Računanje jednopetljenih Feynmanovih dijagrama direktnom numeričkom metodom

Klajn, Bruno

Doctoral thesis / Disertacija

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:388058

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Bruno Klajn

Računanje jednopetljenih Feynmanovih dijagrama direktnom numeričkom metodom

Doktorska disertacija
predložena Fizičkom odsjeku
Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
radi stjecanja akademskog stupnja
doktora prirodnih znanosti fizike

Doctoral Thesis submitted to the Department of Physics
Faculty of Science, University of Zagreb
for the academic degree of
Doctor of Natural Sciences (Physics)

Zagreb, 2016.

Ova disertacija izrađena je pod vodstvom dr. sc. Gorana Duplančića, u sklopu Sveučilišnog poslijediplomskog studija pri Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

This thesis was made under the mentorship of dr. sc. Goran Duplančić, within University post-graduate studies at Physics Department of Faculty of Science of University of Zagreb.

Zahvale

Ova disertacija predstavlja konačno ostvarenje petnaestogodišnjeg sna. Bez podrške dragih mi ljudi ne bih dogurao ovako daleko. Ovim se putem želim zahvaliti: obitelji, koja me od malena usmjeravala na ovaj put i podržavala kroz cijelo školovanje; srednjoškolskim i sveučilišnim profesorima, koji su mi otvarali vidike i tjerali me da nadilazim svoje granice; prijateljima i kolegama, s kojima sam dijelio strast i entuzijazam prema fizici sve ovo vrijeme.

Posebno hvala mentoru, dr. Duplančiću, za strpljenje i vođenje kroz cijeli poslijediplomski studij. Bio je to pravi Herkulov posao!

Za kraj, Sabini, koja mi je bila neprestana podrška kroz ovu pustolovinu: Hvala ti na svemu! Ovaj je rad posvećen tebi.

Sadržaj

Sadržaj **v**

Extended abstract **ix**

Uvod **1**

1 Standardni pristup amplitudama raspršenja **3**
1.1 Analitičke metode 3
1.2 Numeričke metode 5
1.2.1 Deformacija integracijske konture 6
1.2.2 Izravna integracija s $\epsilon > 0$ 7
1.3 Potreba za još jednom metodom? 8

2 Direktna numerička metoda **11**
2.1 Preliminarna razmatranja 12
2.2 Struktura singulariteta u kompleksnoj ℓ_0 ravnini 14
2.2.1 Singulariteti propagatora 14
2.2.2 Singulariteti integranda amplitude 15
2.3 Razdvajanje amplitude raspršenja na UV i IR doprinos 16
2.3.1 Wickova rotacija 16
2.3.2 Određivanje granične vrijednosti za $|\vec{\ell}|$ 17
2.4 UV doprinos amplitudi $\mathcal{M}_{\text{UV}}$ 19
2.5 IR doprinos amplitudi $\mathcal{M}_{\text{IR}}$ 20
2.6 Konačan izraz za amplitudu 22

3 Implementacija metode **25**
3.1 Odabir programskog jezika za implementaciju metode 25
3.2 Numerička integracija UV-doprinosa amplitudi 26
3.3 Numerička integracija IR-doprinosa amplitudi 27
3.4 Ekstrapolacija $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{M}(\epsilon)$ 29

4 Rezultati i diskusija **31**
4.1 Skalarne amplitude 31
4.1.1 Općenite skalarne amplitude 31
4.1.2 $2\phi \to 2\phi$ amplituda 32
4.1.3 $2\phi \to 3\phi$ amplituda 34
4.1.4 $2\phi \to 4\phi$ amplituda 35
4.2 Fotonske amplitude 36
4.2.1 Općenite fotonske amplitude 36
4.2.2 $2\gamma \to 2\gamma$ amplitude 38
4.2.3 $2\gamma \to 3\gamma$ amplitude 42
4.2.4 $2\gamma \to 4\gamma$ amplitude 42
4.3 Diskusija 44

5 Zaključak **47**

A Fotonske polarizacije **49**

Bibliografija **51**

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Doktorska disertacija

Računanje jednopetljenih Feynmanovih dijagrama direktnom numeričkom metodom

Bruno Klajn

Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

U ovom je doktorskom radu izložena nova, potpuno numerička metoda izračuna jednopetljenih Feynmanovih amplituda. Metoda se temelji na dvjema postojećim metodama za numerički izračun jednopetljenih Feynmanovih dijagrama. U jednoj se od tih metoda numerička stabilnost postiže deformacijom integracijske krivulje u kompleksnu ravninu, dok se u drugoj metodi integrabilni singulariteti regulariziraju Feynmanovim ϵ parametrom, te se fizikalna vrijednost dijagrama dobije ekstrapolacijom $\epsilon \to 0$. Za razliku od ovih metoda, koje su namijenjene izračunu pojedinih dijagrama, novom se metodom računa kompletna amplituda, dana kao suma dijagrama, odjednom. Nakon što se amplituda rastavi na dva, tzv. UV i IR, doprinosa, UV doprinos se računa deformacijom integracijske krivulje, dok se IR doprinos računa s konačnim ϵ, te naknadno ekstrapolira prema $\epsilon \to 0$. Računanjem cjelokupne amplitude odjednom, dobiva se na ekonomičnosti i stabilnosti samog računa, te se eliminira potreba za regularizacijom pojedinih dijagrama u slučaju konačnih amplituda. Metoda je implementirana u programskom jeziku Wolfram Mathematica i primjenjena na slučaj raspršenja u skalarnoj teoriji i kvantnoj elektrodinamici.

(69 stranica, 34 literaturnih navoda, jezik izvornika hrvatski)

Ključne riječi: kvantna teorija polja, jednopetljeni Feynmanovi dijagrami, amplituda raspršenja

Mentor: dr. sc. Goran Duplančić, znanstveni suradnik

Ocjenjivači: Amon Ilakovac, Mirko Planinić i Kornelija Passek-Kumerički

Rad prihvaćen: 7. lipnja 2016.

Basic documentation card

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Physics

Doctoral Thesis

Direct numerical calculation of one-loop Feynman diagrams

Bruno Klajn
Faculty of Science, Zagreb

Presented in this thesis is a new, completely numerical approach to one-loop Feynman amplitudes. The method is based upon two existing methods of numerical calculation of one-loop Feynman diagrams. In one of these methods, the numerical integration is performed by a contour deformation into a complex plane, while the other method regularizes the integrable singularities by keeping the Feynman ϵ parameter finite and then calculates the physical value of the diagram by extrapolation $\epsilon \to 0$. Contrary to these methods, which are designed to calculate individual diagrams, the new method calculates the complete amplitude, given as a sum of diagrams, at once. After separating the amplitude into two contributions, named UV and IR, the UV contribution is integrated via contur deformation, while the IR contribution is calculated using finite ϵ parameter and subsequently extrapolated for the value $\epsilon \to 0$. Calculating the complete amplitude at once is more economical and numerically stable approach and it elliminates the need for diagram regularization whenever the complete amplitude is finite. The method is implemented in the Wolfram Mathematica language and applied to calculation of scattering amplitudes in scalar theory and quantum electrodynamics.

(69 pages, 34 references, original in Croatian)

Keywords: Quantum Field Theory, scattering amplitudes, one-loop Feynman diagrams

Supervisor: Goran Duplančić, Associate Scientist

Reviewers: Amon Ilakovac, Mirko Planinić and Kornelija Passek-Kumerički

Thesis accepted: June 7th, 2016

Extended abstract

Introduction

To make confident predictions and comparison with experimental data, the theoretical calculations in high energy physics have to be of high precision. For scattering amplitudes, this means that a complete control is needed not only over the leading order contribution, but to the radiative corrections as well. Of these, the most important ones are the one-loop contributions. Although the calculation of one-loop scattering amplitudes has been extensively studied and considered to be completely understood, in this thesis we raise the question whether the standard approach to calculation of one-loop amplitudes is really optimal.

We present a new, completely numerical method for calculating arbitrary one-loop amplitudes, which is built upon two existing numerical methods. Contrary to these methods, our method is simpler and process-independent, making it more general and versatile. The method is implemented in `Wolfram Mathematica` and used to calculate N-scalar and N-photon scattering amplitudes. The method is presented in the paper: "G. Duplančić and B. Klajn, *Direct numerical approach to one-loop amplitudes*" (arXiv: 1604.07022).

Standard approach to scattering amplitudes

The standard methods of calculating one-loop amplitudes can be most generally divided into two groups: analytical and numerical methods.

Analytical methods

All analytical methods follow the same reductionistic approach: first the scattering amplitude is written in term of different one-loop Feynman diagrams, which are mathematically represented by the corresponding Feynman integrals, contributing to the process, then each diagram is reduced to a linear

combination of scalar master integrals, which are well known and have been tabulated. Using this approach, the only unknowns in the problem are the coefficients that multiply the master integrals in the linear combination. These coefficients can be calculated by a number of different methods:

- **Passarino-Veltman method.** The numerator of Feynman integral is systematically decomposed into Lorentz-covariant monomials.

- **Partial integration method.** Feynman integrals are written as integrals in a general number of dimensions D and recursion relations between different integrals, possibly with different values of D, are obtained by employing appropriate partial integration identities.

- **Tensor reduction.** Tensor Feynman integrals are represented as a tensor differential operator acting on the scalar integrals. Using Schwinger parametrization of Feynman integrals, as a result, a modified scalar Feynman integrals are obtained, which can be further simplified using, e.g. partial integration method.

- **Unitarity methods.** The underlying principle of these methods is the optical theorem which uses analyticity of the scattering amplitude in the complex plane to derive the connection between the amplitude and the discontinuity of the amplitude across the branch cut. A general one-loop integral can be reduced to scalar master integrals using the singularity structure of the on-shell scattering amplitude.

Numerical methods

In order to avoid the involved procedure of the foregoing analytical methods, one can choose to approach the calculation of one-loop amplitudes numerically. In this case, one faces the problem of integrand singularities which, without further treatment, make numerical integration unstable. Before any attempt of numerical calculation, one must subtract the divergent part of the amplitude, in order to numerically integrate the finite part. After this has been done, it remains to take care of the integrable singularities which cannot be subtracted. The two existing numerical method both use the fact that the integrable singularities are never really reached due to the Feynman $i\epsilon$ prescription in the propagators. It should be noted that both of the following method calculate the amplitude one diagram at a time.

Contour deformation method

The contour deformation method uses Cauchy's theorem to deform the integration contour into the complex plane consistent with the Feynman iϵ prescription and then puts $\epsilon \to 0$. A very detailed analysis of the singularity structure of the amplitude is needed in order to obtain a suitable integration contour. This makes this method, although very efficient, process-dependent.

Extrapolation method

Unlike the previous method, this method keeps $\epsilon > 0$ and integrates along the original contour, the real axis. The Feynman integral is represented using Feynman parametrization and integration is performed for many different values of ϵ, and then the results are extrapolated to get the physical limit $\epsilon \to 0$. For the extrapolation to work, the numerical integrals have to be calculated to very high precision.

Direct numerical method and implementation

Contrary to the two existing numerical methods that calculate the amplitude one diagram at a time, we advocate the view that it is more sensible to calculate the complete amplitude, given as a sum over Feynman diagrams, at once. This way the finite amplitudes need no subtraction, even if the individual diagrams are divergent. Also, we expect better numerical stability due to all cancellations happening on the integrand level. Since the amplitude is calculated at once, we also do not require high precision of the integration. Leaving details to the main text, we highlight the key points of our method.

After we sum over all the contributions to the amplitude at the one-loop level, we write this expression as a single integral over $\mathrm{d}^4\ell$. Next, we separate this integral into two contributions. In the UV-contribution we integrate over all loop momenta satisfying the condition $|\vec{\ell}| \geq \Lambda$, while in the IR-contribution we integrate over all loop momenta satisfying $|\vec{\ell}| \leq \Lambda$. Here, $\Lambda = 2\sqrt{s}$ is a conveniently chosen scale, with s being the Mandelstam s variable, the energy of the process squared in the center of mass frame. The integrand singularities in the UV-contribution are located in such a way that we can perform Wick rotation, a special choice of contour deformation. After Wick rotation, the UV-contribution becomes monotonically decreasing function which can be easily integrated with $\epsilon \to 0$ using four dimensional quadratures. On the other hand, the $\mathrm{d}\ell_0$ integral in the IR-contribution can be analytically integrated using residue theorem leaving three dimensional

integral with finite-domain $|\vec{\ell}| \leq \Lambda$ to be calculated using Monte Carlo integration with $\epsilon > 0$. The IR-contribution has to be calculated for several different ϵ and extrapolated to the physical limit $\epsilon \to 0$. In this way, our method takes the best features of both existing numerical methods.

The above mentioned method has been implemented using program language `Wolfram Mathematica`. For the extrapolation of the IR-contribution to the amplitude, a fit to a Padé approximant was used.

Results, discussion and conclusion

We have applied our method to calculate the N-scalar and N-photon scattering amplitudes for $N = 4, 5, 6$. To extensively test our method, we varied masses of the propagator and polarization of the photons. Excellent agreement was obtained with the analytical expressions in all cases. See main text for figures.

With respect to other numerical method, ours has the advantage that, since we are calculating the complete amplitude at once, significantly less Monte Carlo points are needed and we do not have to demand high precision of the numerical integration. Furthermore, our method is very simple and completely process-independent making it very useful for calculation of generic one-loop amplitudes.

To further test the method, we plan to calculate some experimentally relevant process, e.g. $H \to \gamma\gamma$, which contains a loop with propagator of different masses. Also, we plan on calculating the photon amplitudes for a wider range of propagator mass to examine the behavior and stability of the method for extremely large masses. Finally, we plan on implementing the method in some other program language which will enable us to efficiently calculate the 8-photon and 10-photon amplitudes which would be a remarkable test of the robustness of the method.

Uvod

Fiziku visokih energija očekuju uzbudljiva vremena. Razvojem eksperimentalnih tehnika i postrojenja, poput CERN-ovog Velikog hadronskog sudarivača (*Large Hadron Collider* - LHC), u mogućnosti smo vrlo precizno ispitati fundamentalnu fizikalnu teoriju—Standardni model čestica, kao i potencijalno detektirati signale neke ,,nove fizike", tj. fizike izvan Standardnog modela. U trenutku pisanja ovog rada, nema jasnih eksperimentalnih naznaka nove fizike, no zato pregršt mjerenih i analiziranih podataka nudi mogućnost uvida u najsitnije i najsuptilnije detalje Standardnog modela. Da bi se teorija koju testiramo potvrdila (ili opovrgnula), nužno je istovremeno imati velik broj eksperimentalnih mjerenja te vrlo precizne teorijske izračune. Jedino njihovom međusobnom usporedbom možemo doći do zaključka o valjanosti promatrane teorije.

Najzahvalniji tip eksperimenta za usporedbu s teorijskim predviđanjima su procesi raspršenja u kojima se upadni snop čestica raspršuje bilo na fiksnoj meti bilo na drugom snopu čestica. S eksperimentalne strane, mjerenjem svojstava raspršenih čestica, npr. distribucije kuta i energije raspršenja, može se konstruirati tzv. udarni presjek σ za dano raspršenje. Ova je veličina iznimno zanimljiva i s teorijske strane, budući da se može računati iz prvih principa kvantne teorije polja. Udarni je presjek upravo mjera vjerojatnosti da dođe do raspršenja i ovisi kako o interakciji među česticama, tako i o njihovoj kinematici. Informacija o interakciji među česticama sadržana je u tzv. amplitudi raspršenja $\mathcal{M}$ i nju želimo moći izračunati.

Da bi se izračunala amplituda raspršenja za bilo koji proces potrebno je riješiti kvantne jednadžbe gibanja koje su izvedene iz lagranžijana Standardnog modela. Ove je jednadžbe nemoguće egzaktno riješiti pa se nužno pribjegava aproksimativnim metodama—računu smetnje, odnosno perturbativnom računu. Da bi račun smetnje bio primjenjiv, konstanta vezanja λ koja opisuje interakciju mora biti dovoljno mala da amplitudu interakcije ima smisla razviti u red potencija po konstanti vezanja $\mathcal{M}(\lambda) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \ldots$, gdje implicitno pretpostavljamo da je $\mathcal{M}_k \propto \lambda^k$, te problem sustavno riješavati

red po red.* S ciljem sistematizacije ove procedure, koriste se Feynmanovi dijagrami kao slikovit prikaz interakcije među česticama. Svakom redu računa smetnje odgovara određeni broj različitih tipova Feynmanovih dijagrama. Tako, npr. vodećem doprinosu $\mathcal{M}_1$ odgovaraju granasti dijagrami (za koje se ponekad kaže da su klasični doprinos raspršenju budući da njihov doprinos amplitudi raspršenja ne ovisi o $\hbar$), dok se u višim doprinosima $\mathcal{M}_n$ za $n \geq 2$ javljaju dijagrami sa zatvorenim petljama. Spomenute petlje su kvantne prirode (eksplicitno sadrže faktore $\hbar$) i predstavljaju radijativne, odnosno virtualne korekcije granastim dijagramima. Svakako najbitniju od radijativnih korekcija čine Feynmanovi dijagrami s jednom petljom—jednopetljeni dijagrami, stoga je iznimno bitno moći precizno računati te dijagrame kako bi se, u konačnici, i sama amplituda mogla precizno izračunati. Tehnologija izračuna jednopetljenih dijagrama razvijala se paralelno s razvojem kvantne teorije polja te se danas smatra riješenim problemom, budući su razvijene mnoge metode, od analitičkih preko seminumeričkih do potpuno numeričkih.

U ovoj ćemo disertaciji izložiti još jednu metodu izračuna amplitude izgrađene od Feynmanovih dijagrama s jednom petljom.† Uzimajući u obzir sve aspekte računa jednopetljenih dijagrama, smatramo da je potpuno numerički pristup najprirodniji problemu, pa je, samim tim, i predložena metoda potpuno numerička. Motivaciju za način na koji ćemo realizirati samu metodu crpimo iz dosad razvijenih numeričkih metoda koje su se, iako različite, pokazale uspješnima u računanju pojedinih jednopetljenih dijagrama. Metoda na kojoj se temelji ovaj rad je prezentirana u znanstvenom članku: „G. Duplančić i B. Klajn, *Direct numerical approach to one-loop amplitudes*" (arXiv broj: 1604.07022).

Rad je organiziran na sljedeći način: u prvom poglavlju dajemo kratak pregled postojećih metoda za izračun jednopetljenih Feynmanovih dijagrama te dajemo odgovor na pitanje čemu još jedna takva metoda. U drugom poglavlju u detalje razrađujemo matematičku pozadinu naše metode, a konkretnu implementaciju ostavljamo za treće poglavlje. U četvrtom poglavlju primjenjujemo metodu za izračun N-skalarnih i N-fotonskih amplituda te diskutiramo dobivene rezultate. U petom poglavlju sumiramo sve zaključke i komentiramo daljnje potencijalne primjene metode.

