Hidroelastičnost i dinamička izdržljivost velikih kontejnerskih brodova

Vladimir, Nikola

Doctoral thesis / Disertacija

2011

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:869418

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb





Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Nikola Vladimir

HIDROELASTIČNOST I DINAMIČKA IZDRŽLJIVOST VELIKIH KONTEJNERSKIH BRODOVA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2011.

Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Nikola Vladimir

HIDROELASTIČNOST I DINAMIČKA IZDRŽLJIVOST VELIKIH KONTEJNERSKIH BRODOVA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Akademik Ivo Senjanović, professor emeritus

Zagreb, 2011.



University of Zagreb
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Nikola Vladimir

HYDROELASTICITY AND FATIGUE STRENGTH OF LARGE CONTAINER SHIPS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Professor Emeritus Ivo Senjanović

Zagreb, 2011

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 629.544:629.5.015.4:629.5.015.5

Ključne riječi: kontejnerski brod, hidroelastičnost, dinamička izdržljivost, strukturni model, hidrodinamički model, hidrostatički model, efektivna krutost, geometrijski diskontinuiteti, spregnute horizontalne i torzijske vibracije, pruženje, frekvencijsko područje, analitičko rješenje, metoda konačnih elemenata, spektralna analiza

Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI

Znanstveno polje: Brodogradnja

Institucija u kojoj je rad izrađen: Fakultet strojarstva i brodogradnje
Sveučilište u Zagrebu

Mentor rada: Akademik Ivo Senjanović, professor emeritus

Broj stranica: 145

Broj slika: 103

Broj tablica: 21

Broj bibliografskih jedinica: 113

Datum obrane: 05. prosinca 2011.

Povjerenstvo: Dr. sc. Većeslav Čorić, red. prof., predsjednik
Akademik Ivo Senjanović, prof. emeritus, mentor
Dr. sc. Joško Parunov, izv. prof.
Dr. sc. Vedran Žanić, red. prof.
Dr. sc. Radoslav Pavazza, red. prof., FESB Split

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Fakultet strojarstva i brodogradnje
Sveučilište u Zagrebu

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentoru akademiku Ivi Senjanoviću, professoru emeritusu, na vođenju tijekom izrade doktorskog rada. Uz to što je svojim savjetima ovaj rad učinio boljim, kroz proteklih nekoliko godina intenzivnog zajedničkog rada poučio me je s koliko se entuzijazma može pristupati rješavanju iznimno složenih tehničkih problema, s koliko radosti se proživljava stjecanje novih znanstvenih spoznaja i s koliko skromnosti njihova međunarodna priznatost.

Hvala članovima povjerenstva na čitanju i recenziji ovog rada. Njihove konstruktivne kritike pomogle su mi riješiti dio nedoumica s kojima sam se susreo, ali su otvorile i nove znanstvene teme koje valja istražiti.

Dr. Stipe Tomašević davao mi je kontinuiranu podršku u istraživanjima, od mog dolaska na Fakultet do završetka ovog rada. Dr. Šime Malenica i Fabien Bigot iz klasifikacijskog društva Bureau Veritas, Pariz, dali su mi niz korisnih sugestija i omogućili korištenje određenih programskih alata te rezultata potrebnih za usporedbu. Dr. Byung-Ki Choi iz korejskog brodogradilišta Hyundai Heavy Industries omogućio mi je korištenje tehničke dokumentacije analiziranog broda. Svima sam iznimno zahvalan.

Zahvaljujem se kolegama i prijateljima na Zavodu, na zajedničkom radu, druženju i pomoći u izradi ovog rada.

Posebno i veliko hvala mojim roditeljima i bratu na podršci. S njima sam uvijek mogao podijeliti neuspjehe, a mojim se uspjesima vesele jednako kao da su njihovi vlastiti.

Naposljetku, mom Stanku i Luciji u znak zahvalnosti za podršku i strpljenje posvećujem ovaj doktorski rad.

SADRŽAJ

PREDGOVOR v
SAŽETAK vi
SUMMARY vii
KLJUČNE RIJEČI viii
KEY WORDS viii
POPIS VAŽNIJIH OZNAKA I KRATICA ix
POPIS SLIKA xiii
POPIS TABLICA xvii
1. UVOD 1
1.1. Opis problema i motivacija 1
1.2. Hipoteza rada 5
1.3. Pregled osnovne literature s opisom postojećih spoznaja 5
1.4. Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada 10
2. HIDROELASTIČNOST BRODSKIH KONSTRUKCIJA 13
2.1. Metodologija hidroelastične analize 13
2.2. Strukturni model 14
2.3. Suhi prirodni oblici vibriranja oplakane površine broda 16
2.4. Hidrodinamički model 17
2.5. Hidrostatički model 19
2.6. Hidroelastični model 22
3. UTJECAJ SMICANJA NA UVIJANJE BRODSKOG TRUPA 23
3.1. Izvod diferencijalnih jednadžbi vibracija grede 23
3.2. Torzijske vibracije prizmatičnog nosača 27
3.3. Gredni konačni element 29
3.4. Transformacija konačnog elementa 36
3.5. Usporedba razvijenog konačnog elementa za analizu spregnutih vibracija s poznatim formulacijama iz literature 38
3.6. Numerički postupak za analizu vibracija 39
3.7. Određivanje značajki poprečnog presjeka brodskog trupa 41
3.8. Verifikacija matematičkog modela za utjecaj smicanja na uvijanje 45
3.8.1. 3D FEM analiza modela jednolikog prizmatičnog pontona 46
3.8.2. Analitičko rješenje za uvijanje jednolikog nosača 47
3.8.3. Usporedba rezultata 50
4. DOPRINOS POPREČNIH PREGRADA KRUTOSTI BRODSKOG TRUPA 53
5. DOPRINOS KONSTRUKCIJE STROJARNICE KRUTOSTI BRODSKOG TRUPA 57
5.1. Općenito o problemu modeliranja strojarnice grednim modelom 57
5.2. Analitičko rješenje za uvijanje segmentnog nosača 60
5.3. Efektivna krutost konstrukcije strojarnice 61

5.4. Distorzija segmentnog pontona 64
5.5. Verifikacija predloženog postupka za određivanje efektivne krutosti 69
5.5.1. 3D FEM analiza modela prizmatičnih pontona 71
5.5.2. Analiza uvijanja prizmatičnih pontona grednim (1+2)D modelom 77
5.5.3. Usporedba rezultata 82
6. GLOBALNI HIDROELASTIČNI ODZIV KONTEJNERSKOG BRODA 89
6.1. Glavne izmjere i značajke analiziranog broda 89
6.2. Provjera valjanosti grednog strukturnog modela 90
6.3. Odziv broda 96
6.4. Usporedba s 3D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelom 98
7. OCJENA UTJECAJA PRUŽENJA NA ZAMOR STRUKTURNOG DETALJA 101
7.1. Teorijske osnove 101
7.1.1. Spektralna metoda 101
7.1.2. Dugoročna razdioba naprezanja 104
7.1.3. Određivanje zamornog oštećenja uporabom S-N krivulja 106
7.2. Analiza zamora hidroelastičnim 3D FEM + 3D BEM modelom 106
7.3. Analiza zamora hidroelastičnim 1D FEM + 3D BEM modelom 110
7.3.1. Prijenos odziva s grednog modela na 3D FEM model potkonstrukcije 110
7.3.2. Prijenosna funkcija naprezanja 113
7.3.3. Proračun akumuliranog zamornog oštećenja strukturnog detalja 115
7.4. Usporedba rezultata 115
8. ZAKLJUČAK 118
8.1. Zaključna razmatranja i izvorni znanstveni doprinos doktorskog rada 118
8.2. Smjernice za daljnja istraživanja 120
LITERATURA 122
ŽIVOTOPIS 130
BIOGRAPHY 131
PRILOG A – Analiza netočnosti uslijed nekonzistentne formulacije konačnih elemenata 132
PRILOG B – Utjecaj modeliranja poprečnih pregrada na odziv brodske konstrukcije 135
PRILOG C – Efektivna krutost tankostjenih nosača 142

PREDGOVOR

Potreba za gradnjom sve većih kontejnerskih brodova, temeljena na pretpostavkama o kontinuiranom rastu potreba za razmjenom dobara na globalnoj razini, zahtijeva primjenu pouzdanih matematičkih modela za njihovo osnivanje i provjeru zadovoljavanja projektnih kriterija. U tim postupcima nužna je provedba direktnih proračuna, zato što su suvremeni kontejnerski brodovi izvan iskustvenih baza na kojima se temelje pravila klasifikacijskih društava. Glavne značajke takvih brodova su razmjerno velika elastičnost i velika brzina, što klasične teorije pomorstvenosti u kojima se najprije analizira gibanje broda na valovima kao krutog tijela, a dobivena opterećenja zatim prenose na strukturni model i analiziraju se naprezanja, čini neprikladnim alatom za direktne proračune. U literaturi je danas već naširoko elaborirana potreba primjene hidroelastičnih proračunskih modela za analizu ponašanja suvremenih kontejnerskih brodova na valovima.

Iako je hidroelastičnost kao disciplina poznata razmjerno dugo i ostvaren je značajan napredak u njenom razvoju, posebice za analizu odziva broda u vertikalnoj ravnini, jedan od prvih uspješnijih ali istovremeno jednostavnijih modela za hidroelastičnu analizu velikih kontejnerskih brodova, osobito prikladnih za ranu fazu osnivanja, razvijen je tek prije nekoliko godina kroz znanstvenu suradnju FSB-a Zagreb i Bureau Veritas-a Pariz (sprezanjem 1D strukturnog i 3D hidrodinamičkog modela). Naime, osnovna razlika između konstrukcije kontejnerskih i ostalih trgovačkih brodova je otvorenost trupa kontejnerskih brodova gotovo cijelom duljinom (osim krajeva i strojarnice), pa njihovi najniži prirodni oblici pripadaju spregnutim horizontalnim i torzijskim vibracijama.

Ova disertacija rezultat je nastojanja da se unaprijedi strukturni dio spomenutog hidroelastičnog modela, uz zadržavanje njegovih komparativnih prednosti u odnosu na metode koje podrazumijevaju sprezanje 3D strukturnih i 3D hidrodinamičkih modela, kao i težnje za istraživanjem granica primjene unaprijeđenog modela za naprednu fazu osnivanja i određivanje lokalnih odziva i koncentracija naprezanja vezanih za ocjenu zamornog vijeka brodske konstrukcije. Kao takva, ona predstavlja svojevrstan kontinuitet u izučavanju hidroelastičnosti brodskih i pomorskih konstrukcija na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu i tematski se preklapa s dijelovima istraživanja u okviru projekta Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske *Opterećenje i odziv brodskih konstrukcija* te EU FP7 projekta *Tools for Ultra Large Container Ships* (TULCS).

SAŽETAK

Hidroelastični proračunski modeli aktualizirani su gradnjom sve većih kontejnerskih brodova, koji imaju specifične konstrukcijske i eksploatacijske značajke. U odnosu na konvencionalne trgovačke brodove, karakterizira ih razmjerno manja krutost (prvenstveno torzijska), što u kombinaciji sa susretnim stanjima mora vezanim za njihovu relativno veću brzinu (oko 27 čv) uvjetuje mogućnost pojave rezonantnog odziva. U ovom doktorskom radu unaprijeđen je hidroelastični model za analizu velikih kontejnerskih brodova, koji se temelji na metodi modalne superpozicije, te je ispitana njegova primjenjivost za određivanje utjecaja linearnog pruženja na zamor brodske konstrukcije. Model je razvijen kroz višegodišnju suradnju FSB-a Zagreb i klasifikacijskog društva Bureau Veritas Pariz. Veći napor uložen je na razumijevanje uloge i poboljšanja strukturnog dijela integralnog modela, pri čemu se posebice razmatra utjecaj smicanja na uvijanje u analizi globalnih vibracija, određivanje efektivne krutosti konstrukcije strojarnice, te utjecaj poprečnih pregrada na strukturni odziv.

