{x}_s\colon U \to \mathbb{R}^3_1$ dana formulom $\mathbf{x}_s(u, v) := \psi(u, v, s)$, zovemo varijacija karte $\mathbf{x}$.

Definicija 2.4 Neka je $\mathbb{S}$ ploha i $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ karta. Za varijaciju ψ karte $\mathbf{x}$ kažemo da je normalna ako je oblika $\psi(u,v,s) = \mathbf{x}(u,v) + s\,\phi(u,v)n(u,v)$, gdje je $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ proizvoljna glatka funkcija i $n(u,v)$ normala plohe.

Teorem 2.5 (Karakterizacija minimalnih i maksimalnih ploha)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ karta. Tada je karta $\mathbf{x}$ minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcionala $x \mapsto P(\mathbf{x}(U))$ za svaku normalnu varijaciju karte $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $H = 0$ i $K > 0$ ($K < 0,\ K = 0$) na dijelu $\mathbf{x}(U) \subseteq \mathbb{S}$.

Dokaz. Neka je $\psi\colon U \times (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}^3_1$ normalna varijacija karte $\mathbf{x}(u,v)$ dana formulom $\mathbf{x}_s(u,v) = \psi(u,v,s) = \mathbf{x}(u,v) + s\phi(u,v)n(u,v)$. Za $s \in (-\epsilon,\epsilon)$ neka su E_s, F_s i G_s fundamentalne veličine prvog reda karte $\mathbf{x}_s$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
E_s = \langle \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u} \rangle &= \langle \mathbf{x}_u + s\phi_u n + s\phi n_u, \mathbf{x}_u + s\phi_u n + s\phi n_u \rangle \\
&= E + 2s\phi\langle \mathbf{x}_u, n_u \rangle + O(s^2), \\
F_s = \langle \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial v} \rangle &= \langle \mathbf{x}_u + s\phi_u n + s\phi n_u, \mathbf{x}_v + s\phi_v n + s\phi n_v \rangle \\
&= F + s(\phi\langle \mathbf{x}_u, n_v \rangle + \phi\langle \mathbf{x}_v, n_u \rangle) + O(s^2), \\
G_s = \langle \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial v} \rangle &= \langle \mathbf{x}_v + s\phi_v n + s\phi n_v, \mathbf{x}_v + s\phi_v n + s\phi n_v \rangle \\
&= G + 2s\phi\langle \mathbf{x}_v, n_v \rangle + O(s^2).
\end{aligned}$$

U gornjem računu smo napravili linearizaciju, odbacili smo članove koji su barem kvadratnog reda veličine po s kako bismo mogli lakše računati. To možemo jer za $s \approx 0$ su ti članovi približno jednaki 0. Nadalje, prema definiciji fundamentalnih veličina drugog reda imamo: $E_s = E - 2s\phi L$, $F_s = F - 2s\phi M$ i $G_s = G - 2s\phi N$.
Računamo:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{d}{ds}\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\Big)_{s=0} &= \Big(\frac{(\pm(E_sG_s - F_s^2))'}{2\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}}\Big)_{s=0} = \Big(\pm\frac{E_s'G_s + E_sG_s' - 2F_s'F_s}{2\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}}\Big)_{s=0} \\
&= \Big(\pm\frac{-2\phi LG_s + E_s(-2\phi N) - 2F_s(-2\phi M)}{2\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}}\Big)_{s=0} \\
&= \mp\phi\frac{LG - 2FM + EN}{\sqrt{|EG - F^2|}} = \phi\frac{LG - 2FM + EN}{EG - F^2}\sqrt{|EG - F^2|} \\
&= 2\phi H\sqrt{|EG - F^2|}.
\end{aligned}$$

Dalje računamo:

$$\Big(\frac{d^2}{ds^2}\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\Big)_{s=0} = \Big(\frac{d}{ds}\Big(\mp\phi\frac{LG_s - 2F_sM + E_sN}{\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}}\Big)\Big)_{s=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\mp\phi(LG_s - 2F_sM + E_sN)' \frac{1}{\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}} \mp \phi(LG_s - 2F_sM + E_sN)\Big(\frac{1}{\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}}\Big)' \Big)_{s=0} \\
&= \Big(\mp\phi \frac{L(-2\phi N) - 2(-2\phi M)M - 2\phi LN)}{\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}} - \phi(LG_s - 2F_sM + E_sN)\phi \frac{LG_s - 2F_sM + E_sN}{|E_sG_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}} \Big)_{s=0} \\
&= \Big(\pm\phi^2 \frac{4(LN - M^2)}{\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}} - \phi^2 \frac{(LG_s - 2F_sM + E_sN)^2}{|E_sG_s - F_s^2|^{\frac{3}{2}}} \Big)_{s=0} \\
&= \pm\phi^2 \frac{4(LN - M^2)}{\sqrt{|EG - F^2|}} - \phi^2 \frac{(LG - 2FM + EN)^2}{|EG - F^2|^{\frac{3}{2}}} \\
&= 4\phi^2(K - H^2)\sqrt{|EG - F^2|}.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da je $H = 0$ i $K > 0$ ($K < 0$, $K = 0$) na dijelu $\mathbf{x}(U)$ plohe $\mathbb{S}$. Neka je proizvoljna normalna varijacija karte $\mathbf{x}$ (dana formulom kao na početku dokaza). Tada imamo:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P(\mathbf{x}_s(U))\Big)_{s=0} &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_U \sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big)_{s=0} = \int_U \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\Big)_{s=0} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_U 2\phi H \sqrt{|EG - F^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0.
\end{aligned}
$$

Iz toga slijedi da je $s = 0$ stacionarna točka funkcije $s \mapsto P(\mathbf{x}_s(U))$. Nadalje, imamo:

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} P(\mathbf{x}_s(U))\Big)_{s=0} &= \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \int_U \sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big)_{s=0} = \int_U \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\sqrt{|E_sG_s - F_s^2|}\Big)_{s=0} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_U 4\phi^2(K - H^2)\sqrt{|EG - F^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_U 4\phi^2 K \sqrt{|EG - F^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Budući da je $K > 0\,(K < 0,\ K = 0)$, slijedi da je $\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} P(\mathbf{x}_s(U))\Big)_{s=0} > 0\,(< 0, = 0)$, što povlači da je $s = 0$ minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcije $s \mapsto P(\mathbf{x}_s(U))$, što je i trebalo dokazati.

Obratno, pretpostavimo da je $s = 0$ minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcije $s \mapsto P(\mathbf{x}_s(U))$ za svaku normalnu varijaciju karte $\mathbf{x}$. Tada je $s = 0$ posebno i stacionarna točka te funkcije, pa mora biti $\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P(\mathbf{x}_s(U))\Big)_{s=0} = 0$ iz čega slijedi

$$
\int_U 2\phi H \sqrt{|EG - F^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0.
$$

Budući da to vrijedi za svaku glatku funkciju ϕ, to posebno vrijedi za $\phi = H$, tj. mora biti $\int_U 2H^2\sqrt{|EG - F^2|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$, što je moguće jedino ako je $H = 0$ (jer je podintegralna funkcija neprekidna i nenegativna). □

Napomena 2.6 Teorem 2.5 posebno vrijedi za varijaciju s kompaktnim nosačem. Za varijaciju ψ karte $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ kažemo da ima kompaktan nosač ako za svaki $s \in (-\epsilon, \epsilon)$

postoji kompaktan skup $K \subseteq U$ takav da je $\psi(u,v,s) = \psi(u,v,0)$ za sve $(u,v) \in U \backslash K$. Te varijacije napuhuju plohu $\mathbb{S}$ na dijelu $\mathbf{x}(U)$ (zato što je polje n okomito na plohu, a zbog kompaktnog nosača, skup $\mathbf{x}_s(U)$ se na rubu podudara sa skupom $\mathbf{x}(U)$). Iz toga slijedi da ploha $\mathbb{S}$ lokalno minimizira (maksimizira) površinu ako i samo ako je $H = 0$ i $K > 0\,(K < 0)$.

U nastavku navodimo neka svojstva minimalnih i maksimalnih ploha.

Definicija 2.7 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za kartu $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ kažemo da je konformna (izotermna) ako je $E = G\,(E = -G)$ i $F = 0$, odnosno za svaku točku $p \in \mathbb{S}$ matrični prikaz prve fundamentalne forme I plohe $\mathbb{S}$ u točki p i bazi $\{\mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)\}$ je matrica oblika

$$\lambda(u,v)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \lambda(u,v)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \quad \lambda(u,v) \in \mathbb{R}$$

za prostorne, odnosno za vremenske plohe. Funkciju $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ zovemo konformni faktor karte $\mathbf{x}$.

Sada ćemo navesti dva teorema bez dokaza koji tvrde da se svaka prostorna ili vremenska ploha $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ može lokalno parametrizirati konformnom kartom.

Teorem 2.8 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Tada za svaku točku $p \in \mathbb{S}$ postoji otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i konformna karta $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Teorem 2.9 Neka je $\mathbb{S}$ vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Tada za svaku točku $p \in \mathbb{S}$ postoji otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i konformna karta $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$. Nadalje, tu kartu možemo reparametrizirati kartom $\hat{\mathbf{x}}\colon \hat{U} \to \mathbb{S}$ danu formulom $\hat{\mathbf{x}}(s,t) = \mathbf{x}\big(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{-u+v}{\sqrt{2}}\big)$ za koju vrijedi da su $\hat{\mathbf{x}}_s(s,t)$ i $\hat{\mathbf{x}}_t(s,t)$ svjetlosni za sve $(s,t) \in \hat{U}$.

Teorem 2.10 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u Minkowskijevom prostoru i $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ konformna karta s konformnim faktorom λ.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, onda je $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = -2\lambda H n$.
2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, onda je $-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda H n$.

Korolar 2.11 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i $\mathbf{x}\colon U \to S$ konformna karta.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, onda je $\mathbb{S}$ maksimalna ako i samo ako je $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. U tom slučaju komponentne funkcije karte $\mathbf{x}$ su harmoničke. (Laplaceova jednadžba je zadovoljena $\Delta\mathbf{x} = 0$.)
2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, onda je $\mathbb{S}$ minimalna ako i samo ako je $-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$.

Teorem 2.12 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ takva da je $K < 0$. Ako je ploha $\mathbb{S}$ maksimalna, onda je Gaussovo preslikavanje g plohe $\mathbb{S}$ konformno.

Napomena 2.13 Tvrdnja teorema 2.12 ne vrijedi za vremenske plohe.

Teorem 2.14 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Ako je Gaussovo preslikavanje g plohe $\mathbb{S}$ konformno, onda je ploha $\mathbb{S}$ maksimalna na dijelu $\mathbf{x}(U)$ ili je dio prostorne sfere, $\mathbb{H}^2$.

Definicija 2.15 (**Translacijske plohe**)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Plohu $\mathbb{S}$ zovemo *translacijska* ili *klizna* ako se može čitava parametrizirati kartom $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}$ oblika $\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v)$, gdje su c_1 i c_2 krivulje u $\mathbb{R}^3_1$. Krivulje c_1 i c_2 zovemo generatrise plohe $\mathbb{S}$.

Teorem 2.16 Neka je $\mathbb{S}$ vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Ploha $\mathbb{S}$ je minimalna ako i samo ako za svaku točku $p \in \mathbb{S}$ postoji karta $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ oblika $\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v)$, gdje su c_1 i c_2 svjetlosne krivulje, takve da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Korolar 2.17 Ako je $\mathbb{S}$ vremenska translacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ takva da su joj obje generatrise svjetlosne krivulje, onda je ploha $\mathbb{S}$ minimalna.

Napomena 2.18 Neka je $\mathbb{S}$ minimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Po teoremu 2.16, plohu $\mathbb{S}$ možemo lokalno parametrizirati kartom oblika $\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v)$, gdje su c_1 i c_2 svjetlosne krivulje. Tada plohu $\widetilde{\mathbb{S}}$, parametriziranu lokalno kartom $\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c_1(u) - c_2(v)$ zovemo *adjungirana (konjugirana)* ploha plohe $\mathbb{S}$. Nadalje, $\mathbb{S}$ je adjungirana ploha plohe $\widetilde{\mathbb{S}}$, tj. plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ čine par adjungiranih ploha.

Propozicija 2.19 Neka je $\mathbb{S}$ minimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Tada je ploha $\widetilde{\mathbb{S}}$ također minimalna.

Sada ćemo definirati pojam adjungirane plohe za maksimalne plohe. Kao i kod minimalnih ploha, konstrukcija adjungirane plohe se temelji na činjenici da svaku prostornu plohu možemo lokalno parametrizirati konformnom kartom, vidi teorem 2.8.

Neka je $\mathbb{S}$ maksimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ lokalno parametrizirana konformnom kartom $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$, $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Tada su koordinatne funkcije x, y i z, prema korolaru 2.11, harmoničke. Nadalje, iz kompleksne analize znamo da postoje funkcije $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ takve da su kompleksne funkcije f_1, f_2, $f_3\colon U \to \mathbb{C}$, $f_1 := x + i\widetilde{x}$, $f_2 := y + i\widetilde{y}$ i $f_3 := z + i\widetilde{z}$ holomorfne. *Adjungirana (konjugirana) ploha* prostorne plohe $\mathbb{S}$ u Minkowskijevom prostoru je ploha $\widetilde{\mathbb{S}}$, lokalno parametrizirana kartom $\tilde{\mathbf{x}}(u,v) := (\widetilde{x}(u,v), \widetilde{y}(u,v), \widetilde{z}(u,v))$. Nadalje, vrijedi da je i ploha $\mathbb{S}$ adjungirana ploha plohe $\widetilde{\mathbb{S}}$. Ako je $g = g_1 + i\,g_2$ holomorfna, onda je $\widetilde{g} = -g_2 + i\,g_1$ također holomorfna. Potrebno je samo provjeriti Cauchy-Riemannove uvjete. Negativan predznak ovdje ne smeta jer je kartom $-\mathbf{x}(u,v)$ dana ponovno ploha $\mathbb{S}$, samo s promijenjenim položajem u koordinatnom sustavu (centralna simetrija). Plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ čine par adjungiranih ploha.

Propozicija 2.20 Neka je $\mathbb{S}$ maksimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Tada je ploha $\widetilde{\mathbb{S}}$ također maksimalna. Nadalje, plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ su lokalno izometrične (definicija 2.23).

Neka su $\mathbb{S}$ i $\overline{\mathbb{S}}$ plohe u $\mathbb{R}^3_1$ zadane parametrizacijama $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, odnosno $\overline{\mathbf{x}}\colon \overline{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$. Neka je $F\colon \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{S}}$ preslikavanje ploha. Definiramo diferencijalno preslikavanje F_{*p} (push-forward) preslikavanja F u točki p na sljedeći način:

Definicija 2.21 F_{*p} je linearna transformacija između tangencijalnih prostora

$$F_{*p}\colon T_p\mathbb{S} \to T_{F(p)}\overline{\mathbb{S}}, \quad F_{*p}(\mathbf{x}_p) = \Big(F(p), \frac{\mathrm{d}(F \circ \mathbf{x} \circ c)}{\mathrm{d}t}(0)\Big),$$

gdje je $\mathbf{x} \circ c\colon I \to \mathbb{S}$ krivulja na $\mathbb{S}$ za koju vrijedi

$$(\mathbf{x} \circ c)(0) = p, \quad F \circ \mathbf{x} \circ c : I \to \overline{\mathbb{S}}, \quad (F \circ \mathbf{x} \circ c)(0) = F(p) \quad \text{i} \quad x_p = \Big(p, \frac{\mathrm{d}(\mathbf{x} \circ c)}{\mathrm{d}t}(0)\Big).$$

Definicija 2.22 Linearni izomorfizam $T\colon V \to W$ mnogostrukosti V i W koji čuva pseudo-skalarni produkt se naziva linearna izometrija.

Definicija 2.23 Lokalna izometrija pseudo-Riemannovih mnogostrukosti M i N je glatko preslikavanje $F\colon M \to N$ za koje je svako diferencijalno preslikavanje $F_*\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ linearni izomorfizam, tj. vrijedi $\langle F_*(v), F_*(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, za sve $v, w \in T_pM$, $p \in M$.

Dokaz sljedećeg teorema možemo naći u [52], teorem 2.11.

Teorem 2.24 Neka je $\mathbb{S}$ maksimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ lokalno parametrizirana izotermnom kartom $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ i neka je $\widetilde{\mathbb{S}}$ njena adjungirana ploha dana kartom $\widetilde{\mathbf{x}}\colon U \to \widetilde{\mathbb{S}}$. Tada je formulom

$$\mathbf{x}_\theta(u, v) := \mathbf{x}(u, v)\cos\theta + \widetilde{\mathbf{x}}(u, v)\sin\theta, \ \ \theta \in \mathbb{R}$$

(lokalno) definirana jednoparametarska familija $(\mathbb{S}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ lokalno izometričnih maksimalnih ploha. Nadalje, za fiksni $(u, v) \in U$, tangencijalne ravnine ploha $\mathbb{S}_\theta$ u točkama $\mathbf{x}_\theta(u, v)$ su međusobno paralelne za sve $\theta \in \mathbb{R}$.

Dokaz sljedećeg teorema možemo naći u [52], teorem 3.10.

Teorem 2.25 Neka je $\mathbb{S}$ minimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ lokalno parametrizirana izotermnom kartom $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{S}$ i neka je $\widetilde{\mathbb{S}}$ njena adjungirana ploha dana kartom $\widetilde{\mathbf{x}}\colon U \to \widetilde{\mathbb{S}}$. Tada je formulom

$$\mathbf{x}_\theta(u, v) := \mathbf{x}(u, v)\cosh\theta + \widetilde{\mathbf{x}}(u, v)\sinh\theta, \ \theta \in \mathbb{R}$$

(lokalno) definirana jednoparametarska familija $(\mathbb{S}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ lokalno izometričnih minimalnih ploha. Nadalje, za fiksni $(u, v) \in U$, tangencijalne ravnine ploha $\mathbb{S}_\theta$ u točkama $\mathbf{x}_\theta(u, v)$ su međusobno paralelne za sve $\theta \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.26 (Asocirana ploha)
Ako je $\mathbb{S}$ maksimalna ili minimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za $\theta \in \mathbb{R}$, plohu $\mathbb{S}_\theta$ zovemo *asocirana ploha* plohe $\mathbb{S}$. Familiju $(\mathbb{S}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ zovemo asocirana familija plohe $\mathbb{S}$.

Asociranu familiju je zanimljivo promatrati samo za $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ jer za θ iz ostalih kvadranata, dobivamo iste plohe, samo centralnosimetrične s obzirom na ishodište onima za θ iz prvog kvadranta.

Neka je $\mathbb{S}$ maksimalna ploha i $\widetilde{\mathbb{S}}$ njena adjungirana ploha. Plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ pripadaju familiji $(\mathbb{S}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_0$ i $\widetilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}_{\frac{\pi}{2}}$. Nadalje, plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ imaju istu asociranu familiju, samo drugačije parametriziranu. To slijedi iz činjenice da je ploha $\mathbb{S}$ adjungirana ploha plohe $\widetilde{\mathbb{S}}$, tj. $\widetilde{\widetilde{\mathbb{S}}} = \mathbb{S}$.

Isti zaključak ne vrijedi za minimalne plohe. Neka je $\mathbb{S}$ minimalna ploha i $\widetilde{\mathbb{S}}$ njena adjungirana ploha. Ploha $\mathbb{S}$ pripada familiji $(\mathbb{S}_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_0$, ali $\widetilde{\mathbb{S}} \neq \mathbb{S}_{\frac{\pi}{2}}$. Kada bi $\widetilde{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}_\theta$ tada bi plohe $\mathbb{S}$ i $\widetilde{\mathbb{S}}$ bile izometrične, a to ne može biti jer su one antizometrične tj. vrijedi $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle = -\langle \widetilde{\mathbf{x}}_u, \widetilde{\mathbf{x}}_u\rangle$, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \widetilde{\mathbf{x}}_v, \widetilde{\mathbf{x}}_u\rangle = 0$, i $\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle = -\langle \widetilde{\mathbf{x}}_v, \widetilde{\mathbf{x}}_v\rangle$.

2.2 Rotacijske minimalne i maksimalne plohe

U ovom poglavlju navest ćemo primjere minimalnih i maksimalnih rotacijskih ploha u Minkowskijevom prostoru.

Klasifikacija minimalnih i maksimalnih rotacijskih ploha napravljena je u ([52]). U euklidskom prostoru minimalna rotacijska ploha je katenoid. Isto je i u Minkowskijevom prostoru, samo za razliku od euklidskog prostora gdje postoji samo jedan tip katenoida u prostoru Minkowskog razlikujemo sedam tipova katenoida.

Louise u ([52]) je dokazala da ako odaberemo os rotacije q, onda je rotacijska ploha $\mathbb{S}$ za koju je $H = 0$ i čija je os rotacije pravac q jedinstvena ako je zadovoljen početni uvjet da je ploha $\mathbb{S}$ putevima povezana.

U nastavku izvodimo parametrizacije katenoida, odnosno minimalnih i maksimalnih rotacijskih ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Svi detalji oko izvoda mogu se pronaći u ([52]), propozicija 1.21.

Primjer 2.27 (prostorni i vremenski katenoid s prostornom osi)
Parametrizaciju katenoida $\mathbb{S}$ čija je os rotacije z-os izvodimo na sljedeći način. Prema

propoziciji 1.52 parametrizacija rotacijske plohe čija je os rotacije z-os je oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)\cosh v, x(u)\sinh v, z(u)).$$

Ako je $z' = 0$, $z = const.$, onda je $\mathbb{S}$ ravnina, što nije rotacijska ploha. Dakle, mora biti $z'(u) \neq 0$ za neki u, pa time i na nekom intervalu I (jer je z' neprekidna). Nadalje, $z(u)$ možemo reparametrizirati tako da bude $z(u) = u$ za sve $u \in I$. Time parametrizacija rotacijske plohe čija je os rotacije z-os ima oblik

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)\cosh v, x(u)\sinh v, u).$$

Računamo srednju zakrivljenost. Komponente prve i druge fundamentalne forme su:

$$E(u,v) = -x'(u)^2 + 1, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = x(u)^2,$$
$$L(u,v) = \frac{-x(u)x''(u)}{\sqrt{x(u)^2|1-x'(u)^2|}}, \quad M(u,v) = 0, \quad N(u,v) = \frac{-x(u)^2}{\sqrt{x(u)^2|1-x'(u)^2|}}.$$

Kada ih uvrstimo u (1.3) i sredimo, dobivamo sljedeću ODJ: $x'(u)^2 - 1 - x(u)x''(u) = 0$, čija rješenja su

$$x(u) = \frac{1}{C}\sin(Cu+D) \quad \text{i} \quad x(u) = \frac{1}{C}\sinh(Cu+D).$$

Slijedi da parametrizacija prostornog katenoida sa z-osi ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(\frac{1}{C}\sin(Cu+D)\cosh v, \frac{1}{C}\sin(Cu+D)\sinh v, u\Big). \tag{2.1}$$

Nadalje, parametrizacija vremenskog katenoida oko z-osi ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(\frac{1}{C}\sinh(Cu+D)\cosh v, \frac{1}{C}\sinh(Cu+D)\sinh v, u\Big).$$

U slučaju vremenskih ploha imamo još jednu moguću parametrizaciju rotacijske plohe oko z-osi oblika $\mathbf{x}(u,v) = (y(u)\sinh v, y(u)\cosh v, u)$. U tom slučaju napravimo isti račun kao gore i dobijemo ODJ $y''y - y'^2 - 1 = 0$, čije je jedinstveno rješenje $y(u) = \frac{1}{C}\cosh(Cu+D)$ $C > 0$, $D \in \mathbb{R}$. Time smo dobili još jedan vremenski katenoid sa z-osi:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(\frac{1}{C}\cosh(Cu+D)\sinh v, \frac{1}{C}\cosh(Cu+D)\cosh v, u\Big).$$

Slika 2.1 lijevo prikazuje prostorni katenoid s prostornom osi.

Primjer 2.28 (prostorni i vremenski katenoid s vremenskom osi)
Nađimo parametrizaciju katenoida $\mathbb{S}$ čija je os rotacije x-os. Prema propoziciji 1.53 karta

koja parametrizira rotacijsku plohu čija je os rotacije x-os je oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u)\cos v, y(u)\sin v).$$

Kao u primjeru 2.27, tu parametrizaciju možemo reparametrizirati na sljedeći način: $\mathbf{x}(u,v) = (u, y(u)\cos v, y(u)\sin v)$. Zatim, istim postupkom kao u primjeru 2.27, izvedemo sljedeću ODJ: $y'(u)^2 - 1 - y(u)y''(u) = 0$ i riješimo je. Uočimo, ta jednadžba je ista kao jednadžba u primjeru 2.27. Njena rješenja su $y(u) = \frac{1}{C}\sin(Cu+D)$ i $y(u) = \frac{1}{C}\sinh(Cu+D)$ $C > 0$, $D \in \mathbb{R}$. Time smo dobili parametrizaciju prostornog katenoida s x-osi:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, \frac{1}{C}\sinh(Cu+D)\cos v, \frac{1}{C}\sinh(Cu+D)\sin v\Big). \tag{2.2}$$

Parametrizacija vremenskog katenoida s x-osi ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, \frac{1}{C}\sin(Cu+D)\cos v, \frac{1}{C}\sin(Cu+D)\sin v\Big).$$

Slika 2.1 u sredini prikazuje prostorni katenoid s vremenskom osi.

Primjer 2.29 (prostorni i vremenski katenoid sa svjetlosnom osi)
Nađimo parametrizaciju katenoida čija je os rotacije svjetlosni pravac $l := \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Iz propozicije 1.54 znamo da parametrizacija rotacijske plohe oko pravca l ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \{x(u), -\frac{v^2}{2}x(u) + y(u), v\,x(u)\}.$$

Kao u prijašnjim primjerima tu parametrizaciju možemo reparametrizirati ovako: $\mathbf{x}(u,v) = \Big\{x(u), -\frac{v^2}{2}x(u) + u, v\,x(u)\Big\}$. Primjenjujemo isti postupak kao u primjeru 2.27, za funkciju x dobivamo sljedeću ODJ: $x(u)''x(u) + 2x'(u)^2 = 0$. Pri tome mora biti $x(u)$, $x'(u) \neq 0$ za sve $u \in I$, gdje je I neki interval. Riješimo tu jednadžbu. Rješenje jednadžbe je $x(u) = \sqrt[3]{C^2u + D}$ i $x(u) = \sqrt[3]{-C^2u + D}$, C, $D \in \mathbb{R}$. Parametrizacija prostornog katenoida sa svjetlosnom osi l ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big\{\sqrt[3]{C^2u + D}, -\frac{v^2}{2}\sqrt[3]{C^2u + D} + u, v\sqrt[3]{C^2u + D}\Big\}. \tag{2.3}$$

Slika 2.1 desno prikazuje prostorni katenoid sa svjetlosnom osi. Parametrizacija vremenskog katenoida sa svjetlosnom osi l ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big\{\sqrt[3]{-C^2u + D}, -\frac{v^2}{2}\sqrt[3]{-C^2u + D} + u, v\sqrt[3]{-C^2u + D}\Big\}. \tag{2.4}$$

Parametrizaciju (2.3) možemo reparametrizirati (primjer 2.42 u [52]) tako da zamijenimo

svjetlosnu bazu $\{A, B, C\}$ s kanonskom bazom

$$\Big\{E_0 = \frac{A-B}{\sqrt{2}},\ E_1 = \frac{A+B}{\sqrt{2}},\ E_2 = C\Big\}.$$

U tom slučaju parametrizacija plohe (2.3) ima oblik:

$$\mathbf{x}(\hat{u},\hat{v}) = \Big\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(2\hat{u} + \hat{v}^2\hat{u} - 2\hat{u}^3),\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\hat{u} - \hat{v}^2\hat{u} + 2\hat{u}^3),\ \hat{u}\hat{v}\Big\}.$$

Nadalje, parametrizaciju (2.4) možemo reparametrizirati tako da joj karta bude izotermna (primjer 3.18 u ([52]))

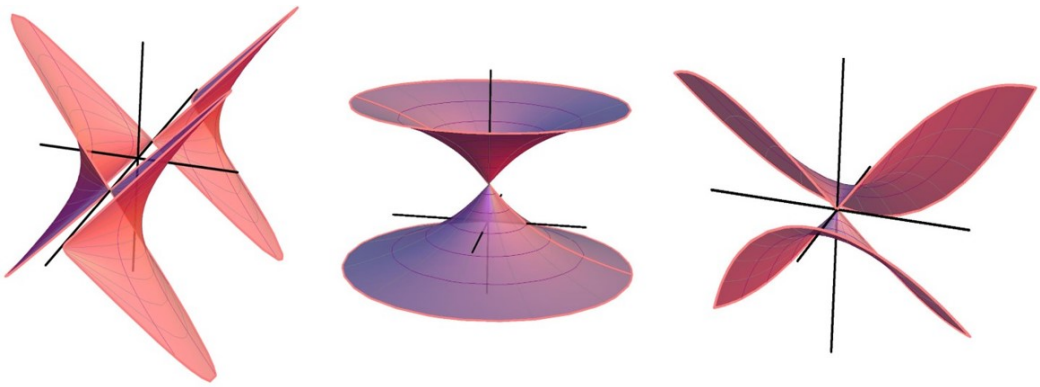
$$\mathbf{x}(\hat{u},\hat{v}) = \Big(\frac{-\hat{u}}{2\sqrt{3}},\ \frac{\hat{u}^3}{6\sqrt{2}},\ \frac{-\hat{u}^2}{2\sqrt{6}}\Big) + \Big(\frac{\hat{v}}{2\sqrt{3}},\ \frac{-\hat{v}^3}{6\sqrt{3}},\ \frac{-\hat{v}^2}{2\sqrt{6}}\Big).$$

Generatrisa katenoida $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_1$, $c(u) = \mathbf{x}(u, 0)$ je krivulja koju zovemo lančanica. U primjerima 2.27, 2.28 i 2.29 smo usput izveli i jednadžbe lančanica u $\mathbb{R}^3_1$. Te krivulje su analogoni lančanica iz euklidskog prostora.

Klasifikacija minimalnih i maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ osim u ([52]), može se pronaći između ostalog i u ([2, 35, 37, 38, 44, 58]).

Autori u ([2]) i ([58]), prostorne katenoide s prostornom osi (2.1), vremenskom osi (2.2) i svjetlosnom osi (2.3) izvode uz pomoć tzv. Björlingove formule i nazivaju redom hiperbolički, eliptički i paraboličkи katenoid (vidi sliku 2.1). Inspiracija za imena tih ploha dobivena je iz ([24]), gdje se jednoparametarska grupa ortogonalnih transformacija u $\mathbb{R}^3_1$ s fiksnom os naziva hiperboličkim, eliptičkim i paraboličkim gibanjem, s obzirom na kauzalni karakter osi koja je redom prostorna, vremenska ili svjetlosna.

Kobayashi u ([35]) plohe (2.1), (2.2) i (2.3) naziva radom katenoid 2. vrste, katenoid 1. vrste i Enneperova ploha 2. vrste (slika 2.1).



Slika 2.1: Hiperbolički, eliptički i paraboličkи katenoid

2.3 Pravčaste minimalne i maksimalne plohe

Definiciju pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru već smo dali, definicija 1.55. U ovom poglavlju navest ćemo primjere minimalnih i maksimalnih pravčastih ploha.

Pravčaste minimalne i maksimalne plohe možemo podijeliti u dvije potklase:

1. razvojne $H = K = 0$,
2. vitopere $H = 0$ i $K \neq 0$.

Svaku od te dvije potklase istražit ćemo zasebno.

2.3.1 Razvojne minimalne i maksimalne plohe

Jedina razvojna maksimalna ploha je ravnina (vidi [2, 5, 9]).

Teorem 2.30 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Pretpostavimo da se operator L_p može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$ za svaku točku $p \in \mathbb{S}$. Tada je $H = K = 0$ ako i samo ako je $\mathbb{S}$ (prostorna) ravnina.

Slijedi opći karakterizacijski teorem za pravčaste plohe za koje je $H = K = 0$.

Teorem 2.31 Neka je $\mathbb{S}$ pravčasta ploha u $\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + v\, r(u)$. Pretpostavimo da vektor $r'(u)$ nije svjetlosni ni za koji $u \in I$. Tada je $H = K = 0$ ako i samo ako vrijedi jedno od sljedećeg:

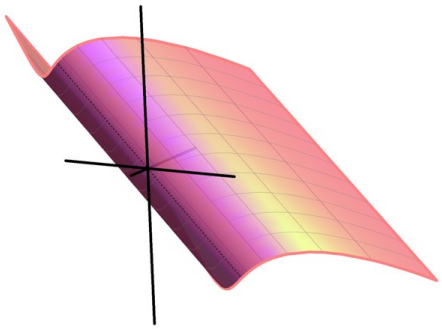
1. r je konstantno svjetlosno polje,
2. r je svjetlosno polje i vektor $c'(u)$ je kolinearan s vektorom $r(u)$ za svaki $u \in I$,
3. vektori $c'(u)$ i $r''(u)$ su kolinearni s vektorom $r(u)$ za svaki $u \in I$,
4. $r = const.$ i skup $\{c'(u), r(u), c''(u)\}$ je linearno zavisan za svaki $u \in I$.

Plohe za koje je $H = K = 0$ su potklasa ploha za koje je $H^2 = K$, odnosno potklasa kvazi-umbličkih ploha koje su opisane u poglavlju 1.2.4.

Primjer 2.32 (parabolički nul-cilindar)
Neka je $b \in \mathbb{R}$. Parabolički nul-cilindar (slika 2.2) je kvazi-umbilička ploha u $\mathbb{R}^3_1$ za koju vrijedi $H = K = 0$. Možemo je parametrizirati kartom oblika:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,v) &= \Big(bv + h\Big(\frac{v^3}{3} + v\Big) + u, bv + h\Big(\frac{v^3}{3} - v\Big) + u, b + hv^2\Big) \\ &= \Big(bv + h\Big(\frac{v^3}{3} + v\Big), bv + h\Big(\frac{v^3}{3} - v\Big), b + hv^2\Big) + u(1,1,0), \quad b \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

To je cilindrična ploha sa svjetlosnom osi. Štoviše, ona je i helikoidalna ploha koja je nastala helikoidalnim gibanjem svjetlosoga pravca oko sjetlosne osi l ([12, 58, 60]).



Slika 2.2: Parabolički nul-cilindar

López i Demir u ([42]), teorem 4.1., daju još jedan primjer kvazi-umbiličke plohe kojoj je $H = K = 0$. To je helikoidalna ploha nastala helikoidalnim gibanjem oko prostorne osi svjetlosnog pravca koji se nalazi u ravnini okomitoj na os. Mi u radnji smo definirali helikoidalne plohe tako da im generatrisa leži u ravnini u kojoj leži os. Ta ploha dana je sljedećom parametrizacijom:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh v & \cosh v & 0 \\ \cosh v & \sinh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \pm u + a_0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \sinh v + (\pm u + a_0)\cosh v \\ u \cosh v + (\pm u + a_0)\sinh v \\ h\, v \end{pmatrix}$$

gdje je a_0, $h \in \mathbb{R} \neq 0$.

Sada prelazimo na pravčaste plohe za koje je $H = 0$ i $K \neq 0$, tzv. vitopere pravčaste plohe.

2.3.2 Vitopere minimalne i maksimalne plohe

Budući da je svaki helikoid vitopera minimalna ili maksimalna ploha sada ćemo kroz

primjere upoznati različite tipove helikoida u Minkowskijevom prostoru ([52, 59]). Razlikujemo sedam tipova helikoida. Os helikoida može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac, a helikoid može biti prostorna ili vremenska ploha. Kao i kod katenoida, radi jednostavnosti promatrat ćemo samo helikoide čija je os z-os, x-os ili pravac l.

Primjer 2.33 (prostorni i vremenski helikoid s prostornom osi)
Helikoid $\mathbb{S}$ oko z-osi je dan nekom od sljedeće dvije karte:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \sinh v \\ u \cosh v \\ h\, v \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ili

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cosh v \\ u \sinh v \\ h\, v \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Ploha dana kartom (2.5) je prostorna (vremenska) ako i samo ako je $v^2 - h^2 < 0\,(> 0)$. Ploha dana kartom (2.6) je vremenska ploha. Na slici 2.3 lijevo prikazana je prostorna ploha (2.5).

Primjer 2.34 (prostorni i vremenski helikoid s vremenskom osi)
Helikoid $\mathbb{S}$ oko x-osi je dan kartom:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\, v \\ u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Ploha $\mathbb{S}$ je prostorna (vremenska) ako i samo ako je $h^2 - v^2 < 0\,(> 0)$. Na slici 2.3 u sredini prikazana je prostorna ploha (2.7).

Primjer 2.35 (prostorni i vremenski helikoid sa svjetlosnom osi)
Prostorni helikoid $\mathbb{S}$ oko pravca L dan je u svjetlosnoj bazi

$$\Big\{A = \big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\big),\ B = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\big),\ C = (0,1,0)\Big\}$$

kartom koja ima oblik (primjer 2.42 u ([52]))

$$\mathbf{x}(u,v) = -\big(\frac{u^3+6u}{12\sqrt{3}}, \frac{-u^3+6u}{12\sqrt{3}}, \frac{u^2+2}{2\sqrt{6}}\big) - v\big(\frac{\sqrt{3}u}{2}, \frac{-\sqrt{3}u}{2}, \frac{3}{\sqrt{6}}\big), \quad v < 0. \tag{2.8}$$

Ako napravimo reparametrizaciju plohe (2.8) dane parametrizacijom tako da svjetlosnu bazu $\{A, B, C\}$ zamijenimo kanonskom bazom

$$\Big\{E_0 = \frac{A-B}{\sqrt{2}},\ E_1 = \frac{A+B}{\sqrt{2}},\ E_2 = C\Big\}$$

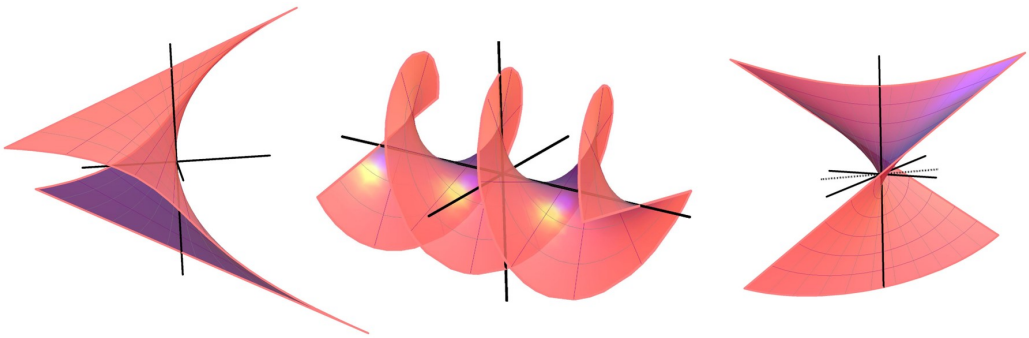
ploha će imati parametrizaciju oblika:

$$\mathbf{x}(\hat{u},\hat{v}) = \Big(-\frac{\hat{u}}{\sqrt{6}}, \frac{\hat{u}^3}{6\sqrt{6}}, -\frac{\hat{u}^2}{2\sqrt{6}}\Big) + \hat{v}\Big(0, \frac{3\hat{u}}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}\Big), \quad \hat{v} < 0. \tag{2.9}$$

Vremenski helikoid $\mathbb{S}$ oko pravca L dan je u svjetlosnoj bazi $\{A, B, C\}$ kartom koja ima oblik (primjer 3.18 u ([52]))

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(-\frac{u}{2\sqrt{3}}, \frac{u^3}{6\sqrt{3}}, -\frac{u^2}{2\sqrt{6}}\Big) + \Big(\frac{v}{2\sqrt{3}}, -\frac{v^3}{6\sqrt{3}}, \frac{v^2}{2\sqrt{6}}\Big). \tag{2.10}$$

Parametrizaciju (2.10) možemo reparametrizirati tako da se dobije parametrizacija koja je ista kao i (2.9) samo ovdje je $\hat{v} > 0$.



Slika 2.3: Helikoid 2. vrste, helikoid 1. vrste, Cayley-Lie minimalna ploha

Prostorni (vremenski) katenoidi i helikoidi čine parove adjungiranih ploha. Preciznije, prostorni (vremenski) katenoid i helikoid s prostornom (vremenskom, svjetlosnom) osi su adjungirane plohe. Korištenjem tog svojstva Louise u ([52]) je izvela parametrizacije helikoida.

Autori u ([2, 12, 35]) prostorne plohe parametrizirane redom kartama (2.5), (2.6), (2.7) i (2.8) nazivaju helikoid 2. vrste, helikoid 3. vrste, helikoid 1. vrste i konjugirana Enneperova ploha 2. vrste ili Cayley-eva pravčasta ploha (vidi sliku 2.3). Helikoid 1. vrste, 2. vrste i 3. vrste zovemo Lorentzovi helikoidi ili preciznije uspravni Lorentzovi helikoidi. Parametrizacije ploha u ([2, 35]) izvedene su uz pomoć tzv. Björlingove formule. Helikoid 1. vrste je helikoid iz $\mathbb{R}^3$.

Dillen i Kühnel u ([12]) su pokazali da su jedine vitopere minimalne (maksimalne) plohe Cayley-eva ploha i tri uspravna Lorentzova helikoida. Isti rezultat možemo naći i u ([73]).

Cayley-eva minimalna ploha (slika 2.3) u ([42]) se još naziva Lie minimalna ploha. U ([73]) tu plohu nazivaju Cayley-Lie minimalna ploha. To je primjer plohe iz klase M_1^0, odnosno to je pravčasta ploha kojoj je vektor $r'(u)$ svjetlosni za svaki u, ali vektor $r(u)$ nije svjetlosni. (Mora vrijediti $r(u) \neq 0$, jer inače ploha ne bi bila regularna.) U ([42]) ta ploha je dobivena helikoidalnim gibanjem prostornog pravca oko svjetlosne osi.

Nadalje, vrijedi da ne postoje vitopere minimalne plohe iz klase M_0 jer za te plohe vrijedi $H^2 = K$. Pa ako je $K \neq 0$, mora biti i $H \neq 0$.

2.4 Translacijske minimalne i maksimalne plohe

Translacijske plohe smo već definirali (definicija 2.15). Ako se ograničimo na translacijske plohe čije generatrise leže u koordinatnim ravninama, onda takvih ploha ima svega nekoliko. Klasifikaciju je napravio Liu u svom radu ([41]), teorem 2.36. Minimalne i maksimalne translacijske plohe možemo pronaći i u ([20]).

Teorem 2.36 Neka je $\mathbb{S}$ translacijska minimalna ili maksimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ takva da njena generatrisa leži u koordinatnim ravninama. Tada je $\mathbb{S}$ ravnina ili jedna od sljedećih ploha. Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, onda je $\mathbb{S}$ prostorni dio neke od ploha danih sljedećim implicitnim jednadžbama

$$x = \frac{1}{a}\log\left(\cosh(az)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\cosh(ay)\right),$$
$$z = \frac{1}{a}\log\left(\cos(ay)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\sinh(ax)\right).$$

2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, onda je $\mathbb{S}$ vremenski dio neke od ploha iz 1. dijela ili neka od ploha danih sljedećim implicitnim jednadžbama

$$x = \frac{1}{a}\log\left(\sinh(az)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\cosh(ay)\right),$$
$$x = \frac{1}{a}\log\left(\cosh(az)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\sinh(ay)\right),$$

$$x = \frac{1}{a}\log\left(\sinh(az)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\sinh(ay)\right),$$
$$z = \frac{1}{a}\log\left(\cos(ay)\right) - \frac{1}{a}\log\left(\cosh(ax)\right).$$

2.5 Ostale minimalne i maksimalne plohe

Klasične minimalne (maksimalne) plohe su helikoid, katenoid i ravnina. U ovom poglavlju navest ćemo samo kroz primjere, bez istraživanja njihovih svojstava, ostale poznate minimalne (maksimalne) plohe u Minkowskijevom prostoru.

Parametrizaciju Enneperove, Hennebergove i Catalanove plohe možemo naći u ([2]). Parametrizacije tih ploha su dobivene uz pomoć Björlingove formule.

Primjer 2.37 (Enneperova ploha)
Enneperova maksimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u^2 - v^2, \frac{1}{3}u^2 - uv^2 + u, \frac{1}{3}u^3 - u^2v + v\Big).$$

Enneperova minimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}_\epsilon(u,v) = \frac{1}{2}\Big(u + \frac{u^3}{3} - v - \frac{v^3}{3}, -u + \frac{u^3}{3} - v + \frac{v^3}{3}, -\epsilon\, u^2 - v^2\Big).$$

gdje je $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Ako je $\epsilon = 1$, onda ploha ima u svakoj točki realne različite glavne zakrivljenosti, a ako je $\epsilon = -1$, onda ima imaginarne glavne zakrivljenosti. Enneperova ploha je algebarska ploha 3. reda.

Primjer 2.38 (Hennebergova ploha)
Hennebergova maksimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(2\cosh(2u)\cos(2v), 2\cosh u\cos v + \frac{2}{3}\cosh(3u)\cos(3v), \frac{2}{3}\cosh(3u)\sin(3v) - 2\cosh u\sin v\Big).$$

Hennebergova ploha je primjer (globalno) neorijentabilne maksimalne plohe.