*Pokazalo se se da je za sve teorije unutar Standardnog modela, kako elektroslabu (pa posebno i kvantnu elektrodinamiku—QED), tako i kvantnu kromodinamiku (QCD) perturbativan račun valjan pristup izračunu amplitude raspršenja, barem u nekom rasponu energija.

†U prethodnoj notaciji $\mathcal{M}_2$, no u nastavku je označavamo $\mathcal{M}$ jer ne može doći do zabune.

Poglavlje 1

Standardni pristup amplitudama raspršenja

Kao što smo napomenuli u Uvodu, problem izračuna jednopetljenih Feynmanovih dijagrama pa posredno i kompletne amplitude raspršenja je načelno potpuno riješen. Dostupne metode možemo podijeliti u dvije kategorije, one koje problemu pristupaju analitički i one koje problemu postupaju numerički.* U nastavku dajemo kratak pregled dostupnih metoda te motivaciju zašto bi imalo smisla konstruirati još jednu metodu.

§ 1.1 Analitičke metode

Sve analitičke metode za izračun amplitude raspršenja na razini jedne petlje su redukcionističke u duhu. Za početak, amplituda se shvaća kao suma svih jednopetljenih Feynmanovih dijagrama koji doprinose promatranom procesu. Slikovito,

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \sum_{\text{dijag}} \mathcal{I}, \tag{1.1}$$

gdje je

$$\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \mathcal{P}(\ell) \tag{1.2}$$

Feynmanov integral, tj. matematički izraz koji odgovara danom jednopetljenom dijagramu. Ovdje je $\mathcal{P}(\ell)$ podintegralna funkcija, konstruirana pomoću

*Postoje i hibridne, seminumeričke metode, koje određeni dio računa naprave analitički, a zatim ostatak numerički.

Feynmanovih pravila, koja ovisi o impulsu petlje ℓ i drugim relevantnim varijablama za promatrani dijagram. U ovom nam trenu nije bitan konkretan oblik $\mathcal{P}(\ell)$, osim činjenice da je racionalna funkcija u varijabli ℓ.

Nakon što smo amplitudu shvatili kao sumu Feynmanovih integrala, svaki ćemo integral $\mathcal{I}$ posebno tretirati i pokušati ga svesti na čim jednostavniji oblik. Ovisno o teoriji u sklopu koje promatramo raspršenje, $\mathcal{I}$ može biti skalarni ili tenzorski integral. U skalarnim integralima sva se ovisnost integranda $\mathcal{P}(\ell)$ o impulsu petlje ℓ nalazi u nazivniku, dok se kod tenzorskih integrala ℓ ovisnost nalazi i u brojniku. Kako su skalarni integrali uvelike jednostavniji od tenzorskih integrala, želja nam je prikazati $\mathcal{I}$ preko nekog skupa osnovnih skalarnih integrala. Ovo se pokazalo mogućim i ti se osnovni integrali nazivaju master integrali. S ovime, daljnja redukcija ide u smjeru

$$\mathcal{I} = \sum_k c_k \mathcal{I}_k^0, \tag{1.3}$$

gdje su $\mathcal{I}_k^0$ skalarni master integrali, a c_k koeficijenti. Skup master integrala $\{\mathcal{I}_k^0\}$ je jedinstven te dobro poznat i tabeliran [30, 5, 13, 14, 15]. Prema tome, jedini netrivijalni dio u izračunu jednopetljenih dijagrama jest određivanje koeficijenta c_k u razvoju (1.3).

Postoje mnoge metode za izračun koeficijenata c_k. Neke od njih su:

- **Passarino-Veltman metoda.** [27] U ovoj se metodi brojnik integranda $\mathcal{P}(\ell)$ sustavno dekomponira na Lorentz-kovarijantne monome. Na kraju procedure brojnici integranda ne ovise o ℓ čime je postignuta tražen rastav na skalarne integrale.

- **Metoda parcijalne integracije.** [10] Korištenjem dimenzionalne regularizacije [9] za računanje Feynmanovog integrala u proizvoljnom broju D dimenzija, moguće je raznim parcijalnim integracijama izvesti rekurzijske relacije kojima se složeniji integrali svode na jednostavnije integrale, sve do skalarnih master integrala. Alternativno, rekurzijske se relacije mogu prevesti u sustav diferencijalnih jednadžbi s poznatim rješenjem. Ova je metoda vrlo pogodna za automatizaciju na računalu.

- **Tenzorska redukcija.** [31, 16] Cilj je tenzorske redukcije prikazati tenzorske integrale preko skalarnih integrala na koje djelujemo određenim tenzorskim operatorom. Vezu između tenzorskih i skalarnih integrala je najlakše vidjeti koristeći Schwingerovu parametrizaciju [29] Feynmanovih integrala. Rezultat djelovanja tenzorskih operatora na skalarne integrale su skalarni integrali s modificiranim nazivnikom i/ili integrali u većem broju dimenzija (i u ovoj se metodi integrali računaju u D

dimenzija). Jednom kad se svi integrali svedu na skalarne, moguće ih je svesti na master integrale gore spomenutim rekurzivnim relacijama.

- **Unitarne metode.** [7, 26, 17] Sve metode ovog tipa počivaju na optičkom teoremu koji, koristeći analitičnost amplitude raspršenja u kompleksnoj ravnini, dovodi u vezu amplitudu nekog procesa s diskontinuitetom u amplitudi uzduž reza u kompleksnoj ravnini. Promatrajući strukturu singulariteta amplitude sa svim impulsima na ljusci mase, moguće je izvesti relacije kojima se općeniti jednopetljeni dijagram reducira na skalarne master integrale. Postoje razne implementacije ovih metoda za automatski račun na računalu.

Pogled na brojnost i raznolikost navedenih metoda doista pokazuje da je analitički pristup jednopetljenim dijagramima zrelo i dobro istraženo područje fizike čestica.

§ 1.2 Numeričke metode

U prošlom smo odjeljku naveli nekoliko metoda analitičkog pristupa izračunu Feynmanovih dijagrama. Sve su metode vrlo sofisticirane i netrivijalne analitičke metode da bi rastavili Feynmanove integrale na skalarne master integrale. Paralelno s razvojem analitičkog pristupa razvijale su se i numeričke metode za računanje Feynmanovih dijagrama. Očita prednost numeričkog pristupa nad analitičkim jest ta da je numerički pristup konceptualno vrlo jednostavan. Načelno, dakle, nema potrebe za kompliciranim analitičkim razmatranjima. Ovo pak znači da bi numerički pristup trebao biti fleksibilniji i funkcionirati podjednako, neovisno o detaljima procesa raspršenja.

S druge strane, numerički pristup ima probleme tamo gdje ih analitički pristup nema. Problemi numeričke integracije su singulariteti Feynmanovih integrala, koji se javljaju u dvije vrste: ultraljubičasti (UV) singulariteti su rezultat divergiranja Feynmanovog integrala za $\ell \to \infty$, dok se infracrveni (IR) singulariteti javljaju prilikom integracije kad god se u petlji propagiraju bezmasene čestice spojene na vanjsku liniju na ljusci mase. Analitički se lako nositi s ovim problemima, npr. vrlo je elegantno rješenje računati integral u proizvoljnom broju dimenzija D, čime se regulariziraju oba tipa divergencija (gore spomenuta dimenzionalna regularizacija). No, u numeričkom smo pristupu primorani integral izračunati u cjelobrojnom broju dimenzija, obično $D = 4$, te je stoga, prije bilo kakve numeričke integracije, potrebno izolirati i ukloniti sve poznate izvore divergencija. Ovo se može postići tzv. supstrakcijskim metodama [24, 2, 1] pomoću kojih je moguće bilo koji jednopetljeni

Feynmanov integral razdvojiti na divergentni i konačni dio. Divergentni dio se zatim renormalizira, dok se konačni dio može numerički izračunati.

Nadalje, osim UV i IR singulariteta, postoje i integrabilni singulariteti koji analitički ne predstavljaju problem, dok se zbog njih, u numeričkom pristupu, javljaju nestabilnosti prilikom integracije. Integrabilni se singulariteti javljaju kad se nazivnik integranda $\mathcal{P}(\ell)$ približi nuli, pa sam integrand neograničeno raste. Stoga je pravi izazov svake numeričke metode smisliti način kako se optimalno nositi s ovim izazovom. Odgovor na to pitanje leži u samom obliku integranda $\mathcal{P}(\ell)$. Ako pišemo $\mathcal{P}(\ell) = \mathcal{N}(\ell)/\mathcal{D}(\ell)$ tada je nazivnik integranda produkt realnih polinoma drugog stupnja $\wp_2(\ell)$[†]

$$\mathcal{D}(\ell) = \prod(\wp_2(\ell) + \mathrm{i}\epsilon). \tag{1.4}$$

Dodatni član $\mathrm{i}\epsilon$, uz $\epsilon > 0$, je tzv. Feynmanova preskripcija koja osigurava kauzalnost definirajući ispravan obilazak polova na putu integracije i osigurava da nazivnik nikad ne iščezava egzaktno. Fizikalna vrijednost Feynmanovog integrala dana je limesom $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{I}(\epsilon)$. Ovu je preskripciju lako analitički implementirati u račun, no kako to ostvariti numerički? Dosad su, u tom pogledu, razvijena dva različita pristupa: deformacija integracijske konture i izravna integracija s $\epsilon > 0$. U nastavku ćemo promotriti obje ove metode.

1.2.1 Deformacija integracijske konture

Feynmanova $\mathrm{i}\epsilon$ preskripcija služi ispravnom zaobilaženju integrabilnih singulariteta prilikom integracije po impulsu petlje. Za $\epsilon > 0$, singulariteti su pomaknuti s realne osi u kompleksnu ℓ ravninu. Međutim, kompleksna nam analiza govori da, dok se god relativni položaj konture integracije i singulariteta ne mijenja, moguće je računati Feynmanov integral s $\epsilon = 0$, tako da singulariteti padnu na realnu os, a konturu integracije deformirati s realne osi u kompleksnu ravninu.

Ovu su činjenicu iskoristili Soper et al. [25, 20] U njihovom pristupu, impuls u petlji se može deformirati u kompleksne vrijednosti na način $\ell \to \ell + \mathrm{i}\kappa(\ell)$, gdje je $\kappa(\ell)$ neka specificirana funkcija. Pametnim odabirom funkcije $\kappa(\ell)$ može se naći pogodna kontura integracije koja je dovoljno udaljena od singulariteta. Integracija duž takve konture će biti numerički stabilna i integral se može izračunati 4D Monte-Carlo integracijom. Upravo su tom implementacijom Soper et. al. izračunali bezmasene fotonske amplitude[‡]

[†]U idućem ćemo poglavlju vidjeti eksplicitan oblik polinoma $\wp_2(\ell)$.

[‡]Ove su amplitude u međuvremenu postale *benchmark* proces za testiranje numeričkih metoda za računanje jednopetljenih dijagrama.

$2\gamma \to (N-2)\gamma$ za $N = 4, 6$, računajući dijagram po dijagram te koristeći 10^6 Monte-Carlo točaka po dijagramu.

Treba napomenuti da se pogodan odabir funkcije $\kappa(\ell)$ pokazuje krajnje netrivijalnim zadatkom, jako ovisnim o detaljima konkretnog dijagrama. Iz tog je razloga u prvotnoj implementaciji metode analiziran samo jednostavniji slučaj procesa s bezmasenim propagatorima. U međuvremenu je metoda generalizirana na procese koje imaju i masivne čestice u petlji [2, 1, 4, 3], za koje je odabir pogodne konture integracije značajno kompliciraniji. Potencijalna je zamjerka ovoj metodi što je još uvijek relativno sofisticirana i zahtijeva znatan analitički angažman oko odabira konture prije same numeričke integracije. Međutim, što ako je promatrani proces raspršenja toliko složen da pronalazak pogodne konture postaje prezahtjevan problem ili se naprosto ne želimo upuštati u kompliciranа analitička razmatranja? Tada nam ne preostaje ništa drugo nego izravno numerički integrirati Feynmanov integral s konačnim $\epsilon > 0$.

1.2.2 Izravna integracija s $\epsilon > 0$

Kao alternativa prethodno izloženoj metodi numeričke integracije deformacijom konture u kompleksnu ravninu, nudi se metoda koja izravno numerički računa Feynmanov integral držeći $\epsilon > 0$ konačnim. Točnije, Feynmanov se integral računa za niz različitih $\{\epsilon_k\}$, te se iz dobivenih vrijednosti integrala $\{\mathcal{I}(\epsilon_k)\}$ fizikalna vrijenost $\mathcal{I}(0)$ dobiva ekstrapolacijom. Metodu su razvili de Doncker et al. [12, 34, 11], a sastoji se u tome da se Feynmanov integral s integrala po impulsima prebaci u integral po Feynmanovim parametrima [18], čime se ostvaruje velika prednost—kompaktna domena integracije, i kao takav numerički integrira kvadraturama za konačnu vrijednost parametra ϵ. Međutim, a priori nije jasno za koje točno vrijednosti ϵ treba računati integrale, te kako numerički provesti limes $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{I}(\epsilon)$.

De Doncker et al. su metodu implementirali na sljedeći način—Feynmanov se integral $\mathcal{I}(\epsilon)$ izračuna za desetak ne premalih vrijednosti ϵ/s ($\sim 10^{-4}$; za manje je vrijednosti numerička integracija nestabilna i nepouzdana), gdje je $\sqrt{s}$ energija procesa u sustavu centra mase. Zatim se na dobiveni niz vrijednosti $\{\mathcal{I}(\epsilon_k)\}$ primjeni Wynnov ϵ-algoritam [33] za ubrzavanje konvergencije pomoću kojeg se efektivno ekstrapolira tražena vrijednost integrala $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{I}(\epsilon)$.[§] Pomoću te metode mogu se računati svi jednopetljeni Feynmanovi integrali neovisno o masi čestice u petlji.

[§]Bitno je za napomenuti da je za Wynnov ϵ-algoritam ključno da su dobiveni integrali $\{\mathcal{I}(\epsilon_k)\}$ vrlo precizno izračunati (čak do 10 decimala!) da bi se iz njih mogao ispravno ekstrapolirati konačan rezultat.

Uz sve prednosti, ove metoda ima i dvije slabe točke. Integracija po Feynmanovim parametrima znači da je dimenzionalnost integracije varijabilna, tj. jednaka broju propagatora u petlji. Zbog toga je cijela metoda osjetljiva na detalje promatranog dijagrama, a ponajprije o broju vanjskih linija. Osim toga, odabir vrijednosti ϵ za koje treba računati $\mathcal{I}(\epsilon)$ je određen ad hoc, bez konkretnijih argumenata.

§ 1.3 Potreba za još jednom metodom?

Uzevši u obzir prethodno izložene metode za izračun jednopetljenih dijagrama, logično se pitati: „Čemu još jedna metoda?" Motivirani uspjehom postojećih metoda, smatramo da, nadogradnjom na njih, još uvijek ima mjesta za napredak.

Za početak treba odgovoriti na pitanje je li prirodnije razvijati analitičku ili numeričku metodu. Račun jednopetljenih integrala je toliko obiman da se i analitički pristupi implementiraju kao automatizirane procedure na računalu. Dakle, računalo je svakako neizbježan dio računa jednopetljenih dijagrama. Budući da su strojevi stvoreni za brze, repetitivne i elementarne kalkulacije, puni potencijal računala možemo iskoristiti jedino ako ga koristimo za numeričke račune. Osim toga, simboličke manipulacije su karakteristika ljudskog razmišljanja i strane su strojevima. Kao dodatan, praktičan argument u korist numeričkog pristupa napomenimo da je za određivanje udarnog presjeka σ (koji je eksperimentalna opservabla) iz amplitude raspršenja $\mathcal{M}$ potrebno provesti dodatnu integraciju kvadrata amplitude $|\mathcal{M}|^2$ preko faznog prostora vanjskih čestica. Čak i da imamo analitički izraz za amplitudu, iskustvo nas uči da je on prekompliciran i ovu se integraciju mora provesti numerički. Vidimo da je nemoguće provesti analitički račun do samih opservabli, pa zašto ne čim prije prijeći na numerički pristup?

Dakle, jednom kad smo se odlučili za numerički pristup izračunu jednopetljenih Feynmanovih dijagrama, potrebno je odrediti smjer u kojem ćemo razvijati metodu. Prije svega, želimo da metoda bude što više numerička. To znači čim manje analitičkih intervencija i sofisticiranosti, kako i priliči računu koji se odvija na stroju. Zagovaramo, dakle, vrlo jednostavan i prizeman pristup. Dalje, želimo da metoda bude robusna—to jest da podjednako dobro radi za sve jednopetljene dijagrame neovisno o vrsti interakcije, broju čestica koji se javlja u petlji itd. Ovim se zahtjevom odmičemo od postojećih numeričkih metoda, budući da one detalje svoje integracijske rutine prolagođavaju dijagramu kojeg računaju.

Za kraj, želimo pomaknuti fokus s pojedinačnog računanja dijagrama na računanje kompletne amplitude odjednom. Prednosti ovog poteza su

višestruke. Iskustvo s analitičkim računom dijagrama nas uči da je konačan izraz za amplitudu najčešće puno jednostavniji nego što bi se očekivalo od naivne sume svih izračunatih dijagrama. Ovo upućuje da dolazi do velikih oduzimanja među doprinosima različitih dijagrama. To pak znači da je računanje svakog dijagrama ponaosob nepotrebno trošenje resursa. Osim toga, zbog ovog oduzimanja, svaki je dijagram potrebno računati na vrlo visoku preciznost kako se prilikom sumiranja u amplitudu ne bi izgubile signifikantne znamenke. Konačno, ukoliko amplituda u cjelini nema UV i IR divergencija, ne moramo ni na koji način tretirati potencijalne UV/IR singularitete pojedinačnih dijagrama budući da će se oni u sumi nužno pokratiti.

Zaključno, želimo osmisliti potpuno numeričku metodu koja će, za razliku od dosadašnjih numeričkih (i analitičkih) metoda, računati kompletnu amplitudu procesa raspršenja na razini jedne petlje odjednom. Od te metode očekujemo robusnost i stabilnost te jednostavnu i intuitivnu realizaciju. Budući da računamo kompletnu amplitudu odjednom, nije nam potrebna velika preciznost konačnog rezultata. Preciznost od 1% je sasvim zadovoljavajuća. Što se tiče implementacije na računalo, metodu ćemo implementirati na najjednostavniji način, ne vodeći računa o performansama poput brzine izračuna. Bitno nam je pokazati da predložena metoda funkcionira na razini koncepta.

