Metoda kaustike u analizi kontaktnih problema kompozitnih materijala

Bakić, Ante

Doctoral thesis / Disertacija

2009

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:807266

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

METODA KAUSTIKE U ANALIZI KONTAKTNIH PROBLEMA KOMPOZITNIH MATERIJALA

DOKTORSKI RAD

Ante Bakić, dipl. ing.

ZAGREB, 2009.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

METODA KAUSTIKE U ANALIZI KONTAKTNIH PROBLEMA KOMPOZITNIH MATERIJALA

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Damir Semenski

Ante Bakić, dipl. ing.

ZAGREB, 2009.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	539.3:620.17
Ključne riječi:	Optička metoda kaustike, kontaktni problem, koncentracija naprezanja, kompozitni materijali
Znanstveno područje:	TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje:	STROJARSTVO
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu
Mentor rada:	Prof. dr. sc. Damir Semenski
Broj stranica:	83
Broj slika:	54
Broj tablica:	5
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	64
Datum obrane:_____	

Povjerenstvo:

Akademik Stjepan Jecić, FSB, Zagreb	– predsjednik povjerenstva
Prof. dr. sc. Damir Semenski, FSB, Zagreb	– voditelj doktorskog rada
Prof. dr. sc. Dražan Kozak, SF, Slavonski Brod	– član povjerenstva

Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Damiru Semenskom na pruženoj podršci, razumijevanju i strpljenju.

Želio bih se zahvaliti akademiku Stjepanu Jeciću, koji mi je omogućio kvalitetne uvjete rada u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku.

Zahvaljujem doc. dr. sc. Janošu Kodvanju na znanstvenim i životnim savjetima koji su mi rad u laboratoriju činili ugodnim kao i prof. dr. sc. Dražanu Kozaku na pažljivom čitanju rada i kvalitetnim kritikama.

Posebno se zahvaljujem svom voditelju projekta prof.dr.sc. Mirku Husnjaku i svojim suradnicima: dr.sc. Nenadu Drvaru, Zvonimiru Tomičeviću, Gordanu Plačku i Predragu Čanžaru, koji su mi, svatko na svoj način, svesrdno pomagali i oslobađali me obaveza kada mi je bilo potrebno.

Također se zahvaljujem svim svojim prijateljima i kolegama koji su doprinijeli ostvarenju ovog rada.

Na kraju bih se želio zahvaliti svojoj obitelj, posebno supruzi Dini koja je cijelo vrijeme bila uz mene i poticala me da ustrajem.

Ante Bakić, dipl. ing.

SADRŽAJ

Sažetak ..... **III**

Summary ..... **IV**

Ključne riječi ..... **V**

Popis važnijih oznaka ..... **VI**

Popis slika ..... **VIII**

Popis tablica ..... **XI**

1 Uvod **1**

1.1 Definicija problema 1

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja 2

1.3 Hipoteza 4

1.4 Očekivani znanstveni doprinos 4

2 Mehanička svojstva kompozitnih materijala **6**

2.1 Tenzor elastičnosti i tenzor podatljivosti 7

2.2 Određivanje konstanti elastičnosti 13

3 Analiza naprezanja i deformacija u modelu **20**

3.1 Djelovanje koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu 20

3.2 Djelovanje cilindričnog utiskivača 27

3.2.1 Analitičko rješenje 27

3.2.2 Numeričko rješenje 31

4 Teorija kontaktne kaustike **33**

4.1 Geometrijska optika 33

4.2 Formiranje kaustike na zaslonu 35

4.3 Simulacija optičkog efekta 39

4.4 Krivulja kaustike i inicijalna krivulja 45

5 Tehnika provedbe eksperimenta **54**

5.1 Izbor optičkog postava 54

5.1.1 Aberacije optičkog sustava ... 55
5.1.2 Odabrani optički sustav ... 56
5.1.3 Nadogradnja optičkog postava ... 59
5.2 Snimanje kaustike na izotropnom materijalu ... 63
5.3 Odabir i mjerenje karakterističnih veličina ... 65
5.4 Snimanje kaustike na kompozitnom materijalu ... 66
5.4.1 Nanošenje refleksijskog sloja ... 66
5.4.2 Snimanje optičkog efekta ... 67
6 Analiza rezultata ... 70
6.1 Mjerenje kritične sile opterećenja ... 70
6.2 Oštećenje kompozitnog materijala ... 72
6.3 Određivanje područja prostornog stanja naprezanja ... 73
7 Zaključak ... 77
8 Literatura ... 80
Kratki životopis ... XII
Short biography ... XIII

SAŽETAK

Mjesta geometrijskih diskontinuiteta (vršak pukotine) i mjesta koncentriranih opterećenja (djelovanje kontaktnih sila) predstavljaju kritična mjesta u konstrukciji. Optička metoda kaustike jedna je od rijetkih eksperimentalnih metoda koja daje dobre rezultate upravo u takvim područjima. Razvijena je za određivanje koeficijenta intenzivnosti naprezanja i J-integrala na vršku pukotine za izotropne i anizotropne materijale. Naknadno je proširena na kontaktne probleme gdje su veličina i oblik kaustike na zaslonu povezani sa iznosom i nagibom opterećenja. U ovom radu metoda kaustike je proširena na analizu kontaktnih problema anizotropnih materijala čime je zaokružena cjelina njene primjene za mjesta visokih koncentracija naprezanja u konstrukciji. Eksperimenti su provedeni na ugljičnim vlaknima ojačanom kompozitu, a kao referentan izotropan materijal korištena je epoksidna smola tipa Araldit B.

Simulacijama optičkog efekta kaustike na zaslonu i eksperimentalnim snimanja potvrdila se pretpostavka da kod anizotropnih materijala veličina i oblik kaustike ne ovise samo o karakteru opterećenja nego i o mehaničkim svojstvima materijala.

Kod neprozirnih materijala, kakva je većina tehničkih materijala, moguće je snimanje kaustike samo u reflektiranom svjetlu s površine modela. Posebna pažnja posvećena je formiranju optičkog postava koji daje oštru i čistu sliku na zaslonu. Za mjerenje karakterističnih veličina na snimljenim slikama, napravljeni su posebni programski algoritmi čime se povećala točnost rezultata i smanjio utjecaj subjektivnog očitavanja.

Pokazano je da se metodom kaustike mogu mjeriti kritična opterećenja koja dovode do pojave tečenja materijala kao i opterećenja kod kojih dolazi do oštećenja kompozita. Također je pokazano primjerom kako se metoda može primijeniti u određivanju granice između područja ravninskog i prostornog stanja naprezanja u blizini djelovanja kontaktnih sila. Dane su smjernice budućih istraživanja i primjene metode kaustike na rješavanje kontaktnih problema u konstrukciji.

SUMMARY

Locations of geometric (e.g crack tip) and concentrated load (e.g. vicinity of the contact forces) represent critical places of engineering structures. The optical caustics method is one of the few experimental methods which provide applicable results in the such locations. This method was originally developed for crack-tip measurements of stress intensity factors and J-integral on isotropic and anisotropic materials. Additionally, it was extended to contact problems where the size and shape of caustics on the screen are related to the amount and the intensity of loading forces. In this paper the caustics method is extended to the analysis of contact problems of anisotropic materials, which makes the caustics method comprehensively applicable to analysis of any high stress locations in a structure. Experiments were performed on carbon fiber reinforced composites, where the epoxy resin Araldit B was used as reference isotropic material.

Comparison of the simulations of the optical effect and the experiments indicated that for anisotropic materials size and shape of caustic curve depend not only on the loading conditions but also on the mechanical material properties. In isotropic materials the shape of the caustics curve is unique for all materials and can be expressed by the epicycloids equation.

On non-transparent materials, as most of the technical materials usually are, it is possible to record the caustic curve only by utilizing light reflected from the model surface. In this paper special attention was dedicated to forming the optical setup which gives a clear image of the recorded caustics curves. In order to measure curve characteristics on the recorded images, subroutines are written which serve to reduce subjective operator errors during the curve shape measurement.

It is shown that method of caustics can be used for the measurement of critical loads which lead to material yielding, as well as loads that lead to failure of composite material. It has been proven by example that the method can be used to determine the transition border between plane and spatial stress conditions in the vicinity of contact forces. The guidelines are given for future research as well as the application of the caustics method for solving contact problems in construction.

KLJUČNE RIJEČI

HRVATSKI	ENGLESKI
optička metoda kaustike	optical method of caustics
kontaktni problem	contact problem
koncentracija naprezanja	stress concentration
kompozitni materijali	composite materials

POPIS VAŽNIJIH OZNAKA

Oznaka	Opis
a_{ij}	matrica transformacije
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	realni i imaginarni dijelovi kompleksnog broja
C_{ijkm}	komponente tenzora elastičnosti; Pa
E	modul elastičnosti; Pa
f	žarišne duljine leća; m
F	sila; N
G	modul smičnosti; Pa
h	debljina modela; m
$\boldsymbol{J}$	Jakobijeva matrica
LEM	Laboratorij za eksperimentalnu mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje
m	faktor povećanja optičkog postava
n_1, n_2	indeks loma
p	pritisak; N/m^2
r_0	radijalna koordinata inicijalne krivulje; m
R	polumjer cilindričnog utiskivača; m
$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{L}$	Barnett-Lotheovi tenzori
r, φ	koordinate u polarnom koordinatnom sustavu
S_{ijkm}	komponente tenzora podatljivosti; Pa^{-1}
s	optički put zrake svjetla
Δs	retardacija zrake svjetla
U	Airyjeva funkcija naprezanja
z_0, z_1, z_2	referentne udaljenosti optičkih elemenata u optičkom postavu; m
u_i	komponente pomaka
x, y	koordinate u Decartesovom koordinatnom sustavu
y_c	karakteristična mjerna veličina kaustike, m
$\vec{w}$	otklon zrake svjetla
W	funkcija gustoće energije deformiranosti
Z	funkcija zakrivljenosti površine modela

ε_{ij}	komponente tenzora deformacije
Φ	funkcija naprezanja
ϑ	kut zakreta glavnih osi ortotropije
σ_{ij}	komponente tenzora naprezanja; Pa
μ_k	kompleksni korijeni karakteristične jednadžbe
ν_{ij}	Poissonov faktor
θ_u	upadni kut zrake svjetla na model
θ_r	reflektirajući kut zrake svjetla na model

POPIS SLIKA

	Opis slike	Strana
Slika 2.1.	Kompoziti ojačani ugljičnim vlaknima: a) ploče, b) gotovi proizvodi	7
Slika 2.2.	Kompozit ojačan jednosmjernim vlaknima	12
Slika 2.3.	Princip izrezivanja epruveta iz kompozitne ploče	14
Slika 2.4.	Standardni oblik epruvete kod ispitivanja vlaknima ojačanih kompozita (L_3=250 mm, L_2=150 mm, b_1=25 mm, h=3 mm)	14
Slika 2.5.	Eksperimentalno određivanje svojstava vlaknima ojačanih kompozita, LEM	15
Slika 2.6.	Princip rada laserskog ekstenziometra	16
Slika 2.7.	Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru vlakana (epruveta 1)	17
Slika 2.8.	Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru okomitom na smjer vlakana (epruveta 2)	17
Slika 2.9.	Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru 45° u odnosu na smjer vlakana (epruveta 3)	18
Slika 2.10.	Dijagram σ-ε Araldita B	18
Slika 3.1.	Djelovanje koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu	21
Slika 3.2.	Linije konstantnih naprezanja, MPa, Araldit B, F=100 N	25
Slika 3.3.	Linije konstantnih naprezanja, MPa, CFRP131 kompozit, F=100 N. a) sila djeluje u smjeru vlakana i b) okomito na smjer vlakana	25
Slika 3.4.	Trodimenzionalni prikaz raspodjele naprezanja u CFRP131 kompozitu, F=100 N	26
Slika 3.5.	Raspodjela pritiska na kompozitnoj ploči u ovisnosti o smjeru vlakana (normalno opterećenje, F= 100 N, R= 10 mm)	29
Slika 3.6.	Raspodjela pritiska na kompozitnoj ploči u ovisnosti o nagibu opterećenja (f_1=0, f_2=0.2 F= 100 N, R= 10 mm)	30
Slika 3.7.	Djelovanje cilindričnog utiskivača na ortotropnu ploču	30
Slika 3.8.	Poprečna deformacija modela (ε_z): a) opterećenje koncentriranom silom, b) opterećenje cilindričnim utiskivačem , R= 10 mm, F=100 N.	31
Slika 3.9.	Mreža konačnih elemenata, pogled s prednje strane modela	32
Slika 3.10.	Raspodjela naprezanja, CFRP131 kompozit, F=100 N. a) sila djeluje u smjeru vlakana i b) okomito na smjer vlakana	32

Slika 4.1.	Optički put zrake svjetla kroz prozirne medije različitih indeksa loma	34
Slika 4.2.	a) refleksija i b) lom zrake svjetla	35
Slika 4.3.	a) refleksija zrake svjetla sa prednje površine modela i b) prolaz zrake svjetlosti kroz prozirni dio modela	36
Slika 4.4.	Geometrijski uvjeti otklona zrake svjetla	37
Slika 4.5.	Formiranje kaustike na zaslonu	38
Slika 4.6.	Simulacija optičkog efekta kaustike na zaslonu	40
Slika 4.7.	Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (Araldit B). a) realne slike i b) virtualne slike	41
Slika 4.8.	Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=90°). a) realne slike i b) virtualne slike	42
Slika 4.9.	Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=0°). a) realne slike i b) virtualne slike	43
Slika 4.10.	Simulacije optičkog efekta kaustike različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=45°). a) realne slike i b) virtualne slike	44
Slika 4.11.	a) položaj zraka svjetla na zaslonu, b) krivulja kaustike i inicijalna krivulja	45
Slika 4.12.	Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (Araldit B). a) realne slike i b) virtualne slike	48
Slika 4.13.	Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=90°).	49
Slika 4.14.	Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=0°).	50
Slika 4.15.	Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=45°).	51
Slika 5.1.	Odabrani optički postav s paralelnim snopom svjetla (IS-izvor svjetla, L-leća, PZ-polupropusno zrcalo, RR-referentna ravnina (zaslon), M-model)	54
Slika 5.2.	Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u paralelnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N	55
Slika 5.3.	Optički postav za eksperimentalno snimanje kaustike (IS-izvor svjetla, L_1 i L_2 -leće, F – filter, PZ-polupropusno zrcalo, RR-referentna ravnina (zaslon), M-model)	56
Slika 5.4.	Snimanje kaustike u divergentnom snopu svjetla	57
Slika 5.5.	Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u divergentnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N	58
Slika 5.6.	Promjena položaja zaslona u optičkom postavu	59

Slika 5.7.	Snimanje kaustike u konvergentnom snopu svjetla	59
Slika 5.8.	Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u konvergentnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=100 N	60
Slika 5.9.	Eksperimentalno snimljena kaustika na Araldit B. a) refleksija s prednje i stražnje površine i b) refleksija samo s prednje površine	61
Slika 5.10.	Utjecaj nagiba sile na oblik kaustike	62
Slika 5.11.	Utjecaj iznosa iznosa sile opterećenja na oblik i veličinu kaustike. a) F=80 N, b) F=200 N	63
Slika 5.12.	Karakteristična veličina kaustike	64
Slika 5.13.	Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=90°	66
Slika 5.14.	Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=0°	66
Slika 5.15.	Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=45°	67
Slika 6.1.	Kritična sila opterećenja Araldita B. Promjer utiskivača a) R=10 mm i b) R=20 mm	69
Slika 6.2.	Kritična sila opterećenja CFRP131 kompozita za a) ϑ=90°, b) ϑ=0° i c) ϑ=45°	69
Slika 6.3.	Oštećenje kompozitnog materijala, a) pojava i b) propagacija površinske pukotine	70
Slika 6.4.	Sile kod kojih dolazi do pojave pukotine u kompozitnom materijala na mjestu djelovanja kontaktnih sila za a) ϑ=90°, b) ϑ=0° i c) ϑ=45°	71
Slika 6.5.	Vrijednost omjera F/F0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal Araldit B, F=100 N	72
Slika 6.6.	Vrijednost omjera F/F0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=90°, F=600 N	73
Slika 6.7.	Vrijednost omjera F/F0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N	73
Slika 6.8.	Vrijednost omjera F/F0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N	74

POPIS TABLICA

	Opis tablice	Strana
Tablica 2.1.	Transformacija tenzorskih komponenata S_{ijkm} u matrične S_{pq}	11
Tablica 2.2.	Tenzor elastičnosti za različite materijalne simetrije	12
Tablica 2.3.	Inženjerske konstante elastičnosti CFRP kompozita	21
Tablica 5.1.	Udaljenosti optičkih elemenata za snimanje u divergentnom snopu svjetla	60
Tablica 5.2.	Udaljenosti optičkih elemenata za snimanje u konvergentnom snopu svjetla	62

1

Uvod

1.1 Definicija problema

Mjesto kontakta dvaju tijela, posebno u slučaju kada se ostvaruje preko relativno male površine, predstavlja područje visoke koncentracije naprezanja te je stoga važno mjesto u konstrukciji. Ta su mjesta predmet proučavanja velikog broja istraživača u više različitih disciplina, posebno u mehanici i tribologiji. U mehanici se kontaktni problemi, počevši od Hertzovih radova, proučavaju više od stotinu godina. Do danas se istraživači uglavnom nastoje riješiti velikog broja pretpostavki kako bi se čim više približili stvarnom kontaktu. Pri tome se koriste analitičkim, numeričkim i eksperimentalnim metodama. Približavanjem analitičkih pretpostavki stvarnim uvjetima, rješenja postaju složena i teško ih je zadržati u eksplicitnom obliku. Numeričke metode najviše su zastupljene, ali bez eksperimenata nemoguće je vrednovanje njihovih rezultata.

Pregledom literature može se primijetiti mali broj eksperimentalnih rezultata u kontaktnim problemima, glavni razlog su veliki gradijenti naprezanja na mjestu djelovanja kontaktnih sila zbog čega je malo područje koje je potrebno ispitati, te mnoge eksperimentalne metode nisu pogodne za analizu stanja naprezanja i deformacija. Optička metoda kaustike jedna je od rijetkih eksperimentalnih metoda koja daje kvalitetne rezultate upravo u takvim slučajevima [1]. Razvijena je u svrhu određivanja koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine, a s vremenom se počela primjenjivati i na kontaktne probleme.

Kod opterećenog ravninskog modela, na mjestima geometrijskih diskontinuiteta (vršak pukotine) ili diskontinuiteta opterećenja (mjesto djelovanja koncentrirane sile)

javljaju se velike poprečne deformacije. Ako se to područje osvijetli snopom svjetla, prozirni modeli djelovat će na optički put zrake svjetla poput leće, a neprozirni poput zakrivljenog zrcala. Zbog vlačnog opterećenja kod vrška pukotine efekt odgovara divergentnim lećama i konkavnom zrcalu, dok na mjestu djelovanja koncentrirane sile efekt odgovara konvergentnoj leći, odnosno konveksnom zrcalu. Nakon prolaza kroz model snop svjetla više nije homogen, već se unutar njega javlja tamno područje nastalo otklanjanjem zraka svjetla. Na postavljenom zaslonu vidi se tamno područje (tamna sjenka) okružena koncentriranim zrakama svjetla. Granična krivulja koja omeđuje tamnu sjenku naziva se *kaustika*. Zrake koje padaju na krivulju kaustike na modelu su se nalazile na tzv. *inicijalnoj krivulji*. Primjenom fizikalnih principa geometrijske optike, oblik i veličinu kaustike na zaslonu moguće je dovesti u vezu s naprezanjima i deformacijom u modelu.

Zbog svoje osjetljivosti na unutrašnje i vanjske parametre metoda kaustike zahtijeva laboratorijske uvjete rada, ali ta ista osjetljivost omogućuje da se zabilježe i vrlo male promjene na opterećenom modelu. Jedna od takvih promjena je pojava pukotine unutar kompozitnog materijala kao jednog od osnovnih oblika trajnog oštećenja materijala. Metoda kaustike ima potencijal omogućiti usporedbu analitičkih, numeričkih i eksperimentalnih rezultata stanja naprezanja i deformacija u neposrednoj blizini djelovanja kontaktnih sila.

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

Početak mehanike kontakta obično se veže uz rad Heinricha Hertza [2] u kojem je dano rješenje elastičnog kontakta dvaju tijela elipsoidalnog oblika bez pojave trenja. Iako je to dosta pojednostavljen model, on se i danas redovito koristi u inženjerskoj praksi. Prvi put je teorijski pristup upotrijebljen pri rješavanju Boussinesq-Flamantova problema poluprostora opterećenog koncentriranom silom [3], [4]. Od tada pa sve do današnjih dana proučavanje kontakta provodi se nesmanjenim intenzitetom. Dobar povijesni pregled dao je Johnson [5]. Kao glavne probleme u proučavanju kontakta Baber i Ciavarella [6] istaknuli su: problem trenja, dinamičku nestabilnost također uzrokovanu trenjem, utiskivanje tijela, trošenje materijala, kontakt anizotropnih materijala, adheziju i viskoelastičnost.

Mehanika kontakta anizotropnih materijala razvija se od pedesetih godina prošlog stoljeća, a veći značaj dobiva primjenom na kompozitnim materijalima. Postoje dva pristupa: prvi je uveo Lekhnitskii [7] primjenom kompleksne varijable u funkciji naprezanja, dok je drugi Strohov pristup [8], gdje je konačno rješenje izraženo preko zbroja partikularnih rješenja. Prvi pristup češće se koristi u inženjerskoj praksi, dok je Strohov pristup zbog lakše nadogradnje za rješavanje složenijih problema raširenij u primijenjenoj matematici i fizici. Detaljni prikaz obaju pristupa dao je Ting [9].

Fan i Keer [10] proučavaju raspodjelu pritiska na ortotropnim poluravninama opterećenim utiskivanjem tijela i pri tome se koriste Barnett-Lotheovim tenzorima [11]. Pokazuju da površina kontakta kao i raspodjela pritiska bitno ovise o smjerovima vlakana te da se za anizotropne materijale ne može primijeniti klasična Hertzova raspodjela. Ning [12] promatra isti problem uz prisustvo trenja te ga uspoređuje s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata.

U mehanici se metoda kaustike počela primjenjivati za određivanje koeficijenta intenzivnosti naprezanja u vršku pukotine. Prvi ju je razvio i upotrijebio Manogg [13] 1964. godine, za snimanje u prolaznom svjetlu, dok je 1970. Theocaris [14] dobio prve eksperimentalne rezultate u reflektirajućem svjetlu te omogućio primjenu na neprozirnim modelima. Intenzivnoj primjeni kaustike osamdesetih i devedesetih godina prošlog stoljeća pridonijeli su Rossmanith [15], Kalthoff [16] i Rosakis [17]. Zender i Rosakis [18] su pokazali da se vrijednost *J-Integrala* također može mjeriti pomoću metode kaustike. Za refleksijski postav potrebna je optički ravna površina modela. Utjecaj hrapavosti i zakrivljenosti površine na rezultate mjerenja analizirali su Tomlinson i drugi [19]. Razvojem novog načina pripreme površine modela, Jecić i Semenski [20] su omogućili primjenu metode na kompozitne materijale.

Proučavanje kontaktnih problema metodom kaustike počinje devedesetih godina prošlog stoljeća. Rossmanith i suradnici [21] pokazali su simulaciju kaustike nastale pri opterećenju ortotropne ploče koncentriranom silom, pri čemu su se koristili Greenovim analitičkim rješenjem [22]. Do istih rezultata su došli Semenski i Bakić [23], upotrebom kompleksne varijable prema Lekhnitskom. U radu Bakića, Alfirevića i Semenskog [24] koncentrirana sila je zamijenjena proizvoljnim distribuiranim pritiskom, čime se može opisati utiskivanje tijela raznih oblika. Nekoliko radova objavljeno je s eksperimentalnim rezultatima na izotropnim materijalima (Papadopoulos, [25], Semenski, Bakić, Stanković [26]), dok o istraživanjima na anizotropnim materijalima još uvijek nisu objavljeni kvalitetni rezultati (nedovoljno jasne slike objavili su Yao i suradnici [27]).

1.3 Hipoteza

Pretpostavlja se da se optičkom metodom kaustike može mjeriti deformacija površine u neposrednoj blizini kontaktnih sila - kako izotropne, tako i anizotropne ploče. Pri tome se mjere karakteristične veličine optičkog efekta na zaslonu, a veza s gradijentima deformacije izvodi se po zakonu refleksije i retardacije zrake svjetla. Izmjerene veličine odgovaraju vrijednostima na inicijalnoj krivulji koja se nalazi na modelu. Mijenjanjem parametara optičkog postava mijenja se i položaj inicijalne krivulje, te se na taj način mogu dobiti vrijednosti u gotovo cijelom području velikih gradijenata deformacija. S ciljem određivanja utjecaja svojstava materijala, smjera glavnih osi ortotropije te vrste opterećenja na optički efekt kaustike, provest će se dovoljan broj eksperimenata i numeričkih simulacija.

Problem poluravnine opterećene koncentriranom silom jedan je od osnovnih problema teorije elastičnosti. S vremenom je problem proširen na utiskivanje tijela raznih oblika, bilo u izotropnu, bilo u anizotropnu poluravninu. Rješenja ne vrijede u neposrednoj blizini kontakta gdje vlada prostorno stanje naprezanja. Pretpostavlja se da je usporedbom simuliranih kaustika na teorijskim rješenjima i eksperimentalnim rezultatima moguće odrediti granicu između područja gdje vlada stanje ravninskog naprezanja i područja gdje vlada prostorno stanje naprezanja. Isto tako, pretpostavlja se da je moguće utvrditi iznos sile koja dovodi do pojave plastifikacije materijala, jer je u tom slučaju nakon rasterećenja modela još uvijek vidljiv optički efekt na zaslonu. Ta veličina predstavlja kritičnu vrijednost koja dovodi do trajnog oštećenja materijala.

Za razliku od analitičkih metoda, kod numeričkih metoda kao što je metoda konačnih elemenata prostorno stanje naprezanja ne predstavlja prepreku u rješavanju problema. Također je puno lakše variranje ulaznih podataka kao što su svojstva materijala te iznos i nagib kontaktne sile. Simulacija formiranja efekta kaustike nad numeričkim rješenjem opterećenog modela omogućuje usporedbu s eksperimentalnim rezultatima. Na taj bi se način pridonijelo razvoju novih numeričkih algoritama za opisivanje kontaktnih problema.

1.4 Očekivani znanstveni doprinos

Oslanjajući se na iskustva autora Jecića i Semenskog [20] o snimanju efekta kaustike u blizini vrška pukotine kod anizotropnih materijala, očekuje se da će se kvalitetni

rezultati moći postići i kod kontaktnih problema. Na taj način bi bila moguća analiza ponašanja kompozitnih materijala u neposrednoj blizini djelovanja kontaktnih sila. U dosadašnjoj literaturi ne postoje kvalitetni eksperimentalni rezultati snimanja kontaktne kaustike na kompozitnim materijalima.

Simulacija optičkog efekta kaustike provedena je nad teorijskim rješenjima stanja naprezanja i deformacija u kompozitnoj ploči te je izvršena usporedba s eksperimentalnim rezultatima. Variranjem odgovarajućih parametara optičkog postava omogućena je usporedba gradijenta deformacije ne samo s jedne inicijalne krivulje nego u gotovo cijelom području velikih gradijenata deformacije. Na taj način bit će moguće odrediti granicu između područja gdje prevladava ravninsko stanje naprezanja i područja prostornog stanja naprezanja.

Zbog laboratorijskih uvjeta koji su potrebni pri provedbi eksperimenata ne može se očekivati primjena metode tijekom eksploatacije, ali se svakako njen doprinos očekuje u istraživanju, a posebno u vrednovanju sve zastupljenijih numeričkih simulacija. Razvojem numeričkih algoritama moguće je simulirati složene kontaktne probleme. Simulacijom kaustike nad numeričkim rezultatima te usporedbom karakterističnih veličina s eksperimentalnim vrijednostima moguće je vrednovanje numeričkih algoritama.

Za razliku od metala početak loma kod kompozitnih materijala može se dogoditi već pri niskim naprezanjima zbog velikog broja mikropukotina (obično nastalih tijekom izrade) koje rastu istovremeno. Potencijalna mogućnost primjene metode kaustike, zbog njene izrazite osjetljivosti na površinske promjene, je određivanje kritične sile koja dovodi do pojave oštećenja kompozitnog materijala. Druga značajna karakteristika metode je velika brzina odziva te se u budućnosti može primijeniti u analizi udarnog opterećenja.

Postoje mnogobrojne kombinacije kontakata između materijalne ploče i utiskivača. Utiskivači mogu biti ravni, cilindrični, parabolični itd.; materijalna ploča može biti izotropna, anizotropna, sa ili bez presvlake, deblja ili tanja; opterećenje može biti normalno ili koso, statičko ili dinamičko. Bilo bi nemoguće obuhvatiti sve primjere u jednom radu. U ovom radu se očekuje prikazati jednim primjerom izradu kvalitetne podloge koja će se lako moći primijeniti na bilo koji od navedenih problema.

2

Mehanička svojstva kompozitnih materijala

Kompozitni materijali ili ukratko – kompoziti, dobiveni su spajanjem dviju ili više komponenata s ciljem postizanja specifičnih karakteristika i svojstava koje ne posjeduje niti jedna komponenta sama za sebe [28], [29]. Najčešće tražena svojstva su: krutost, čvrstoća, težina, ponašanje pri visokim temperaturama, kemijska postojanost, tvrdoća te toplinska i električna vodljivost. U pravilu se sastoje od mekanije i duktilnije osnove ili *matrice* te krućeg i čvršćeg *ojačala*. Uloga matrice je da veže i održava relativan položaj ojačala, dok ojačalo na sebe preuzima opterećenje te time poboljšava svojstva matrice. S obzirom na vrstu matrice kompozitni materijali mogu biti metalni, keramički ili polimerni, dok prema vrsti ojačanja mogu biti ojačani česticama, vlaknima i slojevima.

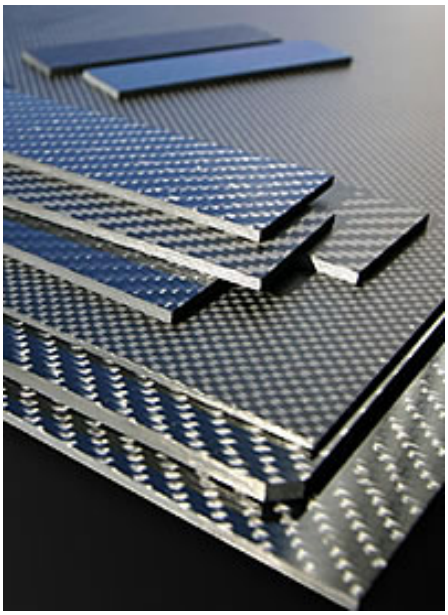
Neki od najzastupljenijih među njima su vlaknima ojačani kompoziti. Odlikuje ih velika specifična čvrstoća, žilavost i krutost kao i relativno niska cijena proizvodnje. Ovisno o orijentaciji vlakana, njihova svojstva mogu biti gotovo izotropna kod slučajno orijentiranih vlakana, pa sve do izrazito anizotropnih svojstava kod kompozita s jednosmjernim vlaknima.