Primjer 2.39 (Catalanova ploha)
Catalanova maksimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u - \sinh u\cos v, \cosh u\cos v - 1, 4\sinh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\Big), \quad u > 0.$$

Primjer 2.40 (Scherkove plohe, [20])

Neka je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Plohe parametrizirane redom

$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, v, \frac{1}{a}\ln|\frac{\cosh(av)}{\cosh(au)}|\Big), \quad \tanh^2(au)+\tanh^2(av) < 1,$$
$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, v, \frac{1}{a}\ln|\frac{\cosh(av)}{\cosh(au)}|\Big), \quad \tanh^2(au)+\tanh^2(av) > 1,$$
$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, v, \frac{1}{a}\ln|\frac{\cosh(av)}{\sinh(au)}|\Big), \quad u \neq 0,$$
$$\mathbf{x}(u,v) = \Big(u, v, \frac{1}{a}\ln|\frac{\sinh(av)}{\sinh(au)}|\Big), \quad u,v \neq 0,$$

zovemo Scherkova maksimalna ploha 1. vrste, Scherkova minimalna ploha 1. vrste, 2. vrste i 3. vrste.

Primjer 2.41 (Bourova ploha, [23])
Neka je $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. m-ta Bourova maksimalna ploha dana je kartom

$$\mathbf{x}_m(u,v) = \Big(\frac{2u^m}{m}\cos(mv), \frac{u^{m-1}}{m-1}\cos((m-1)v) + \frac{u^{m+1}}{m+1}\cos((m+1)v),$$
$$-\frac{u^{m-1}}{m-1}\sin((m-1)v) + \frac{u^{m+1}}{m+1}\sin((m+1)v)\Big).$$

Još jedna parametrizacija Bourove maksimalne plohe dobiva se ako u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe uvrstimo $f(z) = 2z^{m-2}$, $g(z) = z$. Za $m = 2$ dobivamo Enneperovu maksimalnu plohu. m-ta Bourova minimalna ploha je dana kartom

$$\mathbf{x}_m(u,v) = \Big(\frac{2u^m}{m}(\cos^m v + \sin^m v), -\frac{u^{m-1}}{m-1}(\cos^{m-1} v - \sin^{m-1} v) - \frac{u^{m+1}}{m+1}(\cos^{m+1} v - \sin^{m+1} v),$$
$$\frac{u^{m-1}}{m-1}(\cos^{m-1} v + \sin^{m-1} v) - \frac{u^{m+1}}{m+1}(\cos^{m+1} v + \sin^{m+1} v)\Big).$$

Primjer 2.42 (Schwarzove plohe, ([17, 18, 19]))

- Za $a \in (0,1)$ i $\theta \in \mathbb{R}$ stavimo $f(z) = 2e^{i\theta}(z^8 + (a^4+a^{-4})z^4 + 1)^{-2}$, $g(z) = -z$. Ako to uvrstimo u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe, dobivamo plohe $\mathbb{S}_{(a,\theta)}$ dane kartama:

$$\mathbf{x}_{(a,\theta)}(u,v) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} \frac{e^{i\theta}(-2w, 1+w^2, 1-w^2)}{(w^8 + (a^4+a^{-4})w^4 + 1)^2} dw.$$

- Za fiksni a, familija $(\mathbb{S}_{a,\theta})_{\theta\in\mathbb{R}}$ je jedna asocirana familija maksimalnih ploha.

- Za $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ (tj. $a^4 + a^{-4} = 14$), plohu $\mathbb{S}_{(a,0)}$ zovemo Schwarzova maksimalna primitivna ploha (kraće P-ploha), a plohu $\mathbb{S}_{(a,\frac{\pi}{2})}$ zovemo Schwarzova maksimalna dijamantna ploha (kraće D-ploha).

- Za $a \in (0,1)$ familiju ploha $\mathbb{S}_{(a,0)}$ zovemo Schwarzova P-familija, a familiju $\mathbb{S}_{(a,\frac{\pi}{2})}$ zovemo Schwarzova D-familija.

- Za $a \in (0,+\infty)$ stavimo $f(z) := 2i[z(z^3+a^3)(z^3+a^{-3})]^{-2}$, $g(z) := -z$. Ako to uvrstimo u Weierstrassovu formulu za maksimalne plohe, dobivamo familiju $(\mathbb{S}_a)_{a\in(0,+\infty)}$, koju zovemo Schwarzova heksagonalna familija (kraće H-familija).

Parametrizacije Schwarzovih ploha je teško egzaktno izračunati. U euklidskom slučaju, Schwarzove P i D plohe mogu se implicitno aproksimirati trigonometrijskim jednadžbama. Parametrizacija Schwarzove D-plohe se može izraziti i pomoću eliptičkih integrala. Schwarzova ploha se sastoji od malog dijela s rupama koji se periodički ponavlja. Nadalje, maksimalne plohe s rubom pod određenim uvjetima mogu se proširiti preko tog ruba i na minimalni (tj. vremenski) dio. Iskaz teorema o proširenju može se pročitati u [17]. Tako se mogu pronaći neke Schwarzove minimalne plohe.

Poglavlje 3

Prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti u $\mathbb{R}^3_1$

Za plohu $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ kažemo da je prava ploha konstantne srednje zakrivljenosti ako je za nju $H = const. \neq 0$. Za pravu plohu konstantne srednje zakrivljenosti koristit ćemo kraći naziv prava CMC ploha (od engleskog *constant mean curvature*) ili kraće CMC ploha. Cilj ovog poglavlje je prikazati osnovne razultate vezane za CMC plohe u $\mathbb{R}^3_1$. Preciznije, u poglavlju 3.1 prikazat ćemo klasifikaciju rotacijskih CMC ploha, tzv. Delaunayevih ploha. Nadalje, u poglavlju 3.2 bit će prikazan pregled pravčastih i helikoidalnih ne nužno pravčastih CMC ploha. Poglavlje ćemo završiti klasifikacijom translacijskih pravih CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$.

3.1 Rotacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

U ovom poglavlju istraživat ćemo rotacijske prave CMC plohe u prostoru Minkowskog. Pokazat ćemo da su jedine rotacijske prave CMC plohe tzv. Delaunayeve plohe: sfera, cilindar, unduloid i nodoid. Rezultate ćemo navesti bez dokaza, a dokazi i detalji se mogu pronaći u ([25, 37, 38]). Izvodi formula za rotacijske prave CMC plohe se rade analogno kao za minimalne i maksimalne plohe. Napiše se opći oblik parametrizacije plohe $\mathbb{S}$ kojoj je os pravac $q \subseteq \mathbb{R}^3_1$ i generatrisa krivulja c, dan u propozicijama 1.52, 1.53 i 1.54. Nakon toga iz formule 1.3 postavi se diferencijalna jednadžba za generatrisu c. Rješavanjem te jednadžbe dobivamo traženu plohu $\mathbb{S}$. Kao kod minimalnih i maksimalnih ploha, ograničit ćemo se na slučajeve kad je os rotacije x-os, z-os ili svjetlosni pravac $l := \{(x, x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Autori u ([37, 38]) koriste drugačiju svjetlosnu os kod rotacijskih minimalnih i maksimalnih ploha i oni ne koriste svjetlosnu bazu kao u propoziciji 1.54, nego kanonsku bazu, tako da parametrizacija tih ploha ima oblik

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})f(u) - \frac{v^2}{2}g(u) \\ \frac{v^2}{2}f(u) + (1-\frac{v^2}{2})g(u) \\ v\,(f(u)-g(u)) \end{pmatrix}.$$

Dokaz teorema 3.1, 3.2 i 3.3 može se naći u ([37]), teorem 5 i u ([38]) teorem 4.

Teorem 3.1 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$. $H \in \mathbb{R}$, $H \neq 0$, njena srednja zakrivljenost i os rotacije z-os.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, onda je parametrizirana kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)\cosh v, x(u)\sinh v, u) \tag{3.1}$$

gdje je $c(u) = (x(u), 0, u)$ generatrisa plohe $\mathbb{S}$. Pri tome je krivulja c prostorna i $x(u) > 0$ za svaki $u \in I$. Nadalje, funkcija x zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{x''x - (x')^2 + 1}{x(1-(x')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, onda je parametrizirana kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = (y(u)\sinh v, y(u)\cosh v, u) \tag{3.2}$$

gdje je $c(u) = (0, y(u), u)$ generatrisa plohe $\mathbb{S}$, $y(u) > 0$ za sve $u \in I$ i funkcija y zadovoljava ODJ:

$$H = \frac{1}{2}\frac{yy'' - (y')^2 - 1}{y((y')^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

ili kartom oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)\cosh v, x(u)\sinh v, u) \tag{3.3}$$

gdje je $c(u) = (x(u), 0, u)$ generatrisa plohe $\mathbb{S}$, krivulja c je vremenska, $x(u) > 0$ za sve $u \in I$ i funkcija x zadovoljava ODJ:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{x''x - (x')^2 + 1}{x((x')^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Obratno, svaka orijentirana ploha $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ dana jednom od karata (3.1), (3.2) ili (3.3) je rotacijska prava CMC ploha sa z-osi.

Teorem 3.2 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska) rotacijska prava CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ srednje zakrivljenosti $H \in \mathbb{R}$, $H \neq 0$, čija je os rotacije x-os. Tada je ploha $\mathbb{S}$ parametrizirana

kartom $\mathbf{x}\colon I \times [0, 2\pi) \to \mathbb{S}$ oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, y(u)\cos v, y(u)\sin v) \tag{3.4}$$

gdje je $c(u) = (u, y(u), 0)$ generatrisa plohe $\mathbb{S}$. Krivulja c je prostorna (vremenska) krivulja i $y(t) > 0$. Nadalje, funkcija y zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = \frac{1}{2}\frac{y''y - (y')^2 + 1}{y(\pm((y')^2 - 1))^{\frac{3}{2}}}.$$

Pozitivan predznak ide ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, a negativan ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska.

Teorem 3.3 Neka je $\mathbb{S}$ prostorna (vremenska) rotacijska prava CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ srednje zakrivljenosti $H \in \mathbb{R}$, $H \neq 0$, čija je os rotacije pravac l. Tada je ploha $\mathbb{S}$ parametrizirana kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika

$$\mathbf{x}(u, v) = \Big(u\Big(1 + \frac{v^2}{2}\Big) - \frac{1}{2}y(u)v^2, \frac{uv^2}{2} + y(u)\Big(1 - \frac{v^2}{2}\Big), uv - y(u)v\Big) \tag{3.5}$$

gdje je $c(u) = (u, y(u), 0)$ generatrisa plohe $\mathbb{S}$. Krivulja c je prostorna (vremenska) krivulja. Nadalje, funkcija y zadovoljava sljedeću ODJ:

$$H = \pm\frac{1}{2}\frac{(u - y)y'' - (y' - 1)((y')^2 - 1)}{(u - y)(\pm(1 - (y')^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Pozitivan predznak ide ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, a negativan ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna.

U ([37, 38]) je napravljen i slučaj kad je os rotacije y-os i kada je svjetlosna os $l := \{(x, -x, 0)\colon x \in \mathbb{R}\}$ i $l := \{(x, 0, \pm x)\colon x \in \mathbb{R}\}$. Mi ćemo to izostaviti jer kod rotacije oko y-osi se dobiju iste plohe kao kad rotiramo oko z-osi, samo sa zamijenjenim koordinatama. Isto vrijedi i za rotaciju oko svjetlosne osi. Predznaci u gornjim ODJ nisu važni jer predznak srednje zakrivljenosti ovisi o izboru orijentacije plohe. S druge strane, kod Gaussove zakrivljenosti predznak ne ovisi o orijentaciji. Navedene jednadžbe su nelinearne i općenito se ne mogu egzaktno riješiti. Sada ćemo pronaći parametrizacije pravih CMC ploha koje se mogu dobiti egzaktno, a to su sfere i cilindri.

Primjer 3.4 (prostorna i vremenska sfera)
Neka je $\mathbb{S}$ prostorna ili vremenska sfera u $\mathbb{R}^3_1$ polumjera $r > 0$. Budući da je srednja zakrivljenost prostorne sfere $\frac{1}{r}$, a vremenske $-\frac{1}{r}$ vrijedi da je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha. Sfere u $\mathbb{R}^3_1$ smo već definirali, a ovdje ćemo pronaći njihove parametrizacije.

1. Prostorna sfera

   Prvo ćemo pronaći parametrizaciju prostorne sfere polumjera r sa središtem u ishodištu. Promotrimo tu sferu kao rotacijsku plohu oko z-osi. Tada je generatrisa $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1$, $c(u) = (r\cosh u, 0, r\sinh u)$ prostorna kružnica u xz-ravnini polumjera

r sa središtem u ishodištu. Ovo ćemo uvrstiti u općenitu relaciju (1.9) (ne možemo uvrstiti u relaciju (3.1) bez da krivulju prvo ne reparametriziramo). Dobivamo:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cosh v\cosh u, r\cosh v\sinh u, r\sinh u).$$

Ova parametrizacija drugačija je od parametrizacije dvoplošnog hiperboloida kao rotacijske plohe u euklidskom prostoru gdje je os rotacije, x-os. Ovdje smo koristeći pseudo-metriku prostora Minkowskog izveli još jednu parametrizaciju dvoplošnog hiperboloida u euklidskom prostoru. Naravno, prostornu sferu možemo promatrati i kao rotacijsku plohu oko x-osi. Generatrisa plohe je prostorna krivulja u xy-ravnini, $c(u) = (r\cosh u, r\sinh u, 0)$. Dobivamo parametrizaciju dvoplošnog hiperboloida iz euklidskog prostora i ona ima parametrizaciju:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cosh u, r\sinh u\cos v, r\sinh u\sin v).$$

2. Vremenska sfera
   Analogno se dobivaju parametrizacije vremenske sfere radijusa r sa središtem u ishodištu (u euklidskom prostoru to je jednoplošni hiperboloid oko x-osi). Rotacijom oko z-osi dobivamo sljedeće dvije parametrizacije (vidi propoziciju 1.52.2). Ako je generatrisa plohe prostorna krivulja u yz-ravnini, $c(u) = (0, r\cos u, r\sin u)$, onda parametrizacija plohe ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cos u\sinh v, r\cos u\cosh v, r\sin u).$$

   Ako je generatrisa plohe vremenska krivulja u xz-ravnini, $c(u) = (r\sinh u, 0, r\cosh u)$, onda parametrizacija plohe ima oblik:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\sinh u\cosh v, r\sinh u\sinh v, r\cosh u).$$

   Rotacijom oko x-osi (vidi propoziciju 1.53) generatrise plohe koja je vremenska krivulja u xy-ravnini, $c(u) = (r\sinh u, r\cosh u, 0)$ dobivamo sljedeću parametrizaciju:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\sinh u, r\cosh u\cos v, r\cosh u\sin v).$$

Primjer 3.5 (prostorni i vremenski cilindar)

1. Prostorni i vremenski cilindar s prostornom osi
   Neka je $r \neq 0$. Ako u formulu (3.1) uvrstimo $x(u) = r$, dobivamo parametrizaciju

prostornog cilindra sa z-osi:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\cosh v, r\sinh v, u).$$

Generatrisa $c(u) = (r,0,u)$ mora biti prostorni pravac što i je $\langle c', c'\rangle = 1 > 0$. Budući da je $x(t) = r$ vrijedi $x'(t) = x''(r) = 0$, pa kad to uvrstimo u pripadnu ODJ, dobivamo:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{x''x - (x')^2 + 1}{x(1-(x')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2r}.$$

Što znači da je prostorni cilindar sa z-osi prava CMC ploha. Autori u ([45, 57, 64]) nazivaju ga hiperbolički cilindar, $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R} = \{(x,y,z)\colon -x^2 + y^2 = -r^2\}$. Ako u formulu (3.2) uvrstimo $y(u) = r$, dobivamo parametrizaciju vremenskog cilindra sa z-osi:

$$\mathbf{x}(u,v) = (r\sinh v, r\cosh v, u).$$

Za ovaj cilindar dobivamo $H = -\dfrac{1}{2r}$ iz pripadne ODJ. Zovemo ga Lorentzov kružni cilindar, $\mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R} = \{-x^2 + y^2 = r^2\}$. Iz formule (3.3) ne dobivamo još jedan vremenski cilindar sa z-osi jer krivulja $c(u) = (r,0,u)$ nije vremenska $\langle c', c'\rangle = 1 > 0$.

2. Vremenski cilindar s vremenskom osi
   Neka je $r \neq 0$. Ako u formulu (3.3) uvrstimo $y(u) = r$, dobivamo parametrizaciju vremenskog cilindra oko x-osi:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, r\cos v, r\sin v)$$

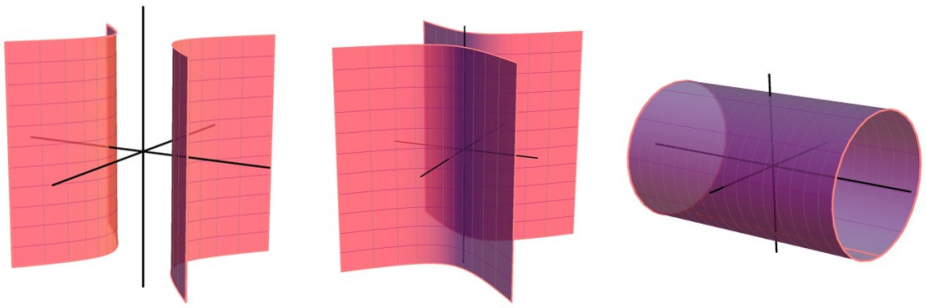
   Za ovaj cilindar dobivamo $H = \dfrac{1}{2r}$. Zovemo ga kružni cilindar indeksa 1, $\mathbb{R}^1_1 \times \mathbb{S}^1 = \{(x,y,z)\colon y^2 + z^2 = r^2\}$. Ovaj cilindar je identičan cilindru u euklidskom prostoru s x-osi. Prostorni cilindar s vremenskom osi x-osi, ne postoji zato što krivulja $c(u) = (u,r,0)$ koju moram uvrstiti u formulu (3.4) nije prostorna $\langle c', c'\rangle = -1 < 0$.

3. Cilindar sa svjetlosnom osi
   Cilindar sa svjetlosnom osi nije CMC ploha. Neka je $r \neq 0$. Ako u ODJ za rotacijske plohe sa svjetlosnom osi uvrstimo $y(u) = r$, dobivamo:

$$H = \pm\frac{1}{2}\frac{(u-r)\cdot 0 - (0-1)(0^2-1)}{(u-r)(\pm(1-0^2))^{\frac{3}{2}}} = \mp\frac{1}{2(u-r)}.$$

   Iz toga slijedi zaključak. Ako rotiramo svjetlosni pravac oko svjetlosne osi dobivamo tzv. parabolički nul-cilindar koji je minimalna ploha (vidi primjer 2.32).

Na slici 3.1 prikazan je redom prostorni i vremenski cilindar s prostornom osi i vremenski cilindar s vremenskom osi.



Slika 3.1: Cilindri $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^1_1 \times \mathbb{S}^1$

Sad ćemo nešto reći o Delaunayevim plohama, unduloidu i nodoidu. U ([37]) i ([38]) izvedena je numerička (približna) parametrizacija unduloida i nodoida. Prvo je dokazan teorem 3.6 koji govori o tome da postoje jednostavnije ODJ koje opisuju prave CMC plohe. Te jednadžbe su i dalje nelinearne, pa se ne mogu egzaktno riješiti, ali su 1. reda pa na njih možemo primijeniti Eulerovu metodu.

Teorem 3.6 (ODJ 1. reda za prave CMC plohe)
Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ konstante.

1. Pretpostavimo da je ploha $\mathbb{S}$ dana kartom (3.1). Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i samo ako funkcija x zadovoljava sljedeću ODJ:

$$x^2 \pm \frac{2ax}{\sqrt{1-(x')^2}} = \pm b^2. \tag{3.6}$$

2. Pretpostavimo da je ploha $\mathbb{S}$ dana kartom (3.3). Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i samo ako funkcija x zadovoljava sljedeću ODJ:

$$x^2 \pm \frac{2ax}{\sqrt{(x')^2-1}} = \pm b^2. \tag{3.7}$$

3. Pretpostavimo da je ploha $\mathbb{S}$ prostorna i dana kartom (3.4). Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i samo ako funkcija y zadovoljava sljedeću ODJ:

$$y^2 \pm \frac{2ay}{\sqrt{(y')^2-1}} = \pm b^2. \tag{3.8}$$

4. Pretpostavimo da je ploha $\mathbb{S}$ vremenska dana kartom (3.4). Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i samo ako funkcija y zadovoljava sljedeću ODJ:

$$y^2 \pm \frac{2ay}{\sqrt{1-(y')^2}} = \pm b^2. \tag{3.9}$$

5. Pretpostavimo da je ploha $\mathbb{S}$ dana kartom (3.5). Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i

samo ako funkcija y zadovoljava sljedeću ODJ:

$$\frac{-1+y'}{1+y'} = \frac{((-x+y)^2-4)^2}{(-x+y)^2} \tag{3.10}$$

Napomena 3.7 Slučaj kad je ploha $\mathbb{S}$ dana kartom (3.2) nije razmatran u ([38]).

Propozicija 3.8 nam govori kako izračunati srednju zakrivljenost ploha dobivenih pomoću jednadžbi iz teorema 3.6 budući da iz samih jednadžbi ne vidimo kolika je srednja zakrivljenost plohe.

Propozicija 3.8 Neka x, odnosno y zadovoljavaju jednu od jednadžbi (3.6), (3.7), (3.8) ili (3.9) i neka je $\mathbb{S}$ rotacijska prava CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$, te a i b pripadne konstante iz ODJ 1. reda za plohu $\mathbb{S}$. Tada je $H = \pm\frac{1}{2a}$.

Napomena 3.9 Za prave CMC plohe dane kartom (3.10) srednju zakrivljenost nije moguće odrediti kao u dokazu propozicije 3.8.

Nadalje, iz propozicije 3.8 posebno slijedi da je ODJ za kartu (3.1) ekvivalentna s jednadžbom:

$$\frac{d}{dt}(Hx^2 + \frac{x}{\sqrt{1-(x')^2}}) = 0.$$

Analogno za ostale jednadžbe iz teorema 3.1 i 3.2 (vidi lemu 7 u [37] i lemu 6 u [38]). Integriranjem te jednadžbe dobivamo:

$$Hx^2 + \frac{x}{\sqrt{1-(x')^2}} = c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Plohe koje dobijemo iz jednadžbe (3.11) (ili njoj analognih u ostalim slučajevima) za $c \neq 0$ i $x' \neq 0$ su unduloidi i nodoidi (tako ih možemo definirati). Prave CMC plohe kojima H i c imaju jednak (suprotan) predznak nazivamo unduloid (nodoid) ([65]). Ako je $c \neq 0$ i $x' = 0$, onda dobivamo cilindar ($x = const.$). Nadalje, $c = 0$ i $x' = 0$ ne može biti jer možemo odabrati orijentaciju tako da je $H > 0$ i iz (3.11) vrijedi $x > 0$ i $x' = 0$ iz čega nadalje slijedi da je $c = Hx^2 + x > 0$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $c = 0$.

Za razliku od euklidskog prostora gdje za svaki pravac q postoji unduloid i nodoid čija je os rotacije pravac q, u prostoru Minkowskog to ne vrijedi. O tome nam govori sljedeći teorem (teorem 8 u ([37])).

Teorem 3.10 Postoji samo prostorni nodoid oko prostorne osi globalno definiran i postoji samo prostorni unduloid oko vremenske osi globalno definiran.

Teorem 3.10 nam kaže da oko prostornog pravca ne može globalno biti unduloid definiran, ali može lokalno i oko vremenskog pravca ne može globalno biti nodoid definiran,

ali može lokalno.

U ([38]) nije naveden analogan rezultat za vremenske plohe. Nadalje, ostalo nam je još vidjeti kakve plohe dobivamo za $c = 0$ (vidi teorem 9 u [37] i teorem 7 u [38]).

Teorem 3.11 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska prava CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ i c pripadna konstanta iz ODJ 1. reda za plohu $\mathbb{S}$. Ako je $c = 0$, onda je $\mathbb{S}$ sfera.

Time smo pokazali da su sfera, cilindar, unduloid i nodoid jedine rotacijske prave CMC plohe. Te plohe zovemo Delaunayeve plohe. U radovim ([37, 38]) su usput izvedene generatrise unduloida i nodoida tzv. eliptičkih lančanica i čvorastih krivulja.

3.2 Pravčaste i helikoidalne prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Kao i kod minimalnih i maksimalnih pravčastih ploha, pravčaste prave CMC plohe možemo podijeliti u dvije potklase: razvojne ($H = const. \neq 0$ i $K = 0$) i vitopere ($H = const. \neq 0$ i $K \neq 0$). Nadalje, razvojne plohe dijelimo na cilindrične, konusne i tangentne plohe.

Definicija 3.12 (Cilindrična ploha)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je cilindrična ako se može parametrizirati kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + vr$, gdje je c regularna krivulja i $r \in \mathbb{R}^3_1$ vektor.

Pretpostavimo da vektor e nije svjetlosni. Plohu $\mathbb{S}$ ćemo reparametrizirati tzv. standardnom parametrizacijom $\langle r, r\rangle = 1$ i $\langle c', r\rangle = 0$.

Srednja zakrivljenost cilindrične plohe dana je jednadžbom $H(u) = \epsilon\dfrac{k_1}{2}$, gdje je $\epsilon = \langle n, n\rangle$, n normala ploha i k_1 je glavna zakrivljenost plohe. Vrijedi da je cilindrična ploha prava CMC ploha ako je $k_1 = const.$ Nadalje vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.13 Neka je $\mathbb{S}$ cilindrična ploha u $\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana standardnom parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve$. Pretpostavimo da krivulja c nije svjetlosna i da je $c''(u) \neq 0$ za svaki u. Tada je $\mathbb{S}$ prava CMC ploha ako i samo ako je $(c'' \times c' + Cr) \times r = 0$ za neki $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$.

Do sada smo vidjeli primjere tzv. kružnih cilindara (primjer 3.5) i paraboličkog nulcilindra (primjere 2.32). U nastavku dajemo još jedan primjer cilindrične plohe, tzv. eliptički cilindar.

Primjer 3.14 (Eliptički cilindri)
Cilindričnu plohu čija je bazna krivulja elipsa zovemo eliptički cilindar.

- Elipsa u yz-ravnini dana je preslikavanjem $c(u) = (0, a\cos u, b\sin u)$, $a,\, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Vektor $r := (1,0,0)$ je okomit na yz-ravninu. Vremenski eliptički cilindar oko x-osi je dan kartom
$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + vr = (v, a\cos u, b\sin u).$$
Implicitna jednadžba tog cilindra je $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$.
- Elipsa u xy-ravnini dana je preslikavanjem $c(u) = (a\cosh u, b\sinh u, 0)$ ili preslikavanjem $c(u) = (a\sinh u, b\cosh u, 0)$, gdje su $a, b \neq 0$. Vektor $r := (0,0,1)$ je okomit na xy-ravninu. Prostorni i vremenski eliptički cilindri oko z-osi su dani kartama
$$\mathbf{x}(u,v) = (a\cosh u, b\sinh u, v),$$
$$\mathbf{x}(u,v) = (a\sinh u, b\cosh u, v).$$
Implicitne jednadžbe tih cilindara su $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ i $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Definicija 3.15 (Konusne plohe)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je konusna ako se može parametrizirati kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika $\mathbf{x}(u,v) = c + v\, r(u)$, gdje je $c \in \mathbb{R}^3_1$ točka i r glatko polje duž c. Točku c zovemo vrh plohe $\mathbb{S}$.

Konusne prave CMC plohe ne postoje. Izračunat ćemo srednju zakrivljenost. Računamo komponente prve i druge fundamentalne forme $E = v^2\langle r', r'\rangle$, $F = \langle vr', r\rangle = 0$, $n = \dfrac{vr' \times r}{\|vr' \times r\|}$, $L = \langle \mathbf{x}_{uu}, n\rangle = \pm v\langle r'', r' \times r\rangle$, $M = N = 0$. Iz formule (1.3) slijedi da je srednja zakrivljenost jednaka

$$H = \frac{E\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot 0 + GL}{2(EG - 0^2)} = \frac{L}{E} = \pm\frac{1}{v}\langle r'', r' \times r\rangle.$$

Kad bi bilo $H = const. \neq 0$, onda bi slijedilo da je $\langle r'', r' \times r\rangle = H\, v$ za sve u i v, što je nemoguće jer lijeva strana ovisi samo o u, a desna strana nije konstantna.

Definicija 3.16 (Tangentne plohe)
Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Za plohu $\mathbb{S}$ kažemo da je tangentna ako se može parametrizirati kartom $\mathbf{x}\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ oblika $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + v\, c'(u)$ gdje je c' glatko polje duž c.

Ako pretpostavimo da bazna krivulja i generatrisa nisu svjetlosne krivulje, onda ne postoje tangentne prave CMC plohe. Srednja zakrivljenost tangentne plohe dana je formulom $H(u) = -(\operatorname{sign} v)\dfrac{\tau(u)}{2v\kappa(u)}$, gdje su τ i κ torzija i zakrivljenost krivulje $c(u)$. Sada vrijedi isti argumet kao i za konusne plohe. Kad bi bilo $H = const. \neq 0$, onda bi slijedilo

da je $-(\operatorname{sign} v)\dfrac{\tau(u)}{\kappa(u)} = 2H\,v$ za sve u i v, što je nemoguće jer lijeva strana ovisi samo o u, a desna strana nije konstantna.

Ako su $c(u)$ i $c'(u)$ svjetlosne krivulje i c'' nije svjetlosna krivulja tada po teoremu 2.31 vrijedi da je $H = K = 0$.

Sada ćemo nešto reći o vitoperim pravčastim pravim CMC plohama. Sljedeći teorem je analogon Dini-Beltramovog teorema u Minkowskijevom prostoru. Dokaz i više detalja može se pronaći u ([12]).

Teorem 3.17 Neka je $\mathbb{S}$ pravčasta ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dana kartom $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + vr(u)$. Pretpostavimo da vektori $r(u)$ i $r'(u)$ nisu svjetlosni i $r'(u) \neq 0$ za svaki u. Svaka vitopera pravčasta Weingartenova ploha (posebno onda i CMC ploha) je helikoidalna pravčasta ploha.

Obrat teorema 3.17 ne vrijedi, jedan protuprimjer je cilindar sa svjetlosnom osi primjer 3.5.

Klasifikacija pravčastih ploha kojima je bazna krivulja i izvodnice svjetlosnog karaktera dana je u ([45, 44]), a u ([12]) je pokazano da za sve takve plohe vrijedi $H^2 = K$.

Teorem 3.18 Neka je $\mathbb{S}$ kvazi-umbilička vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ za koju vrijedi $H^2 = K = \lambda = const$. Tada je $\mathbb{S}$ jedna od sljedećih ploha:

1. Cilindar sa svjetlosnim izvodnicama. Za tu plohu vrijedi $H = K = 0$.
2. Helikoidalna ploha dana kartom

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v,\, \cos(u + c) - v \sin u,\, v \cos u + \sin(u + c)), \quad c \in \mathbb{R}.$$

   Za te plohe vrijedi $H,\, K \neq 0$.
3. Pravčasta ploha $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\,u(1, -\sin\theta(u), \cos\theta(u))$ gdje je θ rješenje jednadžbe

$$\theta'(1 - \cos(\psi - \theta)) = -\lambda(1 - \cos(\psi - \theta))^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   bazna krivulja $\alpha(u) = (u, -y(u), z(u))$ zadana je s $y'(u) = -\sin\phi(u)$ i $z'(u) = \cos\phi(u)$ gdje je $\phi - \theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. U ovom slučaju vrijedi $H^2 = K = \lambda$.

Sada ćemo proučiti helikoidalne plohe (ne nužno pravčaste) kojima su izvodnice grafovi polinoma i kružnice. Detalji i dokazi teorema 3.19, 3.20 i 3.21 dani su u ([42]).

Teorem 3.19 Neka je $\mathbb{S}$ helikoidalna CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ čija je generatrisa graf polinoma $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Tada je $n \leq 1$, tj. generatrisa je pravac i te plohe dane su sljedećim kartama:

1. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ x-os, onda je $\mathbb{S}$ helikoid 1. vrste ($H = 0$), Lorentzov cilindar dan jednadžbom $x^2 + y^2 = r^2$ čija je srednja zakrivljenost $H = \dfrac{1}{2r}$ ili ploha dana kartom $\mathbf{x}(u, v) = (\pm u + a_0 + hv, -u \sin v, u \cos v)$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ čija je srednja zakrivljenost $H = \pm\dfrac{1}{h}$.
2. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ z-os, onda je $\mathbb{S}$ helikoid 2. vrste, helikoid 3. vrste ili ploha dana kartom $\mathbf{x}(u, v) = ((\pm u + a_0) \cosh v + u \sinh v, -(\pm u + a_0) \sinh v + u \cosh v, hv)$, h, $a_0 \neq 0$ (za tu plohu je $H = 0$).
3. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ svjetlosni pravac, onda je $\mathbb{S}$ Cayley-eva ploha ili parabolički nul-cilindar. Za obe plohe vrijedi $H = 0$.

Teorem 3.20 Neka je $\mathbb{S}$ helikoidalna CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$ čija je generatrisa vremenska kružnica. Tada je os plohe $\mathbb{S}$ prostorni pravac i $H \neq 0$. Središte kružnice leži na osi. Ploha $\mathbb{S}$ je hiperbolički cilindar dan jednadžbom $-x^2 + y^2 = \pm r^2$.

Teorem 3.21 Neka je $\mathbb{S}$ kvazi-umbilička helikoidalna cmc-ploha u $\mathbb{R}^3_1$ čija je generatrisa graf polinoma $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Tada je $n \leq 1$, tj. generatrisa je pravac i te plohe dane su sljedećim kartama:

1. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ vremenska

$$\mathbf{x}(u, v) = (\pm u + a_0 + hv, -u \sin v, u \cos v), \quad u,\, v \in \mathbb{R},$$

gdje je $a_0 \in \mathbb{R}$, $|H| = \dfrac{1}{h}$ i $K = \dfrac{1}{h^2}$ i operator oblika plohe dan je matricom

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{h} & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

Ova ploha je nastala helikoidalnim gibanjem svjetlosnog pravca oko vremenske osi.

2. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ prostorna

$$\mathbf{x}(u, v) = ((\pm u + a_0) \cosh v + u \sinh v, (\pm u + a_0) \sinh v + u \cosh v, hv),$$

gdje je $a_0 \in \mathbb{R}$, $H^2 = K = 0$ i operator oblika plohe dan je matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{h}{a_0} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Ako je os plohe $\mathbb{S}$ svjetlosna, tada je ploha parabolički nul-cilindar $H = K = 0$.

3.3 Translacijske prave plohe konstantne srednje zakrivljenosti

Već smo vidjeli primjere translacijskih pravih CMC ploha. To su kružni i eliptički cilindri (primjer 3.5 i 3.14). Ovdje želimo proučiti translacijske plohe općenito. Ograničit ćemo se na translacijske plohe kojima su obje generatrise ravninske krivulje koje leže u međusobno okomitim ravninama. Detalji i dokaz sljedećeg teorema mogu se naći u ([41]).

Teorem 3.22 Neka je $\mathbb{S}$ translacijska prava CMC ploha ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Tada je ploha $\mathbb{S}$ dana jednom od sljedećih implicitnih jednadžbi.

1. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna, jednadžbe su

$$x = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2H}\sqrt{1+4H^2z^2} - ay, \quad |a| < 1, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$z = ay - \frac{\sqrt{a^2+1}}{2H}\sqrt{4H^2x^2-1}, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$z = \frac{\sqrt{a^2-1}}{2H}\sqrt{1+4H^2y^2} - ax, \quad |a| > 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

2. Ako je ploha $\mathbb{S}$ vremenska, jednadžbe su

$$x = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{2H}\sqrt{4H^2z^2-1} - ay, \quad |a| < 1, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$x = \frac{\sqrt{a^2-1}}{2H}\sqrt{1-4H^2z^2} - ay, \quad |a| > 1, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$z = ay + \frac{\sqrt{a^2+1}}{2H}\sqrt{1+4H^2x^2}, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$z = -\frac{\sqrt{a^2-1}}{2H}\sqrt{4H^2y^2-1} - ax, \quad |a| > 1, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$z = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2H}\sqrt{1-4H^2y^2} - ax, \quad |a| < 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Iz teorema 3.22 slijedi da ako je $\mathbb{S}$ translacijska CMC ploha, onda je jedna generatrisa plohe $\mathbb{S}$ pravac, a druga dio elipse, odnosno slijedi da su translacijske CMC plohe eliptički cilindri. Nadalje, u teoremu 3.22 su dane implicitne jednadžbe eliptičkih cilindara iz primjera 3.14 i još dva nova primjera eliptičkih cilindara sa z-osi.

Poglavlje 4

Krivulje i plohe pridružene danoj plohi u $\mathbb{R}^3_1$

U ovom poglavlju istraživat ćemo svojstva krivulja i ploha u Minkowskijevom prostoru pridruženih regularnoj plohi. Najpoznatiji primjer takvih ploha su fokalni skupovi, drugi primjer su α-evolute i njen poseban slučaj, harmonijske evolute. U prvom dijelu ovoga poglavlja cilj je istražiti svojstva harmonijskih evoluta pravčastih, translacijskih i helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$. Nadalje, u ([57]) je pokazano da za razliku od euklidske situacije gdje je harmonijska evoluta plohe uvijek ploha, u Minkowskijevom prostoru harmonijska evoluta može biti i krivulja. To se događa kod tzv. kvazi-umbiličkih ploha čije analogone nemamo u euklidskom slučaju tako da je naš drugi cilj proučiti svojstva te krivulje. Pokazat ćemo njenu vezu s tzv. Bertrandovim krivuljama i s teorijom singularnosti. Nadalje, pokazat ćemo i kako od krivulje rekonstruirati B-namotajnu plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. Na samom kraju proučiti ćemo svojstva α-evoluta, budući da α-evolute ploha nisu do sada proučavane u Minkowskijevom prostoru, a u euklidskom prostoru proučavane su u ([51]).

4.1 Harmonijska evoluta u $\mathbb{R}^3_1$

U Minkowskijevom prostoru fokalni skup se definira analogno kao u euklidskom prostoru:

Definicija 4.1 Neka je $\mathbb{S}$ regularna ploha bez umbiličkih i kvazi-umbiličkih točaka parametrizirana krivuljama zakrivljenosti. Neka je $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ njena lokalna parametrizacija i $p = \mathbf{f}(u,v)$ proizvoljna točka, $n(u,v)$ normala, $k_1(p)$ i $k_2(p)$ glavne zakrivljenosti, $r_1(p) = \dfrac{1}{k_1(p)}$ i $r_2(p) = \dfrac{1}{k_2(p)}$ polumjeri zakrivljenosti i

$$P_i(p) = \mathbf{f}(u,v) + r_i(p)n(u,v), \quad i = 1,2, \tag{4.1}$$

središta zakrivljenosti. *Fokalni skup* plohe $\mathbb{S}$ je skup središta zakrivljenosti. Označit ćemo

ga sa Σ_1 i Σ_2.

Razlikujemo tri mogućnosti fokalnih skupova ([21]):

1. Oba skupa su plohe. Te plohe zovemo evolutne plohe ili fokalne plohe.
2. Jedan je ploha, a drugi krivulja. Primjer kod kanalnih ploha. Posebna klasa kanalnih ploha su tube i rotacijske plohe.
3. Oba skupa su krivulje. Primjer kod Dupin cikloida.

Fokalni skup je najjednostavniji primjer plohe pridružene danoj plohi. Uz fokalni skup spomenut ćemo primjer tzv. srednje evolute, odnosno ovojnice familije ravnina koje prolaze polovištem spojnica središta zakrivljenosti. Nama u radnji je od posebnog interesa jedan drugi primjer ploha pridruženih danoj plohi, tzv. harmonijske evolute koje ćemo u nastavku istraživati.

Definicija 4.2 (Harmonijska evoluta)
Neka je P točka plohe, $\bar{P}$ harmonijski konjugirana točka točki P s obzirom na središta zakrivljenosti P_1, P_2. Ploha $\bar{\mathbb{S}}$ koju čine točke $\bar{P}$ naziva se harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}$.

Harmonijski konjugirana točka definirana je s

$$(P_1,\, P_2;\, P,\, \bar{P}) = \frac{P_1P}{P_2P} \cdot \frac{P_2\bar{P}}{P_1\bar{P}} = -1.$$

Iz (4.1) slijedi dvoomjer

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\bar{r} - r_2}{\bar{r} - r_1} = -1$$

iz čega nadalje slijedi

$$\bar{r} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Sada iz (1.5) vrijedi $\bar{r} = \dfrac{\epsilon}{H}$, $\epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}$. Stoga, ako je $f(u, v)$ lokalna parametrizacija plohe $\mathbb{S}$. Harmonijska evoluta $\bar{\mathbb{S}}$ plohe $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ dana je parametrizacijom

$$\bar{\mathbf{f}}(u, v) = \mathbf{f}(u, v) + \frac{\epsilon}{H(u, v)} n(u, v), \quad \epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}. \tag{4.2}$$

Harmonijske evolute ploha u euklidskom prostoru proučavane su u ([7]), a u Minkowskijevom prostoru u ([57]) gdje je posebna pažnja posvećena pročavanju svojstava harmonijskih evoluta CMC ploha. Dokazano je da su CMC plohe jedine plohe koje su paralelne sa svojom harmonijskom evolutom. Nadalje, pokazano je da je harmonijska evoluta CMC plohe $\mathbb{S}$, CMC ploha kojoj je harmonijska evoluta upravo ploha $\mathbb{S}$. Uz to dana je veza

s Bonnetovim teoremom koji tvrdi da za svaku plohu konstantne Gaussove zakrivljenosti $K = \frac{1}{r^2}$ postoje dvije paralelne plohe (na udaljenosti $\pm r$) konstantne srednje zakrivljenosti $H = \pm\frac{1}{2r}$. Te dvije CMC plohe tvore upravo par harmonijskih evoluta. Nadalje, harmonijska evoluta CMC ploha je povezana s Christoffelovim parom, Darbouxovom i Bianchi-Bäcklundovom transformacijom ([26]). CMC ploha $\mathbf{f}$ i njena harmonijska evoluta $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \frac{1}{H}n$ tvore Christoffelov par (vidi primjer 4.16). Nadalje, vrijedi da je Darbouxova transformacija CMC plohe harmonijska evoluta, tj. harmonijska evoluta je ovojnica kongruentnih sfera, sfera konstantnog radijusa $\frac{1}{2H}$. Budući da je Bianchi-Bäcklundova transformacija od CMC ploha Darbouxova transformacija imamo i vezu s njom.

Mi ćemo u nastavku proučavati svojstva harmonijskih evoluta pravčastih ploha, helikoidalnih ploha, translacijskih CMC ploha i kvazi-umbiličkih ploha jer ona nisu do sada proučavana u Minkowskijevom prostoru.

4.1.1 Harmonijska evoluta pravčastih ploha u $\mathbb{R}^3_1$

Pravčaste plohe u Minkowskijevom prostoru već smo definirali (vidi definiciju 1.55). Kao u euklidskom prostoru dijelimo ih na razvojne ($K = 0$) i vitopere ($K \neq 0$). U nastavku promatrat ćemo razvojne pravčaste plohe.

Neka je $\mathbb{S}$ razvojna pravčasta ploha. Budući da je njena Gaussova zakrivljenost $K = \epsilon\, k_1 k_2 = 0$, onda jedna glavna zakrivljenost mora biti jednaka 0. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k_2 = 0$. Stoga, fokalni skup Σ_2 je točka u beskonačnosti. Dvoomjer $(P, \bar{P}; P_1, P_2)$, prelazi u djelišni omjer $(P, \bar{P}; P_1)$ gdje je P_1 polovište dužine $\overline{P\bar{P}}$, odnosno točka harmonijske evolute $\bar{P}$ je simetrična točka točke $P \in \mathbb{S}$ s obzirom na središte zakrivljenosti P_1.

U Minkowskijevom prostoru, kao i u euklidskom, razvojne plohe dijelimo na cilindrične, stožaste i tangentne plohe.

Cilindrične plohe

Neka je $\mathbb{S}$ cilindrična ploha (vidi definiciju 3.12). Nadalje, pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ parametrizirana standardnom parametrizacijom

$$\mathbf{f}(u, v) = c(u) + ve, \quad e \in \mathbb{R}^3_1, \quad \langle e, e\rangle \in \{1, -1\}, \quad \langle c', e\rangle = 0.$$

Fokalna ploha Σ_1 plohe $\mathbb{S}$ je pravčasta ploha kojoj je bazna krivulja evoluta od $c(u)$

$$\tilde{\mathbf{f}}(u,v) = c(u) + ve + \frac{1}{k_1(u)}n(u,v) = \Big(c(u) + \frac{1}{k_1(u)}N(u)\Big) + ve,$$

n je jedinična normala plohe $\mathbb{S}$ i N glavna normala krivulje c. Napomenimo samo da vrijedi $n(u,v) = n(u) = N(u)$ jer je ploha parametrizirana standardnom parametrizacijom.

Sada ćemo izračunati harmonijsku evolutu plohe $\mathbb{S}$. Srednja zakrivljenost cilindrične plohe je $H(u) = \dfrac{\epsilon\, k_1}{2}$ gdje je $\epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}$. Koristeći (4.2) slijedi da harmonijska evoluta cilindrične plohe ima oblik

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \Big(c(u) + \frac{2}{k_1(u)}N(u)\Big) + ve.$$

Stoga vrijedi zaključak:

Propozicija 4.3
Harmonijska evoluta cilindrične plohe $\mathbb{S}$ je cilindrična ploha s paralelnim izvodnicama. To je simetrična ploha plohi $\mathbb{S}$ s obzirom na fokalnu plohu Σ_1.