Poglavlje 2

Direktna numerička metoda

U ovom ćemo poglavlju prezentirati metodu izravnog numeričkog izračuna sume svih jednopetljenih Feynmanovih dijagrama koji doprinose amplitudi promatranog procesa. Sasvim općenito, na razini jedne petlje, amplitudi nekog procesa mogu doprinositi kvalitativno različiti dijagrami, od kojih svaki može sadržavati različit broj vanjskih linija na petlji*. Na primjer, dijagrami s dvije vanjske linije će, u pravilu, opisivati korekcije propagatora, dijagrami s tri linije će biti korekcije interakcijskim vrhovima, itd. U svakom slučaju, uvijek ćemo biti u mogućnosti grupirati jednopetljene dijagrame na prirodan način prema broju vanjskih linija. Bez smanjenja općenitosti, numeričku ćemo metodu izložiti pod pretpostavkom da imamo samo jednu takvu klasu jednopetljenih dijagrama, odnosno, da svi dijagrami u procesu imaju jednak broj vanjskih linija. Poopćenje na više različitih klasa dijagrama je trivijalno.

Također, treba napomenuti da jednopetljene amplitude koje se javljaju kao korekcije višeg reda u računu smetnje, u pravilu neće biti konačne zbog UV i/ili IR divergencija te se takve amplitude ne mogu izravno numerički izračunati. Da bismo i te amplitude učinili pogodnima za numerički tretman, potrebno ih je prvo učiniti konačnima, tj. analitički izolirati i otkloniti divergentne doprinose. Ovo je moguće postići prije spomenutim supstrakcijskim metodama. Nakon oduzimanja problematičnih doprinosa, preostali dio amplitude se može dalje numerički računati metodom koju ćemo izložiti. Ipak, u ovom ćemo se radu koncentrirati samo na konačne amplitude koje ne zahtjevaju supstrakcije.

*Pod pojmom vanjska linija ovdje smatramo liniju koja izlazi iz petlje, a ne mora nužno biti i vanjska linija čitavog Feynmanovog dijagrama.

§ 2.1 Preliminarna razmatranja

Promotrimo doprinos amplitudi svih Feynmanovih dijagrama s jednom petljom na koju je spojeno n vanjskih linija

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \sum_{\text{dijag}} \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \tag{2.1}$$

Ovdje su $\mathcal{N}$ i $\mathcal{D}$ pokrate za brojnik i nazivnik, respektivno, generičkog Feynmanovog dijagrama, dok je ℓ unutarnji impuls preko kojeg integriramo. Sasvim općenito, brojnik $\mathcal{N}$ će biti skalarna funkcija (i to polinom) vanjskih impulsa i polarizacija (odnosno heliciteta), masa čestica koje se propagiraju u petlji, konstanti vezanja vanjskih linija na petlju te, naravno, impulsa preko kojeg integriramo. Eksplicitan oblik brojnika $\mathcal{N}$ ovisi o teoriji koju promatramo i, ključno je za naglasiti, nije bitan za daljnja razmatranja. S druge strane, oblik nazivnika $\mathcal{D}$ isti je za sve teorije[†] i dan je produktom (inverznih) propagatora svih polja u petlji

$$\mathcal{D} = \prod_{k=1}^{n} \left((\ell - r_k)^2 - m_k^2 + \mathrm{i}\epsilon \right), \tag{2.2}$$

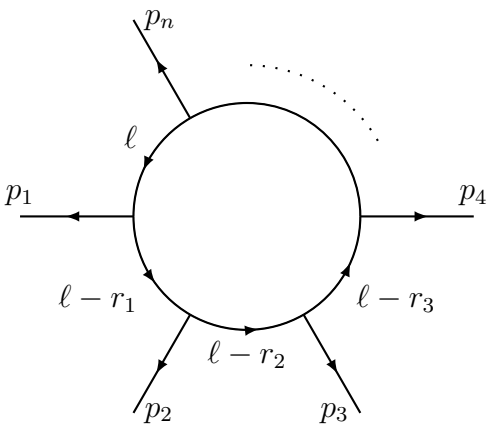
gdje je

$$r_k = \sum_{j=1}^{k} p_j \tag{2.3}$$

suma vanjskih impulsa p_j, za koje uzimamo da izlaze iz petlje (kako je prikazano na slici 2.1), m_k je masa k-te propagirajuće čestice u petlji, a $\epsilon > 0$ predstavlja Feynmanovu kauzalnu preskripciju koja vodi računa o ispravnom obilasku polova prilikom integracije, a samim time i o ispravnom predznaku imaginarnog dijela amplitude. Fizikalna amplituda odgovara limesu $\epsilon \to 0$.

Izraz za amplitudu, kako je standardno dan u relaciji (2.1), implicira da je prvo potrebno izračunati četverostruki Feynmanov integral za svaki dijagram posebno te zatim sumirati doprinose svih dijagrama. Takvo je razmišljanje u duhu analitičkog pristupa koji računa dijagram po dijagram te, sukladno tome, teži maksimalno pojednostaviti podintegralnu funkciju prije same integracije. S druge strane, za numerički pristup je bitnije imati

[†]U slučaju efektivnih teorija polja, potencija nazivnika može biti različita od jedinice, no taj slučaj nećemo promatrati.



Slika 2.1: Konvencionalna kinematika jednopetljenih Feynmanovih dijagrama s n vanjskih linija. Impulsi vanjskih linija p_i su orijentirani tako da izlaze iz petlje.

čim manje integracija makar na uštrb veće složenosti podintegralne funkcije. Budući da želimo numerički izračunati amplitudu, shvatit ćemo je na način

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}, \tag{2.4}$$

gdje smo sumu po dijagramima uvukli ispod integrala. Matematički je ovo opravdano budući da konačna suma uvijek komutira s integralom. Glavna je prednost zamjene sume i integrala što cijelu amplitudu možemo računati jednim četverodimenzionalnim integralom preko sume podintegralnih doprinosa svih dijagrama. Ovo je posebno bitno u slučajevima kad su pojedini Feynmanovi dijagrami UV/IR divergentni, no cijela je amplituda konačna.[‡] U tim slučajevima konačnost amplitude implicira da se divergencije moraju pokratiti među raznim dijagramima, a do tog će kraćenja doći upravo prilikom sume podintegralnih doprinosa svih dijagrama. Ovime je izbjegnuta potreba regularizacije pojedinih dijagrama te je, istovremeno, osigurana numerička stabilnost prilikom integracije.

Bez obzira na konačnost kompletne amplitude, prilikom integracije ćemo nužno naići na integrabilne singularitete koji se javljaju svaki put kad nazivnici propagatora (2.2) iščezavaju. Lako je vidjeti da do tog dolazi kad vrijedi (za k-ti propagator u dijagramu)

$$(\ell - r_k)^2 \equiv (\ell_0 - r_{k0})^2 - (\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2 = m_k^2 - \mathrm{i}\epsilon, \tag{2.5}$$

[‡]Sjetimo se da numerički možemo ionako računati samo konačne amplitude.

odnosno, u terminima ℓ_0 varijable

$$\ell_0 = \ell_{k\pm} \equiv r_{k0} \pm \sqrt{(\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2 + m_k^2 - \mathrm{i}\epsilon}. \tag{2.6}$$

Relacija (2.6) omogućuje alternativan zapis nazivnika,

$$\mathcal{D} = \prod_{k=1}^{n} (\ell_0 - \ell_{k-})(\ell_0 - \ell_{k+}). \tag{2.7}$$

Jasno je da zbog konačnog ϵ nazivnici nikad neće egzaktno iščeznuti na realnoj ℓ_0 osi, tj. stvarnoj domeni integracije, no u limesu $\epsilon \to 0$, upravo će područja $\ell_0 \approx \ell_{k\pm}$ najviše doprinositi integralu. Važno je napomenuti da se integrabilni singulariteti javljaju kao posljedica indefinitnosti Lorentzove metrike i ne ovise o složenosti procesa i česticama koje sudjeluju u procesu. To se vrlo lako vidi u UV području, tj. za $|\vec{\ell}| \to \infty$, gdje relacija (2.6) pokazuje da se singularne plohe javljaju kad god vrijedi $\ell_0 = \pm|\vec{\ell}|$. Dakle, integrabilni singulariteti su svojstveni svim jednopetljenim Feynmanovim integralima. Gledano analitički, Feynmanova iϵ preskripcija u potpunosti riješava problem integracije u blizini tih singulariteta no u kontekstu numeričkog pristupa oni predstavljaju izvor numeričke nestabilnosti—tzv. problem malih nazivnika. Stoga je potrebno pronaći način kako numerički provesti integraciju, a da se izbjegne problem malih nazivnika. Da bismo doskočili tom problemu, detaljnije ćemo analizirati singularnu strukturu podintegralne funkcije u kompleksnoj ℓ_0 ravnini.

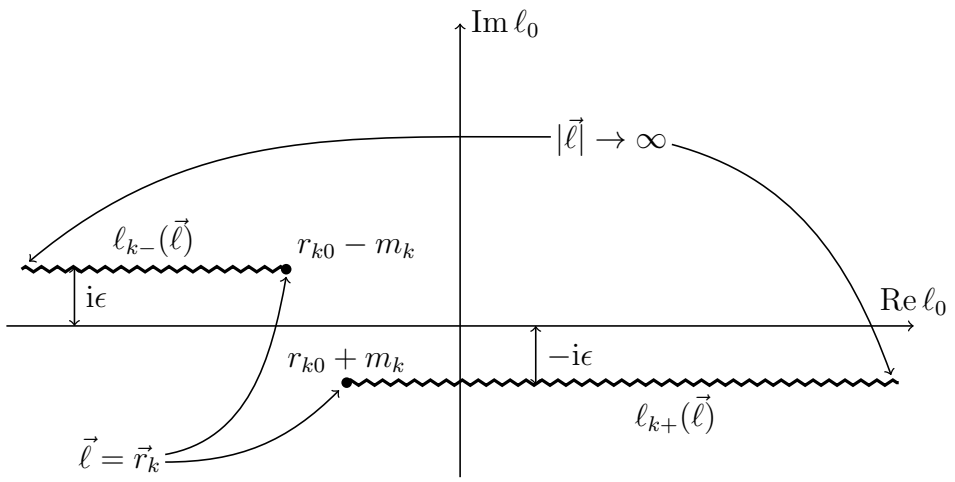
§ 2.2 Struktura singulariteta u kompleksnoj ℓ_0 ravnini

2.2.1 Singulariteti propagatora

Za dani Feynmanov dijagram svaki će od n propagatora u nazivniku imati singularnu strukturu prikazanu na slici 2.2. Po konstrukciji, singulariteti k-tog propagatora $\ell_{k\pm}$ su polovi prvog reda, čiji položaj u kompleksnoj ℓ_0 ravnini ovisi o trovektoru $\vec{\ell}$. Kako se $\vec{\ell}$ mijenja, vrijedi

$$\ell_{k\pm} \in [r_{k0} \pm (m_k - \mathrm{i}\epsilon), \pm(\infty - \mathrm{i}\epsilon)\rangle, \tag{2.8}$$

gdje smo radi jednostavnije analize uzeli $\epsilon \approx 0$ u relacijama (2.6). Sa slike 2.2 se vidi da su svi mogući položaji singulariteta lokalizirani na dva paralelna polupravca međusobno udaljena za $2\mathrm{i}\epsilon$. Razmak među točkama iz kojih počinju polupravci je $2m_k$.



Slika 2.2: Singularna struktura jednog Feynmanovog propagatora. Valovite linije predstavljaju sve moguće položaje singulariteta u kompleksnoj ℓ_0 ravnini. Točan položaj singulariteta ovisi o trovektoru $\vec{\ell}$. Na ovoj je slici uzeto $r_{k0} < -m_k$, te $\epsilon \approx 0$.

2.2.2 Singulariteti integranda amplitude

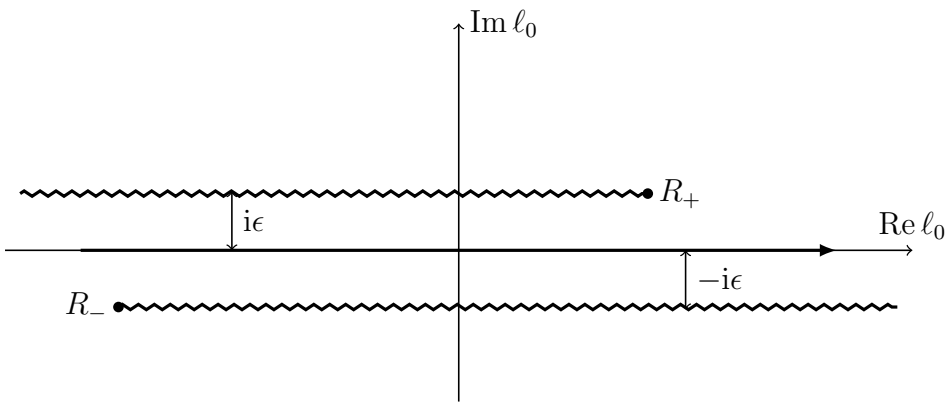
Na razini jednog Feynmanovog dijagrama, singularna struktura se tek neznatno mijenja. Singulariteti pojedinih dijagrama će i dalje biti lokalizirani polovi, međutim, zbog netrivijalne ovisnosti o trovektoru $\vec{\ell}$ i ostalim parametrima, a priori nije isključeno da će različiti propagatori istovremeno iščezavati, tj. da vrijedi $\ell_{j\pm} = \ell_{k\pm}$, za $j \neq k$. Ovakvo sljubljivanje singulariteta rezultira polovima višeg reda. Bez obzira na red pola, svi singulariteti i dalje leže na prethodno određenim polupravcima s tom razlikom što su točke iz koje izviru polupravci određeni uvjetima

$$r_+ = \max_k (r_{k0} - m_k), \qquad r_- = \min_k (r_{k0} + m_k), \tag{2.9}$$

za gornji i za donji polupravac, respektivno. Drugim riječima, za dani dijagram, r_+ je položaj krajnje desnog singulariteta u gornjoj poluravnini, dok je r_- položaj krajnje lijevog singulariteta u donjoj poluravnini. Konačno, budući da je podintegralna funkcija amplitude suma preko svih dijagrama, ekstremni položaji singulariteta u amplitudi su

$$R_+ = \max_{\text{dijag}} r_+, \qquad R_- = \max_{\text{dijag}} r_-. \tag{2.10}$$

Prikaz singularne strukture sume svih Feynmanovih dijagrama dan je na slici 2.3, gdje je također naznačena integracija duž realne ℓ_0 osi. Sa slike



Slika 2.3: Singularna struktura sume jednopetljenih Feynmanovih dijagrama koji doprinose danom procesu. Valovite linije predstavljaju sve moguće položaje singulariteta, a puna linija predstavlja krivulju integracije po ℓ_0.

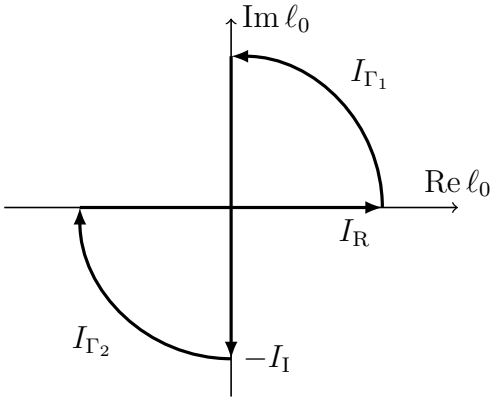
je vidljivo da se ℓ_0 varijabla za vrijeme integracije cijelo vrijeme nalazi jako blizu (unutar iϵ) singularnih linija. Variranjem vektora $\vec{\ell}$ prije ili kasnije će se gornji i donji singularitet naći jedan iznad drugog i kontura integracije će doslovno biti uklještena između ta dva singulariteta. Kad nastupi ova situacija, govorimo da je došlo do tzv. pinch singulariteta. Pinch singulariteti ne dopuštaju deformaciju integracijske konture što pak dovodi do velikih nestabilnosti prilikom numeričke integracije.

Imajući na umu da stabilnost numeričke integracije zahtijeva udaljenost od singulariteta, kao i činjenicu da je općenito nemoguće zaobići pinch singularitete na razini cijele amplitude, pokušat ćemo barem djelomično implementirati ideju o deformaciji integracijske konture, no na način koji ne ovisi o konkretnom procesu raspršenja (što podrazumijeva da je primjenjiv u slučaju masivnih propagatora u petlji) i funkcionira na razini cijele amplitude, a ne samo pojedinačnog dijagrama. Da bismo to napravili, morat ćemo amplitudu razdvojiti na dva dijela, koje ćemo nazvati UV- i IR-doprinos amplitudi.

§ 2.3 Razdvajanje amplitude raspršenja na UV i IR doprinos

2.3.1 Wickova rotacija

Uobičajen način udaljavanja od singulariteta uzduž realne ℓ_0 osi jest Wickova rotacija [32], tj. prelazak s integracije duž realne ℓ_0 osi na integraciju uzduž imaginarne ℓ_0 osi (slika 2.4) uzduž koje nazivnici ne iščezavaju. Da bi



Slika 2.4: Wickova rotacija: Integral preko realne osi I_{R} zatvorimo u petlju dodajući integrale I_{Γ_1}, I_{Γ_2} duž lukova te $-I_{\mathrm{I}}$ integral duž imaginarne osi. Ukoliko podintegralna funkcija nema polova u prvom i trećem kvadrantu, ukupni integral mora iščezavati prema Cauchyjevom teoremu. U limesu kad lukove Γ pošaljemo u beskonačnost, integrali I_{Γ_1} i I_{Γ_2} će iščezavati za svaku pristojnu podintegralnu funkciju te imamo jednakost integrala duž realne i imaginarne osi $I_{\mathrm{R}} = I_{\mathrm{I}}$.

Wickova rotacija bila primjenjiva nužno je da podintegralna funkcija bude analitička u prvom i trećem kvadrantu, što općenito nije ostvareno u našem slučaju. Međutim, iz relacije (2.6) te sa slike 2.2 je vidljivo da se povećanjem iznosa trovektora $\vec{\ell}$ gornji singularitet ℓ_{k-} sve dublje pomiče u drugi kvadrant, dok se donji singularitet ℓ_{k+} isto tako sve dublje pomiče u četvrti kvadrant. Stoga mora postojati neka granična vrijednost za $|\vec{\ell}|$ iznad koje će singulariteti biti smješteni isključivo u drugom i četvrtom kvadrantu te će zadovoljavati uvjete Wickove rotacije. Ovo pak znači da ćemo Wickovu rotaciju moći napraviti gotovo uvijek, osim za konačan inverval vrijednosti $|\vec{\ell}| < |\vec{\ell}|_{\text{granično}}$.