Kao reprezentativan mehanički anizotropan materijal koji će se koristiti u ovom radu, odabran je polimerni kompozit ojačan jednosmjernim ugljičnim vlaknima (slika 2.1). U literaturi je uobičajena skraćenica CFRP kompozit od engleskog naziva *Carbon-Fibre Reinforced Plastics*. Dva su osnovna zahtjeva utjecala na izbor:

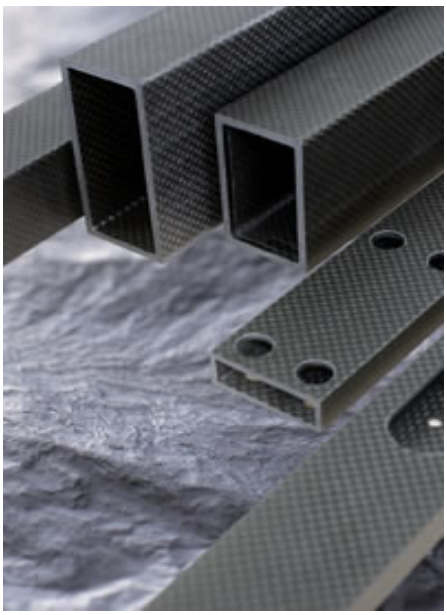
- materijal treba imati visoki stupanj anizotropije kako bi se na odgovarajući način opisao njegov utjecaj na oblik kaustike,
- promjer vlakna treba biti što manji kako bi se i male zone na mjestu kontakta mogle analizirati s makromehaničkog stajališta. Promjer ugljičnih vlakana kreće se od 1 μm na više.

2.1 Tenzor elastičnosti i tenzor podatljivosti

Tenzori elastičnosti i podatljivosti predstavljaju vezu između naprezanja i deformacija, a u sebi nose informacije o svojstvima materijala. Za analitički dio gradiva u ovom radu prihvatljive su pretpostavke elastičnog tijela i malih deformacija. Uz te pretpostavke izvedeni izrazi moći će zadržati eksplicitnu i derivabilnu formu, što je bitno za izvođenje kvalitetnih zaključaka.



a)



b)

Slika 2.1 Kompoziti ojačani ugljičnim vlaknima: a) ploče, b) gotovi proizvodi

U elastičnom tijelu veza između deformacija i naprezanja je jednoznačna. Za njeno određivanje može se koristiti funkcija gustoće energije deformiranosti $W(\varepsilon_{ij})$, koja ima svojstvo

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{2.1}$$

Razvijena u red potencija, funkcija izgleda:

$$W = A + B_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} + \frac{1}{3}D_{ijkmnp}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km}\varepsilon_{np} + \cdots. \tag{2.2}$$

Budući da je energija W jednaka nuli ako je ε_{ij} jednako nuli, koeficijent A također mora biti jednak nuli. Koeficijent B ovisi isključivo o promjeni temperature [30], te je kod izotermnih procesa jednak nuli. Za slučaj malih deformacija mogu se koeficijenti trećeg i višeg reda zanemariti. Uvrštenjem navedenih pretpostavki u izraz (2.2) dobije se

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km}, \tag{2.3}$$

te je

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm} \varepsilon_{km}. \tag{2.4}$$

Gornji izraz predstavlja *poopćeni Hookeov zakon*, a tenzor četvrtog reda C_{ijkm} naziva se tenzor elastičnosti. Njegov inverzni oblik glasi

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkm} \sigma_{km}, \tag{2.5}$$

a tenzor S_{ijkm} se naziva tenzor podatljivosti.

Kako su tenzori naprezanja i deformacija simetrični, tj. vrijedi $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, to povlači da za tenzor elastičnosti također vrijede svojstva simetrije

$$C_{ijkm} = C_{jikm} = C_{jimk} = C_{ijmk} \tag{2.6}$$

Ta svojstva simetrije smanjuju broj nezavisnih komponenata u tenzoru s 81 komponentom na 6x6=36 nezavisnih komponenti. Naime, sada šest komponenata deformacije ovisi o šest komponenata naprezanja.

Promijenili se položaj ε_{km} i ε_{ij} u izrazu (2.3), neće se promijeniti vrijednost funkcije W, što znači da je tenzor C_{ijkm} simetričan i u odnosu na grupe indeksa *ij* i *km*, tj. vrijedi

$$C_{ijkm} = C_{kmij}. \tag{2.7}$$

Zbog svojstva simetrije (2.7) broj nezavisnih komponenata tenzora C_{ijkm} smanjuje se na 21.

U teoriji elastičnosti uobičajeno je radi veće preglednosti tenzor elastičnosti i tenzor podatljivosti sažeti u tenzore drugog reda. Pri tome se koriste dva pravila: dva ponovljena indeksa sažimaju se u jedan iste vrijednosti, a dva različita indeksa sažimaju se u jedan koji ima vrijednost *devet minus zbroj tih dvaju indeksa* (tablica 2.1). Ovakav zapis još naziva se i matrični zapis.

Tablica 2.1: Transformacija tenzorskih komponenata S_{ijkm} u matrične S_{pq}

S_{ijkm}	S_{pq}
ij: 11, 22, 33	*p*: 1, 2, 3
23, 31, 12	4, 5, 6
km: 11, 22, 33	*q*: 1, 2, 3
23, 31, 12	4, 5, 6

Jednadžbe (2.4) i (2.5) u matričnom zapisu glase:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \qquad \varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j, \qquad (i,j = 1,2,3,4,5,6), \tag{2.8}$$

a uvjet simetrije (2.7) glasi:

$$C_{ij} = C_{ji}, \qquad S_{ij} = S_{ji}. \qquad (i,j = 1,2,3,4,5,6). \tag{2.9}$$

Za određivanje mehaničkih svojstava općeg anizotropnog materijala potrebno je odrediti 21 neovisnu komponentu, što je s eksperimentalnog stanovišta vrlo zahtjevan zadatak. Srećom materijali koji nas okružuju uglavnom posjeduju neku vrstu simetrije u svojoj građi. Prema Neumannovom principu [31] strukturalna simetrija materijala uvjetuje simetriju svih njegovih fizikalnih svojstava, pa tako i elastičnih. Ravnine elastične simetrije imaju svojstvo da se pri refleksiji (zrcaljenju) koordinatnog sustava na toj ravnini ne mijenjaju komponente tenzora elastičnosti C_{ij}, odnosno tenzora podatljivosti S_{ij}. Taj uvjet je moguće zadovoljiti samo ako su neke komponente jednake nuli. Broj komponenata jednakih nuli povećava se povećanjem ravnina elastične simetrije. Detaljna analiza može se pronaći u literaturi iz teorije elastičnosti, npr. [32], [33] i [30]. U tablici 2.1. dan je prikaz tenzora elastičnosti za različite materijalne simetrije, dok tenzor podatljivosti ima istu strukturu.

Tablica 2.2: Tenzor elastičnosti za različite materijalne simetrije

Materijalni model	Tenzor elastičnosti $[C_{ij}]$
Opći anizotropni materijal 21 nezavisni materijalni parametar	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ S & I & M & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$
Monotropni materijal jedna ravnina elastične simetrije: $x_1=0$ 13 nezavisnih materijalnih parametara	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & I & M & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$
Ortotropni materijal 3 ravnine elastične simetrije: $x_1=0, x_2=0, x_3=0.$ 9 nezavisnih materijalnih parametara	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ S & I & M & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$
Transverzalno izotropni materijal ravnina izotropije: $x_1=0.$ $C^{TI}=\frac{1}{2}(C_{22}-C_{23})$ 5 nezavisnih materijalnih parametara	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{TI} & 0 & 0 \\ S & I & M & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}$
Izotropni materijal $C^{I}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})$ 2 nezavisna materijalna parametra	$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C^{I} & 0 & 0 \\ S & I & M & & C^{I} & 0 \\ & & & & & C^{I} \end{bmatrix}$

Kad se u pretpostavci koristi pojam ortotropnog materijala, ostaje dojam da je preskočena cijela lepeza materijala od ortotropnog do općeg anizotropnog, dok u stvarnosti nije tako. Izuzetno mali broj tehničkih materijala posjeduje više od 9 nezavisnih parametara [34]. Također, uvriježen je pojam da materijal posjeduje opća anizotropna svojstva kada se glavne osi ortotropije ne podudaraju s odabranim koordinatnim osima. Kod ispitivanja materijala uvijek se smjerovi izrezivanja epruveta odabiru tako da se odredi minimalan broj potrebnih parametara, te se naknadno tenzori elastičnosti i podatljivosti transformiraju u željeni koordinatni sustav. Transformacijske formule u tom slučaju glase

$$\overline{C}_{ij} = a_{ip} a_{jq} C^0_{pq}, \qquad (i, j = 1,2,3,4,5,6). \tag{2.10}$$

$$\overline{S}_{ij} = a_{ip} a_{jq} S^0_{pq}, \qquad (i, j = 1,2,3,4,5,6). \tag{2.11}$$

gdje je a_{ij} matrica transformacije. Prilikom transformiranja tenzora potrebno je imati na umu da će neke komponente iz tablice 2.2 postati različite od nule.

Vlaknima ojačani kompoziti u pravilu imaju ortotropne karakteristike. Čak i kada vlakna nisu postavljena međusobno okomito, smjerovi mehaničkih svojstava ekstremnih vrijednosti približno su okomiti. Komponente tenzora C_{ij} i S_{ij} nemaju neko određeno fizikalno značenje. U tehničkoj literaturi uobičajeno se koriste tzv. *inženjerske konstante elastičnosti* do kojih se dolazi eksperimentalnim ispitivanjem materijala. Iz njih se prvo izračunavaju komponente S_{ij} jer su odnosi jednostavniji, te se inverzijom dobivaju komponente C_{ij}.

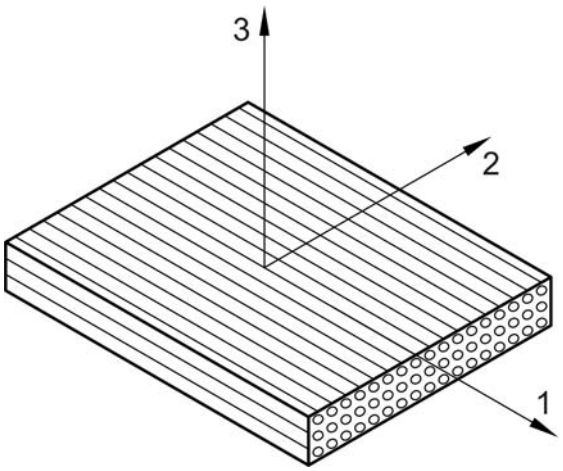
Za ortotropni materijal Hookeov zakon izražen preko inženjerskih konstanti glasi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Oznaka E_i predstavlja *modul elastičnosti* u smjeru osi *i*, ν_{ij} je *Poissonov faktor* koji je po definiciji negativan omjer deformacije ε_j i ε_i, a G_{ij} je *modul smičnosti*.

Ako se izraz (2.9) usporedi s izrazom (2.12), dobiva se sljedeća veza među konstantama elastičnosti

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{2.13}$$



Slika 2.2 Kompozit ojačan jednosmjernim vlaknima

Za transverzalno izotropni materijal (ravnina izotropije x_1=0), u čiju grupu spada predmetni CFRP kompozit (slika 2.2), veza između deformacije i naprezanja izražena preko inženjerskih konstanti glasi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

pri čemu je korišten izraz (2.13). Dakle, kako bi se potpuno definirala elastična svojstva materijala potrebno je odrediti: E_1, E_2, ν_{12} ,ν_{23} i G_{12}

Kod izotropnog materijala tenzor podatljivosti dodatno se pojednostavljuje (2.15) te je za njegovo definiranje potrebno odrediti samo dva parametra, E i ν:

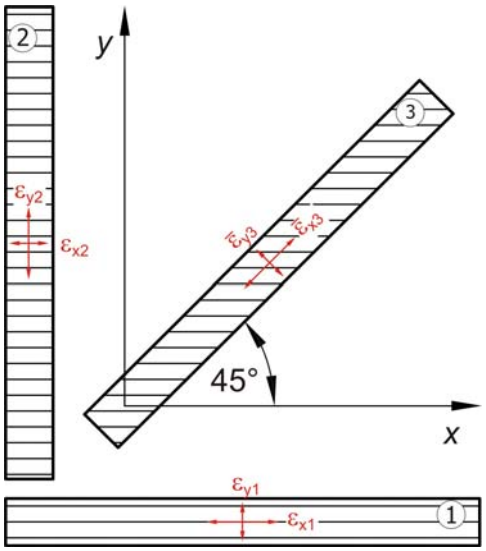
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

2.2 Određivanje konstanti elastičnosti

Mehanička svojstva kompozitnog materijala mogu se odrediti na dva načina. Jedan je primjenom tzv. *zakona miješanja* kada se svojstva kompozita izračunavaju na osnovu poznavanja svojstava svih komponenata i njihovih volumnih udjela [29]. Ovakav izračun daje okvirne vrijednosti i često je proširen dodatnim empirijskim faktorima. Drugi način je eksperimentalno određivanje na stvarnom materijalu [35].

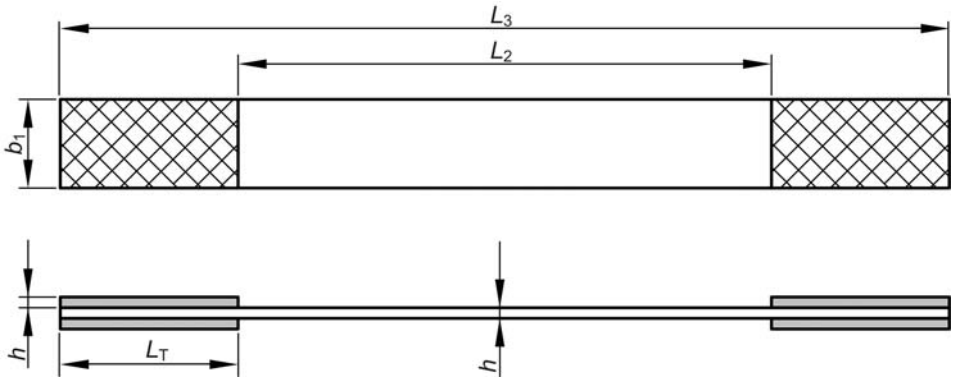
Najčešći način određivanja elastičnih konstanti ispitivanjem materijala je statički vlačni pokus [36], [37]. Prilikom pokusa u središnjem dijelu epruvete javlja se jednoosno stanje naprezanja. Mjerenjem sile i razvlačenja materijala računaju se naprezanja i deformacije i prema Hookeovom zakonu izračunavaju inženjerske konstante elastičnosti. Na osnovu istih konstanti određuju se koeficijenti tenzora podatljivosti odnosno tenzora elastičnosti. Iako je to teoretski vrlo jednostavan pokus, u praksi zahtijeva visoko osjetljive senzore i vještinu ispitivača.

Kako bi se odredilo svih pet nepoznatih konstanti jedan od načina je da se iz materijala izrežu tri epruvete, od kojih su dvije izrezane u smjeru glavnih pravaca ortotropije, a treća pod kutom 45° u odnosu na glavnu os ortotropije (slika 2.3).



Slika 2.3 Princip izrezivanja epruveta iz kompozitne ploče

Epruveta 1 izrezuje se u smjeru vlakana i na njoj se mjere deformacije ε_{x1} i ε_{y1}. Slično tome, epruveta 2 izrezuje se u smjeru okomitom na smjer vlakana i na njoj se mjere deformacije ε_{x2} i ε_{y2}. Epruvete 1 i 2 služe za određivanje modula elastičnosti i Poissonovih faktora. Epruveta 3 izrezuje se pod kutom 45° u odnosu na os *x*, a na njoj se mjere deformacije $\bar{\varepsilon}_{x3}$ i $\bar{\varepsilon}_{y3}$, a služi za određivanje modula smičnosti.



Slika 2.4 Standardni oblik epruvete kod ispitivanja vlaknima ojačanih kompozita (L_3=250 mm, L_2=150 mm, b_1=25 mm, h=3 mm)

Krajevi epruveta ojačani su naljepljivanjem dijelova istog materijala izrezanog pod kutom 45° u odnosu na smjer vlakana (prema slici 2.4).

Uvjeti kojih se treba pridržavati prilikom izrade epruveta i provedbe pokusa propisani su normom. U ovom radu su ispitivanja izvršena prema normi HRN EN ISO 527 [38], čiji je 5. dio namijenjen isključivo za ispitivanje kompozita ojačanih jednosmjernim vlaknima. Norma EN ISO 14,129 [39] dodatno propisuje uvjete za određivanje modula smičnosti prilikom ispitivanja epruvete 3.



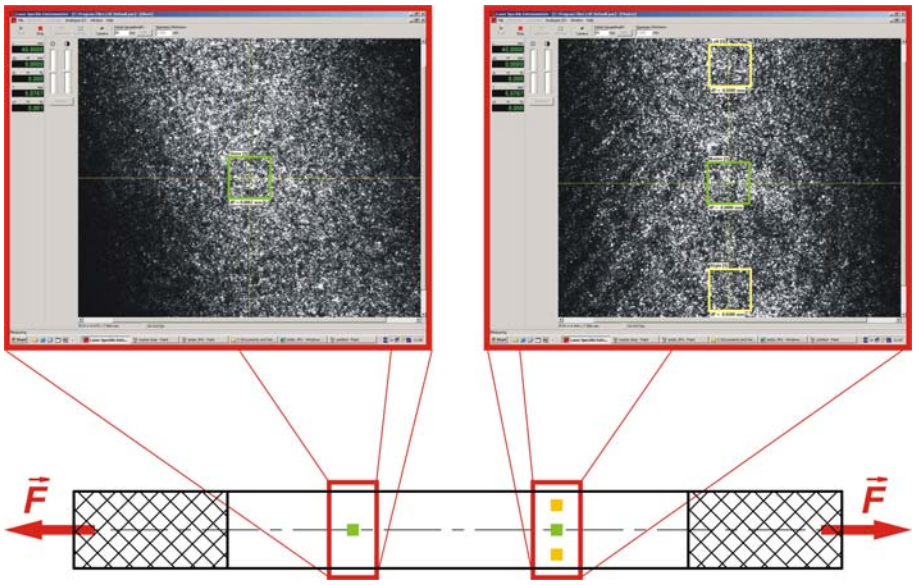
Slika 2.5 Eksperimentalno određivanje svojstava vlaknima ojačanih kompozita, LEM

Deformacija epruvete izračunava se iz mjerenja relativnog pomaka dviju odabranih točaka na epruveti, a za to se koriste tzv. ekstenziometri. Postoji više vrsta ekstenziometara, od običnih elektrootpornih mjernih traka preko mehaničkih, zrcalnih i dr. od kojih svi imaju specifične prednosti i nedostatke. Razvojem digitalnih kamera visoke razlučivosti i brzog prijenosa podataka, u kombinaciji sa snažnim algoritmima za analizu slike, nastala je nova generacija ekstenziometara gdje se ističu dva osnovna tipa: videoekstenziometar (*videoextensometer*) i laserski ekstenziometar (*laser speckle extensometer*). U ovom radu deformacije materijala mjerene su laserskim ekstenziometrom (slika 2.5).

Za vrijeme rada laserskog ekstenziometra, koherentno lasersko svjetlo obasjava površinu epruvete dok kamera snima refleksiju s površine. Zbog hrapavosti površine dolazi do pojave interferencije zraka svjetlosti, te se na slici vidi zrnata struktura nasumično

osvijetljenih piksela (eng. *laser speckle effect*). Svaka promatrana grupa piksela (*faseta*) ima jedinstveni uzorak, poput otiska prsta, čija je putanja po slici u korelaciji s razvlačenjem materijala.

Za ovu vrstu ispitivanja korištene su dvije kamere (slika 2.6). U središnjem dijelu prve kamere postavljena je faseta koja snima uzdužno pomicanje materijala, a u drugoj kameri postavljene su tri fasete tako da središnja mjeri uzdužne pomake materijala, dok dvije bočne mjere poprečne pomake.



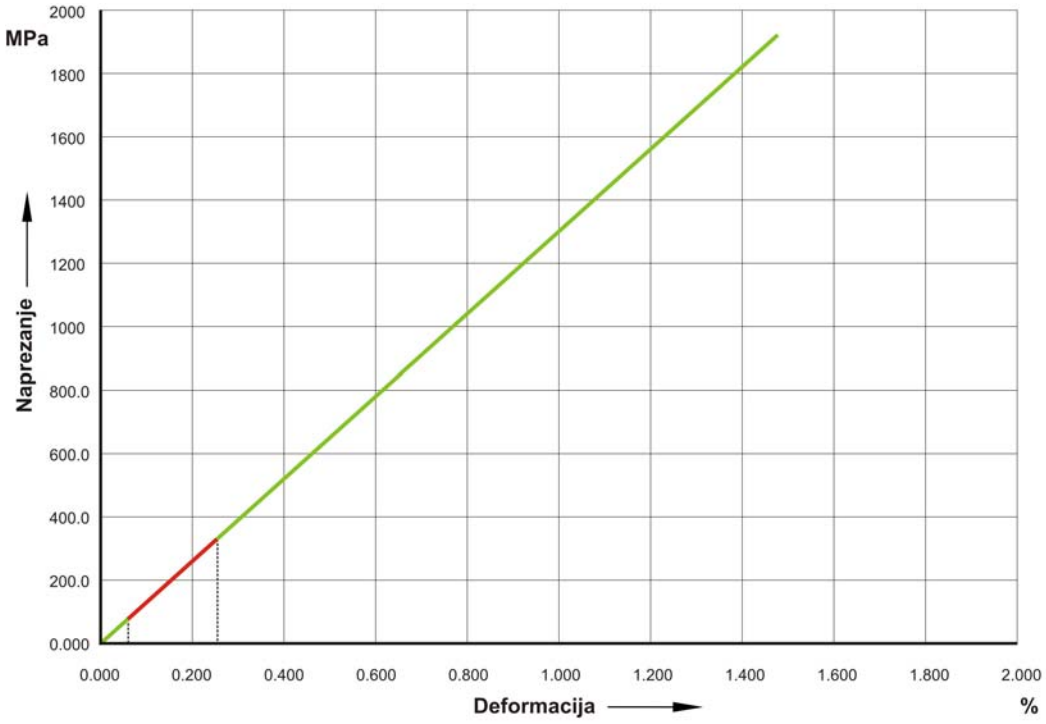
Slika 2.6 Princip rada laserskog ekstenziometra

Izračun deformacija računa se prema izrazu

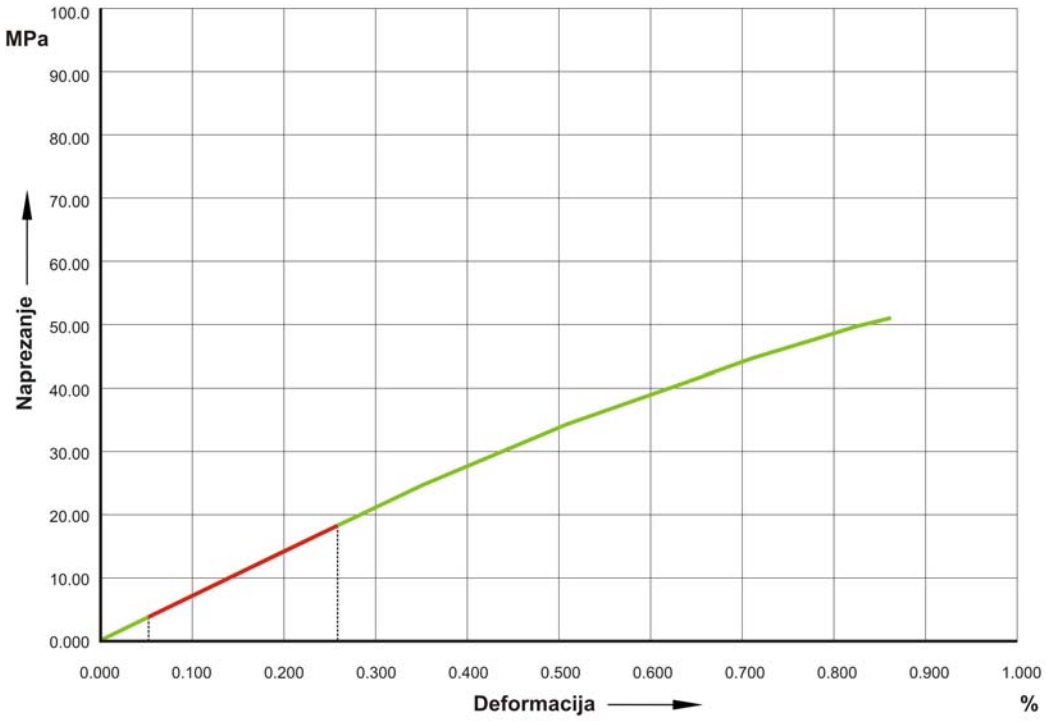
$$\varepsilon = \frac{\Sigma d_1 - \Sigma d_2}{l_0} \tag{2.16}$$

gdje je Σd_i zbroj pomaka svih piksela unutar promatrane fasete u promatranom smjeru, a l_0 početna udaljenost središta faseta.

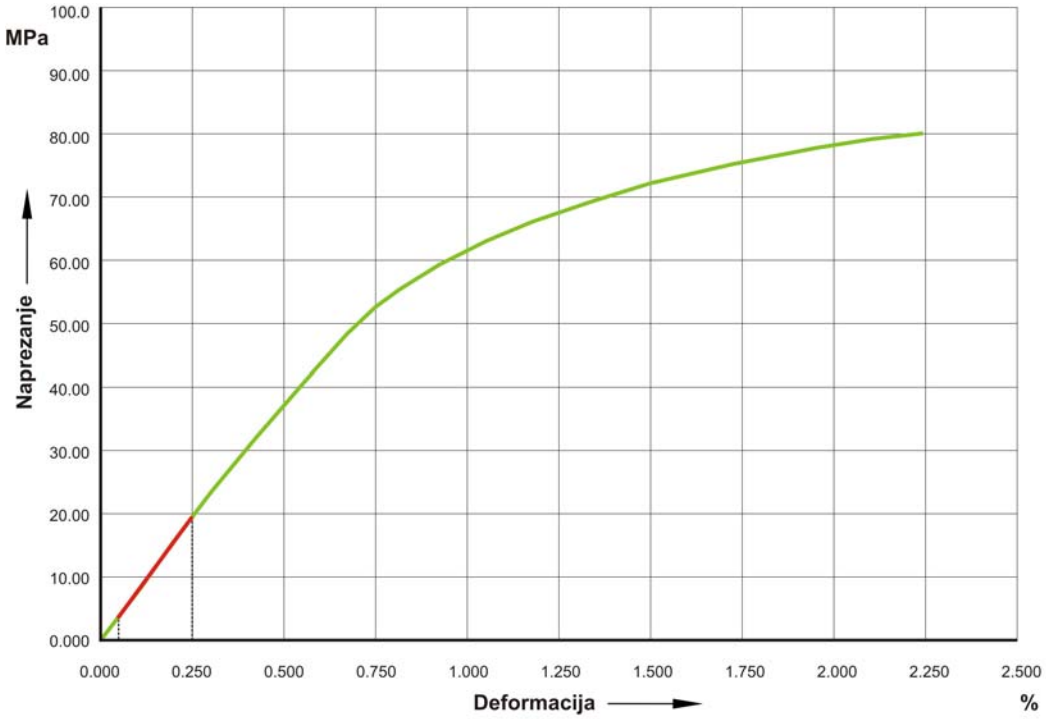
Na slikama 2.7 – 2.9 prikazani su rezultati ispitivanja CFRP kompozita u obliku dijagrama *naprezanje – deformacija* dok su na slici 2.10 prikazani rezultati ispitivanja na *Araldit B*.



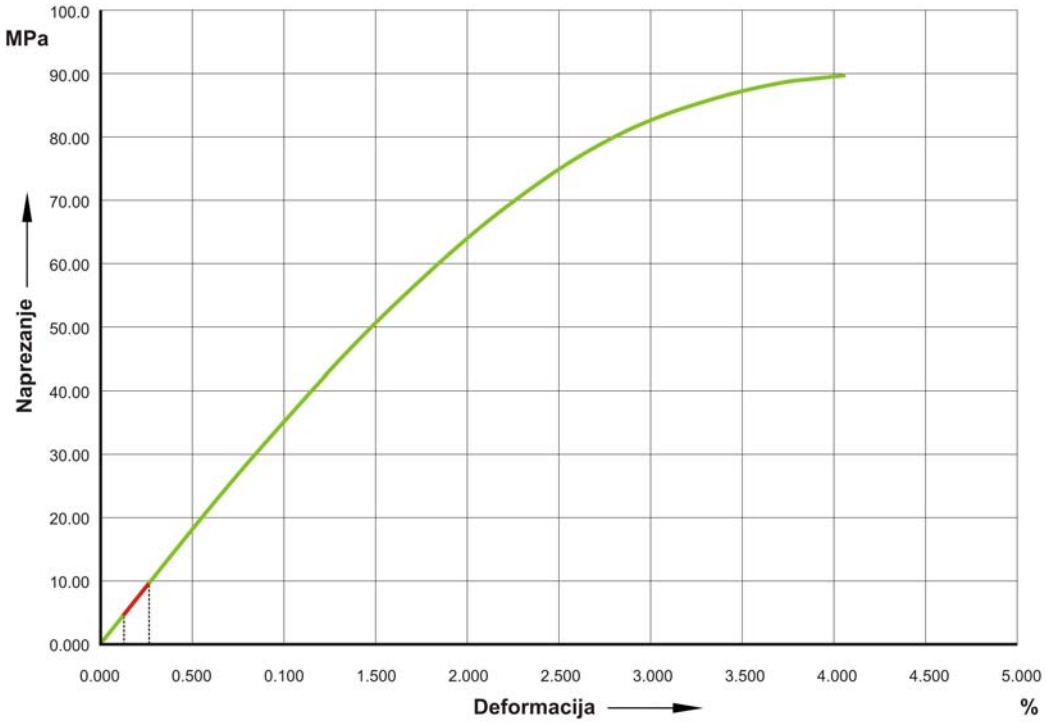
Slika 2.7 Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru vlakana (epruveta 1)



Slika 2.8 Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru okomitom na smjer vlakana (epruveta 2)



Slika 2.9 Dijagram σ-ε CFRP kompozita opterećenog u smjeru 45° u odnosu na smjer vlakana (epruveta 3)



Slika 2.10 Dijagram σ-ε Araldita B

Iz dijagrama 2.7 vidljivo je linearno elastično ponašanje kompozitnog materijala opterećenog u smjeru vlakana sve do prekidne čvrstoće, za razliku od dijagrama 2.8 i 2.9 gdje se vidi utjecaj polimerne matrice koja izaziva nelinearnost u dijagramima. Inženjerske konstante elastičnosti izračunavaju se prema preporukama navedenih normi.