Sljedeći primjer nalazimo u ([57]).

Primjer 4.4 Harmonijska evoluta cilindra $\mathbb{S}$ (vidi primjer 3.5) je taj isti cilindar. Točke harmonijske evolute su simetrične točkama polaznog cilindra s obzirom na os.

Konusne plohe

Neka je $\mathbb{S}$ konusna ploha (vidi definiciju 3.15) dana parametrizacijom

$$\mathbf{f}(u,v) = p + v\, e(u), \quad \langle e, e\rangle = \eta \in \{1, -1\}, \quad \langle e, e'\rangle = 0, \quad p \in \mathbb{R}^3_1.$$

Srednja zakrivljenost konusne plohe dana je formulom $H(u) = \dfrac{-\epsilon \det(e, e', e'')}{2|v|\|e'\|\langle e', e'\rangle}$. Koristeći (4.2) slijedi da harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}$ ima oblik

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = p + v\Big(e(u) - \frac{2\langle e', e'\rangle}{\det(e, e', e'')}e(u) \times e'(u)\Big),$$

gdje je $e(u) \times e'(u)$ vektorski produkt. Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 4.5
Harmonijska evoluta konusne plohe je konusna ploha s istim vrhom.

Tangentne plohe

Neka je $\mathbb{S}$ tangentna ploha (vidi definiciju 3.16) dana parametrizacijom

$$\mathbf{f}(u,v) = c(u) + vc'(u), \quad \langle c'(u), c'(u)\rangle = \mu \in \{1,-1\} \quad \langle c'(u), c''(u)\rangle = 0.$$

Srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ dana je formulom $H(u) = -(\operatorname{sign} v)\dfrac{\epsilon\,\tau(u)}{2v\kappa(u)}$, gdje je $\epsilon = \langle n, n\rangle$, $\tau(u)$ torzija i $\kappa(u)$ zakrivljenost bazne krivulje c. Normala plohe je $n = (-\operatorname{sign} v)B$ gdje je B binormala od c. Sada prema (4.2) harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}$ ima oblik

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}(u,v) &= c(u) + v\Big(c'(u) + (-\operatorname{sign} v)2\frac{\kappa(u)}{\tau(u)}n(u,v)\Big)\\ &= c(u) + v\Big(c'(u) + 2\frac{\kappa(u)}{\tau(u)}B(u)\Big).\end{aligned}$$

Stoga, harmonijska evoluta je ponovno pravčasta ploha s izvodnicama

$$\bar{e}(u) = c'(u) + 2\frac{\kappa(u)}{\tau(u)}B(u)$$

koje se sastaju s odgovarajućim izvodnicama plohe $\mathbb{S}$ duž ruba regresije. Nadalje, vrijedi da parametar distribucije plohe $\bar{S}$ nije nikada jednak 0

$$\det(c', \bar{e}, \bar{e}') = -2\mu\frac{\kappa(u)^2}{\tau(u)} \neq 0, \quad \mu = \langle c', c'\rangle.$$

Stoga, vrijedi zaključak:

Propozicija 4.6 Harmonijska evoluta tangentne plohe je vitopera pravčasta ploha.

Sumiranjem rezultata iz propozicija 4.3, 4.5 i 4.6 slijedi teorem 4.7.

Teorem 4.7
Harmonijska evoluta razvojne plohe u Minkowskijevom prostoru je pravčasta ploha. Posebno, harmonijska evoluta cilindrične i stožaste plohe je razvojna ploha, cilindrična i stožasta ploha redom, dok harmonijska evoluta tangentne plohe je vitopera pravčasta ploha.

U nastavku proučavamo svojstva harmonijske evolute translacijske CMC plohe.

4.1.2 Harmonijska evoluta translacijskih CMC ploha u $\mathbb{R}^3_1$

Ako je $\mathbb{S}$ translacijska CMC ploha, onda iz teorema 3.22 slijedi da je jedna generatrisa plohe $\mathbb{S}$ pravac, a druga dio elipse, odnosno slijedi da su translacijske CMC plohe eliptički cilindri. Stoga, iz propozicije 4.3 slijedi korolar.

Korolar 4.8 Harmonijska evoluta translacijske CMC plohe u $\mathbb{R}^3_1$ je translacijska CMC ploha, eliptički cilindar.

Sada ćemo izvesti parametrizaciju harmonijske evolute jedne translacijske CMC plohe u $\mathbb{R}^3_1$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da generatrise plohe $\mathbb{S}$, krivulje c_1 i c_2 redom leže u xy i xz-ravnini i da su dane formulama $c_1(u) = (f(u), u, 0)$ i $c_2(v) = (g(v), 0, v)$. Budući da je ploha $\mathbb{S}$ translacijska CMC ploha po teoremu 3.22 slijedi da je $\mathbb{S}$ cilindrična tako da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $g(v) = av + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nadalje, možemo pretpostaviti da je $b = 0$. Stoga, ploha $\mathbb{S}$ je parametrizirana kartom:

$$\mathbf{x}(u, v) = c_1(u) + c_2(v) = (f(u) + av, u, v). \tag{4.3}$$

Srednja zakrivljnost plohe (4.3) je $H = \epsilon \dfrac{(a^2-1)f''(u)}{2(f'(u)^2 + a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$, $\epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}$ i njena harmonijska evoluta ima oblik

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}} &= (f(u) + av, u, v) + \frac{\epsilon}{H} n \\
&= \Big(av + f(u) - \frac{2(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}, u - \frac{2f'(u)(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}, v - \frac{2a(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}\Big) \\
&= \Big(f(u) - \frac{2(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}, u - \frac{2f'(u)(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}, - \frac{2a(-1+a^2+f'(u)^2)}{(-1+a^2)f''(u)}\Big) + v(a, 0, 1).
\end{aligned}$$

Uočimo da ako je $a = 1$, onda je krivulja c_2 svjetlosni pravac. U tom slučaju srednja zakrivljenost je 0 i harmonijska evoluta degenerira u točku u beskonačnosti.

Korolar 4.9 Harmonijska evoluta translacijske CMC plohe kojoj je generatrisa svjetlosni pravac je točka u beskonačnosti.

U nastavku proučavamo svojstva harmonijskih evoluta helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$.

4.1.3 Harmonijska evoluta helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$

Prema ([4]) razlikujemo četiri tipa helikoidalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$.

Prvi slučaj

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ helikoidalna ploha s prostornom osi, z-osi. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da krivulja $c\colon I \to \mathbb{R}$, $c(u)$ leži u yz-ravnini ili u xz-ravnini. Stoga, krivulja $c(u)$ je parametrizirana

$$c(u) = (0, f(u), g(u)) \quad \text{ili} \quad c(u) = (f(u), 0, g(u))$$

gdje $f(u)$ je pozitivna funkcija klase C^1 i $g(u)$ je funkcija klase C^2 na $I = (a, b)$. Nadalje, pretpostavimo da je $c(u)$ parametrizirana parametrom duljine luka tako da za prvu parametrizaciju vrijedi $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$, a za drugu vrijedi $-f'(u)^2 + g'(u)^2 = \eta = \pm 1$. Helikoidalnu plohu $\mathbb{S}$ možemo parametrizirati na sljedeće načine:

$$\mathbf{f}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{f}(u, v) = (f(u) \sinh v, f(u) \cosh v, g(u) + cv), \quad f(u) > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \tag{4.4}$$

ili

$$\mathbf{f}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{f}(u, v) = (f(u) \cosh v, f(u) \sinh v, g(u) + cv), \quad f(u) > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+. \tag{4.5}$$

Autori u [4] plohu (4.4) zovu *helikoidalna ploha tipa I*, a (4.5) *helikoidalna ploha tipa II*.

Harmonijska evoluta *helikoidalne plohe tipa I* (4.4) dana je parametrizacijom

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\epsilon c f'(u)}{H(u)W(u)} \\ f(u)\Big(1+\dfrac{\epsilon g'(u)}{H(u)W(u)}\Big) \\ g(u) - \dfrac{\epsilon f(u)f'(u)}{H(u)W(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\,v \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

gdje je $W(u)^2 = -c^2 f'(u)^2 + f(u)^2$, $\epsilon = \langle n, n\rangle = \pm 1$ i $H(u)$ srednja zakrivljenost plohe (4.4).

Harmonijska evoluta *helikoidalne plohe tipa II* (4.5) dana je parametrizacijom

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u)\Big(1+\dfrac{\epsilon g'(u)}{H(u)W(u)}\Big) \\ -\dfrac{\epsilon c f'(u)}{H(u)W(u)} \\ g(u) + \dfrac{\epsilon f(u)f'(u)}{H(u)W(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\,v \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

gdje je $W(u)^2 = c^2 f'(u)^2 - \eta f(u)^2$, $\eta = \pm 1$, $\epsilon = \langle n, n\rangle = \pm 1$ i $H(u)$ srednja zakrivljenost plohe (4.5).

Iz dobivenih parametrizacija harmonijskih evoluta (4.6) i (4.7) slijedi propozicija 4.10.

Propozicija 4.10 Harmonijska evoluta helikoidalne plohe sa z-osi je helikoidalna ploha sa z-osi.

Drugi slučaj

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ helikoidalna ploha s vremenskom osi, x-osi. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da krivulja $c\colon I \to \mathbb{R}$, $c(u)$ leži u xy-ravnini. Stoga, krivulja $c(u)$ ima parametrizaciju $c(u) = (g(u), f(u), 0)$ gdje $f(u)$ je pozitivna funkcija klase C^1 i $g(u)$ je funkcija klase C^2 na $I = (a, b)$. Nadalje, pretpostavimo da je $c(u)$ parametrizirana parametrom duljine luka tako da vrijedi $-g'(u)^2 + f'(u)^2 = \eta = \pm 1$.

Helikoidalna ploha $\mathbb{S}$ je dana parametrizacijom

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\,v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\mathbf{f}(u,v) = (g(u) + c\,v, f(u)\cos v, f(u)\sin v), \quad f(u) > 0 \quad c \in \mathbb{R}^+. \tag{4.8}$$

Autori u ([4]) plohu (4.8) zovu *helikoidalna ploha tipa III.*

Harmonijska evoluta *helikoidalne plohe tipa III* (4.8) dana je parametrizacijom

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) - \dfrac{\epsilon f(u) f'(u)}{H(u)W(u)} \\ f(u)\Big(1 - \dfrac{\epsilon g'(u)}{H(u)W(u)}\Big) \\ -\dfrac{\epsilon c f'(u)}{H(u)W(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\,v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

gdje je $W(u)^2 = -\eta f(u)^2 + c^2 f'(u)^2$, $\eta = \pm 1$, $\epsilon = \langle n, n\rangle = \pm 1$ i $H(u)$ srednja zakrivljenost plohe (4.8).

Iz dobivene parametrizacije harmonijske evolute (4.9) slijedi propozicija 4.11.

Propozicija 4.11 Harmonijska evoluta helikoidalne plohe s x-osi je helikoidalna ploha s x-osi.

Treći slučaj

Pretpostavimo da je os helikoidalne plohe, svjetlosna os $l := \{(x,x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da krivulja $c \colon I \to \mathbb{R}$ leži u xy-ravnini i da je njena parametrizacija $c(u) = (f(u), g(u), 0)$, $u \in I$, gdje su $f(u)$ i $g(u)$ funkcije na I, takve da $f(u) \neq g(u)$ za svaki $u \in I$, odnosno pretpostavimo da $c(u)$ nije svjetlosna krivulja. Nadalje, $c(u)$ možemo parametrizirati parametrom duljine luka $-f'(u)^2 + g'(u)^2 = \eta$, $\eta = \pm 1$.

Helikoidalna ploha $\mathbb{S}$ dana je parametrizacijom

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{v^2}{2} & -\dfrac{v^2}{2} & v \\ \dfrac{v^2}{2} & 1 - \dfrac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\,v \\ c\,v \\ 0 \end{pmatrix}$$

odnosno

$$\mathbf{f}(u,v) = \Big((1+\frac{v^2}{2})f(u) - \frac{v^2}{2}g(u) + v\,c,\ \frac{v^2}{2}f(u) + (1-\frac{v^2}{2})g(u) + v\,c,\ (f(u)-g(u))v\Big). \tag{4.10}$$

Autori u ([4]) plohu (4.10) nazivaju *helikoidalna ploha tipa IV.*

Harmonijska evoluta *helikoidalne plohe tipa IV* (4.10) dana je parametrizacijom

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u)+\frac{\epsilon(-g'(u)f(u)+g'(u)g(u))}{H(u)W(u)} \\ g(u)+\frac{\epsilon(-f'(u)f(u)+f'(u)g(u))}{H(u)W(u)} \\ \frac{c\epsilon(f'(u)-g'(u))}{H(u)W(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ cv \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

gdje je $W(u)^2 = (f(u)+g(u))^2 - \eta n^2(v(f(u)-g(u))+c)^2$, $\eta = \pm 1$, $\epsilon = \langle n, n\rangle = \pm 1$ i $H(u)$ srednja zakrivljenost plohe (4.10). Iz dobivene parametrizacije harmonijske evolute (4.11) slijedi propozicija 4.12.

Propozicija 4.12 Harmonijska evoluta helikoidalne plohe sa svjetlosnom osi $l := \{(x,x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$ je helikoidalna ploha sa svjetlosnom l-osi.

Sumiranjem rezultata iz propozicija 4.10, 4.11 i 4.12 slijedi teorem 4.13.

Teorem 4.13 Harmonijska evoluta helikoidalne plohe u Minkowskijevom prostoru je koaksijalna helikoidalna ploha.

Ovaj rezultat objavljen je u radu *The harmonic evolute of a helicoidal surfaces in Minkowski 3-space* u ([69]).

Ako je $c = 0$ dobivamo rotacijsku plohu. Slijedi korolar kojeg možemo naći u radu ([57]) u obliku propozicije koja je dokazana raspisivanjem slučajeva po definiciji.

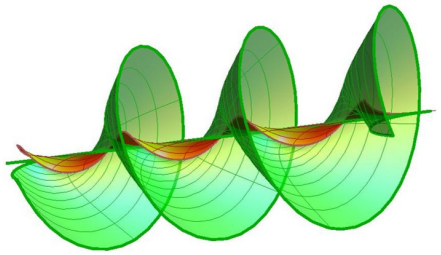
Korolar 4.14 Harmonijska evoluta rotacijske plohe u Minkowskijevom prostoru je koaksijalna rotacijska ploha.

U nastavku navodimo neke primjere helikoidalnih ploha s njihovim harmonijskim evolutama. Budući da su parametrizacije harmonijskih evoluta ružne izostavit ćemo ih. Plohe i njima pridružene harmonijske evolute bit će prikazane na slikama.

Primjer 4.15 Vremenska helikoidalna ploha (vidi ([4])) parametrizirana s

$$\mathbf{f}(u,v) = (c_2 + \int \frac{|B|\sqrt{c^2-u^2}}{|u|\sqrt{u^2-B^2}}du + cv, u\cos v, u\sin v),\ c \in \mathbb{R}^+,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

gdje je $B(u) = 2\int u\, H(u)du + c_1$ i $H(u) = \dfrac{1}{4u}$ i njena harmonijska evoluta prikazane su na slici 4.1.



Slika 4.1: Vremenska helikoidalna ploha (4.12) (žuta boja) i njena harmonijska evoluta (zelena boja)

Primjer 4.16 U ovom primjeru nemamo kanonsku bazu nego svjetlosnu bazu (vidi definiciju 1.13) $\{e_1, e_2, e_3\}$, odnosno bazu za koju vrijedi:

$$\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 0, \quad \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1.$$

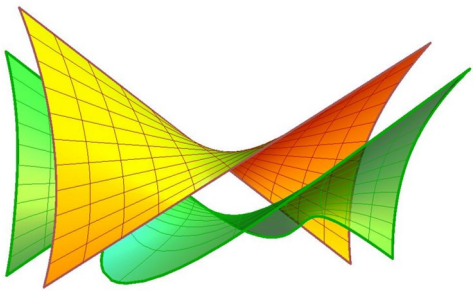
Promatramo helikoidalnu plohu nastalu helikoidalnim gibanjem krivulje $c(u) = (u, 0, f(u))$ oko svjetlosne osi $l = \lambda e_3$. Parametrizacija plohe je

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ -\dfrac{v^2}{2} & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ f(u) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Nadalje, neka je $f(u) = 0$ i $h = 1$. U tom slučaju dobivamo vremensku helikoidalnu CMC plohu ([30])

$$\mathbf{f}(u,v) = (u, uv, -\frac{uv^2}{2} + v),\ u > 0,\ v \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

kojoj je srednja zakrivljenost $H = -1$ i Gaussova zakrivljenost $K = 1$. Na slici 4.2 prikazana je ploha (4.13) i njena harmonijska evoluta. Budući da je ploha (4.13) CMC ploha, onda je i njena harmonijska evoluta CMC ploha. Nadalje, vrijedi da su te plohe paralelne plohe te da su plohe iz Boonetovog teorema i da tvore Christoffelov par ([57]).



Slika 4.2: Vremenska helikoidalna ploha (4.13) (žuta boja) i njena harmonijska evoluta (zelena boja)

Primjer 4.17 Dinijeva ploha u Minkowskijevom prostoru, kao i u euklidskom je ploha s konstantnom negativnom Gaussovom zakrivljenošću $K = -\frac{1}{a^2-b^2}$, $a^2 - b^2 > 0$ i nekonstantnom srednjom zakrivljenošću $H = \frac{\cot 2v}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Nastala je helikoidalnim gibanjem evolute od lančanice, traktrise. Jedna od njenih parametrizacija u Minkowskijevom prostoru je

$$\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a\sin v \\ a\cos v + \ln\left(\tan(\frac{v}{2})\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\,v \end{pmatrix}$$

i njena harmonijska evoluta je ploha

$$\bar{\mathbf{f}}(u,v) = \Big(-a\sec(2v)\sin v \sinh u + b\cosh u \tan(2v), -a\cosh u \sec(2v)\sin v + b\sinh u\tan(2v), \\ bu + a\ln\left(\tan(\frac{v}{2})\right) + a\cos v\sec(2v)\Big).$$

U nastavku proučavamo harmonijsku evolutu kvazi-umbiličkih ploha čije analogone nemamo u euklidskom prostoru.

4.1.4 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe u $\mathbb{R}^3_1$

Za razliku od euklidskog prostora gdje je harmonijska evoluta plohe uvijek ploha ([7]), osim za minimalne plohe gdje degenerira u točke u beskonačnosti ili za sferu gdje degenerira u točku, središte sfere, u Minkowskijevom prostoru harmonijska evoluta može biti i krivulja. To se događa kod kvazi-umbiličkih ploha čije analogone nemamo u euklidskom prostoru. Zapravo, harmonijska evoluta tih ploha podudara se s njihovim fokalnim skupovima. Kod kvazi-umbiličkih ploha imamo samo jedan fokalni skup. Rezultati iz ovog poglavlja objavljeni su u ([48]). U sljedeća tri primjera dane su parametrizacije kvazi-umbiličkih ploha i njihovih harmonijskih evoluta.

Primjer 4.18 Helikoidalna ploha dana parametrizacijom

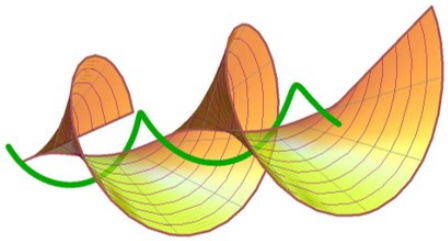
$$f(u,v) = (hv + u, u\cos v, u\sin v), \quad u,v \in \mathbb{R}, \tag{4.14}$$

je vremenska ploha za $h > 0$ jer vrijedi $EG - F^2 < 0$. Operator oblika plohe ima oblik

$$L_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -1 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

iz čega slijedi da je ploha (4.14) kvazi-umbilička. Glavne zakrivljenosti podudaraju se u svakoj točki i jednake su $\frac{1}{h}$. Srednja zakrivljenost plohe $f(u,v)$ je $H = \frac{1}{h} \neq 0$ i jedinična normala je $n(u,v) = \frac{1}{h}(-u, -u\cos v + h\sin v, -u\sin v - h\cos v)$. Harmonijska evoluta plohe (4.14) degenerira u krivulju, svjetlosnu zavojnicu (vidi sliku 4.3) i njena parametrizacija je

$$\bar{f}(v) = (hv, h\sin v, -h\cos v). \tag{4.15}$$



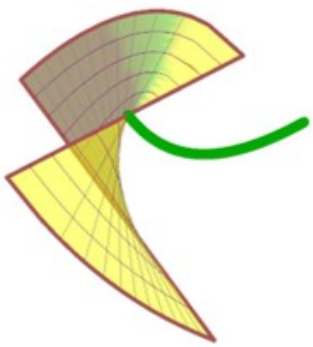
Slika 4.3: Helikoidalna pravčasta ploha (4.14) i njena harmonijska evoluta, svjetlosna zavojnica (4.15)

Primjer 4.19 Nul pravčasta ploha dana parametrizacijom

$$f(u,v) = (u,u,1) + v(u+1, u-1, 2\sqrt{u}), \quad u > 0, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

je pravčasta ploha sa svjetlosnim izvodnicama i sa svjetlosnom baznom krivuljom. Ova ploha za razliku od primjera 4.18 ima ne konstantnu srednju zakrivljenost $H = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Njena harmonijska evoluta je prostorna krivulja (vidi sliku 4.4)

$$\bar{f}(u) = (-u, -u, 1 - 2\sqrt{u}).$$



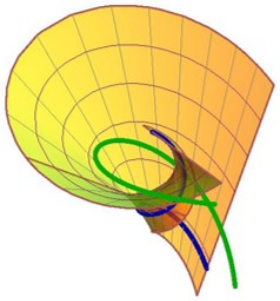
Slika 4.4: Ploha (4.16) i njena harmonijska evoluta koja je prostorna krivulja

Primjer 4.20 U ovom primjeru promatramo nul pravčastu plohu ([45]) s baznom krivuljom

$$a(u) = \left(u, -\frac{4}{c(1+c^2u^2)} - 2\frac{\ln(1+c^2u^2)}{c}, u + \frac{4u}{1+c^2u^2} - \frac{4}{c}\arctan(cu)\right), \tag{4.17}$$

gdje je c konstanta i izvodnicama $B(u) = (1, \sin\varphi(u)), \cos\varphi(u))$, gdje je $\varphi(u) = -2\,\mathrm{arccot}(cu)$. Srednja zakrivljenost ove plohe je $H = -c \in \mathbb{R}$. Njena harmonijska evoluta je svjetlosna krivulja (vidi sliku 4.5)

$$\bar{f}(u) = (2u, -\frac{3+2\ln(1+c^2u^2)}{c}, 2u - \frac{4}{c}\arctan(cu)). \tag{4.18}$$



Slika 4.5: Ploha s baznom krivuljom (4.17) (plava) i njena harmonijska evoluta (4.18) (zelena) koja je svjetlosna krivulja

Clelland u [10] je dokazala da su vremenske plohe s jednakim glavnim zakrivljenostima i nedijagonalizabilnim operatorom oblika plohe pravčaste plohe s baznom krivuljom i izvodnicama svjetlosnog tipa. Nadalje, prema ([29, 40]) znamo da sve takve plohe možemo reparametrizirati kao B-namotajne plohe (vidi poglavlje 1.2.4)

$$f(u,v) = c(u) + vB(u), \quad u \in I \subset \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}, \tag{4.19}$$

gdje je $c(u)$ svjetlosna krivulja parametrizirana istaknutim parametrom ($k_1 = 0$) i za svjetlosni trobrid $(A(u), B(u), C(u))$ vrijedi

$$c' = A,\ \langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0,\ \langle C, C\rangle = 1,\ \langle A, B\rangle = 1,\ \langle A, C\rangle = 0,\ \langle B, C\rangle = 0 \tag{4.20}$$

i Frenet-Serretove formule:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Sada ćemo izvesti parametrizaciju harmonijske evolute B-namotajne plohe.

Propozicija 4.21 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe dane parametrizacijom (4.19) kojoj je srednja zakrivljenost $H \neq 0$ je krivulja

$$\bar{f}(u) = c(u) + \frac{1}{k_3(u)}C(u). \tag{4.22}$$

Dokaz. Za B-namotajnu plohu parametriziranu kartom (4.19) vrijedi $f(u,v)_v = B(u)$ i $f(u,v)_u = A(u) + vk_3(u)C(u)$. Nadalje, budući da vrijedi $A \times B = C$ i $C \times B = -B$, onda Gaussovo preslikavanje ima oblik $n(u,v) = C(u) - vk_3(u)B(u)$. Komponente prve fundamentalne forme su $E = v^2k_3^2(u)$, $F = 1$, $G = 0$, komponente druge fundamentalne forme su $L = k_2(u) + vk_3'(u) + v^2k_3^3(u)$, $M = k_3(u)$, $N = 0$ i operator oblika plohe ima oblik

$$L_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} k_3(u) & 0 \\ k_2(u) + vk_3'(u) & k_3(u) \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Srednja zakrivljenost plohe (4.19) je $H(u,v) = k_3(u)$. Sada koristimo formulu za harmonijsku evolutu (4.2) iz čega slijedi da je harmonijska evoluta B-namotajne plohe krivulja

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= c(u) + vB(u) + \frac{1}{H(u)}(C(u) - vk_3(u)B(u)) \\ &= c(u) + \frac{1}{k_3(u)}C(u). \end{aligned}$$

□

Sljedeći teorem daje informaciju o kauzalnom karakteru harmonijske evolute B-namotajne plohe.

Teorem 4.22 Neka je $\mathbb{S}$ B-namotajna ploha s parametrizacijom (4.19) i neka je $H \neq 0$.

1. Harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}$ je svjetlosna krivulja ako i samo ako $\mathbb{S}$ ima konstantnu srednju zakrivljenost ($H = const.$).
2. Harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}$ je prostorna krivulja ako i samo ako $\mathbb{S}$ nema konstantnu srednju zakrivljenost ($H \neq const.$).

Dokaz. Da bi odredili kauzalni karakter krivulje (4.22) potrebno je prvo izračunati $\bar{f}_u$

$$\bar{f}_u = c' + (\frac{1}{k_3})'C + \frac{1}{k_3}C'.$$

Sada koristimo Frenet-Serretove formule (4.21)

$$\begin{aligned} \bar{f}_u &= c' + (\frac{1}{k_3})'C + \frac{1}{k_3}C' = A + (\frac{1}{k_3})'C + \frac{1}{k_3}(-k_3A - k_2B) \\ &= A + (\frac{1}{k_3})'C - A - \frac{k_2}{k_3}B = (\frac{1}{k_3})'C - \frac{k_2}{k_3}B. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Nadalje, iz formula (4.20) slijedi

$$\langle \bar{f}_u, \bar{f}_u \rangle = ((\frac{1}{k_3})')^2 = \frac{(k_3')^2}{(k_3)^4}.$$

Budući da je $H(u,v) = k_3(u)$ vrijedi tvrdnja teorema. □

Budući da je u primjerima 4.18 i 4.20 srednja zakrivljenost konstantna, onda po teoremu 4.22 vrijedi da je harmonijska evoluta svjetlosna krivulja, dok u primjeru 4.19 srednja zakrivljenost nije konstantna pa je njena harmonijska evoluta prostorna krivulja.

U nastavku, proučavat ćemo B-namotajne plohe s konstantnom srednjom zakrivljenošću, tj. B-namotajne plohe koje imaju svjetlosnu harmonijsku evolutu. Podsjetit ćemo se najprije definicije i nekih svojstava Bertrandovih krivulja u Minkowskijevom prostoru ([3, 29]).

Definicija 4.23 Neka su $\gamma(u)$ i $\gamma^*(u^*)$ dvije svjetlosne Frenetove krivulje sa svjetlosnim trobridom $(A(u), B(u), C(u))$ i $(A^*(u^*), B^*(u^*), C^*(u^*))$. Tada par (γ, γ^*) nazivamo svjetlosni Bertrandov par ako su polja glavnih normala C i C^* linearno zavisna u svakoj točki.

Krivulju γ^* nazivamo Bertrandov par (*eng.* Bertrand mate) od γ i obrnuto. Svjetlosna Frenetova krivulja je svjetlosna Bertrandova krivulja ako za nju postoji Bertrandov par. Prema definiciji 4.23, za svjetlosni Bertrandov par (γ, γ^*) postoji funkcijska veza $u^* = u^*(u)$ takva da vrijedi

$$C^*(u^*(u)) = \epsilon\, C(u), \quad \epsilon = \pm 1.$$

U ([3, 29]) je dokazan sljedeći teorem (teorem 2 u ([3]) i teorem 3.1 u ([29])):

Teorem 4.24 Svjetlosna Frenetova krivulja γ je Bertrandova krivulja ako i samo ako je svjetlosna geodetska ($k_2 = 0$) ili svjetlosna Frenetova krivulja kojoj je k_3 konstantno.

Nadalje, pokazano je da je produkt $k_2^*(u^*(u))k_2(u)$ od odgovarajućih zakrivljenosti konstantan i da je $k_3^*(u^*(u)) = k_3(u)$.

Ako je $f(u,v) = c(u) + vB(u)$ B-namotajna ploha konstantne srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom $c(u)$, onda iz dokaza propozicije 4.21 znamo da je zakrivljenost $k_3(u) = H = const. \neq 0$ i stoga po teoremu 4.24 vrijedi da je $c(u)$ svjetlosna Bertrandova krivulja. Štoviše, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 4.25 Neka je $f(u,v) = c(u) + vB(u)$ B-namotajna ploha konstantne srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom $c(u)$ i $\bar{f}(u) = c(u) + \dfrac{1}{k_3(u)}C(u)$ njena harmonijska evoluta. Tada

$$\bar{u}(u) = \lambda \int k_2(u)du, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \tag{4.25}$$

je istaknuti parametar harmonijske evolute. Štoviše, par $(c(u), \bar{f}(\bar{u}))$ je svjetlosni Bertrandov par.

Dokaz. Derivacija od (4.22), po parametru u je

$$\bar{A}\frac{d\bar{u}}{du} = -\frac{k_2}{H}B,$$

gdje $\bar{A}(\bar{u}) = \dfrac{d\bar{f}(\bar{u})}{d\bar{u}}$. Stoga iz (4.25) slijedi

$$\bar{A}(\bar{u}(u)) = -\frac{1}{\lambda H}B(u).$$

Binormalni vektor $\bar{B}$ harmonijske evolute je jedinstveni svjetlosni vektor ([29]) takav da zadovoljava uvjete

$$\langle \bar{A}, \bar{B}\rangle = 1,\ \langle \bar{A}', \bar{B}\rangle = 0.$$

Ako pretpostavimo $\bar{B}(\bar{u}(u)) = \alpha(u)A(u) + \beta(u)B(u) + \gamma(u)C(u)$, za neke C^1-funkcije $\alpha(u)$, $\beta(u)$ i $\gamma(u)$, onda iz prvog uvjeta slijedi $\alpha = -\lambda H$. Iz drugog uvjeta slijedi $\gamma = 0$ i budući da je B svjetlosni vrijedi $\beta = 0$. Stoga vrijedi,

$$\bar{B}(\bar{u}(u)) = -\lambda H A(u).$$

Nadalje, za $\bar{C}(\bar{u}(u))$ vrijedi $\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$,

$$\bar{C}(\bar{u}(u)) = -C(u). \tag{4.26}$$

Svjetlosni trobrid $(\bar{A}(\bar{u}), \bar{B}(\bar{u}), \bar{C}(\bar{u}))$ zadovoljava

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{u}} = \bar{A},\ \bar{A}' = \bar{k}_2\bar{C},\ \bar{B}' = \bar{k}_3\bar{C},\ \bar{C}' = -\bar{k}_3\bar{A} - \bar{k}_2\bar{B}$$

gdje je

$$\bar{k}_2(\bar{u}(u)) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{k_2(u)},$$
$$\bar{k}_3(\bar{u}(u)) = k_3(u) = H,$$

i stoga to je svjetlosni Frenetov trobrid za $\bar{f}(\bar{u})$. Iz definicije 4.23 i formule (4.26) slijedi da je $(c(u), \bar{f}(\bar{u}))$ svjetlosni Bertrandov par. □

Parametar duljine pseudo-luka i harmonijska evoluta

U ovom poglavlju proučavamo B-namotajne plohe s baznom krivuljom koja je parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka (vidi poglavlje 1.2.1). B-namotajne plohe kojima je $k_2 = 0$, odnosno c je geodetska krivulja i $k_3 = const.$ ne možemo parametrizirati na ovaj način. No iz operatora oblika plohe (4.23) jasno je da su takve plohe umbiličke plohe i njihova harmonijska evoluta prema (4.24) degenerira u točku.

Imajmo na umu da kada koristimo parametar duljine pseudo-luka, harmonijska evoluta $\bar{f}$ iz propozicije 4.21 od B-namotajne plohe ima oblik:

$$\bar{f}(u) = c(u) + \frac{1}{k_L(u)} C(u) \tag{4.27}$$

gdje je $k_3(u) = k_L(u) = \frac{1}{2}\langle c'''(u), c'''(u)\rangle$ svjetlosna zakrivljenost bazne krivulje $c(u)$. Za B-namotajnu plohu s baznom krivuljom parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka propozicija 4.25 je:

Propozicija 4.26 Neka je $f(u, v) = c(u) + vB(u)$ B-namotajna ploha konstantne srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom $c(u)$ parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka i neka je (4.27) njena harmonijska evoluta. Tada $(c(u), \bar{f}(u))$ je svjetlosni Bertrandov par.

Dokaz. Prva i druga derivacija od $\bar{f}(u)$ po parametru u su:

$$\bar{f}'(u) = A(u) + \frac{1}{k_L} C'(u) = -\frac{1}{k_L} B(u)$$
$$\bar{f}''(u) = -\frac{1}{k_L} B'(u) = -C(u).$$

Budući da je $\langle \bar{f}'', \bar{f}''\rangle = 1$, onda je $\bar{f} = \bar{f}(u)$ parametrizirana s parametrom duljine pseudo-luka i u je taj parametar. Kao posljedica gornjeg računa, slijedi da Frenetov trobrid od $\bar{f}$ je

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (-\frac{1}{k_L} B, -k_L A, -C)$$

gdje je (A, B, C) Frenetov trobrid od $c(u)$. Budući da vrijedi $\bar{C} = -C$ za sve u, onda slijedi da je $(c(u), \bar{f}(u))$ svjetlosni Bertrandov par. □

Korolar 4.27 Harmonijska evoluta $\bar{f}(u)$ B-namotajne plohe konstantne srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ i njena bazna krivulja $c(u)$ su kongruentne.

Korolar 4.28 Neka je $f(u, v) = c(u) + vB(u)$ B-namotajna ploha konstantne srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ nad svjetlosnom Frenetovom krivuljom $c(u)$ parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka. Svjetlosna zakrivljenost bazne krivulje $c(u)$ i svjetlosna zakrivljenost harmonijske evolute plohe $f(u, v)$ su iste, $k_L = \bar{k}_L = H$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je u parametar duljine pseudo-luka. Ako je $\bar{k}_L$ svjetlosna zakrivljenost od $\bar{f}$, onda je

$$\bar{k}_L = \langle \bar{B}', \bar{C} \rangle = k_L \langle A', C \rangle = k_L.$$

Iz čega slijedi da su $c(u)$ i $\bar{f}(u)$ kongruentne ([3, 29]). □

Krivulja c je opća svjetlosna zavojnica ako i samo ako je svjetlosna zavojnica ([15, 29]), tj. krivulja konstantne svjetlosne zakrivljenosti. Stoga, iz korolara 4.28 vrijedi:

Korolar 4.29 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe s baznom krivuljom parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka i konstantnom srednjom zakrivljenošću $H \neq 0$ je svjetlosna zavojnica.

Svjetlosnu zavojnicu parametriziranu parametrom duljine pseudo-luka možemo naći u ([15, 29]) i ona je kongruentna s jednom od sljedećih krivulja:

$$\begin{aligned}
c_1(u) &= \Big(-\frac{u}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sin(\sigma u), \frac{1}{\sigma^2}\cos(\sigma u)\Big), && k_L = \frac{\sigma^2}{2} > 0 \\
c_2(u) &= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\sinh(\sigma u), \frac{1}{\sigma^2}\cosh(\sigma u), -\frac{u}{\sigma}\Big), && k_L = -\frac{\sigma^2}{2} < 0 \\
c_3(u) &= \Big(\frac{u^3}{4} + \frac{u}{3}, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{4} - \frac{u}{3}\Big), && k_L = 0.
\end{aligned}$$

Krivulju $c_3(u)$ zovemo svjetlosna kubika. To je svjetlosna zavojnica sa svjetlosnom zakrivljenošću $k_L = 0$. Moramo je isključiti iz razmatranja jer u tom slučaju B-namotajna ploha nad njom ima $H = 0$ i u tom slučaju harmonijska evoluta degenerira u beskonačnost. Kao posljedica vrijedi sljedeći korolar:

Korolar 4.30 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe s baznom krivuljom parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka i konstantnom srednjom zakrivljenošću $H \neq 0$ je kongruentna sljedećim svjetlosnim krivuljama:

$$\begin{aligned}
c_1(u) &= \Big(-\frac{u}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sin(\sigma u), \frac{1}{\sigma^2}\cos(\sigma u)\Big), \\
c_2(u) &= \Big(\frac{1}{\sigma^2}\sinh(\sigma u), \frac{1}{\sigma^2}\cosh(\sigma u), -\frac{u}{\sigma}\Big).
\end{aligned}$$

Budući da bazna krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka B-namotajne plohe konstantne srednje zakrivljenosti tvori Bertrandov par s njegovom harmonijskom evolutom, one su također kongruentne krivuljama iz korolara 4.30.

Korolar 4.31 Izvodnice B-namotajne plohe konstantne srednje zakrivljenosti sa svjetlos-

nom baznom krivuljom parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka su:

$$B_1(u) = \Big(-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}\cos(\sigma u), -\frac{\sigma}{2}\sin(\sigma u)\Big),$$
$$B_2(u) = \Big(-\frac{\sigma}{2}\sin(\sigma u), -\frac{\sigma}{2}\cos(\sigma u), -\frac{\sigma}{2}\Big).$$

Dokaz. Neka je c svjetlosna krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka. Ako je (A, B, C) svjetlosni trobrid od c, onda iz Frenetovih formula vrijedi $A(u) = c'(u)$, $C(u) = c''(u)$ i $B(u) = -k_L A(u) - C'(u)$. Rezultat slijedi direktno iz parametrizacija u korolaru 4.30. □

U ([54]) te B-namotajne plohe su karakterizirane kao B-namotajne plohe konstantnog nagiba, odnosno kao pravčaste plohe sa svjetlosnim izvodnicama i svjetlosnom baznom krivuljom parametriziranom s parametrom duljine pseudo-luka za koje vrijedi $\langle B(u), q\rangle = const.$ za konstantan vektor q.

Korolar 4.32

1. Harmonijska evoluta B-namotajne plohe nad svjetlosnom zavojnicom $c_1(u)$ parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka i s binormalnim poljem $B_1(u)$ ima oblik:
$$\bar{f}_1(u) = \Big(-\frac{u}{\sigma}, -\frac{\sin(\sigma u)}{\sigma^2}, -\frac{\cos(\sigma u)}{\sigma^2}\Big).$$
Usporedi s primjerom 4.18.

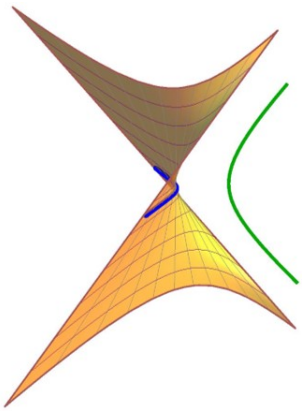
2. Harmonijska evoluta B-namotajne plohe nad svjetlosnom zavojnicom $c_2(u)$ parametriziranom parametrom duljine pseudo-luka i s binormalnim poljem $B_2(u)$ ima oblik:
$$\bar{f}_2(u) = \Big(-\frac{\sinh(\sigma u)}{\sigma^2}, -\frac{\cosh(\sigma u)}{\sigma^2}, -\frac{u}{\sigma}\Big).$$
Vidi sliku 4.6.

U nastavku se bavimo pitanjem kako B-namotajne plohe konstantne srednje zakrivljenosti rekonstruirati iz njene harmonijske evolute. Neka je $\bar{c}$ svjetlosna Frenetova krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka s pridruženim svjetlosnim trobridom $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ i konstantnom srednjom zakrivljenošću $\bar{k}_L$. Slijedi teorem:

Teorem 4.33 Svjetlosna krivulja $\bar{c}(u)$ s Frenetovim trobridom $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ je harmonijska evoluta A-namotajne plohe

$$f(u, v) = \Big(\bar{c}(u) + \frac{1}{\bar{k}_L}\bar{C}(u)\Big) + v\bar{A}(u). \tag{4.28}$$

Dokaz. Po definiciji, harmonijsku evolutu $\bar{f}(u, v)$ od plohe $f(u, v)$ možemo parametrizirati s (4.2). Gaussovo preslikavanje plohe (4.28) je $n(u, v) = \bar{C}(u) + v\bar{k}_L\bar{A}(u)$ i srednja



Slika 4.6: B-namotajna ploha s baznom krivuljom koja je svjetlosna zavojnica s negativnom svjetlosnom zakrivljenošću (plava) i njena harmonijska evoluta (zelena)

zakrivljenost je $H = -\bar{k}_L$. Stoga, njena harmonijska evoluta je

$$\begin{aligned}\bar{f}(u,v) &= f(u,v) + \frac{1}{H(u,v)}n(u,v)\\ &= \Big(\bar{c}(u) + \frac{1}{\bar{k}_L}\bar{C}(u)\Big) + v\bar{A}(u) - \frac{1}{\bar{k}_L}\Big(\bar{C}(u) + vk_L\bar{A}(u)\Big) = \bar{c}(u).\end{aligned}$$

□

Isti zaljučak možemo dobiti tako da definiramo baznu krivulju tražene B-namotajne plohe. Budući da bazna krivulja $c(u)$ i dana harmonijska evoluta $\bar{c}(u)$ tvore Bertrandov par, onda vrijedi

$$c(u) = \bar{c}(u) + \frac{1}{\bar{k}_L}\bar{C}(u).$$

Svjetlosna zakrivljenost bazne krivulje $c(u)$ je $k_L = \bar{k}_L$ i njeni svjetlosni Frenetov trobrid je $A(u) = -\dfrac{1}{k_L}\bar{B}(u)$, $B(u) = -k_L\bar{A}(u)$ i $C(u) = -\bar{C}(u)$. Stoga, odgovarajuća B-namotajna ploha je

$$f(u,v) = c(u) + vB(u) = \left(\bar{c}(u) + \frac{1}{\bar{k}_L}\bar{C}(u)\right) - vk_L\bar{A}(u).$$

Uvođenjem novog parametra $w = -vk_L$ parametrizacija (4.28) je ponovno dobivena.

4.1.5 Rekonstrukcija B-namotajne plohe iz prostorne krivulje

Do sada smo proučavali B-namotajne plohe s konstantnom srednjom zakrivljenošću, tj. B-namotajne plohe koje imaju svjetlosnu harmonijsku evolutu. Pokazali smo njihovu vezu s Bertrandovim krivuljama i pokazali smo kako od neke svjetlosne krivulje konstruirati plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. U nastavku cilj nam je proučavati kako

od neke prostorne krivulje konstruirati plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. Iz teorema 4.22 nam je poznato da te plohe nemaju konstantnu srednju zakrivljenost.

Neka je $\bar{f}(u) = c(u) + \frac{1}{H(u)}C(u)$ prostorna krivulja parametrizirana duljinom luka i neka je ona harmonijska evoluta B-namotajne plohe $f(u,v) = c(u) + vB(u)$. (A, B, C) je svjetlosni trobrid od $c(u)$, $H(u)$ je srednja zakrivljenost od $f(u,v)$ i u je istaknuti parametar od $c(u)$. Računamo derivaciju krivulje $\bar{f}(u)$

$$\bar{f}' = c' + (\frac{1}{H})'C + \frac{1}{H}C'.$$

Sada koristimo Frenet-Serretove formule (4.21)

$$\begin{aligned}\bar{f}' &= c' + (\frac{1}{H})'C + \frac{1}{H}C' = A + (\frac{1}{H})'C + \frac{1}{H}(-HA - k_2B)\\ &= A + (\frac{1}{H})'C - A - \frac{k_2}{H}B = (\frac{1}{H})'C - \frac{k_2}{H}B. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Iz formule (4.29) slijedi $\langle \bar{f}', \bar{f}' \rangle = \left(\left(\frac{1}{H}\right)'\right)^2$. Budući da je krivulja $\bar{f}(u)$ parametrizirana duljinom luka, onda vrijedi $\|\bar{f}\| = \sqrt{|\langle \bar{f}', \bar{f}' \rangle|} = \left|\left(\frac{1}{H}\right)'\right| = 1$, iz čega slijedi $\left(\frac{1}{H}\right)' = \pm 1$ i $\frac{1}{H} = \pm u + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je $\frac{1}{H} = u$.