U prvom poglavlju detaljno je opisan razmatrani problem, dana je hipoteza istraživanja, pregled osnovne literature i postojećih spoznaja, te je prikazana metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada. Numerički postupak za hidroelastičnu analizu brodskih konstrukcija, s opisom sastavnih dijelova postojećeg hidroelastičnog modela, prikazan je u drugom poglavlju. Uvođenje utjecaja smicanja na uvijanje brodskog trupa u osnovni strukturni model, kao proširenje utjecaja smicanja na savijanje, obrađeno je u trećem poglavlju. Izvedene su diferencijalne jednadžbe za spregnute horizontalne i torzijske vibracije prizmatičnog nosača, a za primjenu na brodski trup dana je formulacija konačnih elemenata, energetskm pristupom. U četvrtom i petom poglavlju istražen je doprinos poprečnih pregrada i konstrukcije strojarnice, kao strukturnih diskontinuiteta, ukupnoj krutosti brodskog trupa. Uz izvode efektivnih parametara krutosti, obrađena je distorzija presjeka kao sekundarna pojava. Šesto poglavlje sadrži numerički primjer u kojem se ilustrira primjena unaprijeđenog strukturnog modela za određivanje globalnog hidroelastičnog odziva velikog kontejnerskog broda nosivosti 11400 TEU. Sedmo poglavlje odnosi se na analizu utjecaja pruženja na zamorni vijek broda, kombinacijom unaprijeđenog hidroelastičnog modela i 3D FEM modela potkonstrukcije. Naposljetku, predstavljena su zaključna razmatranja doktorskog rada, s istaknutim znanstvenim doprinosom i smjernicama za daljnja istraživanja. U prilozima su razmatrani utjecaj konzistentnosti formulacije konačnih elemenata i zanemarenje rotacije masa na rezultate, utjecaj modeliranja pregrada na strukturni odziv prizmatičnog pontona, te određivanje efektivne krutosti tankostjenih nosača.

SUMMARY

Mathematical models for hydroelastic analysis become increasingly important as ever larger container ships with specific design and exploitation characteristics are constructed. Compared with other merchant ships, these ships are characterized by relatively lower stiffness, which, in combination with encounter sea states related to their higher speed of approx. 27 knots, can cause resonance effects. In this thesis, a hydroelastic model for the analysis of large container ships, which is based on the modal superposition method, has been improved and its applicability for the determination of the linear springing effect on the ship structure fatigue has been investigated. The basic model has been developed through the cooperation between the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, and the Bureau Veritas, Paris. Special attention is paid to the influence of shear on torsion and the contribution of transverse bulkheads and closed engine room structure to the hull stiffness.

In the first chapter, the problem is presented in detail, a research hypothesis is formulated, and an overview of the basic literature and current knowledge is given, together with the research methodology and the structure of the thesis. A numerical procedure for the hydroelastic analysis of ship structures and a description of the existing hydroelastic model parts are given in the second chapter. In the third chapter, the effect of shear stress on the torsion of the ship hull is introduced into the basic structural model, following the analogy with the influence of shear on bending. Differential equations for coupled horizontal and torsional vibrations of a prismatic girder have been developed, and a finite element formulation for the application to the ship hull is derived using the energy approach. The fourth and the fifth chapter deal with the contribution of bulkheads and the engine room structure, as structural discontinuities, to the ship hull stiffness. Effective stiffness parameters are derived and the section distortion as a side-effect is dealt with. The sixth chapter gives a numerical example illustrating the application of the improved structural model for determining the global hydroelastic response of a 11 400 TEU container ship. The seventh chapter deals with the influence of springing on the fatigue life of the ship. The analysis was carried out by a combination of the improved hydroelastic model and a 3D FEM substructure model. Finally, conclusions are drawn and a scientific contribution of this doctoral thesis and suggestions for further research are pointed out. In the appendices, the influence of a consistent formulation of finite elements and of the neglect of mass rotation on the results is considered together with the influence of the bulkhead modelling on the structural response of a prismatic pontoon. The effective stiffness of thin-walled girders is also determined.

KLJUČNE RIJEČI

- kontejnerski brod
- hidroelastčnost
- dinamička izdržljivost
- strukturni model
- hidrodinamički model
- hidrostatički model
- efektivna krutost
- geometrijski diskontinuiteti
- spregnute horizontalne i torzijske vibracije
- pruženje
- frekvencijsko područje
- analitičko rješenje
- metoda konačnih elemenata
- spektralna analiza

KEY WORDS

- container ship
- hydroelasticity
- fatigue strength
- structural model
- hydrodynamic model
- hydrostatic model
- effective stiffness
- geometric discontinuities
- coupled horizontal and torsional vibrations
- springing
- frequency domain
- analytical solution
- finite element method
- spectral analysis

POPIS VAŽNIJIH OZNAKA I KRATICA

a – duljina strojarnice (zatvorenog dijela trupa)
A – amplituda, površina poprečnog presjeka
A_i – integracijska konstanta
A_{ij} – elementi matrice pridružene mase
A_s – smična površina
$\left[A(\omega)\right]$ – modalna pridružena masa
b – polovica širine pregrade
b_i – distribuirani bimoment
B – širina broda
B_{ij} – elementi matrice prigušenja
B_w – bimoment
$\left[B(\omega)\right]$ – modalno hidrodinamičko prigušenje
c – udaljenost između težišta mase i centra smicanja, razmak nosača pregrade
C – energijski koeficijent pregrade
C_{ij} – elementi matrice povratne krutosti
C_{ij}^m – koeficijent gravitacijskog dijela povratne krutosti
C_{ij}^{nh} – povratni koeficijent uslijed doprinosa vektora normale i oblika vibriranja
C_{ij}^p – povratni koeficijent uslijed doprinosa vanjskog tlaka
$\left[C\right]$ – matrica povratne krutosti
d – udaljenost centra vitoperenja od neutralne linije dvodna
$\left[d\right]$ – modalna matrica prigušenja konstrukcije
D – akumulirano oštećenje
D_H – usmjerena derivacija
D_{REF} – referentni period
E – Youngov modul elastičnosti
E_{tot} – ukupna energija konačnog elementa
$\left\{f(t)\right\}$ – modalni vektor opterećenja
$\left\{f^e\right\}$ – vektor čvornih sila konačnog elementa
F_i^a – modalna inercijska sila
F^h – ukupna hidrodinamička sila, poopćena sila
F^m – poopćena gravitacijska sila
F^R – radijacijska sila
F_i^v – modalna prigušna sila
$\left\{F\right\}$ – vektor uzbudnih sila
g – gravitacijska konstanta
G – modul smicanja
h – udaljenost kutije pregrade od dvodna
$\mathbf{h}_i$ – vektor prirodnih oblika vibriranja
H – visina broda

H_s – značajna valna visina
$\mathbf{H}$ – vektor deformacije oplakane površine
i – moment tromosti po jedinici širine
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – jedinični vektor
i_t – moment uvijanja po jedinici širine
I_b – moment tromosti presjeka
I_s – smični modul tromosti
I_t – faktor krutosti poprečnog presjeka na uvijanje
I_t^* – ekvivalentni faktor krutosti poprečnog presjeka na uvijanje
I_w – faktor krutosti poprečnog presjeka na vitoperenje
J_b – moment tromosti mase oko vertikalne osi
J_t – polarni moment tromosti mase broda i pridružene mase oko centra smicanja
J_w – bimoment tromost mase broda oko centra vitoperenja
k – utjecajni koeficijent paluba, broj referentih vrijednosti naprezanja
k_e – krutost elastične podloge
$[k]$ – modalna matrica krutosti konstrukcije
$[k]_{bs}$ – matrica krutosti savijanje–smicanje
$[k]_t$ – matrica torzijske krutosti
$[k]_{ws}$ – matrica krutosti vitoperenje–smicanje
$[k^e]$ – matrica krutosti konačnog elementa
$[K]$ – matrica krutosti
l – duljina konačnog elementa
L_{oa} – duljina broda preko svega
L_{pp} – duljina broda između okomica
m – distribuirana masa po jedinici duljine
m_n – spektralni moment
$m_1,\ m_2$ – inverzni nagibi segmenata S-N krivulje
$[m]$ – modalna matrica mase konstrukcije
$[m]_{sb}$ – matrica mase smicanje–savijanje
$[m]_{st}$ – matrica mase smicanje–uvijanje
$[m]_{ts}$ – matrica mase uvijanje–smicanje
$[m]_{tw}$ – matrica mase uvijanje–vitoperenje
$[m^e]$ – matrica mase konačnog elementa
M – moment savijanja
M_t – moment uvijanja
$[M]$ – matrica masa
n – redni broj oblika vibriranja
n_i – broj ciklusa konstantnog raspona naprezanja
n_{ex} – očekivani broj premašivanja razine odziva tijekom referentnog perioda
$\mathbf{n}$ – jedinični vektor normale

N_i – broj ciklusa naprezanja koje uzrokuje lom za određeni raspon naprezanja
N_{ss} – broj stanja mora
N_t – ukupni broj ciklusa naprezanja za jedno stanje mora
p – tlak
q_i – distribuirano poprečno opterećenje
Q – smična sila
$s_1,\ s_2$ – faktori kompatibilnosti vitoperenja
S – oplakana površina
S_w – spektar valova
t – varijabla vremena, debljina lima
T – gaz broda, moment uvijanja
T_p – vršni period
T_t – moment čistog uvijanja
T_w – moment uvijanja uslijed spriječenog vitoperenja
T_Z – srednji nulti period
$\left[\tilde{T}\right]$ – matrica transformacije
u – uzdužni pomak
$\bar{u}$ – funkcija vitoperenja poprečnog presjeka svedena na oplakanu površinu
U – relativni uzdužni pomak rubova palube u odnosu na dvodno
U_g – energija deformacije roštilja pregrade
U_s – energija deformacije kutije pregrade
U^p – energija deformacije pregrade kao ortotropne ploče
U^z – energija deformacije pregrade kao zatvorenog poprečnog presjeka
v – brzina broda, progib grede
V – volumen
w – progib, funkcija vitoperenja, sektorska koordinata
w_b – progib uslijed savijanja
w_s – progib uslijed smicanja
$x,\ y,\ z$ – lokalne koordinate
$X,\ Y,\ Z$ – globalne koordinate
z_N – vertikalna koordinata neutralne linije
$z_S,\ z_{SC}$ – vertikalna koordinata centra smicanja
β – omjer krutosti na savijanje i smicanje
γ – omjer krutosti na vitoperenje i smicanje
δ – kut distorzije
$\{\delta\}$ – vektor pomaka
$\{\delta^e\}$ – vektor čvornih pomaka konačnog elementa
Δ – istisnina
ΔS – raspon naprezanja
$\{\Delta\}$ – vektor pomaka
$[\zeta]$ – matrica relativnog prigušenja
ϑ – prirast kuta uvijanja, omjer krutosti elastične podloge i grede
μ_i – distribuirani moment savijanja

μ_{ti} – distribuirani moment uvijanja
ν – Poissonov koeficijent
ξ – modalna amplituda, bezdimenzijska koordinata
π – Ludolfov broj
ρ – gustoća fluida (mora)
ρ_s – gustoća materijala konstrukcije
σ – normalno naprezanje
σ_w – normalno naprezanje uslijed spriječenog vitoperenja
τ_b – smično naprezanje uslijed savijanja
τ_t – smično naprezanje uslijed čistog uvijanja
τ_w – smično naprezanje uslijed spriječenog vitoperenja
φ – potencijal, kut uvijanja presjeka
φ_i – potencijal nailaznog vala
φ_D – difrakcijski potencijal
φ_{Rj} – radijacijski potencijal
$[\phi]$ – matrica prirodnih oblika vibriranja
$\{\phi\}_i$ – vektor prirodnih oblika vibriranja
$\{\phi(t)\}$ – relativni vektor opterećenja
χ – susretni kut (broda i vala)
ψ – kut uvijanja
ψ_s – kut uvijanja uslijed smicanja
ψ_t – kut čistog (St. Venantovog) uvijanja
ω – prirodna frekvencija, frekvencija nailaznog vala
ω_e – susretna frekvencija
∇ – Hamiltonov diferencijalni operator

ABS – American Bureau of Shipping
BEM – Boundary Element Method (Metoda rubnih elemenata)
BV – Bureau Veritas
FEM – Finite Element Method (Metoda konačnih elemenata)
LVL – Laka vodna linija
RAO – Response Amplitude Operator
RMS – Root Mean Square
TEU – Twenty-foot Equivalent Unit