2.3.2 Određivanje granične vrijednosti za $|\vec{\ell}|$

Da bismo mogli napraviti Wickovu rotaciju, nužno mora vrijediti

$$\mathrm{Re}\,\ell_{k\pm} \gtrless 0, \tag{2.11}$$

gdje se nejednakost $>$ ($<$) odnosi na predznak $+$ ($-$), za svaki propagator u svakom Feynmanovom dijagramu. Koristeći definiciju (2.6), obje relacije (2.11) se u limesu $\epsilon \to 0$ svode na nejednakost

$$(\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2 > r_{k0}^2 - m_k^2. \tag{2.12}$$

Budući nas ne zanima stroga granica[§] za minimalni $|\vec{\ell}|$ koji omogućava Wickovu rotaciju, eliminirat ćemo kvadrat mase u zadnjoj nejednakosti i u nastavku koristiti slabiju nejednakost

$$(\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2 > r_{k0}^2, \tag{2.13}$$

koja će nam u konačnici dati jednostavniji rezultat. Dalje koristimo nejednakost trokuta

$$(|\vec{\ell}| + |\vec{r}_k|)^2 \geq (\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2, \tag{2.14}$$

koja, u kombinaciji s relacijom (2.13), daje

$$|\vec{\ell}| > |r_{k0}| - |\vec{r}_k|. \tag{2.15}$$

U vidu prethodnih razmatranja pokazuje se dovoljnim uzeti takav $|\vec{\ell}|$ da vrijedi

$$|\vec{\ell}| \geq |r_{k0}| \tag{2.16}$$

kako bismo bili sigurni da su osigurani svi uvjeti za izvođenje Wickove rotacije. Relacija (2.16) mora vrijediti za svaki propagator svakog Feynmanovog dijagrama što pak znači da na razini amplitude mora vrijediti

$$|\vec{\ell}| \geq \max_{k,\text{dijag}} |r_{k0}|, \tag{2.17}$$

da bismo integral preko ℓ_0 mogli Wick-rotirati.

Izraz s desne strane relacije (2.17) može se vrlo jednostavno interpretirati koristeći definiciju (2.3). To je maksimalna vrijednost iznosa nulte komponente svih mogućih suma vanjskih impulsa, što nije ništa drugo nego ukupna energija u sustavu centra mase, $\sqrt{s}$. Obzirom da se konvencionalno uzima da svi vanjski impulsi izlaze iz petlje, zbog zakona očuvanja vrijedi

$$\sum_k p_k = 0. \tag{2.18}$$

Prema tome, energija u sustavu centra mase se mora računati kao

$$s = \left(\sum_k p'_k \right)^2, \tag{2.19}$$

gdje su p'_k fizikalni, tj. impulsi pozitivne energije, koji predstavljaju čestice koje doista izlaze iz sudara.

[§]Zbog toga što tražimo dovoljan, ne i nužan uvjet za Wickovu rotaciju.

Za kraj treba napomenuti da ukoliko u izrazu za amplitudu postoji dijagram čiji k-ti propagator zadovoljava $m_k = 0$, $\vec{r}_k = \vec{0}$ te $r_{0k} = \sqrt{s}$,[¶] tada singulariteti koji zadovoljavaju uvjet (2.17) još uvijek diraju imaginarnu ℓ_0 os. Da nam ta činjenica ne bi stvarala problem nakon Wickove rotacije, uzet ćemo nešto slabiju granicu na iznos trovektora impulsa

$$|\vec{\ell}|_{\text{granično}} > 2\sqrt{s}. \tag{2.20}$$

§ 2.4 UV doprinos amplitudi $\mathcal{M}_{\mathrm{UV}}$

U prošlom smo odjeljku pokazali da ukoliko ograničimo iznos trovektora impulsa prema (2.20), singulariteti će biti lokalizirani isključivo u drugom i četvrtom kvadrantu te neće dirati imaginarnu os. Na taj su način ostvareni svi uvjeti za izvođenje Wickove rotacije. Da bismo formalizirali ovu ideju, vratimo se na izraz za amplitudu (2.4) i zapišimo ga u obliku

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \iiint\limits_{|\vec{\ell}|<2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} + \iiint\limits_{|\vec{\ell}|>2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \tag{2.21}$$

Drugi član s desne strane u (2.21) predstavlja upravo onaj doprinos amplitudi u kojem možemo napraviti Wickovu rotaciju. Budući da uvjet $|\vec{\ell}| > 2\sqrt{s}$ u sebi sadrži i područje $|\vec{\ell}| \to \infty$, taj ćemo doprinos zvati UV doprinos amplitudi

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\mathrm{UV}} \equiv \iiint\limits_{|\vec{\ell}|>2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \tag{2.22}$$

Sa slike 2.5 je jasno da prilikom izračuna UV amplitude $\mathcal{M}_{\mathrm{UV}}$ integraciju preko ℓ_0 možemo Wick rotirati, što je u konačnici jednako tome da u izrazu (2.22) napravimo zamjenu $\ell_0 \to \mathrm{i}\ell_0$ držeći granice integracije nepromijenjenima. Ovime smo efektivno promijenili podintegralnu funkciju tako da se izraz za UV amplitudu može zapisati kao

$$\mathcal{M}_{\mathrm{UV}} = \iiint\limits_{|\vec{\ell}|>2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \left.\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)}\right|_{\ell=(\mathrm{i}\ell_0,\vec{\ell})}. \tag{2.23}$$

Budući da smo se novom konturom integracije dovoljno udaljili od singulariteta, više nam nije potrebna Feynmanova preskripcija kao regulator pa u

[¶] Primjer takvog procesa je raspršenje $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ pod kutom $\theta = \pi$ na dovoljno visokim energijama.

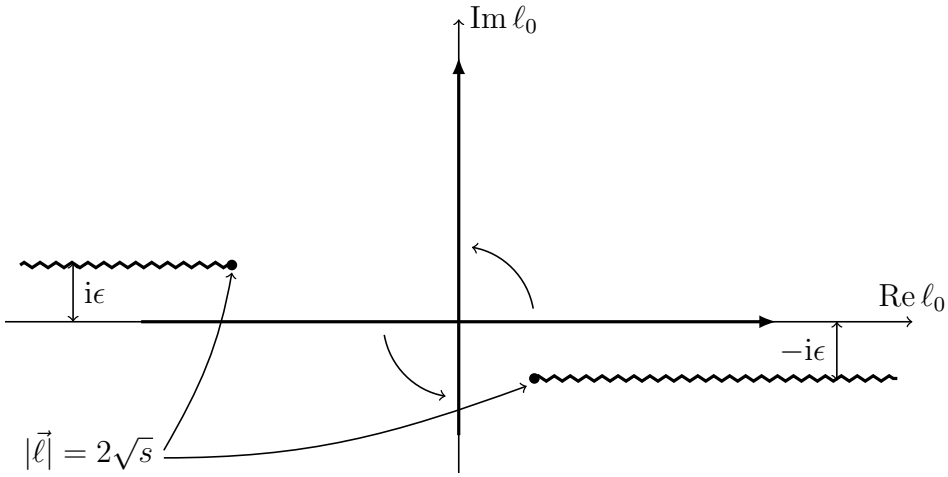
podintegralnu funkciju u relaciji (2.23) možemo staviti $\epsilon \to 0$. Osim toga, velika prednost Wick rotacije jest efektivna promjena metrike u UV području impulsa iz Lorentzove u Euklidovu čime podintegralna funkcija postaje monotono opadajuća što dodatno stabilizira numerički izračun i omogućuje gotovo trivijalnu integraciju deterministčkim algoritmom, tj. kvadraturama.

§ 2.5 IR doprinos amplitudi $\mathcal{M}_{\text{IR}}$

Nakon što smo proučili UV doprinos amplitudi, vratimo se na prvi član s desne strane jednadžbe (2.21). Obzirom na to da smo prethodni doprinos nazvali UV, ovaj ćemo zvati IR doprinos. Eksplicitno, imamo

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{\text{IR}} \equiv \iiint\limits_{|\vec{\ell}|<2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}. \tag{2.24}$$

Zbog uvjeta $|\vec{\ell}| < 2\sqrt{s}$, integrabilni su singulariteti u kompleksnoj ℓ_0 ravnini sad lokalizirani na vrlo usko područje. Zbog lokaliziranosti singulariteta, kao i činjenice da znamo da se radi o polovima, možemo zatvoriti krivulju integracije kao na slici 2.6 i iskoristiti Cauchyjev teorem o reziduumima. Integral po beskonačnoj polukružnici iščezava i imamo



Slika 2.5: Wickova rotacija pointegralne funkcije UV amplitude $\mathcal{M}_{\text{UV}}$. Pune ravne linije označavaju konturu integracije po ℓ_0 prije i nakon Wickove rotacije. Valovite linije prikazuju singularne linije ograničene na drugi i četvrti kvadrant.

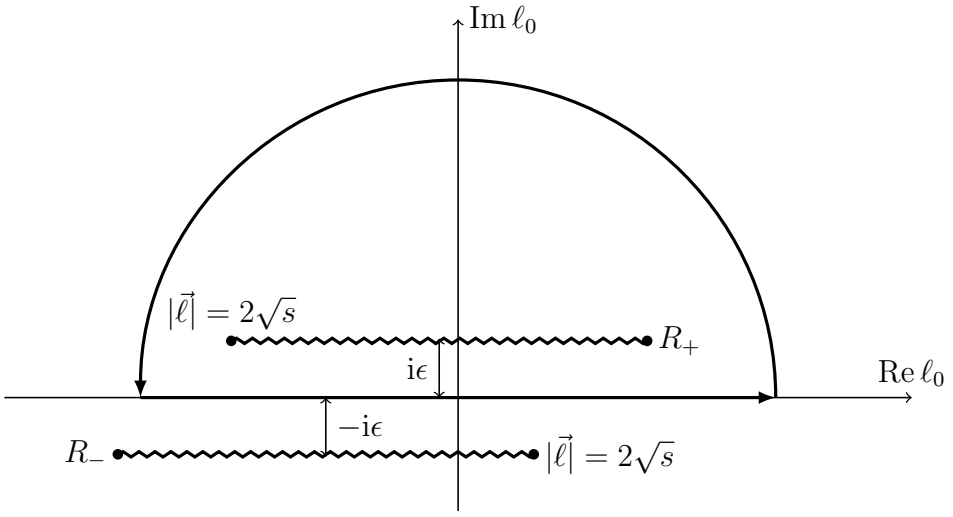
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)} = \mathrm{i} \sum_{\text{dijag}} \sum_{\text{polovi}} \mathrm{Res}\left(\mathcal{N}(\ell)/\mathcal{D}(\ell)\right)\big|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell})}\,, \tag{2.25}$$

gdje je $\mathrm{Res}\left(\mathcal{N}(\ell)/\mathcal{D}(\ell)\right)$ reziduum podintegralne funkcije u singularnoj točki $\ell_0 = \ell_{k-}$. Na ovaj smo način problematičnu integraciju po ℓ_0, najosjetljivu na integrabilne singularitete, izveli analitički. Ovo uvijek možemo napraviti budući da položaji singulariteta u ℓ_0 ne ovise o strukturi brojnika, pa niti o detaljima procesa kojeg promatramo. Također, kako Cauchyjev teorem vrijedi za polove proizvoljnog reda, ne treba nas brinuti niti prije spomenuto sljubljivanje polova prvog reda u polove višeg reda. Za kraj, rezduumi proizvoljnog reda se mogu analitički odrediti tako da nam je izraz za reziduum $\mathrm{Res}(\mathcal{N}(\ell)/\mathcal{D}(\ell))$ uvijek eksplicitno dostupan jednom kad specificiramo oblik brojnika $\mathcal{N}(\ell)$.

Uvrštavanje Cauchyjevog teorema u izraz za $\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}$ vodi na

$$\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}(\epsilon) = \iiint\limits_{|\vec{\ell}|<2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \sum_{\text{dijag}} \sum_{\text{polovi}} \mathrm{Res}\left(\mathcal{N}(\ell)/\mathcal{D}(\ell)\right)\big|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell})}\,. \tag{2.26}$$

Najveća je prednost analitički odrađene ℓ_0 integracije smanjenje broja numeričkih integracija s četiri na tri. Nadalje, preostale numeričke integracije



Slika 2.6: Analitički provedena integracija po ℓ_0 u IR amplitudi $\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}$ pomoću Cauchyjevog teorema. Doprinos integraciji po beskonačnoj polukružnici iščezava.

moramo provesti po vrlo ograničenoj domeni (malih) impulsa $|\vec{\ell}| < 2\sqrt{s}$, stoga je i naziv IR-doprinos amplitudi opravdan.[‖] Međutim, ne smijemo smetnuti s uma da je za Cauchyjev teorem bilo ključno da se singulariteti ne nalaze na realnoj ℓ_0 osi, tj. mora biti $\epsilon > 0$. Stoga preostale numeričke integracije moramo izračunati s konačnim ϵ, kako je i naglašeno notacijom $\mathcal{M}_{\text{IR}}(\epsilon)$. No, budući da nas na kraju zanima fizikalna amplituda, moramo na neki način izračunati limes $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{M}_{\text{IR}}(\epsilon)$. Naizgled, našli smo se u situaciji u kojoj moramo zadovoljiti oprečne uvjete: računati s čim većim ϵ zbog numeričke stabilnosti ili računati s čim manjim ϵ da bi dobiveni rezultat bio tim bliži fizikalnoj amplitudi. Inspiraciju za rješenje ove dileme nalazimo u numeričkom pristupu ala Doncker: pokušat ćemo naći optimalni raspon ϵ koji su dovoljno veliki da stabiliziraju integraciju, a opet dovoljno mali da se iz njih može precizno ekstrapolirati fizikalna vrijednost amplitude.

§ 2.6 Konačan izraz za amplitudu

U prošlim smo odjeljcima zasebno tretirali i pojednostavili UV- i IR-doprinos amplitudi. Vidjeli smo da se UV-doprinos može prevesti u četverodimenzionalni, Wick-rotirani integral koji monotono opada na domeni integracije i može se računati s $\epsilon = 0$. S druge strane, IR-doprinos se može pojednostaviti korištenjem Cauchyjevog teorema i svesti na oblik trodimenzionalnog integrala po ograničenoj domeni integracije. Međutim, prilikom izračuna IR-doprinosa Feynmanov kauzalni ϵ mora biti konačan kako bi regularizirao integrabilne singularitete. Uzimajući sve skupa u obzir, zaključujemo da je, u našem pristupu direktnog numeričkog izračuna amplitude, amplitudu

[‖] Opravdano je pitanje zašto nismo mogli Cauchyjev teorem iskoristiti na razini kompletne amplitude, bez potrebe za razdvajanjem na UV i IR doprinos. Međutim, singularna struktura integranda amplitude nema lokalizirane singularitete, tj. za $|\vec{\ell}| \to \infty$ singulariteti u ℓ_0 ravnini također bježe prema $\ell_0 \to \pm\infty$. Ovime pitanje obuhvaćanja svih singulariteta beskonačnom polukružnicom postaje vrlo suptilno i zahtjevalo bi dodatnu analizu. S druge strane, iz same konstrukcije IR-doprinosa amplitudi, sigurno smo da su singulariteti u ℓ_0 ravnini striktno lokalizirani u blizini ishodišta.

moguće računati samo s konačnim ϵ i to prema formuli

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\epsilon) &= \mathcal{M}_{\mathrm{UV}} + \mathcal{M}_{\mathrm{IR}}(\epsilon) \\ &= \iiint\limits_{|\vec{\ell}|>2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\ell_0}{2\pi} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)}\bigg|_{\ell=(\mathrm{i}\ell_0,\vec{\ell}),\epsilon=0} \\ &+ \iiint\limits_{|\vec{\ell}|<2\sqrt{s}} \frac{\mathrm{d}^3\ell}{(2\pi)^3} \sum_{\text{dijag}} \sum_{\text{polovi}} \mathrm{Res}\left(\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)}\right)\bigg|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell}),\epsilon>0}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Fizikalnoj će tada amplitudi odgovarati limes

$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{M}(\epsilon). \tag{2.28}$$

Iznimno je bitno napomenuti da je ova metoda izračuna amplitude potpuno općenita i funkcionira za svaki (konačni) jednopetljeni proces raspršenja. To je posljedica činjenice da nigdje nismo morali precizirati koji oblik poprima brojnik $\mathcal{N}(\ell)$, a on nosi informaciju o detaljima procesa. Ovo čini metodu vrlo fleksibilnom i univerzalnom. U nastavku ćemo promotriti jednu moguću implementaciju metode vođeni idejom maksimalne jednostavnosti i robusnosti.

Poglavlje 3

Implementacija metode

Nakon što smo u prošlom poglavlju izložili detalje metode za direktan numerički izračun amplitude bilo kojeg jednopetljenog procesa raspršenja, sad ćemo opisati jednu moguću implementaciju te metode. Da bismo u potpunosti prikazali jednostavnost i općenitost metode, implementirat ćemo je na elementaran i robustan način koji će staviti naglasak na potvrdu ispravnosti metode, ne vodeći računa o optimalnim performansama poput velike preciznosti dobivenih rezultata i/ili brzom vremenu izvršavanja. Naravno, ukoliko se metoda koristi za računanje konkretnog problema, tj. konkretne amplitude raspršenja, implementacija treba biti puno specifičnija i prilagođena danom problemu.

U nastavku diskutiramo pogodni programski jezik za robusnu implementaciju metode, detalje same numeričke integracije $\mathcal{M}_{\mathrm{UV}}$ i $\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}(\epsilon)$ doprinosa amplitudi te, za kraj, primjerenu ekstrapolacijsku metodu za dobivanje fizikalne amplitude $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{M}(\epsilon)$.

§ 3.1 Odabir programskog jezika za implementaciju metode

Za implementaciju numeričke metode koristimo programski jezik `Wolfram Mathematica 10`. Najveća prednost ovog programa u usporedbi s drugim izborima poput `Fortrana`, `C`-a, itd. jest vrlo jednostavna, gotovo doslovna implementacija gore izložene metode. Također, visoka razina sofisticiranosti `Mathematice` nam omogućava da je tretiramo kao ,,crnu kutiju", tj. ne moramo voditi računa o detaljima numeričke integracije, osim par osnovnih postavki. Na taj način dobivamo na robusnosti jer ako se metoda pokaže funkcionalnom u `Mathematici`, bit će funkcionalna i u nekom manje sofisti-

ciranom u fleksibilnijem programskom jeziku nad čijim postavkama imamo daleko veću kontrolu.