Prema ([44, 75]) razlikujemo tri slučaja, kada je normala prostorna, vremenska i svjetlosna. Budući da su formule kod prostorne i vremenske normale analogne do na predznake zajedno ćemo ih promatrati.

Krivulja $\bar{f}(u)$ ima prostornu (vremensku) normalu.

Izračunat ćemo najprije Frenetov (Frenet-Serretov) trobrid $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ krivulje $\bar{f}(u)$. Tangencijalno polje $\bar{t}$ ima oblik $\bar{t} = \bar{f}' = C - k_2 u B$. Zakrivljenost κ dana je formulom $\kappa = \|\bar{f}''\| = \|\bar{t}'\| = \sqrt{|\langle \bar{t}', \bar{t}' \rangle|}$ i normalno polje računamo po formuli $\bar{n} = \frac{\bar{f}''}{\|\bar{f}''\|} = \frac{\bar{f}''}{\kappa}$. Druga derivacija od $\bar{f}$ je

$$\bar{f}'' = \bar{t}' = C' - (k_2 u)'B - k_2 u B' = -\frac{1}{u}A - (k_2' u + 2k_2)B - k_2 C.$$

Polje vektora glavnih normala je

$$\bar{n} = \frac{1}{\kappa}\Big(-\frac{1}{u}A - (k_2' u + 2k_2)B - k_2 C\Big).$$

Označimo s $\epsilon = \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle = \pm 1$. Ako krivulja $\bar{f}(u)$ ima prostornu normalu, onda je $\epsilon = 1$, a ako ima vremensku, onda je $\epsilon = -1$. Nadalje, budući da vrijedi

$$A \times B = C, \;\; B \times C = B, \;\; C \times A = A,$$

onda je binormalno polje dano formulom

$$\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} = \frac{1}{\kappa}\Big(-\frac{1}{u}A + (k_2' u + 2k_2 + k_2^2 u)B - k_2 C\Big).$$

Računamo sada svjetlosni trobrid (A, B, C). Neka je $C = \alpha\bar{t} + \beta\bar{n} + \gamma\bar{b}$. Jednostavnim računom slijedi da su traženi koeficijenti α, β i γ jednaki

$$\alpha = \langle C, \bar{t} \rangle = 1, \;\; \beta = \epsilon\langle C, \bar{n} \rangle = -\epsilon\frac{k_2}{\kappa}, \;\; \gamma = -\epsilon\langle C, \bar{b} \rangle = \epsilon\frac{k_2}{\kappa}.$$

Stoga, vektor C ima oblik

$$C = \bar{t} - \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n} - \bar{b}).$$

Polje B odredit ćemo iz formule (4.29)

$$B = \frac{\epsilon}{uk_2}(C - \bar{f}') = \frac{\epsilon}{uk_2}\Big(\bar{t} - \frac{k_2}{\kappa}(\bar{n} - \bar{b}) - \bar{t}\Big) = -\frac{\epsilon}{u\kappa}(\bar{n} - \bar{b}).$$

Na kraju cilj nam je odrediti polje $A = \xi\bar{t} + \eta\bar{n} + \rho\bar{b}$. Koeficijente ξ, η i ρ odredit ćemo iz uvjeta da je (A, B, C) svjetlosna baza, odnosno iz uvjeta $\langle A, B \rangle = 1$, $\langle A, C \rangle = 0$ i $\langle A, A \rangle = 0$:

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle = 1 \quad &\Longrightarrow \quad -\eta\frac{1}{u\kappa} - \rho\frac{1}{u\kappa} = 1 \\
\langle A, C \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \xi - \frac{k_2}{\kappa}\eta - \rho\frac{k_2}{\kappa} = 0 \\
\langle A, A \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \xi^2 + \epsilon\eta^2 - \epsilon\rho^2 = 0.
\end{aligned}$$

Rješavanjem dobivenog sustava dobivamo tražene koeficijente $\xi = -uk_2$, $\eta = \dfrac{u(-\kappa^2 + \epsilon k_2^2)}{2\kappa}$ i $\rho = -\dfrac{u(\epsilon k_2^2 + \kappa^2)}{2\kappa}$ i traženi vektor

$$A = -u\Big(k_2\bar{t} + \frac{1}{2}\Big(\kappa - \epsilon\frac{k_2^2}{\kappa}\Big)\bar{n} + \frac{1}{2}\Big(\kappa + \epsilon\frac{k_2^2}{\kappa}\Big)\bar{b}\Big).$$

Teorem 4.34 Neka je $\bar{f}(u)$ prostorna krivulja s prostornom (vremenskom) normalom parametrizirana parametrom duljine luka i neka je $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ njen Frenetov trobrid i κ

zakrivljenost. Krivulja $\bar{f}(u)$ je harmonijska evoluta kvazi-umbiličke plohe

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \bar{f}(u) - uC(u) + vB(u) \\ &= \bar{f}(u) - u\Big(\bar{t} - \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n}-\bar{b})\Big) - v\frac{\epsilon}{u\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

gdje je zakrivljenost k_2 proizvoljna i $\epsilon = \langle \bar{n}, \bar{n}\rangle = \pm 1$.

Dokaz. Po definiciji harmonijsku evolutu $\bar{f}(u,v)$ plohe $f(u,v)$ možemo parametrizirati s (4.2). Gaussovo preslikavanje plohe (4.30) je $n(u,v) = \bar{t} + \epsilon\frac{v}{u^2\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) + \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{b}-\bar{n})$ i srednja zakrivljenost je $H = \frac{1}{u}$. Stoga, njena harmonijska evoluta je

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= f(u,v) + \frac{1}{H(u,v)}n(u,v) \\ &= \bar{f}(u) - u\Big(\bar{t} - \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n}-\bar{b})\Big) - v\frac{\epsilon}{u\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) + u\Big(\bar{t} + v\frac{\epsilon}{u^2\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) + \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{b}-\bar{n})\Big) \\ &= \bar{f}(u). \end{aligned}$$

□

Sada ćemo iz zadane prostorne krivulje konstruirati kvazi-umbiličku plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta.

Primjer 4.35 Krivulja

$$\bar{f}(u) = (u, \sin u - \cos u, \cos u + \sin u) \tag{4.31}$$

je prostorna krivulja s prostornom normalom i s Frenetovim trobridom:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (1, \cos u + \sin u, \cos u - \sin u), \\ \bar{n} &= \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u - \sin u), -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u + \sin u)\Big), \\ \bar{b} &= \Big(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u + \sin u), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u - \sin u)\Big), \end{aligned}$$

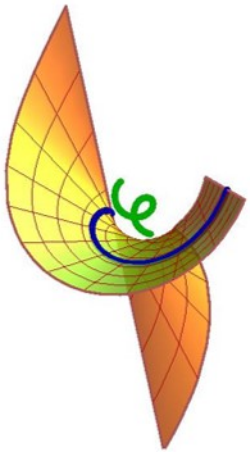
zakrivljenošću $\kappa = \sqrt{2}$ i torzijom $\tau = 1$. Budući da su zakrivljenost i torzija konstantne, onda vrijedi da je krivulja $\bar{f}(u)$ obična cilindrična spirala (euklidskog tipa). Jednostavnim računom se pokaže da je krivulja (4.31) harmonijska evoluta kvazi-umbiličke plohe

$$\begin{aligned} f(u,v) = \Big(&- k_2 u + \frac{v}{u}, -(1+u)\cos u + \sin u - (1+k_2)u\sin u + \frac{v\sin u}{u}, \\ &- (-1+u+k_2u)\cos u + \frac{v\cos u}{u} + (1+u)\sin u\Big). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Na slici (4.7) prikazana je ploha

$$f(u,v) = \Big(2+\frac{v}{u}-\sqrt{2}u\tanh\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big), -(1+u)\cos u+\frac{v\sin u}{u}-\sin u\Big(-3+u+\sqrt{2}u\tanh\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big)\Big),$$
$$\frac{v\cos u}{u}+(1+u)\sin u-\cos u\Big(-3+u+\sqrt{2}u\tanh\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big)\Big)\Big) \tag{4.33}$$

koja se dobije za $k_2 = -\dfrac{2}{u}+\sqrt{2}\tanh\Big(\dfrac{u}{\sqrt{2}}\Big)$.



Slika 4.7: Kvazi-umbilička ploha (4.33) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.31) (zelena)

Primjer 4.36 Obična cilindrična hiperbolična spirala

$$\bar{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh u, \sinh u, u) \tag{4.34}$$

je prostorna krivulja s vremenskom normalom i s Frenetovim trobridom

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh u, \cosh u, 1),$$
$$\bar{n} = (\cosh u, \sinh u, 0),$$
$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh u, \cosh u, -1),$$

zakrivljenošću $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ i torzijom $\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Jednostavnim računom se pokaže da je krivulja (4.34) harmonijska evoluta kvazi-umbiličke plohe $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, gdje je

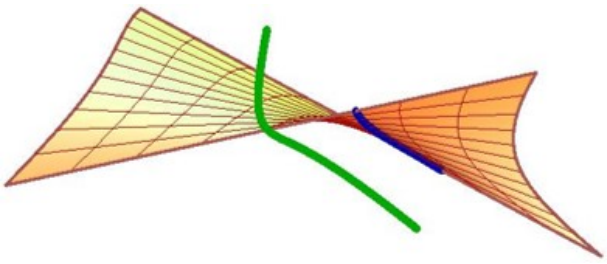
$$x(u,v) = \frac{v(\sqrt{2}\cosh u - \sinh u)}{u} + k_2 u(-\sqrt{2}\cosh u + \sinh u) + \frac{\cosh u - u\sinh u}{\sqrt{2}}$$
$$y(u,v) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + k_2\Big)u\cosh u + \frac{(1-2k_2u)\sinh u}{\sqrt{2}} + \frac{v(-\cosh u + \sqrt{2}\sinh u)}{u}$$

$$z(u,v) = -k_2 u + \frac{v}{u}.$$

Na slici (4.8) prikazana je ploha

$$\begin{aligned} f(u,v) = &\Big(\frac{1}{2u}\Big(\cosh u\Big(\sqrt{2}(5u+2v)+2u^2\tan\Big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)\Big)-\sinh u\Big(4u+2v+\sqrt{2}u^2\Big(1+\tan\Big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)\Big)\Big)\Big),\\ &\frac{1}{2u}\Big(\sinh u\Big(\sqrt{2}(5u+2v)+2u^2\tan\Big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)\Big)-\cosh u\Big(4u+2v+\sqrt{2}u^2\Big(1+\tan\Big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)\Big)\Big)\Big),\\ &2+\frac{v}{u}+\frac{u}{\sqrt{2}}\tan\Big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{4.35}$$

koja se dobije za $k_2 = -\frac{2}{u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\big(\frac{u}{2\sqrt{2}}\big)$.



Slika 4.8: Kvazi-umbilička ploha (4.35) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.34) (zelena)

Uočimo da smo od zadane prostorne krivulje u teoremu 4.34 i u primjerima 4.35 i 4.36 rekonstruirali kvazi-umbiličku plohu, a ne B-namotajnu. Smjer izvodnice tražene plohe $f(u,v)$ određen je vektorskim poljem B, ali bazna krivulja $\bar{f}(u) - uC$ nije nužno svjetlosnog karaktera. Primjer, za baznu krivulju plohe (4.32) vrijedi da joj je kauzalni karakter jednak izrazu $u(2u + k_2(-2 + 2u + uk_2) - 2uk_2')$, što znači da krivulja može biti bilo kojeg kauzalnog tipa. Prema ([29]) sve pravčaste plohe s prostornom ili vremenskom baznom krivuljom i svjetlosnim izvodnicama mogu se reparametrizirati kao nul pravčaste plohe, a onda i kao B-namotajne plohe ([55]). Ovdje nećemo raditi reparametrizaciju dobivene kvazi-umbiličke plohe na B-namotajnu nego ćemo istražiti koji uvjet je potrebno zadovoljiti da dobivena ploha ne bude kvazi-umbilička nego B-namotajna.

Iz $\bar{f}(u) = c(u)+uC(u)$ nam je poznato da je bazna krivulja tražene plohe $c(u) = \bar{f}(u) - uC(u)$. Njeno tangencijalno polje je

$$\begin{aligned} c'(u) &= \bar{f}'(u) - C(u) - uC'(u)\\ &= \bar{t} - \bar{t} + \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) - u\Big(\bar{t}' - \epsilon\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)'(\bar{n}-\bar{b}) - \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n}'-\bar{b}')\Big)\\ &= \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(\bar{n}-\bar{b}) - u\Big(\kappa\bar{n} - \epsilon\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)'(\bar{n}-\bar{b}) - \epsilon\frac{k_2}{\kappa}(-\epsilon\kappa\bar{t} + \tau\bar{b} - \tau\bar{n})\Big) \end{aligned}$$

$$= -uk_2\bar{t} + \Big(\epsilon\frac{k_2}{\kappa} - u\kappa + \epsilon u\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)' - \epsilon u\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)\tau\Big)\bar{n} + \Big(-\epsilon\frac{k_2}{\kappa} - \epsilon u\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)' + \epsilon u\frac{k_2}{\kappa}\tau\Big)\bar{b}.$$

Ako želimo dobiti B-namotajnu plohu $f(u,v) = c(u) + vB(u)$ kojoj bazna krivulja $c(u)$ ima svjetlosni trobrid (A,B,C) potrebno je još zadovoljiti uvjet $A = c'(u)$, odnosno potrebno je zadovoljiti sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$-\frac{u}{2}\Big(\kappa - \epsilon\frac{k_2^2}{\kappa}\Big) = \epsilon\frac{k_2}{\kappa} - u\kappa + \epsilon u\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)' - \epsilon u\Big(\frac{k_2}{\kappa}\Big)\tau. \tag{4.36}$$

Sređivanjem te jednadžbe dobivamo Riccatijevu jednadžbu

$$k_2' = \frac{1}{2}k_2^2 - \Big(\frac{1}{u} - \tau - \frac{\kappa'}{\kappa}\Big)k_2 + \frac{\epsilon}{2}\kappa^2. \tag{4.37}$$

Korolar 4.37 Neka je $\bar{f}(u)$ prostorna krivulja s prostornom (vremenskom) normalom parametrizirana parametrom duljine luka i neka je $(\bar{t},\bar{n},\bar{b})$ njen Frenetov trobrid i κ zakrivljenost, a τ torzija. Krivulja $\bar{f}(u)$ je harmonijska evoluta B-namotajne plohe

$$f(u,v) = \int A(u)du + vB(u). \tag{4.38}$$

ako i samo ako zakrivljenost k_2 je rješenje diferencijalne jednadžbe (4.37)

$$k_2' = \frac{1}{2}k_2^2 - \Big(\frac{1}{u} - \tau - \frac{\kappa'}{\kappa}\Big)k_2 + \frac{\epsilon}{2}\kappa^2, \quad \epsilon = \langle\bar{n},\bar{n}\rangle = \pm 1.$$

Korolar 4.38 Neka je $\bar{f}(u)$ prostorna krivulja s prostornom (vremenskom) normalom parametrizirana parametrom duljine luka i neka je $f(u,v)$ B-namotajna ploha (4.38) rekonstruirana iz $\bar{f}(u)$. Zakrivljenost κ i torzija τ krivulje $\bar{f}(u)$ i zakrivljenosti k_2 i $k_3 = H$ plohe $f(u,v)$ povezane su formulom

$$k_2' = \frac{1}{2}k_2^2 - \Big(H - \tau - \frac{\kappa'}{\kappa}\Big)k_2 + \frac{\epsilon}{2}\kappa^2, \quad \epsilon = \langle\bar{n},\bar{n}\rangle = \pm 1.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz jednadžbe (4.37). □

Krivulja $\bar{f}(u)$ ima svjetlosnu normalu.

Neka je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja sa zakrivljenošću $\kappa = 1$ i pseudo-torzijom τ. Računamo najprije Frenetov trobrid $(\bar{t},\bar{n},\bar{b})$ krivulje $\bar{f}(u)$. Za razliku od prijašnjih slučajeva gdje je $(\bar{t},\bar{n},\bar{b})$ ortonormirana baza, ovdje je $(\bar{t},\bar{n},\bar{b})$ svjetlosna baza. Za više detalja vidi poglavlje 1.2.1 ili [44, 67, 75]. Tangencijalno polje krivulje $\bar{f}(u)$ ima oblik $\bar{t} = \bar{f}' = C - k_2uB$, dok normalno polje $\bar{n}$ je dano formulom

$$\bar{n} = \bar{f}'' = C' - (k_2u)'B - k_2uB' = -\frac{1}{u}A - (k_2'u + 2k_2)B - k_2C.$$

Označimo koeficijent uz B s x, $x = k_2'u + 2k_2$. Iz uvjeta da je normala $\bar{n}$ svjetlosni vektor vrijedi $\langle \bar{n}, \bar{n} \rangle = \dfrac{2}{u}x + k_2^2 = 0$, odnosno vrijedi da je $x = -\dfrac{u}{2}k_2^2$, iz čega slijedi da je polje vektora glavnih normala dano formulom

$$\bar{n} = -\frac{1}{u}A + \frac{u}{2}k_2^2 B - k_2 C.$$

Binormalno polje $\bar{b} = \alpha A + \beta B + \gamma C$ računamo iz uvjeta da je trobrid $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ svjetlosna baza, odnosno iz uvjeta $\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = 0$, $\langle \bar{n}, \bar{b} \rangle = 1$ i $\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle = 0$:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2\alpha\beta + \gamma^2 = 0 \\
\langle \bar{n}, \bar{b} \rangle = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha\frac{u}{2}k_2^2 - \beta\frac{1}{u} - \gamma k_2 = 1 \\
\langle \bar{b}, \bar{t} \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -uk_2\alpha + \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava slijedi da je $\alpha = 0$, $\beta = -u$ i $\gamma = 0$, odnosno slijedi $\bar{b} = -uB$. Računamo sada svjetlosni trobrid (A, B, C). Iz binormalnog polja krivulje $\bar{b} = -uB$ slijedi polje $B = -\dfrac{1}{u}\bar{b}$. Računamo polje $C = \xi\bar{t} + \eta\bar{n} + \rho\bar{b}$. Jednostavnim računom slijedi da su traženi koeficijent ξ, η i ρ jednaki

$$\xi = \langle C, \bar{t} \rangle = 1, \;\; \eta = \langle C, \bar{b} \rangle = 0, \;\; \rho = \langle C, \bar{n} \rangle = -k_2,$$

odnosno slijedi da je

$$C = \bar{t} - k_2\bar{b}.$$

Na kraju cilj nam je odrediti polje $A = \xi^*\bar{t} + \eta^*\bar{n} + \rho^*\bar{b}$. Koeficijente ξ^*, η^* i ρ^* odredit ćemo iz uvjeta da je (A, B, C) svjetlosna baza, odnosno iz uvjeta $\langle A, B \rangle = 1$, $\langle A, C \rangle = 0$ i $\langle A, A \rangle = 0$ iz kojih slijedi sustav:

$$\begin{aligned}
\langle A, B \rangle = 1 \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{\eta^*}{u} = 1 \\
\langle A, C \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \xi^* - k_2\eta^* = 0 \\
\langle A, A \rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \xi^{*2} + 2\eta^*\gamma^* = 0.
\end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\xi^* = -uk_2$, $\eta^* = -u$ i $\rho^* = \dfrac{u}{2}k_2^2$ i traženi vektor A je

$$A = -uk_2\bar{t} - u\bar{n} + \frac{u}{2}k_2^2\bar{b}.$$

Teorem 4.39 Neka je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja parametrizirana parametrom duljine luka i neka je $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ njeni svjetlosni trobrid. Krivulja $\bar{f}(u)$ je harmonijska evoluta

kvazi-umbiličke plohe

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \bar{f}(u) - uC(u) + vB(u) \\ &= \bar{f}(u) - u\bar{t} + uk_2\bar{b} - \frac{v}{u}\bar{b}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

gdje je zakrivljenost k_2 proizvoljna.

Dokaz. Po definiciji harmonijsku evolutu $\bar{f}(u,v)$ plohe $f(u,v)$ možemo parametrizirati s (4.2). Gaussovo preslikavanje plohe (4.39) je $n(u,v) = \bar{t} - \left(k_2 - \frac{v}{u^2}\right)\bar{b}$ i srednja zakrivljenost je $H = \frac{1}{u}$. Stoga, njena harmonijska evoluta je

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= f(u,v) + \frac{1}{H(u,v)}n(u,v) \\ &= \bar{f}(u) - u\bar{t} + uk_2\bar{b} - \frac{v}{u}\bar{b} + u\left(\bar{t} - \left(k_2 - \frac{v}{u^2}\right)\bar{b}\right) \\ &= \bar{f}(u). \end{aligned}$$

□

Primjer 4.40 Autor u ([75]) je dokazao da su jedine pseudo-nul prostorne krivulje s pseudo-torzijom $\tau = const. \neq 0$ krivulje s parametrizacijom

$$\bar{f}(u) = \frac{1}{\tau}(\cosh(\tau u) + \sinh(\tau u), \tau^2 u, \cosh(\tau u) + \sinh(\tau u)). \tag{4.40}$$

Svjetlosni trobrid $(\bar{t},\ \bar{n},\ \bar{b})$ krivulje $\bar{f}(u)$ je

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \left(\frac{\cosh(\tau u) + \sinh(\tau u)}{\tau}, 1, \frac{\cosh(\tau u) + \sinh(\tau u)}{\tau}\right), \\ \bar{n} &= \Big(\cosh(\tau u) + \sinh(\tau u), 0, \cosh(\tau u) + \sinh(\tau u)\Big), \\ \bar{b} &= \left(\frac{-(1+\tau^2)\cosh(\tau u) + (-1+\tau^2)\sinh\tau u)}{2\tau^2}, -\frac{1}{\tau}, \frac{(-1+\tau^2)\cosh(\tau u) - (1+\tau^2\sinh(\tau u)}{2\tau^2}\right). \end{aligned}$$

Korištenjem formule (4.39) slijedi da prostorna krivulja $\bar{f}(u)$ dana parametrizacijom (4.40) je harmonijska evoluta kvazi-umbiličke plohe

$$\begin{aligned} f(u,v) = \Bigg(&\frac{e^{-u\tau}\left(\left(k_2u^2+v\right)\tau^2 + e^{2u\tau}(v + u(2 + k_2u - 2u\tau))\right)}{2u\tau^2}, \frac{k_2u^2+v}{u\tau}, \\ &\frac{e^{-u\tau}\left(-\left(k_2u^2+v\right)\tau^2 + e^{2u\tau}(v + u(2 + k_2u - 2u\tau))\right)}{2u\tau^2}\Bigg) \end{aligned}$$

gdje je zakrivljenost k_2 proizvoljna.

Sljedeći cilj nam je istražiti koji uvjet je potrebno zadovoljiti da tražena ploha ne bude kvazi-umbilička nego B-namotajna. Iz definicije harmonijske evolute $\bar{f}(u) = c(u) + uC(u)$

nam je poznato da je bazna krivulja tražene plohe $c(u) = \bar{f}(u) - uC(u)$. Njeno tangencijalno polje je

$$\begin{aligned} c'(u) &= \bar{f}(u) - C - uC' \\ &= \bar{t} - \bar{t} + k_2\bar{b} - u\Big(\bar{t}' - k_2'\bar{b} - k_2\bar{b}'\Big) \\ &= k_2\bar{b} - u\Big(\bar{n} - k_2'\bar{b} - k_2(-\bar{t} - \tau\bar{b})\Big) \\ &= -uk_2\bar{t} - u\bar{n} + \Big(k_2 + uk_2' - uk_2\tau\Big)\bar{b}. \end{aligned}$$

Ako želimo dobiti B-namotajnu plohu $f(u,v) = c(u) + vB(u)$ kojoj bazna krivulja $c(u)$ ima svjetlosni trobrid (A, B, C) potrebno je još zadovoljiti uvjet $A = c'(u)$, odnosno potrebno je zadovoljiti sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{u}{2}k_2^2 = k_2 + uk_2' - uk_2\tau. \tag{4.41}$$

Sređivanjem te jednadžbe dobivamo Bernoullijevu jednadžbu koja je poseban slučaj Riccatijeve jednadžbe

$$k_2' = \frac{1}{2}k_2^2 - \Big(\frac{1}{u} - \tau\Big)k_2. \tag{4.42}$$

Teorem 4.41 Neka je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja sa pseudo-torzijom τ i neka je $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ njen Frenetov trobrid. Krivulja $\bar{f}(u)$ je harmonijska evoluta B-namotajne plohe

$$f(u,v) = c(u) + vB(u) = \int A(u)du - v\frac{1}{u}\bar{b}, \tag{4.43}$$

gdje je zakrivljenost k_2 rješenje jednadžbe $k_2' = \frac{1}{2}k_2^2 - \Big(\frac{1}{u} - \tau\Big)k_2$.

Dokaz. Po definiciji, harmonijsku evolutu $\bar{f}(u,v)$ od plohe $f(u,v)$ možemo parametrizirati s (4.2). Gaussovo preslikavanje plohe (4.43) je $n(u,v) = \bar{t} - (k_2 - \frac{v}{u^2})\bar{b}$ i srednja zakrivljenost je $H = \frac{1}{u}$. Stoga, njena harmonijska evoluta je

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= f(u,v) + \frac{1}{H(u,v)}n(u,v) \\ &= \int A(u)du - v\frac{1}{u}\bar{b} + u\Big(\bar{t} - (k_2 - \frac{v}{u^2})\bar{b}\Big) \\ &= c(u) + u\Big(\bar{t} - k_2\bar{b}\Big) = c(u) + uC = \bar{f}(u). \end{aligned}$$

□

Korolar 4.42 Neka je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja sa pseudo-torzijom τ. Nadalje, neka je $f(u,v)$ B-namotajna ploha (4.43) rekonstruirana iz $\bar{f}(u)$. Zakrivljenost κ i pseudo-

torzija τ krivulje $\bar{f}(u)$ i zakrivljenosti k_2 i $k_3 = H$ plohe $f(u,v)$ povezane su formulom

$$\tau = -\frac{k_2}{2} + H + \frac{k_2'}{k_2}.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz jednadžbe (4.42). □

Odlomak ćemo završiti s dva primjera.

Primjer 4.43 Neka je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja

$$\bar{f}(u) = \Big(\frac{u^3}{12}, \frac{u^3+12u}{12\sqrt{2}}, \frac{u^3-12u}{12\sqrt{2}}\Big) \tag{4.44}$$

sa pseudo-torzijom $\tau = \dfrac{1}{u}$ i svjetlosnim trobridom

$$\bar{t} = \Big(\frac{u^2}{4}, \frac{4+u^2}{4\sqrt{2}}, \frac{-4+u^2}{4\sqrt{2}}\Big)$$
$$\bar{n} = \Big(\frac{u}{2}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}\Big)$$
$$\bar{b} = \Big(-\frac{16+u^4}{16u}, -\frac{-16+8u^2+u^4}{16\sqrt{2}u}, -\frac{-16-8u^2+u^4}{16\sqrt{2}u}\Big).$$

Da bi mogli koristiti formulu (4.43) potrebno je prvo odrediti k_2. Rješavanjem jednadžbe (4.42) slijedi da je zakrivljenost $k_2 = -\dfrac{2}{u+2c_1}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ ili $k_2 = 0$. Promotrimo prvo slučaj kada je $k_2 = -\dfrac{2}{u+2c_1}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c_1 = 0$. Svjetlosni trobrid (A, B, C) bazne krivulje $c(u)$ B-namotajne plohe ima oblik:

$$A = \Big(-\frac{16+u^4}{8u^2}, -\frac{-16-8u^2+u^4}{8\sqrt{2}u^2}, -\frac{-16+8u^2+u^4}{8\sqrt{2}u^2}\Big)$$
$$B = \Big(\frac{1}{u^2} + \frac{u^2}{16}, \frac{-16+8u^2+u^4}{16\sqrt{2}u^2}, \frac{-16-8u^2+u^4}{16\sqrt{2}u^2}\Big)$$
$$C = \Big(\frac{-16+u^4}{8u^2}, \frac{16+u^4}{8\sqrt{2}u^2}, \frac{16+u^4}{8\sqrt{2}u^2}\Big).$$

Budući da imamo sve potrebno, onda možemo koristiti formulu (4.43) iz koje slijedi da je tražena B-namotajna ploha dana parametrizacijom (vidi sliku 4.9 (lijevo))

$$f(u,v) = \Big(\frac{96u - 2u^5 + 48v + 3u^4v}{48u^2}, \frac{-2u(48-24u^2+u^4) + 3(-16+8u^2+u^4)v}{48\sqrt{2}u^2},$$
$$\frac{-2u(48+24u^2+u^4) + 3(-16-8u^2+u^4)v}{48\sqrt{2}u^2}\Big). \tag{4.45}$$

Ako je $k_2 = 0$, onda svjetlosni trobrid (A, B, C) bazne krivulje B-namotajne plohe ima

oblik

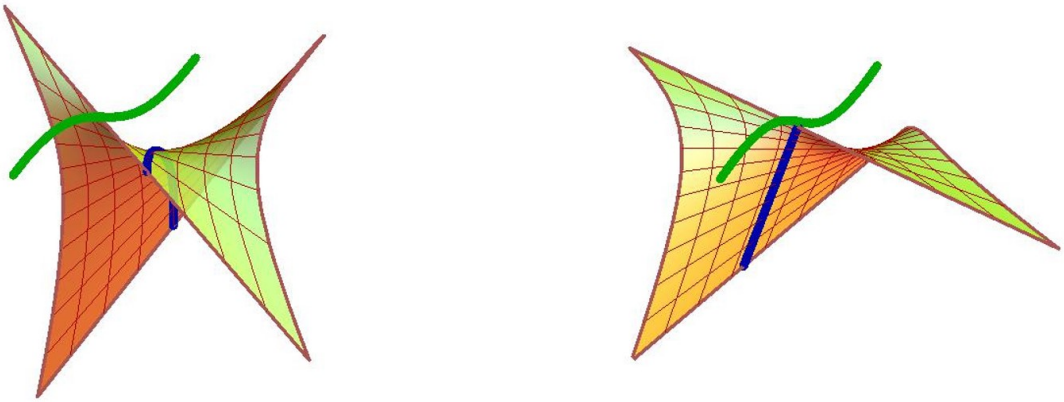
$$A = \Big(-\frac{u^2}{2}, -\frac{u^2}{2\sqrt{2}}, -\frac{u^2}{2\sqrt{2}} \Big)$$
$$B = \Big(\frac{1}{u^2} + \frac{u^2}{16}, \frac{-16 + 8u^2 + u^4}{16\sqrt{2}u^2}, \frac{-16 - 8u^2 + u^4}{16\sqrt{2}u^2} \Big)$$
$$C = \Big(\frac{u^2}{4}, \frac{4 + u^2}{4\sqrt{2}}, \frac{-4 + u^2}{4\sqrt{2}} \Big).$$

Korištenjem formule (4.43) dobivamo traženu B-namotajnu plohu (vidi sliku 4.9 (desno))

$$f(u,v) = \Big(-\frac{u^3}{6} + \frac{v}{u^2} + \frac{u^2 v}{16}, \frac{-8u^5 + 3(-16 + 8u^2 + u^4)v}{48\sqrt{2}u^2}, \frac{-8u^5 + 3(-16 - 8u^2 + u^4)v}{48\sqrt{2}u^2} \Big). \tag{4.46}$$

Nadalje, uočimo da je u ovom slučaju dodatno zadovoljen uvjet $\langle A, \bar{t} \rangle = 0$ što znači da je bazna krivulja $c(u) = \int A(u)du$ B-namotajne plohe involuta polazne krivulje $\bar{f}(u)$.

Na slici 4.9 lijevo prikazana je B-namotajna ploha (4.45), a desno ploha (4.46). Plohe su rekonstruirane iz svoje harmonijske evolute (4.44), zelene krivulje.



Slika 4.9: B-namotajna ploha (4.45) (lijevo) i (4.46) (desno) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.44) (zelena)

Iz primjera 4.43 možemo uočiti da od iste polazne krivulje možemo konstruirati različite plohe kojima je ta krivulja harmonijska evoluta. Iako svaka B-namotajna ploha ima jedinstvenu harmonijsku evolutu, obrat ne vrijedi. Od iste krivulje možemo konstruirati različite B-namotajne plohe.

Korolar 4.44 Ako je $\bar{f}(u)$ pseudo-nul prostorna krivulja i $f(u,v)$ B-namotajna ploha rekonstruirana od $\bar{f}(u)$ pomoću formule (4.43), onda $f(u,v)$ nije jedinstvena ploha.

Autori u ([68]) su pokazali da dvije B-namotajne plohe koje imaju jednake k_3 su lokalno izometrične. Što znači da su dobivene plohe (4.45) i ploha (4.46) lokalno izometrične.

Nadalje, budući da im je B jednak, one su izometrične u Mindingovom smislu (čuvaju se izvodnice).

Autor u ([75]) je dokazao da je jedina pseudo-nul prostorna krivulja s pseudo-torzijom $\tau = 0$ krivulja s parametrizacijom

$$\bar{f}(u) = \left(\frac{u^2}{2}, u, \frac{u^2}{2}\right). \tag{4.47}$$

Sada ćemo rekonstruirati B-namotajnu plohu kojoj je krivulja (4.47) harmonijska evoluta.

Primjer 4.45 Svjetlosni trobrid $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ krivulje $\bar{f}(u)$ dane parametrizacijom (4.47) je

$$\begin{aligned}\bar{t} &= (u, 1, u),\\ \bar{n} &= (1, 0, 1),\\ \bar{b} &= \left(-\frac{1}{2}(1+u^2), -u, \frac{1}{2}(1-u^2)\right).\end{aligned}$$

Da bi mogli koristiti formulu (4.43) potrebno je još odrediti zakrivljenost k_2. Rješavanjem jednadžbe (4.42) slijedi da je $k_2 = \dfrac{2}{u(2c_1 - \ln u)}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ ili $k_2 = 0$. Promotrimo prvo slučaj kada je $k_2 = \dfrac{2}{u(2c_1 - \ln u)}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je $c_1 = 0$ iz čega slijedi da je $k_2 = -\dfrac{1}{u \ln u}$. Sada imamo sve potrebno za korištenje jednadžbe (4.43) iz koje slijedi da tražena ploha ima oblik

$$f(u,v) = \left(\frac{-u^3 + v + u^2 v}{2u} + \frac{1+u^2}{\ln u}, v + \frac{2u}{\ln u}, -\frac{u^3 + v - u^2 v}{2u} + \frac{-1+u^2}{\ln u}\right). \tag{4.48}$$

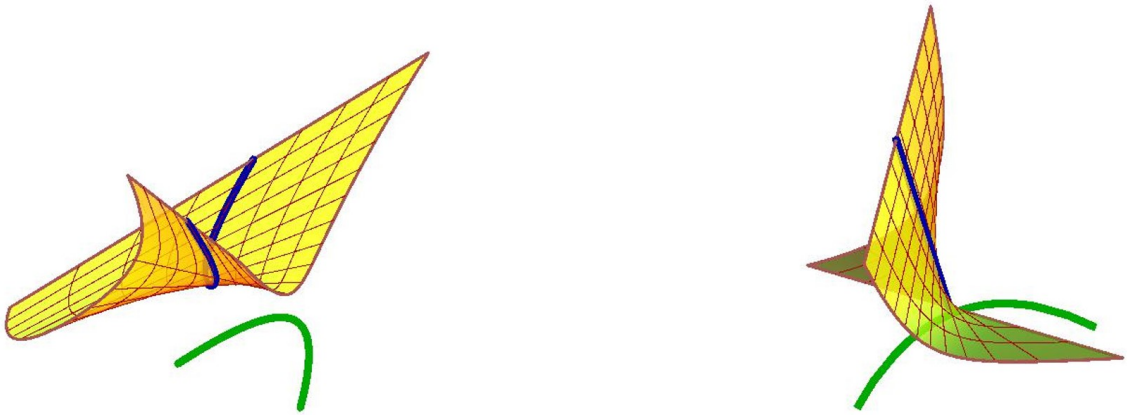
Ako je $k_2 = 0$, onda korištenjem formule (4.43) dobivamo traženu B-namotajnu plohu

$$f(u,v) = \left(\frac{-u^3 + v + u^2 v}{2u}, v, -\frac{u^3 + v - u^2 v}{2u}\right). \tag{4.49}$$

Nadalje, uočimo da je u ovom slučaju dodatno zadovoljen uvjet $\langle A, \bar{t}\rangle = 0$ što znači da je bazna krivulja $c(u) = \int A(u)du$ B-namotajne plohe involuta polazne krivulje $\bar{f}(u)$.

Na slici 4.10 lijevo prikazana je B-namotajna ploha (4.48), a desno ploha (4.49). Plohe su rekonstruirane iz svoje harmonijske evolute (4.47), zelene krivulje.

U primjerima 4.43 i 4.45 uočili smo da za slučaju kada je zakrivljenost $k_2 = 0$ zadovoljen uvjet $\langle A, \bar{t}\rangle = 0$ što znači da je bazna krivulja $c(u) = \int A(u)du$ B-namotajne plohe involuta krivulje $\bar{f}(u)$. Naime, možemo uočiti da taj uvjet nije zadovoljen samo za pseudo-nul krivulje, nego i za prostorne krivulje s prostornom ili vremenskom normalom. Stoga vrijedi sljedeći korolar.



Slika 4.10: B-namotajna ploha (4.48) (lijevo) i (4.49) (desno) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.47) (zelena)

Korolar 4.46 Neka je $\bar{f}(u)$ prostorna krivulja i neka je ona harmonijska evoluta B-namotajne plohe $f(u,v) = c(u) + vB(u) = \int A(u)du + vB(u)$. Ako je zakrivljenost $k_2 = 0$, onda je bazna krivulja $c(u)$ B-namotajne plohe involuta krivulje $\bar{f}(u)$.

Iz teorema 4.22 nam je poznato da je harmonijska evoluta B-namotajne plohe svjetlosna krivulja ako je srednja zakrivljenost plohe konstantna ili prostorna krivulja za B-namotajne plohe kojima srednja zakrivljenost nije konstantna, odnosno iz teorema slijedi da harmonijska evoluta nije nikada vremenska krivulja. Postavlja se pitanje može li se od vremenske krivulje konstruirati kvazi-umbilička ploha kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta. Odgovor nam daje sljedeći korolar.

Korolar 4.47 Neka je $\bar{f}(u) = c(u) + \dfrac{1}{H(u)}C(u)$ vremenska krivulja parametrizirana duljinom luka. Od krivulje $\bar{f}(u)$ se ne može rekonstruirati kvazi-umbilička ploha kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta.

Dokaz. Tangencijalno polje od $\bar{f}$ je $\bar{t} = \bar{f}' = C - k_2 uB$. Računamo $\langle \bar{f}', \bar{f}' \rangle = \langle C, C \rangle = 1$ što je kontradikcija s pretpostavkom da je $\bar{f}$ vremenska krivulja. □

4.1.6 Harmonijska evoluta B-namotajne plohe i singulariteti

Neka je $f(s,\mu) = c(s) + \mu B(s)$ B-namotajna ploha. Pretpostavimo da je bazna krivulja $c(s)$ parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka i neke je (A, B, C) njen svjetlosni trobrid. Nadalje, neka je $\bar{f}(s) = c(s) + \dfrac{1}{k_L(s)}C(s)$ harmonijska evoluta od $f(s,\mu)$. Ako nad harmonijskom evolutom $\bar{f}(s)$ definiramo nul pravčastu plohu

$$\mathcal{FS}(s,\mu) = c(s) + \frac{1}{k_L(s)}C(s) + \mu B(s), \tag{4.50}$$

onda nam autori u ([76]) daju odgovor kako klasificirati singularitete plohe (4.50). Autori u ([76]) plohu (4.50) nazivaju fokalna ploha svjetlosne Frenetove krivulje γ, a harmonijsku evolutu B-namotajne plohe $f(s,\mu)$

$$\mathcal{F}_\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3_1, \quad \mathcal{F}_\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k_L(s)}C(s)$$

fokalna krivulja od γ. Navesti ćemo samo bez dokaza glavni teorem (teorem 2.1 (A) u ([76])) koji daje klasifikaciju singulariteta plohe (4.50) i jedan primjer u kojem ćemo vidjeti njegovu primjenu. Za iskaz su nam potrebni sljedeći pojmovi. Tangencijalni svežanj svjetlosnog stošca s vrhom u točki v_0 je definiran s

$$\mathcal{TPB}(v_0) = \{u \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle u - v_0, B(s)\rangle = 0\}\backslash\{v_0\}, \quad v_0 \in \mathbb{R}^3_1$$

i geometrijska invarijanta σ je definirana s $\sigma(s) = k_L^3(s) + 3k_L'^2(s) - k_L(s)k_L''(s)$.

Teorem 4.48 (Teorem 2.1 (A) u [76])
Neka je $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna Frenetova krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka i neka je $k_L(s) \neq 0$ njena svjetlosna zakrivljenost. Nadalje, neka je $v_0 = \mathcal{FS}(s_0,\mu_0)$ i $\mathcal{TPB}(v_0) = \{u \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle u - v_0, B(s)\rangle = 0\}$ tangencijalni svežanj svjetlosnog stošca. Vrijedi:

1. Svjetlosna Frenetova krivulja $\gamma(s)$ i $\mathcal{TPB}(v_0)$ imaju dodir barem 2-og reda u s_0.
2. Svjetlosna Frenetova krivulja $\gamma(s)$ i $\mathcal{TPB}(v_0)$ imaju dodir trećeg reda u s_0 akko

$$v_0 = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{k'(s_0)}{k^3(s_0)}B(s_0), \quad \sigma(s_0) \neq 0.$$

Pod tim uvjetom klica slike $\mathcal{FS}$ u $\mathcal{FS}(s_0,\mu_0)$ je lokalno difeomorfna kuspidalnom bridu (grebenu), $C \times \mathbb{R} = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\} \times \mathbb{R}$.

3. Svjetlosna Frenetova krivulja $\gamma(s)$ i $\mathcal{TPB}(v_0)$ ima dodir 4-tog reda u s_0 akko

$$v_0 = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}N(s_0) + \frac{k'(s_0)}{k^3(s_0)}B(s_0), \quad \sigma(s_0) = 0,\ \sigma'(s_0) \neq 0.$$

Pod tim uvjetom klica slike $\mathcal{FS}$ u $\mathcal{FS}(s_0, \mu_0)$ je lokalno difeomorfna lastinom repu $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$.

Primjer 4.49 Neka $\gamma(s)$ je svjetlosna Frenetova krivulja $\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka s:

$$\gamma(s) = \Big(s\sqrt{1 - \frac{1}{4}s^2} + 2\arcsin\Big(\frac{s}{2}\Big), 2s - \frac{1}{6}s^3, -\frac{1}{6}(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}\Big) \tag{4.51}$$

i neka je (A, B, C) njeni svjetlosni trobrid dan s:

$$\begin{aligned}
A(s) &= \Big(\sqrt{4 - s^2}, 2 - \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{2}s\sqrt{4 - s^2}\Big),\\
B(s) &= \Big(-\frac{2}{\sqrt{4 - s^2}}, -s, \frac{2 - s^2}{\sqrt{4 - s^2}}\Big),\\
C(s) &= \Big(-\frac{2}{(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-1 + s^2}{-4 + s^2}, -\frac{s(-3 + s^2)}{(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}}\Big).
\end{aligned}$$

Svjetlosna zakrivljenost od $\gamma(s)$ je $k_L(s) = \dfrac{6}{(-4 + s^2)^2}$. Fokalna krivulja dana je parametrizacijom:

$$\mathcal{F}_\gamma(s) = \frac{1}{6}\Big\{s\sqrt{4 - s^2}(-1 + s^2) + 12\arcsin\Big(\frac{s}{2}\Big), -s(4 - 7s^2 + s^4), -(-4 + s^2)^{\frac{3}{2}}(-1 + s^2)\Big\}. \tag{4.52}$$

Fokalna ploha $\mathcal{FS}(s, \mu) = \gamma(s) + \dfrac{1}{k_L(s)}C(s) + \mu B(s)$ dana je parametrizacijom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{FS}(s, \mu) = \Big\{&\frac{s(-4 + s^2)^2(-1 + s^2) - 12\mu}{6(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\arcsin\Big(\frac{s}{2}\Big), -\frac{1}{6}s(4 - 7s^2 + s^4) + \frac{-1 + s^2}{-4 + s^2}\mu,\\
&\frac{(-4 + s^2)^3(-1 + s^2)}{6(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{6s(-3 + s^2)\mu}{6(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}}\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

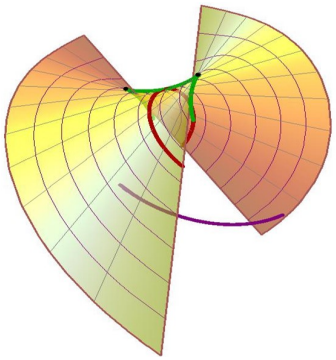
Skup singulariteta $\mathcal{FS}(s, \dfrac{k_L'(s)}{k_L^3(s)})$ fokalne plohe dan je parametrizacijom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{FS}(s, \frac{k_L'(s)}{k_L^3(s)}) = \frac{1}{18}\Big\{&\frac{-76s + 47s^3 - 7s^5 + 36\sqrt{4 - s^2}\arcsin\frac{s}{2}}{\sqrt{4 - s^2}}, 20s - 27s^3 + 15s^5 - 2s^7,\\
&(4 - s^2)^{\frac{3}{2}}(3 + 3s^2 - 2s^4)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Geometrijska invarijanta i njena derivacija su:

$$\sigma(s) = k_L^3(s) + 3{k'_L}^2(s) - k_L(s)k''_L(s) = \frac{72(-5+14s^2)}{(-4+s^2)^4} \quad \sigma'(s) = -\frac{288s(13+35s^2)}{(-4+s^2)^7}.$$

Slijedi zaključak. Ako je $\sigma(s) = 0$, onda je $s = \pm\sqrt{\frac{5}{14}}$ i ako je $\sigma'(s) = 0$ onda je $s = 0$ ili $s = \pm i\sqrt{\frac{13}{15}}$. Stoga, $\mathcal{FS}$ je lokalno difeomorfno kuspidalnom bridu (grebenu) u bilo kojem singularitetu $\mathcal{FS}(s,\mu)$, gdje je $s \neq \pm\sqrt{\frac{5}{14}}$ i $\mu = \frac{k'(s)}{k^3(s)} = -\frac{1}{9}s(-4+s^2)^3$. Nadalje, $\mathcal{FS}$ je lokalno difeomorfno lastinom repu u $\mathcal{FS}(s,\mu)$ gdje je $(s,\mu) = (\sqrt{\frac{5}{14}}, \frac{14739}{2744}\sqrt{\frac{5}{14}})$ ili $(s,\mu) = (\sqrt{-\frac{5}{14}}, -\frac{14739}{2744}\sqrt{\frac{5}{14}})$ (vidi sliku 4.11, crne točke).