POPIS SLIKA

Slika 1.1 Kontejnerski brod *Emma Maersk* nosivosti 14500 TEU 1
Slika 1.2 Tipični odzivi pruženja (lijevo) i podrhtavanja (desno), gore – ukupni signal, dolje – pročišćeni signal 2
Slika 1.3 Ispitivanje kontejnerskih brodova; a) simulacija, b) modelski test, c) rezultati mjerenja u naravi 9
Slika 2.1 Metodologija hidroelastične analize 13
Slika 2.2 Geometrijski diskontinuiteti brodskog trupa 15
Slika 2.3 Mreža oplakane površine 19
Slika 2.4 Hidroelastični FSB-BV model 22
Slika 3.1 Savijanje i uvijanje grede 23
Slika 3.2 Poprečni presjek tankostjenog nosača 24
Slika 3.3 Gredni konačni element 30
Slika 3.4 Program STIFF za proračun parametara krutosti – vitoperenje poprečnog presjeka 42
Slika 3.5 Idealizacija poprečnog presjeka brodskog trupa 43
Slika 3.6 Sektorska koordinata, *w* 44
Slika 3.7 Integral sektorske koordinate, S_w^* 44
Slika 3.8 Glavno rebro kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU 45
Slika 3.9 Model superelemenata jednolikog pontona 46
Slika 3.10 Rubno opterećenje modela 47
Slika 3.11 Deformacija pontona momentom uvijanja na slobodnom kraju, 3D FEM model ..47
Slika 3.12 Uvijanje prizmatičnog nosača 48
Slika 3.13 Kut uvijanja pontona 50
Slika 3.14 Relativni uzdužni pomak 50
Slika 3.15 Relativni moment uvijanja i vitoperenja 51
Slika 3.16 Relativni bimoment vitoperenja 51
Slika 3.17 Kut uvijanja na kraju pontona 52
Slika 4.1 Poprečne pregrade kontejnerskog broda, a) vodonepropusna, b) propusna 53
Slika 4.2 Deformacija pregrade, 3D FEM model, a) pogled odozgo, b) bočni pogled (od središnje linije) 54
Slika 4.3 Deformacija pregrade uslijed vitoperenja poprečnog presjeka 55
Slika 4.4 Uzdužni presjek skladišta kontejnerskog broda 56

Slika 5.1 Deformacija krmenog dijela kontejnerskog broda kapaciteta 7800 TEU, 3D FEM model 57
Slika 5.2 Deformacija krmenog dijela kontejnerskog broda kapaciteta 11400 TEU, 3D FEM model 57
Slika 5.3 Deformirani 3D FEM model (polovica) kutijastog nosača 58
Slika 5.4 Kut uvijanja otvorenog kutijastog nosača sa zatvorenim krajevima, a) (B_w, ψ') kompatibilnost, b) (ψ', φ) diskontinuitet, c) efektivna krutost, d) FEM 59
Slika 5.5 Uvijanje segmentnog nosača 60
Slika 5.6 Deformacija gornje palube i zakretanje dvodna, a) ptičji pogled, b) bočni pogled 62
Slika 5.7 Smične sile na spoju otvorenog (°) i zatvorenog segmenta (*) 64
Slika 5.8 Smične sile na spoju dugog otvorenog i kratkog zatvorenog segmenta (kvalitativni prikaz) 65
Slika 5.9 Pomaci i membranske deformacije palube i pregrade 65
Slika 5.10 Palubni kutijasti nosači kao grede na elastičnoj podlozi 67
Slika 5.11 Greda na elastičnoj podlozi 67
Slika 5.12 Definiranje krutosti elastične podloge palubnih nosača 68
Slika 5.13 Vitoperenje poprečnog presjeka, a) otvoreni, b) zatvoreni 70
Slika 5.14 Položaj referentnih točaka, a) otvoreni presjek, b) zatvoreni presjek 71
Slika 5.15 Karakteristični superelement skladišta 72
Slika 5.16 Karakteristični superelement skladišta s poprečnom pregradom 72
Slika 5.17 Superelement strojarnice 73
Slika 5.18 Model superelemenata segmentnog pontona, a) bez pregrada, b) s pregradama 73
Slika 5.19 Deformacija jednolikog pontona bez pregrada, bočni i ptičji pogled 74
Slika 5.20 Deformacija jednolikog pontona s pregradama, bočni i ptičji pogled 74
Slika 5.21 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, bočni i ptičji pogled 75
Slika 5.22 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, bočni i ptičji pogled 75
Slika 5.23 Deformirani superelement strojarnice (ponton bez pregrada), bočni, uzdužni, ptičji i riblji pogled 76
Slika 5.24 Smična naprezanja u pramčanoj pregradi strojarnice (ponton bez pregrada) 76
Slika 5.25 Smična naprezanja na unutarnjem rubu pramčane pregrade strojarnice (ponton bez pregrada) 77
Slika 5.26 Deformacija jednolikog pontona bez pregrada 78
Slika 5.27 Deformacija jednolikog pontona s pregradama 78
Slika 5.28 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, sa stvarnim parametrima 79

Slika 5.29 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, sa stvarnim parametrima 79
Slika 5.30 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, s efektivnim parametrima 80
Slika 5.31 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, s efektivnim parametrima..... 80
Slika 5.32 Poprečni presjek kutijastog nosača palube 81
Slika 5.33 Kutovi uvijanja segmentnog pontona bez pregrada 83
Slika 5.34 Uzdužni pomaci palube i dna segmentnog pontona bez pregrada 83
Slika 5.35 Kutovi uvijanja segmentnog pontona s pregradama 84
Slika 5.36 Uzdužni pomaci palube i dna segmentnog pontona s pregradama..... 85
Slika 5.37 Vertikalni položaj centra uvijanja 86
Slika 5.38 Vertikalni položaj centra vitoperenja 86
Slika 5.39 Kutovi uvijanja i distorzije spoja otvorenog i zatvorenog segmenta 87
Slika 5.40 Distribucija naprezanja na gornjoj palubi i uzvoju 87
Slika 6.1 Opći plan analiziranog kontejnerskog broda, nosivosti 11400 TEU..... 89
Slika 6.2 Prirodni oblici spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, 1D model 93
Slika 6.3 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM 94
Slika 6.4 Prvi prirodni oblik spregnutih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM..... 94
Slika 6.5 Drugi prirodni oblik spregnutih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM 94
Slika 6.6 Prvi prirodni oblik spregnutih vibracija nakrcanog broda, 3D FEM i 1D FEM 95
Slika 6.7 Drugi prirodni oblik spregnutih vibracija nakrcanog broda, 3D FEM i 1D FEM..... 95
Slika 6.8 Hidrodinamički model kontejnerskog broda 96
Slika 6.9 Prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, χ=120°, v=24,7 čv 97
Slika 6.10 Prijenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja, χ=120°, v=24,7 čv 97
Slika 6.11 Prijenosne funkcije momenta uvijanja, χ=120°, v=24,7 čv..... 97
Slika 6.12 Prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, χ=120°, v=15,75 čv 98
Slika 6.13 Prijenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja, χ=120°, v=15,75 čv 99
Slika 6.14 Prijenosne funkcije momenta uvijanja, χ=120°, v=15,75 čv..... 99
Slika 7.1 Izvorni postupak spektralne analize 102
Slika 7.2 Spektralna analiza na osnovi hidroelastičnog modela..... 103
Slika 7.3 Shematski prikaz korištenja S-N krivulje..... 106
Slika 7.4 Razmatrani strukturni detalj kontejnerskog broda 107
Slika 7.5 Položaj razmatranog strukturnog detalja na brodu..... 108
Slika 7.6 S-N krivulje 109
Slika 7.7 Ulazna lista za proračun zamornog oštećenja 109

Slika 7.8 Prijenosna funkcija naprezanja središnjeg konačnog elementa trake, 3D FEM + 3D BEM model.....110
Slika 7.9 3D FEM model potkonstrukcije.....111
Slika 7.10 Fina mreža 3D FEM modela potkonstrukcije.....111
Slika 7.11 Prijenosne funkcije progiba vertikalnog savijanja, 1D model, x=177,12 m.....112
Slika 7.12 Prijenosne funkcije progiba horizontalnog savijanja, 1D model, x=177,12 m.....112
Slika 7.13 Deformirani 3D FEM model potkonstrukcije, ω=0,90 rad/s, a) realna komponenta, b) imaginarna komponenta.....113
Slika 7.14 Distribucija naprezanja u strukturnom detalju, ω=0,90 rad/s, a) realna komponenta, b) imaginarna komponenta.....114
Slika 7.15 Prijenosna funkcija naprezanja središnjeg konačnog elementa trake, 1D FEM + 3D BEM model.....114
Slika 7.16 Usporedba prijenosnih funkcija naprezanja.....116
Slika 8.1 Model kontejnerskog broda Rigoletto; a) ovješen, b) tijekom ispitivanja u vodi.....121
Slika B.1 Topologija čvorova i elemenata zatvorenog presjeka na području poprečne pregrade, program STIFF.....138
Slika B.2 Debljine oplate zatvorenog presjeka, program STIFF.....139
Slika B.3 Kutovi uvijanja pontona u ovisnosti o načinu modeliranja brodskog trupa.....140
Slika C.1 Membranski „strip“ element.....142

POPIS TABLICA

Tablica 5.1 Geometrijske značajke poprečnih presjeka broda 70
Tablica 5.2 Relativni moment tromosti volumena konstrukcije paluba 71
Tablica 5.3 Pomaci pontona bez pregrada 81
Tablica 5.4 Pomaci pontona s pregradama 81
Tablica 6.1 Značajke krutosti propusne pregrade 90
Tablica 6.2 Značajke krutosti nepropusne pregrade 90
Tablica 6.3 Krutost kutije pregrade 90
Tablica 6.4 Relativna energija deformiranja pregrada 91
Tablica 6.5 Prirodne frekvencije horizontalnih vibracija u ovisnosti o formulaciji konačnih elemenata, f_i (Hz) 91
Tablica 6.6 Prirodne frekvencije vertikalnih vibracija trupa, f_i (Hz) 92
Tablica 6.7 Prirodne frekvencije horizontalnih vibracija trupa, f_i (Hz) 92
Tablica 6.8 Prirodne frekvencije spregnutih vibracija trupa, f_i (Hz) 92
Tablica 6.9 Prirodne frekvencije nakrcanog broda, f_i (Hz) 96
Tablica 7.1 Zamorno oštećenje, 3D FEM + 3D BEM model 110
Tablica 7.2 Zamorno oštećenje, 1D FEM + 3D BEM model 115
Tablica A.1 Prirodne frekvencije vibracija prizmatičnog pontona, f_i (Hz) 134
Tablica B.1 Značajke krutosti propusne pregrade pontona 135
Tablica B.2 Značajke krutosti nepropusne pregrade pontona 136
Tablica B.3 Krutost kutije pregrade pontona 136
Tablica B.4 Energija deformiranja pregrada pontona 136
Tablica B.5 Parametri krutosti konačnih elemenata pregrade i skladišta 140

1. UVOD

1.1. Opis problema i motivacija

Zahtjevi za sve većim protokom roba na globalnoj razini, te odavno započeti proces kontejnerizacije (1956. godine), rezultiraju kontinuiranim povećanjem udjela kontejnerskih brodova u ukupnoj svjetskoj floti. Jednostavnost kontejnerskog transporta, brzina, sigurnost, niski jedinični troškovi te usklađenost s drugim oblicima transporta (intermodalnost) doveli su do gradnje ultra velikih kontejnerskih brodova. Krajem 2005. godine svjetska kontejnerska flota brojala je oko 3500 brodova, s ukupnim kapacitetom preko 8 milijuna TEU (*Twenty-foot Equivalent Unit*; mjera kapaciteta standardnog kontejnera) [1]. Zadnjih godina trend u porastu veličine kontejnerskih brodova je nastavljen, pa najveći od njih već imaju kapacitet preko 14500 TEU, Slika 1.1. Najnoviji podaci izneseni u rubrici Zanimljivosti časopisa Brodogradnja (br. 1, 2011. god.) govore o ugovorenoj gradnji deset tzv. megakontejnerskih brodova za dansku brodarsku tvrtku *Maersk Line* s kapacitetom od 18000 TEU (duljina x širina x visina = 400 x 59 x 73 m) koji bi se trebali graditi u južnokorejskom brodogradilištu *Daewoo Shipbuilding & Marine Engineering*. Usprkos činjenici da će kontejnerski transport u bližoj budućnosti biti uvjetovan sekundarnim aspektima kao što su: dubina mora u lukama, ograničavajuće dimenzije kanala na glavnim svjetskim plovnim putovima, ograničenja u prekrcajnoj infrastrukturi i sl., ne bi bilo neobično da zaživi poznati projekt Malaccamax s predviđenom nosivošću također od 18000 TEU, ali duljinom od 470 m i širinom od 60 m.