Moduli elastičnosti: ISO norme preporučuju određivanje modula elastičnosti u području deformacije $0,0005 < \varepsilon < 0,0025$ koje je u dijagramima naglašeno crvenom bojom, a mogu se odrediti kao tangentni, sekantni ili regresijski moduli elastičnosti. Tangentni modul elastičnosti matematički predstavlja nagib tangente u odabranoj točki dijagrama, sekantni modul elastičnosti je nagib pravca provučenog kroz dvije odabrane točke, dok je regresijski modul elastičnosti nagib pravca interpoliranog kroz sve mjerne točke unutar zadanog područja. Za uređaje čiji softver to dozvoljava, norma preporučuje određivanje regresijskog modula elastičnosti, što je i ovdje slučaj.

Poissonovi faktori: Kod anizotropnih materijala nije neuobičajeno da Poissonov faktor ν_{21} bude manji od 0.01. Zbog tog se određuje ν_{12} (*eng. major Poisson ratio*), a ν_{21} se preračunava prema izrazu (2.13). Ovim postupkom nije moguće odrediti ν_{23}, pa je on odabran u dogovoru sa proizvođačem. ν_{12} je određen kao srednja vrijednost svih mjernih rezultata u području $0.0005 < \varepsilon < 0.0025$, prema izrazu (slika 2.3)

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{y1}}{\varepsilon_{x1}} \tag{2.17}$$

Modul smičnosti: Mjerenjem na epruveti 3 određuje se modul elastičnosti materijala $\overline{E}_x$ u smjeru 45° u odnosu na smjer vlakana. Transformacijskim formulama (2.11) i prema oznakama na slici 2.3 vrijedi

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{4}{\overline{E}_x} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_1} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) \tag{2.18}$$

Rezultati mjerenja na CFRP kompozitu dani su u tablici 2.3. U daljnjem tekstu materijal s ovim izmjerenim svojstvima imat će oznaku CFRP131. Modul elastičnosti i Poissonov faktor za *Araldit B* su: E=3,48 GPa, ν=0,38.

Tablica 2.3: Inženjerske konstante elastičnosti CFRP kompozita

Materijal	E_1, GPa	E_2, E_3, GPa	G_{12}, GPa	ν_{12}	ν_{21}	ν_{23}
CFRP131	131	12	18	0,29	0,0265	0,34

3

Analiza naprezanja i deformacija u modelu

Za simulaciju optičkog efekta kaustike u refleksijskom postavu potrebno je matematički opisati deformaciju prednje plohe modela s koje se reflektira svjetlo. U ovom poglavlju prikazano je analitičko rješenje djelovanja koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu, prošireno je na djelovanje cilindričnog utiskivača, a isti je problem riješen i numerički, metodom konačnih elemenata.

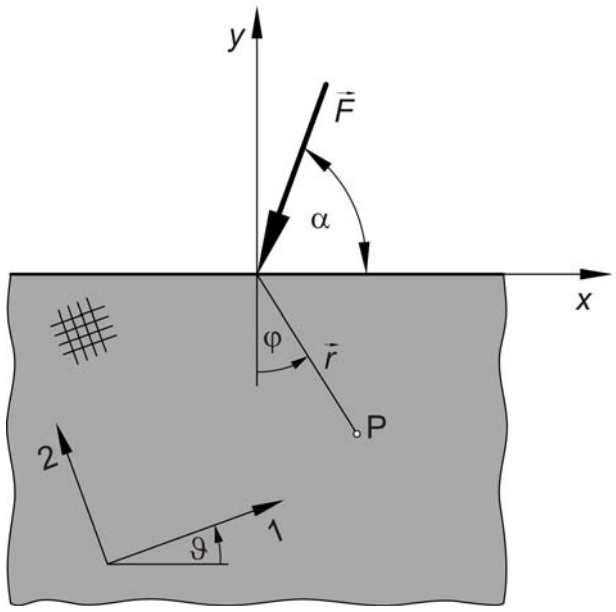
Korištene su pretpostavke linearno elastičnog materijala i malih deformacija. U novijoj literaturi, kao što je npr. [40], i [41], mogu se pronaći vrlo složena rješenja. Međutim, daljnje proširenje analitičkog rješenja vodilo bi u prostorno stanje naprezanja i u područje neelastičnih svojstava materijala [42], [43] i [44]. Elegantniji način dobivanja istih rezultata je primjena metode konačnih elemenata čiji su rezultati prikazani u posljednjem dijelu ovog poglavlja. Vrijednost analitičkog rješenja je u zadržavanju eksplicitne i derivabilne forme što će biti iskorišteno u kasnijim razmatranjima. Kod opisa djelovanja cilindričnog utiskivača, dobije se deformacija prednje plohe u obliku diskretiziranih točaka kroz koje treba interpolirati plohu da bi se u simulaciji optičkog efekta mogle računati potrebne parcijalne derivacije.

3.1 Djelovanje koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu

Analitičko rješavanje problema kod anizotropnih materijala počelo se intenzivno istraživati 50-ih i 60-ih godina prošlog stoljeća zajedno s razvojem kompozitnih materijala čija su svojstva s makromehaničkog stanovišta u pravilu anizotropna. Tada su se već poznati problemi teorije elastičnosti počeli proširivati na anizotropne materijale.

Djelovanju koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu u izotropnom području odgovaraju Michellov problem i Flamantov problem [45].

Poznato je iz teorije elastičnosti da se komponente tenzora naprezanja mogu izraziti preko funkcije naprezanja U, koja je u ravninskim problemima poznata kao *Airyjeva funkcija naprezanja*. Funkcija naprezanja može biti bilo koja funkcija koja zadovoljava jednadžbe ravnoteže, uvjete kompatibilnosti i rubne uvjete. Kako kod vrška pukotine, tako i na mjestu djelovanja koncentrirane sile javlja se singularnost u funkciji naprezanja. Za njeno opisivanje dobrom se pokazala upotreba kompleksne varijable. N. I. Muskhelishvili ju je upotrijebio za izotropne materijale, dok su Mossakowski [46] i Lekhnitskii [7] isto rješenje proširili na opću anizotropnu poluravninu. To rješenje je osnova analitičkog izvoda kaustike, a ovdje je prikazano u sažetom obliku.



Slika 3.1 Djelovanje koncentrirane sile na anizotropnu poluravninu

Na slici 3.1 prikazane su definicije koordinatnih sustava i fizikalnih veličina koje će biti korištene u radu. Po potrebi će se koristiti Decartesov koordinatni sustav s kordinatama x, y ili polarni koordinatni sustav s kordinatama r, φ. Koordinatne osi *1* i *2* su glavne osi ortotropije materijala zakrenute za kut ϑ u odnosu na x, y koordinatni sustav.

Za ravninske probleme, komponente tenzora naprezanja različite od nule mogu se izraziti funkcijom naprezanja $U(x,y)$. Tada vrijedi:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{3.1}$$

Ako se na uvjet kompatibilnosti

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{3.2}$$

primjeni izraz (2.5) i izraz (3.1), tada se može napisati:

$$S_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - 2S_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + (2S_{12} + S_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2S_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + S_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0. \tag{3.3}$$

Prethodni izraz predstavlja diferencijalnu jednadžbu četvrtog reda, koju se najlakše rješavati pomoću karakteristične jednadžbe. Neka se rješenje jednadžbe (3.3) može zapisati u obliku:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U(x, y) = 0, \tag{3.4}$$

pri čemu je

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Množenjem operatora u jednadžbi (3.5) te usporedbom s jednadžbom (3.3) dobije se

$$\begin{aligned}
&\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = S_{22} / S_{11}, \\
&\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_3\mu_4 + \mu_3\mu_4\mu_1 + \mu_4\mu_1\mu_2 = 2S_{26} / S_{11}, \\
&\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_4 + \mu_4\mu_1 = (2S_{12} + S_{66}) / S_{11}, \\
&\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 2S_{16} / S_{11}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Lijeva strana jednadžbe (3.6) upravo je takvog oblika da se može zaključiti kako su μ_k korijeni jednadžbe četvrtog reda

$$S_{11}\mu_k^4 - 2S_{16}\mu_k^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu_k^2 - 2S_{26}\mu_k + S_{22} = 0. \tag{3.7}$$

Jednadžba (3.7) se u literaturi naziva *karakteristična jednadžba*. Lekhnitskii [7] je dokazao da su korijeni karakteristične jednadžbe uvijek kompleksni brojevi

$$\mu_1 = \alpha + i\beta, \quad (\beta>0) \qquad \mu_3 = \overline{\mu}_1, \tag{3.8}$$

$$\mu_2 = \gamma + i\delta\,, \quad (\delta>0) \qquad\qquad \mu_4 = \overline{\mu}_2\,. \tag{3.9}$$

Definiraju li se funkcije $\Phi_1(z_1)$ i $\Phi_2(z_2)$ s kompleksnim varijablama

$$z_1 = x + \mu_1 y \tag{3.10}$$

$$z_2 = x + \mu_2 y \tag{3.11}$$

tada se funkcija naprezanja može napisati u obliku [47]

$$U(x,y) = 2\,\mathrm{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)]\,. \tag{3.12}$$

Funkcije kompleksne varijable za djelovanje kose sile na ploču općih anizotropnih svojstava glase [7]

$$\Phi_1^{''}(z_1) = \frac{F}{2\pi\,\mathrm{i}(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{-\mu_2 \sin\alpha - \cos\alpha}{z_1} \tag{3.13}$$

$$\Phi_2^{''}(z_2) = \frac{F}{2\pi\,\mathrm{i}(\mu_2 - \mu_1)} \cdot \frac{\mu_1 \sin\alpha + \cos\alpha}{z_2}\,. \tag{3.14}$$

Sila F i kut njenog nagiba α odgovaraju slici 3.1. Komponente naprezanja određuju se prema (3.1)

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^2\Phi_1^{''}(z_1) + \mu_2^2\Phi_2^{''}(z_2)]\,, \tag{3.15}$$

$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}[\Phi_1^{''}(z_1) + \Phi_2^{''}(z_2)]\,, \tag{3.16}$$

$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1^{''}(z_1) + \mu_2\Phi_2^{''}(z_2)]\,, \tag{3.17}$$

gdje je $\Phi_k^{''}(z_k)$ druga derivacija funkcije $\Phi_k(z_k)$, s obzirom na varijablu z_k.

Stanje naprezanja kod kontaktnih problema zgodnije je prikazati u polarnim koordinatama. Koordinatne osi r, φ (slika 3.1) zakrenute su u odnosu na osi x, y za kut $-(\pi/2-\varphi)$, pa matrica transformacije glasi:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2-\varphi) & \cos(\pi-\varphi) \\ \cos\varphi & \cos(\pi/2-\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Komponente naprezanja u novom polarnom koordinatnom sustavu dobiju se prema formuli za transformaciju tenzora

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \qquad i,j,p,q = 1,2. \tag{3.19}$$

Također vrijedi:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\varphi, \\ y &= -r \cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Korištenjem izraza (3.13 - 3.20) dobije se konačno rješenje

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{FS_{11}}{r\,\pi L(\varphi)}\left[(a\sin\varphi + b\cos\varphi)\sin\alpha + ((\beta+\delta)\sin\varphi + a\cos\varphi)\cos\alpha\right], \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje su

$$\begin{aligned} L(\varphi) = {} & S_{11}\cos^4\varphi + 2S_{16}\sin\varphi\cos^3\varphi + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \\ & + 2S_{26}\sin^3\varphi\cos\varphi + S_{22}\sin^4\varphi \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$a = \alpha\delta + \gamma\beta\,, \tag{3.23}$$

$$b = (\alpha^2 + \beta^2)\delta + (\gamma^2 + \delta^2)\beta\,. \tag{3.24}$$

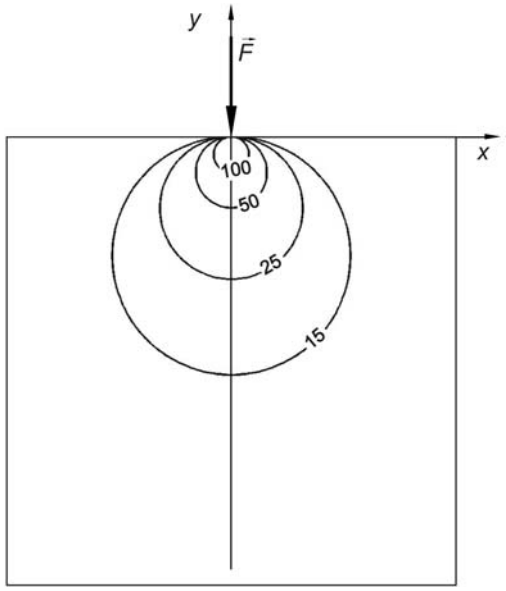
Koeficijenti α, β, γ, i δ realni su i imaginarni dijelovi korijena karakteristične jednadžbe μ_k u izrazima (3.8) i (3.9).

Iz rješenja (3.21) može se vidjeti kako je samo jedna komponenta naprezanja različita od nule, iako je rješenje izvedeno za uvjete kosog opterećenja i proizvoljno zakrenute glavne osi ortotropije. Iznos komponente naprezanja σ_r obrnuto je proporcionalan udaljenosti od mjesta djelovanja koncentrirane sile.

Odabirom izotropnog materijala širine b te normalne sile, izraz (3.21) postaje rješenje Flamantovog problema

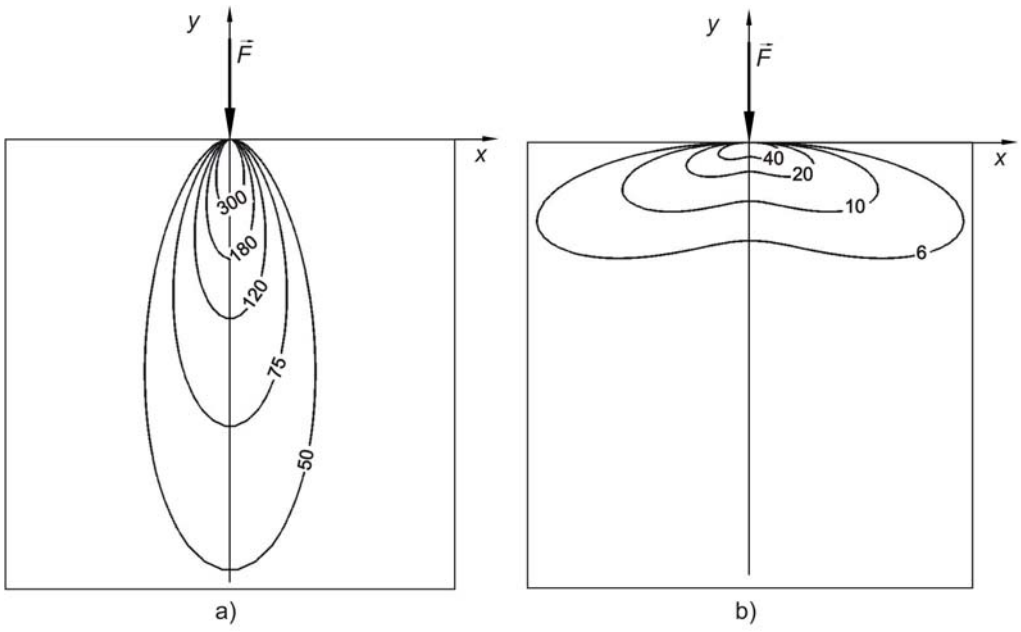
$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2F}{\pi}\cdot\frac{\cos\varphi}{b\,r}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{r\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Linije konstantnih naprezanja ($\sigma_r = konst.$) u tom slučaju su kružnice koje tangiraju mjesto kontakta i čije je središte na pravcu djelovanja sile (slika 3.2).



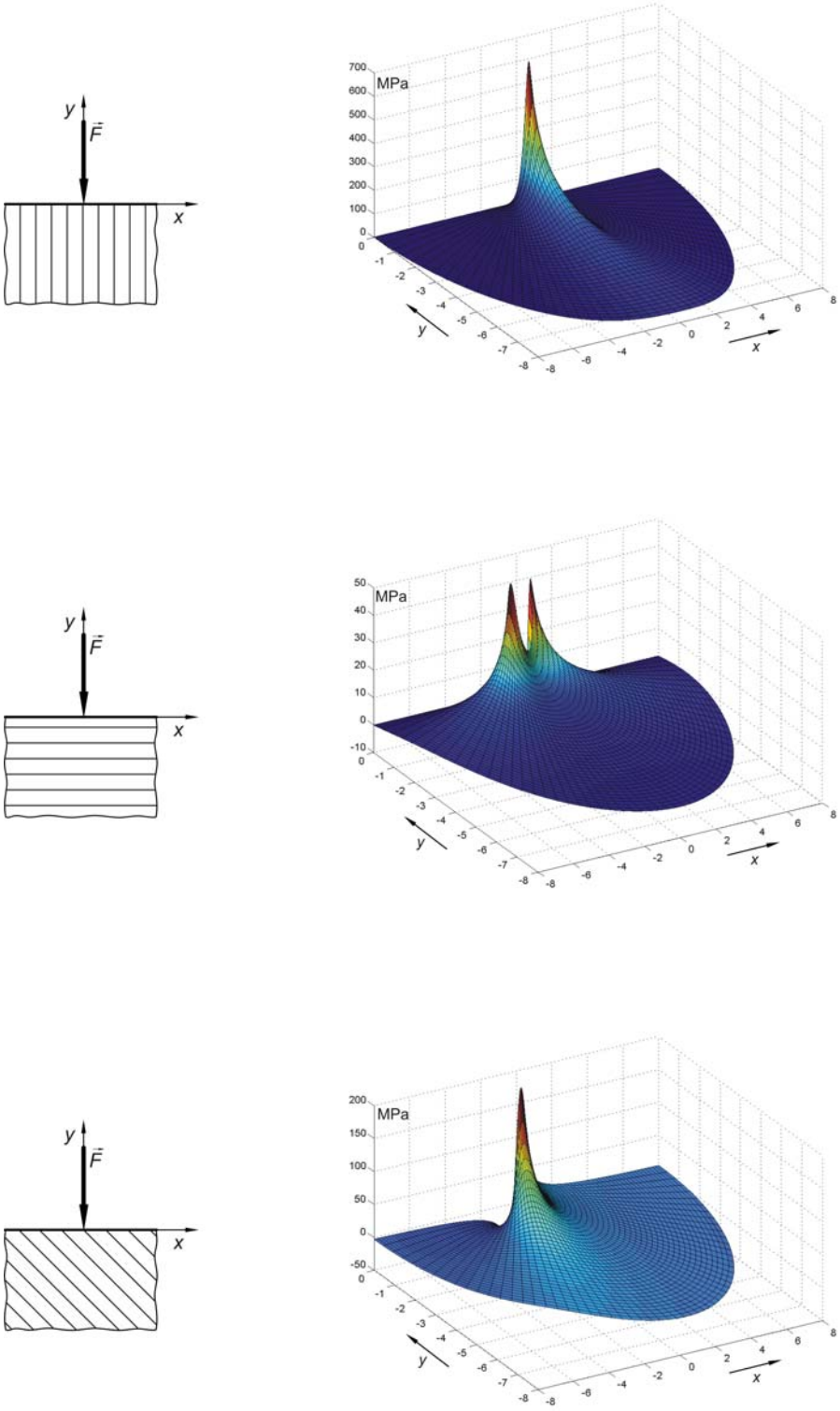
Slika 3.2 Linije konstantnih naprezanja, MPa, Araldit B, *F*=100 N.

Kod anizotropne poluravnine, linije konstantnih naprezanja ovise o orijentaciji materijala, a teorijski mogu poprimiti tri karakteristična oblika [7], od kojih su dva prikazana slikom 3.3. Na slici 3.3b može se primijetiti kako, kada sila djeluje u smjeru okomitom na smjer vlakana, maksimalne vrijednosti naprezanja nisu na pravcu djelovanja sile.



Slika 3.3 Linije konstantnih naprezanja, MPa CFRP131 kompozit, *F*=100 N.
a) sila djeluje u smjeru vlakana i b) sila djeluje okomito na smjer vlakana

Trodimenzionalna raspodjela naprezanja prikazana je slikom 3.4. Samo mjesto kontakta zbog singularnosti rješenja izuzeto je iz grafova.



Slika 3.4 Trodimenzionalni prikaz raspodjele naprezanja u CFRP131 kompozitu, F=100 N

Optički efekt koji se javlja na zaslonu posljedica je zakrivljenja prednje plohe modela pod opterećenjem. Ta zakrivljenost može se opisati funkcijom $Z(x, y, u_z)$, gdje je u_z pomak točaka površine modela u smjeru osi z. Za slučaj malih deformacija vrijedi

$$u_z = \frac{h}{2}\varepsilon_z , \tag{3.26}$$

gdje je h debljina modela.

Poprečna deformacija za slučaj ravninskog stanja naprezanja određuje se prema Hookeovu zakonu

$$\varepsilon_z = S_{31}\sigma_x + S_{32}\sigma_y + S_{36}\tau_{xy} \ . \tag{3.27}$$

Prelaskom na polarne koordinate, pri čemu je samo komponenta σ_r različita od nule, dobije se

$$\varepsilon_z = \sigma_r(S_{31}\sin^2\varphi + S_{32}\cos^2\varphi - S_{36}\sin\varphi\cos\varphi) , \tag{3.28}$$

odnosno

$$u_z = \frac{1}{2}\sigma_r h(S_{31}\sin^2\varphi + S_{32}\cos^2\varphi - S_{36}\sin\varphi\cos\varphi) . \tag{3.29}$$

Vrijednost izraza (3.29) je u eksplicitnoj i derivabilnoj formi, što će biti iskorišteno u kasnijim razmatranjima.

3.2 Djelovanje cilindričnog utiskivača

3.2.1 Analitičko rješenje

Analitičko rješenje djelovanja cilindričnog utiskivača na anizotropnu poluravninu moguće je dobiti ako se koncentrirana sila zamijeni odgovarajućom raspodjelom pritiska ([48], [49]). Pri tome se ne može primijeniti klasična Hertzova teorija koja vrijedi samo za izotropne materijale, nego odgovarajuće rješenje u sebi mora sadržavati informaciju o orijentaciji materijala ([50], [51]), što bitno utječe na iznos maksimalnog pritiska i širinu kontaktne zone. Eksplicitno rješenje raspodjele pritiska na mjestu djelovanja cilindričnog utiskivača dali su Fan i Hwu [52]:

$$p(x) = \frac{2\sin(\delta\pi)}{(\beta+\bar{\beta})R}\left(b-x\right)^{\delta}\,(x+a)^{1-\delta}, \tag{3.30}$$

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\arg(-\frac{\bar{\beta}}{\beta}), \tag{3.31}$$

$$a^2 = \frac{\delta(\beta+\bar{\beta})R\,F_N}{\pi(1-\delta)}, \tag{3.32}$$

$$b^2 = \frac{(1-\delta)(\beta+\bar{\beta})R\,F_N}{\pi\delta}, \tag{3.33}$$

gdje a i b predstavljaju širinu kontaktne zone lijevo i desno od osi y, R je polumjer cilindričnog utiskivača, β je parametar koji nosi informaciju o svojstvima i orijentaciji materijala, a δ označava asimetričnost raspodjele pritiska s obzirom na os y. Vrijednosti parametra δ nalaze se u granicama $0< \delta <1$. U slučaju djelovanja normalnog opterećenja, parametar δ poprima vrijednost 0.5 i raspodjela pritiska je simetrična, dok u slučaju djelovanja kosog opterećenja raspodjela postaje asimetrična.

Za izračun parametra β Dongye i Ting [53] koriste Barnett-Lotheove tenzore:

$$\beta = \frac{1}{L_{22}^{(1)}L_{22}^{(2)}}\left[L_{22}^{(1)} + L_{22}^{(2)} + if\,(S_{12}^{(1)}L_{22}^{(2)} - S_{12}^{(2)}L_{22}^{(1)}\right] \tag{3.34}$$

Gornji indeksi redom pokazuju koji se koeficijenti odnose na utiskivač odnosno na kompozitnu ploču.

Postoje tri Barnett-Lotheova tenzora (***S***, ***H*** i ***L***) i često se koriste pri rješavanju problema teorije elastičnosti anizotropnih materijala. Njihovi koeficijenti izračunavaju se iz tenzora elastičnosti. Koeficijenti potrebni za određivanje faktora β izračunavaju se prema sljedećim izrazima

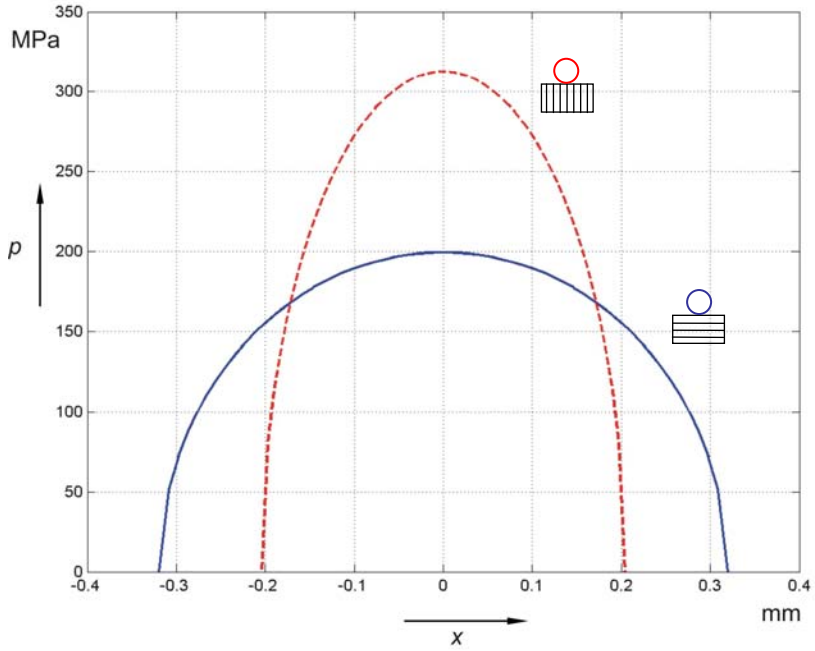
$$S_{21} = \left(\frac{C_{66}(\sqrt{C_{11}C_{22}} - C_{12})}{C_{22}(C_{12}+2C_{66}+\sqrt{C_{11}C_{22}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.35}$$

$$S_{12} = -\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}}S_{21}, \tag{3.36}$$

$$L_{11} = \left(C_{12} + \sqrt{C_{11}C_{22}}\right)S_{21}, \tag{3.37}$$

$$L_{22} = \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}} L_{11}\,. \tag{3.38}$$

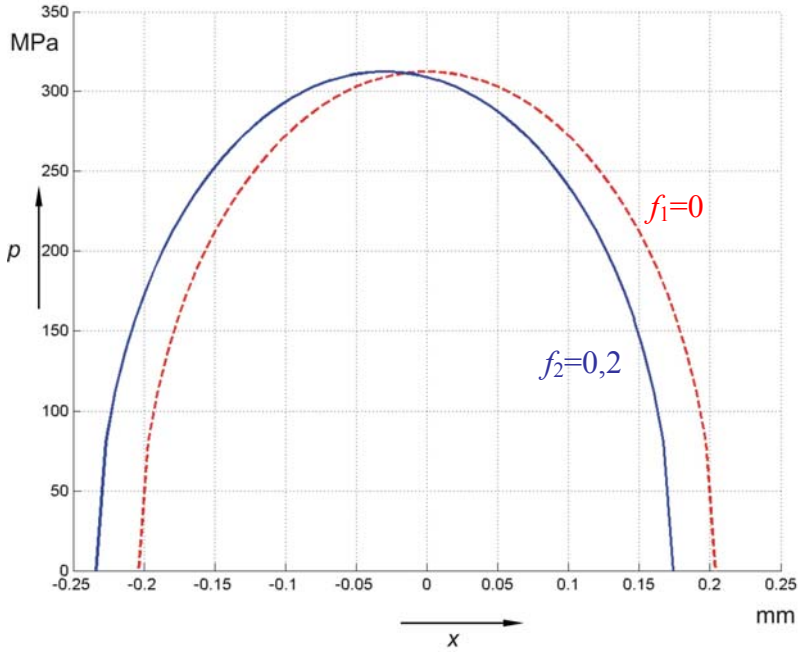
Na slici 3.5 prikazana je raspodjela pritiska za različitu orijentaciju materijala na CFRP131 kompozitu.



Slika 3.5 Raspodjela pritiska na kompozitnoj ploči u ovisnosti o smjeru vlakana. (normalno opterećenje, F= 100 N, R= 10 mm)

Iz slike je vidljiv velik utjecaj orijentacije materijala na raspodjelu pritiska. Uz promjenu maksimalnog iznosa mijenja se i širina kontaktne zone, pri čemu, naravno, površina ispod krivulje ostaje jednaka ukupnoj sili opterećenja. Fizikalno je lako predočiti da, u slučaju kada su vlakna usmjerena u smjeru djelovanja sile (crvena linija), ona preuzimaju velik dio opterećenja, zbog čega je deformacija površine manja, a time je manja i širina kontaktne zone. U slučaju kada su vlakna položena okomito na smjer djelovanja sile, krutost materijala je manja, što rezultira širom kontaktnom zonom, odnosno manjim maksimalnim pritiskom.

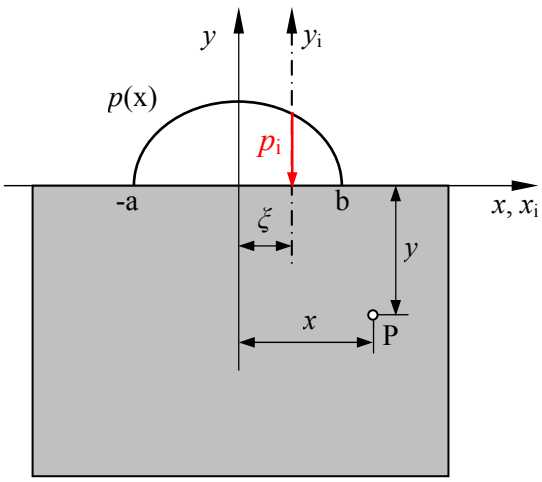
Nagib opterećenja u simulacijama može se regulirati promjenom iznosa koeficijenta trenja f. U praksi, osim u slučajevima djelovanja adhezijskih ili kohezijskih sila, maksimalan iznos ograničen je kapacitetom površina koje prenose horizontalnu silu.