Slika 4.11: Fokalna ploha (4.53) s fokalnom krivuljom (4.52) (crvena), skupom singulariteta (4.54) (zelena) i krivuljom γ (4.51) (ljubičasta)

U nastavku navodimo propoziciju 4.1 iz ([76]).

Propozicija 4.50 Neka je $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna Frenetova krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka kojoj je $k_L(s) \neq 0$. Tada vrijedi:

1. skup $\{(s,\mu) \mid \mu = \frac{k'_L(s)}{k^3_L(s)}, s \in I\}$ je skup singulariteta od $\mathcal{FS}$,
2. ako $\mathcal{FS}(s, \frac{k'_L(s)}{k^3_L(s)}) = v_0$ je konstantan vektor, tada $\mathcal{F}_\gamma(s)$ leži na $\mathcal{TPB}(v_0)$ za bilo koji $s \in I$ i $\sigma(s) = k_L^3(s) + 3{k'_L}^2(s) - k_L(s)k''_L(s) = 0$.

Budući da je $\mathcal{F}_\gamma(s)$ isto što i harmonijska evoluta B-namotajne plohe iz propozicije 4.50 slijedi korolar 4.51.

Korolar 4.51 Neka je $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ svjetlosna Frenetova krivulja parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka $k_L(s) \neq 0$ i neka je $\mathcal{FS}(s, \frac{k'_L(s)}{k^3_L(s)}) = v_0$ konstantan vektor. Tada harmonijska evoluta $\bar{f}(s) = c(s) + \frac{1}{k_L(s)}C(s)$, B-namotajne plohe $f(s,\mu) = c(s) + \mu B(s)$ leži na (dijelu) svjetlosnog stošca $\mathcal{TPB}(v_0)$ s vrhom u točki v_0.

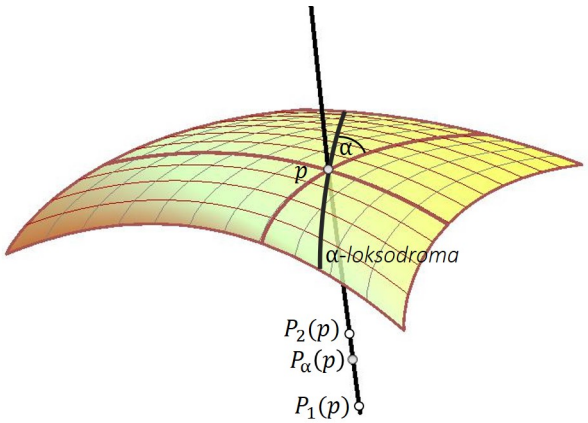
U nastavku proučavat ćemo svojstva α-evoluta. Harmonijska evoluta je samo jedan njen poseban slučaj, preciznije harmonijska evoluta je $\frac{\pi}{4}$-evoluta.

4.2 α-evolute u $\mathbb{R}^3_1$

Neka je $\mathbb{S}$ regularna ploha lokalno parametrizirana s $f = f(u, v)$ bez umbiličkih i kvazi-umbiličkih točaka i neka je ona parametrizirana krivuljama zakrivljenosti, tj. parametarske krivulje (u i v-krivulje) su crte zakrivljenosti (crte krivine, glavne krivulje) plohe. Nedalje, neka je u točki p plohe, t_1 tangenta na u-crtu krivine ($v = const.$). Tangenti t_1 možemo pridružiti dva vektora t_α koji s t_1 zatvaraju (oštri) kut α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Time su na parametriziranom komadu plohe određena dva tangencijalna polja čije su integralne krivulje izogonalne trajektorije u-krivulja ($v = const.$) plohe. To su tzv. α-loksodrome jedne familije parametarskih krivulja plohe.

Definicija 4.52 (α-loksodroma)
α-loksodroma plohe $\mathbb{S}$ je integralna krivulja familije tangencijalnih vektora t_α, tj. izogonalna trajektorija familije u-krivulja ($v = const.$) (slika 4.12).

Definicija 4.53 (α-evoluta)
Neka je $\mathbb{S}$ regularna ploha bez umbiličkih i kvazi-umbiličkih točaka parametrizirana krivuljama zakrivljenosti. α-evoluta je skup središta zakrivljenosti P_α α-loksodroma.



Slika 4.12: Središta zakrivljenosti na normali plohe i α-loksodroma

α-evolutu označavat ćemo sa $\mathbb{S}_\alpha$. Ako je $\alpha = 0$ ili $\alpha = \frac{\pi}{2}$, onda je α-evoluta fokalna ploha, tj. vrijedi $\Sigma_1 = \mathbb{S}_0$ i $\Sigma_2 = \mathbb{S}_{\frac{\pi}{2}}$.

Neka je $\mathbb{S}$ regularna ploha u $\mathbb{R}^3$ bez umbiličkih točaka parametrizirana krivuljama zakrivljenosti. Neka su Σ_1 i Σ_2 fokalne plohe i $\mathbb{S}_\alpha$ α-evoluta. Manhart u ([51]) je dokazao da četvorka Σ_1, Σ_2, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ čini fiksan dvoomjer:

$$(\Sigma_1, \Sigma_2; \mathbb{S}, \mathbb{S}_\alpha) = -\mathrm{ctg}^2\alpha, \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}).$$

Korolar 4.54 Ako je $\mathbb{S}$ regularna prostorna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ bez umbiličkih točaka parametrizirana krivuljama zakrivljenosti, onda četvorka Σ_1, Σ_2, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ čini fiksan dvoomjer $(\Sigma_1, \Sigma_2; \mathbb{S}, \mathbb{S}_\alpha) = -\mathrm{ctg}^2\alpha$.

Dokaz. Budući da je Eulerov teorem za prostorne plohe 1.44 u Minkowskijevom prostoru analogan teoremu u euklidskom prostoru, onda je dokaz u $\mathbb{R}^3_1$ analogan dokazu u $\mathbb{R}^3$ tako da ćemo ga izostaviti. □

Uočimo da je za $\alpha = \frac{\pi}{4}$, α-evoluta harmonijska evoluta.

Teorem 4.55 Ako je $\mathbb{S}$ regularna vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ bez umbiličkih i kvazi-umbiličkih točaka parametrizirana krivuljama zakrivljenosti, onda četvorka Σ_1, Σ_2, $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ čini fiksan dvoomjer

$$(\Sigma_1, \Sigma_2;\, \mathbb{S}, \mathbb{S}_\alpha) = \coth^2 \alpha \tag{4.55}$$

za prostorne α-loksodrome, odnosno

$$(\Sigma_1, \Sigma_2;\, \mathbb{S}, \mathbb{S}_\alpha) = \tanh^2 \alpha$$

za vremenske α-loksodrome.

Dokaz. Neka je $\mathbb{S}$ vremenska ploha dana lokalnom parametrizacijom $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ i neka je $p = f(u, v)$. Nadalje, neka je $n(u, v)$ jedinična normala, $k_1(p)$ i $k_2(p)$ glavne zakrivljenosti, $r_1(p) = \frac{1}{k_1(p)}$ i $r_2(p) = \frac{1}{k_2(p)}$ polumjeri zakrivljenosti i $P_i(p)$ središta zakrivljenosti plohe $\mathbb{S}$.

Pretpostavimo da je α-loksodroma prostorna krivulja. Po pretpostavci vrijedi $k_1(p) \neq k_2(p)$. Nadalje, prema Eulerovom teoremu 1.44 normalna zakrivljenost α-evolute $k_\alpha(p)$, dana je formulom (1.7), $\quad k_\alpha(p) = k_1(p)\cosh^2\alpha - k_2(p)\sinh^2\alpha$.

1. Pretpostavimo da p nije parabolička točka. Onda vrijedi $k_i(p) \neq 0$, $i = 1, 2$. Nadalje, za središta zakrivljenosti u točki $p = f(u, v)$ vrijedi $P_i(p) = f(u, v) + r_i(p)n(u, v)$, $i = 1, 2$ i za središte zakrivljenost α-loksodrome vrijedi $P_\alpha(p) = f(u, v)+r_\alpha(p)n(u, v)$.

Računamo dvoomjer po definiciji:

$$
\begin{aligned}
&(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p)) = \frac{p - P_1(p)}{p - P_2(p)} \cdot \frac{P_\alpha(p) - P_2(p)}{P_\alpha(p) - P_1(p)} \\
&= \frac{f(u,v) - f(u,v) - r_1(p)n(u,v)}{f(u,v) - f(u,v) - r_2(p)n(u,v)} \cdot \frac{f(u,v) + r_\alpha(p)n(u,v) - f(u,v) - r_2(p)n(u,v)}{f(u,v) + r_\alpha(p)n(u,v) - f(u,v) - r_1(p)n(u,v)} \\
&= \frac{r_1(p)}{r_2(p)} \cdot \frac{r_\alpha(p) - r_2(p)}{r_\alpha(p) - r_1(p)} = \frac{r_1(p)}{r_2(p)} \cdot \frac{\dfrac{1}{k_1(p)\cosh^2\alpha - k_2(p)\sinh^2\alpha} - r_2(p)}{\dfrac{1}{k_1(p)\cosh^2\alpha - k_2(p)\sinh^2\alpha} - r_1(p)} \\
&= \frac{r_1(p)}{r_2(p)} \cdot \frac{1 - r_2(p)k_1(p)\cosh^2\alpha + r_2(p)k_2(p)\sinh^2\alpha}{1 - r_1(p)k_1(p)\cosh^2\alpha + r_1(p)k_2(p)\sinh^2\alpha} \\
&= \frac{r_1(p)}{r_2(p)} \cdot \frac{r_2(p)(k_2(p) - k_1(p)\cosh^2\alpha + k_2(p)\sinh^2\alpha)}{r_1(p)(k_1(p) - k_1(p)\cosh^2\alpha + k_2(p)\sinh^2\alpha)} \\
&= \frac{k_2(p)(1 + \sinh^2\alpha) - k_1(p)\cosh^2\alpha}{k_1(p)(1 - \cosh^2\alpha) + k_2(p)\sinh^2\alpha} = \frac{k_2(p)\cosh^2\alpha - k_1(p)\cosh^2\alpha}{k_1(p)(-\sinh^2\alpha) + k_2(p)\sinh^2\alpha} \\
&= \frac{(k_2(p) - k_1(p))\cosh^2\alpha}{(k_2(p) - k_1(p))\sinh^2\alpha} = \coth^2\alpha
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja u ovom slučaju.

2. Nadalje, pretpostavimo da je p parabolička točka. U tom slučaju jedna glavna zakrivljenost je jednaka 0, pretpostavimo da je to $k_2(p) = 0$. Tada vrijedi $k_\alpha(p) = k_1(p)\cosh^2\alpha$ i $P_2(p)$ je beskonačno daleka točka. Računamo dvoomjer, koji se u ovom slučaju pretvara u djelišni omjer:

$$
\begin{aligned}
(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p)) &= (p,\, P_\alpha(p);\, P_1(p),\, P_2(p)) \\
&= (p,\, P_\alpha(p);\, P_1(p)) = \frac{P_1(p) - p}{P_1(p) - P_\alpha(p)} \\
&= \frac{f(u,v) - r_1(p)n(u,v) - f(u,v)}{f(u,v) - r_1(p)n(u,v) - f(u,v) - r_\alpha(p)n(u,v)} \\
&= \frac{r_1(p)}{r_1(p) - r_\alpha(p)} = \frac{\dfrac{1}{k_1(p)}}{\dfrac{1}{k_1(p)} - \dfrac{1}{k_\alpha(p)}} = \frac{k_\alpha(p)}{k_\alpha(p) - k_1(p)} \\
&= \frac{k_1(p)\cosh^2\alpha}{k_1(p)\cosh^2\alpha - k_1} = \frac{k_1(p)\cosh^2\alpha}{k_1(p)\sinh^2\alpha} = \coth^2\alpha.
\end{aligned}
$$

Tvrdnja, odnosno formula (4.55) vrijedi i u ovom slučaju.

3. Pretpostavimo da je $k_\alpha(p) = 0$. Tada je $t_\alpha(p)$ tangencijalni vektor plohe u hiperboličkoj točki p i α-evoluta je asimptotska krivulja plohe $\mathbb{S}$ pa je središte zakrivljenosti α-evolute u p beskonačno daleka točka. Dvoomjer $(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p))$ se pretvara u djelišni omjer $(P_1(p),\, P_2(p);\, p)$.

Računamo djelišni omjer po definiciji:

$$(P_1(p),\, P_2(p);\, p) = \frac{p - P_1(p)}{p - P_2(p)} = \frac{r_1(p)}{r_2(p)} = \frac{\dfrac{1}{k_1(p)}}{\dfrac{1}{k_2(p)}} = \frac{k_2(p)}{k_1(p)}.$$

Budući da je $k_\alpha(p) = 0$, onda iz formule (1.7) slijedi $0 = k_1(p)\cosh^2\alpha - k_2(p)\sinh^2\alpha$, odnosno vrijedi

$$\frac{k_2(p)}{k_1(p)} = \frac{\cosh^2\alpha}{\sinh^2\alpha} = \coth^2\alpha,$$

tako da fromula (4.55) vrijedi i u ovom slučaju.

Time je gotov dokaz u slučaju kada je α-loksodroma prostorna krivulja.
Ako je α-loksodroma vremenska krivulja dokaz je analogan, samo umjesto formule za normalnu zakrivljenost (1.7) koristimo formulu (1.8). □

Uočimo da za $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, α-evoluta nije harmonijska evoluta, ali za $\alpha = i\dfrac{\pi}{4}$ je.

Napomena 4.56 Na vremenskim plohama ne definiramo svjetlosne α-loksodrome jer u tom slučaju kut nije definiran.

U definiciji α-evolute izostavili smo umbiličke plohe. Ako za njih α-evolutu definiramo kao u definiciji 4.53, onda vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.57 α-evoluta umbiličkih ploha (sfera) je točka (središte sfere).

Dokaz. α-evoluta prostorne sfere, hiperboličke ravnine $H^2(p, r)$ je središte sfere p jer vrijedi

$$k(t_\alpha) = \cos^2\alpha\, k_1 + \sin^2\alpha\, k_2 = \cos^2\alpha\, k_1 + \sin^2\alpha\, k_1 = k_1.$$

Budući da je $S^2_1(p, r)$ vremenska ploha, razlikujemo 2 slučaja:

1. α-evoluta od prostorne α-loksodrome

$$k(t_\alpha) = \mathrm{ch}^2\alpha\, k_1 - \mathrm{sh}^2\alpha k_2 = \mathrm{ch}^2\alpha\, k_1 - \mathrm{sh}^2\alpha k_1 = k_1,$$

2. α-evoluta od vremenske α-loksodrome

$$k(t_\alpha) = -\mathrm{sh}^2\alpha\, k_1 + \mathrm{ch}^2\alpha k_2 = -\mathrm{sh}^2\alpha\, k_1 + \mathrm{ch}^2\alpha k_1 = k_1,$$

iz čega slijedi da je α-evoluta od $S^2_1(p, r)$ ponovno središte sfere p.

□

U nastavku ćemo pretpostaviti da plohe nisu umbiličke ni kvazi-umbiličke plohe.

Sada ćemo izvesti parametrizaciju α-evolute u $\mathbb{R}^3_1$. Iz dvoomjera $(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p))$ izrazit ćemo polumjer zakrivljenosti $r_\alpha(p)$:

$$(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p)) = -\operatorname{ctg}^2\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad r_\alpha(p) = \frac{r_1(p)r_2(p)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{r_1(p)+r_2(p)\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

$$(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p)) = \coth^2\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad r_\alpha(p) = \frac{r_1(p)r_2(p)(1-\coth^2\alpha)}{r_1(p)-r_2(p)\coth^2\alpha}$$

$$(P_1(p),\, P_2(p);\, p,\, P_\alpha(p)) = \tanh^2\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad r_\alpha(p) = \frac{r_1(p)r_2(p)(1-\tanh^2\alpha)}{r_1(p)-r_2(p)\tanh^2\alpha}.$$

Korolar 4.58 Neka je $\mathbb{S}$ ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dana lokalnom parametrizacijom $f\colon U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}$ i neka je $p=f(u,v)$. Nadalje, neka je $n(u,v)$ jedinična normala, $r_1(p)$ i $r_2(p)$ polumjeri zakrivljenosti.

1. Ako je $\mathbb{S}$ prostorna ploha, onda je α-evoluta dana sljedećom parametrizacijom

$$f^P_\alpha(u,v) = f(u,v) + \frac{r_1(p)r_2(p)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{r_1(p)+r_2(p)\operatorname{ctg}^2\alpha}n(u,v).$$

2. Ako je $\mathbb{S}$ vremenska ploha, onda je α-evoluta za prostornu α-loksodromu dana sljedećom parametrizacijom

$$f^V_{p\,\alpha}(u,v) = f(u,v) + \frac{r_1(p)r_2(p)(1-\coth^2\alpha)}{r_1(p)-r_2(p)\coth^2\alpha}n(u,v),$$

   i za vremensku α-loksodromu sljedećom parametrizacijom

$$f^V_{v\,\alpha}(u,v) = f(u,v) + \frac{r_1(p)r_2(p)(1-\tanh^2\alpha)}{r_1(p)-r_2(p)\tanh^2\alpha}n(u,v).$$

Radi jednostavnosti uvest ćemo oznake. Oznaka P i V u eksponentu označava kauzalni karakter plohe, odnosno je li ploha vremenska ili prostorna. Indeksi $p\,\alpha$ i $v\,\alpha$ označavaju je li α-loksodroma prostorna ili vremenska krivulja.

4.2.1 α-evoluta rotacijske plohe

U nastavku ćemo promatrati rotacijske plohe $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ parametrizirane krivuljama zakrivljenosti. U tom slučaju u-krivulje ($v=const.$) zovemo meridijani, v-krivulje ($u=const.$) zovemo paralele i one su za rotacijske plohe uvijek kružnice. Ograničit ćemo se na plohe

koje nisu cilindrične ni stožaste. Jedna fokalna ploha rotacijske plohe je rotacijska ploha nastala rotacijom evolute generatrise plohe $\mathbb{S}$, a druga fokalna ploha od $\mathbb{S}$ je os rotacije. U [51] je dokazano da je α-evoluta rotacijske plohe $\mathbb{S}$, rotacijska koaksijalna ploha, odnosno da je α-evoluta rotacijska ploha koja ima zajedničku os s plohom $\mathbb{S}$. Dokažimo analogan rezultat u Minkowskijevom prostoru.

Za razliku od euklidskog prostora, u prostoru Minkowskog razlikujemo sedam tipova rotacijskih ploha. Ploha može biti prostorna ili vremenska, a os rotacije može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac. Vidi propozicije 1.52, 1.53 i 1.54. Za svaku od tih slučajeva izračunat ćemo α-evolutu.

Rotacija oko prostorne osi

Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise oko prostorne osi, z-osi. Bez smanjenja općenitosti, plohu $\mathbb{S}$ danu kartom (1.9) ili (1.11), reparametrizirat ćemo na sljedeći oblik:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cosh v \\ u\sinh v \\ z(u) \end{pmatrix}. \tag{4.56}$$

α-evoluta plohe $\mathbb{S}$ dane kartom (4.56) ima oblik:

$$\begin{aligned} f_\alpha(u,v) &= \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}} \\ 0 \\ z(u) + \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}}\right)\cosh v \\ \left(u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}}\right)\sinh v \\ z(u) + \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska vremenska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom prostorne generatrise oko prostorne osi, z-osi. Bez smanjenja općenitosti, plohu $\mathbb{S}$ danu kartom (1.10), reparametri-

zirat ćemo na sljedeći oblik:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \sinh v \\ u \cosh v \\ z(u) \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

α-evoluta plohe $\mathbb{S}$ dane kartom (4.58) ima oblik:

$$\begin{aligned} f_\alpha(u,v) &= \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{1+z'(u)^2}} \\ z(u) - \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{1+z'(u)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{1+z'(u)^2}}\right)\sinh v \\ \left(u + r_\alpha(p)\dfrac{z'(u)}{\sqrt{1+z'(u)^2}}\right)\cosh v \\ z(u) - \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{1+z'(u)^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Propozicija 4.59 Ako je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ s prostornom osi, onda je i njena α-evoluta rotacijska ploha s prostornom, osi. Nadalje, α-evoluta dana parametrizacijom (4.57) je prostorna (vremenska) ploha, ako je generatrisa

$$f_\alpha(u,0) = c_\alpha(u) = \left(u + r_\alpha(p)\frac{z'(u)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}}, 0, z(u) + \frac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|1-z'(u)^2|}}\right)$$

prostorna (vremenska) krivulja, a α-evoluta dana parametrizacijom (4.59) je vremenska ploha.

Rotacija oko vremenske osi

Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise oko vremenske osi, x-osi. Bez smanjenja općenitosti, plohu $\mathbb{S}$ danu kartom $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ (1.12), reparametrizirat ćemo na sljedeći oblik:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u) \\ u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

α-evoluta plohe $\mathbb{S}$ dane kartom (4.60) ima oblik:

$$f_\alpha(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) - \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}} \\ u - r_\alpha(p)\dfrac{x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x(u) - \dfrac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}} \\ \left(u - r_\alpha(p)\dfrac{x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}}\right)\cos v \\ \left(u - r_\alpha(p)\dfrac{x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}}\right)\sin v \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Propozicija 4.60 Ako je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha s vremenskom osi, onda je i njena α-evoluta rotacijska ploha s vremenskom osi. Nadalje, α-evoluta dana parametrizacijom (4.61) je prostorna (vremenska) ploha, ako je generatrisa

$$f_\alpha(u,0) = c_\alpha(u) = \left(x(u) - \frac{r_\alpha(p)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}}, u - r_\alpha(p)\frac{x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2-1|}}, 0\right)$$

prostorna (vremenska) krivulja.

Rotacija oko svjetlosne osi

Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dobivena rotacijom generatrise oko svjetlosne osi, pravca $l = \{(x,x,0)\colon x \in \mathbb{R}\}$. Ako umjesto svjetlosne baze u propoziciji 1.54, odaberemo kanonsku bazu, onda parametrizacija plohe $\mathbb{S}$ dane kartom $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ ima oblik:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{v^2}{2} & -\dfrac{v^2}{2} & v \\ \dfrac{v^2}{2} & 1-\dfrac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\dfrac{v^2}{2})x(u) - \dfrac{v^2}{2}y(u) \\ \dfrac{v^2}{2}x(u) + (1-\dfrac{v^2}{2})y(u) \\ v\,(x(u)-y(u)) \end{pmatrix}. \tag{4.62}$$

α-evoluta plohe $\mathbb{S}$ dane kartom (4.62) ima oblik:

$$f_\alpha(u,v) = \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) - r_\alpha(p)\frac{y'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}} \\ y(u) - r_\alpha(p)\frac{x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})\Big(x(u) - \frac{r_\alpha(p)\,y'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}}\Big) - \frac{v^2}{2}\Big(y(u) - \frac{r_\alpha(p)\,x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}}\Big) \\ \frac{v^2}{2}\Big(x(u) - \frac{r_\alpha(p)\,y'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}}\Big) + (1-\frac{v^2}{2})\Big(y(u) - \frac{r_\alpha(p)\,x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}}\Big) \\ v\Big(x(u) - y(u) - r_\alpha(p)\frac{y'(u) - x'(u)}{\sqrt{|x'(u)^2 - y'(u)^2|}}\Big) \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

Propozicija 4.61 Ako je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha sa svjetlosnom osi, onda je i njena α-evoluta rotacijska ploha sa svjetlosnom osi. Nadalje, α-evoluta dana parametrizacijom (4.63) je prostorna (vremenska) ploha, ako je njena generatrisa

$$f_\alpha(u,0) = c_\alpha(u) = \Big(x(u) - r_\alpha(p)\frac{y'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}}, y(u) - r_\alpha(p)\frac{x'(u)}{\sqrt{x'(u)^2 - y'(u)^2}}, 0\Big)$$

prostorna (vremenska) krivulja.

Napomena 4.62 U propozicijama 4.59, 4.60 i 4.61 nismo razlikovali je li polazna ploha $\mathbb{S}$ prostorna ili je vremenska i nismo razlikovali je li $r_\alpha(p)$, $p = f(u,v)$ radijus zakrivljenosti prostorne ili vremenske α-loksodrome. Uočimo da za tim nema ni potrebe. Propozicije vrijede u svim slučajevima, samo ovisno o kauzalnom karakteru plohe i α-loksodrome imamo drugačije formule za $r_\alpha(p)$.

Koristeći napomenu 4.62 i propozicije 4.59, 4.60 i 4.61 vrijedi teorem 4.63.

Teorem 4.63 Ako je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$, onda je i njena α-evoluta koaksijalna rotacijska ploha.

4.2.2 Ploha i njena α-evoluta su paralelne plohe

U ovom poglavlju zanima nas kada će plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ biti paralelne plohe.

Rotacija oko prostorne osi

Propozicija 4.64 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha s prostornom osi u $\mathbb{R}^3_1$ dana kartom:

$$f\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{S},\quad f(u,v)=(u\cosh v, u\sinh v, z(u)). \tag{4.64}$$

Nadalje, neka $\mathbb{S}$ ne sadrži umbiličke ni kvazi-umbiličke točke i neka $\mathbb{S}$ nije cilindrična ni stožasta ploha. Plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ su paralelne plohe ako i samo ako funkcija $z\colon I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ zadovoljava odgovarajuću jednadžbu iz tablice 4.1.

Tablica 4.1: Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.64) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$

ploha $\mathbb{S}$	α-loksodroma	jednadžbe
prostorna	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=\frac{(D-\lambda u^{a+1})^2}{(D-\lambda u^{a+1})^2+u^{2a}},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tan^2\alpha,\ \lambda\neq 0$
vremenska	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=\frac{(u^aD-\lambda u)^2}{(u^aD-\lambda u)^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha,\ \lambda\neq 0$
	vremenska	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=\frac{(u^{a^{-1}}D-\lambda u)^2}{(u^{a^{-1}}D-\lambda u)^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha,\ \lambda\neq 0$

Dokaz. Za paralelne plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ mora vrijediti da je $k_\alpha = const.$ k_α određujemo po Eulerovoj formuli. U Minkowskijevom prostoru ta formula je različita za vremenske i prostorne plohe (vidi teoreme 1.44 i 1.45). Radi jednostavnosti k_α ćemo označavati na različite načine, k^P_α, $k^V_{p\alpha}$ i $k^V_{v\alpha}$. Oznake P i V u eksponentu označavaju kauzalni karakter plohe, odnosno je li ploha prostorna ili vremenska, a oznake $p\alpha$ i $v\alpha$ u indeksu označavaju kauzalni karakter α-loksodrome, odnosno je li α-loksodroma prostorna ili vremenska krivulja.

Gaussova i srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ dane parametrizacijom (4.64) dana je formulama:

$$K=\epsilon\frac{\dot z\ddot z}{u(1-\dot z^2)^2}\quad\text{i}\quad H=-\frac{\epsilon}{2}\frac{\dot z-\dot z^3+u\ddot z^3}{u(1-\dot z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \epsilon=\langle n,n\rangle\in\{1,-1\}. \tag{4.65}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ prostorna ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.6)

$$k^P_\alpha=k_1\cos^2\alpha+k_2\sin^2\alpha=\lambda=const.\neq 0. \tag{4.66}$$

Koristeći formule (4.65) i (1.4), glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 možemo izračunati iz formula:

$$k_1 = -\frac{\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{i} \quad k_2 = -\frac{\dot{z}}{u(1-\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.67}$$

Uvrštavanjem (4.67) u (4.66) slijedi:

$$-\frac{\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dot{z}}{u(1-\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\tan^2\alpha = \lambda\cos^{-2}\alpha. \tag{4.68}$$

Označimo

$$p := \dot{z} \quad \text{i} \quad w := \frac{p}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.69}$$

Deriviranjem w dobivamo $\dot{w} = \dfrac{\dot{p}}{(1-p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Uvrštavanjem w i $\dot{w}$ u (4.68) dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{w} + \frac{a}{u}w = -\lambda\cos^{-2}\alpha, \quad a := \tan^2\alpha. \tag{4.70}$$

Rješenje jednadžbe (4.70) je $w(u) = -\lambda u + Du^{-a}$, $D \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $w(u)$ u (4.69) i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{(-\lambda u^{a+1}+D)^2}{(-\lambda u^{a+1}+D)^2 + u^{2a}}, \quad D \in \mathbb{R}, \quad a := \tan^2\alpha. \tag{4.71}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ vremenska ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.7) ili (1.8)

$$k^V_{p\alpha} = k_1\cosh^2\alpha - k_2\sinh^2\alpha = \lambda = const. \neq 0, \tag{4.72}$$

$$k^V_{v\alpha} = -k_1\sinh^2\alpha + k_2\cosh^2\alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.73}$$

Uvrštavanjem (4.67) u (4.72) i (4.73) slijedi:

$$-\frac{\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{z}}{u(1-\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}}\tanh^2\alpha = \lambda\cosh^{-2}\alpha, \tag{4.74}$$

$$\frac{\ddot{z}}{(1-\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}\tanh^2\alpha - \frac{\dot{z}}{u(1-\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}} = \lambda\cosh^{-2}\alpha. \tag{4.75}$$

Nadalje, uvrštavanjem w i $\dot{w}$ u (4.74) i (4.75) dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe

$$-\dot{w} + \frac{a}{u}w = \lambda\cosh^{-2}\alpha, \quad a := \tanh^2\alpha, \tag{4.76}$$

$$\dot{w}a - \frac{w}{u} = \lambda\cosh^{-2}\alpha, \quad a := \tanh^2\alpha. \tag{4.77}$$

Rješenje jednadžbe (4.76) je $w(u) = -\lambda u + Du^a$, $D \in \mathbb{R}$ i rješenje jednadžbe (4.77) je $w(u) = -\lambda u + Du^{a^{-1}}$, $D \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $w(u)$ u (4.69) i sređivanjem dobivamo

jednadžbe

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{(u^a D - \lambda u)^2}{(u^a D - \lambda u)^2 + 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2 \alpha$$
$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2}{(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2 + 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2 \alpha.$$

Za $D = 0$ dobije se trivijalan slučaj sfere kojeg smo isključili iz razmatranja. □

Budući da, iz propozicije 1.52.2 znamo da rotacijsku plohu s prostornom osi možemo parametrizirati i kartom (1.10), onda imamo i propoziciju 4.65.

Propozicija 4.65 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha s prostornom osi u $\mathbb{R}^3_1$ dana kartom:

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}, \quad f(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, z(u)). \tag{4.78}$$

Nadalje, neka $\mathbb{S}$ ne sadrži umbiličke ni kvazi-umbiličke točke i neka $\mathbb{S}$ nije cilindrična ni stožasta ploha. Plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ su paralelne plohe ako i samo ako funkcija $z\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ zadovoljava odgovarajuću jednadžbu iz tablice 4.2.

Tablica 4.2: Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.78) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$

ploha $\mathbb{S}$	α-loksodroma	jednadžbe
vremenska	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-(u^a D - \lambda u)^2}{(u^a D - \lambda u)^2 - 1},\ D \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ a := \tanh^2 \alpha,\ \lambda \neq 0$
	vremenska	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2}{(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2 - 1},\ D \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ a := \tanh^2 \alpha,\ \lambda \neq 0$

Dokaz. Gaussova i srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ dane parametrizacijom (4.78) dana je formulama:

$$K = \epsilon \frac{\dot{z}\ddot{z}}{u(1 + \dot{z}^2)^2} \quad \text{i} \quad H = -\frac{\epsilon}{2} \frac{\dot{z} + \dot{z}^3 + u\ddot{z}^3}{u(1 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \epsilon = \langle n, n \rangle \in \{1, -1\}. \tag{4.79}$$

Ploha $\mathbb{S}$ je vremenska ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.7) ili (1.8)

$$k^V_{p\alpha} = k_1 \cosh^2 \alpha - k_2 \sinh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0, \tag{4.80}$$
$$k^V_{v\alpha} = -k_1 \sinh^2 \alpha + k_2 \cosh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.81}$$

Koristeći formule (4.79) i (1.4), glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 možemo izračunati iz formula:

$$k_1 = -\frac{\ddot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{i} \quad k_2 = -\frac{\dot{z}}{u(1+\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.82}$$

Uvrštavanjem (4.82) u (4.80) i (4.81) slijedi:

$$-\frac{\ddot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{z}}{u(1+\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}} \tanh^2\alpha = \lambda \cosh^{-2}\alpha, \tag{4.83}$$

$$\frac{\ddot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} \tanh^2\alpha - \frac{\dot{z}}{u(1+\dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}} = \lambda \cosh^{-2}\alpha. \tag{4.84}$$

Označimo

$$p := \dot{z} \quad \text{i} \quad w := \frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.85}$$

Deriviranjem w dobivamo $\dot{w} = \dfrac{\dot{p}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Uvrštavanjem w i $\dot{w}$ u (4.83) i (4.84) dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe:

$$-\dot{w} + \frac{a}{u}w = \lambda \cosh^{-2}\alpha, \quad a := \tanh^2\alpha, \tag{4.86}$$

$$\dot{w}a - \frac{w}{u} = \lambda \cosh^{-2}\alpha, \quad a := \tanh^2\alpha. \tag{4.87}$$

Rješenje jednadžbe (4.86) je $w(u) = -\lambda u + Du^a$, $D \in \mathbb{R}$ i rješenje jednadžbe (4.87) je $w(u) = -\lambda u + Du^{a^{-1}}$, $D \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $w(u)$ u (4.85) i sređivanjem dobivamo jednadžbe

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-(u^a D - \lambda u)^2}{(u^a D - \lambda u)^2 - 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2\alpha,$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2}{(u^{a^{-1}} D - \lambda u)^2 - 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2\alpha.$$

Za $D = 0$ dobije se trivijalan slučaj sfere kojeg smo isključili iz razmatranja. □

Rotacija oko vremenske osi

Propozicija 4.66 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha s vremenskom osi u $\mathbb{R}^3_1$ dana kartom:

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}, \quad f(u,v) = (x(u), u\cos v, u \sin v). \tag{4.88}$$

Nadalje, neka $\mathbb{S}$ ne sadrži umbiličke ni kvazi-umbiličke točke i neka $\mathbb{S}$ nije cilindrična ni stožasta ploha. Plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ su paralelne plohe ako i samo ako funkcija $x\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ zadovoljava odgovarajuću jednadžbu iz tablice 4.3.

Tablica 4.3: Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.88) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$

ploha $\mathbb{S}$	α-loksodroma	jednadžbe
prostorna	prostorna	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(\lambda u^{a+1}+D)^2}{(\lambda u^{a+1}+D)^2 - u^{2a}},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tan^2\alpha,\ \lambda\neq 0$
vremenska	prostorna	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(u^a D+\lambda u)^2}{(u^a D+\lambda u)^2 - 1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha,\ \lambda\neq 0$
	vremenska	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(u^{a^{-1}} D+\lambda u)^2}{(u^{a^{-1}} D+\lambda u)^2 - 1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha,\ \lambda\neq 0$

Dokaz. Gaussova i srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ dane parametrizacijom (4.88) dana je formulama:

$$K = -\epsilon\frac{\dot{x}\ddot{x}}{u(-1+\dot{z}^2)^2} \quad \text{i} \quad H = -\frac{\epsilon}{2}\frac{\dot{x}-\dot{x}^3+u\ddot{x}^3}{u(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}. \tag{4.89}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ prostorna ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.6)

$$k^P_\alpha = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.90}$$

Koristeći formule (4.89) i (1.4), glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 možemo izračunati iz formula:

$$k_1 = -\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{i} \quad k_2 = \frac{\dot{x}}{u(-1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.91}$$

Uvrštavanjem (4.91) u (4.90) slijedi:

$$-\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\dot{x}}{u(-1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}\tan^2\alpha = \lambda\cos^{-2}\alpha.$$

Označimo

$$p := \dot{x} \quad \text{i} \quad w := \frac{p}{(-1+p^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.92}$$

Deriviranjem w dobivamo $\dot{w} = -\frac{\dot{p}}{(-1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Uvrštavanjem w i $\dot{w}$ u (4.92) dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{w} + \frac{a}{u}w = \lambda\cos^{-2}\alpha, \quad a := \tan^2\alpha. \tag{4.93}$$

Rješenje jednadžbe (4.93) je $w(u) = \lambda u + Du^{-a}$, $D\in\mathbb{R}$. Uvrštavanjem $w(u)$ u (4.92) i

sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(\lambda u^{a+1} + D)^2}{(\lambda u^{a+1} + D)^2 - u^{2a}}, \quad D \in \mathbb{R}, \quad a := \tan^2 \alpha. \tag{4.94}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ vremenska ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.7) ili (1.8)

$$k^V_{p\alpha} = k_1 \cosh^2 \alpha - k_2 \sinh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0, \tag{4.95}$$
$$k^V_{v\alpha} = -k_1 \sinh^2 \alpha + k_2 \cosh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.96}$$

Uvrštavanjem (4.91) u (4.95) i (4.96) slijedi:

$$-\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dot{x}}{u(-1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}} \tanh^2 \alpha = \lambda \cosh^{-2} \alpha, \tag{4.97}$$
$$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \tanh^2 \alpha + \frac{\dot{x}}{u(-1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}} = \lambda \cosh^{-2} \alpha. \tag{4.98}$$

Uvrštavanjem w i $\dot{w}$ u (4.97) i (4.98) dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe

$$\dot{w} - \frac{a}{u} w = \lambda \cosh^{-2} \alpha, \quad a := \tanh^2 \alpha, \tag{4.99}$$
$$-\dot{w}a + \frac{w}{u} = \lambda \cosh^{-2} \alpha, \quad a := \tanh^2 \alpha. \tag{4.100}$$

Rješenje jednadžbe (4.99) je $w(u) = \lambda u + Du^a$, $D \in \mathbb{R}$ i rješenje jednadžbe (4.100) je $w(u) = \lambda u + Du^{a^{-1}}$, $D \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $w(u)$ u (4.92) i sređivanjem dobivamo jednadžbe

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(u^a D + \lambda u)^2}{(u^a D + \lambda u)^2 - 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2 \alpha,$$
$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(u^{a^{-1}} D + \lambda u)^2}{(u^{a^{-1}} D + \lambda u)^2 - 1}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a := \tanh^2 \alpha.$$

Za $D = 0$ dobije se trivijalan slučaj sfere kojeg smo isključili iz razmatranja. □

Rotacija oko svjetlosne osi

Propozicija 4.67 Neka je $\mathbb{S}$ rotacijska ploha sa svjetlosnom osi $l = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ u $\mathbb{R}^3_1$ dana kartom $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(u) \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{v^2}{2})x(u) - \frac{v^2}{2}u \\ \frac{v^2}{2}x(u) + (1 - \frac{v^2}{2})u \\ v\,(x(u) - u) \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

Nadalje, neka $\mathbb{S}$ ne sadrži umbiličke ni kvazi-umbiličke točke i neka $\mathbb{S}$ nije cilindrična ni stožasta ploha. Plohe $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ su paralelne plohe ako i samo ako funkcija $x\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ zadovoljava odgovarajuću jednadžbu iz tablice 4.4.

Tablica 4.4: Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.101) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$

ploha $\mathbb{S}$	α-loksodroma	jednadžbe
prostorna	prostorna	$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a(1-\dot{x})}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = \lambda \cos^{-2}\alpha,\ a := \tan^2\alpha,\ \lambda \neq 0$
vremenska	prostorna	$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a(1-\dot{x})}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = \lambda \cosh^{-2}\alpha,\ a := \tanh^2\alpha,\ \lambda \neq 0$
	vremenska	$\frac{-\ddot{x}a}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = \lambda \cosh^{-2}\alpha,\ a := \tanh^2\alpha,\ \lambda \neq 0$

Dokaz. Gaussova i srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ dane parametrizacijom (4.101) dana je formulama ($\epsilon = \langle n, n\rangle \in \{1, -1\}$):

$$H = -\frac{\epsilon}{2}\frac{(-1+\dot{x})^2(1+\dot{x}) + (u-x)\ddot{x}}{2(u-x)(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.102}$$

$$K = -\epsilon\frac{\ddot{x}}{(u-x)(1-\dot{x})(1+\dot{x})^2}. \tag{4.103}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ prostorna ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo po formuli (1.6)

$$k^P_\alpha = k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.104}$$

Koristeći formule (4.102), (4.103) i (1.4), glavne zakrivljenosti k_1 i k_2 možemo izračunati iz formula:

$$k_1 = -\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{i} \quad k_2 = \frac{1-\dot{x}}{(u-x)(-1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.105}$$

Uvrštavanjem (4.105) u (4.104) slijedi:

$$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}}\tan^2\alpha = \lambda\cos^{-2}\alpha. \tag{4.106}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ vremenska ploha. Normalnu zakrivljenost α-loksodrome računamo

po formuli (1.7) ili (1.8)

$$k^V_{p\alpha} = k_1 \cosh^2 \alpha - k_2 \sinh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0, \tag{4.107}$$
$$k^V_{v\alpha} = -k_1 \sinh^2 \alpha + k_2 \cosh^2 \alpha = \lambda = const. \neq 0. \tag{4.108}$$

Uvrštavanjem (4.105) u (4.107) i (4.108) slijedi:

$$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} \tanh^2 \alpha = \lambda \cosh^{-2} \alpha, \tag{4.109}$$
$$-\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} \tanh^2 \alpha + \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = \lambda \cosh^{-2} \alpha. \tag{4.110}$$

□

Dobivene jednadžbe (4.106), (4.109) i (4.110) su diferencijalne jednadžbe 2. reda koje supstitucijom ne možemo svesti na jednadžbe 1. reda. Rješenja jednadžbi (4.106), (4.109) i (4.110) ne možemo egzaktno odrediti.

Propozicija 4.68 Ako je $\mathbb{S}$ prostorna rotacijska ploha s prostornom, vremenskom ili svjetlosnom osi ((4.64), (4.88) ili (4.101)), ploha konstantne srednje zakrivljenosti $H = -\lambda$, onda je ploha $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{4}}$ paralelna s plohom $\mathbb{S}$. Udaljenost tih ploha iznosi $\dfrac{1}{\lambda}$.

Dokaz. Prema formuli za normalnu zakrivljenost α-loksodrome i formuli za srednju zakrivljenost (1.5) vrijedi:

$$k^P_{\frac{\pi}{4}} = k_1(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + k_2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{k_1+k_2}{2} = -H.$$

Nadalje, po pretpostavci da je $H = const. \neq 0$ vrijedi $k^P_{\frac{\pi}{4}} = const. \neq 0$, a iz toga slijedi da su $\mathbb{S}$ i $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{4}}$ paralelne plohe na udaljenosti $\dfrac{1}{k^P_{\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{1}{\lambda}$.

□

Plohu $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{4}}$ nazivamo *harmonijska evoluta* i propoziciju 4.68 možemo naći u [57] gdje je pokazano da tvrdnja vrijedi ne samo za rotacijske CMC plohe, nego i općenito za bilo koju CMC plohu. Nadalje, pokazano je da je $\mathbb{S}_{\frac{\pi}{4}}$ također ploha konstantne srednje zakrivljenosti.

Isti zaključak za vremenske rotacijske plohe ne možemo dobiti na ovaj način iako on vrijedi (vidi ([57]))

$$k^v_{p\alpha} = k_1 \coth^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - k_2 \sinh^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq H,$$
$$k^v_{v\alpha} = -k_1 \sinh^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + k_2 \cosh^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq H.$$

Prave rotacijske plohe konstantne srednje zakrivljenosti su unduloid i nodoid, tzv. Delaunayeve plohe. One nastaju rotacijom tzv. Delaunayeve krivulje (undolidne (valne) krivulje, odnosno nodoidne (čvorne) krivulje) oko osi. Delaunayeve krivulje geometrijski možemo opisati kao rulete konika, odnosno kao krivulje koje nastaju tako da fokus elipse ili hiperbole, ostavlja trag dok se elipsa ili hiperbola kotrlja po osi. Ruleta parabole je lančanica. Rotacijom lančanice oko osi dobivamo katenoid. Katenoid je minimalna ploha.