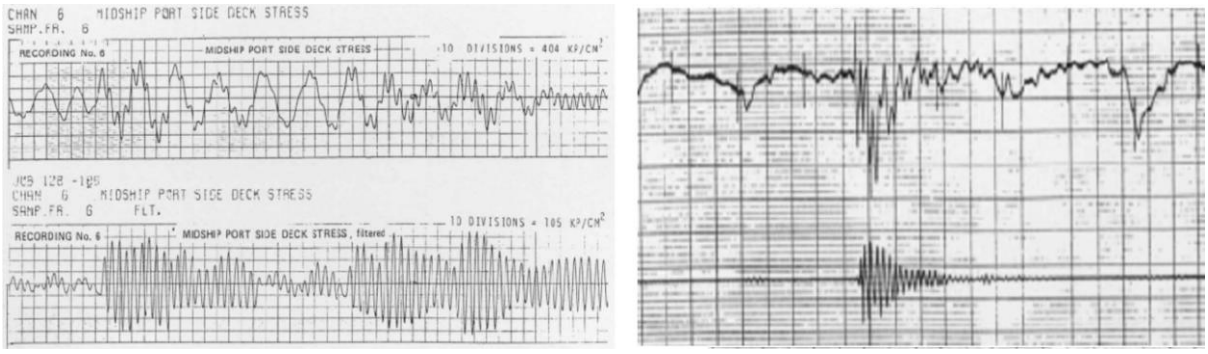


Slika 1.1 Kontejnerski brod *Emma Maersk* nosivosti 14500 TEU [2]

Posljednjih nekoliko godina na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku FSB-a odvija se intenzivan istraživački rad iz područja hidroelastičnosti velikih kontejnerskih brodova: sprezanje razvijenog sofisticiranog grednog modela brodske konstrukcije s 3D hidrodinamičkim modelom Bureau Veritasa rezultiralo je softverskim alatom za djelotvornu i brzu provedbu hidroelastične analize. Rezultati su prikazani u disertaciji S. Tomaševića [3],

nizu znanstvenih radova u vodećim znanstvenim časopisima i zbornicima međunarodnih znanstvenih skupova, kao i u dokumentaciji za odobravanje FP7 projekta Europske Unije TULCS (*Tools for Ultra Large Container Ships*), na kojem uz istraživačku grupu Zavoda za brodogradnju i pomorsku tehniku, pod vodstvom klasifikacijskog društva Bureau Veritas, sudjeluju istraživači iz 12 renomiranih europskih institucija te južnokorejsko i najveće svjetsko brodogradilište Hyundai Heavy Industries kao pridruženi partner.

Povećanje duljine (i ostalih dimenzija) suvremenih brodova, posebice kontejnerskih, rezultiralo je njihovom većom elastičnošću, a time i snižavanjem prirodnih frekvencija vibriranja. S druge strane, eksploatacijski zahtjevi (brzina oko 27 čv) rezultiraju razmjerno visokim susretnim frekvencijama, koje mogu zaći u područje prirodnih frekvencija broda, što dovodi do rezonancije. Pruženje broda (eng. *springing*), tj. rezonantno vibriranje prvog oblika i podrhtavanje broda (eng. *whipping*), tj. prolazno vibriranje pobuđeno djelovanjem impulsnog opterećenja (udaranje pramca o valove, zalijevanje palube, podvodna eksplozija i sl.), Slika 1.2, slučajevi su u kojima se strukturni odziv više ne može vjerodostojno određivati prenošenjem tlakova dobivenih klasičnim teorijama pomorstvenosti krutog tijela na elastičnu konstrukciju, već je potrebna primjena hidroelastičnih modela, koji istovremeno uzimaju u obzir njihanje na valovima i vibracije brodskog trupa tj. njihovo međudjelovanje. Drugi aspekt vezan je za činjenicu da su veliki kontejnerski brodovi na granici primjenjivosti pravila za gradnju broda klasifikacijskih društava temeljenih na iskustvu. Naime, nije potpuno jasno u kojoj mjeri su prethodno navedeni dinamički fenomeni obuhvaćeni pravilima i granicama sigurnosti, pa je za pouzdano projektiranje velikih kontejnerskih brodova nužna provedba direktnih proračuna. Štoviše, i za konvencionalne brodove, današnji trendovi nameću provedbu direktnih proračuna, jer osnivanje temeljeno na pravilima u pojedinačnim slučajevima ne mora nužno voditi optimalnom projektu.



Slika 1.2 Tipični odzivi pruženja (lijevo) i podrhtavanja (desno), gore – ukupni signal, dolje – pročišćeni signal [4]

Opisani problemi analize odziva kontejnerskih brodova nisu jedini gdje se provođenje hidroelastične analize nameće kao potreba. Hidroelastičnim se analizama podvrgavaju i vrlo velike plutajuće konstrukcije VLFS (*Very Large Floating Structures*), plutajući dokovi, pritegnute platforme, SWATH (*Small Waterplane Area Twin Hull*) brodovi, brodovi za prijevoz rasutog tereta, veliki brodovi za prijevoz ukapljenog plina i sl., [5].

Hidroelastični modeli do sada su uspješno primjenjivani na različite vrste brodova kod kojih je dominantan odziv u vertikalnoj ravnini, ali tek hidroelastični model opisan u [3] nudi pouzdanu mogućnost primjene i na kontejnerske brodove (podrazumijevajući strukturni model kao gredni), kod kojih najniži prirodni oblici pripadaju spregnutim horizontalnim i torzijskim vibracijama. Spomenuti model osobito je prikladan za analizu globalnog hidroelastičnog odziva.

Potreba za vjerodostojnim hidroelastičnim modelom nije vezana samo za proračun istovremenog njihanja broda na valovima i elastičnih deformacija, već i za proračun naprezanja promjenjive amplitude koje za posljedicu može imati zamor brodske konstrukcije. Iako je problem zamora u brodskim konstrukcijama poznat razmjerno dugo, on je vrlo aktualan posebice kod brodova čija konstrukcija podrazumijeva uporabu čelika povišene čvrstoće (zbog povećanja dopuštene amplitude naprezanja). Akumulacija zamornog oštećenja na brodu je kontinuiran proces tijekom cijelog eksploatacijskog perioda, pri čemu je stupanj oštećenja vezan za susretna stanja mora, brzinu napredovanja, susretne kutove, stanje krcanja itd. [6]. Danas postoji nekoliko postupaka za proračun zamornog vijeka brodskih konstrukcija temeljenih na primjeni metode konačnih elemenata i opisanih u [7]. Usprkos činjenici da je razvoj numeričkih modela za proračun zamora, podrazumijevajući hidroelastični odziv broda na valovima, posljednjih godina u ekspanziji, ni za jedan od njih se ne može pouzdano tvrditi da zamorni vijek konstrukcije predviđa na prihvatljivoj razini točnosti. U praksi se pojavljuju velike razlike između procijenjenog i stvarnog zamornog vijeka.

Tijekom osnivanja velikih kontejnerskih brodova potrebno je, dakle, voditi računa o pruženju i podrhtavanju broda. Pritom je potrebno provjeriti utjecaj pruženja na zamor brodske konstrukcije, dok podrhtavanje broda, osim akumulaciji zamornog oštećenja doprinosi i povećanju ukupnog momenta savijanja [8, 9]. Ukoliko se udaranje pramca o valove pojavljuje često, prilično je teško razlikovati ova dva fenomena. Utjecaj pruženja na zamor može se razmatrati u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, pri čemu frekvencijska domena zahtijeva neke pretpostavke (objašnjeno u nastavku rada), dok su za analizu podrhtavanja broda uzrokovanog udaranjem pramca o valove i akumulacije zamornog oštećenja ili dodatnog momenta savijanja kao njegove posljedice, nužni proračuni u

vremenskoj domeni. Osim numeričkih analiza i ispitivanja na modelima u mjerilu, posljednjih desetak godina u svijetu se intenzivno provode mjerenja u naravi na velikim kontejnerskim brodovima [8, 9]. U literaturi je evidentno razmjerno veliko rasipanje rezultata pri istraživanju spomenutih fenomena [10], pri čemu je prema mišljenju autora doktorskog rada nužan veći oprez u njihovoj interpretaciji. Naime, potrebno je još jednom naglasiti da su i pruženje i podrhtavanje broda dinamički fenomeni, pa je za njihovu analizu izuzetno važan karakter uzbude. Stoga, jasno je da je lako odabrati takvu kombinaciju opterećenja i dinamičkih karakteristika sustava (broda i fluida) gdje će utjecaj pruženja ili podrhtavanja biti zanemariv, ili gdje će biti dominantan. Dakle, pojednostavljeno rečeno, da bi se uzeo u obzir utjecaj podrhtavanja ili pruženja na zamor broda, potrebno je takva stanja pobuditi, i to u mjeri u kojoj bi se ona mogla javiti tijekom službe broda.

Istraživanja obuhvaćena ovim doktorskim radom odvijala su se u dva smjera. Prvi je vezan za poboljšanja hidroelastičnog modela [3] u cilju dobivanja što točnijeg globalnog hidroelastičnog odziva broda, dok se drugi odnosi na primjenu unaprijeđenog modela za proračun zamornog oštećenja velikog kontejnerskog broda, uzrokovanog pruženjem.

Primjenjivost matematičkih modela u opisu bilo kojeg fenomena ovisna je o tome koliko dobro model reprezentira njegove fizikalne osobine. U tom smislu razvijeni hidroelastični model opisan u [3] zahtijevao je neka unaprijeđenja kako bi pomoću njega dobiveni rezultati globalnog odziva bili što točniji uz nužno zadržavanje komparativnih prednosti nad hidroelastičnim modelima koji podrazumijevaju sprezanje 3D strukturnih i 3D hidrodinamičkih modela. U doktorskom radu razmatraju se samo unaprijeđenja strukturnog modela, dok je hidrodinamički model potpuno jednak kao u [3]. Osnovni gredni strukturni model koji je detaljnije opisan u sljedećem poglavlju ne uzima u obzir utjecaj smičnih sila na uvijanje te utjecaj poprečnih pregrada na krutost brodskog trupa. Također pretpostavlja da je relativno kratka strojarnica (kao zatvoreni diskontinuitet) djelotvorna cijelom svojom duljinom. Motivacija za uvođenjem utjecaja smicanja na uvijanje u osnovni gredni model vezana je za razlike u odnosu na 3D FEM model i analogiju između utjecaja smicanja na savijanje i uvijanje koja je ranije opisana u literaturi [11, 12, 13]. Da se krutost brodskog trupa povećava zbog poprečnih pregrada već je i intuitivno jasno, pa je stoga, prije izrade ove disertacije, razvijen jednostavan model koji kombiniranjem teorije tankostjenih nosača (za brodski trup) s teorijom savijanja ortotropne ploče (za poprečnu pregradu) daje faktor kojim je potrebno uvećati krutost na uvijanje otvorenog dijela trupa kako bi se ekvivalentnim modelom krutosti uzeo u obzir doprinos pregrade [14, 15]. Strojarnica velikih kontejnerskih brodova razmjerno je kratka s omjerom duljine i širine 1:2 pa se, bez obzira na zatvorenost presjeka

palubama, ponaša kao otvoreni presjek s centrom smicanja ispod presjeka (vrlo blizu centra smicanja otvorenog poprečnog presjeka). Ova činjenica motivirala je na dodatno izučavanje složene deformacije strojarnice, uključujući distorziju poprečnog presjeka (kao sekundarnu pojavu), u cilju izvođenja formulacije njene efektivne krutosti za uključenje u gredni strukturni model. Važnost izučavanja i razumijevanja distorzije implicitno je vezana za teorijska razmatranja uloge poprečnih pregrada u grednom modelu.