§ 3.2 Numerička integracija UV-doprinosa amplitudi

Da bismo izraz za UV-doprinos amplitudi (2.23) doveli u oblik pogodan za numeričku integraciju, potrebno je napraviti određenu transformaciju varijabli. Budući je područje integracije preko trovektora impulsa $\vec{\ell}$ sferno simetrično, uvodimo sferne koordinate

$$\vec{\ell} = \bar{r}(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \tag{3.1}$$

gdje su $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ i $\theta \in [0, \pi]$ polarni kutovi, a $\bar{r} = |\vec{\ell}|$ iznos trovektora impulsa. Zatim iz dimenzionalnih varijabli $\bar{r}$ i ℓ_0 izvlačimo dimenziju prema

$$\bar{r} = \frac{\sqrt{s}}{r}, \qquad \ell_0 = \sqrt{s}t, \tag{3.2}$$

gdje smo uveli bezdimenzionalne varijable $t \in \langle -\infty, +\infty\rangle$ te $r \in [0, 1/2]$. Motivacija za uvođenje recipročne varijable r je svođenje područja integracije po r na konačan inverval što uvelike stabilizira numeričku integraciju. Uzimajući supstitucije (3.1) i (3.2) zajedno s njihovim jakobijanima u obzir, konačan izraz za UV-doprinos amplitudi koji numerički integriramo u `Mathematici` jest

$$\mathcal{M}_{\mathrm{UV}} = \frac{s^2}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_0^{1/2} \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; \frac{\sin\theta}{r^4} \sum_{\text{dijag}} \frac{\mathcal{N}(\bar{\ell})}{\mathcal{D}(\bar{\ell})}\bigg|_{\epsilon=0}, \tag{3.3}$$

gdje je $\bar{\ell}$ pokrata za četverovektor

$$\bar{\ell} = \sqrt{s}(it, \sin\theta\cos\varphi/r, \sin\theta\sin\varphi/r, \cos\theta/r). \tag{3.4}$$

Kao što je vidljivo iz izraza (3.3), UV-doprinos amplitudi se računa kao četverodimenzionalni integral s jednom beskonačnom te tri konačne granice integracije. Zbog Wickove rotacije, podintegralna funkcija je konačna na putu integracije i ovaj se integral može riješiti kvadraturama. U `Mathematici` smo $\mathcal{M}_{\mathrm{UV}}$ računali pomoću `NIntegrate` naredbe koristeći deterministička integracijsku strategiju `GlobalAdaptive` s opcijama `MaxErrorIncreases` $\rightarrow$ `50000`, te `PrecisionGoal` $\rightarrow$ `2`.

Ukratko, `GlobalAdaptive` integracijska strategija radi na principu podijele domene integracije na područja na kojima se procijenjuje vrijednost integrala. Područja s najvećom procjenjenom greškom integracije se dalje rekurzivno dijele na polovice i postupak se ponavlja dok globalna greška svih područja nije unutar neke zadane granice. U našem se slučaju radi o relativnoj grešci od 10^{-2}, odnosno 1%.* Opcija `MaxErrorIncreases` označava maksimalan broj puta koliko se globalna greška može povećati zaredom nakon rekurzivnih bisekcija. Vrijednost ove opcije, 50000, govori da je potrebno značajno profiniti domenu integracije prije nego integracija počne konvergirati.

§ 3.3 Numerička integracija IR-doprinosa amplitudi

Za početak, kao i u slučaju UV-doprinosa amplitudi, i kod IR-doprinosa (2.26) pogodno je preći na sferne varijable supstitucijom

$$\vec{\ell} = \sqrt{s} r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \tag{3.5}$$

gdje kutovi θ i φ poprimaju standardne vrijednosti, dok se bezdimenzionalna radijalna varijabla r nalazi u intervalu $r \in [0, 2]$. Ovime IR-doprinos amplitudi postaje

$$\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}(\epsilon) = \frac{s^{3/2}}{8\pi^3} \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; r^2 \sin\theta \sum_{\text{dijag}} \sum_{\text{polovi}} \mathrm{Res} \left(\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)} \right) \Bigg|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell}),\epsilon>0} . \tag{3.6}$$

Nakon što smo pronašli optimalne varijable integracije, jedina nejasna stvar je kako izračunati reziduum podintegralne funkcije.

Prilikom izlaganja numeričke metode u prošlom poglavlju, rekli smo da su integrabilni singulariteti podintegralne funkcije amplitude polovi, no ne nužno prvog reda budući se može dogoditi da dva (ili više) različita propagatora istovremeno iščeznu za istu vrijednost trovektora $\vec{\ell}$. Točni uvjeti pod kojima dolazi do ovoga jako ovise o konkretnom procesu raspršenja te ih, upravo zbog toga, ovdje nećemo razmatrati jer ne želimo da nam niti metoda niti njena implementacija ovise o detaljima procesa raspršenja. Međutim, ako

*Iako ne djeluje impresivno, relativna preciznost od jedan posto je više nego prihvatiljiva na razini kompletne amplitude!

ne znamo kojeg je reda određeni pol, ne možemo izračunati njegov reziduum. Pametnom implementacijom ovaj problem se može zaobići.

Kako možemo vidjeti, do polova višeg reda dolazi za vrijednosti trovektora $\vec{\ell}$ koji zadovoljavaju jednadžbu (npr. za pol drugog reda)

$$r_{j0} \pm \sqrt{(\vec{\ell} - \vec{r}_j)^2 + m_j^2 - \mathrm{i}\epsilon} = r_{k0} \pm \sqrt{(\vec{\ell} - \vec{r}_k)^2 + m_k^2 - \mathrm{i}\epsilon}, \tag{3.7}$$

gdje su j i k dva različita propagatora u nekom Feynmanovom dijagramu. Kako $\vec{\ell}$ općenito ima tri slobodna parametra, tada će sva rješenja jednadžbe (3.7) imati najviše dva slobodna parametra. Analogno, za polove trećeg (četvrtog) reda, $\vec{\ell}$ će imati najviše jedan (nula) slobodni parametar. Odavde slijedi da sve vrijednosti trovektora $\vec{\ell}$ za koje može doći do istovremenog iščezavanja više različitih polova čine skup mjere nula unutar područja po kojem integriramo. Ovo pak znači da ako izvrijednimo podintegralnu funkciju u nasumično odabranoj točki domene integracije, vjerojatnost da ta točka odgovara polu višeg reda je nula. Dakle, kao optimalna metoda numeričke integracije IR-doprinosa amplitudi prirodno se nameće Monte-Carlo metoda.

Koristeći Monte-Carlo integraciju, reziduum podintegralne funkcije iz (3.6) možemo slobodno računati koristeći formulu za reziduum prvog reda,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}(\ell)}\right)\Big|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell})} = \left(\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}_k(\ell)}\right)\Big|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell})}, \tag{3.8}$$

gdje je

$$\mathcal{D}_k(\ell) = \frac{(\ell_{k-} - \ell_{k+})}{(\ell_0 - \ell_{k-})(\ell_0 - \ell_{k+})}\mathcal{D}(\ell). \tag{3.9}$$

S ovim, naš konačni izraz za IR-doprinos amplitudi postaje

$$\mathcal{M}_{\mathrm{IR}}(\epsilon) = \frac{s^{3/2}}{8\pi^3}\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\theta \sum_{\text{dijag}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathcal{N}(\ell)}{\mathcal{D}_k(\ell)}\right)\Big|_{\ell=(\ell_{k-},\vec{\ell}),\epsilon>0} \tag{3.10}$$

i kao takvog ga implementiramo u `Mathematici`. U naredbi `NIntegrate` koristimo opciju `AdaptiveMonteCarlo` te specificiramo standardnu preciznost, `PrecisionGoal` $\rightarrow$ `2` te ograničimo broj Monte-Carlo točaka na milijun, `MaxPoints` $\rightarrow$ `1000000`. Ovdje treba istaknuti da je korištenje samo milijun Monte-Carlo točaka za izračun kompletne amplitude do preciznosti od jedan posto izniman uspjeh. Prisjetimo se da je dosad standardna praksa (Soperova metoda) bilo korištenje milijun Monte-Carlo točaka po jednom Feynmanovom dijagramu!

§ 3.4 Ekstrapolacija $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{M}(\epsilon)$

Za kraj, preostalo je komentirati na koji način ćemo iz ϵ-ovisnih amplituda odrediti fizikalnu amplitudu danu kao limes $\mathcal{M} = \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{M}(\epsilon)$. Svaki je propagator pa posljedično i cijela podintegralna funkcija amplitude analitička funkcija u varijabli ϵ. Stoga možemo očekivati da je i kompletna amplituda $\mathcal{M}(\epsilon)$ analitička funkcija. Međutim, iz prethodnih je razmatranja jasno da $\mathcal{M}(\epsilon)$ ne može biti analitička za $\epsilon = 0$ jer bi smo je, u protivnom, mogli izravno izračunati s $\epsilon = 0$. Prema tome, ako bismo htjeli aproksimirati ponašanje $\mathcal{M}(\epsilon)$ u blizini ishodišta moramo odustati od standardne aproksimacije Taylorovim razvojem. Prva generalizirana metoda aproksimacije koja ne zahtijeva analitičnost promatrane funkcije jest Padéova aproksimacija [28]. Preciznije, Padéov aproksimant

$$R_{m,n}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{1 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}, \tag{3.11}$$

jest najbolja aproksimacija racionalnom funkcijom koja originalnu funkciju aproksimira bolje od Taylorovog polinoma stupnja $m + n$, a vrijedi i izvan radijusa konvergencije Taylorovog reda. Obzirom na svojstva koja očekujemo od funkcije $\mathcal{M}(\epsilon)$, ima je smisla pokušati aproksimirati Padéovim aproksimantom.

Ekstrapolaciju stoga načelno provodimo na sljedeći način: amplitudu $\mathcal{M}(\epsilon)$ računamo za niz različitih vrijednosti $\epsilon_i > 0$ te dobivene vrijednosti prilagođavamo metodom najmanjih kvadrata na ranije spomenut Padéov aproksimant $R_{m,n}(\epsilon)$. Za limes $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{M}(\epsilon)$ uzimamo vrijednost koeficijenta a_0. Međutim, zbog toga što je amplituda kompleksan broj fizikalno nebitne faze analiza je jednostavnija, a fizikalno ekvivalentna, ukoliko na Padéov aproksimant prilagođavamo uređene parove brojeva $(\epsilon_i, |\mathcal{M}(\epsilon_i)|^2)$ te za fizikalni iznos amplitude uzmemo

$$|\mathcal{M}| \equiv \lim_{\epsilon\to 0} |\mathcal{M}(\epsilon)| = \sqrt{a_0}. \tag{3.12}$$

Najbolje i najstabilnije rezultate ekstrapolacije je dala prilagodba na Padéov aproksimant $R_{2,1}(\epsilon)$ oblika

$$R_{2,1}(\epsilon) = \frac{a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2}{1 + b_1\epsilon}, \tag{3.13}$$

gdje smo prilikom prilagodbe zahtjevali $b_1 > 0$ (da funkcija $\mathcal{M}(\epsilon)$ ne divergira za $\epsilon > 0$), $a_0 > 0$ (da bi ekstrapolirana amplituda bila realna), $a_1 < 0$ (jer očekujemo da $|\mathcal{M}(\epsilon)|$ monotono pada s povećanjem ϵ), te nismo nametali

dodatni uvjet na koeficijent a_2. Sve smo prilagodbe radili u `Mathematici` naredbom `NonlinearModelFit`.

Što se tiče odabira optimalnih numeričkih vrijednosti za različite ϵ_i, važno je uočiti da prema definiciji (2.2) Feynmanov ϵ ima dimenziju (masa)^2 pa je smislenije određivati optimalne vrijednosti za bezdimenzionalni omjer ϵ/s. Isprobavanjem različitih vrijednosti ustanovljeno je da je optimalni raspon ϵ/s za koje je numerička integracija još uvijek stabilna (za jako malu vrijednost ϵ/s integracija je očekivano nestabilna) i dobivene točke istovremeno mogu poslužiti za ekstrapolaciju (amplituda brzo pada s porastom ϵ/s čineći ekstrapolaciju teže izvedivom)

$$\epsilon/s \in [10^{-4}, 10^{-2}]. \tag{3.14}$$

Zbog toga što se gornji raspon proteže kroz više redova veličine niz od $N+1$ vrijednosti ϵ_i konstruiramo ekvidistantno na logaritamskoj skali prema

$$\epsilon_i = 10^{-4+2i/N} s, \tag{3.15}$$

za $i = 0, 1, \ldots, N$.

Poglavlje 4

Rezultati i diskusija

§ 4.1 Skalarne amplitude

4.1.1 Općenite skalarne amplitude

Prethodno izloženu metodu numeričkog izračuna amplitude raspršenja iskoristit ćemo da bismo izračunali procese raspršenja u skalarnoj teoriji. Promatrat ćemo teoriju opisanu lagranžijanom

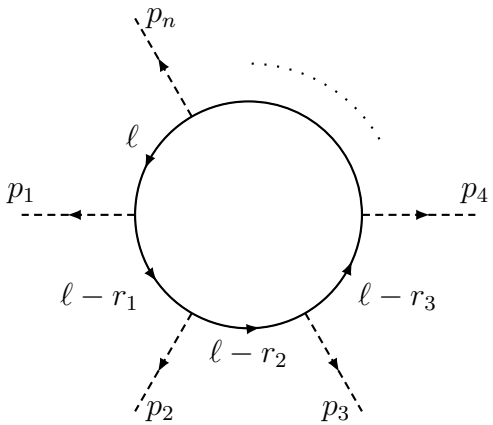
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}g\phi\varphi^2. \tag{4.1}$$

Ovo je interagirajuća teorija dva skalarna polja—bezmasenog polja ϕ te polja φ mase m, koji interagiraju kubičnom interakcijom konstante vezanja g. Razlog odabira upravo ovakvog lagranžijana je sljedeći: procesi raspršenja oblika $2\phi \to (n-2)\phi$ predstavljaju jednostavniju, skalarnu verziju procesa fotonskog raspršenja $2\gamma \to (n-2)\gamma$ unutar kvantne elektrodinamike, kojeg u konačnici želimo promatrati. Polje ϕ, skalarni analogon fotona, igrat će ulogu vanjske linije, dok će polje φ, skalarni analogon fermiona, predstavljati maseni medijator interakcije u petlji. Da bismo testirali primjenjivost naše metode u različitim kinematičkim režimima, računat ćemo amplitudu raspršenja varirajući vrijednost omjera $m/\sqrt{s}$, gdje je $\sqrt{s}$ ukupna energija u sustavu centra mase.

Ukoliko polje ϕ označimo crtkanom linijom, a polje φ punom, tada proces raspršenja $2\phi \to (n-2)\phi$ možemo prikazati generičkim Feynmanovim dijagramom kao na slici 4.1. Procesu doprinosi ukupno $(n-1)!$ različitih dijagrama dobivenih relativnim permutacijama vanjskih linija. Ukupna je

amplituda vjerojatnosti za ovaj proces dana izrazom

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_\mathrm{s} = \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \sum_{\mathrm{perm}} (-\mathrm{i}g)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{i}}{(\ell - r_k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \tag{4.2}$$



Slika 4.1: Jedan od $(n-1)!/2$ Feynmanovih dijagrama koji doprinose procesu raspršenja $2\phi \to (n-2)\phi$ na razini jedne petlje. Ulaznim impulsima p_1 i p_2 su obrnuti smjerovi u odnosu na fizikalne.

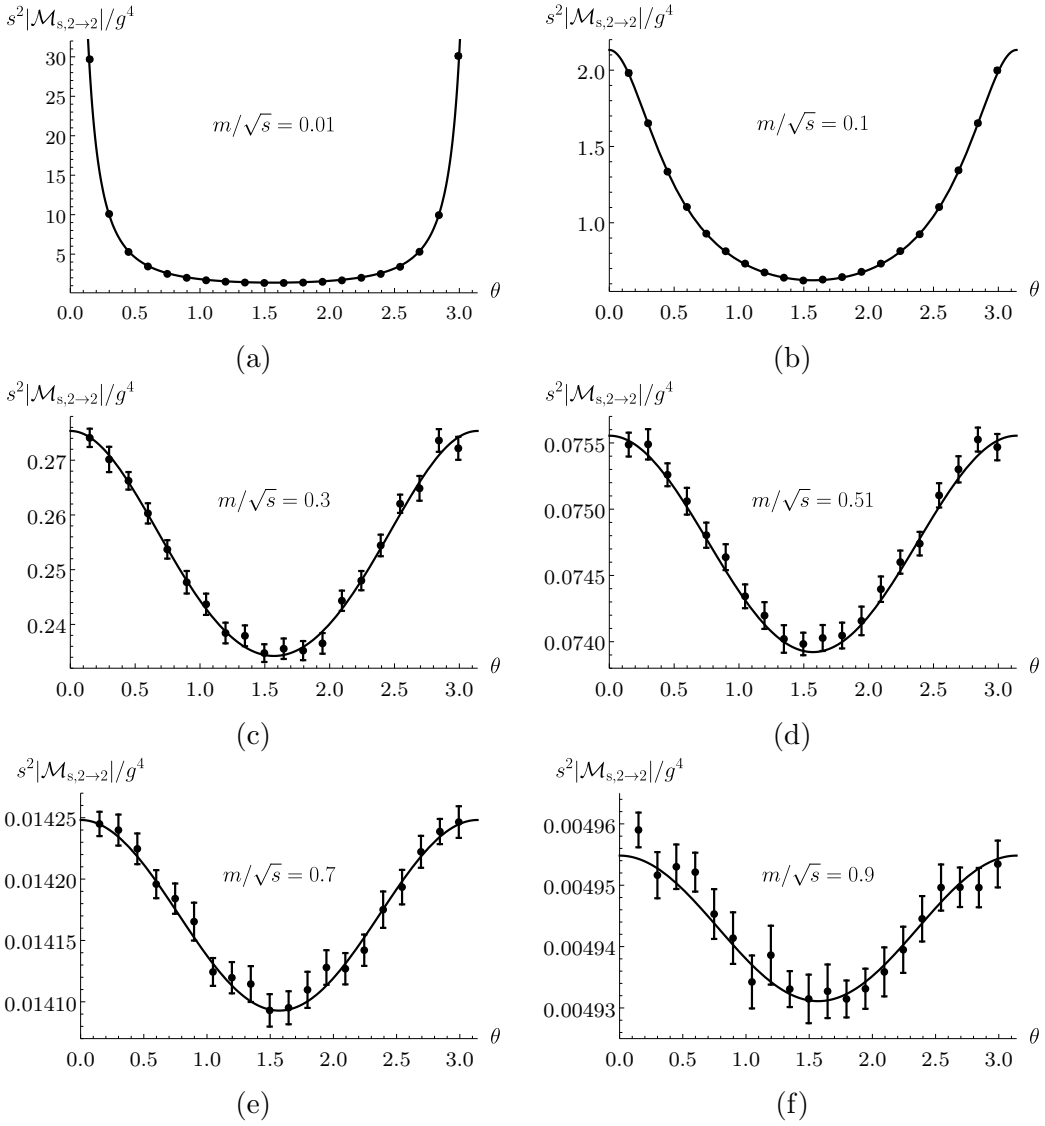
U nastavku ćemo promatrati ova raspršenja u slučaju $n = 4, 5, 6$. Bez smanjenja općenitosti, kinematiku ćemo zadati u sustavu centra mase i to tako da zadamo impulse izlaznih čestica te pomoću zakona očuvanja rekonstruiramo impulse ulaznih čestica za koje uzimamo da se gibaju duž osi z.