Slika 3.6 Raspodjela pritiska na kompozitnoj ploči u ovisnosti o nagibu opterećenja (f_1=0, f_2=0.2 F= 100 N, R= 10 mm)

Nagib sile dovodi do horizontalnog pomaka krivulje (slika 3.6) te do pojave blage asimetričnosti u odnosu na os y.

Djelovanje tlaka p_i na infinitenzimalno maloj površini $d\xi$ (slika 3.7) odgovara djelovanju koncentrirane sile, pa se naprezanja mogu izračunati prema izrazu (3.21).

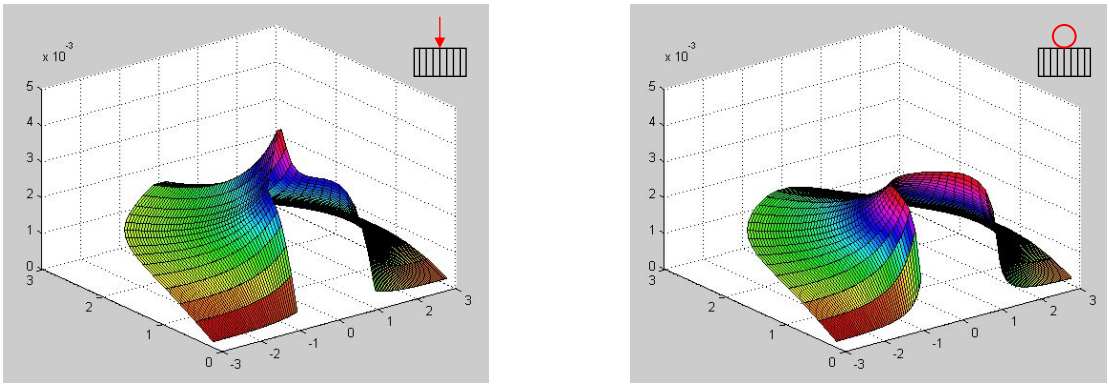


Slika 3.7 Djelovanje cilindričnog utiskivača na ortotropnu ploču

Ukupno rješenje može se dobiti dovođenjem rezultata u zajednički koordinatni sustav, te primjenom metode superpozicije:

$$\sigma_{mn}(x,y) = \int_{-a}^{b} \sigma_{mn}^{i}(x-\xi,y)\,d\xi\,. \tag{3.39}$$

Rješavanje gornjeg integrala dugotrajan je i mukotrpan posao. Numerička tehnika zamjene diferencijala $d\xi$ sa inkrementom $\Delta\xi$ omogućuje jednostavnu numeričku simulaciju rješenja. Slika 3.8 pokazuje razliku u poprečnoj deformaciji u blizini mjesta kontakta kada je opterećenje u obliku koncentrirane sile i cilindričnog utiskivača.



a) b)

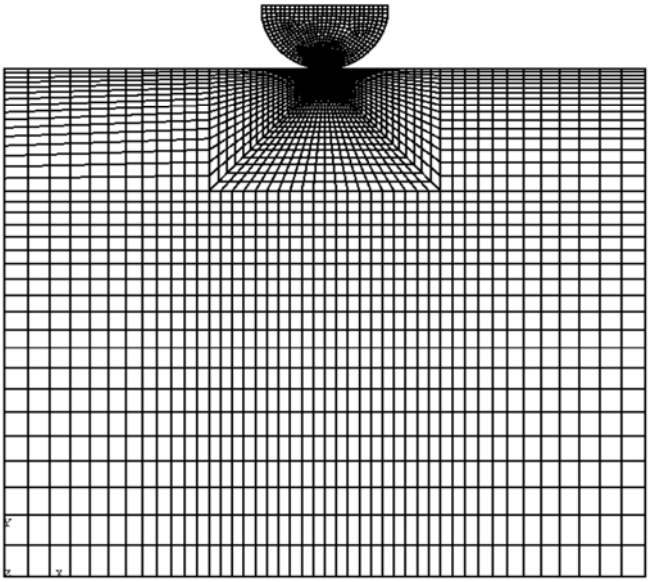
Slika 3.8 Poprečna deformacija modela (ε_z): opterećenje koncentriranom silom (a), opterećenje cilindričnim utiskivačem (b), R= 10 mm, F=100 N.

Pomaci okomiti na prednju površinu modela određuju se prema izrazu (3.29). Ovdje treba voditi računa o tome da se prilikom numeričkog rješavanja jednadžbe (3.39) izgubila analitička forma rješenja. Za simulaciju optičkog efekta kaustike potrebne su parcijalne derivacije prednje plohe modela. Zbog toga interpolirana ploha kroz numerički dobivene točke $P_i(x, y, u_z)$. Korištena je funkcija interpolacije *spap2* programskog paketa MATLAB, a za oblik funkcije odabran je polinom 4. reda.

3.2.2 Numeričko rješenje

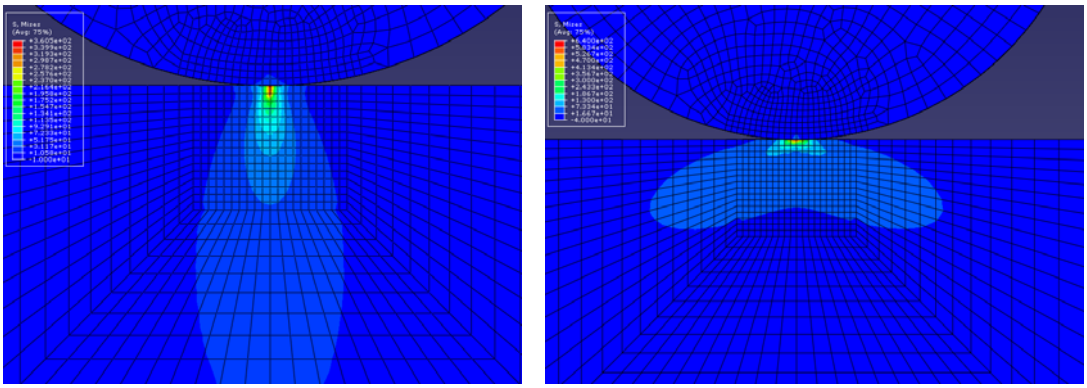
Numeričko rješenje stanja naprezanja i deformacija dobiveno je pomoću programskog paketa ABAQUS [54], [55]. Materijalna tijela su diskretizirana paraboličnim heksaedarskim elementima tipa *C3D20* prema slici 3.9. Veća gustoća čvorova postavljena je na mjestu unutar kojeg se pojavljuje optički efekt kaustike. Kontakt je u narmalnom smjeru definiran kao *hard contac*t, a u tangencijalnom smjeru je odabrana opcija *penalty* s

faktorom trenja μ=0.2. Na donjem rubu modela spriječeni su pomaci čvorova u sva tri smjera, sila utiskivanja zadana je na gornjoj površini utiskivača u obliku pritiska.



Slika 3.9 Mreža konačnih elemenata, pogled s prednje strane modela

Na slici 3.10 prikazani su rezultati naprezanja za različito usmjerena vlakna. Nakon numeričke analize, u tekstualnu datoteku spremaju se koordinate čvorova prednje površine modela koji se učitavaju u programski paket MATLAB i kroz koje se provlači ploha metodom najmanjih kvadratnih odstupanja. Analitički zapis plohe koristi se u simulaciji optičkog efekta kaustike identično kao analitičko rješenje djelovanja koncentrirane sile.



a) b)

Slika 3.10 Raspodjela ekvivalentnih naprezanja, CFRP131 kompozit, F=100 N.
a) sila djeluje u smjeru vlakana i b) sila djeluje okomito na smjer vlakana

4

Teorija kontaktne kaustike

Na ravninskom modelu, u području djelovanja kontaktnih sila dolazi do koncentracije naprezanja i pojave velikih poprečnih deformacija. Ako se to područje osvijetli homogenim snopom svjetla, prozirni modeli djelovati će poput leće, a neprozirni poput zakrivljenog zrcala na optički put zraka svjetla. Djelovanjem tlačnih sila, zbog Poissonovog faktora dolazi do ispupčenja materijala, pa efekt odgovara konvergentnim lećama, odnosno konveksnom zrcalu. Na zaslonu svjetlosno polje više nije homogeno, javlja se tamno područje okruženo koncentriranim zrakama svjetla. Kaustikom se naziva rub oko tamnog područja gdje je koncentracija svjetla najveća (grč. *kaustos=spaljen*).

Kod prozirnih modela kaustika se može snimati u prolaznom i u reflektiranom svjetlu. U prolaznom svjetlu zaslon se postavlja iza modela i snima se realna slika. Kod refleksijskog svjetla zaslon se postavlja ispred modela, a snima se virtualna slika iza modela, isto kao kod promatranja vlastitog odraza u zrcalu. Snimanje realne slike u refleksijskom svjetlu moguće je ako se svjetlo prije zaslona invertira (provuče kroz fokus) pomoću konvergentne leće. Kod neprozirnih materijala, snimanje kaustike moguće je jedino u refleksijskom svjetlu. Za analizu preslikavanja zraka svjetla s modela na zaslon potrebno je poznavati osnovne zakone optike.

4.1 Geometrijska optika

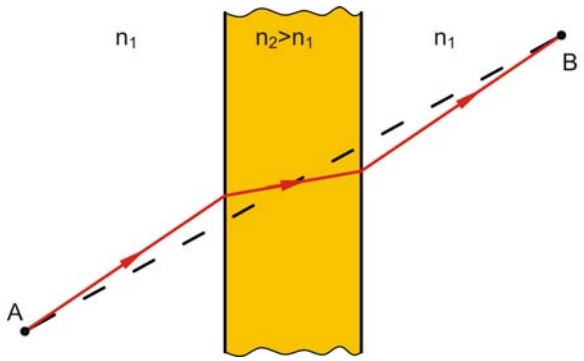
Širenje svjetla kroz prostor opisano je Maxwellovim diferencijalnim jednadžbama. Rješavanjem tih jednadžbi moguće je u svakoj točki prostora odrediti vektor jakosti električnog polja, vektor jakosti magnetskog polja, amplitudu svjetlosnog vala kao i fazu svjetlosnog vala. Dio optike koji proučava svjetlosne pojave na razini elektromagnetnog vala naziva se *fizikalna ili valna optika*. Međutim, u optici postoje brojna područja

primjene gdje te informacije nisu potrebne te se primjenjuje pojednostavljena metoda koja se naziva *geometrijska optika*. Njeni zakoni vrijede kada su objekti i pojave koje se promatraju mnogo veće od valne duljine svjetla. Optička metoda kaustike može se u potpunosti opisati zakonima geometrijske optike.

U geometrijskoj optici uveden je pojam zrake svjetla kao ravnih linija okomitih na valne površine, odnosno na plohe konstantnih faza svjetlosnog vala. Kod točkastog izvora svjetla valne površine su koncentrične sfere, dok su zrake svjetla radijalni polupravci sa ishodištem u izvoru svjetla.

Širenje zrake svjetla kroz prostor definirano je pomoću četiri zakona:

- zakon pravocrtnog širenja svjetlosti,
- zakon neovisnosti svjetlosnih zraka,
- zakon refleksije i
- zakon loma (Snellov zakon).



Slika 4.1 Optički put zrake svjetla kroz prozirne medije različitih indeksa loma

Pierre de Fermat, neobičan i osebujan francuski pravnik i matematičar postavio je u 17. stoljeću princip najmanjeg vremena, koji kaže da će svjetlo putovati od točke A do točke B putanjom kojom mu je potrebno najmanje vremena (slika 4.1). Na osnovu tog principa izvedena su posljednja dva zakona:

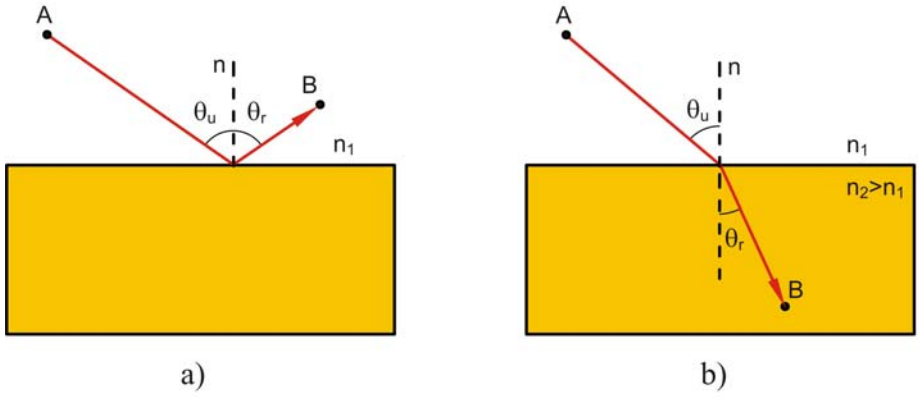
- **zakon refleksije**: Upadna zraka, normala na površinu i reflektirana zraka leže u istoj ravnini (slika 4.2a) i upadni kut jednak je kutu refleksije

$$\theta_u = \theta_r , \tag{4.1}$$

- **zakon loma**: Upadna zraka, normala na površinu i prelomljena zraka leže u istoj ravnini (slika 4.2b). Omjer sinusa upadnog kuta prema sinusu prijelomnog kuta jednak je omjeru njihovih apsolutnih indeksa loma:

$$\frac{\sin\theta_u}{\sin\theta_r} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{4.2}$$

Apsolutni indeks loma karakteristika je medija, a jednak je omjeru brzine svjetla u vakuumu i brzine svjetla u promatranoj sredini.



Slika 4.2 a) refleksija i b) lom zrake svjetla

Pretpostavlja se da je zakon loma prvi formulirao Willebrod van Snell, 1621. godine ali ga nije objavio. Prvi put ga je objavio Rene Descartes u svojoj *Dioptrici* 1637. godine. Izvodi zakona mogu se pronaći u [56], kao i podrobnija objašnjenja prvih dvaju zakona.

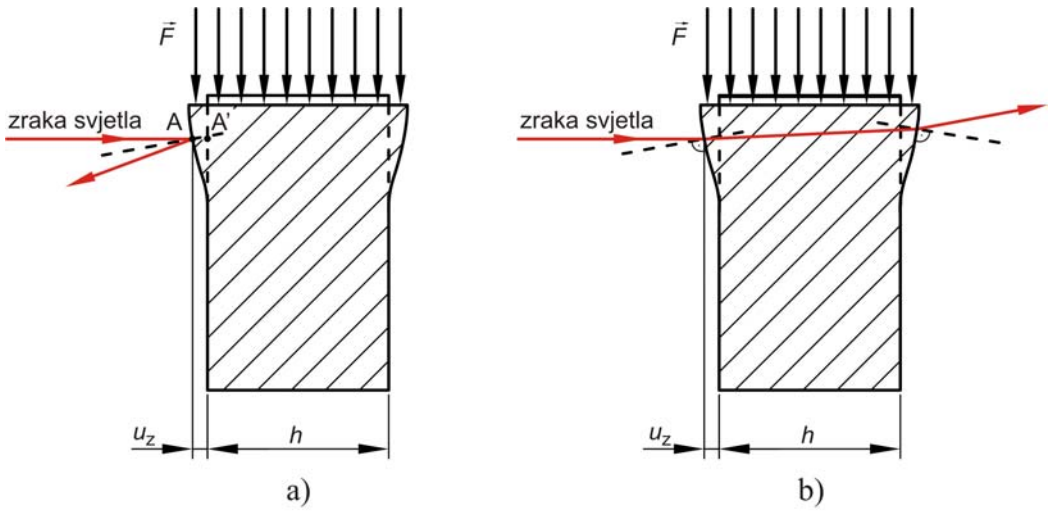
Skup zraka svjetla čini snop svjetla. Snop svjetla kojem se zrake sijeku u jednoj točki naziva se *homocentrični* snop. Ako nakon refleksije i loma homocentrični snop ponovno konvergira u jednu točku, onda ta točka predstavlja lik svijetle točke iz koje izvire homocentrični snop svjetla. Predmet u lik i lik u predmet preslikavaju se pomoću optičkih sustava koji se u osnovnom obliku sastoje od izvora svjetla, predmeta, leća i zaslona. Glavni zadatak geometrijske optike je ispunjavanje uvjeta koji će omogućiti da pri preslikavanju homocentrični snop i dalje ostaje homocentričan, odnosno da lik dobiven preslikavanjem bude vjeran predmetu.

4.2 Formiranje kaustike na zaslonu

Na slici 4.3a prikazana je refleksija zrake svjetla s površine neprozirnog modela. Razlika optičkog puta kod opterećenog i kod neopterećenog modela iznosi

$$\Delta s = s - s' = 2\left|AA'\right| = 2\,u_z(x,y)\,, \tag{4.3}$$

gdje su s optički put zrake svjetla kod neopterećenog, a s' kod opterećenog modela, dok je $u_z(x,y)$ poprečni pomak prednje površine modela. Veličina Δs naziva se retardacija zrake svjetla.

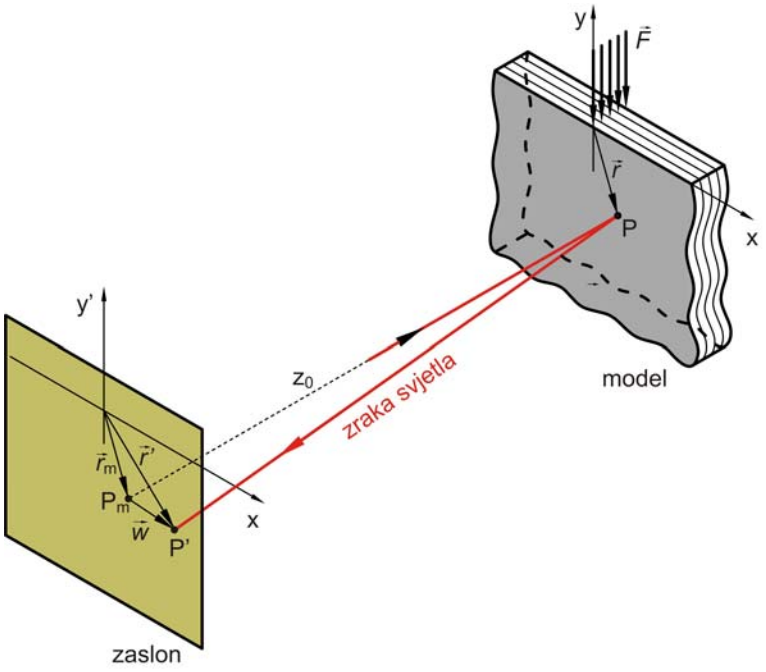


Slika 4.3 a) refleksija zrake svjetla sa prednje površine modela
i b) prolaz zrake svjetla kroz prozirni model

Kod prozirnog modela optički put zrake svjetla prikazan je slikom 4.3b. Upadna zraka svjetla dijelom se reflektira s prednje površine, a dijelom se lomi i ulazi u model. Zatim se ponovno djelomično reflektira sa stražnje površine, a djelomično izlazi iz modela. Pri svakoj refleksiji i lomu zrake svjetla intenzitet svjetla se smanjuje. Teoretski, na prozirnom modelu mogu se snimati kaustike dobivene na tri različita načina: refleksijom s prednje površine, refleksijom sa stražnje površine te nakon prolaska zrake kroz model. Za snimanje kaustike na vršku pukotine Papadopoulos [57] je analizirao sva tri slučaja.
Iz razloga što su kompozitni materijali po svojoj prirodi neprozirni, a radi lakše usporedbe rezultata, na *Araldit B* kao prozirnom materijalu se snima na reflektiranim zrakama s prednje površine. Prema tome će za retardaciju zrake svjetla vrijediti izraz 4.3.

Svjetlosna zraka koja se s modela reflektirala iz točke P, na zaslonu pada u točku P' (slika 4.4). Položaj točke P' može se definirati pomoću vektora položaja

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_m + \vec{w}\,. \tag{4.4}$$



Slika 4.4 Geometrijski uvjeti otklona zrake svjetla

Vektor $\vec{r}_m$ određuje položaj točke P_m na koju bi zraka pala kad bi se reflektirala s ravne površine, dok vektor $\vec{w}$ označava otklon zrake svjetla zbog zakrivljenja površine modela. Za vektor $\vec{w}$, prema zakonu refleksije [13] vrijedi

$$\vec{w} = z_0 grad\,\Delta s = 2z_0 grad\; u_z(x,y)\,, \tag{4.5}$$

gdje je z_0 udaljenost zaslona od modela. Tada je položaj točke na zaslonu definiran kao

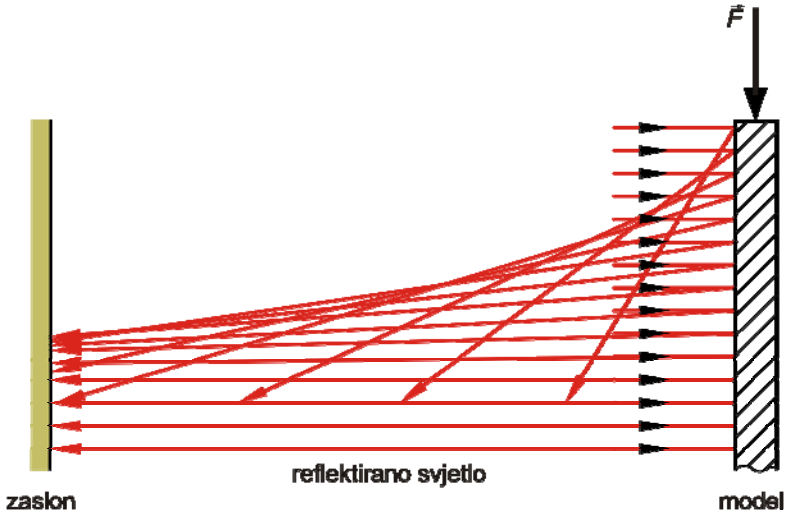
$$\vec{r}\,' = m\,\vec{r} + 2z_0\; grad\; u_z(x,y)\,. \tag{4.6}$$

Faktor povećanja m ovisi o uvjetima osvjetljenja, a može poprimiti sljedeće vrijednosti

$m = 1$ za paralelni snop zraka svjetla,

$m < 1$ za konvergentni snop zraka svjetla,

$m > 1$ za divergentni snop svjetla.



Slika 4.5 Formiranje kaustike na zaslonu

Na slici 4.5 vidi se da u funkciji preslikavanja zraka svjetla s modela na zaslon postoji ekstremna vrijednost, odnosno da na zaslonu postoji tamno područje u koje neće padati zrake svjetla.

Uvrštenjem izraza (3.26) u izraz (4.5) dobije se

$$\vec{r}\,' = m\,\vec{r} + z_0 h\, grad\, \varepsilon_z \,. \tag{4.7}$$

Gradijent deformacija u polarnim koordinatama glasi

$$grad\,\varepsilon_z = \varepsilon_{z,r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\varepsilon_{z,\varphi}\vec{e}_\varphi \;. \tag{4.8}$$

Radi jednostavnijeg zapisivanja korišten je indeksni zapis. Za koordinatne sustave prema slici 3.1 vrijedi odnos

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{e}_\varphi &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \\ \vec{r} &= r\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

te se izraz (4.7) može raspisati po komponentama

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' = &\left[mr\sin\varphi - z_0 h\left(\varepsilon_{z,r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\varepsilon_{z,\varphi}\cos\varphi \right) \right]\vec{i} + \\ &+ \left[-mr\cos\varphi - z_0 h\left(-\varepsilon_{z,r}\cos\varphi + \frac{1}{r}\varepsilon_{z,\varphi}\sin\varphi \right) \right]\vec{j}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Koordinate položaja zrake na zaslonu konačno glase

$$x' = mr\sin\varphi - z_0 h\left(\varepsilon_{z,r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\varepsilon_{z,\varphi}\cos\varphi\right), \tag{4.11}$$

$$y' = -mr\cos\varphi - z_0 h\left(-\varepsilon_{z,r}\cos\varphi + \frac{1}{r}\varepsilon_{z,\varphi}\sin\varphi\right). \tag{4.12}$$

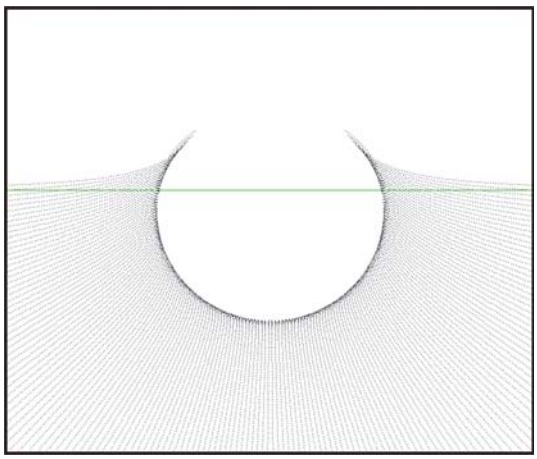
Gornji izrazi predstavljaju vezu između poprečne deformacije modela i položaja zraka svjetla na zaslonu. Zajedno s izrazom za stanje naprezanja (3.21) omogućuje numeričku simulaciju kaustike.

4.3 Simulacija optičkog efekta

Teorija projekcije zraka svjetla na zaslon prikazana je u prethodnom poglavlju, a za njezino razumijevanje i analizu neophodan je grafički prikaz. Programi za simulaciju optičkog efekta napravljeni su u programskom paketu MATLAB [58], čiji matrični način zadavanja varijabli te matrična interpretacija slike odgovaraju ovom predmetu. Program se sastoji od niza funkcija zapisanih u tzv. *m-datotekama* koje se izvršavaju sekvencijalno jedna za drugom. Redoslijed izvršavanja je sljedeći:

- unos svojstava materijala i uvjeta opterećenja,
- unos geometrijskih parametara optičkog postava,
- izračun naprezanja i deformacija,
- diskretizacija homogenog polja zraka svjetla,
- izračun položaja zraka svjetla na zaslonu,
- grafički prikaz rezultata.

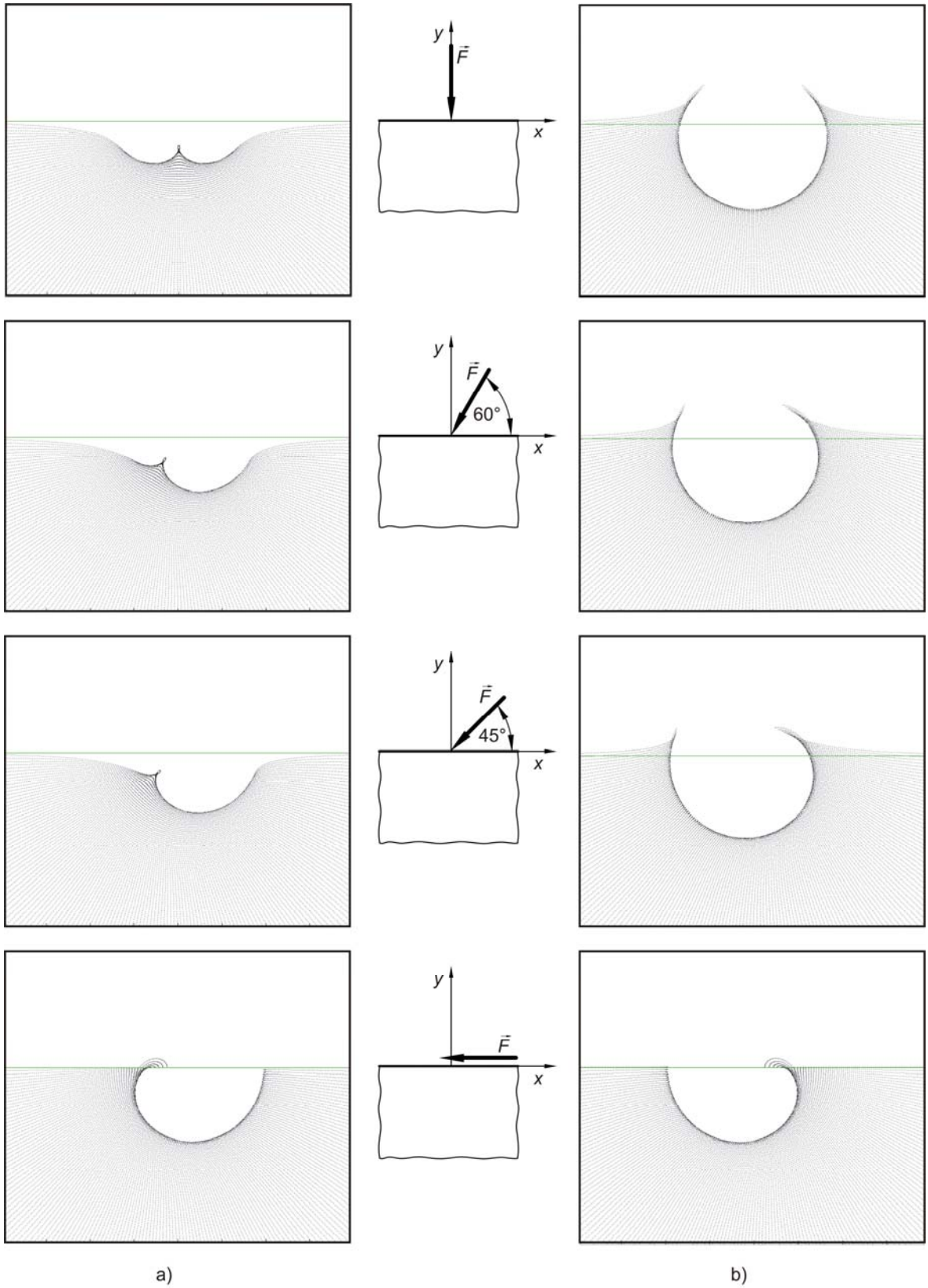
Homogeno polje zraka svjetla u ovom je slučaju diskretizirano jednoliko po varijablama r i φ. Radi bolje preglednosti, a za razliku od stvarnih uvjeta, svjetlosnim zrakama je pridružena crna boja dok je prostor na koji ne padaju zrake svjetla bijele boje (slika 4.6).