Motivacija za primjenu unaprijeđenog hidroelastičnog modela na proračun zamora vezana je na istraživanje teorijskih i praktičnih granica primjenjivosti grednih modela. Ideja je pritom, najprije odrediti globalni hidroelastični odziv podrazumijevajući 1D strukturni model i prenijeti ga na 3D model potkonstrukcije (čija veličina mreže je prilagođena određenim konvencijama za proračun zamornog vijeka), te zatim prema postupku poznatom iz literature, odrediti koncentracije naprezanja i njima uzrokovano zamorno oštećenje.

1.2. Hipoteza rada

Cilj istraživanja obuhvaćenog ovim doktorskim radom je unaprijeđenje postojećeg modela za hidroelastičnu analizu velikih kontejnerskih brodova i utvrđivanje granica njegove primjenjivosti za određivanje lokalnih odziva nužnih za proračun zamornog vijeka broda, pa se u tom smislu postavlja hipoteza da je strukturni dio postojećeg hidroelastičnog modela moguće unaprijediti uvođenjem utjecaja smicanja na uvijanje brodskog trupa i primjenom koncepta efektivne krutosti brodske strojarnice kao zatvorenog diskontinuiteta, uz modeliranje doprinosa poprečnih pregrada krutosti brodskog trupa, na adekvatan način. Tako unaprijeđeni hidroelastični model primijenit će se za određivanje globalnog odziva, te kombiniranjem s 3D FEM modelom podstrukture za određivanje koncentracija naprezanja i njima uzrokovanog zamornog oštećenja strukturnog detalja broda, s utjecajem pruženja.

1.3. Pregled osnovne literature s opisom postojećih spoznaja

Promatrajući brodske i pomorske konstrukcije u njihovom eksploatacijskom okruženju lako je zaključiti da njihovo ponašanje predstavlja spregu djelovanja fluida i konstrukcije. Prema [5], takvo shvaćanje postalo je raširenije tek sredinom sedamdesetih godina prošlog stoljeća, kada istraživanja hidroelastičnosti brodskih i pomorskih konstrukcija dobivaju zamah. Inače, problemi vibracija trupa uslijed djelovanja valova u praksi najprije su, zbog njihove smanjene krutosti, prepoznati kod brodova za prijevoz rasutog tereta na Velikim Jezerima [3, 16]. Prema [5], pokretačka snaga značajnijem razvoju hidroelastičnosti posebno

se razabire u vrlo inovativnom radu profesora Bishopa i Pricea i njihove istraživačke grupe, koji objavljuju nekoliko važnih publikacija [17, 18] i knjigu [19]. Kombiniranje Timošenkove grede kojom je predstavljen strukturni model s dvodimenzionalnom hidrodinamičkom teorijom (bez sprezanja jednadžbi) tvori njihovu jedinstvenu teoriju grednih odsječaka kojom su učinkovito simulirali simetrično, antisimetrično i asimetrično ponašanje tadašnjih brodova na valovima, što je potvrđeno i eksperimentalno [20].

Osamdesetih godina prošlog stoljeća, Bishop i Price u suradnji s Wuom su postojeći koncept proširili zamjenom metode odsječaka trodimenzionalnom teorijom potencijalnog strujanja, čime je omogućena primjena na plovne objekte proizvoljnog oblika [5].

Od tada do danas, napravljen je značajan napredak u razvoju i primjeni linearnih i nelinearnih 3D hidroelastičnih modela, u frekvencijskoj i vremenskoj domeni [5]. Istraživane su mogućnosti proširenja hidroelastičnih modela za višetrupne brodove, kombiniranje globalnih i lokalnih hidrodinamičkih sila, kao i istovremeni proračuni ne samo globalnih opterećenja nego i lokalnih odziva, te odnos između stacionarnih i tranzijentnih strukturnih opterećenja i odziva itd. Poseban napredak ostvaren je u primjeni hidroelastičnih modela za analizu odziva u vertikalnoj ravnini. Prema [21] postojeće hidroelastične teorije se mogu podijeliti na dvodimenzionalne i trodimenzionalne linearne i nelinearne teorije.

Analiza prirodnih vibracija brodskog trupa 1D FEM modelom jedan je od najvažnijih koraka u hidroelastičnoj analizi [3], a prva rješenja za analizu spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija broda su prikazana u [22, 23, 24]. Spomenuti radovi počivaju na sljedećim pretpostavkama: budući da je nosač tankostjen smični tok je konstantan po njegovoj debljini, uslijed uvijanja presjek se rotira i vitoperi ali mu se oblik ne mijenja (nema distorzije poprečnog presjeka). Uz prethodne dvije, treća pretpostavka je da vitoperenje uzrokuje dodatna (sekundarna) naprezanja, i to normalna i smična, ali teorija zanemaruje dodatnu smičnu deformaciju uzrokovanu sekundarnim smičnim naprezanjem [23]. Poopćena i unaprijeđena rješenja uvode Pedersen [25] i Wu i Ho [26]. U ovim referencijama krutost brodskog trupa određuje se na temelju klasične teorije tankostjenih nosača, koja ne daje zadovoljavajuće vrijednosti za faktor krutosti na vitoperenje otvorenog poprečnog presjeka [27, 28]. Neovisno o tome, činjenica da se na ovaj način dobiju frekvencijski neovisne vrijednosti parametara krutosti ograničava primjenu gredne teorije za analizu vibracija broda na nekoliko prvih prirodnih oblika. Ukoliko se koristi definicija parametara krutosti ovisna o prirodnom obliku vibriranja gredna teorija se može koristiti za desetak prirodnih oblika [29, 30, 31].

Osnovni strukturni model iz [3] za analizu spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, koji predstavlja polaznu točku za unaprijeđenja razmatrana u ovom doktorskom radu, uprogramiran je u fortranski kod DYANA [32]. Dijelovi trupa otvorenog poprečnog presjeka modeliraju se grednim konačnim elementima s osam stupnjeva slobode (savijanje, smicanje, uvijanje i vitoperenje). Jednostavniji elementi sa šest stupnjeva slobode (bez vitoperenja) koriste se za modeliranje dijelova trupa zatvorenog poprečnog presjeka. Inače, treba napomenuti da se već sredinom devedesetih godina u [33] spominje rad na kineskom jeziku u kojem su Yen i drugi primijenili trodimenzionalnu potencijalnu teoriju i teoriju tankostjenih nosača za analizu spregnutih vibracija kontejnerskih brodova.

Utjecaj smicanja na savijanje tankostjenih nosača dobro je poznata činjenica u Timošenkovoj teoriji grede [34, 35, 36, 37]. Doprinos smicanja progibu grede povećava se s omjerom njene visine i duljine, što je posebno naglašeno u analizi vibracija, gdje je udaljenost između vibracijskih čvorova mjerodavna veličina. Utjecaj smicanja raste s rednim brojem oblika vibriranja [30].

Uobičajene teorije uvijanja tankostjenih nosača otvorenog poprečnog presjeka [27, 28, 38, 39] ne uzimaju u obzir utjecaj smicanja na kut uvijanja, pa je njihova primjena ograničena na relativno duge nosače, što nije slučaj za gredu kojom se idealizira trup velikih kontejnerskih brodova [14, 40]. Početkom devedesetih godina prošlog stoljeća Pavazza, u disertaciji [11] i radovima koji su uslijedili [12, 13] pokazuje postojanje potpune analogije između uvijanja štapa otvorenog tankostjenog presjeka i savijanja štapa (u posebnom slučaju uvijanja štapa otvorenog tankostjenog presjeka, kada se komponenta čistog uvijanja može zanemariti u odnosu na komponentu vitoperenja), što je polazna točka za uvođenje utjecaja smicanja na uvijanje u postojeći gredni strukturni model. Pretpostavka da tangencijalna naprezanja ne utječu na normalna, odnosno da kutne deformacije ne utječu na duljinske, u slučaju relativno kratkih štapova, nije realna [11, 12] – jednako, kao i u slučaju savijanja relativno kratkih štapova [41]. Utvrđeno je da je utjecaj smicanja na uvijanje kod tankostjenih nosača istog reda veličine kao utjecaj smicanja na savijanje.

Što se tiče određivanja efektivne krutosti relativno kratke strojarnice kontejnerskih brodova, autoru doktorskog rada nisu poznata sustavna istraživanja ovog problema i njihovi eksplicitno izneseni rezultati. Spomenuta činjenica na neki način je i logična budući da je problem relativno kratke strojarnice kao zatvorenog diskontinuiteta prisutan kod novijih kontejnerskih brodova. Postojanje ovog problema zamijećeno je razmatranjem rezultata 3D FEM statičkih i dinamičkih analiza nekoliko modela velikih kontejnerskih brodova, koje su tijekom izrade doktorskog rada korištene kao „numerički eksperimenti“ za verifikaciju

teorijskih razmatranja. Osnovna ideja za rješenje ovog problema ista je kao kod rješenja za doprinos poprečnih pregrada brodskog trupa [14, 15], pri čemu se konstrukcija strojarnice promatra kao otvoreni presjek povećane krutosti na uvijanje uslijed utjecaja paluba, čiji faktor krutosti na uvijanje se uveća proporcionalno energiji deformacije paluba i pripadnog dijela trupa.

Analiza 3D FEM modela u preliminarnim istraživanjima pokazala je postojanje distorzije poprečnog presjeka (ravninske deformacije), koja nastaje kao rezultat različitih smičnih tokova na spoju zatvorenog i otvorenog presjeka. Iako je distorzija poznata razmjerno dugo, u literaturi primijenjene mehanike, još uvijek ne postoje potpuno prihvatljiva rješenja za taj vrlo složen problem. Kada je riječ o distorziji trupa kontejnerskog broda, radi se o tzv. problemu distorzije 3 ploče, koja je inače poznata kao nulta distorzija [42].

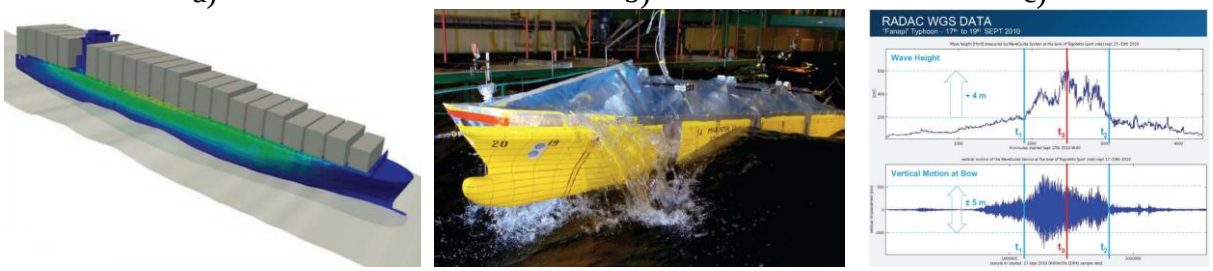
Zamor brodskih konstrukcija je problem kojem današnja brodograđevna i pomorska praksa pridaje veliki značaj. Prema [43] zamor je proces cikličkog akumuliranja oštećenja konstrukcije koja je podvrgnuta promjenjivim naprezanjima, i odvija se kroz nekoliko stanja, od početnog tzv. „stanja bez pukotine“ do „oštećenog stanja“. Kada se razmatra u kontekstu brodograđevne prakse, riječ je fenomenu koji je prvenstveno uzrokovan cikličkim valnim opterećenjem, a određivanje tog opterećenja i rezultirajućeg zamornog vijeka, osnovni je cilj analize. Iako zamor, općenito, ne rezultira kobnim lomovima, njegov utjecaj na troškove održavanja brodske konstrukcije je prilično izražen [43]. Razmjerno veliki broj radova s ovog područja rezultat je aktualnosti i složenosti problema. Iscrpan povijesni pregled istraživanja zamora, fizikalne osnove mehanizma zamaranja materijala, uzroci nastanka zamornih pukotina u detaljima brodskih konstrukcija i mjere kojima je moguće poboljšati dinamičku izdržljivost, prikazani su u [44]. Tri su osnovne metodologije u analizi zamora; prva podrazumijeva uporabu S-N krivulja, druga se temelji na principima mehanike loma, dok se treća metodologija odnosi na analizu prototipa [43].