4.1.2 $2\phi \to 2\phi$ amplituda

Raspršenju $2\phi \to 2\phi$ na razini jedne petlje doprinosi tri različitih Feynmanovih dijagrama, a kinematika procesa je posebno jednostavna. Uzimamo da se ulazne čestice gibaju duž osi z te da dolazi do elastičnog raspršenja u zx ravnini. Kut raspršenja θ se mjeri od osi z. Slika 4.2 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}_\mathrm{s}|$ o kutu raspršenja θ za različite mase propagirajućeg skalara i to za $m/\sqrt{s} = 0.01,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.51,\ 0.7,\ 0.9$. Kao što se vidi na slici, numerički dobivene vrijednosti amplitude, prikazane točkama s pripadnom neodređenošću*, savršeno padaju na punu liniju koja predstavlja analitički rezultat dobiven standardnim pristupom. Naizgledno povećanje

*Neodređenost svih numerički dobivenih vrijednosti jest neodređenost ekstrapolacije dobivena `NonlinearModelFit`-om.

greške numeričke integracije za veće mase odgovara činjenici da, s povećanjem mase, amplituda raspršenja slabije ovisi o kutu raspršenja te varira u manjem rasponu, a to se, za fiksne relativne pogreške, manifestira kao efektivno povećanje greške. Isti komentar vrijedi za sve rezultate.



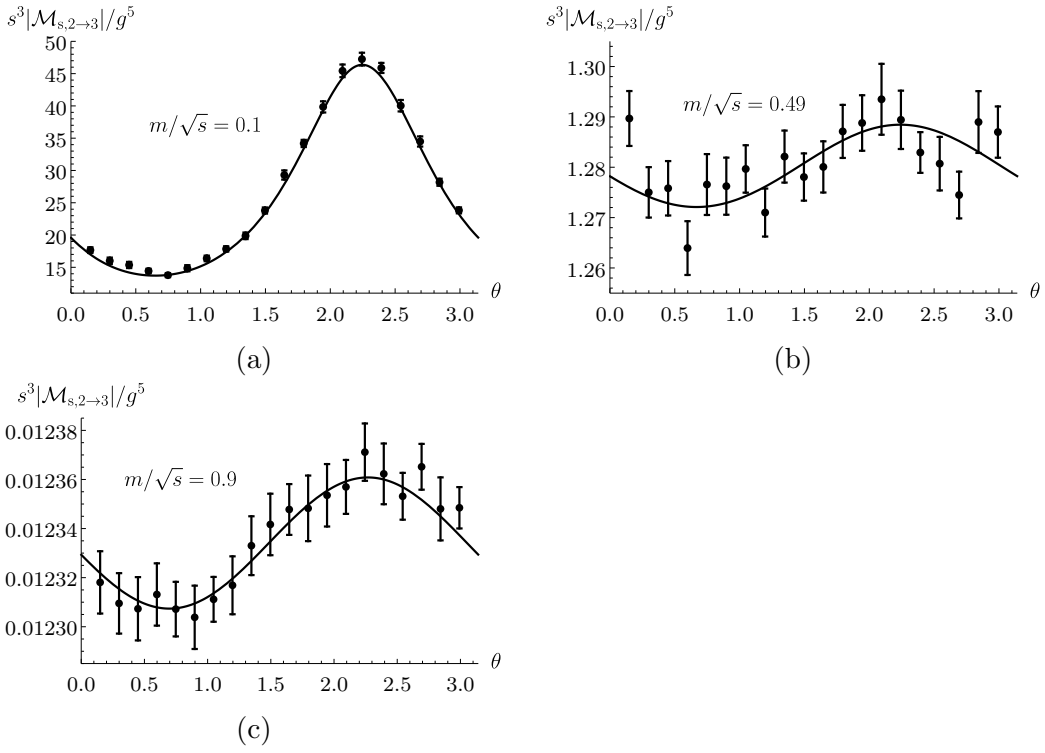
Slika 4.2: Ovisnost iznosa amplitude o kutu raspršenja θ za proces $2\phi \to 2\phi$ za slučaj različitih masa m propagirajućeg polja φ. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

4.1.3 $2\phi \to 3\phi$ amplituda

Raspršenju $2\phi \to 3\phi$ na razini jedne petlje doprinosi 12 Feynmanova dijagrama. Izlazne impulse zadajemo prema [25],

$$\begin{aligned} \vec{p}_3 &= (33.5, 15.9, 25.), \\ \vec{p}_4 &= (-12.5, 15.3, 0.3), \\ \vec{p}_5 &= (-21., -31.2, -25.3). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Za ulazne impulse uzimamo da su usmjereni uzduž osi z. Kutnu ovisnost amplitude promatramo tako da izlazne impulse zarotiramo za kut θ oko osi y. Slika 4.3 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}_{\mathrm{s}}|$ o θ za različite mase propagirajućeg skalara i to za $m/\sqrt{s} = 0.1,\ 0.49,\ 0.9$. Slaganje s analitičkim rezultatom je vrlo zadovoljavajuće kroz cijeli raspon masa.



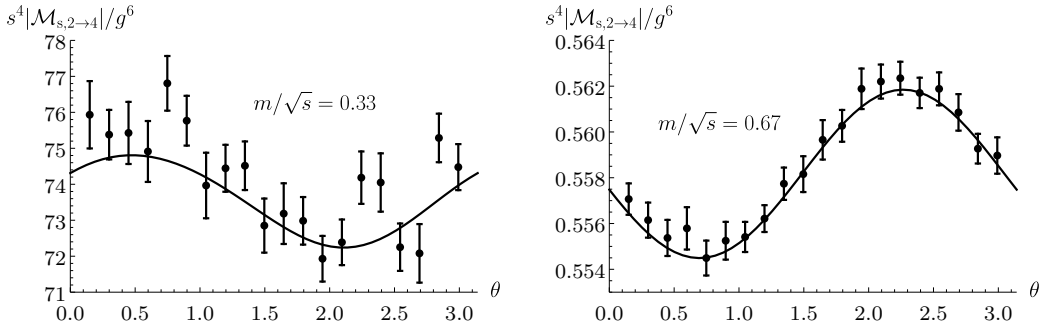
Slika 4.3: Ovisnost iznosa amplitude o kutu raspršenja θ za proces $2\phi \to 3\phi$ za slučaj različitih masa m propagirajućeg polja φ. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

4.1.4 $2\phi \to 4\phi$ amplituda

Raspršenju $2\phi \to 4\phi$ na razini jedne petlje doprinosi 60 Feynmanovih dijagrama, a izlazne impulse zadajemo prema [20]

$$\begin{aligned} \vec{p}_3 &= (33.5, 15.9, 25.), \\ \vec{p}_4 &= (-12.5, 15.3, 0.3), \\ \vec{p}_5 &= (-10., -18., -3.3), \\ \vec{p}_6 &= (-11., -13.2, -22.), \end{aligned} \tag{4.4}$$

dok ulazne impulse i kut raspršenja definiramo kao u $2\phi \to 3\phi$ raspršenju. Slika 4.4 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}_{\mathrm{s}}|$ o θ za različite mase propagirajućeg skalara i to za $m/\sqrt{s} = 0.33,\ 0.67$. Slaganje s analitičkim rezultatom je bolje u slučaju veće mase propagirajuće čestice, što je svojstvo koje bismo generički očekivali budući da velika masa dominira nad kinematikom i stabilizira numeričku integraciju.



(a) (b)

Slika 4.4: Ovisnost iznosa amplitude o kutu raspršenja θ za proces $2\phi \to 4\phi$ za slučaj različitih masa m propagirajućeg polja φ. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

§ 4.2 Fotonske amplitude

4.2.1 Općenite fotonske amplitude

Nakon uspješne primjene metode na skalarnoj teoriji, sada ćemo je primjeniti na izračun fotonskih amplituda koje se javljaju u kvantnoj elektrodinamici. Polazimo od standardnog QED lagranžijana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{D} + m)\psi, \tag{4.5}$$

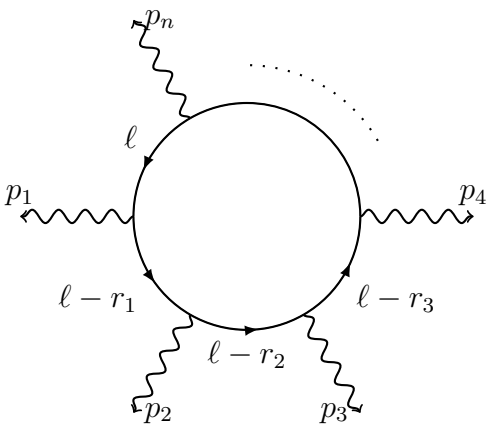
gdje je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ tenzor elektromagnetskog polja, A_μ vektorski potencijal, a ψ fermionsko polje mase m i naboja e. Također smo koristili kovarijantnu derivaciju $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$ te Feynmanovu ,,slash" notaciju $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, gdje su $\{\gamma^\mu\}$ Diracove gamma matrice. Unutar ove teorije želimo izračunati amplitudu fotonskog raspršenja $2\gamma \to (n-2)\gamma$ na razini jedne petlje. Iz oblika lagranžijana (4.5) jasno je da će fotoni predstavljati vanjske linije, dok će se fermioni propagirati u petlji. Varijacijom mase m možemo promatrati kako fotonske amplitude ovise o masi medijatora i testirati primjenjivost naše metode pod tim uvjetima.

Fotonska polja A_μ označit ćemo standardno valovitom linijom, dok ćemo fermionska polja ψ označiti punom linijom. Generički jednopetljeni Feynmanov dijagram za raspršenje $2\gamma \to (n-2)\gamma$ je dan na slici 4.5. Procesu doprinosi ukupno $(n-1)!$ različitih dijagrama dobivenih permutacijama vanjskih linija. Ukupna je amplituda vjerojatnosti za ovaj proces dana izrazom

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M}_{2\gamma\to(n-2)\gamma} = \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \sum_{\text{perm}} (\mathrm{i}e)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{i}}{(\ell - r_k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\ \times (-1)\mathrm{Tr}\{(\not{\ell} + m)\not{\varepsilon}_n^*(\not{\ell} - \not{r}_{n-1} + m)\not{\varepsilon}_{n-1}^* \dots \\ \times (\not{\ell} - \not{r}_2 + m)\not{\varepsilon}_2(\not{\ell} - \not{r}_1 + m)\not{\varepsilon}_1\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Bitno je uočiti da su, za razliku od skalarnih amplituda, fotonske amplitude osim vanjskom kinematikom i masom medijatora karakterizirane i polarizacijama fotona. U izraz za amplitudu (4.6) polarizacije izlaznih fotona, ε_n, $n > 2$, ulaze kompleksno konjugirane što nije slučaj za polarizacije ulaznih fotona, ε_1 i ε_2. Budući da ćemo, zbog jednostavnosti, sve fotone tretirati kao izlazne čestice, moramo naći načina kako tretirati polarizacije ulaznih i izlaznih fotona jednako.

Polarizacija fotona $\varepsilon(\vec{p}, h)$ ovisi o njegovom impulsu $\vec{p}$ i helicitetu $h = \pm 1$



Slika 4.5: Jedan od $(n-1)!$ Feynmanovih dijagrama koji doprinose procesu raspršenja $2\gamma \to (n-2)\gamma$ na razini jedne petlje. Ulaznim impulsima p_1 i p_2 su obrnuti smjerovi u odnosu na fizikalne.

te možemo koristiti konvenciju[†]

$$\varepsilon^{\mu}(p\hat{z}, \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm \mathrm{i}, 0). \tag{4.7}$$

Uz ovaj odabir lako je vidjeti da vrijede identiteti

$$\varepsilon^{*}(\vec{p}, h) = \varepsilon(-\vec{p}, h) = \varepsilon(\vec{p}, -h). \tag{4.8}$$

Dakle, ako želimo sve fotone tretirati kao izlazne, moramo okrenuti helicitete ulaznim fotonima, na osnovu jednakosti

$$\varepsilon(\vec{p}_{1,2}, h_{1,2}) = \varepsilon(-\vec{p}_{1,2}, -h_{1,2}). \tag{4.9}$$

Ovime ulazne fotone efektivno tretiramo kao izlazne fotone suprotnog helicitetа. Ovo je standardan način označavanja helicitetnih fotonskih amplituda.[‡] Također, možemo iskoristiti identitet (4.8) kako bismo eliminirali potrebu za kompleksnom konjugacijom polarizacije izlaznih fotona

$$\varepsilon^{*}(\vec{p}_n, h_n) = \varepsilon(\vec{p}_n, -h_n), \tag{4.10}$$

[†]Za određivanje polarizacijskog vektora za proizvoljno usmjereni impuls fotona, vidjeti Dodatak A.

[‡]Kako se amplitude standardno labeliraju tretirajući sve fotone kao izlazne, valja imati na umu da su dva konvencionalna heliciteta suprotna od realnih heliciteta. Tako će, na primjer, amplituda $\mathcal{M}_{2\to 2}^{++++}$ označavati raspršenje fotona stvarnih heliciteta $\gamma(-)\gamma(-) \to \gamma(+)\gamma(+)$.

za $n > 2$. Uz ove konvencije izraz za amplitudu (4.6) poprima simetričniji oblik

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M}_{2\gamma\to(n-2)\gamma}(h_1,h_2,\ldots,h_n) &= \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\sum_{\text{perm}}(\mathrm{i}e)^n\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{i}}{(\ell-r_k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\ &\times(-1)\mathrm{Tr}\{(\not{\ell}+m)\not{\varepsilon}_n(-h_n)(\not{\ell}-\not{r}_{n-1}+m)\not{\varepsilon}_{n-1}(-h_{n-1})\ldots\\ &\times(\not{\ell}-\not{r}_2+m)\not{\varepsilon}_2(-h_2)(\not{\ell}-\not{r}_1+m)\not{\varepsilon}_1(-h_1)\}. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Ovdje su h_i konvencionalni heliciteti, dok u polarizacije uvrštavamo prave, fizikalne impulse.

U nastavku primjenjujemo našu numeričku metodu da bismo izračunali helicitetne fotonske amplitude za $n = 4$, 5 i 6. Koristit ćemo istu vanjsku kinematiku kao kod skalarnih amplituda.

4.2.2 $2\gamma \to 2\gamma$ amplitude

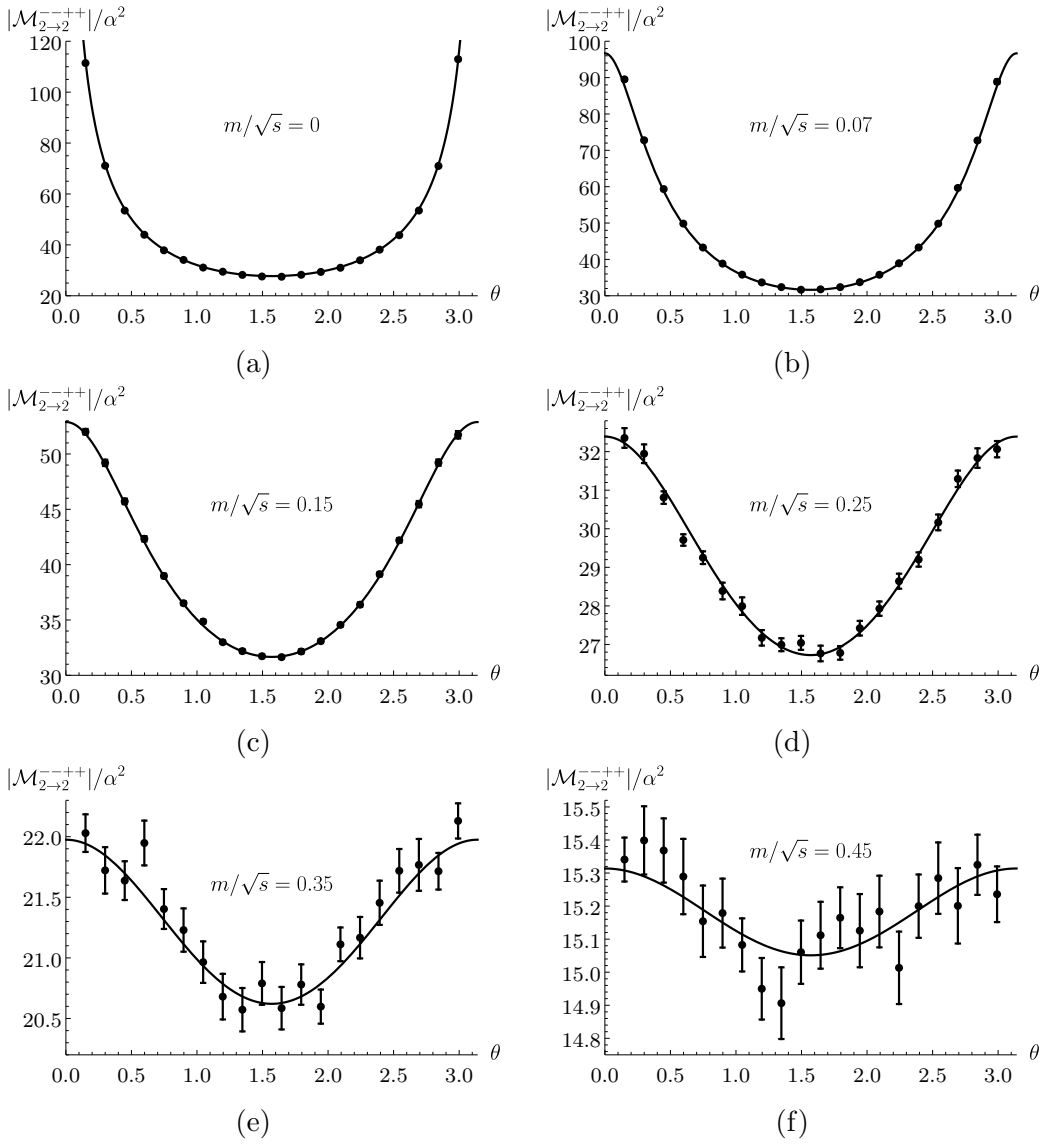
Za proces $2\gamma \to 2\gamma$ načelno postoji $2^4 = 16$ različitih helicitetnih amplituda. Međutim, one nisu sve nezavisne. Koristeći C, P, T simetrije QED-a, kao i križnu simetriju koju zadovoljava svaki proces, može se pokazati [6] da postoje samo tri nezavisne helicitetne amplitude, za koje možemo odabrati helicitetne kombinacije $(--++)$, $(-+-+)$ te $(+++-)$. Na sve ove kombinacije heliciteta ćemo primjeniti našu metodu.