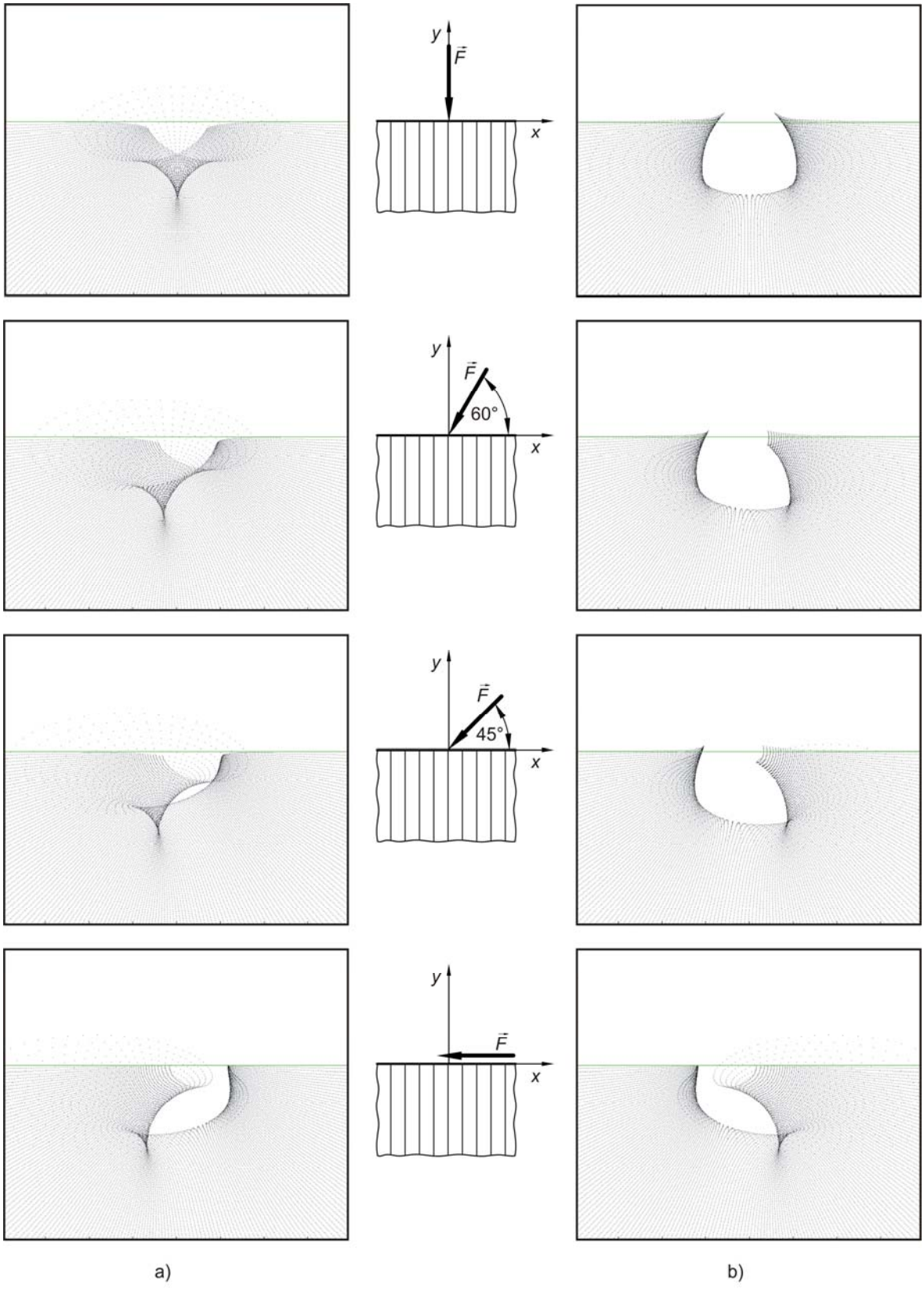
Slika 4.6 Simulacija optičkog efekta kaustike na zaslonu

Za odabrane koordinatne sustave, kada se zaslon nalazi ispred modela (snimanje virtualne slike) vrijedi $z_0>0$. U simulacijama, za razliku od stvarnih uvjeta, ne postoje fizičke prepreke zrakama svjetla te se i kod neprozirnih modela može odabirom veličine $z_0<0$ simulirati realna slika. Na slici 4.7 simulirane su redom realne i virtualne slike kaustike, na izotropnom materijalu. Promjenom ulaznih parametara primijećeni su sljedeći odnosi: variranjem nagiba sile, realna kaustika bitno mijenja svoj oblik dok virtualna kaustika postaje blago asimetrična. Za isti iznos sile optički efekt kaustike značajno je veći na virtualnoj slici i formira se i kod manjeg opterećenja. Promjenom vrste materijala (E, ν) ne mijenja se oblik kaustike. Kod tangencijalnog opterećenja, virtualna i realna slika su jedna u odnosu na drugu zrcalnog oblika.

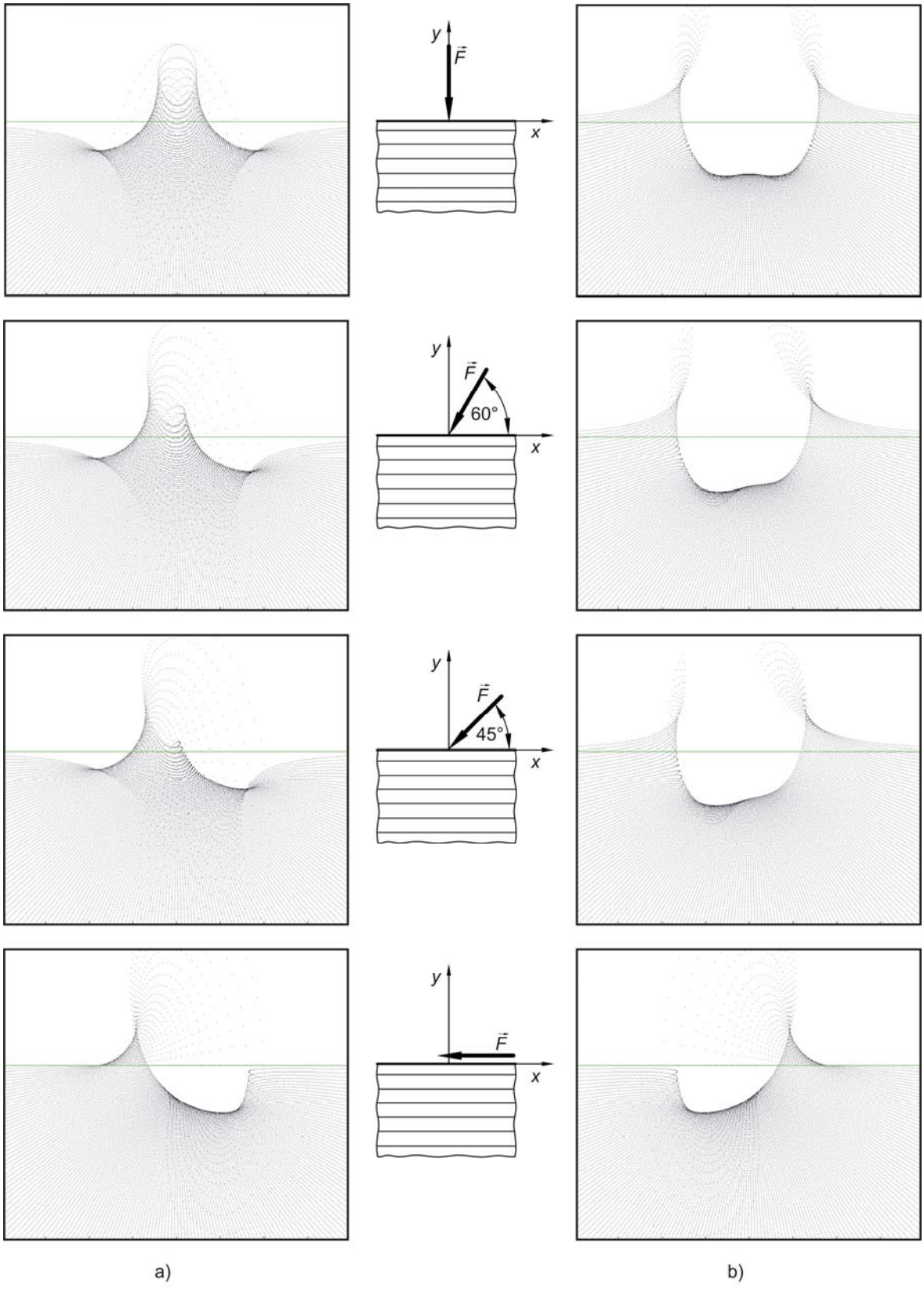
Na slikama 4.8-4.10 prikazane su simulacije kaustike na kompozitnom CFRP131 materijalu za različitu orijentaciju materijala i različite uvjete opterećenja. Uočava se velik utjecaj orijentacije materijala na oblik kaustike. Također, primijećeno je da oblik kaustike ovisi o vrsti materijala (E_i, ν_{ij}, G_{ij}). Realna kaustika nema izraženu karakterističnu veličinu koja bi se mogla usporediti s odgovarajućom veličinom kod eksperimentalno snimljene kaustike.



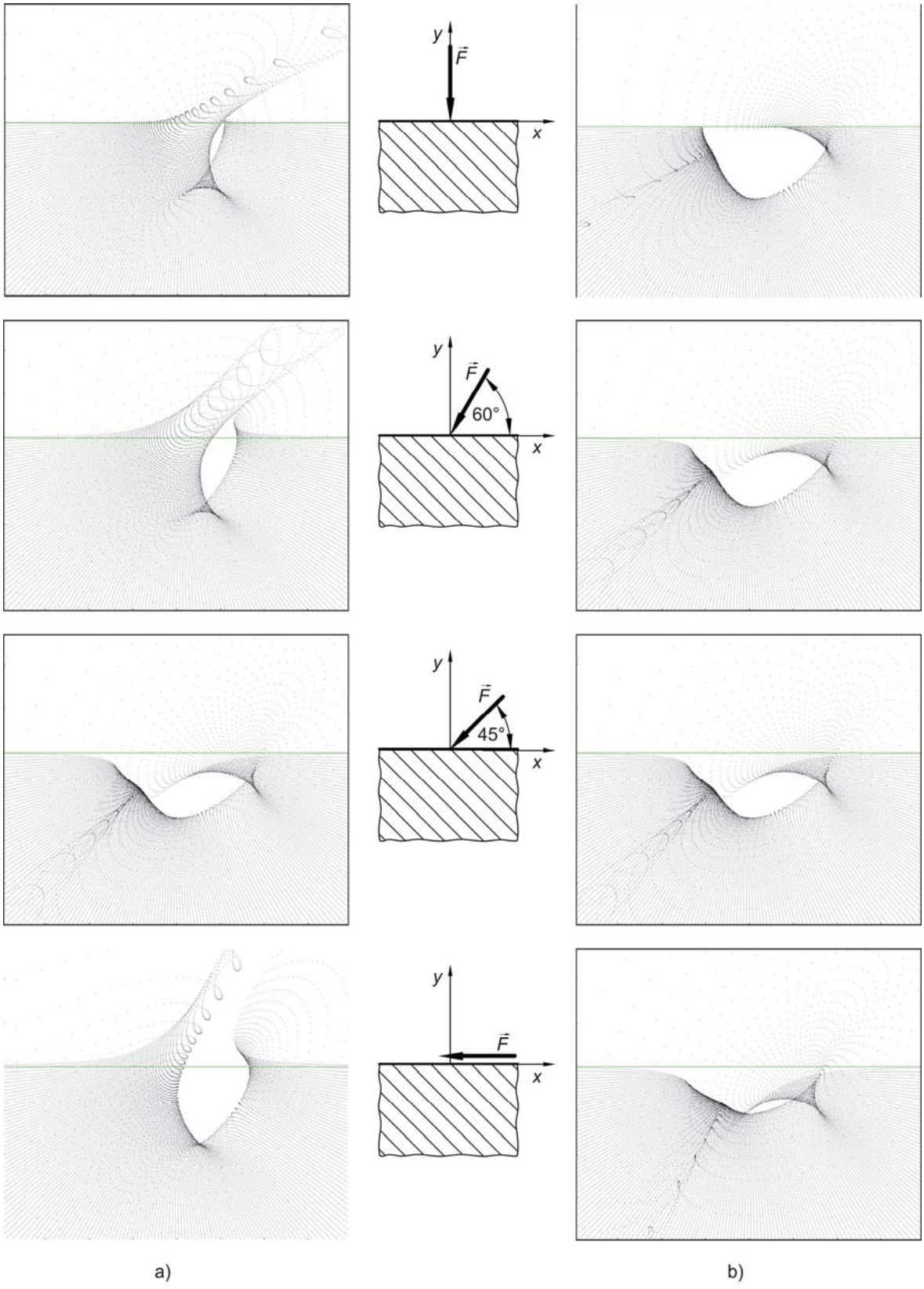
Slika 4.7 Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (Araldit B). a) realne slike i b) virtualne slike



Slika 4.8 Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=90°). a) realne slike i b) virtualne slike



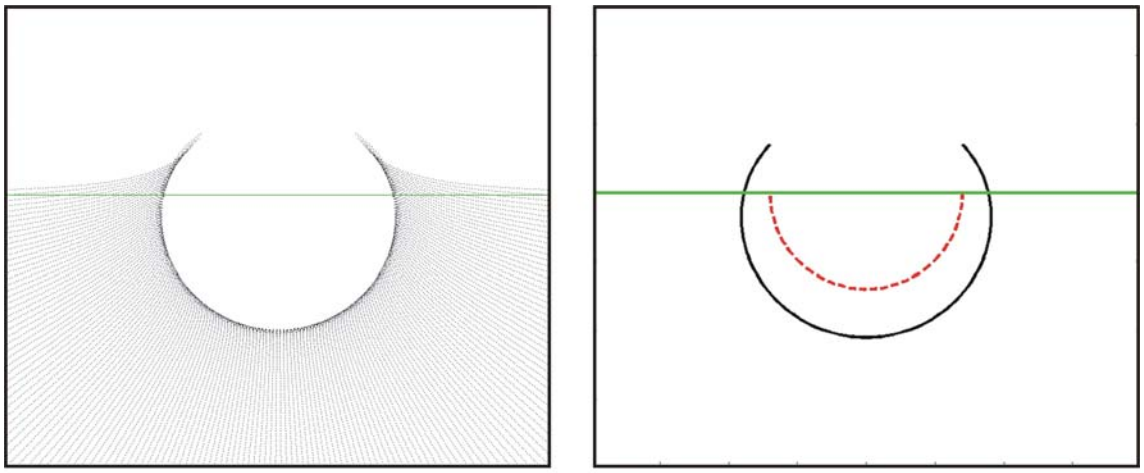
Slika 4.9 Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=0°). a) realne slike i b) virtualne slike



Slika 4.10 Simulacije optičkog efekta kaustike za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=45°). a) realne slike i b) virtualne slike

4.4 Krivulja kaustike i inicijalna krivulja

Iz prethodnih simulacija vidljivo je da se u homogenom, diskretiziranom polju zraka svjetla na zaslonu uvijek pojavljuje tamna sjenka. Skup zraka koje se nalaze na samom rubu tamne sjenke tvori tzv. *krivulju kaustike* (slika 4.11) i mjerodavan je za analizu rezultata. Zrake svjetla koje padaju na krivulju kaustike, na modelu su se nalazile na tzv. *inicijalnoj krivulji*. Ove dvije krivulje nose sve potrebne informacije te je poznavanje njihovog analitičkog izraza presudno za daljnju analizu.



Slika 4.11 a) položaj zraka svjetla na zaslonu, b) krivulja kaustike i inicijalna krivulja

Kako bi se formirala tamna sjenka na zaslonu nužan je uvjet da je funkcija preslikavanja (4.10) zraka svjetla s modela na zaslon, singularna. Matematički uvjet singularnosti je zadovoljen kada je determinanta Jakobijeve matrice jednaka nuli, što primijenjeno na izraz (4.10) daje

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(r, \varphi)} = x'_{,r}\, y'_{,\varphi} - x'_{,\varphi}\, y'_{,r} = 0 . \tag{4.13}$$

Radi lakšeg deriviranja izraza (4.13) zgodno je uvesti sljedeće funkcije

$$A(\varphi) = S_{31} \sin^2 \varphi + S_{32} \cos^2 \varphi - S_{36} \sin\varphi \cos\varphi , \tag{4.14}$$

$$B(\varphi) = (a \sin\varphi + b \cos\varphi) \sin\alpha + ((\beta + \delta) \sin\varphi + a \cos\varphi) \cos\alpha , \tag{4.15}$$

$$N(\varphi) = \frac{S_{11}}{\pi} \frac{A(\varphi)\, B(\varphi)}{L(\varphi)} , \tag{4.16}$$

gdje je $L(\varphi)$ funkcija prema (3.22).

Poprečna deformacija se pomoću izraza (3.20 i 3.26) može zapisati u obliku:

$$\varepsilon_z = -\frac{F}{r} N(\varphi) . \tag{4.17}$$

Nakon uređivanja uvjet singularnosti poprima oblik

$$m^2 r + m z_0 h F r^{-2} K_I + 2(z_0 h F)^2 r^{-5} K_{II} = 0 , \tag{4.18}$$

gdje su,

$$K_I = -N(\varphi) - \frac{\partial^2 N(\varphi)}{\partial \varphi^2} , \tag{4.19}$$

$$K_{II} = -\left(N(\varphi)\right)^2 - 3\left(\frac{\partial N(\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + N(\varphi)\frac{\partial^2 N(\varphi)}{\partial \varphi^2} . \tag{4.20}$$

Od šest mogućih rješenja izraza (4.20) dva su konjugirano kompleksna para, a dva realna rješenja su

$$r_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{z_0 h F}{2m}\left(4K_I \pm \sqrt{K_I^2 - 8K_{II}}\right)} . \tag{4.21}$$

Jedno rješenje odgovara realnoj, a drugo virtualnoj kaustici. Kako se realna i virtualna kaustika mogu simulirati promjenom predznaka veličine z_0 dovoljno je odabrati rješenje za z_0>0 koje glasi

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{z_0 h F}{2m}\left(4K_I + \sqrt{K_I^2 - 8K_{II}}\right)} . \tag{4.22}$$

Krivulja $r_0 = r_0(\varphi)$ je inicijalna krivulja na modelu (crvena linija na slici 4.11b). Kod izotropnog materijala korijeni karakteristične jednadžbe su

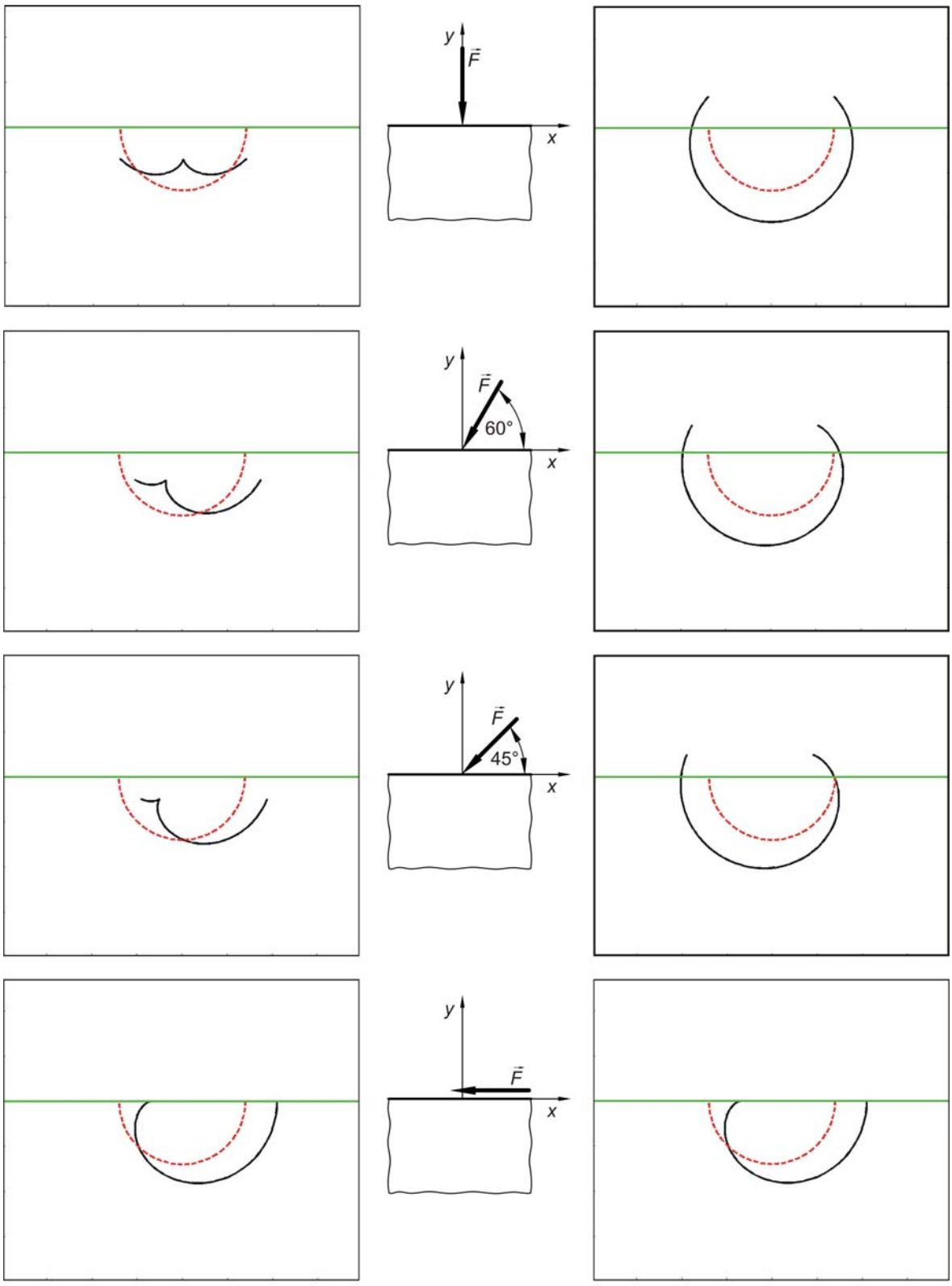
$$\mu_1 = \mu_2 = i , \tag{4.23}$$

što uvrštenjem u izraze 4.14-4.21, uz izračun komponenata tenzora podatljivosti prema (2.15) pokazuje da

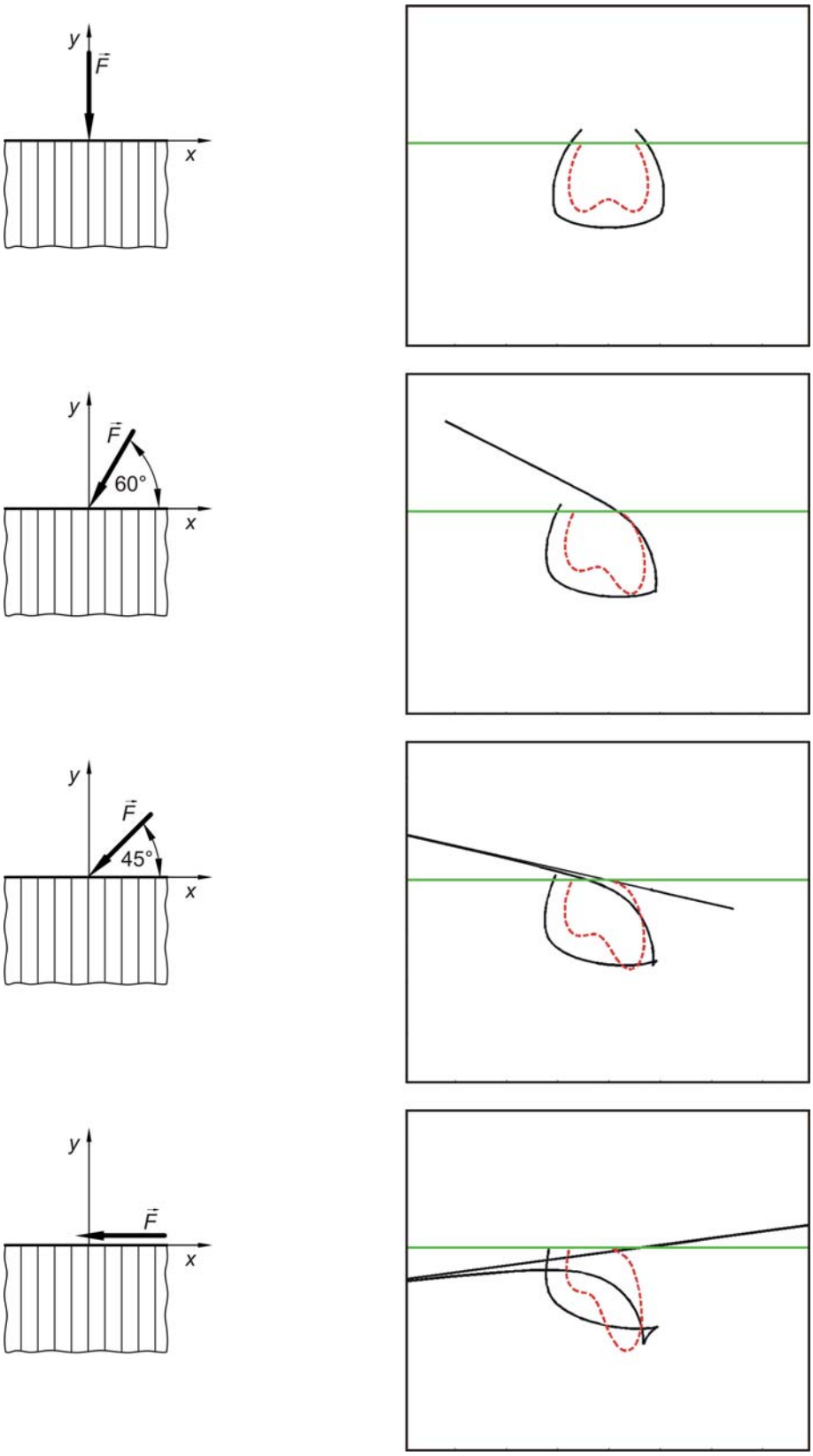
$$r_0(\varphi) = r_0(F, m, z_0, E, \nu) \tag{4.24}$$

ne ovisi o koordinati φ, odnosno da je za izotropne materijale inicijalna krivulja uvijek polukružnica. Krivulja kaustike dobije se kada se inicijalna krivulja uvrsti u funkciju preslikavanja (4.10).

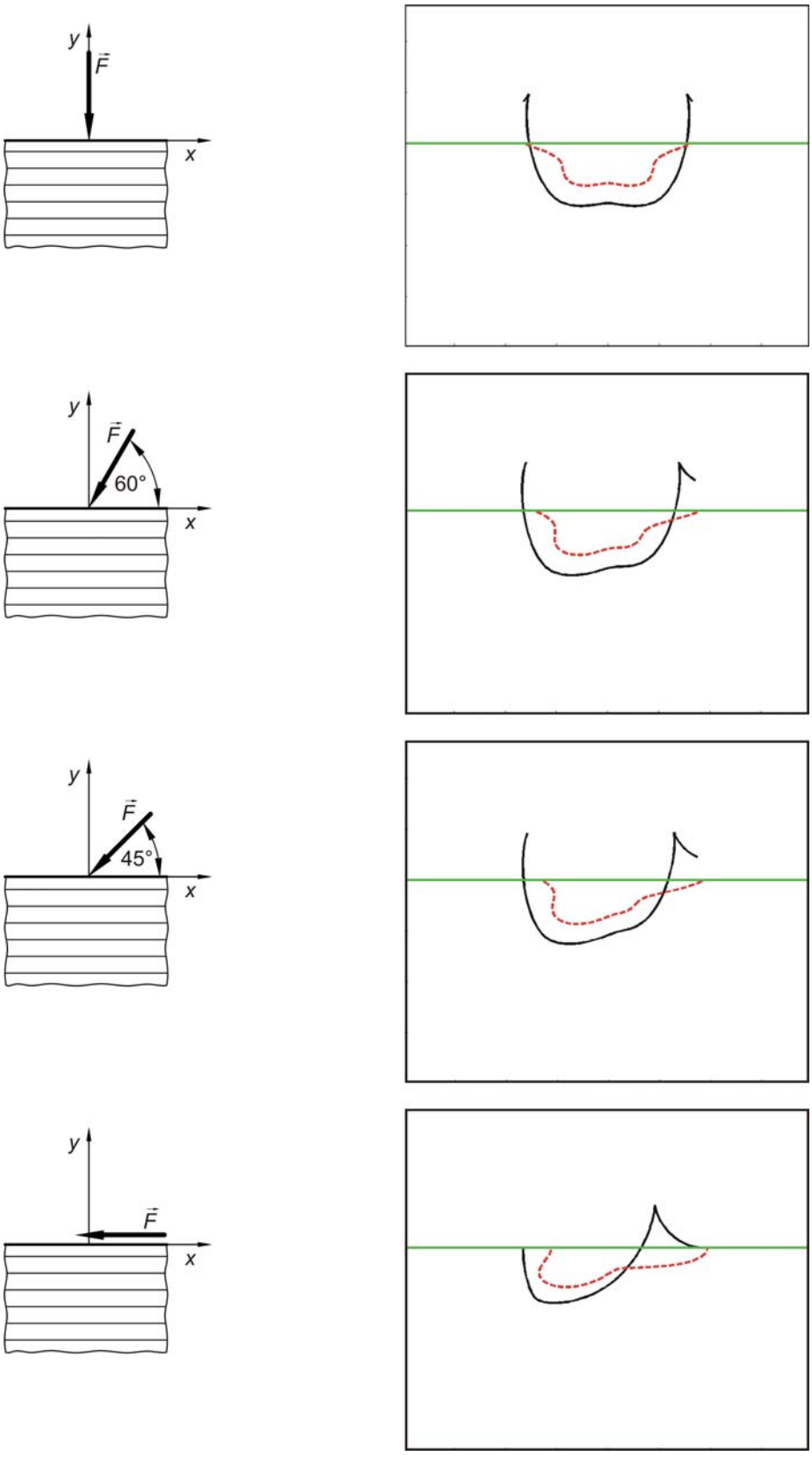
Na slici 4.12 prikazane su krivulje kaustike i inicijalne krivulje simulirane na *Araldit B*. Može se uočiti da inicijalna krivulja ne mijenja svoj oblik prilikom mijenjanja nagiba sile opterećenja, te da je ista i za realnu i za virtualnu sliku, što se moglo i očekivati. Na slikama 4.13-4.15 prikazane su inicijalne krivulje i krivulje kaustike simulirane na materijalu CFRP131. Izostavljene su realne krivulje čiji oblici nisu pogodni za suvislu analizu. Može se uočiti da je oblik inicijalne krivulje geometrijski složeniji te da osim o uvjetima opterećenja ovisi i o orijentaciji materijala. Variranjem svojstava materijala uočeno je da inicijalna krivulja isto kao i krivulja kaustike ovisi o vrsti materijala.