Pojednostavljeni postupak analize zamora omogućuje razmjerno brzo i jednostavno određivanje zamornog oštećenja detalja brodske konstrukcije, a razlikuje se za pojedina klasifikacijska društva [7]. Iako je vrlo praktičan, takav postupak uključuje niz pojednostavljenja i dovoljno je točan samo pri analizi standardiziranih strukturnih detalja ili u komparativnoj analizi izdržljivosti određenog kritičnog detalja. Spektralna metoda kojom je zamorni vijek moguće proračunati direktno u četiri koraka (određivanje hidrodinamičkog opterećenja, strukturna analiza, određivanje dugoročne razdiobe naprezanja, proračun akumulacije zamornog oštećenja), podrazumijevajući primjenu S-N krivulja, predstavlja

sofisticirani način određivanja zamornog vijeka, ali uz cijenu velikog broja potrebnih proračuna [7].

Primjenu spektralnog postupka, posebice korak vezan za određivanje funkcije distribucije naprezanja, potrebno je promatrati dvojako, ovisno o tome podrazumijeva li se brod kao kruto ili elastično tijelo na valovima. Naime, da bi se zamorni vijek izrazio analitičkom jednadžbom potrebno je pronaći funkciju distribucije koja se dobro podudara s izračunatom dugoročnom distribucijom naprezanja. Kada je riječ o „krutom brodu“ stvarnu dugoročnu razdiobu vršnih naprezanja moguće je dobro aproksimirati dvoparametarskom Weibullovom razdiobom. Problem „elastičnog broda“ je složeniji zbog bimodalnog spektra odziva, pa je teško pronaći jednostavnu funkciju koja bi ga dobro opisivala, te stoga izvorni postupak spektralne analize zahtijeva određene korekcije. Istraživanja ovog problema aktualizirana su gradnjom velikih kontejnerskih brodova koje, zbog uvodno objašnjenih konstrukcijskih i eksploatacijskih karakteristika, treba promatrati kao elastične ploveće konstrukcije. Već je ranije spomenuto da se analizu odziva velikih kontejnerskih brodova na valovima, pa tako i u svrhu ocjene njihova zamornog vijeka s utjecajem pruženja i podrhtavanja u posljednje vrijeme intenzivno provode numeričke simulacije, modelski testovi i mjerenja u naravi, Slika 1.3, a u okviru ovog rada neće se detaljno prikazivati njihov pregled, već se upućuje na zbornik zadnjeg Međunarodnog kongresa o brodovima i pomorskim konstrukcijama (ISSC) [45], u kojem su prikazani najznačajniji postupci i rezultati ostvareni u posljednje 3 godine. Inače, zbornik ISSC-a redovito donosi pregled relevantnih radova predmetnog područja s najvažnijim zaključcima i smjernicama za daljnja istraživanja.

a) b) c)



Slika 1.3 Ispitivanje kontejnerskih brodova; a) simulacija, b) modelski test, c) rezultati mjerenja u naravi [10]

Kada je riječ o pravilima klasifikacijskih društava, u njima je fenomen pruženja i njegov utjecaj na zamor na svojevrstan način zanemarivan, što je vjerojatno posljedica činjenice da nakon gradnje ultra velikih tankera (550000 tdw), između 1976. i 1979. godine, pruženje na brodovima nije bilo izraženo [46]. Aktualiziranje ovog problema gradnjom

velikih kontejnerskih brodova rezultiralo je izdavanjem smjernica za procjenu pruženja kontejnerskih brodova od strane klasifikacijskog društva *American Bureau of Shipping* (ABS), krajem 2010. godine [47].

1.4. Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada

Predloženi istraživački rad podijeljen je u nekoliko faza. Prva faza obuhvatila je analizu raspoložive literature iz područja hidroelastičnosti brodskih i pomorskih konstrukcija, teorije tankostjenih nosača, vibracija broda i zamora brodskih konstrukcija, te definiranje problema. Postavka problema uključuje osnovne opise pojedinih elemenata hidroelastičnog modela, kritički osvrt na postojeće nedostatke i načine za poboljšanja.

Druga faza vezana je za istraživanje utjecaja smicanja na uvijanje brodskog trupa, pri čemu se koristi prethodno spomenuta analogija između utjecaja smicanja na savijanje i uvijanje. Ova faza obuhvaća izvod diferencijalnih jednadžbi vibracija grede s utjecajem smicanja na uvijanje (i savijanje) u cilju boljeg razumijevanja uloge pojedinih parametara krutosti, te formulaciju grednog konačnog elementa za primjenu na brod kao prizmatični nosač promjenjivog poprečnog presjeka. Parametri krutosti poprečnog presjeka potrebni za konstituiranje grednog strukturnog modela određuju se pomoću usavršene verzije programa STIFF [48], dok je teorija vezana za utjecaj smicanja na uvijanje uprogramirana u postojeći program DYANA [32], kao konstitutivni dio integralnog paketa za hidroelastičnu analizu. Kao važnu novinu u odnosu na modele predstavljene u [3, 22, 23, 24], u okviru ovog istraživanja, treba istaknuti uvođenje dodatnog parametra krutosti, i to smičnog modula tromosti, uz već postojeće faktore krutosti na uvijanje i vitoperenje.

Treći dio istraživanja obuhvaća analizu rješenja za utjecaj poprečnih pregrada na krutost trupa velikih kontejnerskih brodova. Iako je spomenuto rješenje zaključeno i objavljeno prije početka izrade ove disertacije, ono je metodološki iznimno važno jer se po istom principu razvija koncept efektivne krutosti brodske strojarnice.

Sljedeća faza istraživanja odnosi se na formulaciju efektivne krutost brodske strojarnice. Na temelju raspoloživih nacrta velikog kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU izrađeno je nekoliko 3D FEM modela prizmatičnog pontona na kojem se razmatra složena deformacija konstrukcije strojarnice uslijed uvijanja. Pretpostavka je da zbog relativne kratkoće strojarnica velikih kontejnerskih brodova nije u potpunosti djelotvorna, odnosno da se pri opisu grednim modelom ona može tretirati kao otvoreni presjek povećane krutosti na uvijanje uslijed utjecaja paluba. U okviru ovog dijela razmotrena je distorzija poprečnog

presjeka na spoju zatvorenog i otvorenog dijela trupa broda koja nastaje zbog različitih smičnih tokova na prednjoj i stražnjoj strani poprečne pregrade, i to kao sekundarna deformacija, na temelju prethodno provedene analize uvijanja (kao primarne deformacije).

Peta faza vezana je za određivanje zamornog vijeka strukturnog detalja broda s utjecajem linearnog pruženja. Ona podrazumijeva određivanje globalnog odziva korištenjem sofisticiranog grednog modela te njegov prijenos na 3D FEM model u cilju određivanja prijenosne funkcije naprezanja, te posljedično proračun zamornog vijeka prema raspoloživoj metodologiji.

Doktorski rad je koncipiran kroz osam poglavlja, pri čemu je u prvom ukratko opisan problem i motivacija za istraživanje, te je dana hipoteza rada. Uz pregled literature i opis postojećih spoznaja opisana je i metodologija istraživanja.

U drugom poglavlju najprije je navedeno nekoliko inačica definicije hidroelastičnosti kao znanstvene discipline, a zatim je prikazana metodologija hidroelastične analize koja podrazumijeva uporabu tzv. FSB-BV hidroelastičnog modela. Opisani su strukturni, hidrodinamički i hidrostatički modeli, te hidroelastični model koji nastaje kao rezultat njihove integracije. Istaknuta je važnost povratne krutosti u hidrostatičkom modelu, te je dana njena konzistentna formulacija u skraćenom zapisu.

U trećem poglavlju obrađuje se utjecaj smicanja na uvijanje tankostjenih nosača. Prikazan je izvod diferencijalnih jednadžbi vibriranja grede s utjecajem smicanja na savijanje i uvijanje i formulacija konačnog elementa za primjenu na brodski trup. Opisan je numerički postupak za analizu vibracija, te su dani osnovni izrazi za određivanje parametara krutosti. Zaključno je u ovom poglavlju prikazana verifikacija teorijskog razmatranja temeljena na usporedbi statičkog odziva jednolikog prizmatičnog pontona, dobivenog grednim i 3D FEM modelom.

Četvrto poglavlje odnosi se na kratki prikaz matematičkog modela za određivanje doprinosa poprečnih pregrada krutosti brodskog trupa. Navedeni su osnovni izrazi za pomake, proračun energije deformacije pregrade, te izraz za efektivnu krutost na uvijanje izveden kombiniranjem teorije ortotropne ploče i teorije tankostjenih nosača.

Postupak za određivanje efektivne krutosti strojarnice velikih kontejnerskih brodova prikazan je u petom poglavlju. Uz izvod efektivne krutosti, dano je teorijsko razmatranje distorzije poprečnog presjeka, na temelju primarno provedene analize uvijanja. Navedeni su izrazi za analitičko rješenje uvijanja simetričnog segmentnog pontona (sa strojarnicom u sredini). Teorijski doprinosi ilustrirani su uspoređivanjem odziva dobivenih grednim i 3D FEM modelima, za različite inačice pontona.

U šestom poglavlju prikazan je numerički primjer u kojem se ilustrira primjena unaprijeđenog strukturnog modela za određivanje globalnog hidroelastičnog odziva velikog kontejnerskog broda nosivosti 11400 TEU. Rezultati su verificirani kroz usporedbu prirodnih vibracija broda izračunatih grednim modelom i komercijalnim programskim paketom NASTRAN [49], podrazumijevajući 3D FEM model cijelog broda. Također, globalni hidroelastični odziv uspoređen je s rezultatima 3D FEM + 3D BEM analize, provedene u Bureau Veritasu.

Sedmo poglavlje odnosi se na analizu zamornog oštećenja strukturnog detalja broda. Opisane su teorijske osnove proračuna zamora s naglaskom na spektralnu metodu, te su dani rezultati proračuna zamornog oštećenja 3D FEM + 3D BEM i 1D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelima, s kritičkim osvrtom na njih.

U osmom poglavlju dana su zaključna razmatranja doktorskog rada s predloženim smjernicama za daljnja istraživanja. Istaknut je znanstveni doprinos rada, te su raspravljeni prijedlozi za dodatno poboljšanje postojeće metodologije hidroelastične analize.

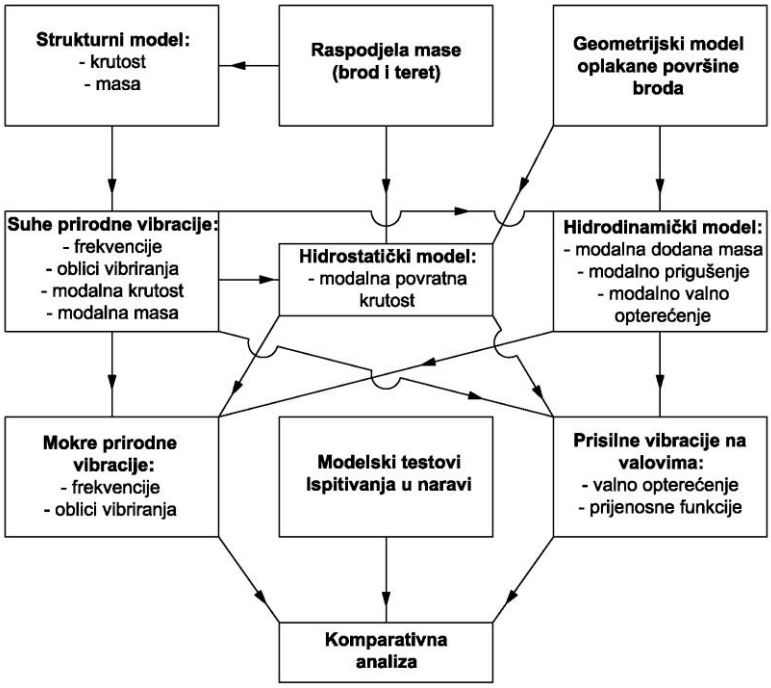
Prilog A sadrži jednostavan numerički primjer, s pripadnom teorijom, u kojem je analiziran utjecaj konzistentnosti formulacije konačnih elemenata i zanemarivanja zakretanja masa na odziv. U Prilogu B razmatran je utjecaj modeliranja poprečnih pregrada na odziv brodske konstrukcije, na primjeru analize uvijanja modela prizmatičnog pontona, metodom konačnih elemenata. U Prilogu C sažeto je prikazano određivanje efektivne krutosti tankostjenih nosača u analizi vibracija.