Korolar 4.69 Neka je $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ karta prostorne rotacijske plohe $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$. Nadalje, neka parametrizacija plohe $\mathbb{S}$ oko prostorne osi ima oblik $f(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, z(u))$, odnosno oko vremenske osi ima oblik $f(u,v) = (x(u), u\cos v, u\sin v)$. Ako funkcija $z(u)$, odnosno $x(u)$ zadovoljava jednadžbu iz tablice 4.5, onda je ploha $\mathbb{S}$ Delaunayeva ploha. Srednja zakrivljenost plohe $\mathbb{S}$ je $-\lambda$.

Tablica 4.5: Jednadžba za generatrisu Delaunayeve plohe $\mathbb{S}$

Delaunayeva ploha (unduloid i nodoid)	
os	jednadžbe
prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{(-\lambda u^2 + D)^2}{(-\lambda u^2 + D)^2 + u^2}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda \neq 0$
vremenska	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(\lambda u^2 + D)^2}{(\lambda u^2 + D)^2 - u^2}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda \neq 0$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 4.64 ($a = 1$) i propozicija 4.66 i 4.68. □

U nastavku, slijedi korolar 4.70 koji daje karakterizaciju Delaunayevih krivulja, unduloidne (valne) krivulje i nodoidne (čvorne) krivulje u $\mathbb{R}^3_1$ preko velike i male osi konike.

Korolar 4.70 Delaunayeva krivulja koja je nastala kao ruleta elipse ili hiperbole po prostornoj osi (z-osi) i vremenskoj osi (x-osi) u $\mathbb{R}^3_1$ dana je jednadžbama iz tablice 4.6.

Dokaz. Neka je $c(u) = (u, 0, z(u))$ Delaunayeva krivulja koja je nastala kao ruleta elipse ili hiperbole po prostornoj osi, z-osi. Ako u (4.71) uvrstimo $a = 1$ dobivamo:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{(-\lambda u^2 + D)^2}{(-\lambda u^2 + D)^2 + u^2}.$$

Tablica 4.6: Jednadžbe za Delaunayevu krivulju u $\mathbb{R}^3_1$

Delaunayeva krivulja	
os	jednadžbe
prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 \frac{(-u^2 \pm B^2)^2}{(-u^2 \pm B^2)^2 + 4A^2u^2}, \quad A,\, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad A \neq B$
vremenska	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(\lambda u^2 \pm B^2)^2}{(\lambda u^2 \pm B^2)^2 - 4A^2u^2}, \quad A,\, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad A \neq B$

Iskoristimo li da je $4A^2 := \lambda^{-2}$ i $B^2 = \pm\frac{D}{\lambda}$ za $D\lambda \lesseqgtr 0$ dobivamo karakterizaciju Delaunayeve krivulje c u Minkowskijevom prostoru koja je nastala kao ruleta elipse ili hiperbole po prostornoj osi.

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{du}\right)^2 &= \frac{(-\lambda u^2 + D)^2}{(-\lambda u^2 + D)^2 + u^2} = \frac{(-\lambda u^2 \pm \lambda B^2)^2}{(-\lambda u^2 \pm \lambda B^2)^2 + u^2} \\ &= \frac{(-u^2 \pm B^2)^2}{(-u^2 \pm B^2)^2 + \lambda^{-2}u^2} = \frac{(-u^2 \pm B^2)^2}{(-u^2 \pm B^2)^2 + 4A^2u^2}.\end{aligned}$$

A i B su velika i mala os elipse ili hiperbole od kojih je dobivena Delaunayeva krivulja.

Neka je $c(u) = (x(u), u, 0)$ Delaunayeva krivulja koja je nastala kao ruleta elipse ili hiperbole po vremenskoj osi, x-os. Ako u (4.94) uvrstimo $a = 1$ dobivamo:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{(\lambda u^2 + D)^2}{(\lambda u^2 + D)^2 - u^2}.$$

Isoristimo li da je $4A^2 := \lambda^{-2}$ i $B^2 = \pm\frac{D}{\lambda}$ za $D\lambda \lesseqgtr 0$ dobivamo karakterizaciju Delaunayeve krivulje c u Minkowskijevom prostoru koja je nastala kao ruleta elipse ili hiperbole po vremenskoj osi.

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 &= \frac{(\lambda u^2 + D)^2}{(\lambda u^2 + D)^2 - u^2} = \frac{(\lambda u^2 \pm \lambda B^2)^2}{(\lambda u^2 \pm \lambda B^2)^2 - u^2} \\ &= \frac{(u^2 \pm B^2)^2}{(u^2 \pm B^2)^2 - \lambda^{-2}u^2} = \frac{(u^2 \pm B^2)^2}{(u^2 \pm B^2)^2 - 4A^2u^2}.\end{aligned}$$

A i B su velika i mala os elipse ili hiperbole od kojih je dobivena Delaunayeva krivulja. □

Delaunayeva ploha ima konstantnu srednju zakrivljenost $H = \dfrac{-1}{2A}$.

4.2.3 α-evoluta degenerira u beskonačnost

U nastavku, bavimo se pitanjem kada je α-loksodroma rotacijske plohe $\mathbb{S}$ u Minkowskijevom prostoru asimptotska krivulja od $\mathbb{S}$, odnosno zanima nas kada je $k_\alpha = 0$.

Korolar 4.71 Neka je $\mathbb{S}$ jedna hiperbolička rotacijska ploha u $\mathbb{R}^3_1$ dana redom kartama (4.64), (4.78), (4.88) i (4.101). α-loksodroma ($0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$) je asimptotska krivulja plohe $\mathbb{S}$ ako za meridijan c rotacijske plohe $\mathbb{S}$ vrijedi odgovarajuća diferencijalna jednadžba iz tablice 4.7.

Dokaz. α-loksodroma je asimptotska krivulja plohe $\mathbb{S}$ ako je $k_\alpha = 0$ (vidi definiciju 1.48). Korolar 4.71 direktno slijedi iz propozicija 4.64, 4.65, 4.66 i 4.67 tako da uvrstimo $\lambda = 0$. □

Uočimo da iz korolara 4.71 slijedi da je α-evoluta $\mathbb{S}_\alpha$, degenerirala u točku u beskonačnosti.

Propozicija 4.72 Ako je $\mathbb{S}$ maksimalna rotacijska ploha s prostornom, vremenskom ili svjetlosnom osi ((4.64), (4.88) ili (4.101)), onda je $\dfrac{\pi}{4}$-loksodroma asimptotska krivulja plohe $\mathbb{S}$.

Dokaz. Ako je $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, onda je $a := \tan^2 \alpha = 1$. Nadalje, prema formuli za normalnu zakrivljenost α-loksodrome i formuli za srednju zakrivljenost (1.5) vrijedi:

$$k^P_{\frac{\pi}{4}} = k_1(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + k_2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{k_1 + k_2}{2} = \epsilon H.$$

Budući da je $\mathbb{S}$ maksimalna ploha vrijedi $H = 0$, onda je $k^P_{\frac{\pi}{4}} = 0$ pa po definiciji asimptotske krivulje 1.48 vrijedi da je $\dfrac{\pi}{4}$-loksodroma asimptotska krivulja. □

Isti zaključak ne možemo dobiti za vremenske plohe jer $k^v_{\frac{\pi}{4}} \neq H$.

Propozicija 4.73 Neka je $\dfrac{\pi}{4}$-loksodroma asimptotska krivulja rotacijske plohe $\mathbb{S}$. Ako je ploha $\mathbb{S}$ prostorna ploha, onda je ona katenoid. Nadalje, parametrizacija lančanice koja je nastala kao ruleta parabole po prostornoj osi, z-osi, vremenskoj osi, x-osi ili svjetlosnoj osi $l = \{(x, x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$ u $\mathbb{R}^3_1$ dana je jednadžbama u tablici 4.8.

Tablica 4.7: Jednadžbe za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ kojoj je α-loksodroma asimptotska krivulja

karta	ploha $\mathbb{S}$	α-loksodroma	jednadžbe
(4.64)	prostorna	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2+u^{2a}},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tan^2\alpha$
	vremenska	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{u^{2a}D^2}{u^{2a}D^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
		vremenska	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{u^{a^{-2}}D^2}{u^{a^{-2}}D^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
(4.78)	vremenska	prostorna	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-u^{2a}D^2}{u^{2a}D^2-1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
		vremenska	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{-u^{a^{-2}}D^2}{u^{a^{-2}}D^2-1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
(4.88)	prostorna	prostorna	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2-u^{2a}},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tan^2\alpha$
	vremenska	prostorna	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{u^{2a}D^2}{u^aD^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
		vremenska	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{u^{a^{-2}}D^2}{u^{a^{-2}}D^2+1},\ D\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a:=\tanh^2\alpha$
(4.101)	prostorna	prostorna	$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}}a=0,\quad a:=\tan^2\alpha$
	vremenska	prostorna	$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}}a=0,\quad a:=\tanh^2\alpha$
		vremenska	$-\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}a+\frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}}=0,\quad a:=\tanh^2\alpha$

Tablica 4.8: Jednadžbe lančanica u $\mathbb{R}^3_1$

lančanica	
ruleta parabole duž	jednadžbe
prostorne os	$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2+u^2}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
vremenske osi	$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2-u^2}, \quad D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
svjetlosne osi	$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = 0$

Dokaz. Ako je $\alpha = \frac{\pi}{4}$, onda je $a := \tan^2\alpha = 1$. Nadalje, prema formuli za normalnu zakrivljenost α-loksodrome i formuli za srednju zakrivljenost (1.5) vrijedi:

$$k^P_{\frac{\pi}{4}} = k_1(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + k_2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{k_1+k_2}{2} = \epsilon H.$$

Budući da je $\frac{\pi}{4}$-loksodroma asimptotska krivulja $k^P_{\frac{\pi}{4}} = \epsilon H = \lambda = 0$, onda slijedi da je $\mathbb{S}$ prostorni katenoid.

Neka je $c(u) = (u, 0, z(u))$ lančanica koja je nastala kao ruleta parabole po prostornoj osi, z-os. Ako u (4.71) uvrstimo $a = 1$ i $\lambda = 0$ dobivamo

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2+u^2}$$

karakterizaciju lančanice $c(u) = (u, 0, z(u))$ u Minkowskijevom prostoru. Nadalje, neka je $c(u) = (x(u), u, 0)$ lančanica koja je nastala kao ruleta parabole po vremenskoj osi, x-osi. Ako u (4.94) uvrstimo $a = 1$ i $\lambda = 0$ dobivamo

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{D^2}{D^2-u^2}$$

karakterizaciju lančanice $c(u) = (x(u), u, 0)$ u Minkowskijevom prostoru. Nadalje, neka je $c(u) = (x(u), u, 0)$ lančanica koja je nastala kao ruleta parabole po svjetlosnoj osi, l-osi. Ako u (4.106) uvrstimo $a = 1$ i $\lambda = 0$ dobivamo

$$\frac{\ddot{x}}{(-1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-\dot{x}}{(u-x)\sqrt{-1+\dot{x}^2}} = 0$$

karakterizaciju lančanice $c(u) = (x(u), u, 0)$ u Minkowskijevom prostoru. □

4.2.4 α-evoluta prstenastog torusa

Prstenasti torus u $\mathbb{R}^3$ je ploha koja nastaje rotacijom kružnice c oko osi Σ_2, pri čemu os ne siječe kružnicu. Fokalne plohe torusa su krivulje, os Σ_2 i središnja kružnica torusa Σ_1, odnosno kružnica koja nastaje tako da središte P_1 kružnice c, ostavlja trag kada se c rotira oko osi Σ_2. Budući da je dvoomjer

$$(P_1(p), P_2(p);\, p, P_\alpha(p)) := d = const.$$

konstantan, evolutu c_α α-loksodrome možemo odrediti kao perspektivno kolinearnu sliku kružnice c. Središte perspektivne kolineacije je točka P_1, a os kolineacije je os rotacije, pravac Σ_2. Stoga, krivulja c_α je konika, hiperbola, parabola ili elipsa, ovisno o tome je li izbježni pravac sječe kružnicu c, dira je ili s njom nema realnog presjeka.

Manhart u [51] postavlja pitanje kada će α-evoluta prstenastog torusa biti ploha 2. reda, odnosno kada će os rotacije Σ_2 biti i os krivulje c_α. Odgovor na to pitanje daje projektivna geometrija. To će biti onda kada za kut α bude vrijedila formula

$$\tan^2 \alpha = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \tag{4.111}$$

pri čemu je R radijus središnje kružnice Σ_1 i r radijus kružnice meridijana c. Nadalje, iz (4.111) slijedi da je traženi kut α-loksodrome kut Villarceau-ovih kružnica torusa $\mathbb{S}$. Nadalje, iz formule (4.111) vrijedi da je harmonijska evoluta ($\alpha = \frac{\pi}{4}$) torusa ploha 2. reda ako i samo ako je $R = \sqrt{2}r$.

Motivirani rezultatima iz euklidskog prostora, najprije ćemo izvesti parametrizacije torusa, zatim parametizaciju harmonijskih evoluta torusa u Minkowskijevom prostoru. Prstenasti torus $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$ se definira analogno kao u euklidskom prostoru samo euklidskim očima gledano kružnice u Minkowskijevom prostoru su hiperbole. Razlikujemo sedam slučajeva. Radi jednostavnosti u nastavku ćemo uvesti eksponente x, z ili l kod oznake torusa. Ti eksponenti označavaju redom vremensku, prostornu ili svjetlosnu os rotacije.

Budući da se konike pojavljuju kao generatrise harmonijske evolute slijedi napomena 4.74 za mali podsjetnik.

Napomena 4.74 Opći oblik jednadžbe krivulje 2. reda u euklidskom prostoru je

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Ako je

$$\delta = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad S = a + c \quad \text{i} \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

onda krivulje 2. reda možemo klasificirati kako je prikazano u tablici 4.9:

Tablica 4.9: Klasifikacija krivulja 2. reda u $\mathbb{R}^3$

$\delta \neq 0$	$\Delta \neq 0$	$\delta > 0,\ S\cdot\Delta < 0$ elipsa
		$\delta < 0$ hiperbola
$\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	parabola

Konike u Minkowskijevom prostoru definiraju se analogno kao u euklidskom, iako te krivulje drugačije izgledaju. Više detalja se može naći u [1, 72].

Torus s prostornom osi

Neka je $\mathbb{S}^z$ torus u $\mathbb{R}^3_1$ dobiven rotacijom kružnice $c(u) = (R + r\cosh u, 0, r\sinh u)$ oko prostorne osi, z-osi. Uočimo da kružnica $c(u)$ ima središte u točki $(R, 0, 0)$ i imaginarni radijus, ir. Parametrizaciju torusa $\mathbb{S}^z$ dobivamo koristeći propoziciju 1.52. Ako je torus $\mathbb{S}^z$ prostorna ploha, onda karta $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^z$, koja parametrizira torus $\mathbb{S}^z$ ima oblik

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cosh u \\ 0 \\ r\sinh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cosh u)\cosh v \\ (R + r\cosh u)\sinh v \\ r\sinh u \end{pmatrix}. \tag{4.112}$$

Ako je torus $\mathbb{S}^z$ vremenska ploha, onda razlikujemo dva slučaja. Torus $\mathbb{S}^z$ ima oblik

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\sinh u \\ 0 \\ r\cosh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\sinh u)\cosh v \\ (R + r\sinh u)\sinh v \\ r\cosh u \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

gdje je kružnica meridijana $c(u) = (R + r\sinh u, 0, r\cosh u)$ vremenska krivulja, odnosno kružnica s realnim radijusom r i središtem u točki $(R, 0, 0)$ ili karta oblika

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos u \\ r\sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\sinh v \\ (R + r\cos u)\cosh v \\ r\sin u \end{pmatrix} \tag{4.114}$$

gdje je kružnica meridijana $c(u) = (0, R + r\cos u, r\sin u)$ prostorna krivulja, euklidska kružnica (slika 4.13).

Harmonijska evoluta torusa (4.112) je rotacijska ploha

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= \frac{R}{R + 2r\cosh u} \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cosh u \\ 0 \\ -r\sinh u \end{pmatrix} \\ &= \frac{R}{R + 2r\cosh u}\Big((R + r\cosh u)\cosh v, (R + r\cosh u)\sinh v, -r\sinh u\Big). \end{aligned}$$

Meridijan krivulja harmonijske evolute prostornog torusa (4.112) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{R}{R + 2r\cosh u}\Big(R + r\cosh u, 0, -r\sinh u\Big). \tag{4.115}$$

Implicitni oblik te krivulje je

$$z^2 = (1 - \frac{4r^2}{R^2})x^2 + 2Rx(\frac{2r^2}{R^2} - 1) - r^2 + R^2, \tag{4.116}$$

iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1 + \dfrac{4r^2}{R^2}$, $\Delta = r^2$ i $S = -\dfrac{4r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.115) harmonijske evolute prostornog torusa (4.112) elipsa ako je $4r^2 > R^2$, hiperbola ako je $4r^2 < R^2$ i parabola ako je $4r^2 = R^2$. Nadalje, uočavamo da ako je $R = \sqrt{2}r$, onda u formuli (4.116) linearni član nestaje. To znači da se os rotacije poklapa s osi konike, odnosno da je harmonijska evoluta ploha 2. reda. Parametrizacija te plohe je

$$\bar{f}(u,v) = \frac{r}{\sqrt{2} + 2\cosh u}\Big((2 + \sqrt{2}\cosh u)\cosh v, (2 + \sqrt{2}\cosh u)\sinh v, -\sqrt{2}\sinh u\Big)$$

i njena implicitna jednadžba je $x^2 - y^2 + z^2 = r^2$. Gledano euklidskim očima ta ploha je jednoplošni hiperboloid.

Harmonijska evoluta torusa (4.113) je rotacijska ploha

$$\begin{aligned}\bar{f}(u,v) &= \frac{R}{R+2r\sinh u}\begin{pmatrix}\cosh v & \sinh v & 0\\ \sinh v & \cosh v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R+r\sinh u\\ 0\\ -r\cosh u\end{pmatrix}\\ &= \frac{R}{R+2r\sinh u}\Big((R+r\sinh u)\cosh v,(R+r\sinh u)\sinh v,-r\cosh u\Big).\end{aligned}$$

Meridijan krivulja harmonijske evolute vremenskog torusa (4.113) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{R}{R+2r\sinh u}\Big(R+r\sinh u,0,-r\cosh u\Big). \tag{4.117}$$

Implicitni oblik te krivulje je

$$z^2 = (1+\frac{4r^2}{R^2})x^2 - 2Rx(\frac{2r^2}{R^2}+1) + r^2 + R^2, \tag{4.118}$$

iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1-\dfrac{4r^2}{R^2}$, $\Delta = -r^2$ i $S = \dfrac{4r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.117) harmonijske evolute vremenskog torusa (4.113) elipsa ako je $4r^2 < (iR)^2$, hiperbola ako je $4r^2 > (iR)^2$ i parabola ako je $4r^2 = (iR)^2$. Nadalje, uočavamo da ako je $R = i\sqrt{2}r$, onda u formuli (4.118) linearni član nestaje. To znači da se os rotacije poklapa s osi konike, odnosno da je harmonijska evoluta ploha 2. reda. Parametrizacija te plohe je

$$\bar{f}(u,v) = \frac{ir}{i\sqrt{2}+2\sinh u}\Big((2i+\sqrt{2}\sinh u)\cosh v,(2i+\sqrt{2}\sinh u)\sinh v,-\sqrt{2}\cosh u\Big)$$

i njena implicitna jednadžba je $x^2 - y^2 + z^2 = -r^2$. Gledano euklidskim očima ta ploha je dvoplošni hiperboloid.

Harmonijska evoluta torusa (4.114) je rotacijska ploha (slika 4.13)

$$\begin{aligned}\bar{f}(u,v) &= \frac{R}{R+2r\cos u}\begin{pmatrix}\cosh v & \sinh v & 0\\ \sinh v & \cosh v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ R+r\cos u\\ -r\sin u\end{pmatrix}\\ &= \frac{R}{R+2r\cos u}\Big((R+r\cos u)\sinh v,(R+r\cos u)\cosh v,-r\sin u\Big).\end{aligned} \tag{4.119}$$

Meridijan krivulja harmonijske evolute (4.119) vremenskog torusa (4.114) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{R}{R+2r\cos u}\Big(0,R+r\cos u,-r\sin u\Big). \tag{4.120}$$

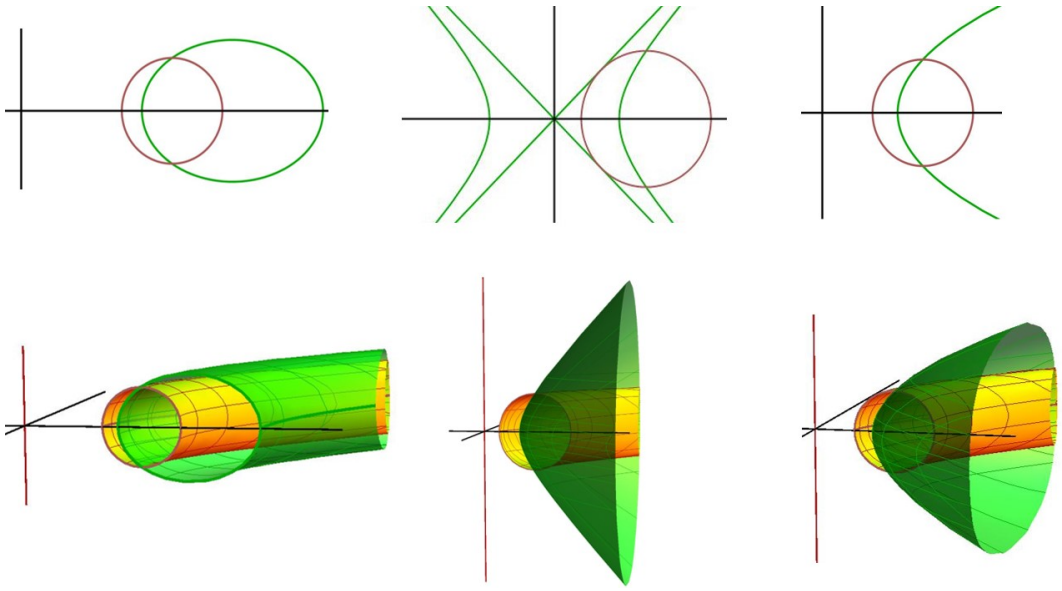
Ta krivulja je prostorna krivulja budući da se nalazi u prostornoj ravnini iz čega slijedi da je harmonijska evoluta (4.119) vremenska ploha. Implicitni oblik krivulje (4.120) je:

$$z^2 = (\frac{4r^2}{R^2} - 1)y^2 + 2Ry(1 - \frac{2r^2}{R^2}) + r^2 - R^2. \tag{4.121}$$

Budući da je $\delta = 1 - \frac{4r^2}{R^2}$, $\Delta = r^2$ i $S = -2 + \frac{4r^2}{R^2}$, onda iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.120) harmonijske evolute prostornog torusa (4.114) elipsa ako je $4r^2 < R^2$, hiperbola ako je $4r^2 > R^2$ i parabola ako je $4r^2 = R^2$ (vidi sliku 4.13). Nadalje, uočavamo da ako je $R = \sqrt{2}r$, onda u formuli (4.121) linearni član nestaje. To znači da se os rotacije poklapa s osi konike, odnosno da je harmonijska evoluta ploha 2. reda. Parametrizacija te plohe je

$$\bar{f}(u,v) = \frac{r}{\sqrt{2} + 2\cos u}\Big((\sqrt{2} + 2\cos u)\sinh v, (\sqrt{2} + 2\cos u)\cosh v, -\sqrt{2}\sin u\Big) \tag{4.122}$$

i njena implicitna jednadžba je $-x^2 + y^2 - z^2 = r^2$. Gledano euklidskim očima ta ploha je dvoplošni hiperboloid (slika 4.13 u sredini).



Slika 4.13: Torus (4.114) (žuta) i njegova harmonijska evoluta (4.119) (zelena) lijevo ($r = 1$ i $R = 3$), sredina ($r = 3$ i $R = \sqrt{2}r$) i desno ($r = 1$ i $R = 2$)

Sumiranjem dobivenih razultata slijede propozicije:

Propozicija 4.75 Neka je $\mathbb{S}^z$ torus nastao rotacijom meridijana oko prostorne osi. Harmonijska evoluta torusa $\mathbb{S}^z$ je rotacijska ploha s prostornom osi koja je nastala rotacijom krivulje 2. reda.

Propozicija 4.76 Ako je torus $\mathbb{S}^z$ prostorna ili vremenska ploha s prostornim meridijanom, onda je harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}^z$, ploha 2. reda, hiperboloid ako i samo ako je $R = \sqrt{2}r$.

Propozicija 4.77 Ako je torus $\mathbb{S}^z$ vremenska ploha s vremenskim meridijanom, onda je harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}^z$, ploha 2. reda, hiperboloid ako i samo ako je $R = i\sqrt{2}r$.

Torus s vremenskom osi

Neka je $\mathbb{S}^x$ torus u $\mathbb{R}^3_1$ dobiven rotacijom kružnice $c(u) = (r\cosh u, 0, R + r\sinh u)$ s imaginarnim radijusom ir i sa središtem u točki $(0, R, 0)$ oko vremenske osi, x-osi. Parametrizaciju torusa dobivamo koristeći propoziciju 1.53. Ako je torus $\mathbb{S}^x$ prostorna ploha, onda karta $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^x$, koja parametrizira torus $\mathbb{S}$ ima oblik

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cosh u \\ R + r\sinh u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cosh u \\ (R + r\sinh u)\cos v \\ -(R + r\sinh u)\sin v \end{pmatrix}. \quad (4.123)$$

Harmonijska evoluta torusa (4.123) je rotacijska ploha

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= \frac{R}{R + 2r\sinh u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\cosh u \\ R + r\sinh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R}{R + 2r\sinh u}\Big(-r\cosh u, (R + r\sinh u)\cos v, (R + r\sinh u)\sin v\Big). \end{aligned}$$

Meridijan krivulja harmonijske evolute prostornog torusa (4.123) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{R}{R + 2r\sinh u}\Big(-r\cosh u, R + r\sinh u, 0\Big). \quad (4.124)$$

Implicitni oblik te krivulje je:

$$x^2 = (\frac{4r^2}{R^2} + 1)y^2 - 2Ry(\frac{2r^2}{R^2} + 1) + r^2 + R^2, \quad (4.125)$$

iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1 - \dfrac{4r^2}{R^2}$, $\Delta = -r^2$ i $S = \dfrac{4r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.124) harmonijske evolute prostornog torusa (4.123) elipsa ako je $4r^2 < (iR)^2$, hiperbola ako je $4r^2 > (iR)^2$ i parabola ako je $4r^2 = (iR)^2$. Nadalje, uočavamo da ako je $R = i\sqrt{2}r$, onda u formuli (4.125) linearni član nestaje. To znači da se os rotacije poklapa s osi konike, odnosno da je harmonijska evoluta ploha 2. reda. Parametrizacija te plohe je

$$\bar{f}(u,v) = \frac{ir}{i\sqrt{2} + 2\sinh u}\Big(-\sqrt{2}\cosh u, (2i + \sqrt{2}\sinh u)\cos v, -(2i + \sqrt{2}\sinh u)\sin v\Big)$$

i njena implicitna jednadžba je $x^2 + y^2 + z^2 = -r^2$. U euklidskom prostoru nemamo ovu plohu, iako bi mogli reći da je ta ploha elipsoid s imaginarnim radijusom.

Ako je torus $\mathbb{S}^x$ vremenska ploha, onda njegova parametrizacija ima oblik

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sinh u \\ R + r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sinh u \\ (R + r\cosh u)\cos v \\ -(R + r\cosh u)\sin v \end{pmatrix} \tag{4.126}$$

ovo ploha na slici 4.14, lijevo izgleda kao jednoplošni hiperboloid, ali to nije. Harmonijska evoluta torusa (4.126) je rotacijska ploha (slika 4.14)

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= \frac{R}{R + 2r\cosh u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sinh u \\ R + r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R}{R + 2r\cosh u}\Big(- r\sinh u, (R + r\cosh u)\cos v, -(R + r\cosh u)\sin v\Big). \end{aligned} \tag{4.127}$$

Meridijan krivulja harmonijske evolute prostornog torusa (4.126) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{R}{R + 2r\cosh u}\Big(- r\sinh u, R + r\cosh u, 0\Big). \tag{4.128}$$

Implicitni oblik te krivulje je:

$$x^2 = (1 - \frac{4r^2}{R^2})y^2 + 2Ry(\frac{2r^2}{R^2} - 1) - r^2 + R^2 \tag{4.129}$$

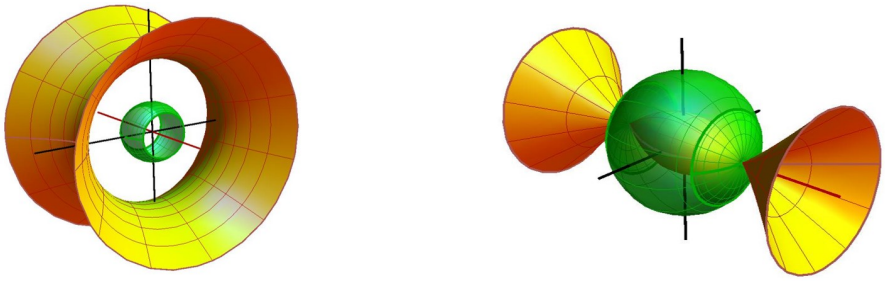
iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1 + \dfrac{4r^2}{R^2}$, $\Delta = r^2$ i $S = -\dfrac{4r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.128) harmonijske evolute vremenskog torusa (4.126) elipsa ako je $4r^2 > R^2$, hiperbola ako je $4r^2 < R^2$ i parabola ako je $4r^2 = R^2$. Nadalje, iz formule (4.129) uočavamo da ako je $R = \sqrt{2}r$, onda linearni član u toj formuli nestaje. To dalje znači da se os rotacije poklapa s osi konike, odnosno da je harmonijska evoluta ploha 2. reda. Parametrizacija te plohe je

$$\bar{f}(u,v) = \frac{r}{2 + \sqrt{2}\cosh u}\Big(- \sqrt{2}\sinh u, (2 + \sqrt{2}\cosh u)\cos v, -(2 + \sqrt{2}\cosh u)\sin v\Big)$$

i njena implicitna jednadžba je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Gledano euklidskim očima ta ploha je elipsoid (vidi sliku 4.14 lijevo).

Propozicija 4.78 Neka je $\mathbb{S}^x$ torus nastao rotacijom meridijana oko vremenske osi. Harmonijska evoluta torusa $\mathbb{S}^x$ je rotacijska ploha s vremenskom osi koja je nastala rotacijom krivulje 2. reda.

Propozicija 4.79 Ako je torus $\mathbb{S}^x$ vremenska (prostorna) ploha, onda je harmonijska evoluta plohe $\mathbb{S}^x$ ploha 2. reda, elipsoid ako i samo ako je $R = \sqrt{2}r$ $(R = i\sqrt{2}r)$.



Slika 4.14: Torus (4.126) (žuta) i njegova harmonijska evoluta (4.127) (zelena) $r = 2$ i $R = 2\sqrt{2}$ (lijevo) i $r = -2$ i $R = 2\sqrt{2}$ (desno)

Torus sa svjetlosnom osi

Neka je $\mathbb{S}^l$ torus u $\mathbb{R}^3_1$ dobiven rotacijom kružnice $c(u) = (R + r\cosh u, 0, r\sinh u)$ s imaginarnim radijusom ir i sa središtem u $(R, 0, 0)$ oko svjetlosne osi $l := \{(x, x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Za parametrizaciju torusa nećemo koristiti svjetlosnu bazu kao u propoziciji 1.54, nego kanonsku bazu, tako da prostorni torus $\mathbb{S}^l$ dan kartom $f \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^l$ ima oblik

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\cosh u \\ r\sinh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})(R + r\cosh u) - \frac{v^2}{2}(r\sinh u) \\ \frac{v^2}{2}(R + r\cosh u) + (1-\frac{v^2}{2})r\sinh u \\ v\,(R + r\cosh u - r\sinh u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.130}$$

Harmonijska evoluta torusa (4.130) je rotacijska ploha

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= \frac{R\left(\cosh\frac{u}{2} + \sinh\frac{u}{2}\right)}{(2r+R)\cosh\frac{u}{2} + (-2r+R)\sinh\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R+r\cosh u - 2r\sinh u \\ -r\sinh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R\left(\cosh\frac{u}{2} + \sinh\frac{u}{2}\right)}{(2r+R)\cosh\frac{u}{2} + (-2r+R)\sinh\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})(R+r\cosh u) - r(2+\frac{v^2}{2})r\sinh u \\ \frac{v^2}{2}(R+r\cosh u) - r(1+\frac{v^2}{2})r\sinh u \\ v\,(R+r\cosh u - r\sinh u) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^u R}{2r + e^u R} \begin{pmatrix} (1+\frac{v^2}{2})(R + r\cosh u) - r(2+\frac{v^2}{2})r\sinh u \\ \frac{v^2}{2}(R + r\cosh u) - r(1+\frac{v^2}{2})r\sinh u \\ v\,(R + r\cosh u - r\sinh u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Meridijan harmonijske evolute prostornog torusa (4.130) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{e^u R}{2r + e^u R}\Big(R + r\cosh u - 2r\sinh u, -r\sinh u, 0\Big). \tag{4.131}$$

Tu krivulju možemo zapisati i na sljedeći način:

$$r^2(R - 2x + 2y)^2 = R^2((R-x)^2 - y^2)$$
$$\Big(4\frac{r^2}{R^2} - 1\Big)x^2 - 8\frac{r^2}{R^2}xy + \Big(4\frac{r^2}{R^2} + 1\Big)y^2 + \Big(-4\frac{r^2}{R} + 2R\Big)x + 4\frac{r^2}{R}y + r^2 - R^2 = 0$$

iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1$, $\Delta = r^2$ i $S = -\dfrac{8r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.131) harmonijske evolute prostornog torusa (4.130) hiperbola.

Ako je torus $\mathbb{S}^l$ sa svjetlosnom osi vremenska ploha, onda njegova parametrizacija ima oblik

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{v^2}{2} & -\dfrac{v^2}{2} & v \\ \dfrac{v^2}{2} & 1 - \dfrac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\sinh u \\ r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \dfrac{v^2}{2})(R + r\sinh u) - \dfrac{v^2}{2}(r\cosh u) \\ \dfrac{v^2}{2}(R + r\sinh u) + (1 - \dfrac{v^2}{2})r\cosh u \\ v\,(R + r\sinh u - r\cosh u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Harmonijska evoluta torusa (4.132) je rotacijska ploha

$$\begin{aligned} \bar{f}(u,v) &= \frac{R\Big(\cosh\frac{u}{2} + \sinh\frac{u}{2}\Big)}{(-2r+R)\cosh\frac{u}{2} + (2r+R)\sinh\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} 1+\dfrac{v^2}{2} & -\dfrac{v^2}{2} & v \\ \dfrac{v^2}{2} & 1 - \dfrac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\sinh u - 2r\cosh u \\ -r\cosh u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R\Big(\cosh\frac{u}{2} + \sinh\frac{u}{2}\Big)}{(-2r+R)\cosh\frac{u}{2} + (2r+R)\sinh\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} (1 + \dfrac{v^2}{2})(R + r\sinh u) - r(2 + \dfrac{v^2}{2})r\cosh u \\ \dfrac{v^2}{2}(R + r\sinh u) - r(1 + \dfrac{v^2}{2})r\cosh u \\ v\,(R + r\sinh u - r\cosh u) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^u R}{-2r + e^u R} \begin{pmatrix} (1 + \dfrac{v^2}{2})(R + r\sinh u) - r(2 + \dfrac{v^2}{2})r\cosh u \\ \dfrac{v^2}{2}(R + r\sinh u) - r(1 + \dfrac{v^2}{2})r\cosh u \\ v\,(R + r\sinh u - r\sinh u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Meridijan harmonijske evolute prostornog torusa (4.132) ima oblik

$$c_{\frac{\pi}{4}}(u) = \bar{f}(u,0) = \frac{e^u R}{-2r + e^u R}\Big(R + r\sinh u - 2r\cosh u, -r\cosh u, 0\Big). \tag{4.133}$$

Tu krivulju možemo zapisati na sljedeći način:

$$R^2(R-x)^2 + r^2(R-2x+2y)^2 = R^2y^2$$
$$\Big(4\frac{r^2}{R^2}+1\Big)x^2 - 8\frac{r^2}{R^2}xy + \Big(4\frac{r^2}{R^2}-1\Big)y^2 - \Big(4\frac{r^2}{R}+2R\Big)x + 4\frac{r^2}{R}y + r^2 + R^2 = 0$$

iz čega je vidljivo da je to krivulja 2. reda. Budući da je $\delta = -1$, $\Delta = -r^2$ i $S = \dfrac{8r^2}{R^2}$, onda gledano euklidskim očima iz napomene 4.74 slijedi da je meridijan (4.133) harmonijske evolute prostornog torusa (4.132) hiperbola.

Propozicija 4.80 Neka je $\mathbb{S}^l$ torus nastao rotacijom meridijana oko svjetlosne osi $l := \{(x,x,0)\colon x \in \mathbb{R}\}$. Harmonijska evoluta torusa $\mathbb{S}^l$ je rotacijska ploha sa svjetlosnom osi koja je nastala rotacijom krivulje 2. reda.

Sumiranjem rezultata iz propozicija 4.75, 4.78 i 4.80 slijedi teorem 4.81.

Teorem 4.81 Harmonijska evoluta rotacijskog torusa $\mathbb{S}$ u Minkowskijevom prostoru je koaksijalna rotacijska ploha dobivena rotacijom konike, krivulje 2. reda.

Poglavlje 5

Novi primjeri maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$

U ovom poglavlju cilj je konstruirati nove primjere maksimalnih ploha, prostornih ploha kojima je $H = 0$ u Minkowskijevom prostoru. Za konstrukciju ploha koristit ćemo Björlingovu formulu. To je integralna formula, tako da ona kao i sve ostale integralne formule ima jedan veliki nedostatak, a to je da je anti-derivacija racionalne ili algebarske funkcije ponekad neracionalna ili čak nealgebarska funkcija. Autori u ([49]) otkrivaju kako prevladati tu poteškoću. Björlingova formula je jedan koristan alat za konstrukciju maksimalnih ploha uz pomoć zadane krivulje tzv. krivulje jezgre i vektorskog polja. Za krivulje jezgre odabrat ćemo cikloidne krivulje ([63]), a za vektorsko polje odabrat ćemo linearnu kombinaciju polja normale i binormale ([33, 46, 53]). Budući da su nam krivulje jezgre Minkowskijeve cikloide, onda ćemo poglavlje početi s izvodom parametrizacija cikloidnih krivulja u Minkowskijevom prostoru najprije koristeći njihov kinematički način tvorbe, a zatim ćemo pokazati da se iste mogu dobiti i kao projekcije sfernih općih zavojnica kao u euklidskom prostoru.

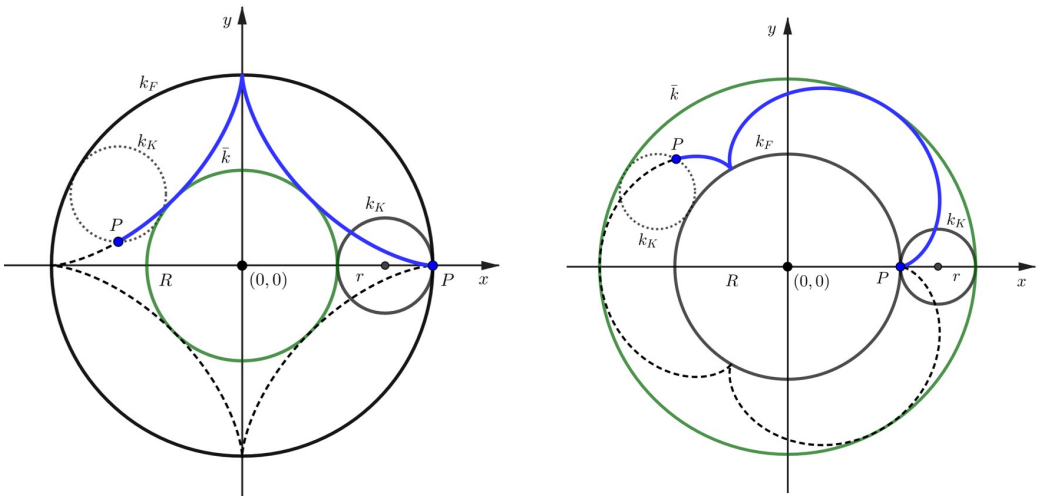
5.1 Cikloidne krivulje u $\mathbb{R}^2_1$

Na samom početku definirat ćemo cikloide u euklidskom prostoru. Cikloide su krivulje koje nastaju kotrljanjem bez klizanja neke kružnice po nekom fiksnom pravcu ili nekoj fiksnoj kružnici. Preciznije:

Definicija 5.1 Neka je P točka na kružnici k_K polumjera r. Krivulja koju opisuje točka P dok se kružnica k_K kotrlja bez klizanja po čvrstom pravcu zove se cikloida.

Definicija 5.2 Neka se točka P nalazi na kružnici k_K polumjera r. Krivulja koju opisuje točka P dok se kružnica k_K iznutra (izvana) kotrlja bez klizanja po fiksnoj kružnici k_F polumjera R zove se hipocikloida (epicikloida) (slika 5.1, lijevo (desno)).

Napomena 5.3 Ako se točka P nalazi unutar (van) kružnice k_K, onda kotrljanjem na



Slika 5.1: Hipocikloida $R = 6$, $r = \dfrac{3}{2}$ (lijevo) i epicikloida $R = 6$, $r = 2$ (desno)

isti način dobije se krivulja koja se zove skraćena (produljena) cikloida, epicikloida ili hipocikloida.

Ako koordinatni sustav odaberemo tako da fiksna kružnica polumjera R ima središte u ishodištu koordinatnog sustava i početna pozicija točke P pomične kružnice $k_K((R+r,0),r)$ je točka $(R,0)$, onda epicikloida ima parametrizaciju

$$c(t) = \left((R+r)\cos t - r\cos\left(t + \frac{R}{r}t\right), (R+r)\sin t - r\sin\left(t + \frac{R}{r}t\right)\right). \tag{5.1}$$

Ako kružnica k_K ima negativan radijus, onda se dobije parametrizacija hipocikloide. Prirodna jednadžba epicikloide i hipocikloide u $\mathbb{R}^2$ je

$$\frac{s^2}{c^2} + \frac{\rho^2}{d^2} = 1.$$

Ako je $d < c\,(d > c)$, onda je krivulja epicikloida (hipocikloida). Nadalje, uočimo da vrhovi cikloide leže na kružnici $\bar{k}$, koja je koncentrična fiksnoj kružnici k_F (vidi sliku 5.1, zelene kružnice). Za epicikloide i hipocikloide kružnice $\bar{k}$ i k_F su realne. Ako je $k_F\,(\bar{k})$ imaginarna kružnica tada dobivene krivulje nazivamo hipercikloide (paracikloide) (vidi [14]). Parametarska jednadžba hipercikloide je

$$c(t) = \left(a\cosh\left(\frac{bt}{a}\right)\sin t + b\sinh\left(\frac{bt}{a}\right)\cos t, -a\cosh\left(\frac{bt}{a}\right)\cos t + b\sinh\left(\frac{bt}{a}\right)\sin t\right)$$

i paracikloide je

$$c(t) = \left(b\cosh\left(\frac{bt}{a}\right)\cos t + a\sinh\left(\frac{bt}{a}\right)\sin t, b\cosh\left(\frac{bt}{a}\right)\sin t - a\sinh\left(\frac{bt}{a}\right)\cos t\right).$$

Prirodna jednadžba hipercikloide i paracikloide je

$$\frac{s^2}{c^2} - \frac{\rho^2}{d^2} = \pm 1 \tag{5.2}$$

gdje je $c^2 = \dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$ i $d^2 = \dfrac{(a^2+b^2)^2}{b^2}$. Paracikloide imaju 1 s desne strane jednadžbe (5.2), a hipercikloide -1.

Napomena 5.4 Dane parametrizacije epi- i hipocikloida karakterizirane su činjenicom da norma $\|\dot{c}\|$ sadrži funkciju cos, dok kod hiper- i paracikloida norma sadrži funkciju cosh i sinh redom.

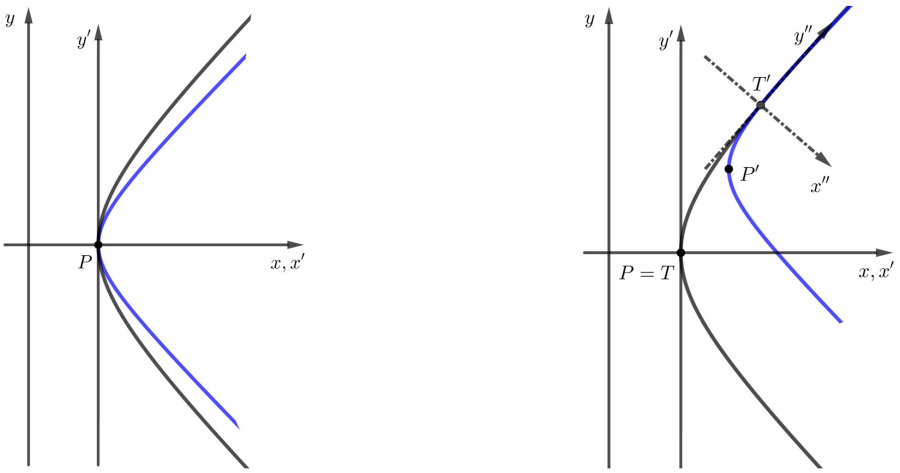
Sada ćemo promatrati cikloide u Minkowskijevoj ravnini sa pseudo-skalarnim produktom $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2$. Cikloide u $\mathbb{R}^2_1$ definiraju se analogno kao u euklidskom prostoru, samo u Minkowskijevom prostoru kružnice su jednakostranične hiperbole iz euklidskog prostora.