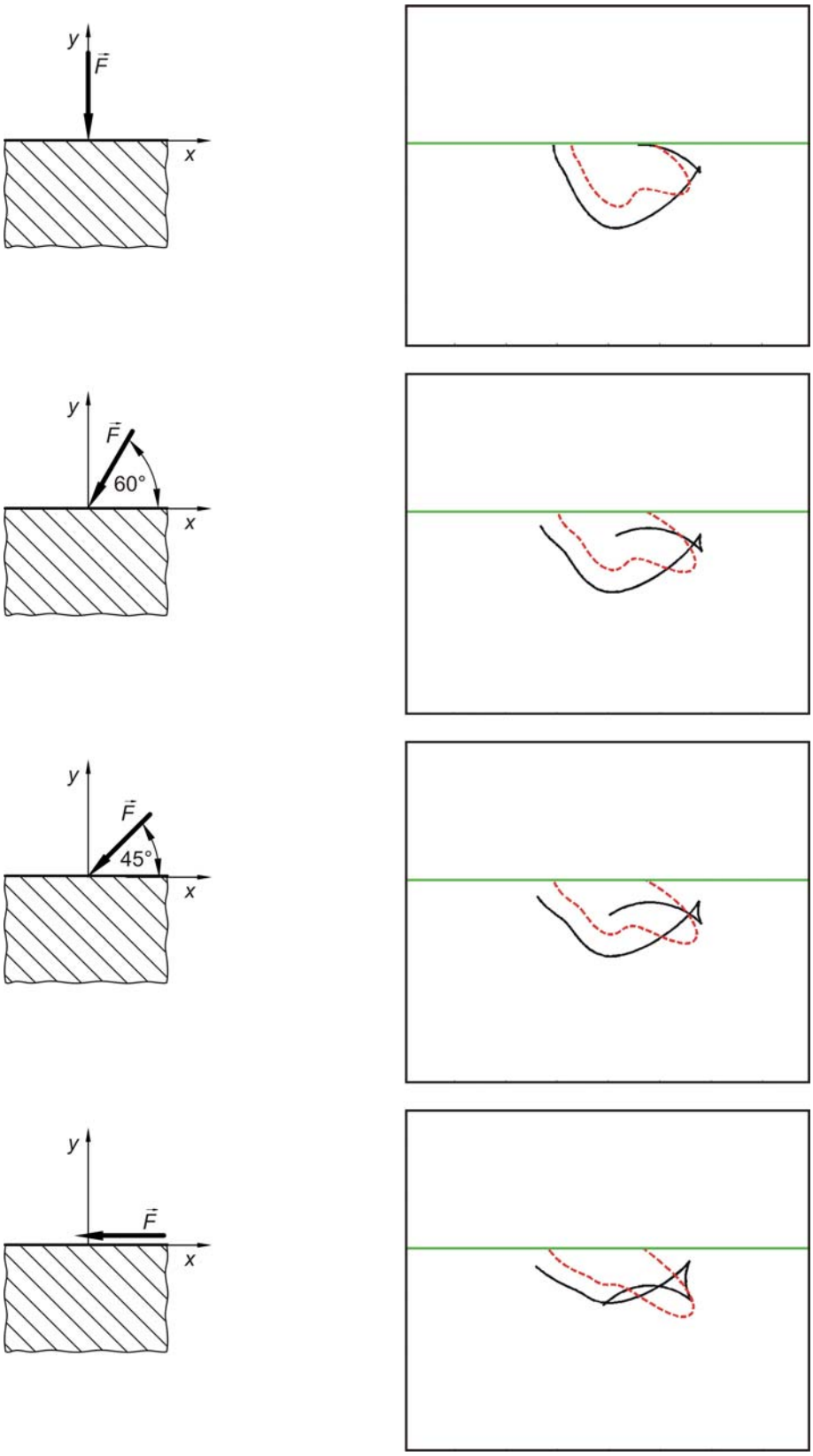
Slika 4.12 Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (Araldit B). a) realne slike i b) virtualne slike



Slika 4.13 Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=90°).



Slika 4.14 Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=0°).



Slika 4.15 Simulacije krivulja kaustike i inicijalnih krivulja za različite uvjete opterećenja (CFRP131, ϑ=45°).

5

Tehnika provedbe eksperimenta

Za eksperimentalno snimanje kaustike potrebni su: optički postav koji daje i modulira svjetlosni snop, uređaj za opterećenje modela i kamera za snimanje vizualnog efekta. Slika se zapisuje u digitalnom obliku te se softverskim algoritmima mjere karakteristične veličine kako bi se povećala točnost rezultata i smanjila subjektivnost ispitivača. Kod kompozitnih materijala, s obzirom na njihovu neprozirnu karakteristiku, moguće je snimanje kaustike samo u refleksijskom postavu. Radi usporedivosti rezultata isti postav se koristi i za snimanje kaustike na *Araldit B*.

Materijalni modeli su epruvete izrezane iz ploče dimenzija 50x50x3 mm što se pokazalo dovoljnim da rub ne utječe na veličinu i oblik kaustike, a debljina modela od 3 mm osigurava da ne dođe do izvijanja epruvete. U rezultatima gdje to posebno nije naglašeno podrazumijeva se promjer utiskivača od 10 mm. Prednja površina *Araldita B* je optički ravna te ne zahtijeva posebnu pripremu, dok je na kompozit potrebno nanijeti refleksijski sloj. Postupak nanošenja refleksijskog sloja preuzet je iz literature [59], a ovdje je ukratko opisan.

5.1 Izbor optičkog postava

Formiranje optičkog postava temelji se na prethodnim teorijskim razmatranjima i zahtjevima za praktičnu realizaciju snimanja kaustike. Snop zraka svjetla moguće je, po izlasku iz izvora svjetla, sustavom leća modulirati u tri osnovna oblika: divergentni, paralelni i konvergentni snop svjetla. Faktor povećanja kaustike m predstavlja odnos između duljine referentne dužine na zaslonu i duljine te iste dužine na modelu. Kod

divergentnog snopa svjetla dolazi do povećanja slike, pa je $m > 1$, kod paralelnog snopa svjetla je $m = 1$, a kod konvergentnog snopa svjetla dolazi do smanjenja slike te je $m < 1$. Geometrijski zakoni optike korišteni u izvodu kontaktne kaustike uključivali su sljedeće pretpostavke:

- svjetlosne zrake snopa su paraksijalne,
- homocentrični snop poslije loma ostaje homocentrični,
- sredina ima konstantan indeks loma za sve zrake.

Kako bi se zadovoljili navedeni uvjeti, izvor svjetla mora biti točkastog karaktera ili emitirati paralelne zrake svjetla kao što je slučaj kod lasera. Svi elementi optičkog postava moraju se pomoću optičke klupe i odgovarajućih nosača, moći dovesti u istu optičku os.

5.1.1 Aberacije optičkog sustava

U praksi se koriste široki svjetlosni snopovi polikromatske svjetlosti koji s optičkom osi zatvaraju znatne kutove. Zbog toga pri preslikavanju kroz optičke sustave nastaju različite deformacije likova. Odstupanja lika dobivenog preslikavanjem od lika predviđenog teorijskim razmatranjem o preslikavanju nazivaju se *aberacije*. Osnovne aberacije optičkih sustava su:

- **sferna aberacija:** Kut loma svjetlosne zrake ovisi o njezinom kutu upada na površinu leće. Površina leće je gotovo uvijek sferična jer je takvu površinu najlakše napraviti. Ako snop paralelnih svjetlosnih zraka dođe do površine leće one zatvaraju različite upadne kutove na različitim dijelovima, tako da leća sferične površine ne lomi sve zrake u istu žarišnu točku. Zrake koje su bliže centru leće lome se u točku koja je udaljenija, a zrake koje su došle na rub leće lome se u točku koja je bliže leći. Posljedica toga je da se lik svijetle točke na zaslonu dobiva u obliku rasplinute mrlje.

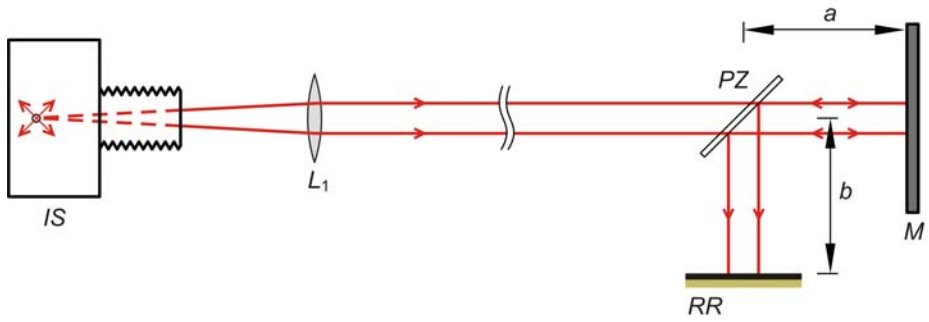
- **kromatska aberacija:** Pri prolasku polikromatske svjetlosti kroz optički sustav dolazi do pojave disperzije odnosno razlaganja svjetlosti. Rezultat je da se zrake različitih boja skupljaju u različitim točkama. Ova pojava nastaje zbog toga što se svjetlost različite valne duljine prolaskom kroz optički proziran medij lomi pod različitim kutovima, odnosno različite boje svjetlosti imaju različite indekse loma. Na taj način nastaje i spektar kad se svjetlost lomi kroz prizmu, odnosno duga kad se svjetlost lomi na kapljicama vode.

- **koma:** Nastaje kada se točkasti predmet nalazi izvan optičke osi sustava. Zraka koja prolazi kroz centar leće stvara točkasti lik na zaslonu, dok periferne zrake stvaraju izdužene kružnice. Konačan lik ima oblik kometa otkuda i potječe naziv.

- **distorzija slike:** Na distorziju slike utječu nesimetrično postavljeni elementi optičkog postava te velika pritvorenost blende koja uzrokuje ogib zrake svjetla.

5.1.2 Odabrani optički sustav

Kod refleksijskog načina snimanja optički elementi standardno se postavljaju ili u tzv. *V-postav* ili u *T-postav*. S obzirom na velike dimenzije digitalnog fotoaparata koji služi kao zaslon, u *V-postavu* bi kut između upadnih i refleksijskih zraka bio bi velik te bi uzrokovao distorziju slike. Shematski prikaz odabranog postava s paralelnim snopom svjetla prikazan je na slici 5.1.



Slika 5.1 Optički postav s paralelnim snopom svjetla (IS-izvor svjetla, L-leća, PZ-polupropusno zrcalo, RR-referentna ravnina (zaslon), M-model)

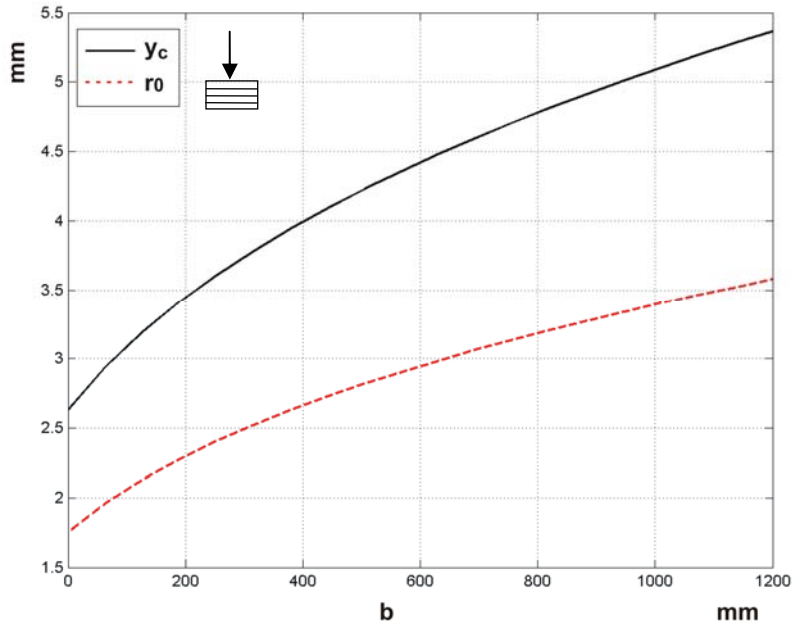
Snop svjetla po izlasku iz izvora svjetla (IS) prolazi kroz konvergentnu leću (L_1) te nakon prolaska kroz poluzrcalo (PZ) osvjetljava model. Poslije refleksije, polupropusno zrcalo (PZ) usmjerava zrake svjetla na zaslon (RR). Kod paralelnog snopa svjetla faktor povećanja je

$$m = 1\,, \tag{5.1}$$

a udaljenost zaslona od modela iznosi

$$z_0 = a + b\,. \tag{5.2}$$

Iz izraza (4.22) je vidljivo da se mijenjanjem vrijednosti z_0 mijenja položaj inicijalne krivulje (r_0), a time i veličina krivulje kaustike (y_c). Iz praktičnih razloga lakše je mijenjati položaj zaslona nego položaj polupropusnog zrcala. Na dijagramu 5.2 prikazana je ovisnost položaja inicijalne krivulje na modelu (r_0 za φ=0) i veličina kaustike (y_c) o parametru b. Podaci su dani za kompozitni materijal CFRP131 u slučaju kada je ϑ=0°, a kvalitativni dijagram ostaje isti i kod promjene materijalnih svojstava. Udaljavanjem zaslona od modela povećava se i inicijalna krivulja i krivulja kaustike. Veličina krivulje kaustike ograničena je dimenzijama čipa na kameri i može se kretati do veličine od 10 mm.

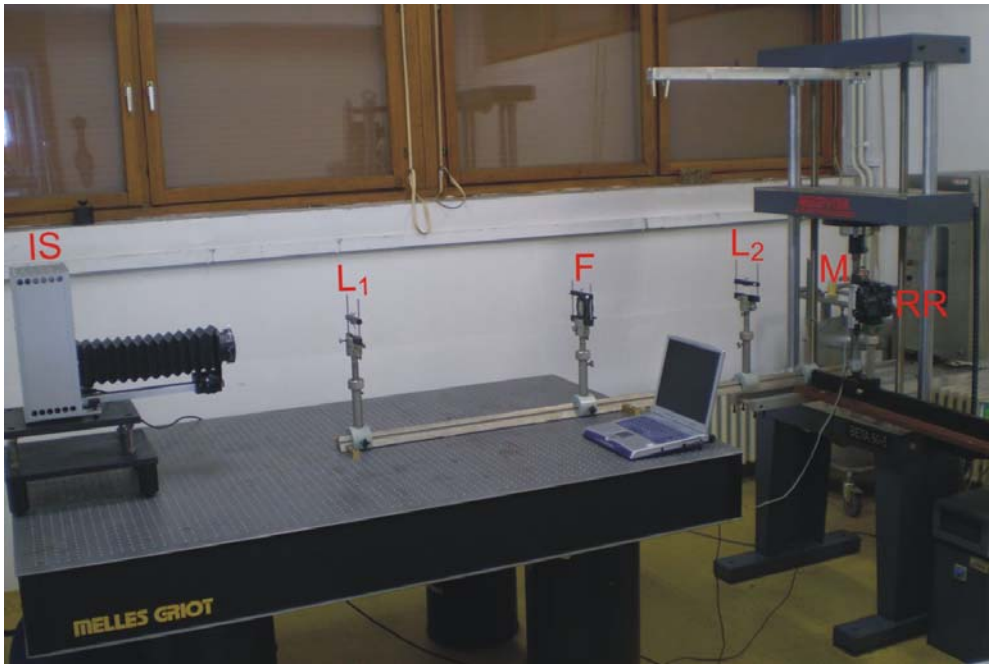


Slika 5.2 Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u paralelnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N

Slikom 5.3 prikazan je optički postav za eksperimentalno snimanje kaustike s označenim nazivima elemenata. Prostorija u kojoj su se provodili eksperimenti imala je mogućnost zamračenja što je uvelike olakšalo snimanje.

Kao izvor svjetla koristi se uređaj *Tiedemann PLT100*, posebno prilagođen za ispitivanja metodom kaustike. Električni luk koji se stvara u posebnoj žarulji emitira bijelo svjetlo intenziteta 320 cd, odnosno gustoće 220000 cd/cm^2. Veličina fizičke točke u izvoru je 0,27x0,37 mm. U uređaj je izvorno bio ugrađen sustav leća kojim se mogao modulirati izlazni svjetlosni snop, međutim, zbog loše kvalitete ugrađenih leća ovaj element je uklonjen, a umjesto njega dodana je blenda koja zaustavlja zrake reflektirane s unutrašnje strane kućišta. Zbog svojih karakteristika (paralelni uski snop zraka svjetla velikog

intenziteta), može se kao izvor svjetla koristiti i laser, iako uslijed koherentne prirode laserskog svjetla dolazi do pojave interferencijskih linija na slici što smanjuje kvalitetu same slike.



Slika 5.3 Optički postav za eksperimentalno snimanje kaustike (IS-izvor svjetla, L_1 i L_2 -leće, F – filter, PZ-polupropusno zrcalo, RR-referentna ravnina (zaslon), M-model)

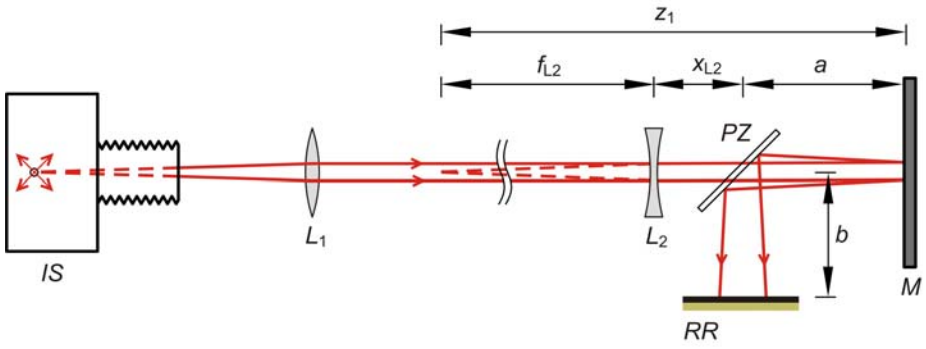
Korištene su leće proizvođača *Melles Griot*, laboratorijske kvalitete izrade. Odabrane su tanke leće velikih žarišnih duljina čime se smanjuju kromatska i sferna aberacija. Leća L_1 je konvergentna leća žarišne duljine f =1 m, koja postavljanjem na udaljenost od 1 m od točkastog izvora daje paralelni snop svjetla. Iza leće L_1 se po potrebi može postaviti filter koji služi za smanjenje intenziteta svjetla kako se ne bi previše osvijetlio čip na kameri. Leća L_2 modulira svjetlosni snop, može biti divergentna, konvergentna ili se može izostaviti. U ovom ispitivanju je korištena divergentna leća žarišne duljine f =-0.6 m i konvergentna leća žarišne duljine f =2 m. Velika udaljenost između leća L_1 i L_2 pomaže da se svjetlosni snop bolje pročisti od zraka dobivenih neželjenim refleksijama. Nosači leća i nosač modela posebno su izrađeni tako da se mogu precizno dovesti u optičku os.

Uređaj za opterećenje je statička kidalica *Beta 50-5* proizvođača *Messphysik*. Brzina opterećenja prilikom ispitivanja bila je 0,1 mm/min, a izmjerene sile i snimljene slike na fotoaparatu su se vremenski sinkronizirale.

Kao zaslon je upotrijebljen fotoaparat *Fuji FinePix S1 Pro* bez objektiva kako bi svjetlo padalo direktno na CCD čip. Dimenzije čipa su 23,3x15,6 mm. Duljina ekspozicije ovisi o karakteru snopa svjetla i količini reflektiranog svjetla, pa je tako kod snimanja kaustike na *Araldit B* u divergentnom svjetlu najduža ekspozicija (1/10 s), dok je kod snimanja u konvergentnom svjetlu na kompozitnom materijalu najkraća (1/350 s). Slike se spremaju direktno na računalo te se poslije obrađuju u softverskom paketu MATLAB.

5.1.3 Nadogradnja optičkog postava

Prema izrazu (4.10) i (4.22) proizlazi da, osim opterećenja i vrste materijala, na veličinu kaustike i položaj inicijalne krivulje na modelu također utječu faktor povećanja m i udaljenost referentne ravnine od zaslona z_0. Dok se z_0 može varirati pomicanjem referentne ravnine, faktor povećanja se može mijenjati dodavanjem leće L_2 u sustav.



Slika 5.4 Snimanje kaustike u divergentnom snopu svjetla

Na slici 5.4 prikazano je snimanje kaustike u divergentnom snopu svjetla. Faktor povećanja lako je izračunati preko sličnosti trokuta

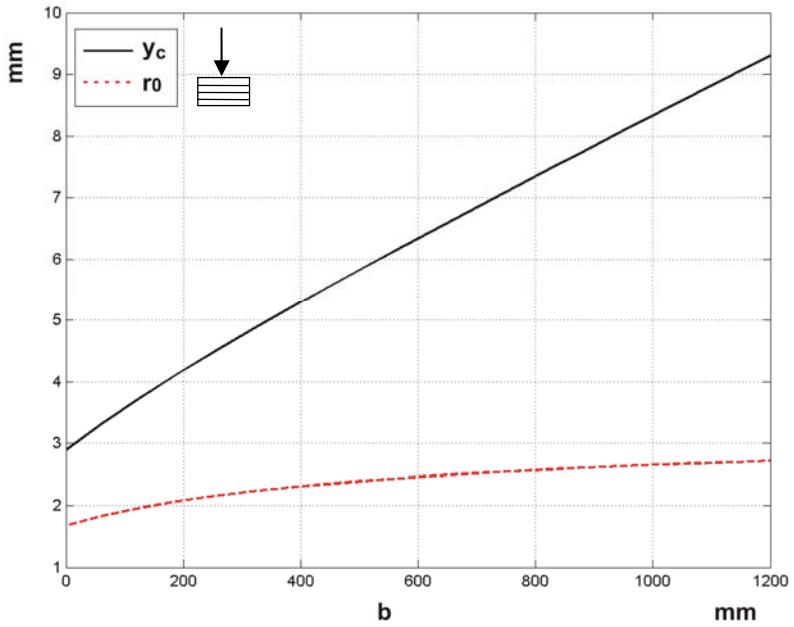
$$m = \frac{z_1 + z_0}{z_0} = \frac{f_{L2} + z_{L2} + 2a + b}{a + b}. \tag{5.3}$$

Vrijednosti odabranih udaljenosti korištene tijekom eksperimentalnog snimanja kaustike dane su u tablici 5.1

Tablica 5.1: Udaljenosti optičkih elemenata za snimanje u divergentnom snopu svjetla

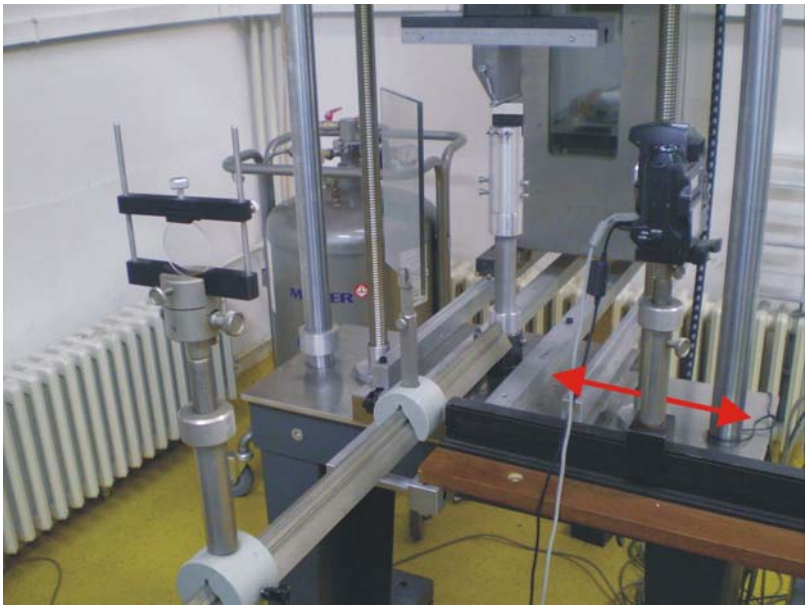
f_{L2}	600 mm
z_{L2}	300 mm
a	160 mm
b	100 – 1200 mm

Iz praktičnih razloga, tijekom ispitivanja najlakše je varirati veličinu b, odnosno približavati i udaljavati kameru (slika 5.6). U tom slučaju faktor povećanja slike u divergentnom snopu svjetla izračunava se prema izrazu (5.3), a položaj inicijalne krivulje i krivulje kaustike prema izrazima (4.22) i (4.10). Vrijednosti r_0 i y_c prikazani su dijagramom 5.5.



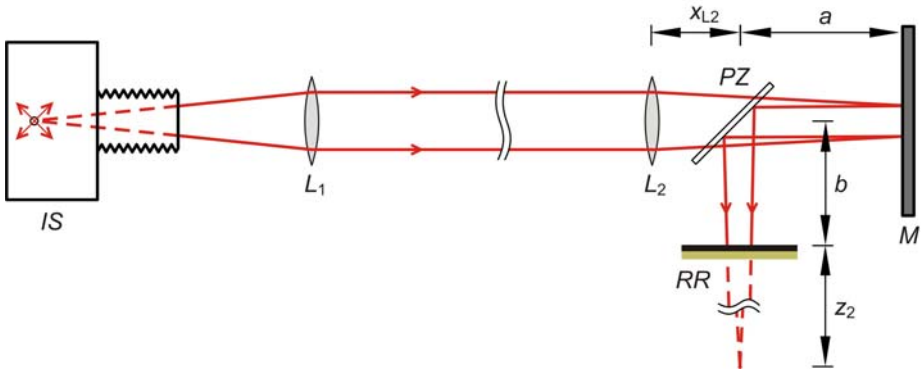
Slika 5.5 Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u divergentnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N

Iz dijagrama se vidi da su kod divergentnog snopa svjetla kaustike znatno veće nego kod paralelnog svjetla, što je praktično pri snimanju s malim silama opterećenja. Položaj inicijalne krivulje ne mijenja se bitno udaljavanjem zaslona.



Slika 5.6 Promjena položaja zaslona u optičkom postavu

Postavljanjem konvergentne leće L_2 formira se konvergentni svjetlosni snop, prema slici 5.7.



Slika 5.7 Snimanje kaustike u konvergentnom snopu svjetla

Za faktor povećanja vrijedi izraz

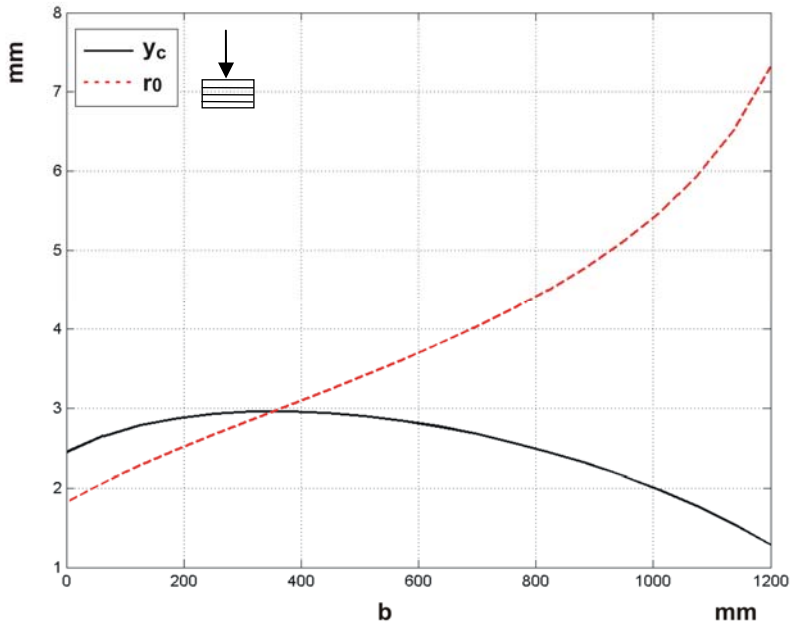
$$m = \frac{z_2}{z_2 + z_0} = \frac{f_{L2} - z_{L2} - 2a - b}{f_{L2} - z_{L2} - a}. \tag{5.4}$$

U ovom slučaju je također najlakše varirati parametar *b*. Vrijednosti odabranih udaljenosti dane su u tablici 5.2.

Tablica 5.2: Udaljenosti optičkih elemenata za snimanje u konvergentnom snopu svjetla

f_{L2}	2000 mm
z_{L2}	300 mm
a	160 mm
b	100 – 1200 mm

Dijagramom na slici 5.8 prikazana je promjena položaja inicijalne krivulje na modelu (r_0) i veličina kaustike (y_c) u ovisnosti o položaju zaslona. Vidljivo je da veličina kaustike raste do maksimalne vrijednosti, nakon koje se ponovno smanjuje. Položaj inicijalne krivulje bitno se mijenja te se ovim načinom snimanja mogu postići najveće vrijednosti r_0. Kod velike udaljenosti zaslona veličina kaustike je mala što može utjecati na mjernu nesigurnost pri očitavanju vrijednosti y_c.

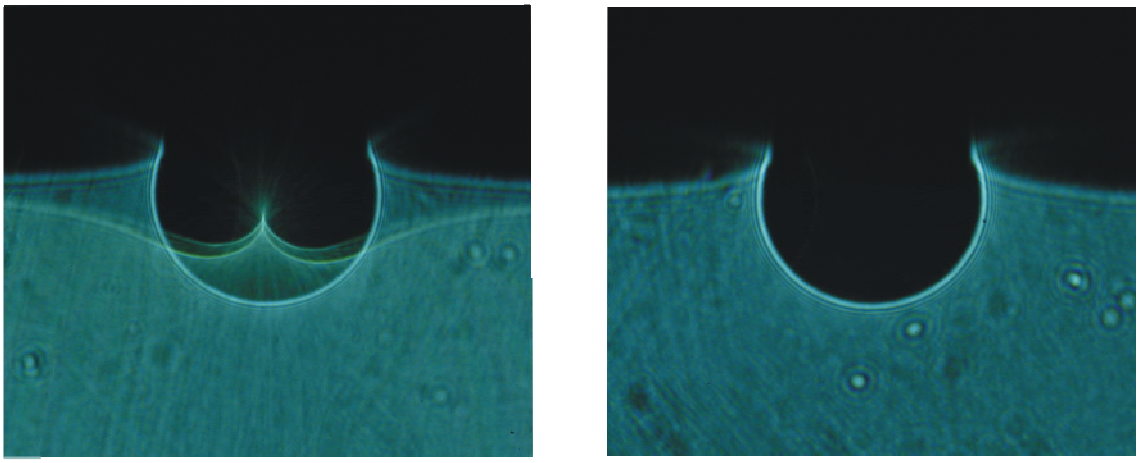


Slika 5.8 Položaj inicijalne krivulje i veličina kaustike u konvergentnom snopu svjetla, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N

5.2 Snimanje kaustike na izotropnom materijalu

Aralditna ploča od koje su izrađeni modeli ima optički ravnu površinu te je nije bilo potrebno dodatno pripremati. Uzorci su izrezani iz ploče te su glodanjem obrađeni na konačne dimenzije. Tijekom obrade posebnu pozornost treba posvetiti gornjem rubu na kojem se ostvaruje kontakt, kako se obradom ne bi unijela zaostala naprezanja u model. Prilikom snimanja, na fotoaparatu je potrebno povećati ekspoziciju jer zbog prozirnosti materijala veći dio upadnog svjetla prolazi kroz model, a manji dio se reflektira.