2. HIDROELASTIČNOST BRODSKIH KONSTRUKCIJA

Usporedo s razvojem hidroelastičnosti kao znanstvene discipline, pojavljuje se nekoliko njenih definicija, te je stoga prikladno izdvojiti one važnije, sabrane u [8]. Heller i Abramson 1959. godine definiraju hidroelastičnost kao „fenomen koji obuhvaća međudjelovanje između inercijskih, hidrodinamičkih i elastičnih sila“ [50]. 1979. godine Bishop i Price spomenuti pojam opisuju kao „granu znanosti koja se bavi gibanjima deformabilnih tijela u tekućini“ [19]. Prema Faltinsenovoj definiciji iz 2005. godine pojam hidroelastičnost znači da se „tok fluida i elastična reakcija konstrukcije razmatraju simultano, pri čemu postoji uzajamna interakcija, što znači da elastične vibracije uzrokuju tok fluida s pripadnim poljem tlaka te da hidrodinamičko opterećenje pobuđuje hidroelastične vibracije“ [51].

2.1. Metodologija hidroelastične analize

Hidroelastični matematički model sastoji se od strukturnog, hidrodinamičkog i hidrostatičkog modela. Dakle, numerički postupak za hidroelastičnu analizu zahtijeva definiciju strukturnog modela, distribuciju mase tereta i broda, kao i definiciju oplakane površine broda [52, 53], Slika 2.1.



Slika 2.1 Metodologija hidroelastične analize

Nakon definicije ulaznih veličina slijedi proračun prirodnih vibracija u zraku te proračun modalne hidrostatske krutosti, modalne pridružene mase, prigušenja i valnog opterećenja. Na kraju se mogu odrediti prijenosne funkcije odziva na valovima, kao i prirodne frekvencije i oblici vibriranja broda u vodi. Dobivene rezultate poželjno je korelirati s rezultatima modelskih testova ili ispitivanja u naravi [52, 53], Slika 2.1. U okviru opisane metodologije koristi se metoda superpozicije prirodnih oblika vibriranja, koja je inače pogodna za analizu prisilnih vibracija sustava s mnogo stupnjeva slobode.

2.2. Strukturni model

Hidroelastični problem se može rješavati na različitim razinama složenosti i točnosti, pri čemu je najbolji, ali i vremenski najzahtjevniji (najskuplji) način sprezanje 3D FEM strukturnog modela s 3D hidrodinamičkim modelom koji se temelji na radijacijsko-difrakcijskoj teoriji [53]. Prema [53] ovakav pristup pogodan je za završnu fazu provjere čvrstoće, dok je za preliminarnu fazu osnivanja prikladnije spregnuti 1D gredni strukturni model s 3D hidrodinamičkim modelom, zbog transparentnosti osnovnih parametara kao što su masa, krutosti, frekvencije itd.

Vibracije brodskog trupa, kao neprizmatičnog elastičnog nosača mogu biti: uzdužne, vertikalne, horizontalne i torzijske [56]. Budući da se težište poprečnog presjeka i središte masa, te položaj centra smicanja ne podudaraju, pojavljuju se spregnute uzdužne i vertikalne, odnosno horizontalne i torzijske vibracije. Udaljenost između težišta presjeka i središta masa vezana za spregu uzdužnih i vertikalnih vibracija, te udaljenost između težišta i centra smicanja vezana za spregu horizontalnih i torzijskih vibracija, zanemariva je za konvencionalne brodove, pa se spomenuti tipovi vibracija mogu u takvim slučajevima razmatrati odvojeno. Kod brodova s velikim grotlenim otvorima, kao što su primjerice veliki kontejnerski brodovi, centar smicanja nalazi se izvan poprečnog presjeka, i to ispod kobilice, zbog čega je sprega između horizontalnih i torzijskih vibracija jako izražena [56]. Spomenuti problem dodatno se komplicira zbog geometrijskih diskontinuiteta brodskog trupa u vidu krajeva (peakova), poprečnih pregrada i konstrukcije strojarnice. Pritom treba istaknuti specifičnost konstrukcije velikih kontejnerskih brodova u vidu trupa otvorenog poprečnog presjeka (većim dijelom duljine) s relativno kratkom strojarnicom i velikim brojem razmjerno jakih poprečnih pregrada koje spriječavaju distorziju presjeka, Slika 2.2. Točnost rješenja ovisna je o pouzdanom određivanju faktora krutosti na savijanje, smicanje, uvijanje i vitoperenje. Metoda konačnih elemenata je pogodan alat za rješavanje spomenutog problema.

Dakle, 1D FEM strukturni model treba na ispravan način obuhvatiti krutost (kao i distribuciju mase) u cilju što točnijeg proračuna vibracija brodskog trupa.

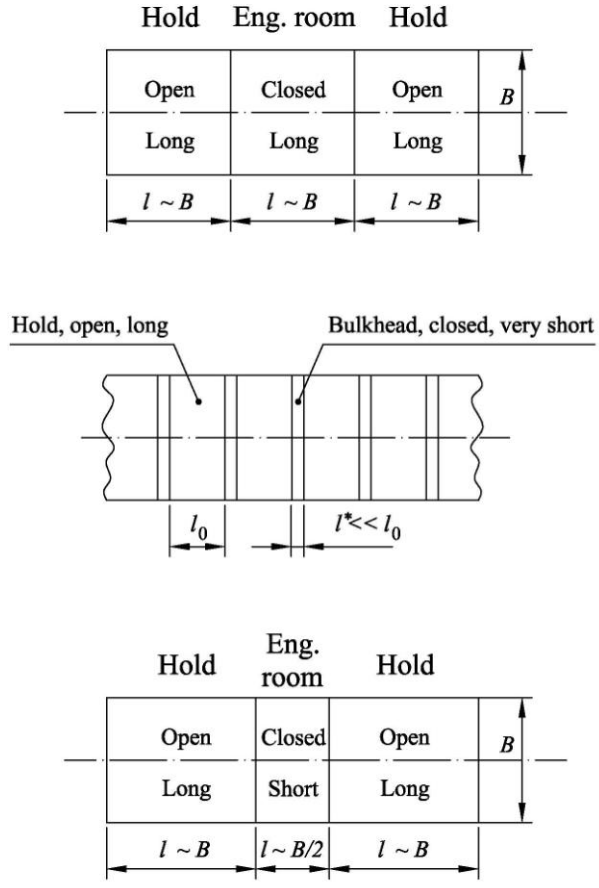
Prema [24] matrična jednadžba konačnog elementa za spregnute vibracije glasi:

$$\left\{f^e\right\}=\left[k^e\right]\left\{\delta^e\right\}+\left[m^e\right]\left\{\ddot{\delta}^e\right\}, \tag{2.1}$$

gdje je $\left\{f^e\right\}$ vektor čvornih sila, $\left\{\delta^e\right\}$ vektor čvornih pomaka, $\left[k^e\right]$ matrica krutosti konačnog elementa, a $\left[m^e\right]$ matrica mase konačnog elementa. Navedene veličine sastoje se od savojnog i torzijskog dijela;

$$\left\{f^e\right\}=\begin{Bmatrix}P\\R\end{Bmatrix},\qquad \left\{\delta^e\right\}=\begin{Bmatrix}U\\V\end{Bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$\left[k^e\right]=\begin{bmatrix}k_{bs} & 0\\ 0 & k_{tw}\end{bmatrix},\qquad \left[m^e\right]=\begin{bmatrix}m_{sb} & m_{st}\\ m_{ts} & m_{tw}\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$



Slika 2.2 Geometrijski diskontinuiteti brodskog trupa

Vektori čvornih sila konačnog elementa i čvornih pomaka iz (2.2) definirani su izrazima iz sljedećeg poglavlja ((3.65) i (3.48)). Iz izraza (2.3) vidljivo je da se sprega odvija preko matrice mase, uslijed razlike između centra smicanja i težišta.

Bez obzira koji model konačnih elemenata se koristi, matrična jednadžba (suhih) prirodnih vibracija brodskog trupa, prema [57], glasi:

$$\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\{\phi\}=0\,, \tag{2.4}$$

gdje je $\left[K\right]$ matrica krutosti, $\left[M\right]$ matrica masa, ω prirodna frekvencija suhih vibracija, ϕ suhi prirodni oblik vibriranja. Kao rješenje problema svojstvenih vrijednosti (2.4) dobiju se ω_i i $\{\phi\}_i$ za svaki *i*-ti suhi prirodni oblik, gdje *i* poprima vrijednosti $i=1,2...N,$ pri čemu *N* odgovara ukupnom broju stupnjeva slobode [53]. Nakon modalne analize može se konstituirati matrica prirodnih oblika vibriranja [57]:

$$\left[\phi\right]=\left[\{\phi\}_1,\{\phi\}_2...\{\phi\}_i...\{\phi\}_N\right], \tag{2.5}$$

te se mogu odrediti modalna krutost i modalna masa:

$$\left[k\right]=\left[\phi\right]^T\left[K\right]\left[\phi\right], \tag{2.6}$$

$$\left[m\right]=\left[\phi\right]^T\left[M\right]\left[\phi\right]. \tag{2.7}$$

Budući da su vektori prirodnih oblika međusobno ortogonalni, matrice $\left[k\right]$ i $\left[m\right]$ su dijagonalne. Članovi k_i i $\omega_i^2 m_i$ predstavljaju energiju deformacije i kinetičku energiju odgovarajućeg oblika vibriranja. Općenito, prvih šest prirodnih frekvencija ω_i jednake su nuli s odgovarajućim svojstvenim vektorima koji predstavljaju pomake krutog tijela. Stoga, prvih šest članova matrice modalne krutosti jednako je nuli, prva tri člana matrice modalne mase jednaka su masi konstrukcije (ista u svim smjerovima *x*, *y*, *z*) a sljedeća tri člana odgovaraju momentima tromosti mase oko koordinatnih osi [53].

2.3. Suhi prirodni oblici vibriranja oplakane površine broda

Kao što je spomenuto u prethodnoj točki suhi prirodni oblici vibriranja mogu se odrediti 1D ili 3D FEM strukturnim modelom. Ukoliko se koristi 1D model, prirodni oblici vibriranja grede se raspršе na oplakanu površinu trupa.

Opći oblik jednadžbe za prijenos pomaka iz čvorova grednog modela (uključujući pomake broda kao krutog tijela), glasi [3]:

$$\mathbf{h}=\left[u+\frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}x}\left(Z-z_N\right)+\frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}x}Y+\bar{u}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right]\mathbf{i}+\left[-w_h-\psi\left(Z-z_S\right)\right]\mathbf{j}+\left[-w_v+\psi Y\right]\mathbf{k}\,. \tag{2.8}$$

Odabirom odgovarajućih čvornih pomaka, iz izraza (2.8) mogu se dobiti vektori pomaka točaka na brodu za pojedine komponente njihanja krutog tijela, kako je objašnjeno u lit. [3].

Iz jednadžbe (2.8) mogu se izvesti izrazi za elastične oblike vibriranja, koji za vertikalne, horizontalne i torzijske vibracije, prema [3, 52, 53, 54, 55] glase:

$$\mathbf{h}_v = \frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}x}\left(Z - z_N\right)\mathbf{i} - w_v\mathbf{k}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{h}_h = \frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}x}Y\mathbf{i} - w_h\mathbf{j}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{h}_t = \bar{u}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\mathbf{i} - \psi\left(Z - z_S\right)\mathbf{j} + \psi Y\mathbf{k}. \tag{2.11}$$

U jednadžbama od (2.8) do (2.11) w označava progib trupa, ψ kut uvijanja poprečnog presjeka, Y i Z koordinate točaka na oplakanoj površini, a z_N i z_S predstavljaju koordinate neutralne linije i centra smicanja.

Za spregnute horizontalne i torzijske vibracije vrijedi:

$$\mathbf{h}_{ht} = \left(\frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}x}Y + \bar{u}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)\mathbf{i} + \left[-w_h - \psi\left(Z - z_S\right)\right]\mathbf{j} + \psi Y\mathbf{k}, \tag{2.12}$$

gdje $\bar{u} = \bar{u}\left(x, Y, Z\right)$ predstavlja funkciju vitoperenja poprečnog presjeka svedenu na oplakanu površinu [30, 53].