U nastavku izvest ćemo parametrizaciju Minkowskijeve hipocikloide. Prema definiciji cikloide kružnice se u svakoj točki tangiraju. U Minkowskijevoj ravnini to je moguće samo ako su kružnice istog kauzalnog tipa. Pretpostavimo da su fiksna kružnica $c_1(t)$ radijusa R i pomična kružnica $c_2(u)$ radijusa r prostorne krivulje. Budući da su Minkowskijeve kružnice, euklidske hiperbole na početku, ograničit ćemo se na njihove desne grane. Nadalje, pretpostavimo da je početna pozicija točke P, točka $P = c_1(0) = c_2(0)$. Ako fiksna kružnica ima središte u ishodištu koordinatnog sustava, onda njena parametrizacija ima oblik $c_1(t) = (R\cosh t, R\sinh t)$. Budući da želimo izvesti parametrizaciju Minkowskijeve hipocikloide, onda kružnica c_2 ima središte u točki $(R-r, 0)$ i njena parametrizacija je $c_2(u) = ((R-r) + r\cosh u, r\sinh u)$. Kotrljanjem bez klizanja kružnice c_2 po kružnici c_1 točka P s početnom pozicijom $(R, 0)$, opisuje krivulju, Minkowskijevu hipocikloidu.

Budući da imamo kotrljanje bez klizanja, onda duljina luka od točke P do točke u kojoj se kružnice diraju $c_1(t) = c_2(u)$ je ista kod obje kružnice, odnosno vrijedi

$$\int_0^t \|\dot{c}_1(t)\|dt = \int_0^u \|\dot{c}_2(u)\|du,$$

iz čega nadalje slijedi $Rt = ru$. U nastavku uvodimo pomični koordinatni sustav s ciljem pojednostavljivanja parametrizacije Minkowskijeve hipocikloide. Ishodište pomaknutog koordinatnog sustava bit će diralište kružnica, $x-$os bit će normala i $y-$os tangenta pomične kružnice (vidi sliku 5.2). Dobit ćemo ga iz polaznog najprije translacijom za vektor $v = (R\cosh t, R\sinh t)$, zatim rotacijom za hiperbolički kut t. To se u koordinatama ogleda na sljedeći način. Koordinate (x, y) točke T polaznog koordinatnog sustava i njene koordinate (x', y') u translatiranom koordinatnom sustavu za vektor v povezane su na sljedeći način $x = x' + R\cosh t$ i $y = y' + R\sinh t$. Nadalje, koordinate (x', y') točke T i koordinate



Slika 5.2: Dvije različite pozicije pomične i fiksne kružnice u Minkowskijevoj ravnini

(x'', y'') u rotiranom koordinatnom sustavu, u smislu hiperboličke rotacije za t povezane su s $x' = x'' \cosh t + y'' \sinh t$ i $y' = y'' \cosh t + x'' \sinh t$. Stoga, generirajuća točka P pomične kružnice u pomaknutom koordinatnom sustavu ima koordinate $(r \cosh u - r, -r \sinh u)$. Iz čega slijedi da parametrizacija Minkowskijeve hipocikloide ima oblik

$$c(t) = ((R - r) \cosh t + r \cosh (t - u), (R - r) \sinh t + r \sinh (t - u)).$$

Ako promatramo klizanje druge grane jednakostranične hiperbole, onda točka P u pomaknutom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-r \cosh u - r, r \sinh u)$. U tom slučaju Minkowskijeva hipocikloida ima parametrizaciju

$$c(t) = ((R - r) \cosh t - r \cosh (t - u), (R - r) \sinh t - r \sinh (t - u)).$$

Nadalje, ako se kružnica c_2 kotrlja s vanjske strane kružnice c_1 dobivamo Minkowskijevu epicikloidu. Njena parametrizacija je

$$c(t) = ((R + r) \cosh t - r \cosh (t + u), (R + r) \sinh t - r \sinh (t + u)). \tag{5.3}$$

Ako promatramo klizanje po drugoj grani, onda Minkowskijeva epicikloida ima parametrizaciju

$$c(t) = ((R + r) \cosh t + r \cosh (t + u), (R + r) \sinh t + r \sinh (t + u)). \tag{5.4}$$

Isto kao u euklidskom prostoru, Minkowskijeve hipocikloide možemo zadati s parametrizacijama Minkowskijevih epicikloida (5.3) i (5.4) uzimajući r negativan. Minkowskijeve cikloide zadane parametarski formulom (5.3) su vremenske krivulje s prirodnom jednadžbom

$$\frac{s^2}{c^2} - \frac{\rho^2}{d^2} = 1.$$

Minkowskijeve cikloide zadane parametarski formulom (5.4) su prostorne krivulje s prirodnom jednadžbom

$$\frac{s^2}{c^2} - \frac{\rho^2}{d^2} = -1.$$

Parametrizacija cikloidnih krivulja generiranih s vremenskim kružnicama, odnosno tako da se vremenska kružnica kotrlja bez klizanja po vremenskoj kružnici se dobije tako da se zamjene x i y koordinate u prijašnjim parametrizacijama. Kauzalni karakter krivulje će se promijeniti, dok će prirodne jednadžbe ostati iste.

Minkowskijeve hipercikloide i paracikloide su dane redom parametrizacijama:

$$c(t) = \left(a\cos\left(\frac{bt}{a}\right)\cosh t + b\sin\left(\frac{bt}{a}\right)\sinh t, a\cos\left(\frac{bt}{a}\right)\sinh t + b\sin\left(\frac{bt}{a}\right)\cosh t\right), \quad (5.5)$$
$$c(t) = \left(b\cos\left(\frac{bt}{a}\right)\cosh t - a\sin\left(\frac{bt}{a}\right)\sinh t, b\cos\left(\frac{bt}{a}\right)\sinh t - a\sin\left(\frac{bt}{a}\right)\cosh t\right).$$

Njihova prirodna jednadžba je:

$$\frac{s^2}{c^2} + \frac{\rho^2}{d^2} = 1,$$

gdje je $c^2 = \dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^2}$ i $d^2 = \dfrac{(a^2+b^2)^2}{b^2}$.

Napomena 5.5 Minkowskijeve hiper- i paracikloide su karakterizirane činjenicom da $\|\dot{c}\|$ sadrži redom funkciju cos i sin.

Ovime smo gotovi s izvodom parametrizacija Minkowskijevih cikloida koristeći njihov kinematički način tvorbe. U nastavku prikazat ćemo jedan drugi način kako možemo dobiti iste. Naime, Minkowskijeve cikloide možemo dobiti i kao projekcije sfernih općih zavojnica, krivulja konstantnog nagiba. Teoremi 5.6 i 5.7 navedeni u nastavku nam govore o tome.

Neka je c regularna krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ parametrizirana duljinom luka ili pseudo-luka. Za krivulju c kažemo da je opća zavojnica ako postoji konstantan vektor $u \in \mathbb{R}^3_1$, $u \neq 0$, takav da $\langle T, u\rangle = const. =: \alpha$, gdje je $T = \dot{c}$. Nadalje, opće zavojnice su karakterizirane sljedećim svojstvom. Ako je prostorna ili vremenska krivulja c opća zavojnica sa zakrivljenošću κ i torzijom τ, onda vrijedi

$$\frac{\tau}{\kappa} = const. =: A,$$

i obrnuto, za krivulju c koja nema svjetlosnu normalu ([44]). Smjer određen s vektorom u naziva se os zavojnice.

Ako opća zavojnica leži na sferi, hiperboličkoj ravnini $\mathbb{H}^2$ ili pseudo-sferi $\mathbb{S}^2_1$, onda je nazivamo sferna opća zavojnica. Minkowskijeva cikloida se može dobiti iz sferne opće zavojnice kako je opisano u teoremima koji slijede:

Teorem 5.6 Neka je c sferna opća zavojnica u $\mathbb{R}^3_1$.

1. Projekcija od c na ravninu ortogonalnu na vektor u je Euklidska hipocikloida ako i samo ako je vektor u vremenski i c je vremenska krivulja koja leži na $\mathbb{S}^2_1(p,r)$.

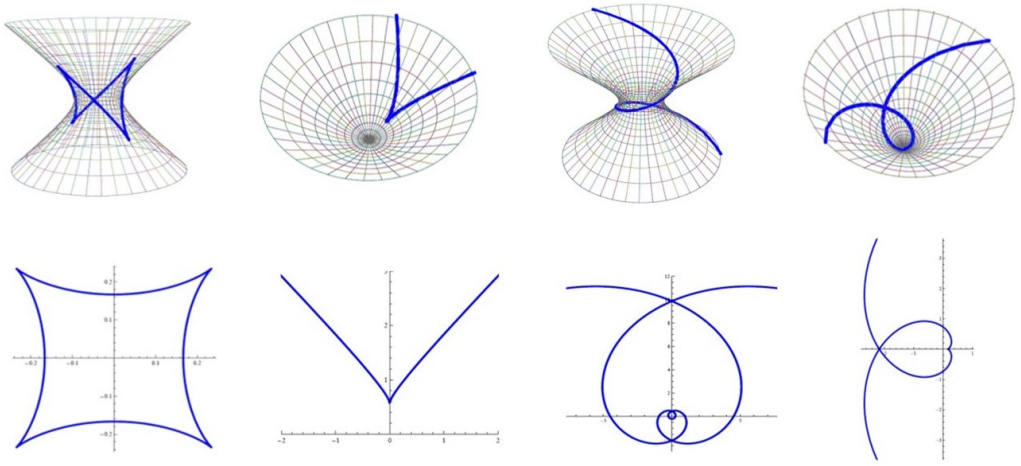
2. Projekcija od c na ravninu ortogonalnu na vektor u je Minkowskijeva epicikloida ili hipocikloida ako i samo ako je vektor u prostorni i c je prostorna krivulja koja leži na $\mathbb{S}^2_1(p,r)$ ili $\mathbb{H}^2(p,r)$.

Teorem 5.7 Neka je c sferna opća zavojnica u $\mathbb{R}^3_1$.

1. Projekcija od c na ravninu ortogonalnu na vektor u je Minkowskijeva hipercikloida ili paracikloida ako i samo ako je vektor u prostorni i c je vremenska krivulja koja leži na $\mathbb{S}^2_1(p,r)$.

2. Projekcija od c na ravninu ortogonalnu na vektor u je Euklidska hipercikloida ili paracikloida ako i samo ako je vektor u vremenski i c je prostorna krivulja koja leži na $\mathbb{S}^2_1(p,r)$ ili $\mathbb{H}^2(p,r)$.

Dokaze teorema 5.6 i 5.7 nećemo navoditi. Oni se mogu naći u ([56]). Na slici 5.3 ilustrirali smo ih, odnosno prikazali smo opće zavojnice na pseudo-sferama $\mathbb{S}^2_1$ i hiperboličkim ravninama $\mathbb{H}^2$ i njihove projekcije, Minkowskijeve cikloide.



Slika 5.3: Opće zavojnice na sferama $\mathbb{S}^2_1$ i $\mathbb{H}^2$ i njihove projekcije (cikloide)

Kauzalni karakter cikloidnih krivulja dobivenih u teoremima 5.6 i 5.7 može se lagano odrediti korištenjem teorema 5.8 koji slijedi u nastavku.

Ako je u prostorni ili vremenski jedinični vektor, $\delta = \langle u, u\rangle = \pm 1$, onda projekcija $\tilde{c}$ od c na ravninu okomitu na vektor u, ima oblik

$$\tilde{c} = c - \delta \langle c, u\rangle u. \tag{5.6}$$

Koristeći definicije 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 i formulu (5.6) slijedi teorem.

Teorem 5.8 Neka je c opća zavojnica jedinične brzine s obzirom na jedinični prostorni ili vremenski vektor u. Tada je $\tilde{c}$:

1. prostorna krivulja ako su T i u oba vremenska vektora, T je prostorni i u je vremenski vektor, ili T i u su oba prostorna vektora i razapinju prostornu ravninu,

2. vremenska ako je T vremenski i u prostorni vektor, ili T i u su oba prostorna vektora i razapinju vremensku ravninu.

Dokaz. Da bi odredili kauzalni karakter krivulje $\tilde{c}$ potrebno je odrediti $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle$. Iz formule (5.6) slijedi da je $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = \langle T, T \rangle - \delta \langle T, u \rangle$. Budući da je c opća zavojnica, onda vrijedi $\langle T, u \rangle = \alpha$ i slijedi

$$\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = \langle T, T \rangle - \delta \alpha^2. \tag{5.7}$$

Razlikujemo slučajeve:

1.
   - Ako su u i T vremenski vektori, onda po definiciji 1.9 vrijedi $\alpha = -\cosh \varphi$. Nadalje, iz formule (5.7) slijedi $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = \sinh^2 \varphi$, iz čega zaključujemo da je $\tilde{c}$ prostorna krivulja.
   - Ako je T prostorni i u vremenski vektor, onda iz definicije 1.12 slijedi $\alpha = \sinh \varphi$. Nadalje, iz formule (5.7) slijedi $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = \cosh^2 \varphi$, iz čega zaključujemo da je $\tilde{c}$ prostorna krivulja.
   - Ako su u i T prostorni vektori koji razapinju prostornu ravninu, onda po definiciji 1.11 vrijedi $\alpha = \cos \varphi$. Nadalje, iz formule (5.7) slijedi $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = \sin^2 \varphi$, iz čega zaključujemo da je $\tilde{c}$ prostorna krivulja.

2.
   - Ako je T vremenski i u prostorni vektor, onda iz definicije 1.12 slijedi $\alpha = \sinh \varphi$. Nadalje, iz formule (5.7) slijedi $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = -\cosh^2 \varphi$, iz čega zaključujemo da je $\tilde{c}$ vremenska krivulja.
   - Ako su u i T prostorni vektori koji razapinju vremensku ravninu, onda po definiciji 1.10 vrijedi $\alpha = \cosh \varphi$. Nadalje, iz formule 5.7 slijedi $\langle \tilde{c}', \tilde{c}' \rangle = -\sin^2 \varphi$, iz čega zaključujemo da je $\tilde{c}$ vremenska krivulja.

□

Kauzalni karakter cikloidnih krivulja dobivenih u teoremima 5.6 i 5.7 prikazan je u korolaru u nastavku:

Korolar 5.9 Neka je c sferna opća zavojnica jedinične brzine s obzirom na jedinični vektor u. Projekcija $\tilde{c}$ od c, Minkowskijeva cikloida je:

- prostorna krivulja ako i samo ako je euklidska epi-, hipo-, hiper- i paracikloida i Minkowskijeva epi- i hipocikloida kod koje $\dot{c}$ i u razapinju prostornu ravninu.

- vremenska krivulja ako i samo ako je Minkowskijeva epi- i hipocikloida kod koje $\dot{c}$ i u razapinju vremensku ravninu i Minkowskijeva hiper- i paracikloida.

Dokaz. Direktnom primjenom teorema 5.6, 5.7 i 5.8 slijedi korolar. □

U nastavku cilj je konstruirati nove primjere maksimalnih ploha, odnosno prostornih ploha kojima je $H = 0$. Za njihovu konstrukciju koristit ćemo tzv. Björlingovu formulu, o kojoj će u nastavku biti više riječi. Da bi mogli koristiti tu formulu potrebna nam je tzv. krivulja jezgra koja će u našim primjerima biti cikloida.

5.2 Björlingova i Weierstrassova reprezentacijska formula

Postoje razni načini kako se mogu konstruirati minimalne plohe u euklidskom prostoru. Jedan od njih je Björlingova formula. Godine 1844., Emanuel Gabriel Björling postavio je problem: *Može li se konstruirati minimalna ploha od zadane krivulje?* Schwarz je riješio problem 1890. godine korištenjem kompleksnih varijabli ([71]). Autori u ([2]) postavljaju isti problem u Minkowskijevom prostoru i daju njegovo rješenje u slučaju maksimalnih ploha, prostornih ploha kojima je $H = 0$. Rješenje problema kod vremenskih ploha napravljeno je osam godina kasnije i dano je u ([8]).

Mi ćemo u radnji proučavati maksimalne plohe, stoga ćemo u ovom poglavlju navesti samo Björlingovu formulu za maksimalne plohe u Minkowskijevom prostoru. Björlingov problem za prostorne plohe u Minkowskijevom prostoru glasi: Neka je $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ realna analitička prostorna krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ i neka je $V\colon I \to \mathbb{R}^3_1$ jedinično vremensko polje duž α takvo da $\langle \alpha', V\rangle = 0$. Odredi maksimalnu plohu $\mathbf{x}\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3_1$ takvu da $\mathbf{x}(u,0) = \alpha(u)$ i $N(u,0) = V(u)$ za sve $u \in I$.

Teorem 5.10 Rješenje Björlingova problema je ploha $\mathbf{x}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3_1$ dana parametrizacijom

$$\mathbf{x}(u,v) = \operatorname{Re}\left(\alpha(z) + i\int_{u_0}^{z} V(w) \times \alpha'(w)\, dw\right) \tag{5.8}$$

gdje $u_0 \in I$ je fiksan i $z = u + i\,v \in \Omega$. Ploha $\mathbf{x}(u,v)$ je jedinstvena sa zadanim Björlingovim podatcima α i V. Krivulja α je njena parametarska u-krivulja ($v = 0$).

Krivulju α zovemo krivulja jezgra (eng. *core curve*). Budući da su maksimalne plohe prostorne plohe, onda α mora biti prostorna krivulja jer sve krivulje na prostornoj plohi moraju biti prostorne.

Iz Björlingove formule možemo lagano dobiti Weierstrassovu reprezentaciju. Weierstrassova reprezentacija je način kako dobiti maksimalnu plohu korištenjem holomorfnih funkcija. Ona je bitna za globalno proučavanje minimalnih ploha. Budući da u Minkowskijevom prostoru imamo samo jednu potpunu maksimalnu plohu, prostornu ravninu ([5, 9]) ona nije korisna kao u euklidskom prostoru, gdje je široko primjenjena za globalno proučavanje potpunih minimalnih ploha.

Teorem 5.11 (Weierstrassova reprezentacija) Neka su ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorfne funkcije prostorne plohe M takve da zadovoljavaju uvjete

(a) $-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$

(b) $-\|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2 + \|\phi_3\|^2 > 0$

(c) funkcije ϕ_k, $k = 1, 2, 3$ nemaju realni period na M.

Preslikavanje $\mathbf{x}\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ definirano s

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathrm{Re} \int^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) dz$$

je maksimalna imerzija.

Weierstrassovu reprezentaciju možemo dobiti direktno iz Björlingove formule

$$\phi(z) = \alpha'(z) + i\, V(z) \times \alpha'(z).$$

Nadalje, maksimalnu plohu možemo izraziti preko holomorfne i meromorfne funkcije. Definiramo holomorfnu funkciju w i meromorfnu funkciju g na sljedeći način:

$$w(z) = \phi_3 - i\,\phi_2, \qquad g(z) = \frac{\phi_1}{\phi_3 - i\,\phi_2}. \tag{5.9}$$

Korištenjem jednakosti $-\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ i formula (5.9) laganim računom dobivamo

$$\phi_1 = gw, \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 - g^2)w, \quad \phi_3 = \frac{1}{2}(1 + g^2)w.$$

Stoga, maksimalna ploha je dana na sljedeći način

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathrm{Re} \int^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) dz = \mathrm{Re} \int^z (2gw, i\,(1 - g^2)w, (1 + g^2)w) dz$$

u terminima holomorfne i meromorfne funkcije. Gaussovo preslikavanje plohe M je

$$N = \frac{1}{1 - |g|^2}(1 + |g|^2,\, 2\mathrm{Im}(g), 2\mathrm{Re}(g)).$$

U nastavku dajemo parametrizacije novih primjera maksimalnih ploha u Minkowskijevom prostoru.

5.3 Cikloidne maksimalne plohe

U ovom poglavlju cilj nam je konstruirati nove primjere maksimalnih ploha (prostornih ploha kojima je $H = 0$), tzv. cikloidne maksimalne plohe. Izvest ćemo ih uz pomoć Björlingove formule. Krivulje jezgre bit će cikloide, odakle i ime, a polje V linearna kombinacija vektorskog polja normale i binormale. Ideja za odabir ovakvog vektorskog polja uzeta je od Meeksa i Webera koji u ([53]) konstruiraju minimalne plohe u euklidskom prostoru kojima je krivulja jezgra kružnica ili zavojnica, a vektorsko polje $V(t)$ je linearna kombinacija normalnog i binormalnog polja. Nadalje, Kaya i López analogno izvode u prostoru Minkowskog za maksimalne plohe u ([33, 46]) i za minimalne plohe u ([32]). Nadalje, autori u ([49]) konstruiraju nove primjere minimalnih ploha u euklidskom prostoru uz pomoć Björlingove formule gdje za normalno polje biraju normalu koja se rotira proizvoljnom brzinom duž krivulje jezgre $c(t)$, odnosno normalno polje je $n(t) = \cos(\alpha(t))n_1(t) + \sin(\alpha(t))n_2(t)$ gdje je $(c'(t), n_1(t), n_2(t))$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$. Ideja za odabir bazne krivulje uzeta je od ([63]) gdje autor daje pregled različitih algebarskih minimalnih ploha u euklidskom prostoru i daje novu klasu algebarskih, racionalno parametriziranih minimalnih ploha, tzv. cikloidne minimalne plohe. Vektorsko polje koje koristi je polje normala krivulje.

5.3.1 Maksimalne plohe i Minkowskijeve cikloide

Krivulja jezgra je Minkowskijeva epi- i hipocikloida

Krivulja jezgra je prostorna Minkowskijeva epi- i hipocikloida u xz-ravnini dana parametrizacijom

$$\alpha(t) = \Big((R+r)\sinh t - r\sinh\Big(\frac{R+r}{r}t\Big), 0, (R+r)\cosh t - r\cosh\Big(\frac{R+r}{r}t\Big)\Big), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Vektor normale i binormale krivulje $\alpha(t)$ je:

$$n(t) = -\frac{1}{2|\sinh\left(\frac{R}{2r}t\right)|}\left(\sinh t - r\sinh\left(\frac{R+r}{r}t\right), 0, \cosh t - r\cosh\left(\frac{R+r}{r}t\right)\right),$$

$$b(t) = (0,1,0).$$

Da bismo mogli koristiti Björlingovu formulu vektorsko polje $V(t)$ mora biti jedinično vremensko vektorsko polje duž krivulje $\alpha(t)$. Budući da je $\{n(t),\, b(t)\}$ ortonormirana baza vremenske ravnine $[\{\alpha'(t)\}]^{\perp}$, onda vektorsko polje $V(t)$ možemo odabrati na sljedeći način:

$$V(t) = \cosh(\varphi(t))n(t) + \sinh(\varphi(t))b(t),$$

gdje je $\varphi(t)$ proizvoljna funkcija. U radnji ćemo za funkciju $\varphi(t)$ redom odabrati $\varphi = 0$, $\varphi(t) = a$, $a \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ i u trećem slučaju $\varphi(t) = at + b$.

1. Ako je $\varphi = 0$, onda je $V(t) = n(t)$. U tom slučaju vrijede sljedeći rezultati:

   Teorem 5.12 Maksimalne hipo- i epicikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim hipo- i epicikloidama

   $$\alpha(t) = \left((R+r)\sinh t - r\sinh\left(\frac{R+r}{r}t\right), 0, (R+r)\cosh t - r\cosh\left(\frac{R+r}{r}t\right)\right)$$

   u xz-ravnini i jediničnom normalom

   $$n(t) = -\frac{1}{2|\sinh\left(\frac{R}{2r}t\right)|}\left(\sinh t - r\sinh\left(\frac{R+r}{r}t\right), 0, \cosh t - r\cosh\left(\frac{R+r}{r}t\right)\right)$$

   dane su parametrizacijom:

   $$f(u,v) = \begin{pmatrix} (R+r)\sinh u\cos v - r\sinh\left(\frac{R+r}{r}u\right)\cos\left(\frac{R+r}{r}v\right) \\ -\frac{4r(R+r)}{R}\sinh\left(\frac{R}{2r}u\right)\sin\left(\frac{R}{2r}v\right) \\ (R+r)\cosh u\cos v - r\cosh\left(\frac{R+r}{r}u\right)\cos\left(\frac{R+r}{r}v\right) \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

   Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju. Krivulja c je geodetska krivulja tih ploha.

   Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle n, n\rangle = -1$ i $\langle n, \alpha'\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, α i n. Računamo najprije vektorski produkt

   $$n(t) \times \alpha'(t) = (0, 2(r+R)\sinh\left(\frac{R}{2r}t\right), 0),$$

zatim njegov integral

$$\int^t n(t) \times \alpha'(t) = (0, \frac{4r(r+R)}{R} \cosh\Big(\frac{R}{2r}t\Big), 0). \tag{5.12}$$

Uvrštavanjem (5.10) i (5.12) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z = u + iv$, sređivanjem i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza dobivamo traženu parametrizaciju.

Budući da su u parametrizaciji (5.11) sve funkcije trigonometrijske i hiperboličke, onda iste možemo zamijeniti s njihovim racionalnim supstitucijama i dobiti racionalnu parametrizaciju ploha. Nadalje, ako iz racionalne paremetrizacije eliminiramo parametre dobivamo njenu algebarsku jednadžbu.

Da je c geodetska krivulja dobivenih ploha slijedi iz odabranog vektorskog polja. Naime, vektor normale krivulje se podudara s vektorom normale plohe ([2, 58]). □

Korolar 5.13 Parametrizacija (5.11) maksimalne hipo- i epicikloidne plohe je izotermna parametrizacija.

Dokaz. Parametrizacija (u, v) je izotermna ako i samo ako za koeficijente prve fundamentalne forme vrijedi $E = G$ i $F = 0$. Budući da je

$$E = G = -\frac{(r+R)^2}{2}\Big(\cos 2v + 2\cos\Big(\frac{Rv}{r}\Big) + \cos\Big(\frac{2(r+R)v}{r}\Big) - 2\Big(1 + \cos\Big(2 + \frac{R}{r}v\Big)\cosh\Big(\frac{Ru}{r}\Big)\Big)$$
$$\text{i} \quad F = 0,$$

onda slijedi zaključak. □

Weierstrassovu reprezentaciju plohe (5.11) dobit ćemo direktno iz Björlingove formule $\phi(z) = \alpha'(z) + iV(z) \times \alpha'(z)$. Tražene holomorfne funkcije su:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (r+R)\left(\cosh z - \cosh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\right) dz \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z} - e^{-\frac{(r+R)z}{r}} - e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)(r+R)\, dz, \\
\phi_2 &= 2\, i\, (r+R) \sinh\Big(\frac{Rz}{2r}\Big) dz \\
&= i\, e^{-\frac{Rz}{2r}}\left(-1 + e^{\frac{Rz}{r}}\right)(r+R)\, dz, \\
\phi_3 &= (r+R)\left(\sinh z - \sinh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\right) dz \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{-z} + e^{z} + e^{-\frac{(r+R)z}{r}} - e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)(r+R)\, dz.
\end{aligned}$$

Weierstrassova reprezentacija plohe (5.11) je

$$w(z) = \frac{1}{2}\left(-e^{-z} + e^{z} - 2e^{-\frac{Rz}{2r}} + 2e^{\frac{Rz}{2r}} + e^{-\frac{(r+R)z}{r}} - e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)(r+R)\,dz$$
$$g(z) = 1 + \frac{2}{-1 + e^{z+\frac{Rz}{2r}}}.$$

Teorem 5.14 Neka je $f^{\perp}(u,v)$ adjungirana ploha plohe $f(u,v)$ dana parametrizacijom (5.11) i neka je

$$F(u,v,\varphi) = f(u,v)\cos\varphi + f^{\perp}(u,v)\sin\varphi, \tag{5.13}$$

njena pridružena familija maksimalnih ploha. u-krivulje ($v = 0$) plohe (5.13) su opće zavojnice (krivulje konstantnog nagiba) i one leže na nedegeneriranim plohama drugog reda

$$-x^2 + \frac{R^2\cot^2\varphi}{4r(R+r)}y^2 + z^2 = (2r+R)^2\cos^2\varphi.$$

Dokaz. Adjungirana ploha plohe (5.11) ima oblik

$$f^{\perp}(u,v) = \begin{pmatrix} (R+r)\cosh u\sin v - r\cosh\left(\frac{R+r}{r}u\right)\sin\left(\frac{R+r}{r}v\right) \\ \frac{4r(R+r)}{R}\cosh\left(\frac{R}{2r}u\right)\cos\left(\frac{R}{2r}v\right) \\ (R+r)\sinh u\sin v - r\sinh\left(\frac{R+r}{r}u\right)\sin\left(\frac{R+r}{r}v\right) \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Uvrštavanjem formule (5.11) i (5.14) u (5.13) dobivamo parametrizaciju pridružene familije iz koje izračunamo u-krivulju

$$c(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\Big((r+R)\sinh u - r\sinh\left(\frac{r+R}{r}u\right)\Big) \\ \frac{4r(r+R)}{R}\cosh\left(\frac{Ru}{2r}\right)\sin\varphi \\ \cos\varphi\Big((r+R)\cosh u - r\cosh\left(\frac{(r+R)u}{r}\right)\Big) \end{pmatrix}.$$

Direktan račun pokazuje da su krivulje $c(u)$ (s tangencijalnim vektorom c') opće zavojnice s osi $q = (0,1,0)$

$$\frac{\langle c', q\rangle}{\|c'\|} = \pm\sin\varphi.$$

Nadalje, direktnim uvrštavanjem se pokaže da te krivulje leže na nedegeneriranoj plohi drugog reda

$$-x^2 + \frac{R^2\cot^2\varphi}{4r(R+r)}y^2 + z^2 = (R+2r)^2\cos^2\varphi.$$

□

Napomena 5.15 Postoji dualnost između maksimalnih ploha u $\mathbb{R}^3_1$ i minimalnih ploha u $\mathbb{R}^3$ u smislu da se svaka maksimalna ploha u $\mathbb{R}^3_1$ može konstruirati iz minimalne u $\mathbb{R}^3$ i obrnuto. Ako su (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) holomorfne funkcije maksimalne plohe $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$, onda su $(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\phi_1, i\phi_2, i\phi_3)$ holomorfne funkcije minimalne plohe $\mathbb{S}^\sharp$ u $\mathbb{R}^3$. Odnosno, ako su (g, w) Weierstrassovi podatci od $\mathbb{S}$, onda su $(-ig, iw)$ za $\mathbb{S}^\sharp$. Obrnuto, ako su (ψ_1, ψ_2, ψ_3) holomorfne funkcije minimalne plohe u $\mathbb{R}^3$, onda su $(\psi_1, -i\psi_2, -i\psi_3)$ holomorfne funkcije maksimalne plohe $\mathbb{S}$ u $\mathbb{R}^3_1$. Autori u ([33, 47, 50]) proučavaju svojstva dualnih ploha. U ([33, 47]) istražuje se da li dvije kongruentne minimalne (maksimalne) plohe imaju kongruentne dualne maksimalne (minimalne) plohe i pokazuju da nekongruentne maksimalne plohe imaju kongruentne minimalne plohe. Autor u ([50]) za izvod Bonnet-Thomsenovih ploha u Minkowskijevom prostoru koristi dualne plohe i naziva ih plohe blizanaci.

Primjer 5.16 (Hennebergova ploha)
U euklidskom prostoru, dobro je poznat primjer minimalne plohe, tzv. Hennebergova ploha. To je jedina minimalna ploha u $\mathbb{R}^3$ koja sadrži Neilovu parabolu (polukubna parabola) kao ravninsku geodetsku krivulju. Ako je Neilova parabola sadržana u xy-ravnini (uobičajeno je da je u xz-ravnini, [63]) Hennebergova ploha je dana parametrizacijom

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos v \sinh u - \frac{2}{3}\cos 3v \sinh 3u \\ 2\cos 2v \cosh 2u \\ 2\sin v \sinh u + \frac{2}{3}\sin 3v \sinh 3u \end{pmatrix}.$$

Njena (euklidska) adjungirana ploha je parametrizirana s

$$f^\perp(u,v) = \begin{pmatrix} 2\sin v \cosh u - \frac{2}{3}\sin 3v \cosh 3u \\ -2\sin 2v \sinh 2u \\ 2\cos v \cosh u + \frac{2}{3}\cos 3v \cosh 3u \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

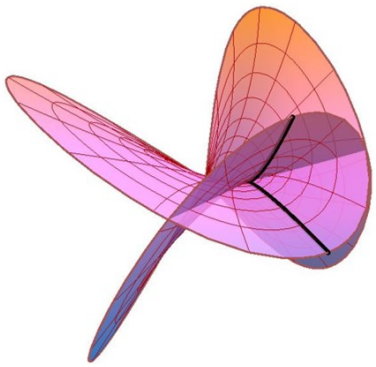
Budući da je u euklidskom prostoru adjungirana ploha Hennebergove plohe je minimalna ploha nad (euklidskom) astroidom u $y = 0$ ravnini gdje je ta krivulja geodetska, onda njegova dualna (blizanac) ploha (generirana kao u [33, 47, 50]) (vidi napomenu 5.15) je parametrizirana s

$$f^\sharp(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos v \sinh u - \frac{2}{3}\cos 3v \sinh 3u \\ -2\sin 2v \sinh 2u \\ 2\cos v \cosh u + \frac{2}{3}\cos 3v \cosh 3u \end{pmatrix}.$$

Stoga, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5.17 Minkowskijeva dualna (blizanka) ploha od adjungirane Hennebergove plohe (5.15) je maksimalna ploha s Minkowskijevom astroidom kao geodetskom krivuljom u $y = 0$ ravnini (vidi sliku 5.4)

$$f^\sharp(u,0) = \begin{pmatrix} 2\sinh u - \frac{2}{3}\sinh 3u \\ 0 \\ 2\cosh u + \frac{2}{3}\cosh 3u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}\sinh^3 u \\ 0 \\ \frac{8}{3}\cosh^3 u \end{pmatrix}.$$



Slika 5.4: Dualna ploha od adjungirane Hennebergove plohe

2. Ako je $\varphi(t) = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, onda je $V(t) = \cosh(a)\, n(t) + \sinh(a)\, b(t)$. U tom slučaju vrijede sljedeći rezultati:

   Teorem 5.18 Maksimalne hipo- i epicikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim hipo- i epicikloidama (5.10) u xz-ravnini i jediničnim vektorom $V(t) = \cosh(a)\, n(t) + \sinh(a)\, b(t)$ gdje je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dane su parametrizacijom:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (r+R)\sinh u\, A - r\sinh\left(\frac{r+R}{r}u\right) B \\ -4\frac{r}{R}(r+R)\cosh a \sin\left(\frac{Rv}{2r}\right)\sinh\left(\frac{Ru}{2r}\right) \\ (r+R)\cosh u\, A - r\cosh\left(\frac{r+R}{r}u\right) B \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

   gdje je $A = \cos v + \sin v \sinh a$ i $B = \cos\left(\frac{r+R}{r}v\right) + \sin\left(\frac{r+R}{r}v\right)\sinh a$. Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

   Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle V(t), V(t)\rangle = -1$ i $\langle V(t), \alpha'(t)\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i $V(t)$. Računamo najprije vektorski produkt

$$V(t)\times\alpha'(t)=\begin{pmatrix}-(r+R)\sinh a\Big(\sinh t-\sinh\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big)\\ 2(r+R)\cosh a\sinh\left(\frac{Rt}{2r}\right)\\ -(r+R)\sinh a\Big(\cosh t-\cosh\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big)\end{pmatrix}$$

zatim njegov integral

$$\int^t V(t)\times\alpha'(t)\,dt=\begin{pmatrix}-(r+R)\sinh a\Big(\cosh t-\frac{r}{r+R}\cosh\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big)\\ \frac{4r(r+R)}{R}\cosh a\cosh\left(\frac{Rt}{2r}\right)\\ -(r+R)\sinh a\Big(\sinh t-\frac{r}{r+R}\sinh\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big)\end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Uvrštavanjem (5.10) i (5.17) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z=u+iv$, sređivanjem i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza slijedi zaključak. Da su plohe algebarske i da dopuštaju racionalnu parametrizaciju vrijede isti argumenti kao u dokazu teorema 5.12. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu reprezentaciju su:

$$\begin{aligned}\phi_1&=(r+R)\left(\cosh z-\cosh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)-i\sinh a\left(\sinh z-\sinh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\right)\right)dz\\ &=\frac{1}{2}\left(A+B-\frac{1}{2}i\left(-e^{-a}+e^{a}\right)(A-B)\right)(r+R)\,dz,\\ \phi_2&=2\,i\,(r+R)\cosh a\sinh\Big(\frac{Rz}{2r}\Big)\,dz\\ &=\frac{1}{2}\,i\,e^{-a-\frac{Rz}{2r}}\left(1+e^{2a}\right)\left(-1+e^{\frac{Rz}{r}}\right)(r+R)\,dz,\\ \phi_3&=(r+R)\left(-i\cosh z\sinh a+i\cosh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\sinh a+\sinh z-\sinh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\right)dz\\ &=\frac{1}{4}\Big(2\left(-e^{-z}+e^{z}\right)-i\left(-e^{-a}+e^{a}\right)\left(e^{-z}+e^{z}\right)+2\left(e^{-\frac{(r+R)z}{r}}-e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)\\ &\quad+i\left(-e^{-a}+e^{a}\right)\left(e^{-\frac{(r+R)z}{r}}+e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)\Big)(r+R)\,dz.\end{aligned}$$

Weierstrassova reprezentacija je

$$w(z)=\frac{1}{2}\left(A-B+e^{-a-\frac{Rz}{2r}}\left(1+e^{2a}\right)\left(-1+e^{\frac{Rz}{r}}\right)-\frac{1}{2}i\left(-e^{-a}+e^{a}\right)(A+B)\right)(r+R)\,dz$$

$$g(z)=1+\frac{2}{-1+\frac{e^{z+\frac{Rz}{2r}}(1-ie^{a})}{-i+e^{a}}}$$

gdje je $A=e^{z}-e^{\frac{(r+R)z}{r}}$ i $B=e^{-z}-e^{-\frac{(r+R)z}{r}}$.

3. $\varphi(t)=a\,t+b$, $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b=0$. Za drugačiji odabir parametra b dobije se ista ploha samo zarotirana oko

x-osi. Ako je $\varphi(t) = a\,t$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ onda je $V(t) = \cosh(a\,t)\,n(t) + \sinh(a\,t)\,b(t)$. U tom slučaju vrijede sljedeći rezultati:

Teorem 5.19 Maksimalne hipo- i epicikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim hipo- i epicikloidama (5.10) u xz-ravnini i jediničnim vektorom $V(t) = \cosh(a\,t)\,n(t) + \sinh(a\,t)\,b(t)$ gdje je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dane su parametrizacijom

$$f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \tag{5.18}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
x(u,v) = {} & \frac{1}{2(-1+a^2)(-r+ar-R)(r+ar+R)} \\
& \Bigg(2(-r+ar-R)(r+R)(r+ar+R)\cosh u\cosh au(a\cos av\sin v - \cos v\sin av) \\
& -(-1+a^2)r(-r+ar-R)(r+R)\cosh\Big((1+a+\frac{R}{r})u\Big)\sin\Big((1+a+\frac{R}{r})v\Big) \\
& +(r+ar+R)\Bigg((-1+a^2)r(r+R)\cosh\Big((a-\frac{r+R}{r})u\Big)\sin\Big((a-\frac{r+R}{r})v\Big) \\
& +2(-r+ar-R)\Bigg((r+R)\sinh u\Big((-1+a^2)\cos v+(-\cos av\sin v \\
& +a\cos v\sin av)\sinh au\Big)-(-1+a^2)r\cos\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\sinh\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\Big)\Big)\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(u,v) = {} & -\frac{4r(r+R)}{4a^2r^2-R^2}\Bigg(\cosh\Big(\frac{Ru}{2r}\Big)\sinh au\Big(-R\cos\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\sin av+2ar\cos av\sin\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\Big) \\
& +\sinh\Big(\frac{Ru}{2r}\Big)\cosh au\Big(2ar\cos\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\sin av-R\cos av\sin\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\Big)\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(u,v) = {} & \frac{1}{2(-1+a^2)(-r+ar-R)(r+ar+R)} \\
& \Bigg(-2(-1+a^2)r(-r+ar-R)(r+ar+R)\cos\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\cosh\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)+ \\
& 2(-r+ar-R)(r+R)(r+ar+R)\cosh u\Big((-1+a^2)\cos v+(-\cos av\sin v+ \\
& a\cos v\sin av)\sinh au\Big)+(r+R)\Bigg(2(-r+ar-R)(r+ar+R)\cosh au(a\cos av\sin v \\
& -\cos v\sin av)\sinh u+(-1+a^2)r\Big((r-ar+R)\sin\Big((1+a+\frac{R}{r})v\Big)\sinh\Big((1+a \\
& +\frac{R}{r})u\Big)-(r+ar+R)\sin\Big((a-\frac{r+R}{r})v\Big)\sinh\Big((a-\frac{r+R}{r})u\Big)\Big)\Big)\Bigg).
\end{aligned}$$

Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle V(t), V(t)\rangle = -1$ i $\langle V(t), \alpha'(t)\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i $V(t)$. Računamo najprije vektorski produkt

$$V(t)\times\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -(r+R)\sinh at\Big(\sinh t - \sinh\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)\Big) \\ 2(r+R)\cosh at\sinh\left(\frac{Rt}{2r}\right) \\ -(r+R)\sinh at\Big(\cosh t - \cosh\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)\Big) \end{pmatrix}$$

zatim njegov integral

$$\int^t V(t)\times\alpha'(t)\,dt = \begin{pmatrix} -(r+R)\Big(\Big(-\dfrac{\cosh t}{-1+a^2} - \dfrac{r(r+R)\cosh\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)}{(r-ar+R)(r+ar+R)}\Big)\sinh at \\ +a\cosh at\Big(\dfrac{\sinh t}{-1+a^2} + \dfrac{r^2\sinh\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)}{r^2-a^2r^2+2rR+R^2}\Big)\Big) \\ \dfrac{2r(r+R)\Big(2R\cosh at\cosh\left(\frac{Rt}{2r}\right) - 4ar\sinh at\sinh\left(\frac{Rt}{2r}\right)\Big)}{-4a^2r^2+R^2} \\ \dfrac{r+R}{(-1+a^2)(-r+ar-R)(r+ar+R)} \\ \Big(a(-1+a^2)r^2\cosh at\cosh\left(\dfrac{(r+R)t}{r}\right) \\ -(-r+ar-R)(r+ar+R)(a\cosh t\cosh at - \sinh t\sinh at) \\ -(-1+a^2)r(r+R)\sinh at\sinh\left(\dfrac{(r+R)t}{r}\right)\Big) \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Uvrštavanjem (5.10) i (5.19) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z = u + iv$, sređivanjem i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza slijedi zaključak. Da su plohe algebarske i da dopuštaju racionalnu parametrizaciju vrijede isti argumenti kao u dokazu teorema 5.12. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu reprezentaciju su:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (r+R)\cosh z - \cosh\left(\frac{(r+R)z}{r}\right) - i\sinh az\sinh z - \sinh\left(\frac{(r+R)z}{r}\right)dz \\ &= \frac{1}{2}\left(A+B-\frac{1}{2}i\left(-e^{-az}+e^{az}\right)(A-B)\right)(r+R)\,dz, \\ \phi_2 &= 2\,i\,(r+R)\cosh az\sinh\left(\frac{Rz}{2r}\right)dz \\ &= \frac{1}{2}\,i\,e^{-\frac{(2ar+R)z}{2r}}\left(1+e^{2az}\right)\left(-1+e^{\frac{Rz}{r}}\right)(r+R)\,dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= (r+R)\sinh z - i\cosh z\sinh az + i\cosh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\sinh az - \sinh\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\,dz\\ &= \frac{1}{4}\Big(2\left(-e^{-z}+e^{z}\right) - i\left(e^{-z}+e^{z}\right)\left(-e^{-az}+e^{az}\right) + 2\left(e^{-\frac{(r+R)z}{r}} - e^{\frac{(r+R)z}{r}}\right)\\ &\quad + ie^{-\left(1+a+\frac{R}{r}\right)z}\left(-1+e^{2az}\right)\left(1+e^{\frac{2(r+R)z}{r}}\right)\Big)(r+R)\,dz.\end{aligned}$$

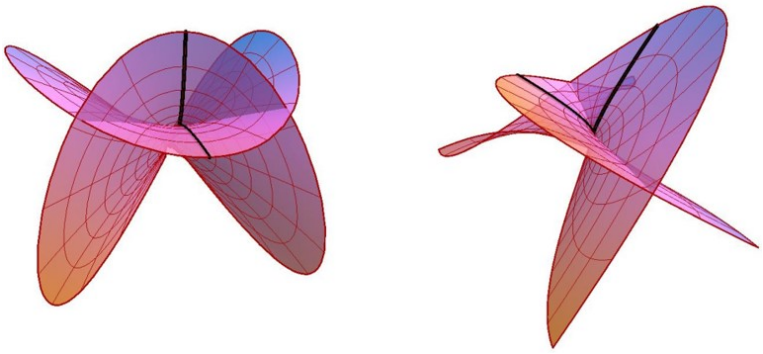
Weierstrassova reprezentacija je

$$w(z) = \frac{1}{2}\Big(A - B + e^{-\frac{(2ar+R)z}{2r}}\left(1+e^{2az}\right)\left(-1+e^{\frac{Rz}{r}}\right) - \frac{1}{2}i\left(-e^{-az}+e^{az}\right)(A+B)\Big)(r+R)\,dz$$

$$g(z) = 1 + \frac{2}{-1 + \frac{e^{z+\frac{Rz}{2r}}(1-ie^{az})}{-i+e^{az}}}$$

gdje je $A = e^{z} - e^{\frac{(r+R)z}{r}}$ i $B = e^{-z} - e^{-\frac{(r+R)z}{r}}$.