Kod prozirnih materijala postoje optički izotropni i optički anizotropni (dvolomni) materijali. Ovi posljednji imaju sposobnost da zraku koja prolazi kroz njih rastavljaju na dvije zrake koje se različito lome [60]. Fotoelastični materijali su takvi materijali koji su u neopterećenom stanju optički izotropni, a nakon opterećenja postaju optički anizotropni. Epoksidna smola poznata pod nazivom *Araldit B* spada u grupu fotoelastičnih materijala.



Slika 5.9 Eksperimentalno snimljena kaustika na Aralditu B. a) refleksija s prednje i stražnje površine i b) refleksija samo s prednje površine.

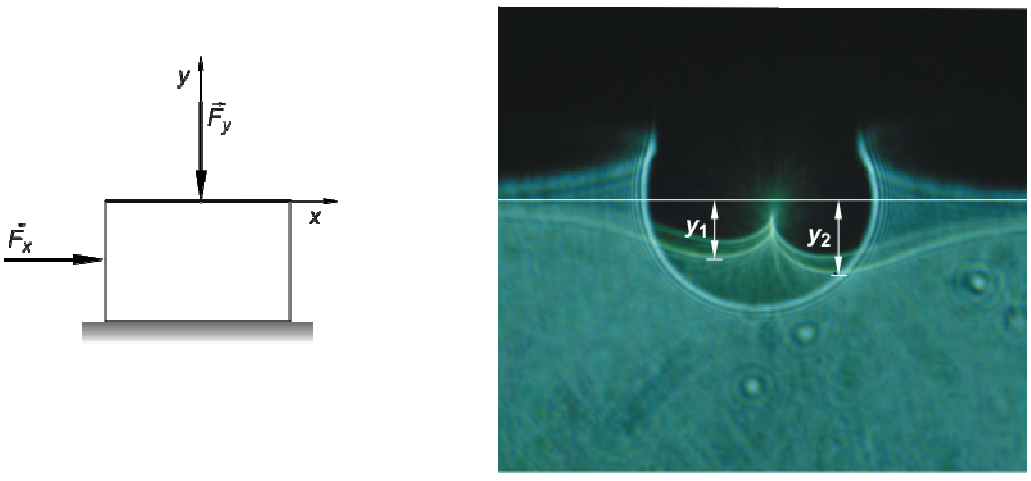
Na slici 5.9a vide se dvije kaustike. Veća kaustika je nastala kao refleksija s prednje površine modela, dok je manja kaustika rezultat refleksije svjetla sa stražnje površine modela. Dvostruki rub manje kaustike nastao je kao posljedica fotoelastičnog svojstva materijala, budući da je za refleksiju sa stražnje površine zraka morala proći kroz materijal i još jednom se vratiti. Za njeno matematičko opisivanje potrebno je u jednadžbe, osim deformacije površine, uvrstiti i stanje naprezanja. Ovakvo rješenje dali su Semenski, Bakić i Stanković [26]. Kako bi se rezultati mogli komparirati s rezultatima snimljenim na

kompozitnim materijalima, daljnja analiza biti će posvećena samo kaustici nastaloj refleksijom s prednje površine modela.

Kako bi se izbjegla refleksija sa stražnje površine, dovoljno ju je lagano prebrusiti da ne bude optički ravna (slika 5.9b). Oblik kaustike na slici odgovara virtualnoj kaustici. Realna kaustika bi se mogla dobiti invertiranjem svjetlosnog snopa nakon refleksije te postavljanjem zaslona iza fokusa. U simulacijama je vidljivo da realne kaustike snimljene na kompozitnom materijalu nemaju izraženu karakterističnu veličinu koja bi se mjerila, te su znatno manje, zbog čega su virtualne kaustike pogodnije za snimanje. Kod vrška pukotine je obrnut slučaj, deformirana prednja površina odgovara konkavnom zrcalu te je bilo potrebno invertiranje svjetlosnog snopa da bi se dobila kaustika kao na prethodnoj slici.

Na slici se također vide mrlje okružene sa nekoliko krugova. To nije posljedica aberacije optičkog postava nego se na ispupčenim ili udubljenim mjestima na modelu također stvaraju kaustike. Kada bi se modeli slikali pri dnevnom svjetlu taj efekt ne bi bio vidljiv jer tada upadne zrake nisu paraksijalne.

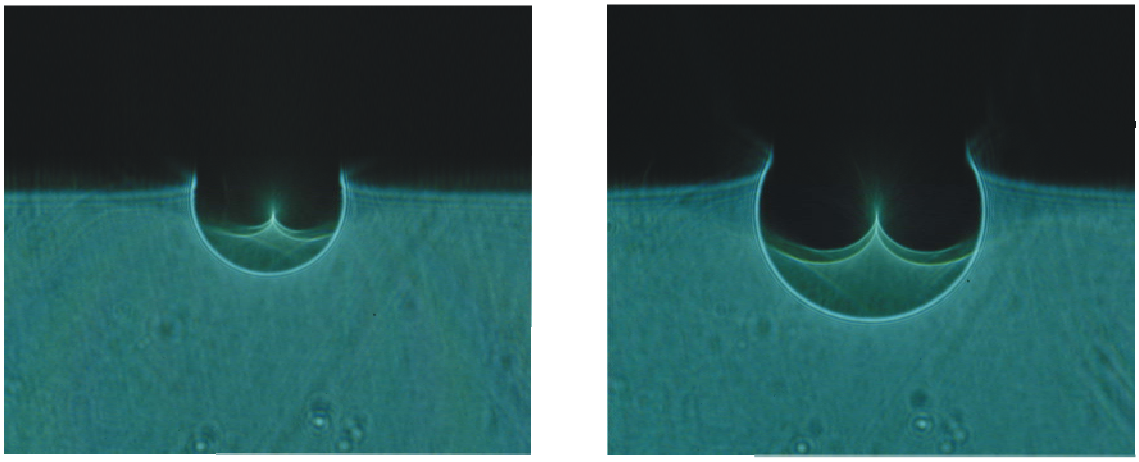
Na uređaju za opterećivanje nije bilo moguće opteretiti model kosom silom. Da bi se postigao isti rezultat model je za vrijeme ispitivanja dodatno opterećen silom F_x (slika 5.10). Donja površina modela premazana je strojnom mašću kako bi se smanjilo trenje.



Slika 5.10 Utjecaj nagiba sile na oblik kaustike

Oblik snimljenog optičkog efekta odgovara simulacijama prikazanim slikom 4.7. Vidljivo je da kaustika nastala refleksijom sa stražnje površine, koja oblikom odgovara realnoj

kaustici, osjetljiva na nagib sile, dok kaustika nastala refleksijom s prednje površine poprima nemjerljivu asimetričnost.



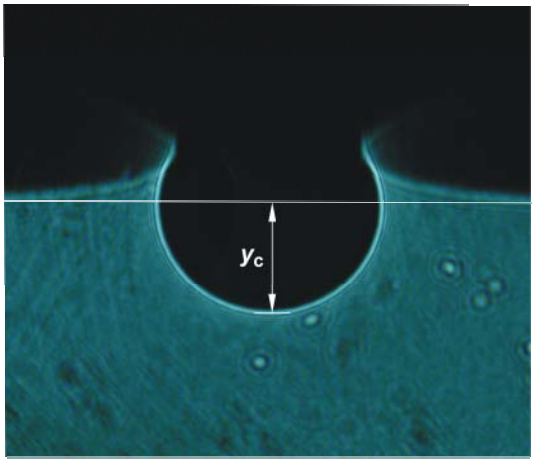
Slika 5.11 Utjecaj iznosa sile opterećenja na oblik i veličinu kaustike.
a) F=80 N, b) F=200 N

Utjecaj iznosa sile opterećenja vidljiv je na slici 5.11. Povećanjem sile opterećenja kaustika postaje veća, ali pri tome ne mijenja svoj oblik. Ovaj efekt također odgovara teorijskom rješenju. Prema teksturi modela može se vidjeti da je na slikama 5.10a i 5.10b faktor povećanja isti te da je samo optički efekt kaustike promijenio veličinu.

Ispitivanja na izotropnom modelu pokazala su da je optički postav dobro postavljen, te da su slike jasne i čiste. U skladu s teorijskim rješenjem također se pokazalo da veličina optičkog efekta kaustike kod izotropnih materijala ovisi isključivo o iznosu sile opterećenja, dok oblik kaustike ovisi o njenom nagibu.

5.3 Odabir i mjerenje karakterističnih veličina

Odabrana karakteristična mjerna veličina prikazana je na slici 5.12. Krajevi epruvete dovoljno udaljeni od mjesta kontakta ne mijenjaju svoj položaj na slici za vrijeme ispitivanja, te se kroz njih može povući horizontalna linija od koje se mjeri najveća vertikalna udaljenost do ruba tamne sjenke (y_c). U simulacijama ova vrijednost odgovara radijalnoj koordinati krivulje kaustike za φ=0.



Slika 5.12 Karakteristična veličina kaustike

Automatsko očitavanje karakteristične veličine provodi se u softverskom paketu MATLAB. Slika se učitava u matričnom zapisu pomoću naredbe *imread*. Svaki piksel slike je član matrice čija vrijednost odgovara njegovoj svjetloći. Slika se pretražuje po stupcima počevši od sredine, lijevo i desno, a uvjet za detekciju ruba je da pet susjednih članova imaju vrijednost veću od 90% najveće vrijednosti u slici.

5.4 Snimanje kaustike na kompozitnom materijalu

Iz kompozitne ploče izrezivane su tri vrste epruveta, tako da je smjer vlakana na epruvetama paralelan, okomit i nagnut pod kutom 45° u odnosu na smjer djelovanja opterećenja. Postupak izrezivanja epruveta je isti kao kod *Araldita*, s tim da se završno glodanje gornjeg ruba provodi poslije nanošenja refleksijskog sloja. Kako se kod prethodnog ispitivanja pokazalo da nagib sile ne utječe bitno na oblik virtualne slike kaustike, ispitivanje na uzorcima iz kompozitnog materijala provedeno je s normalnim opterećenjem.

5.4.1 Nanošenje refleksijskog sloja

U refleksijskoj metodi kaustike specijalni zahtjevi postavljaju se na površinu modela s koje se odbijaju zrake svjetla na zaslon. Površina mora biti optički ravna, a naneseni zrcalni sloj mora dovoljno dobro pratiti deformacije površine modela. Postupak

nanošenja refleksijskog sloja proveden je prema Semenskom [59], a izvodi se u sljedećim koracima:

1. Uklanjanje površinskog sloja epoksidne smole izvodi se brušenjem, čime se površina ujedno i zaglađuje. Za završne obrade koristi se brusni papir minimalne gradacije 800.

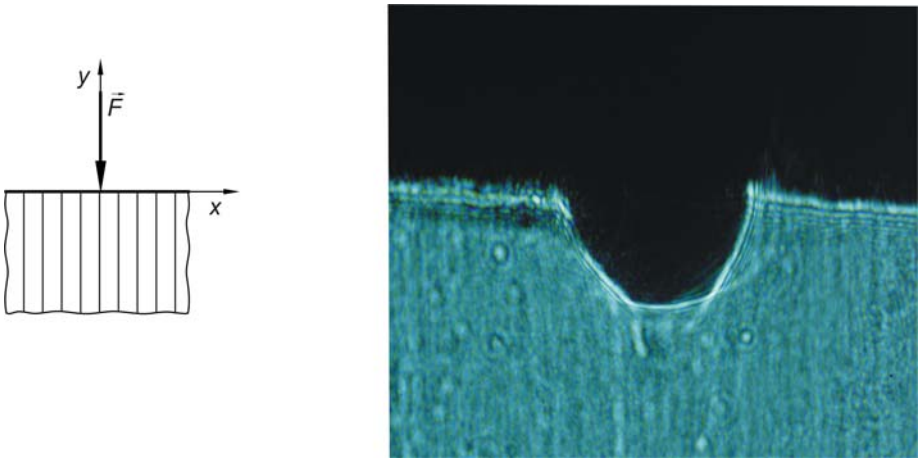
2. Na stakalca optički ravne površine naparivanjem se nanosi tanki sloj aluminija. Korištena su stakalca dimenzija 25x60 mm koja su uobičajena pri radu sa svjetlosnim mikroskopom. Debljina naparenog sloja aluminija iznosi približno 20 μm; tanji slojevi pokazuju efekt poluzrcala te ne reflektiraju dovoljnu količinu svjetla, dok deblji slojevi mogu utjecati na čvrstoću osnovnog materijala.

3. Stakalca se s naparene strane lijepe na uzorke pomoću dvokomponentnog ljepila na bazi epoksidne smole. Prilikom miješanja ljepila pojavljuju se mjehurići zraka koji se uklanjaju centrifugiranjem ljepila.

4. Epruvete se učvršćuju na horizontalnu ravnu podlogu te se na njih stavljaju utezi kako bi se osigurao potreban pritisak od ~10 N/mm^2. Vrijeme polimerizacije ljepila je 24 sata nakon čega se odvajaju stakalca s modela. Sloj aluminija ostaje zalijepljen na epruveti. Primjenom opisanog postupka dobiva se na površini uzorka tanki refleksijski sloj aluminija, optički ravne površine, koja odgovara optički ravnoj površini stakla. Ljepilom se popunjavaju neravnine prethodno prebrušene površine, a zahvaljujući odličnim svojstvima prijanjanja, deformacije se vjerno prenose s površine modela na refleksijski sloj. Pojave odvajanja refleksijskog sloja ili nastanka površinskih pukotina u refleksijskom sloju za vrijeme ispitivanja nisu primijećene.

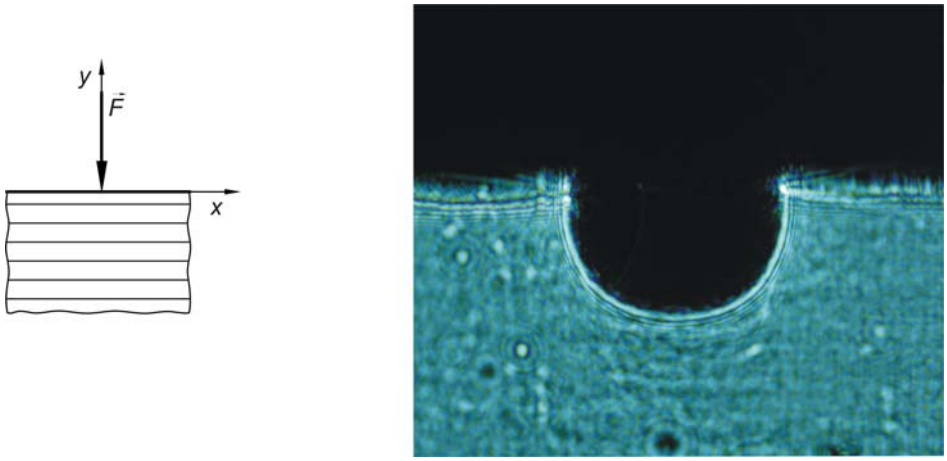
5.4.2 Snimanje optičkog efekta

Na osnovu razmatranja simuliranih optičkih efekata, eksperimentalno snimanje kaustike na kompozitnom materijalu provedeno je za normalno opterećenje snimanjem virtualne slike. Aluminijski sloj nanešen na uzorke pokazao je dobre refleksijske karakteristike što slike čini jasnim i oštrim. Zbog male debljine sloja na slikama se nazire tekstura materijala, nije uočen utjecaj ove pojave na oblik i veličinu kaustike. Količina reflektiranog svjetla je znatno veća nego kod snimanja na *Araldit B* zbog čega je bilo potrebno smanjiti vrijeme ekspozicije.

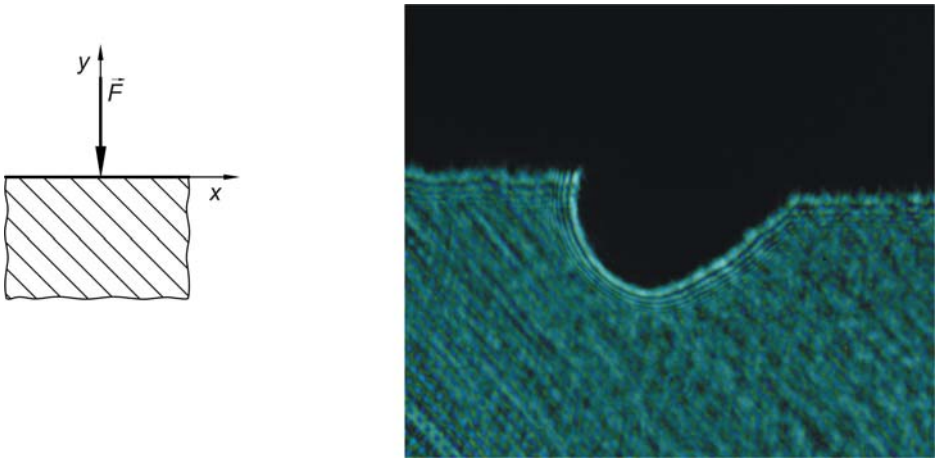


Slika 5.13 Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=90°

Kada su vlakna usmjerena u smjeru opterećenja, primjetno je loše poklapanje oblika eksperimentalne kaustike sa simuliranim efektom. Gornji dio kaustike ostaje otvoreniji iako je u simulaciji više zatvoren. Zrake na slici ne prelaze znatno pravac y=0 što je u skladu sa simuliranim efektom.



Slika 5.14 Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=0°



Slika 5.15 Optički efekt kaustike snimljen na CFRP131 kompozitu za ϑ=45°

Za slučaj ϑ=0° i ϑ=45° (slika 5.14 i slika 5.15) primjetno je dobro poklapanje oblika sa simuliranim optičkim efektom izuzev dijela zraka koje u simulacijama prelaze preko pravca y=0. Za razliku od ostala dva slučaja, kada su vlakna usmjerena pod kutom od 45° u odnosu na smjer opterećenja, oblik kaustike nije simetričan.

Eksperimentalnim snimanjem optičkog efekta kaustike na kompozitnom materijalu potvrđeno je da oblik kaustike ovisi o orijentaciji materijala. Kod povećanja opterećenja uz zadržane ostale parametre, veličina kaustike raste dok oblik ostaje isti.

6

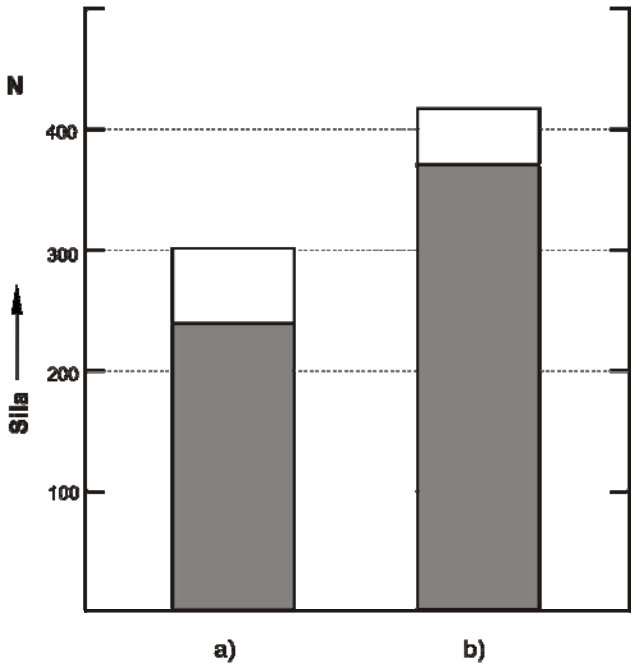
Analiza rezultata

U mehanici loma, optičkom metodom kaustike određuje se koeficijent intenzivnosti naprezanja, npr. [61], [62] i J-integral, npr. [18], [63] što samoj metodi daje veliki značaj. Kod kontaktnih problema, za odabrani materijal, oblik i veličina kaustike ovise o iznosu i smjeru djelovanja kontaktnih sila. Kako je iznos i smjer opterećenja prilikom eksperimentalnog snimanja kaustike lako očitati s uređaja za opterećivanje, bespredmetno ga je mjeriti metodom kaustike. Na realnim konstrukcijama gdje se pojavljuju kontaktne sile poput ležajeva, oslonaca itd. ovakav način ima smisla.

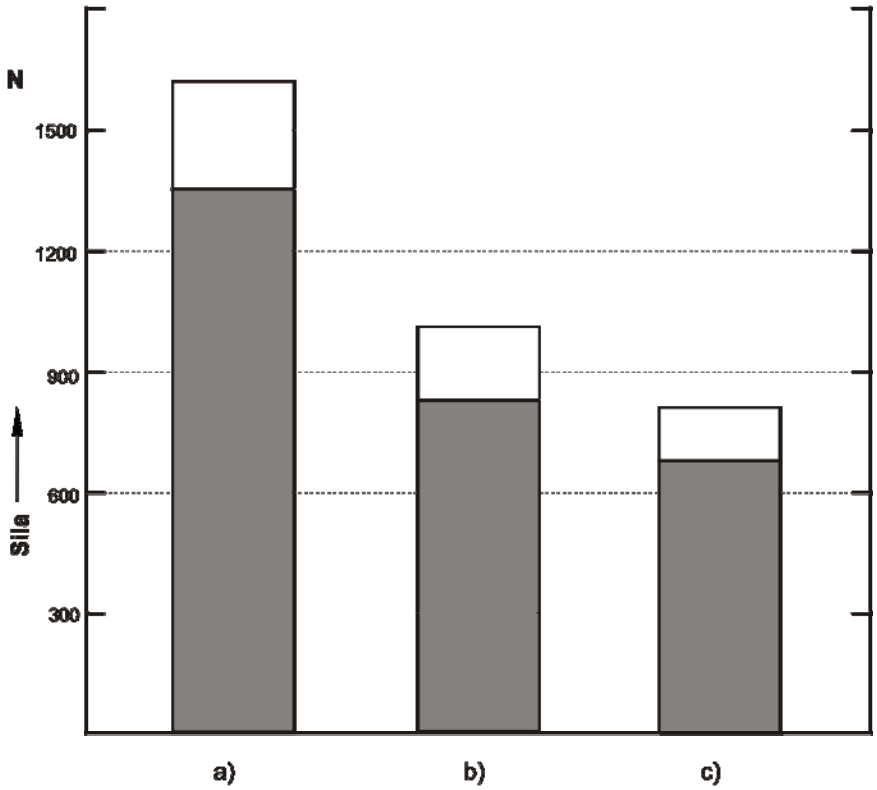
Veličine koje se mogu mjeriti metodom kaustike a imaju znanstveni značaj, su: kritična sila opterećenja kod koje dolazi do plastičnog tečenja materijala, sila koja izaziva trajno oštećenje kompozitnog materijala te granično područje između ravninskog i prostornog stanja naprezanja [64].

6.1 Mjerenje kritične sile opterećenja

Pri povećanju opterećenja iznad kritičnog iznosa dolazi do plastičnog tečenja materijala. U tom slučaju i nakon rasterećenja model se u potpunosti ne vraća u početni oblik. Ova pojava jasno je vidljiva pri eksperimentalnom snimanju kaustike jer nakon rasterećenja modela na zaslonu ostaje optički efekt. U dijagramu 6.1 prikazani su iznosi kritičnih sila opterećenja snimljenih na *Araldit B*. Model je opterećen utiskivačima promjera 10 mm (slika 6.1a) i 20 mm (slika 6.1b). Primijećeno je tijekom ispitivanja da se oblik kaustike, sniman na *Araldit B*, nakon ulaska materijala u plastično područje izdužuje u smjeru osi x. Kritične sile dobivene su iterativnim postupkom.



Slika 6.1 Kritična sila opterećenja Araldita B.
Promjer utiskivača a) *R*=10 mm i b) *R*=20 mm



Slika 6.2 Kritična sila opterećenja CFRP131 kompozita za
a) ϑ=90°, b) ϑ=0° i c) ϑ=45°

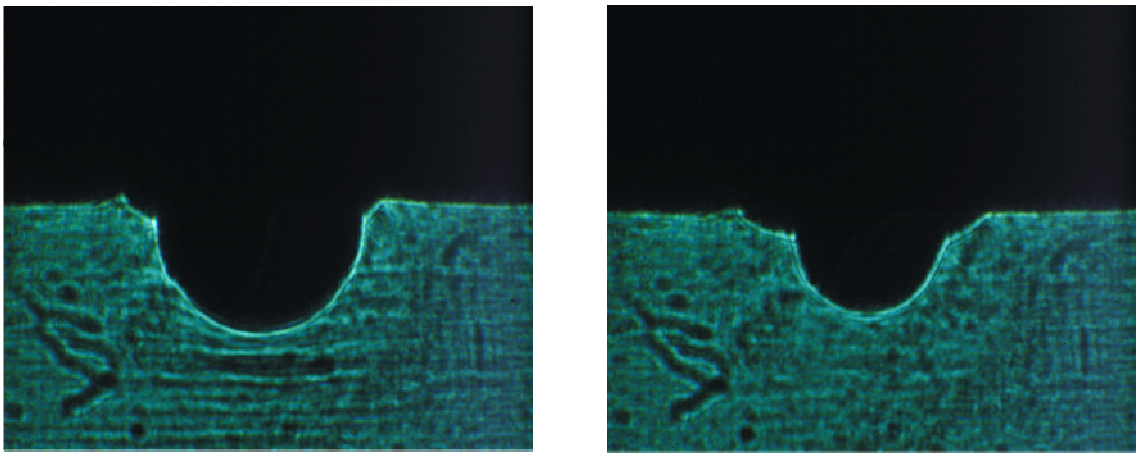
Istim postupkom izvršeno je ispitivanje kritične sile opterećenja na CFRP131 kompozitu za različitu orijentaciju materijala (slika 6.2). Iako su u smjeru vlakana svojstva kompozitnog materijala linearno-elastična sve do prekidne čvrstoće u smjeru okomitom na vlakna, iznad kritične sile dolazi do plastičnog tečenja matrice.

6.2 Oštećenje kompozitnog materijala

Za razliku od metala početak loma kod kompozitnih materijala može se dogoditi već pri niskim naprezanjima zbog velikog broja mikropukotina (obično nastalih tijekom izrade) koje rastu istovremeno. Kod vlaknima ojačanih kompozita mogu se izdvojiti dva osnovna tipa loma:

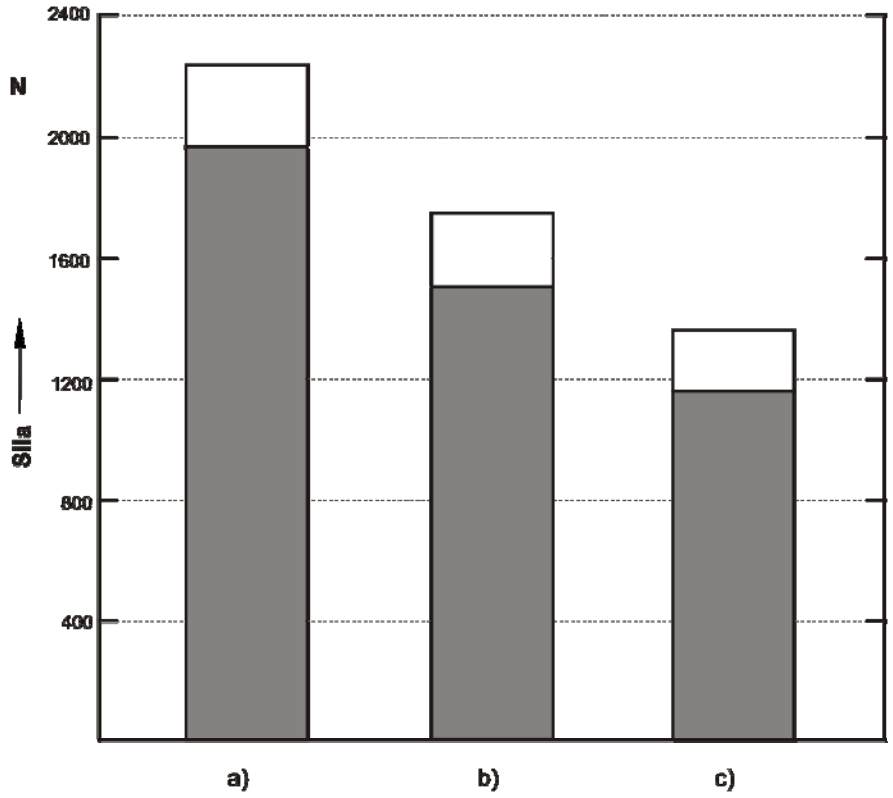
- *lom unutar sloja* – mikropukotine se nakupljaju unutar polimerne matrice te se spajaju i protežu duž vlakna za ojačanje.
- *lom između slojeva* (*raslojavanje ili delaminacija materijala*) takvi lomovi kreću s ruba višeslojnih vlaknima ojačanih kompozita i to s mjesta velikih naprezanja na kojima se javljaju mikronapukline između slojeva. One se mogu proširiti kroz cijeli materijal i podijeliti ga na dva dijela.

Za vrijeme eksperimentalnog snimanja kaustike primijećene su nagle promjene oblika kaustike uz istovremeno smanjenje optičkog efekta. Vizualnim pregledom modela ustanovljena je pojava površinskih pukotina na kompozitnom materijalu. Na slici 6.3 prikazan je utjecaj početka i razvoja pukotine na optički efekt kaustike na zaslonu.



Slika 6.3 Oštećenje kompozitnog materijala, a) pojava i b) propagacija površinske pukotine

Sile kod kojih je uočeno oštećenje materijala u ovisnosti o položaju glavnih osi ortotropije prikazane su dijagramom na slici 6.4.