Kao i kod skalarnih amplituda, uzimamo da ulazni fotoni dolaze uzduž osi z te se raspršuju pod kutom θ u xz ravnini. Na grafovima koji slijede prikazujemo ovisnost modula amplitude o kutu raspršenja θ. Modul amplitude dijelimo s α^2 ($\alpha = 4\pi e^2$ je konstanta fine strukture) da bismo dobili bezdimenzionalnu veličinu.

Bitno je napomenuti da svakoj helicitetnoj amplitudi doprinosi šest jednopetljenih Feynmanovih dijagrama koji su UV divergentni, a u slučaju $m = 0$ i IR divergentni. Unatoč tome, cijela je amplituda konačna i može se numerički izračunati bez ikakvih analitičkih intervencija, čak i u slučaju $m = 0$.

Helicitetna amplituda $--++$

Slika 4.6 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}^{--++}_{2\to2}|$ o kutu raspršenja θ za različite mase propagirajućeg fermiona i to za $m/\sqrt{s} = 0$, 0.07, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45. Kao što se vidi na slici, numerički dobivene vrijednosti amplitude, prikazane točkama s pripadnom neodređenošću, u skladu su s punom linijom koja predstavlja analitički rezultat dobiven standardnim pristupom.

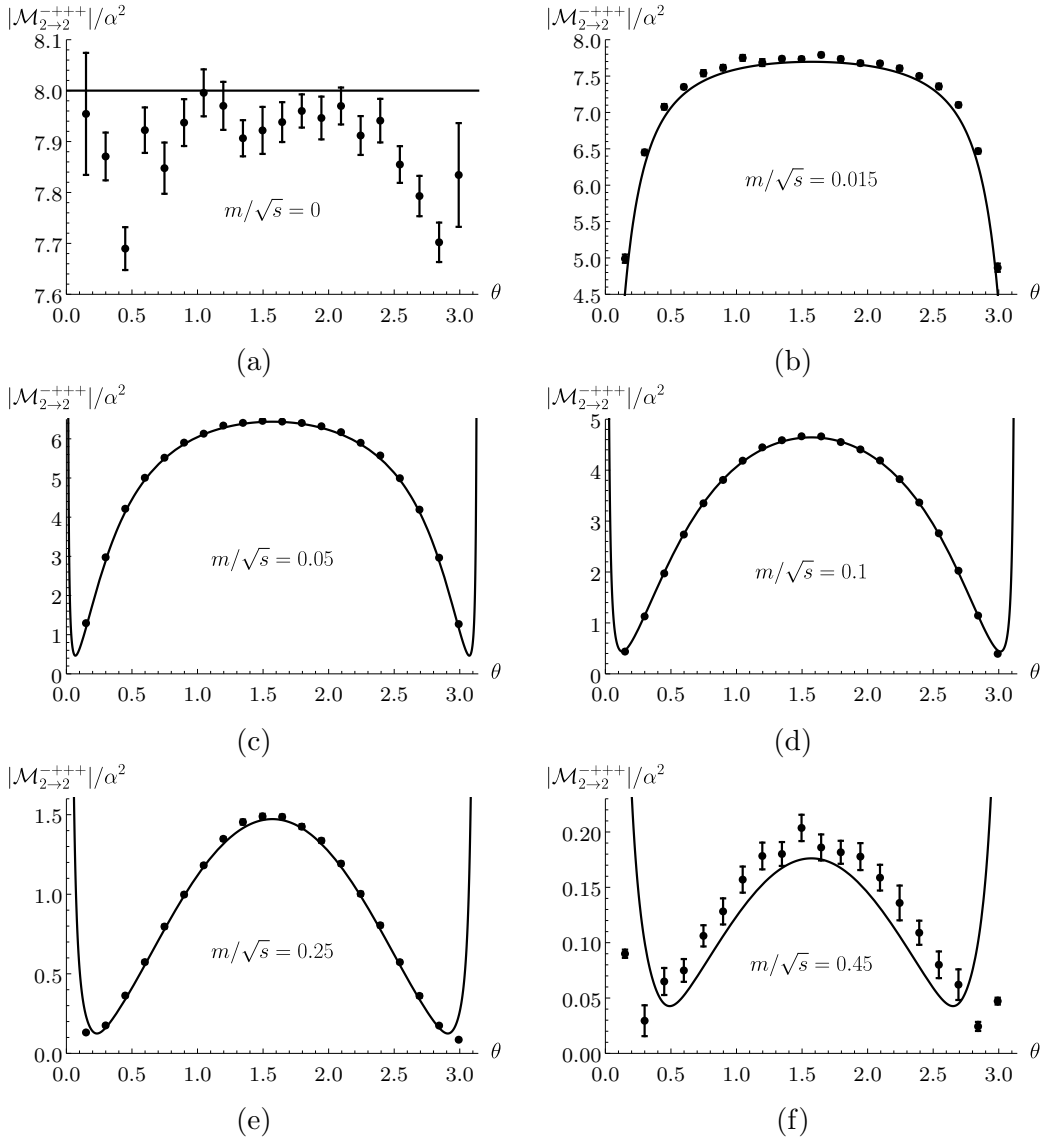


Slika 4.6: Ovisnost iznosa helicitetne amplitude $--++$ o kutu raspršenja θ za različite mase m fermiona u petlji. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

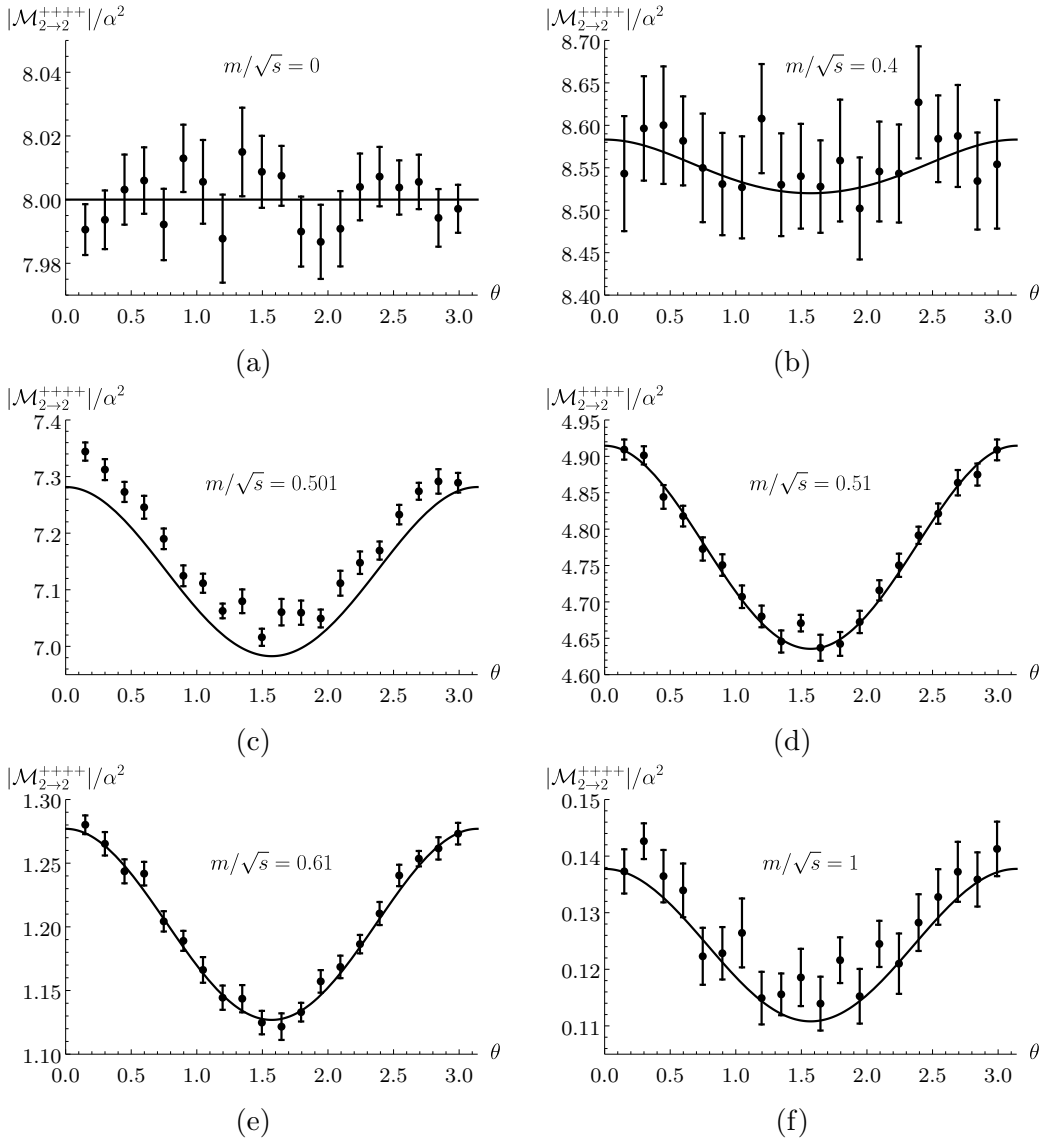
Helicitetna amplituda $-+++$

Slika 4.7 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}^{-+++}_{2\to2}|$ o kutu raspršenja θ za različite mase propagirajućeg fermiona i to za $m/\sqrt{s} = 0$, 0.015, 0.05, 0.1, 0.25, 0.45. I u ovom slučaju numeričke točke vrlo zadovoljavajuće prate analitički rezultat. Iz analitičkih se krivulja lako vidi da je ova kombinacija

heliciteta vrlo osjetljiva na promjenu mase fermiona pa ne čudi niti nešto slabije slaganje numeričkog računa s analitičkim za $m = 0$. Naime, konačni iϵ u izrazu za Feynmanov dijagram efektivno igra ulogu kvadrata mase propagatora pa su ovakvi efekti očekivani kod amplituda koje se drastično mijenjaju malom promjenom mase.



Slika 4.7: Ovisnost iznosa helicitetne amplitude $-+++$ o kutu raspršenja θ za različite mase m fermiona u petlji. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.



Slika 4.8: Ovisnost iznosa helicitetne amplitude $++++$ o kutu raspršenja θ za različite mase m fermiona u petlji. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

Slika 4.8 prikazuje ovisnost iznosa amplitude $|\mathcal{M}^{++++}_{2\to2}|$ o kutu raspršenja θ za različite mase propagirajućeg fermiona i to za $m/\sqrt{s} = 0$, 0.4, 0.501, 0.51, 0.61, 1. U cijelom rasponu masa numerički dobivene točke vjerno prate analitičku krivulju, s tim da je vidljivo određeno odstupanje za $m \approx \sqrt{s}/2$.

Razlog tome jest što je za $\sqrt{s} \geq 2m$ kinematički dozvoljena i realna produkcija elektron-pozitron para $2\gamma \to e^+e^-$, dok za $\sqrt{s} < 2m$ to nije slučaj. Dakle, radi se o tzv. *treshold* singularitetu pa očekujemo da je amplituda raspršenja posebno osjetljiva u području $m \approx \sqrt{s}/2$. Više o tome u Diskusiji.

4.2.3 $2\gamma \to 3\gamma$ amplitude

Sve fotonske amplitude koje opisuju proces $2\gamma \to (n-2)\gamma$ moraju iščezavati za neparni n, neovisno o kombinaciji heliciteta. Ovo je poznati Furryjev teorem [19]. Provjeriti valjanost Furryjevog teorema znači izračunati amplitudu bilo kojeg $2\gamma \to 3\gamma$ procesa i pokazati da iščezava. Koristeći našu metodu dovoljno je izračunati $\mathcal{M}_{\text{UV}}$ i $\mathcal{M}_{\text{IR}}$ i pokazati da se ta dva doprinosa sumiraju u nulu. Ovo je numerički puno stabilnije nego izravno numerički pokazati da cijela amplituda iščezava. Tako se posredno separacija amplitude na UV i IR doprinos opet pokazala korisnom i za verifikaciju Furryjevog teorema. Pošto smo očekivali nul-rezultat, izračunali smo samo nekoliko amplituda za proizvoljno odabrane kutove raspršenja i helicitete i dobili da se, unutar numeričke preciznosti, UV i IR dio amplitude doista poništavaju u slučaju $2\gamma \to 3\gamma$ raspršenja.

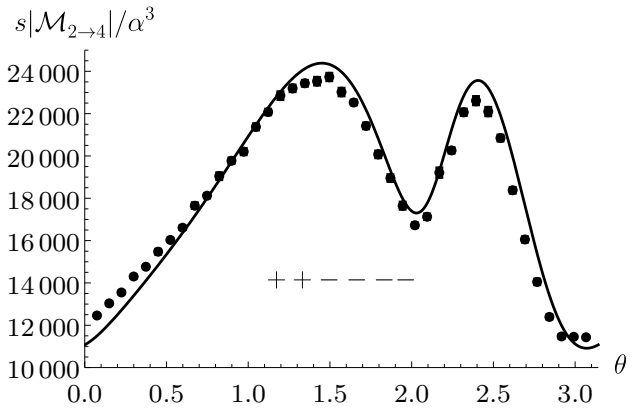
4.2.4 $2\gamma \to 4\gamma$ amplitude

Pravi je izazov za našu metodu bio izračun amplituda raspršenja za proces $2\gamma \to 4\gamma$. Analitički izrazi za amplitudu ovog procesa su nađeni samo za slučaj bezmasenih fermiona, $m = 0$, na što ćemo se i mi koncentrirati. U bezmasenom slučaju, postoje samo dvije različite helicitetne amplitude [8], za koje možemo uzeti da su $(++----)$ i $(+--++-)$. Ovom procesu na razini jedne petlje doprinosi 120 dijagrama, od kojih su svi IR divergentni, zbog $m = 0$, dok je kompletna amplituda konačna. Treba napomenuti da se integrand IR-doprinosa amplitudi, nakon analitičke integracije po ℓ_0, sastoji od 720 doprinosa koji u brojniku imaju trag preko γ matrica, a u nazivniku produkt propagatora. Obzirom na kompleksnost integranda, velik je uspjeh što naivna 3D Monte Carlo integracija daje stabilan rezultat.

Na sljedećim smo primjerima za izlazne impulse opet uzeli impulse (4.4), iz zakona očuvanja odredili početne impulse te promatrali iznos amplitude raspršenja u ovisnosti o kutu θ (kut za koji impulse (4.4) rotiramo oko y osi).

Helicitetna amplituda $++---$

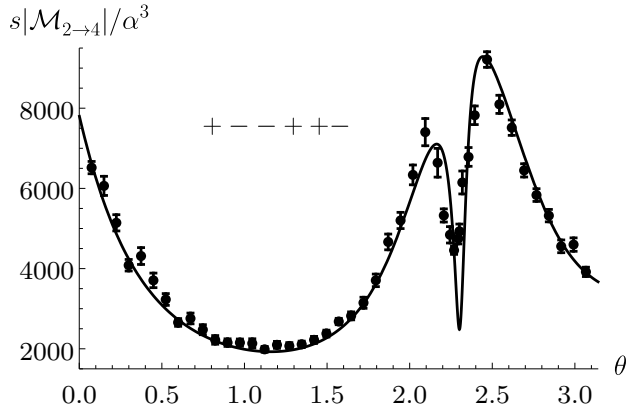
Slika 4.9 prikazuje ovisnost iznosa bezmasene amplitude $|\mathcal{M}^{++----}_{2\to4}|$ o kutu raspršenja θ. Točke su rezultat numeričkog izračuna, a krivulja je analitički



Slika 4.9: Ovisnost iznosa bezmasene helicitetne amplitude $++--\!-$ o kutu raspršenja θ. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

rezultat preuzet iz [8, 22, 23]. Uzevši u obzir da Monte Carlo integraciju izvodimo s 10^6 točaka te zahtjevamo preciznost od samo 1%, a podintegralna funkcija ima 720 doprinosa netrivijalne strukture, možemo reći da je slaganje s analitičkim rezultatom iznenađujuće dobro.

Helicitetna amplituda $+--++-$



Slika 4.10: Ovisnost iznosa bezmasene helicitetne amplitude $+--++-$ o kutu raspršenja θ. Amplituda je pomnožena s dodatnim faktorom kako bi bila bezdimenzionalna.

Slika 4.10 prikazuje ovisnost iznosa bezmasene amplitude $|\mathcal{M}_{2\to4}^{+--++-}|$ o kutu raspršenja θ. Točke su rezultat numeričkog izračuna, a krivulja je

analitički rezultat preuzet iz [8]. Slaganje numerike i analitike je također zadovoljavajuće, osim u ekstremu oko $\theta \approx 2.3$ koji se javlja zbog blizine dvostrukog partonskog singulariteta [20]. Očito je da su preoštre varijacije u amplitudi velik izazov za numeričku stabilnost implementirane metode.

§ 4.3 Diskusija

U prošlim smo odjeljcima primjenili numeričku metodu za izračun skalarnih i fotonskih amplituda i dobili izvanredno slaganje s analitičkim rezultatima. Preostaje nam komentirati neke detalje dobivenih rezultata.

Udio UV- i IR-doprinosa amplitudi

Od svih procesa koji smo promatrali, jedino su pojedinačni dijagrami za raspršenje $2\gamma \to 2\gamma$ UV divergentni. To je vjerojatni uzrok činjenice da je jedino u tom procesu UV-doprinos amplitudi sumjerljiv IR-doprinosu.[§] Svaki od njih doprinosi oko 50% amplitudi. U svim je drugim slučajevima UV-doprinos (barem) red veličine manji od IR-doprinosa. Ovo nam govori da se, generički, sva zanimljiva fizika raspršenja odvija u IR-doprinosu.