Odlomak ćemo završiti sa slikom 5.5 na kojoj je lijevo prikazana ploha (5.16) s podatcima $R = 4$, $r = -1$ i $a = 0.1$ i desno ploha (5.18) s podatcima $R = 2$, $r = 2$ i $a = 0.9$. Crno istaknuto su krivulje jezgre Minkowskijeve epi i hipocikloide.



Slika 5.5: Minkowskijeve cikloidne plohe

Jezgra krivulja je Minkowskijeva hiper- i paracikloida

Teorem 5.20 Maksimalne hipercikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim hipercikloidama (5.5)

$$c(t) = \Big(a\cos\big(\frac{bt}{a}\big)\cosh t + b\sin\big(\frac{bt}{a}\big)\sinh t, 0, a\cos\big(\frac{bt}{a}\big)\sinh t + b\sin\big(\frac{bt}{a}\big)\cosh t\Big) \qquad (5.20)$$

u xz-ravnini i jediničnom normalom

$$n(t) = (-\cosh t, 0, -\sinh t)$$

dane su parametrizacijom:

$$f(u,v)=\begin{pmatrix}\cos(\frac{bu}{a})\cosh u\Big(a\cos v\cosh(\frac{bv}{a})-b\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big)+\\ \sin(\frac{bu}{a})\sinh u\Big(b\cos v\cosh(\frac{bv}{a})+a\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big)\\ -\dfrac{a^2+b^2}{b}\cos(\frac{bu}{a})\sinh(\frac{bv}{a})\\ \cos(\frac{bu}{a})\sinh u\Big(a\cos v\cosh(\frac{bv}{a})-b\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big)+\\ \sin(\frac{bu}{a})\cosh u\Big(b\cos v\cosh(\frac{bv}{a})+a\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big)\end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju. Krivulja c je geodetska krivulja tih ploha.

Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle n,n\rangle=-1$ i $\langle n,c'\rangle=0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i n. Računamo najprije vektorski produkt

$$n(t)\times c'(t)=(0,\frac{a^2+b^2}{a}\cos(\frac{bt}{a}),0)$$

zatim njegov integral

$$\int^t n(t)\times c'(t)\,dt=(0,\frac{a^2+b^2}{a}\sin(\frac{bt}{a}),0). \tag{5.22}$$

Uvrštavanjem (5.22) i (5.20) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z=u+iv$ i izlučivanjem realnog dijela iz dodivenog izraza slijedi zaključak. Da su plohe algebarske i da dopuštaju racionalnu parametrizaciju, te da je c geodetska krivulja vrijede, isti argumenti kao u dokazu teorema 5.12. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu reprezentaciju su

$$\begin{aligned}\phi_1&=\frac{(a^2+b^2)\cos\left(\frac{bz}{a}\right)\sinh z}{a}=\frac{(a^2+b^2)\left(-e^{-z}+e^{z}\right)\left(e^{-\frac{ibz}{a}}+e^{\frac{ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz,\\ \phi_2&=\frac{i\,(a^2+b^2)\cos\left(\frac{bz}{a}\right)}{a}=\frac{i\,(a^2+b^2)\left(e^{-\frac{ibz}{a}}+e^{\frac{ibz}{a}}\right)}{2a}\,dz,\\ \phi_3&=\frac{(a^2+b^2)\cos\left(\frac{bz}{a}\right)\cosh z}{a}=\frac{(a^2+b^2)\left(e^{-z}+e^{z}\right)\left(e^{-\frac{ibz}{a}}+e^{\frac{ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz.\end{aligned}$$

Weierstrassova reprezentacija je

$$w(z)=\frac{(a^2+b^2)\,e^{-\frac{(a+ib)z}{a}}\left(1+e^{z}\right)^2\left(1+e^{\frac{2ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz$$

$$g(z) = \tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{-1+e^z}{1+e^z}.$$

Korolar 5.21 Parametrizacija (5.21) maksimalne hipercikloidne plohe je izotermna parametrizacija.

Dokaz. Parametrizacija (u, v) je izotermna ako i samo ako za koeficijente prve fundamentalne forme vrijedi $E = G$ i $F = 0$. Budući da je

$$E = G = \frac{(a^2+b^2)^2}{2a^2}\cos^2 v\Big(\cos\Big(\frac{2bu}{a}\Big) + \cosh\Big(\frac{2bv}{a}\Big)\Big)$$
$$\text{i} \quad F = 0,$$

onda slijedi zaključak. □

Teorem 5.22 Maksimalne paracikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim paracikloidama

$$c(t) = \Big(b\cos(\frac{bt}{a})\sinh t - a\sin(\frac{bt}{a})\cosh t, 0, b\cos(\frac{bt}{a})\cosh t - a\sin(\frac{bt}{a})\sinh t\Big) \tag{5.23}$$

u xz-ravnini i jediničnom normalom

$$n(t) = (\cosh t, 0, \sinh t)$$

dane su parametrizacijom:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{bu}{a})\sinh u\Big(b\cos v\cosh(\frac{bv}{a}) + a\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big) + \\ \quad \sin(\frac{bu}{a})\cosh u\Big(b\sin v\sinh(\frac{bv}{a}) - a\cos v\cosh(\frac{bv}{a})\Big) \\ -\frac{a^2+b^2}{b}\sin(\frac{bu}{a})\sinh(\frac{bv}{a}) \\ \cos(\frac{bu}{a})\cosh u\Big(b\cos v\cosh(\frac{bv}{a}) + a\sin v\sinh(\frac{bv}{a})\Big) + \\ \quad \sin(\frac{bu}{a})\sinh u\Big(b\sin v\sinh(\frac{bv}{a}) - a\cos v\cosh(\frac{bv}{a})\Big) \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju. Krivulja c je geodetska krivulja tih ploha.

Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle n, n\rangle = -1$ i $\langle n, c'\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i n. Računamo najprije vektorski produkt

$$n(t) \times c'(t) = (0, \frac{a^2+b^2}{a}\sin(\frac{bt}{a}), 0)$$

zatim njegov integral

$$\int^t n(t) \times c'(t)\, dt = (0, -\frac{a^2+b^2}{a} \cos(\frac{bt}{a}), 0). \tag{5.25}$$

Uvrštavanjem (5.25) i (5.23) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z = u + iv$ i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza slijedi zaključak. Da su plohe algebarske i da dopuštaju racionalnu parametrizaciju, te da je c geodetska krivulja, vrijede isti argumenti kao u dokazu teorema 5.12. □

Korolar 5.23 Parametrizacija (5.24) maksimalne hipercikloidne plohe je izotermna parametrizacija.

Dokaz. Budući da je

$$E = G = -\frac{(a^2+b^2)^2}{2a^2} \cos^2 v \Big(\cos\Big(\frac{2bu}{a}\Big) - \cosh\Big(\frac{2bv}{a}\Big)\Big)$$
$$\text{i} \quad F = 0,$$

onda slijedi zaključak. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu formulu su

$$\phi_1 = -\frac{(a^2+b^2)\sin\left(\frac{bz}{a}\right)\sinh z}{a} = \frac{i\,(a^2+b^2)\,e^{-\frac{(a+ib)z}{a}}\,(-1+e^{2z})\left(-1+e^{\frac{2ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz,$$
$$\phi_2 = \frac{i\,(a^2+b^2)\sin\left(\frac{bz}{a}\right)}{a} = \frac{(a^2+b^2)\,e^{-\frac{ibz}{a}}\left(-1+e^{\frac{2ibz}{a}}\right)}{2a}\,dz,$$
$$\phi_3 = -\frac{(a^2+b^2)\cosh z \sin\left(\frac{bz}{a}\right)}{a} = \frac{i\,(a^2+b^2)\,e^{-\frac{(a+ib)z}{a}}\,(1+e^{2z})\left(-1+e^{\frac{2ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz.$$

Weierstrassova reprezentacija je

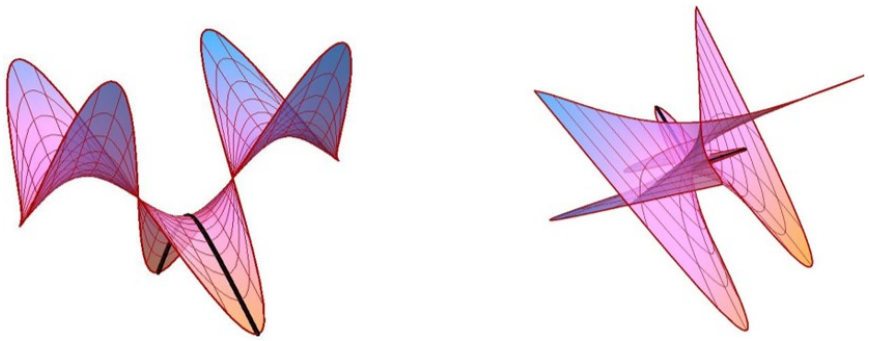
$$w(z) = \frac{i\,(a^2+b^2)\,e^{-\frac{(a+ib)z}{a}}\,(-1+e^{z})^2\left(-1+e^{\frac{2ibz}{a}}\right)}{4a}\,dz$$

$$g(z) = \coth\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1+e^z}{-1+e^z}.$$

Odlomak ćemo završiti sa slikom 5.6 na kojoj je lijevo prikazana Minkowskijeva hipercikloidna ploha (5.21) ($a = 3$, $b = 1$) i desno Minkowskijeva paracikloidna ploha (5.24) ($a = 3$, $b = 1$).

Napomena 5.24 Euklidske epi i hipocikloide (5.1)

$$c(t) = ((R+r)\sin t - r\sin(t + \frac{R}{r}t), 0, (R+r)\cos t - r\cos(t+\frac{R}{r}t))$$



Slika 5.6: Minkowskijeve hiper i paracikloidne plohe

ne možemo odabrati za krivulje jezgre u xz-ravnini budući da one općenito nisu prostorne krivulje, odnosno vrijedi

$$4(r+R)^2\cos\Big((2+\frac{R}{r})t\Big)\sin^2\big(\frac{Rt}{2r}\big)\gtreqless 0.$$

Stoga, krivulje (5.1) ćemo smjestiti u prostornu yz-ravninu.

5.3.2 Maksimalne plohe i euklidske cikloide

Jezgra krivulja je euklidska epi- i hipocikloida

Krivulja jezgra je prostorna euklidska epi- i hipocikloida u yz-ravnini dana parametrizacijom

$$\alpha(t)=\Big(0,(R+r)\sinh t-r\sinh\big(\frac{R+r}{r}t\big),(R+r)\cosh t-r\cosh\big(\frac{R+r}{r}t\big)\Big),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.26}$$

Vektor normale i binormale od krivulje $\alpha(t)$ je:

$$n(t)=-\frac{1}{2|\sin\big(\frac{R}{2r}t\big)|}\big(0,\sin t-\sin\big(\frac{R+r}{r}t\big),\cos t-\cos\big(\frac{R+r}{r}t\big)\big),$$

$$b(t)=(1,0,0).$$

Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu vektorsko polje $V(t)$ mora biti jedinično vremensko vektorsko polje duž krivulje $\alpha(t)$. Budući da je $\{n(t),\,b(t)\}$ ortonormirana baza od $[\{\alpha'(t)\}]^{\perp}$, onda vektorsko polje $V(t)$ možemo odabrati na sljedeći način:

$$V(t)=\sinh(\varphi(t))\,n(t)+\cosh(\varphi(t))\,b(t),$$

gdje je $\varphi(t)$ proizvoljna funkcija. U radnji ćemo za funkciju $\varphi(t)$ redom odabrati $\varphi=0$, $\varphi(t)=a$ i $\varphi(t)=at+b$ gdje je $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Ako je $\varphi = 0$, onda je $V(t) = b(t)$. U tom slučaju ploha dobivena pomoću Björlingove formule je yz-ravnina.

2. Ako je $\varphi(t) = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, onda je $V(t) = \sinh(a)\, n(t) + \cosh(a)\, b(t)$. U tom slučaju vrijede sljedeći rezultati:

   Teorem 5.25 Maksimalne hipo- i epicikloidne plohe, odnosno plohe definirane euklidskim hipo- i epicikloidama (5.26) u xz-ravnini i jediničnim vektorom $V(t) = \sinh(a)\, n(t) + \cosh(a)\, b(t)$ gdje je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dane su parametrizacijom:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{4r(r+R)}{R} \sin\left(\frac{Ru}{2r}\right) \sinh a \sinh\left(\frac{Rv}{2r}\right) \\ (r+R)\cosh v \sin u - r\cosh\left(\frac{(r+R)v}{r}\right) \sin\left(\frac{(r+R)u}{r}\right) - \cosh a\, A \\ (r+R)\cos u \cosh v - r\cos\left(\frac{(r+R)u}{r}\right) \cosh\left(\frac{(r+R)v}{r}\right) - \cosh a\, B \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

   gdje je $A = (r+R)\sin u \sinh v - r\sin\left(\frac{(r+R)u}{r}\right) \sinh\left(\frac{(r+R)v}{r}\right)$ i $B = (r+R)\cos u \sinh v - r\cos\left(\frac{(r+R)u}{r}\right) \sinh\left(\frac{(r+R)v}{r}\right)$. Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

   Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle V(t), V(t)\rangle = -1$ i $\langle V(t), \alpha'(t)\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i $V(t)$. Računamo najprije vektorski produkt

$$V(t) \times \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2(r+R)\sin\left(\frac{R}{2r}t\right) \sinh a \\ (r+R)\cosh a\Big(\sin t - \sin\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big) \\ (r+R)\cosh a\Big(\cos t - \cos\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big) \end{pmatrix}$$

   zatim njegov integral

$$\int^t V(t) \times \alpha'(t)\, dt = \begin{pmatrix} -\frac{4r(r+R)}{R} \cos\left(\frac{R}{2r}t\right) \sinh a \\ \cosh a\Big(-(r+R)\cos t + r\cos\left(\frac{r+R)}{r}t\right)\Big) \\ \cosh a\Big((r+R)\sin t - r\sin\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big) \end{pmatrix}.$$

   Uvrštavanjem (5.26) i (5.17) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z = u + iv$, sređivanjem i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza slijedi zaključak. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu reprezentaciju su:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 2\,i\,(r+R)\sin\Big(\frac{Rz}{2r}\Big)\sinh a\,dz\\
&= \frac{1}{2}e^{-a-\frac{iRz}{2r}}\Big(-1+e^{2a}\Big)\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)(r+R)\,dz,\\
\phi_2 &= (r+R)\Big(\cos z-\cos\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)+i\cosh a\Big(\sin z-\sin\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\Big)\,dz\\
&= -\frac{1}{4}e^{-a-\frac{i(r+R)z}{r}}\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)\Big(A+e^{\frac{i(2r+R)z}{r}}+2e^{a+\frac{i(2r+R)z}{r}}+e^{2a+\frac{i(2r+R)z}{r}}\Big)(r+R)\,dz,\\
\phi_3 &= (r+R)\Big(i\Big(\cos z-\cos\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\cosh a-\sin z+\sin\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\,dz\\
&= -\frac{1}{4}ie^{-a-\frac{i(r+R)z}{r}}\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)\Big(-A+e^{\frac{i(2r+R)z}{r}}+2e^{a+\frac{i(2r+R)z}{r}}+e^{2a+\frac{i(2r+R)z}{r}}\Big)(r+R)\,dz.
\end{aligned}$$

Weierstrassova reprezentacija je

$$w(z)=\frac{1}{2}ie^{-a-\frac{i(r+R)z}{r}}(-1+e^a)^2\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)(r+R)\,dz$$

$$g(z)=-\frac{ie^{\frac{i(2r+R)z}{2r}}(1+e^a)}{-1+e^a}$$

gdje je $A=1-2e^a+e^{2a}$.

3. $\varphi(t)=a\,t+b$, $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b=0$. Za drugačiji odabir parametra b dobije se ista ploha samo zarotirana oko x-osi. Ako je $\varphi(t)=a\,t\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ onda je $V(t)=\cosh(a\,t)\,n(t)+\sinh(a\,t)\,b(t)$. U tom slučaju vrijede sljedeći rezultati:

Teorem 5.26 Maksimalne hipo- i epicikloidne plohe, odnosno plohe definirane Minkowskijevim hipo- i epicikloidama (5.10) u xz-ravnini i jediničnim vektorom $V(t)=\sinh(a\,t)\,n(t)+\cosh(a\,t)\,b(t)$ gdje je $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, dane su parametrizacijom

$$f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \tag{5.28}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
x(u,v)=&-\frac{4r(r+R)}{4a^2r^2+R^2}\Big(\cos\Big(\frac{Ru}{2r}\Big)\cosh au\Big(-R\cosh\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\sin av+2ar\cos av\sinh\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\Big)\\
&+\sin\Big(\frac{Ru}{2r}\Big)\sinh au(2ar\cosh\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\sin av+R\cos av\sinh\Big(\frac{Rv}{2r}\Big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(u,v)=&\frac{1}{(1+a^2)\,(r^2+a^2r^2+2rR+R^2)}\\
&\Big((r+R)((1+a^2)r^2+2rR+R^2)\cosh v(\sin u(1+a^2-a\cosh au\sin av)+
\end{aligned}$$

$$\cos u \sin av \sinh au) + (1+a^2) r \cosh\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\Big(\sin\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)(-r^2 - a^2r^2 - 2rR$$
$$- R^2 + ar(r+R)\cosh au \sin av) - (r+R)^2 \cos\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\sin av \sinh au\Big) + (r+R)$$
$$\cos av\Big(- (r^2 + a^2r^2 + 2rR + R^2)(\cosh au \sin u + a\cos u \sinh au)\sinh v + (1+a^2)$$
$$r\Big((r+R)\cosh au \sin\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big) + ar\cos\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\sinh au\Big)\sinh\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\Big)\Big),$$

$$z(u,v) = \frac{1}{(1+a^2)(r^2 + a^2r^2 + 2rR + R^2)}$$
$$\Big((1+a^2)r\cosh\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\Big(\cos\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)(-r^2 - a^2r^2 - 2rR - R^2$$
$$+ ar(r+R)\cosh au \sin av) + (r+R)^2 \sin\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\sin av \sinh au\Big)$$
$$+ (r+R)(r^2 + a^2r^2 + 2rR + R^2)\cosh v((1+a^2)\cos u - \sin av(a\cos u \cosh au$$
$$+ \sin u \sinh au)) + (r+R)\cos av\Big((r^2 + a^2r^2 + 2rR + R^2)(-\cos u \cosh au$$
$$+ a \sin u \sinh au)\sinh v + (1+a^2)r\Big((r+R)\cos\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\cosh au$$
$$- ar\sin\Big(\frac{(r+R)u}{r}\Big)\sinh au\Big)\sinh\Big(\frac{(r+R)v}{r}\Big)\Big)\Big).$$

Te plohe su algebarske i dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Dokaz. Da bi mogli koristiti Björlingovu formulu potrebno je prvo provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti $\langle V(t), V(t)\rangle = -1$ i $\langle V(t), \alpha'(t)\rangle = 0$. Budući da su uvjeti zadovoljeni, onda koristimo formulu (5.8) za dobivanje plohe zadane s tzv. Björlingovim podatcima, c i $V(t)$. Računamo najprije vektorski produkt

$$V(t) \times \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 2(r+R)\sin\left(\frac{R}{2r}t\right)\sinh at \\ (r+R)\cosh at\Big(\sin t - \sin\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big) \\ (r+R)\cosh at\Big(\cos t - \cos\left(\frac{r+R}{r}t\right)\Big) \end{pmatrix}$$

zatim njegov integral

$$\int^t V(t)\times\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{4r(r+R)(2ar\cosh at\sin\left(\frac{Rt}{2r}\right) - R\cos\left(\frac{Rt}{2r}\right)\sinh at)}{4a^2r^2+R^2} \\ (r+R)\Big(\dfrac{r(r+R)\cos\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)\cosh at - ar^2\sin\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)\sinh at}{(1+a^2)r^2+2rR+R^2} \\ \qquad + \dfrac{-\cos t\cosh at + a\sin t\sinh at}{1+a^2}\Big) \\ (r+R)\Big(\dfrac{-r(r+R)\cosh at\sin\left(\frac{(r+R)t}{r}\right) - ar^2\cos\left(\frac{(r+R)t}{r}\right)\sinh at}{(1+a^2)r^2+2rR+R^2} \\ \qquad + \dfrac{\cosh at\sin t + a\cos t\sinh at}{1+a^2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

Uvrštavanjem (5.26) i (5.29) u Björlingovu formulu (5.8), zatim zamjenom parametra t s kompleksnim brojem $z = u + iv$, sređivanjem i izlučivanjem realnog dijela iz dobivenog izraza slijedi zaključak. □

Holomorfne funkcije za Weierstrassovu reprezentaciju su:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 2\,i\,(r+R)\sin\Big(\frac{Rz}{2r}\Big)\sinh az\,dz \\
&= \frac{1}{2}e^{-az-\frac{iRz}{2r}}\left(-1+e^{2az}\right)\left(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\right)(r+R)\,dz, \\
\phi_2 &= (r+R)\Big(\cos z - \cos\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big) + i\cosh az\Big(\sin z - \sin\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\Big)\,dz \\
&= -\frac{1}{4}e^{-\left(a+\frac{i(r+R)}{r}\right)z}\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)\Big(A+e^{\frac{i(2r+R)z}{r}}+2e^{\left(a+i\left(2+\frac{R}{r}\right)\right)z}+e^{\left(2a+i\left(2+\frac{R}{r}\right)\right)z}\Big)(r+R)dz, \\
\phi_3 &= (r+R)\Big(i\Big(\cos z - \cos\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\cosh az - \sin z + \sin\Big(\frac{(r+R)z}{r}\Big)\Big)\,dz \\
&= \frac{1}{4}ie^{-\left(a+\frac{i(r+R)}{r}\right)z}\Big(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\Big)\Big(A-e^{\frac{i(2r+R)z}{r}}-2e^{\left(a+i\left(2+\frac{R}{r}\right)\right)z}-e^{\left(2a+i\left(2+\frac{R}{r}\right)\right)z}\Big)(r+R)dz.
\end{aligned}$$

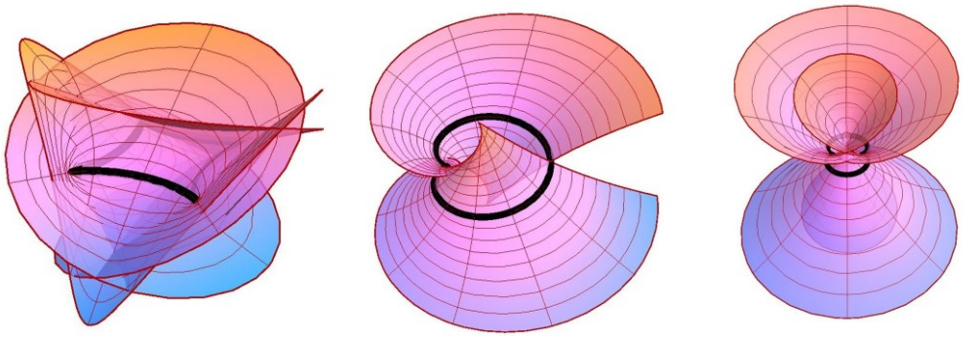
Weierstrassova reprezentacija je

$$w(z) = \frac{1}{2}ie^{-\left(a+\frac{i(r+R)}{r}\right)z}\left(-1+e^{az}\right)^2\left(-1+e^{\frac{iRz}{r}}\right)(r+R)\,dz$$

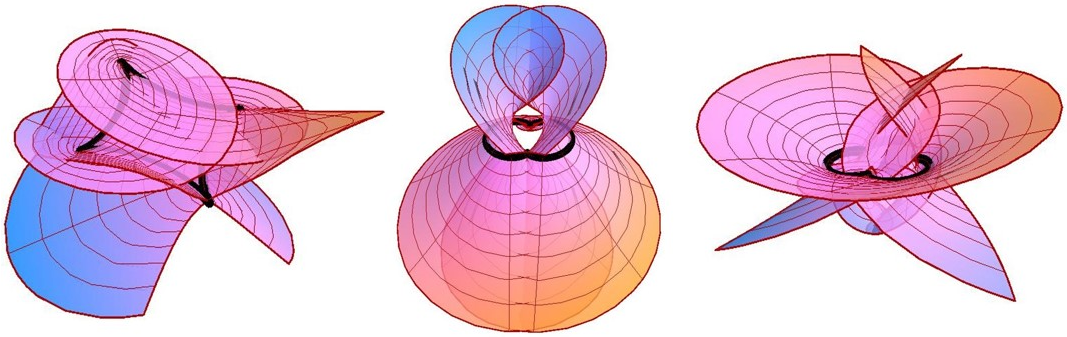
$$g(z) = -\frac{ie^{\frac{i(2r+R)z}{2r}}\left(1+e^{az}\right)}{-1+e^{az}}$$

gdje je $A = 1-2e^{az}+e^{2az}$. Na slici 5.7 prikazane su Minkowskijeve cikloidne plohe (5.27) s krivuljom jezgrom euklidskom astroidom ($R=-4$, $r=1$, $a=1$), kardioidom ($R=1$, $r=1$, $a=1$) i nodoidom ($R=2$, $r=1$, $a=2$). Na slici 5.8 prikazane su Minkowskijeve cikloidne plohe (5.28) s krivuljom jezgrom euklidskom as-

troidom ($R = -4$, $r = 1$, $a = -0.5$), nodoidom ($R = 2$, $r = 1$, $a = 1$) i epicikloidom ($R = 3$, $r = 1$, $a = 0.8$).



Slika 5.7: Minkowskijeve cikloidne plohe (5.27)



Slika 5.8: Minkowskijeve cikloidne plohe (5.28)

Zaključak

U disertaciji je pokazano da u Minkowskijevom prostoru vrijede slična svojstva za α-evolute i za harmonijske evolute pravčastih, helikoidalnih i translacijskih ploha kao i u euklidskom prostoru. Budući da je Minkowskijev prostor vektorski prostor snabdjeven indefinitnim skalarnim produktom, onda kao posljedica takve strukture dobiveni rezultati u $\mathbb{R}^3_1$ su bogatiji i raznovrsniji od onih u euklidskom prostoru jer razlikujemo prostorne, vremenske i svjetlosne (nul) vektore, krivulje i plohe. Nadalje, za razliku od euklidskog prostora gdje je harmonijska evoluta plohe ploha, osim za sferu gdje je točka ili za minimalne plohe gdje degenerira u točku u beskonačnosti u Minkowskijevom prostoru harmonijska evoluta može biti i krivulja, i to svjetlosnog ili prostornog kauzalnog karaktera, ali ne i vremenskog. To se događa za kvazi-umbiličke plohe čije analogone nemamo u euklidskom prostoru. Bazna krivulja B-namotajne plohe i njena harmonijska evoluta čine Bertrandov par, odnosno to su krivulje koje imaju kolinearne normale. Nadalje, moguće je od zadane prostorne i svjetlosne krivulje rekonstruirati plohu kojoj je ta krivulja harmonijska evoluta.

U Minkowskijevom prostoru cikloidne krivulje definiraju se analogno kao i u euklidskom prostoru. To su krivulje koje nastaju gibanjem Minkowskijeve kružnice (euklidske hiperbole) po drugoj kružnici. Nadalje, u Minkowskijevom prostoru cikloidne krivulje također se mogu dobiti i kao projekcija sfernih općih zavojnica kao u $\mathbb{R}^3$. Uz pogodno odabrano vektorsko polje i krivulju jezgru koja je u našim primjerima cikloida moguće je konstruirati uz pomoć Björlingove formule nove primjere maksimalnih ploha, tzv. cikloidne maksimalne plohe. Dobivene plohe su algebarske plohe koje dopuštaju racionalnu parametrizaciju.

Bibliografija

[1] F. Aceff-Sánchez i L. Del Riego Senior. "Geometry of the conics on the Minkowski plane". *Journal of the Egyptian Mathematical Society* (2007).

[2] L. J. Alías, R. M. B. Chaves i P. Mira. "Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space". *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 134 (2003), str. 289–316.

[3] H. Balgetir, M. Bektaş i Inoguchi J. "Null Bertrand curves and their characterizations". *Note Mat.* 23 (2004), str. 7–13.

[4] C. C. Beneki, G. Kaimakamis i Papantoniou B. J. "Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space". *J. Math. Anal. Appl.* 275 (2002), str. 586–614.

[5] E. Calabi. "Examples of Bernstein problems for some non-linear equations". *Proc. Symp. Pure Math.* 15 (1970), str. 223–230.

[6] B. Carlsen i J. N. Clelland. "The geometry of lightlike surfaces in Minkowski space". *J. Geometry Phys.* 74 (2013), str. 43–55.

[7] P. Cattaneo. "Alcuni teoremi sull'evoluta armonica". *Nota. Ven. Ist. Atti.* 64 (1905), str. 1039–1052.

[8] R. M. B. Chaves, M. P. Dussan i M. Magid. "Björling problem for timelike surfaces in Lorentz-Minkowski space". *J. Math. Anal. Appl* 377 (2011), str. 481–494.

[9] S. Y. Cheng i S. T. Yau. "Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces". *Ann. Math.* 104 (1976), str. 407–419.

[10] J. N. Clelland. "Totally quasi-umbilical timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$". *Asian J.Math.* 16 (2012), str. 189–208.

[11] D. Devald. *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom prostoru.* Diplomski rad, 2017.

[12] F. Dillen i W. Kühnel. "Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space". *Manuscripta Math.* 98 (1999), str. 307–320.

[13] K. L. Duggal i A. Bejancu. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[14] Fr. Fabricius Bjerre. "Über zykloidale Kurven in der Ebene und im Raum". *Dan. Mat. Fys. Medd.* 26 (1951), str. 1–76.

[15] A. Ferrández, A. Giménez i P. Lucas. "Null generalized helices in Lorentz-Minkowski spaces". *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 (2002), str. 8243–8251.

[16] A. Ferrández, A. Giménez i P. Lucas. "Null helices in Lorentzian space forms". *Internat. J. Modern Phys. A.* 16 (2001), str. 4845–4863.

[17] S. Fujimori. "Triply periodic zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space". *Advanced Studies in Pure Mathematics (to appear)* (2017).

[18] S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. K. Yamada i Yang S.-D. "Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line". (https://arxiv.org/abs/1211.4912v2).

[19] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara i S. D. Yang. "Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space". *Michigan Math J.* 63 (2014), str. 189–207.

[20] W. Goemans. "Surfaces in three-dimensional Euclidean and Minkowski space, in particular a study of Weingarten surfaces". *Katholieke Universiteit Leuven - Faculty of Science* (2010).

[21] A. Gray, E. Abbena i S. Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman Hall/CRC, 2006.

[22] C. H. Gu, H. S. Hu i J. Inoguchi. "On time-like surfaces of positive Gaussian curvature and imaginary principal curvatures". *J. Geom. Phys.* 99 (1985), str. 29–36.

[23] E. Güler. "Bour's spacelike maximal and timelike minimal surfaces in the 3- dimensional Minkowski space". (https://arxiv.org/abs/1402.4966v1).

[24] J. Hano i K. Nomizu. *On isometric immersions of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space and the Monge-Ampere equation of a certain type.* Sv. 262. Math. Ann., 1983, str. 245–254.

[25] J. Hano i K. Nomizu. "Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space". *Tohoku Math. Journ.* 36 (1984), str. 427–437.

[26] U. Hertrich-Jeromin i F. Pedit. "Remarks on the Darboux Transform of Isothermic Surfaces". *Doc. Math. J. DMV* (1997), str. 313–333.

[27] U. Hertrich-Jeromin i F. Pedit. "Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces". *Documenta Mathematica* 2 (1997), str. 313–333.

[28] H. Hopf. *Differential Geometry in the Large Lecture.* Notes in Mathematics. Sv. 1000. Springer, Berlin, 1983.

[29] J. I. Inoguchi i S. Lee. "Null curves in Minkowski 3-space". *IEJG* 1.2 (2008), str. 40–83.

[30] F. Ji i Z. H. Hou. "A kind of helicoidal surfaces 3-dimensional Minkowski space". *J. Math. Anal. Appl.* 304(2) (2005), str. 632–643.

[31] F. Ji i Z. H. Hou. "Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space". *J. Math. Anal. Appl.* 325 (2007), str. 101–113.

[32] S. Kaya i R. López. "Solutions of the Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space". *Turk. J. Math.* 42 (2018), str. 2186–2201.

[33] S. Kaya i R. López. "The Björling problem and Weierstrass-Enneper representation of maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space". *Differential Geometry in Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Young Researcher Workshop on Differential Geometry in Minkowski Space* (Granada, April 17-20, 2017), str. 43–59.

[34] T. Klotz Milnor. "Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space". *Trans. Amer. Math. Soc.* 280 (1983), str. 161–185.

[35] O. Kobayashi. "Maximal surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space L^3". *Tokyo J. Math* 6.2 (1983), str. 297–309.

[36] W. Kühnel. *Diferential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds.* Second Edition, American Mathematical Society, 2006.

[37] S. Lee i J. H. Varnado. "Spacelike constant mean curvature surfaces of revolution in Minkowski 3-space". *Diferential Geometry - Dynamical Systems* 8 (2006), str. 144–165.

[38] S. Lee i J. H. Varnado. "Timelike constant mean curvature surfaces of revolution in Minkowski 3-space". *Diferential Geometry - Dynamical Systems* 9 (2007), str. 88–102.

[39] H. Liu. "Curves in the Lightlike Cone". *Beitr. Algebra Geom.* 45 (2004), str. 291–303.

[40] H. Liu. "Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space". *J. Geom. Phys.* 59 (2009), str. 74–78.

[41] H. Liu. "Translation Surfaces with Constant Mean Curvature in 3-dimensional Spaces". *Journal of Geometry* 64 (1999), str. 141–149.

[42] R. Lóopez i E. Demir. "Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature". *Central European Journal of Mathematics* 12 (2014), str. 1349–1361.

[43] R. López. *Constant mean curvature surfaces with boundary.* Springer, Berlin, 2013.

[44] R. López. "Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space". *Int. Electron. J. Geom.* 7 (2014), str. 44–107.

[45] R. López. "Surfaces in Lorentz-Minkowski space with mean curvature and Gauss curvature both constant". *Differential Geometry in Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Young Researcher Workshop on Differential Geometry in Minkowski Space* (Granada, April 17-20, 2017), str. 71–85.

[46] R. López i S. Kaya. "New examples of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space". *Kyushu J. Math.* 71 (2017), str. 311–327.

[47] R. López i S. Kaya. "On the duality between rotational minimal surfaces and maximal surfaces". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2017).

[48] R. López, Ž. Milin Šipuš, Lj Primorac Gajčić i I. Protrka. "Harmonic Evolutes Of B-Scrolls with Constant Mean Curvature in Lorentz-Minkowski Space". *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.,* https://doi.org/10.1142/S0219887819500762 16(05) (2019), str. 15.

[49] R. López i M. Weber. "Explicit Björling Surfaces with Prescribed Geometry". (2016).

[50] F. Manhart. "Bonnet-Thomsen surfaces in Minkowski geometry". *J. Geom.* 106 (2015), str. 47–61.

[51] F. Manhart. "Mit Loxodromen verknüpfte Flächen". *In Symposium "Konstruktive Geometrie"* (1990), str. 78–87.

[52] L. McNertney. *One-parameter families of surfaces with constant mean curvature in Lorentz* 3*-space.* Ph. D. Thesis, Brown Univ., Providence, RI, U.S.A., 1980.

[53] W. H. Meeks III i M. Weber. "Bending the helicoid". *Math. Ann.* 339 (2007), str. 783–798.

[54] Ž. Milin Šipuš i Lj. Primorac Gajčić. "Ruled surfaces of constant slope in 3-Minkowski spaces". *Proceedings of the 16th ICGG, Innsbruck* (2014), str. 1087–1094.

[55] Ž. Milin Šipuš, LJ. Primorac Gajčić i I. Protrka. "Null scrolls as B-scrolls in Lorentz-Minkowski 3-space". *submitted* (2019).

[56] Ž. Milin Šipuš, LJ. Primorac Gajčić i I. Protrka. "Spherical generalized helices in 3-dimensional Lorenzt-Minkowski space". *submitted* (2019).

[57] Ž. Milin Šipuš i V. Volenec. "The harmonic evolute of a surfaces in $\mathbb{R}^3_1$". *Math. Commun.* 19 (2014), str. 43–55.

[58] P. Mira. "Construction of Maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski Space". *Third International Conference on Geometry, Integrability and Quantization* (lipanj 2001), str. 337–350.

[59] P. Mira i J. A. Pastor. "Helicoidal Maximal Surfaces in Lorentz-Minkowski Space". *J. Monatsh Math.* 140 (2003), str. 315–334.

[60] Sasahara N. "Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space". *Tokyo J. Math.* 23(2) (2000), str. 477–502.

[61] J. C. C. Nietsche. *Lectures on minimal surfaces. Cambridge*. Cambridge University Press, 1989.

[62] B. Nolasco i R. Pacheco. "Evolutes of plane curves and null curves in Minkowski 3-space". *Jour. Geom.* 1 (2017), str. 195–214.

[63] B. Odehnal. "On Algebraic Minimal Surfaces". *KoG* 20 (2016), str. 61–78.

[64] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1983.

[65] J. Oprea. *The mathematics of soap films: explorations with Maple*. Sv. 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+266 pp. ISBN: 0-8218-2118-0, Student Mathematical Library.

[66] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. New York, Dover, 1986.

[67] U. Öztürk i E. Nešović. "On pseudo null and null Cartan Darboux helices in Minkowski 3-space". *Kuwait J. Sci.* 43(2) (2016), str. 64–82.

[68] LJ. Primorac Gajčić i Ž. Milin Šipuš. "Minding isometries of ruled surfaces in Lorentz-Minkowski space". *HAZU* (2019).

[69] I. Protrka. "The harmonic evolute of a helicoidal surfaces in Minkowski 3-space". *Differential Geometry in Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Young Researcher Workshop on Differential Geometry in Minkowski Space* (Granada, April 17-20, 2017), str. 133–142.

[70] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Departement of Mathematics, Vanderbilt University, 1994.

[71] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1890.

[72] E. N. Shonoda. "Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane". *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 24 (2016), str. 270–278.

[73] W. Sodsiri. *Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-space*. Ph. D. Thesis, Departement of Mathematics, K. U. Leuven, 2005.

[74] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Diferential Geometry*. Springer-Verlag, New York Inc, 1979.

[75] J. Walrave. *Curves and surfaces in Minkowski space*. Ph. D. Thesis, K. U. Leuven, Faculteit Der Wetenschappen, 1995.

[76] Z. Wang, D. Pei, L. Chen, L. Kong i Q. Han. "Singularities of focal surfaces of null Cartan curves in Minkowski 3-space". *Abstract and Applied Analysis.* (2012), str. 1–20.

[77] T. Weinstein. *An Introduction to Lorentz Surfaces.* De Gruyter expositions in mathematics, 22, de Gruyter, Berlin, 1996.

[78] D. W. Yoon. "On the evolute offsets of ruled surfaces in Minkowski 3-space". *Turk J Math.* 40 (2016), str. 594–604.

Popis slika

1.1 Pseudo-sfera $\mathbb{S}^2_1$, hiperbolička ravnina $\mathbb{H}^2$ i svjetlosni stožac $\mathbb{LC}$ 14

2.1 Hiperbolički, eliptički i parabolički katenoid 39
2.2 Parabolički nul-cilindar 41
2.3 Helikoid 2. vrste, helikoid 1. vrste, Cayley-Lie minimalna ploha 43

3.1 Cilindri $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^1_1 \times \mathbb{S}^1$ 53

4.1 Vremenska helikoidalna ploha (4.12) (žuta boja) i njena harmonijska evoluta (zelena boja) 70
4.2 Vremenska helikoidalna ploha (4.13) (žuta boja) 70
4.3 Helikoidalna pravčasta ploha (4.14) i njena harmonijska evoluta, svjetlosna zavojnica (4.15) 72
4.4 Ploha (4.16) i njena harmonijska evoluta koja je prostorna krivulja 72
4.5 Ploha s baznom krivuljom (4.17) (plava) i njena harmonijska evoluta (4.18) (zelena) koja je svjetlosna krivulja 73
4.6 B-namotajna ploha s baznom krivuljom koja je svjetlosna zavojnica s negativnom svjetlosnom zakrivljenošću (plava) i njena harmonijska evoluta (zelena) 80
4.7 Kvazi-umbilička ploha (4.33) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.31) (zelena) 84
4.8 Kvazi-umbilička ploha (4.35) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.34) (zelena) 85
4.9 B-namotajna ploha (4.45) (lijevo) i (4.46) (desno) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.44) (zelena) 91
4.10 B-namotajna ploha (4.48) (lijevo) i (4.49) (desno) s baznom krivuljom (plava) i njena harmonijska evoluta (4.47) (zelena) 93
4.11 Fokalna ploha (4.53) s fokalnom krivuljom (4.52) (crvena), skupom singulariteta (4.54) (zelena) i krivuljom γ (4.51) (ljubičasta) 96
4.12 Središta zakrivljenosti na normali plohe i α-loksodroma 97
4.13 Torus (4.114) (žuta) i njegova harmonijska evoluta (4.119) 123
4.14 Torus (4.126) (žuta) i njegova harmonijska evoluta (4.127) 126

5.1 Hipocikloida $R = 6$, $r = \frac{3}{2}$ (lijevo) i epicikloida $R = 6$, $r = 2$ (desno) . . . 130
5.2 Dvije različite pozicije pomične i fiksne kružnice u Minkowskijevoj ravnini . 132
5.3 Opće zavojnice na sferama $\mathbb{S}_1^2$ i $\mathbb{H}^2$ i njihove projekcije (cikloide) 134
5.4 Dualna ploha od adjungirane Hennebergove plohe 143
5.5 Minkowskijeve cikloidne plohe 147
5.6 Minkowskijeve hiper i paracikloidne plohe 151
5.7 Minkowskijeve cikloidne plohe (5.27) 156
5.8 Minkowskijeve cikloidne plohe (5.28) 156

Popis tablica

4.1 Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.64) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$ 106
4.2 Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.78) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$ 108
4.3 Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.88) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$ 110
4.4 Jednadžba za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ (4.101) koja je paralelna sa $\mathbb{S}_\alpha$ 112
4.5 Jednadžba za generatrisu Delaunayeve plohe $\mathbb{S}$ 114
4.6 Jednadžbe za Delaunayevu krivulju u $\mathbb{R}^3_1$ 115
4.7 Jednadžbe za generatrisu plohe $\mathbb{S}$ kojoj je α-loksodroma asimptotska krivulja 117
4.8 Jednadžbe lančanica u $\mathbb{R}^3_1$ 118
4.9 Klasifikacija krivulja 2. reda u $\mathbb{R}^3$ 120

Životopis

Ivana Protrka rođena je u Mostaru 1. srpnja 1988. godine. Osnovnu i srednju školu završila je u Imotskom. Godine 2007. upisuje preddiplomski studij Matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu kojeg završava 2010. godine, i tada upisuje diplomski studij na istom smjeru. Diplomski rad pod naslovom „Sferna geometrija" izradila je pod vodstvom prof. dr. sc. Željke Milin Šipuš i obranila 2013. godine. Iste godine počela je raditi na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu kao asistentica iz Nacrtne geometrije i Nacrtne Geometrije s računalnom grafikom, te je upisala doktorski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Ivana Protrka članica je Seminara za diferencijalnu geometriju. Održala je predavanje na tri međunarodne konferencija i znanstveno stručna skupa, te je sudjelovala na nekoliko radionica u Zagrebu i jednoj u Granadi u Španjolskoj, *Young researcher workshop on differential geometry in* $\mathbb{R}^3_1$, 2017. godine. Autorica je jednog znanstvenog i jednog stručnog rada te je koautorica dva znanstvana rada. Članica je Upravnog odbora Hrvatskog društva za geometriju i grafiku.

Popis objavljenih radova:

- R. López, Ž. Milin Šipuš, Lj. Primorac Gajčić, I. Protrka: Harmonic Evolutes Of B-Scrolls with Constant Mean Curvature in Lorentz-Minkowski Space, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., (2019), https://doi.org/10.1142/S0219887819500762.
- Lj. Primorac Gajčić, Ž. Milin Šipuš, I. Protrka: Structure Functions of Ruled Surfaces with Null Rulings, The 18th ICGG 2018 Proceedings (International Conference on Geometry and Graphics), Milano (2018), 371-380.
- I. Protrka: The harmonic evolute of a helicoidal surfaces in Minkowski space, Differential Geometry in Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Young Researcher Workshop on Differential Geometry in $\mathbb{R}^3_1$, Granada (2017), 133-142.
- I. Protrka: An Invitation to Combinatorial Tropical Geometry, Proceedings of the Croatian Combinatorial Days, Sveučilište u Zagrebu (2017), 65-76.