Slika 6.4 Sile kod kojih dolazi do pojave pukotine u kompozitnom materijalu na mjestu djelovanja kontaktnih sila za a) ϑ=90°, b) ϑ=0° i c) ϑ=45°

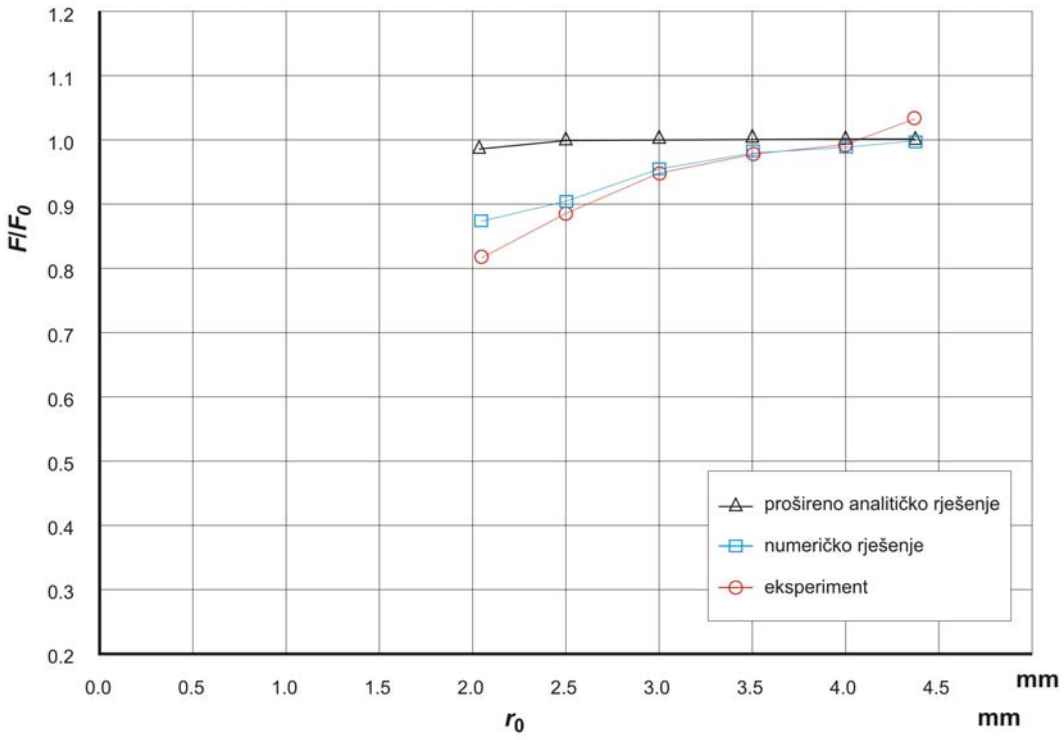
6.3 Određivanje područja prostornog stanja naprezanja

Analitičko rješenje nad kojim su simulirane kaustike uključuje pretpostavku ravninskog stanja naprezanja, međutim, u neposrednoj blizini djelovanja kontaktne sile javlja se područje prostornog stanja naprezanja. Za očekivati je da će se u tom području veličine simulirane kaustike razlikovati od eksperimentalnih rezultata. Karakteristična veličina kaustike teorijski je povezana s iznosom sile opterećenja. Kod eksperimentalnih snimanja iznos sile opterećenja očitava se s uređaja za opterećivanje.

Prije je objašnjeno da zrake koje se nalaze na rubu tamne sjenke dolaze sa inicijalne krivulje na modelu. Položaj inicijalne krivulje može se kontinuirano mijenjati variranjem parametara optičkog postava što znači, da se za konstantno opterećenje, eksperimentalno snimljene i simulirane kaustike mogu uspoređivati nastale za različite inicijalne krivulje. Onog trenutka kada se eksperimentalne i teorijske vrijednosti veličine kaustike počnu

razlikovati, položaj inicijalne krivulje na modelu definira granično područje između ravninskog i prostornog stanja naprezanja. Sličan postupak primijenili su Raftopoulos i suradnici [64] pri analizi prostornog stanja naprezanja u blizini vrška pukotine.

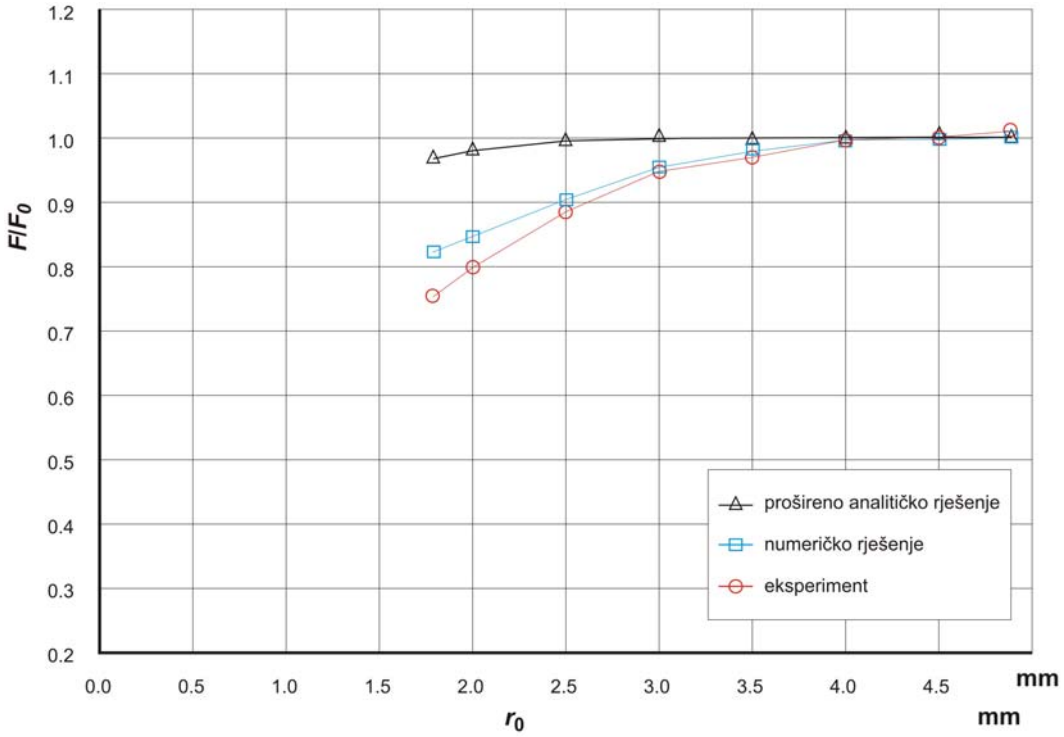
Položaj inicijalne krivulje na modelu mijenja se pomicanjem zaslona u optičkom postavu (slika5.6). U tom slučaju faktor povećanja slike u divergentnom i konvergentnom svjetlu izračunavaju se prema izrazima (5.3) i (5.5), a položaj inicijalne krivulje prema izrazu (4.22).



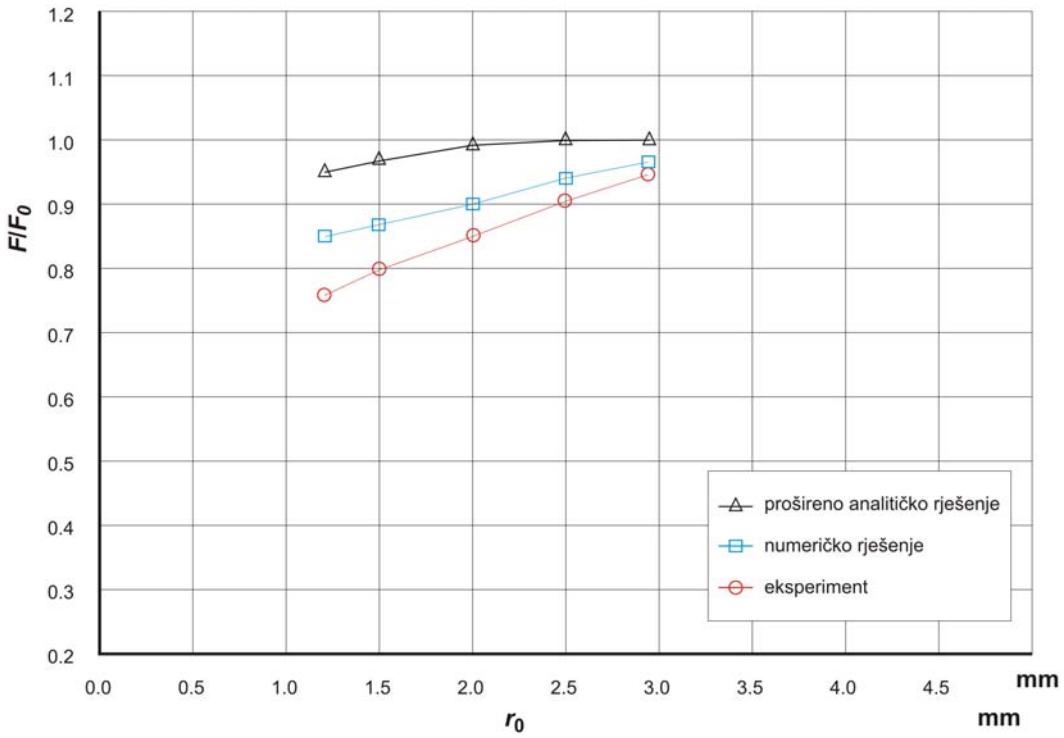
Slika 6.5 Vrijednost omjera F/F_0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal Araldit B, F=100 N

Sa dijagrama na slici 6.5 može se procijeniti da područje ravninskog stanja naprezanja, za parametre u nazivu slike, počinje na udaljenosti od oko 3.5 mm. Veličine eksperimentalno snimljenih kaustika u tom području se podudaraju sa simuliranim efektima. Razlike između numeričkih i eksperimentalnih vrijednosti mogu se pripisati velikim deformacijama koje nisu uključene u numerički model.

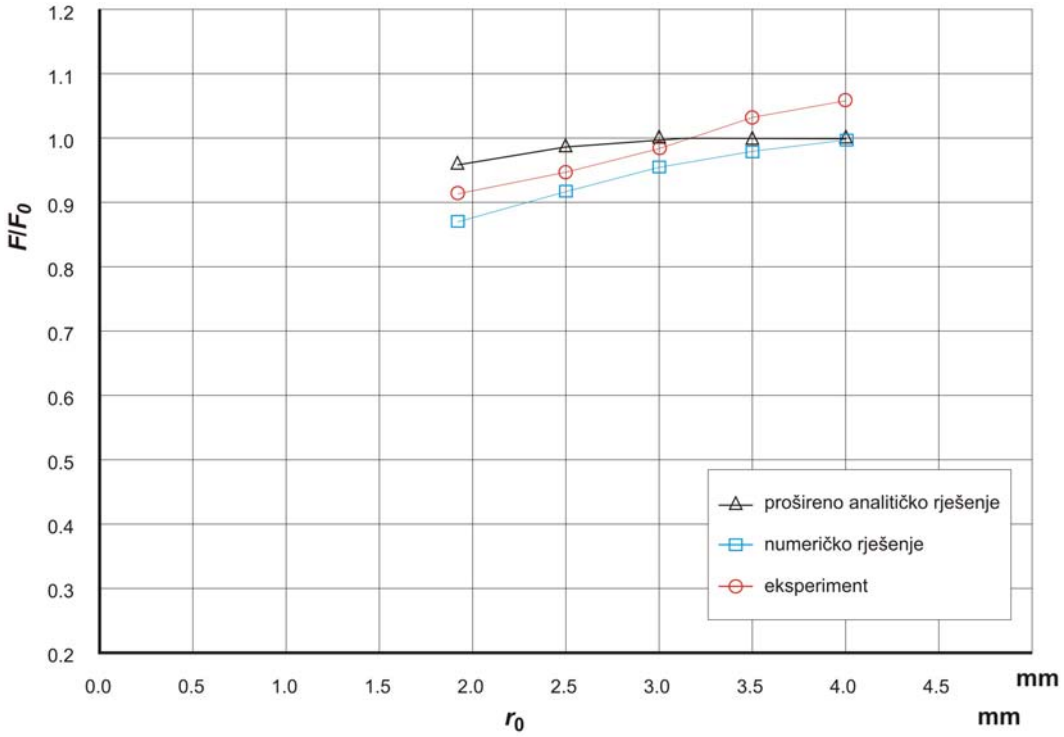
Za položaj vlakana usmjerenih u smjeru djelovanja opterećenja položaj inicijalne krivulje postignut je u rasponu $2{,}1<r_0<4{,}4$ mm. U konvergentnom svjetlu se postižu najveće vrijednosti r_0, ograničenje nastupa kada se veličine kaustike na zaslonu toliko smanje da veličina mjerne nesigurnosti više nije prihvatljiva.



Slika 6.6 Vrijednost omjera F/F_0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=90°, F=600 N



Slika 6.7 Vrijednost omjera F/F_0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=0°, F=600 N



Slika 6.8 Vrijednost omjera F/F_0 u odnosu na položaj inicijalne krivulje, materijal CFRP131, ϑ=45°, F=600 N

Kada su vlakna usmjerena okomito na smjer djelovanja opterećenja postižu se nešto manje vrijednosti r_0 (slika 6.7). Na slici 6.8 vidi se odstupanje eksperimentalnih vrijednosti što se pripisuje nesimetričnom obliku kaustike što otežava očitavanje karakteristične veličine eksperimentalne kaustike.

7

Zaključak

Osnovni cilj ovog rada bila je simulacija i eksperimentalno snimanje kaustike na anizotropnom materijalu u blizini djelovanja kontaktnih sila. Kako je kaustika koja se javlja snimanjem vrška pukotine istražena na izotropnim i na anizotropnim materijalima, ovim radom zaokružena je cjelina primjene metode kaustike u analizi mjesta visokih koncentracija naprezanja na konstrukciji. Za anizotropan materijal odabran je ugljični kompozit s jednosmjerno usmjerenim vlaknima. Zbog visokog stupnja anizotropije koju posjeduje takav materijali, bilo je moguće opisati njegov utjecaj na optički efekt kaustike. Kao komparativan, izotropan materijal odabrana je epoksidna smola naziva *Araldit B*.

Na osnovi rješavanih problema mogu se izvući sljedeći zaključci:

- Optički efekt kaustike javlja se na zaslonu kada postoji singularnost u funkciji preslikavanja zraka svjetla s modela na zaslon. Na konstrukcijama su takva mjesta vršak pukotine i mjesto djelovanja kontaktnih sila. Upravo su to mjesta kritična za stabilnost konstrukcije što metodi kaustike daje dodatan značaj.
- Kod prozirnih modela kaustika se može snimati u prolaznom i u reflektirajućem svjetlu s površine modela, dok se kod neprozirnih modela može snimati samo u reflektirajućem svjetlu. Kako su tehnički materijali uglavnom neprozirni, u ovom radu kaustika je snimana u reflektirajućem svjetlu. Nadalje, ovisno o kombinaciji elemenata u optičkom postavu može se snimati realna i virtualna slika. Eksperimentalnim snimanjem i simulacijama pokazalo se da je virtualna slika kaustike, kod anizotropnih modela, veća i praktičnija za analizu, dok kod realnih slika ne postoje mjerljive karakteristične veličine optičkog efekta. Na izotropnom materijalu se pak oblik realne slike, za razliku od virtualne, može dovesti u vezu s nagibom opterećenja.
- Krivulje kaustike su za sve izotropne materijale iste i mogu se opisati jednadžbom epicikloide. Za anizotropne materijale oblik krivulje kaustike ovisi o mehaničkim

svojstvima i orijentaciji materijala. Ne postoji opće rješenje nego je za svaku vrstu materijala potrebno raditi nove simulacije. I kod izotropnih i kod anizotropnih materijala veličina kaustike raste s porastom opterećenja pri tom ne mijenja oblik ako se ostali parametri ne mijenjaju.

- Metodom kaustike moguće je snimati kritičnu silu opterećenja kod koje će doći do plastičnog tečenja materijala. U tom slučaju, nakon rasterećenja na zaslonu ostaje vidljiv optički efekt koji odgovara plastičnoj deformaciji na modelu.
- Daljnjim povećavanjem opterećenja primijećena je pojava oštećenja kompozitnog materijala. Već i sam početak pojave pukotine vidljiv je na promjeni oblika kaustike. Rubovi kaustike se šire, a istovremeno joj se veličina smanjuje.
- Metodom kaustike moguće je odrediti granicu između ravninskog i prostornog stanja naprezanja na modelu. U slučaju prostornog stanja naprezanja veličina kaustike ne odgovara simulacijama koje su izvedene za ravninsko stanje naprezanja.
- Osim analitičkog rješenja kaustika se može simulirati i nad rješenjem dobivenim nekom od numeričkih metoda. Kroz rješenja pomaka čvorovima na površini modela potrebno je interpolirati matematičku plohu i jednadžbu uvrstiti u teorijski izvod.

Prema svemu izloženom moguće je zaključiti da je ovim radom primjena metode kaustike uspješno proširena na kontaktne probleme anizotropnih materijala. Pokazana ispitivanja su provedena u laboratorijskim uvjetima, a na sličan način je moguća primjena na stvarnim konstrukcijskim elementima u eksploatacijskim uvjetima. Pojave koje je teško predvidjeti, kao što je ovdje bio slučaj oštećenja kompozitnog materijala, potvrđuju opravdanost eksperimentalnih ispitivanja.

Rekapitulacija znanstvenog doprinosa:

- Izvedeni su izrazi za refleksiju zraka svjetla od prednje površine anizotropnog modela za uvjete kosog opterećenja i proizvoljno orijentiranog materijala.
- Provedena je simulacija optičkog efekta kaustike nad analitičkim rješenjem, proširenim analitičkim rješenjem i nad numeričkim rješenjem dobivenim metodom konačnih elemenata. Simulacijama su potvrđene pretpostavke da kod anizotropnih materijala oblik kaustike ovisi o svojstvima i orijentaciji materijala.
- Posebno je dizajniran postav optičkih elemenata za snimanje efekta kaustike koji daje jasne i čiste slike na zaslonu kakve se teško mogu pronaći u dostupnoj literaturi.

Eksperimentalne kaustike na anizotropnom modelu kod kontaktnih problema, prvi puta su jasno snimljene.

- Prikazan je način određivanja kritične sile opterećenja koja dovodi do pojave plastičnog tečenja materijala. Početak tečenja materijala ispod mjesta kontakta ne može se odrediti standardnim eksperimentalnim metodama.
- Zabilježen je utjecaj pojave pukotine u kompozitnom materijalalu na optički efekt kaustike. Određene su sile koje uzrokuju oštećenje materijala.
- Definiran je način primjene metode kaustike u određivanju granice između ravninskog i prostornog stanja naprezanja u modelu.

Smjernice za buduća istraživanja svakako treba tražiti u ispitivanju modela s presvlakama. Zbog velike osjetljivosti optičkog efekta na površinske deformacije moguće je zabilježiti promjene koje ne može zabilježiti niti jedna poznata eksperimentalna metoda. U numeričkim simulacijama rješenje uvijek odgovara ulaznim parametrima koje je kod presvlaka vrlo problematično odrediti, posebno veza među slojevima. Eksperimentalna ispitivanja bi mogla pomoći u razvoju novih numeričkih algoritama u rješavanju kontaktnih problema. Potencijal metode kaustike, kao i kod ostalih optičkih metoda, krije se u njenom brzom odzivu i mogao bi se iskoristiti u ispitivanju dinamičkih i udarnih opterećenja.

8

Literatura

[1] Nye, J. F. (1999). Natural focusing and fine structure of light: caustics and wave dislocations, CRC Press, New York.

[2] Hertz, H. (1882), On the contact of elastic solids, *J. für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 156-171.

[3] Boussinesq, J. (1892), Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 114, 1510-1516.

[4] Flamant, M. (1892), Equilibre d'elasticite – sur la repartition des pressions dans un rectangulaire charge transversalement, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 114, 1465-1468.

[5] Johnson, K. L. (1985), Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Barber, J. R., Ciavarella, M. (2000), Contact mechanics. *Int. J. of Solids and Structures* 37, 29-43.

[7] Lekhnitskii, S.G. (1950) Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Mir Publishers, Moscow.

[8] Stroh, A. N. (1958), Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. Phil. Mag. 3, 625-646.

[9] Ting, T.C.T. (1996), Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. Oxford University Press, New York

[10] Fan, H., Keer, L.M. (1994), Two-dimensional contact on an anisotropic elastic half-space. ASME *J. Appl. Mech*. 61, 250-255.

[11] Barnett, D.M., Lothe, J. (1973), Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Greens function and surface waves in anisotropic elastic solids. *Phys. Norv*. 7, 13-19.

[12] Ning, X. (2002), Analysis of the tribological behavior in transversely isotropic materials utilizing analytical and finite element methods. *Dissertation*, University of Pittsburgh.

[13] Manogg, P. (1964), Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreiβvorgangs von Platten. Dissertation, Universität Freiburg und Br., Freiburg.

[14] Theocaris, P. S. (1970), Local Yielding around a Crack Tip in Plexiglas, *Journal of Applied Mechanics*, 37 (2), 409-414.

[15] Rossmanith, H. P. (1979), Determination of Stress Intensity Factors by the Dynamic Method of Caustics for Optically Isotropic Materials. *Ing. Archiv* 48, 363-381.

[16] Kalthoff, J. F. (1982), Stress Intensity Factor Determination by Caustics. *Proc. of Int. Conf. on Experimental Stress Analysis, Honolulu-Maui-Havaii*, 119-1126.

[17] Rosakis, A. J. (1991), The Optical Method of Caustics I, II. Optic Lasers in Engineering, *Elsevier Applied Science*, 14.

[18] Zender, T. A., Rosakis, A. J., Narasimhan R. (1989). Measurement of the J-Integral with Caustics: An Experimental and Numerical Investigation, *Nonlinear Fracture Mechanics: Volume I – Time-Dependent Fracture*, 318-339.

[19] Tomlinson, R. A., Patterson, E. A. (1999), The effects of Surface Topography on the Method of Caustics. *J. of Experimental Mechanics* 39, 335-342.

[20] Jecić, S., Semenski D. (1987), Experimental Caustics Analysis in Fracture Mechanics of Anisotropic Materials. *J. of Experimental Mechanics* 39, 177-183

[21] Rossmanith, H. P., Knasmillner, R. E., Zhang J. (1991), Ein interaktives Verfahren zur Auswertung von Kaustiken an Riβspitzen in anisotropen Werkstoffen. *Österreichsche Ingenieur und Architekten Zeitschrift*, 6, 210-218.

[22] Green, A. E., Zerna, W. (1954), Theoretical elasticity. Oxford University Press, Oxford.

[23] Semenski, D., Bakić, A. (2005), Fundamentals of anisotropic material contact caustics. *Materials Engineering*, 12, 5-10.

[24] Bakić, A., Alfirević, I., Semenski D. (2007), Deformation of the orthotropic plate in the vicinity of contact region. *Proc. of 24th Danubia Adria Symposium, Sibiu*, 51-52.

[25] Papadopoulos, G. A. (2004), Experimental estimation of the load distribution in bearings by the method of caustics. *J. of Experimental Mechanics* 44, 440-443.

[26] Semenski, D., Bakić A., Stanković, I. (2003), Computation of Contact Caustics. *Transactions of FAMENA*, 2, 33-40.

[27] Yao, X. F., Xu, W., Xu, M. Q., Jin, G. C., Yeh, H.Y.(2004), Caustic study on stress singularities in laminated composites under concentrated loads. *International Journal of Solids and Structures*, 41, 3383-3393.

[28] Filetin, T., Kovačiček, F., Indof, J., (2002), Svojstva i primjena materijala. FSB, Zagreb.

[29] Kaw, A. K. (2006), Mechanics of Composite Materials, second edition. CRC Press Taylor & Francis Group, New York.

[30] Alfirević, I. (2003), Mehanika kontinuuma, Golden marketing, Zagreb.

[31] Neuman, F. (1885). Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, Teubner, Leipzig.

[32] Altenbach, H., Altenbach, J., Kissing, W. (2004), Mechanics of Composite Structural Elements. Springer-Verlag, Berlin.

[33] Broutman, L. J., Krock, H. R. (1975), Composites Materials, Structural Design and Analysis, Part I. Academic Press, New York.

[34] Newnham, R. E. (2005). Properties of Materials; Anisotropy, Simmetry, Structure. Oxford University Press, New York.

[35] Hodgkinson, J. M. (2000), Mechanical testing of advanced fibre composites. CRC Press LLC, New York.

[36] Jenkins, C. H. (1998), Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites. The Fairmont Press, Lilburn, Georgia.

[37] Alfirević, I. (1970). Mjerenje konstanti elastičnosti staklom ojačanih plastika. Zbornik radova FSB, Zagreb, 97-108.

[38] HRN EN ISO 527 (1997). Plastika – određivanje rasteznih svojstava – 5. dio: Uvjeti ispitivanja za plastične kompozite jednosmjerno ojačane vlaknima.

[39] EN ISO 14,129 (1997) Fibre-reinforced Plastic Composites – Determination of In-plane Shear Modulus and Strength by ±45° Tension Test Method.

[40] Iyer, K. (2001), Solution for contact in pinned connections. *Int. J. of Solids and Structures* 38, 9133-9148.

[41] Vlassak, J. J., Nix, W. D., (1994), Measuring the elastic properties of anisotropic materials by means of indentation experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42, 1223-1245.

[42] Barber, J. R., Ting, T. C. T. (2007), Tree-dimensional solutions for general anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solid* 55, 1993-2006.

[43] Ting, T. C. T. (2000), Recent developments in anisotropic elasticity. *Int. J. of Solids and Structures* 37, 401-409.

[44] Hwu, C., Fan, C. W. (1997), Solving the punch problems by analogy with the interface crack problems. *Int. J. of Solids and Structures* 35, 3945-3960.

[45] Rekach, V. G. (1979). Manual of the Theory of Elasticity (prev. s ruskog), Mir Publisher, Moskva.

[46] Mossakowski, J. (1956). The Michell Problem for Anisotropic Semi-infinite Plate, *Arch. mech. stosow*., 8 (4), 539-548.

[47] Muskhelishvili, N. I. (1954), Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoof Pub. Groningen.

[48] Wang, Z. (2006), Contact mechanics of layered composites under axisymmetric indentation. *Dissertation*, Michigan State University.

[49] Jäger, J. (1997), Half-planes without coupling under contact loading. *Archive of Applied Mechanics* 67, 247-259.

[50] Willis, J. R. (1966), Hertzian contact of anisotropic bodies. *J. of Mech. and Phys. of Solids* 14 (3), 163-173.

[51] Swanson, R. S. (2005), Contact deformation and stress in orthotropic plates. Composites: Part A 36, 1421-1429.

[52] Fan, C.W., Hwu, C. (1996). Punch problems for an anisotropic elastic half-plane. *J. Appl. Mech*. 63, 69-76.

[53] Dongye, C., Ting, T. C. T. (1989), Explicit expressions of Barnett-Lothe tensors and their associated tensors for orthotropic materials. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 47, 724-734.

[54] ABAQUS, User's guide and theoretical manual. Version 6.4, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2003.

[55] Konter, A. W. A. (2005), Advanced Finite Element Contact Benchmarks. Project: FENET EU Thematic Network (Contract G1RT-CT-2001-05034).

[56] Born, M., Wolf, E. (1983), Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford.

[57] Papadopoulos, G. A. (1992), Fracture Mechanics: The Experimental Method of Caustics and the Det.-Criterion of Fracture. Springer-Verlag publisher, Berlin.

[58] MATLAB, (2007), Matlab manuals. Version 7.5 Release 2007b, The MathWorks, Inc.

[59] Semenski, D. (1995), Primjena kaustike u mehanici loma anizotropnih materijala. *Doktorska disertacija*, FSB, Zagreb.

[60] Alfirević, I., Jecić, S. (1992). Fotoelasticimetrija, FSB, Zagreb.

[61] Semenski, D. (1989), Metode određivanja koeficijenta intenzivnosti naprezanja. Magistarski rad, FSB, Zagreb

[62] Lee, O.S., Hong, S. K., Kim, Y.S. (1992). Revisit to the Determination of Stress-intensity Factors and J-integrals Using the Caustics Method. *SEM Spring Conference on Experimental Mechanics held in Las Vegas on June 8-11*.

[63] Unger, D. J. (2005), Perfectly plastic caustics for the opening mode of fracture. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 44, 82-94.

[64] Raftopoulos, D. D., Huang, Z., Konsta-Gdoutos, M., Gdoutos, E. E. (1999), Evaluation of the tree-dimensional region around a crack tip by caustic. *Int. Journal of Fracture* 98, 343-350.

KRATKI ŽIVOTOPIS

Ante Bakić rođen je 04. ožujka 1976. godine u Sinju. Osnovnu školu završio je u Trilju, a srednju Prirodoslovno matematičku gimnaziju u Sinju. Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu upisuje 1994. godine. Diplomirao je 1999. na usmjerenju Motori i motorna vozila, smjer Mehaničke konstrukcije. Za uspjeh na studiju nagrađen je Medaljom Fakulteta strojarstva i brodogradnje.

Nakon služenja vojnog roka zapošljava se 2000. godine kao znanstveni novak na Katedri za eksperimentalnu mehaniku pri Zavodu za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje. Angažiran je u nastavi i istraživanju u okviru znanstvenog projekta "Eksperimentalna simulacija oštećenja mehaničkih i biomehaničkih sustava" br. 0120-1201910-1907 čiji je voditelj prof.dr.sc. Mirko Husnjak. Istovremeno pohađa poslijediplomski studij na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, smjer Teorija konstrukcija.

Aktivno sudjeluje u radu na znanstvenim i razvojnim projektima. Koautor je stručnih i znanstvenih radova u području strojarskih konstrukcija i sudionik međunarodnih i domaćih znanstvenih i stručnih simpozija. Osim u istraživačkom radu, aktivno sudjeluje u izvođenju nastave iz kolegija Mehanika I i II, Teorija elastičnosti te Fotogrametrija i vizualizacija objekata.

Član je Hrvatskog društva za mehaniku. Govori i služi se engleskim jezikom.

SHORT BIOGRAPHY

Ante Bakić was born on March 04th 1976 in Sinj. He attended the elementary school in Trilj, followed by gymnasium in Sinj. He enrolled at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb in 1994 where he graduated in 1999 majoring in Engineering Design. For the outstanding academic achievement he was rewarded with medal of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture.

Since 2000 he has been working as a junior researcher at the Chair of Experimental Mechanics of the Department of Engineering Mechanics at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. He has been involved in teaching and is currently working on a scientific project number 0120-1201910-1907 "Experimental simulation of damages of mechanical and biomechanical systems" lead by prof. dr. sc. Mirko Husnjak. He has attended postgraduate studies at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture majoring in Theory of structures.

He has been actively involved in scientific and development research, and has been co-author in professional and scientific papers. He took part in numerous international scientific conferences. Besides research activities, he has also been involved in teaching the following courses: Statics, Dynamics, Theory of elasticity, Photogrammetry and Visualization.

He is a member of Croatian Society of Mechanics. He speaks English language.