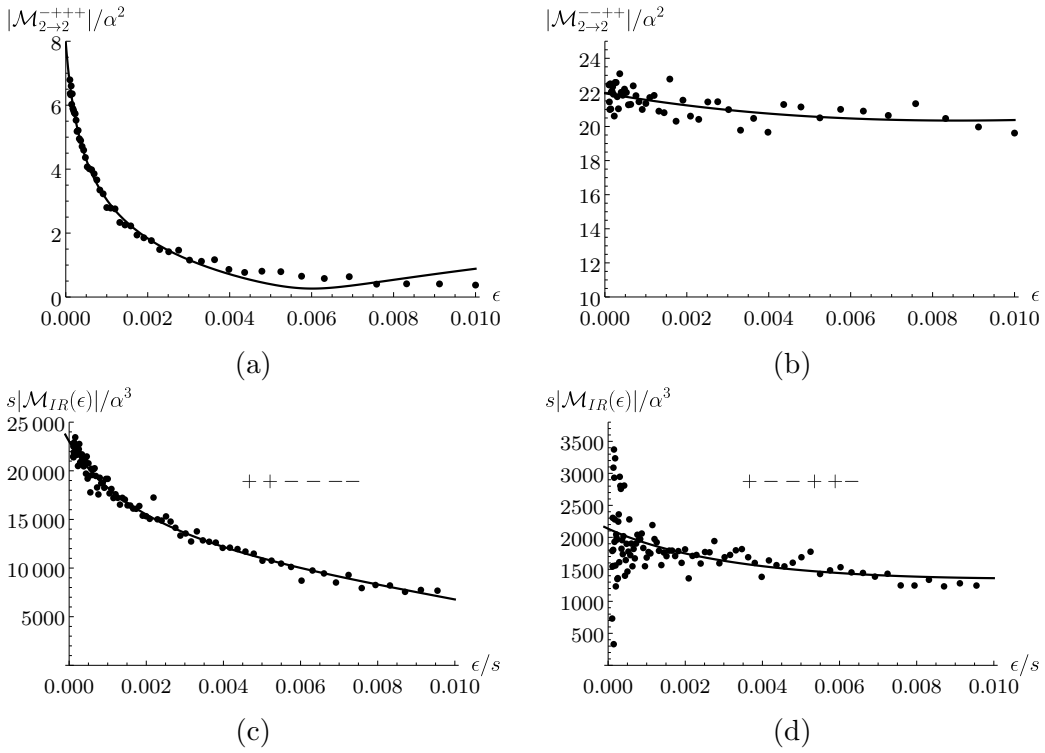
Vrijeme izračuna

Vrijeme trajanja numeričke integracije $\mathcal{M}(\epsilon)$ uvelike ovisi o promatranom procesu. Složenost integranda se znantno povećava s brojem dijagrama i vanjskih linija. Također, fotonske amplitude imaju neusporedivo kompliciraniju strukturu brojnika u odnosu na skalarne amplitude. Time je vrijeme samog izvrijednjavanja podintegralne funkcije jako ovisno o procesu, ne ulazeći u brzinu konvergencije integrala. Tipična vremena izračuna se kreću od nekoliko (≤ 10) sekundi za $2\gamma \to 2\gamma$ amplitudu, pa do nekoliko (≤ 5) sati za $2\gamma \to 4\gamma$ amplitudu. Budući je za ekstrapolaciju amplitude za $\epsilon \to 0$ potrebno izračunati isti integral za nekoliko desetaka različitih ϵ, optimalno je rješenje paralelizirati integraciju IR-doprinosa amplitudi.

Preciznost numeričke integracije i uspješnost ekstrapolacije

Zbog činjenice da računamo kompletnu amplitudu odjednom, zahtjevali smo skromnih 1% relativne preciznosti na dobiveni rezultat numeričke integracije.

[§]Naravno, kod fotonskih amplituda $2\gamma \to (n-2)\gamma$ za neparni n, koje iščezavaju prema Furryjevom teoremu, UV- i IR-doprinos se moraju poništiti, pa su uvijek sumjerljivi.



Slika 4.11: Prikaz tipičnih ovisnosti amplitude o Feynmanovom ϵ. Točke su rezultat numeričke integracije, a puna linija predstavlja prilagodbu na optimalni Padé aproksimant.

UV-doprinos, računat kvadraturama, je za dane postavke integracije uvijek iskonvergirao do tražene preciznosti. Isto se ne može reći za IR-doprinos. Za kompliciranije procese, poput $2\gamma \to 4\gamma$, adaptivni Monte Carlo nije uspio dobiti rezultat unutar 1% preciznosti. Štoviše, Monte Carlo nije bio u stanju dobiti konzistentne rezultate za različite no vrlo bliske ϵ. To je generiralo vrlo veliku grešku prilikom ekstrapolacije. Umjesto da interveniramo u postavke Monte Carlo integracije i dobijemo zadovoljavajuću preciznost na uštrb vremena računanja, u takvim slučajevima naprosto smo računali IR-doprinose za više različitih epsilona s idejom da će se greška ekstrapolacije smanjiti s povećanjem broja točaka. Drugim riječima, numeričku smo nepreciznost pokušali ispraviti velikom statistikom. Taj se put pokazao uspješnim. Na slici 4.11 su prikazane tipične ovisnosti modula amplitude[¶] o parametru ϵ te pripadna prilagodba na Padé aproksimant kojim je izvršena ekstrapolacija $\epsilon \to 0$. Sa slike se lako vidi drastično različito ponašanje u ovisnosti

[¶]Ili samo IR-doprinosa amplitudi, tamo gdje je UV-doprinos zanemariv.

o prirodi procesa, koja se u našem slučaju manifestira preko različih heliciteta. Najlošija numerička stabilnost integracije IR-doprinosa je ostvarena u helicitetnoj amplitudi $(+--++-)$ gdje se numerički dobivene vrijednosti rasipaju skoro kroz cijeli red veličine. Srećom, za dovoljno velik broj numeričkih točaka, optimalna prilagodba na Padé aproksimant ipak vodi ka dobro ekstrapoliranoj vrijednosti amplitude, kao što se, na kraju krajeva, lijepo vidi i na slici 4.10.

Kritična vrijednost mase $m = \sqrt{s}/2$

Za kraj, preostaje nam komentirati jednu specifičnost koja se javlja u fotonskim $2\gamma \to 2\gamma$ amplitudama. Naime, za vrijednosti mase fermiona u blizini $m \approx \sqrt{s}/2$, numerički izračunate točke ne leže savršeno na analitički dobivenim krivuljama već sustavno precijenjuju točnu vrijednost amplitude ili su raspršenije nego za druge vrijednosti mase m. Razlog takvom ponašanju leži u činjenici da se za $s = 4m^2$ otvara kanal realne produkcije čestica koje se propagiraju u petlji. Odnosno, amplituda raspršenja dobiva imaginarni dio i mijenja joj se kompletna analitička struktura. Prema tome, jasno je da će numerička integracija biti nestabilnija u području masa $m \approx \sqrt{s}/2$. Slično ponašanje očekujemo svaki put kad se u procesu otvara novi kanal interakcije.

Poglavlje 5

Zaključak

U ovom smo radu prezentirali novu, potpuno numeričku metodu za izračun amplitude raspršenja na nivou jedne petlje. Metoda je izgrađena na temeljima dviju postojećih numeričkih metoda za računanje jednopetljenih Feynmanovih integrala. Najveće su prednosti ove metode: računanje kompletne amplitude odjednom umjesto dijagram po dijagram (što rezultira stabilnijom integracijom i otklanja potrebu za regularizacijom pojedinačnih dijagrama za konačne amplitude), robusnost (integracijska procedura je univerzalna i ne ovisi o promatranom procesu) te vrlo jednostavan i intuitivan algoritam integracije koji se temelji na podjeli amplitude na dva doprinosa, UV- i IR-doprinos, koji se zatim tretiraju na različite načine.

Metodu smo na rudimentaran način implementirali u programskom jeziku `Wolfram Mathematica` i testirali na primjerima N-skalarnih i N-fotonskih amplituda. Obzirom na jednostavnost metode i implementacije dobili smo neočekivano dobro slaganje numeričkih rezultata s analitičkim što potvrđuje ispravnost naše ideje i motivira nas da nastavimo rad na metodi.

Mogući pravci daljnjeg razvoja metode:

- primjena metode u trenutnoj implementaciji na računanje nekog eksperimentalno relevantnog procesa poput $H \to \gamma\gamma$;
- ozbiljnija implementacija metode te računanje benchmark procesa s većim brojem vanjskih linija poput $2\gamma \to 6\gamma$;
- generalizacija metode za izračun amplitude na nivou dvije petlje.

Dodatak A

Fotonske polarizacije

U ovom ćemo dodatku izvesti eksplicitan izraz za četverovektor polarizacije $\varepsilon(p,h)$ kružno polariziranog* fotona impulsa p_μ i heliciteta $h = \pm 1$. Budući je elektromagnetsko polje transverzalno, nužno vrijedi

$$p_\mu \varepsilon^\mu(p,h) = 0. \tag{A.1}$$

U danom referentom sustavu, u našem slučaju sustavu centra mase, uzet ćemo da je vektor polarizacije prostornog tipa i pisati

$$\varepsilon^\mu(p,h) = (0, \vec{\varepsilon}(p,h)). \tag{A.2}$$

Tada se uvjet transverzalnosti svodi na

$$\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon}(p,h) = 0. \tag{A.3}$$

U nastavku ćemo koristiti Jacksonovu konvenciju [21] prema kojoj je, za impuls fotona usmjeren duž osi z, $\vec{p} = p\hat{z}$, vektor polarizacije dan izrazom

$$\vec{\varepsilon}(p\hat{z}, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} \pm \mathrm{i}\hat{y}). \tag{A.4}$$

Ovaj odabir vektora impulsa i polarizacije ćemo nazvati standardnom konfiguracijom. Ukoliko želimo odrediti vektor polarizacije za neki drugi impuls, proizvoljnog smjera, potrebno je zarotirati vektore standardne konfiguracije. Sad ćemo promotriti jedan od načina na koji je to moguće napraviti.†

*Fotoni preostalih polarizacija, linearne i eliptičke, mogu se dobiti kao linearna kombinacija kružno polariziranih fotona.

†Nejedinstvenost vektora polarizacije u konačnici ima efekta samo na fazu amplitude, koja ionako ne nosi fizikalnu informaciju.

Za početak raspišimo proizvoljni vektor impulsa $\vec{p}$ u sfernim koordinatama

$$\vec{p} = p(\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}), \tag{A.5}$$

gdje su θ i φ standardni kutovi sfernog koordinatnog sustava. Ovaj vektor možemo dobiti iz vektora $p\hat{z}$ dvjema rotacijama: rotacijom za kut θ u zx ravnini, te rotacijom za kut φ u xy ravnini. Drugim riječima, vrijedi

$$\begin{pmatrix} p\sin\theta\cos\varphi \\ p\sin\theta\sin\varphi \\ p\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je matrica rotacije koja povezuje standardnu konfiguraciju s proizvoljno zarotiranom upravo

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Konačno, vektor polarizacije kružno polariziranog fotona impulsa $\vec{p}$ iz relacije (A.5) i heliciteta $h = \pm 1$ je dan relacijom

$$\vec{\varepsilon}(\vec{p}, \pm) = R\vec{\varepsilon}(p\hat{z}, \pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \mp \mathrm{i}\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \pm \mathrm{i}\cos\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

Uvrštavanjem u relaciju za $\varepsilon^\mu(p, h)$ nalazimo četverovektor polarizacije kojeg koristimo za izračun fotonskih amplituda.

Bibliografija

[1] S. Becker, D. Goetz, C. Reuschle, C. Schwan, and S. Weinzierl. Numerical evaluation of NLO multiparton processes. 2012. [PoSLL2012,039(2012)].

[2] Sebastian Becker, Christian Reuschle, and Stefan Weinzierl. Numerical NLO QCD calculations. *JHEP*, 12:013, 2010.

[3] Sebastian Becker, Christian Reuschle, and Stefan Weinzierl. Efficiency Improvements for the Numerical Computation of NLO Corrections. *JHEP*, 07:090, 2012.

[4] Sebastian Becker and Stefan Weinzierl. Direct contour deformation with arbitrary masses in the loop. *Phys. Rev.*, D86:074009, 2012.

[5] W. Beenakker and A. Denner. Infrared divergent scalar box integrals with applications in the electroweak standard model. *Nuclear Physics B*, 338(2):349 – 370, 1990.

[6] V B Berestetskii, L. P. Pitaevskii, and E.M. Lifshitz. *Quantum Electrodynamics, Second Edition: Volume 4 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1982.

[7] Zvi Bern, Lance J. Dixon, David C. Dunbar, and David A. Kosower. One loop n point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits. *Nucl. Phys.*, B425:217–260, 1994.

[8] T. Binoth, G. Heinrich, T. Gehrmann, and P. Mastrolia. Six-Photon Amplitudes. *Phys. Lett.*, B649:422–426, 2007.

[9] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. *Nuovo Cim.*, B12:20–26, 1972.

[10] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov. Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops. *Nucl. Phys.*, B192:159–204, 1981.

[11] Elise de Doncker, Junpei Fujimoto, Nobuyuki Hamaguchi, Tadashi Ishikawa, Yoshimasa Kurihara, Marko Ljucovic, Yoshimitsu Shimizu, and Fukuko Yuasa. Extrapolation Algorithms for Infrared Divergent Integrals. 2011.

[12] Elise De Doncker, Yoshimitsu Shimizu, Junpei Fujimoto, and Fukuko Yuasa. Computation of loop integrals using extrapolation. *Computer Physics Communications*, 159(3):145–156, 6 2004.

[13] A. Denner, U. Nierste, and R. Scharf. A compact expression for the scalar one-loop four-point function. *Nuclear Physics B*, 367(3):637 – 656, 1991.

[14] G. Duplancic and B. Nizic. Dimensionally regulated one loop box scalar integrals with massless internal lines. *Eur. Phys. J.*, C20:357–370, 2001.

[15] G. Duplancic and B. Nizic. IR finite one loop box scalar integral with massless internal lines. *Eur. Phys. J.*, C24:385–391, 2002.

[16] G. Duplancic and B. Nizic. Reduction method for dimensionally regulated one loop N point Feynman integrals. *Eur. Phys. J.*, C35:105–118, 2004.

[17] R. Keith Ellis, Zoltan Kunszt, Kirill Melnikov, and Giulia Zanderighi. One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts. *Phys. Rept.*, 518:141–250, 2012.

[18] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76(6):769–789, sep 1949.

[19] W. H. Furry. A symmetry theorem in the positron theory. *Phys. Rev.*, 51(2):125–129, jan 1937.

[20] Wei Gong, Zoltan Nagy, and Davison E. Soper. Direct numerical integration of one-loop Feynman diagrams for N-photon amplitudes. *Phys. Rev.*, D79:033005, 2009.

[21] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998.

[22] Gregory Mahlon. One loop multi - photon helicity amplitudes. *Phys. Rev.*, D49:2197–2210, 1994.

[23] Gregory Mahlon. Use of recursion relations to compute one loop helicity amplitudes. In *Beyond the standard model 4. Proceedings, 4th International Conference on High-Energy Physics, Tahoe City, USA, December 13-18, 1994*, 1994.

[24] Zoltan Nagy and Davison E. Soper. General subtraction method for numerical calculation of one loop QCD matrix elements. *JHEP*, 09:055, 2003.

[25] Zoltan Nagy and Davison E. Soper. Numerical integration of one-loop Feynman diagrams for N-photon amplitudes. *Phys. Rev.*, D74:093006, 2006.

[26] Giovanni Ossola, Costas G. Papadopoulos, and Roberto Pittau. Reducing full one-loop amplitudes to scalar integrals at the integrand level. *Nucl. Phys.*, B763:147–169, 2007.

[27] G. Passarino and M. J. G. Veltman. One Loop Corrections for e+ e- Annihilation Into mu+ mu- in the Weinberg Model. *Nucl. Phys.*, B160:151–207, 1979.

[28] William H. Press. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2007.

[29] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82(5):664–679, jun 1951.

[30] G. 't Hooft and M. Veltman. Scalar one-loop integrals. *Nuclear Physics B*, 153:365 – 401, 1979.

[31] O. V. Tarasov. Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension. *Phys. Rev.*, D54:6479–6490, 1996.

[32] G. C. Wick. Properties of bethe-salpeter wave functions. *Phys. Rev.*, 96(4):1124–1134, nov 1954.

[33] P. Wynn. On a device for computing the $e\sb m(s\sb n)$ tranformation. *Mathematics of Computation*, 10(54):91–91, may 1956.

[34] F. Yuasa, E. de Doncker, J. Fujimoro, N. Hamaguchi, T. Ishikawa, and Y. Shimizu. Precise Numerical Evaluation of the Scalar One-Loop Integrals with the Infrared Divergence. *PoS*, ACAT2007:087, 2007.

Curriculum Vitae

First name | Surname : Bruno Klajn

Address

Theoretical Physics Division
Ruđer Bošković Institute
Bijenička cesta 54
10000 Zagreb, Croatia

e-mail: bruno.klajn@irb.hr | telephone: +385 1 457 1306 |

Born February 16th 1987, Zagreb (Croatia)

Education

1993-2001	Primary school (*Osnovna škola Milke Trnine*, Križ)
2001-2005	High school (*V. gimnazija*, Zagreb)
2005-2010	Faculty of Science, University of Zagreb
September 14th 2010	**Mag. Phys**, Master thesis: *Automatic calculation of Feynman integrals* advisor: dr. sc. Goran Duplančić
2011-2016	PhD student, University of Zagreb
May 2016	**PhD** thesis completed and submited; (expected defense date: July 8th 2016) advisor: dr. sc. Goran Duplančić

Research interests

Quantum field theory, scattering amplitudes, one-loop Feynman diagrams.

Position

Research assistant at Theoretical Physics Division, Ruđer Bošković Institute since December 2010.

Teaching experience

Teaching assistant at the University of Zagreb, Department of Physics. Exercises and seminars in:

- General Physics 1 & 2 (first year courses for Physicists 2012/2013)
- General Physics 3 & 4 (second year courses for Physicists 2013/2014)
- General Physics 1 & 2 (first year courses for Physicists 2014/2015)
- General Physics 3 & 4 (second year courses for Physicists 2015/2016)

List of publications

1. D. Jukić, B. Klajn and H. Buljan, "*Momentum distribution of a freely expanding Lieb-Liniger gas*", Phys. Rev. A **79**, 033612 (2009). arXiv:0901.4437 [cond-mat.other]
2. B. Klajn and I. Smolić, "*Subtleties of Invariance, Covariance and Observer Independence*", Eur. J. Phys. **34**, 887 (2013). arXiv:1302.5338 [gr-qc]
3. B. Klajn, "*Exact high temperature expansion of the one-loop thermodynamic potential with complex chemical potential*", Phys. Rev. D **89**, 036001 (2014). arXiv:1311.2512 [hep-ph]
4. D. Bečirević, G. Duplančić, B. Klajn, B. Melić and F. Sanfilippo, "*Lattice QCD and QCD Sum Rule determination of the decay constants of η_c, J/ψ and h_c states*", Nucl. Phys. B **883**, 03024 (2014). arXiv:1312.2858 [hep-ph]

5. G. Duplančić and B. Klajn, "*Direct numerical approach to one-loop amplitudes*".
arXiv:1604.07022 [hep-ph]

Schools and conferences

- "*Black hole information paradox*", SISSA, Trieste, September 2009
- "*Supersymmetry for toddlers... and experimentalists*", Ruđer Bošković Institute, Zagreb, December 2011
- "*2nd Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity*", Veli Lošinj, June 2013
- "*TASI 2014: Amplitudes for colliders*", University of Colorado, Boulder, Colorado, June 2014
- "*Diffraction 2014*", Primošten, September 2014
- "*Diffractive and electromagnetic processes at high energies*", Bad Honnef am Rhein, August 2015
- "*Dense systems in QCD at asymptotical energies*", Orsay, June 2016