Izraz (2.8) može se prikazati i u sljedećem obliku:

$$\mathbf{h} = \delta_X\mathbf{i} + \delta_Y\mathbf{j} + \delta_Z\mathbf{k}, \tag{2.13}$$

pri čemu δ_X, δ_Y i δ_Z predstavljaju pomake u smjeru pojedinih koordinatnih osi.

2.4. Hidrodinamički model

Potpuno konzistentan i učinkovit model pomorstvenosti s uključenom brzinom napredovanja još uvijek ne postoji ni za kruta tijela, pa se koriste približne metode poput metode susretne frekvencije na kojoj se temelji program HYDROSTAR [58] i FSB-BV hidroelastični model [3].

U općem slučaju postupak sprezanja strukturnog i hidrodinamičkog modela ne ovisi o korištenom hidrodinamičkom modelu, i ovdje je prikazan za slučaj bez brzine napredovanja kao najjednostavniji. Hidroelastični problem razmatra se u frekvencijskom području pa se operira s amplitudama sila i pomaka. Za sprezanje strukturnog i hidrodinamičkog modela potrebno je sile vanjskog tlaka izraziti na pogodan način [59]. Ukupna hidrodinamička sila F^h se razdvoji na dio F^R, ovisan o deformacijama (i pomacima) konstrukcije, i dio F^{DI}, koji predstavlja čistu uzbudu:

$$F^h = F^R + F^{DI}. \tag{2.14}$$

Moguće je koristiti metodu modalne superpozicije, a vektor deformacije oplakane površine $\mathbf{H}(x,y,z)$ može se izraziti preko suhih prirodnih oblika $\mathbf{h}_i(x,y,z)$:

$$\mathbf{H}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\,\mathbf{h}_i(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i\left[h_x^i(x,y,z)\,\mathbf{i}+h_y^i(x,y,z)\,\mathbf{j}+h_z^i(x,y,z)\,\mathbf{k}\right], \quad (2.15)$$

gdje su ξ_i nepoznati koeficijenti. Za hidrodinamički dio problema koristi se teorija potencijalnog strujanja, pa je u slučaju bez brzine napredovanja ukupni potencijal brzine φ definiran Laplaceovom diferencijalnom jednadžbom i zadanim rubnim vrijednostima. U okviru linearne valne teorije može se izvršiti dekompozicija ukupnog potencijala na potencijal nailaznog vala φ_I, te difrakcijsku φ_D i radijacijsku φ_{Rj} komponentu

$$\varphi=\varphi_I+\varphi_D-i\omega\sum_{j=1}^{N}\xi_j\,\varphi_{Rj}, \qquad \varphi_I=-i\frac{gA}{\omega}\mathrm{e}^{\nu(z+ix)}. \quad (2.16)$$

U izrazu (2.16) A predstavlja valnu amplitudu, a ω valnu frekvenciju. Nakon što su potencijali određeni, modalne hidrodinamičke sile se određuju integracijom rada tlaka preko oplakane površine, S. Ukupni linearizirani tlak određuje se iz Bernoullijeve jednadžbe

$$p=i\omega\rho\varphi-\rho\,gz. \quad (2.17)$$

Najprije se razmatra član vezan za potencijal brzine φ i njegovom podjelom na uzbudni i radijacijski dio dobivamo:

$$F_i^{DI}=i\omega\rho\iint_S(\varphi_I+\varphi_D)\mathbf{h}_i\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \qquad F_i^{R}=\rho\,\omega^2\sum_{j=1}^{N}\xi_j\iint_S\varphi_{Rj}\mathbf{h}_i\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad (2.18)$$

Zatim je moguće razdvojiti (2.18) na modalnu inercijsku silu u fazi s ubrzanjem, odnosno modalnu prigušnu silu u fazi s brzinom:

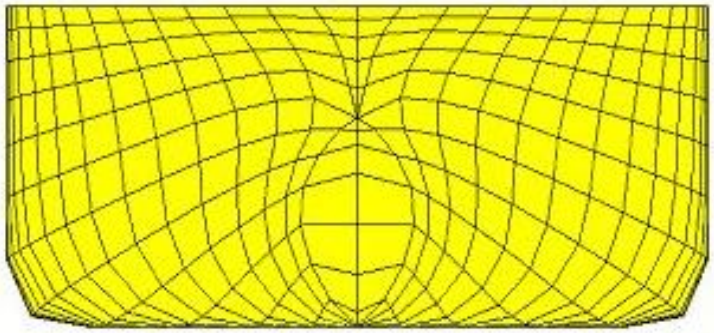
$$F_i^{a}=\mathrm{Re}(F_i^{R})=\omega^2\sum_{j=1}^{N}\xi_j A_{ij}, \qquad A_{ij}=\rho\,\mathrm{Re}\iint_S\varphi_{Rj}\,\mathbf{h}_i\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad (2.19)$$

$$F_i^{v}=\mathrm{Im}(F_i^{R})=\omega\sum_{j=1}^{N}\xi_j B_{ij}, \qquad B_{ij}=\rho\,\omega\,\mathrm{Im}\iint_S\varphi_{Rj}\,\mathbf{h}_i\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \quad (2.20)$$

gdje su A_{ij} i B_{ij} elementi matrice pridružene mase, odnosno prigušenja. Određivanje pridružene mase i prigušenja za krute oblike je u hidrodinamici dobro poznato, a isti postupak je proširen za proračun tih veličina i za elastične oblike. Hidrostatički dio ukupnog tlaka u Bernoullijevoj jednadžbi razmatra se u okviru hidrostatičkog modela.

Za određivanje sila tlaka koje djeluju na oplakanu površinu potrebno je definirati panele i njihov položaj u prostoru [53]. Ukoliko se proračun tlaka temelji na radijacijsko-difrakcijskoj teoriji oplakana površina može se napraviti na takav način da su paneli što

pravilnijeg oblika s gušćom podjelom u području slobodne površine [53, 54, 55, 60], Slika 2.3.



Slika 2.3 Mreža oplakane površine [53, 54, 55, 60]

2.5. Hidrostatički model

Zbog složenosti hidrostatičkog modela, bez obzira na njegovu povezanost s hidrodinamičkim preko Bernoullijeve jednadžbe, prikladno ga je razmatrati kao zasebnu cjelinu. U konstituiranju hidrostatičkog modela dominantnu ulogu ima povratna krutost, za koju u raspoloživoj literaturi ne postoji jedinstvena formulacija i koja je, bez obzira na činjenicu da se izučava razmjerno dugo, predmet znanstvene rasprave [61, 62]. Općenito, pristup njenom konstituiranju može biti hidromehanički ili strukturni. Prvu važniju formulaciju povratne krutosti izveli su Price i Wu 1985. godine [63], u kojoj su uzeli samo član hidrostatičkog tlaka zapisan u indeksnoj notaciji:

$$C_{ij} = -\rho g \iint_S h_3^i h_k^i n_k \mathrm{d}S \,. \tag{2.21}$$

Njihovu formulaciju proširuje Newman 1994. godine dodajući utjecaj volumenske deformacije na hidrostatičke sile [64]:

$$C_{ij} = -\rho g \iint_S \left(h_3^i + Z h_{l,l}^i \right) h_k^j n_k \mathrm{d}S \,, \tag{2.22}$$

a zatim Riggs dodaje utjecaj težine 1996. godine [65]:

$$C_{ij} = -\rho g \iint_S \left(h_3^i + Z h_{l,l}^i \right) h_k^j n_k \mathrm{d}S + g \iiint_V \rho_s h_{3,k}^i h_k^j \mathrm{d}V \,. \tag{2.23}$$

U prethodnim izrazima korištene oznake predstavljaju: C_{ij} element matrice modalne povratne krutosti, h_k prirodni oblik vibriranja (kruti i elastični), Z globalna koordinata, S oplakana površina broda, n_k jedinični vektor normale na oplakanu površinu, V volumen konstrukcije, ρ gustoća fluida, ρ_s gustoća materijala konstrukcije, dok g predstavlja gravitacijsku konstantu.

U okviru strukturnog pristupa Huang i Riggs 2000. godine objavljuju revidiranu formulaciju povratne krutosti u koju je uvedena i geometrijska krutost [66]:

$$C_{ij} = -\rho g \iint_S h_k^i \left(h_3^j + Z h_{l,l}^j \right) n_k \mathrm{d}S + \rho g \iint_S Z h_l^i h_{k,l}^j n_k \mathrm{d}S + g \iiint_V \sigma_{lm} h_{k,l}^i h_{k,m}^j \mathrm{d}V \,, \tag{2.24}$$

koja daje simetričnu matricu povratne krutosti i temelji se na uvođenju volumenskog integrala početnog naprezanja i parcijalnih derivacija prirodnih oblika. Malenica et al. [59, 67], te Senjanović et al. [68] prezentirali su različite formulacije povratne krutosti temeljene na varijacijskom principu.

U numeričkom primjeru ovog doktorskog rada, koristi se konzistentna matrica krutosti, čija formulacija je zasad objavljena samo u sažetom obliku [69, 70]. Cjeloviti izvod prikazan je u članku prihvaćenom za objavljivanje u *Journal of Engineering Mathematics* [71] i mišljenje je autora doktorskog rada da spomenuti rad zajedno s radom [72] donosi zaključno rješenje za povratnu krutost, a time i zaključak rasprave [61].

Povratna krutost sastoji se od hidrostatičkog i gravitacijskog dijela. Da bi se odredio hidrostatički dio ukupnog tlaka u Bernoullijevoj jednadžbi, član $-\rho gz$ u (2.17), potrebno je odrediti generaliziranu (poopćenu) silu kao razliku rada tlaka za trenutni i početni položaj broda

$$F^h = -\rho g \iint_{\tilde{S}} \tilde{Z} \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{n}} \mathrm{d}\tilde{S} + \rho g \iint_S Z \mathbf{H} \mathbf{n} \mathrm{d}S \,, \tag{2.25}$$

gdje je $Z=Z(x, y)$ vertikalna koordinata oplakane površine, $\mathbf{n}$ je vektor normale dok $\mathbf{H}$ i $\mathrm{d}S$ predstavljaju vektor pomaka, odnosno diferencijal oplakane površine. Svaka od trenutnih veličina može se izraziti u obliku $\left(\tilde{...}\right) = \left(...\right) + D_H \left(...\right)$, pri čemu D_H označava njenu promjenu u smjeru moda. Zanemarivanjem malih članova višeg reda, može se pisati za generaliziranu silu:

$$F^h = -\rho g \iint_S \left[D_H \left(Z \right) \mathbf{H} \mathbf{n} + Z D_H \left(\mathbf{H} \right) \mathbf{n} + Z \mathbf{H} D_H \left(\mathbf{n} \right) \right] \mathrm{d}S. \tag{2.26}$$

Prirast pojedinih veličina je u biti usmjerena derivacija

$$D_H \left(Z \right) = \left(\mathbf{H} \nabla \right) Z = H_z, \quad D_H \left(\mathbf{H} \right) = \left(\mathbf{H} \nabla \right) \mathbf{H}, \quad D_H \left(\mathbf{n} \right) = \left(\mathbf{H} \nabla \right) \mathbf{n} \,, \tag{2.27}$$

gdje je ∇ Hamiltonov diferencijalni operator. Određivanje $D_H \left(\mathbf{n} \right)$ prema definiciji (2.27) nije pogodno jer zahtjeva izračunavanje derivacija vektora normale. Stoga je pogodnije koristiti inverznu inačicu iz mehanike kontinuuma [73] u kojoj su uvedene derivacije pomaka, pa se može pisati

$$\mathbf{H} D_H \left(\mathbf{n} \right) = \mathbf{H} \mathbf{n} \left(\nabla \mathbf{H} \right) - \mathbf{n} \left(\mathbf{H} \nabla \right) \mathbf{H}, \tag{2.28}$$

pri čemu drugi član u (2.28) predstavlja varijaciju prirodnog oblika. Supstituirajući (2.28) u (2.26) dobiva se izraz

$$F^h = -\rho g \iint_S \left[H_z + Z\left(\nabla \mathbf{H}\right) \right] \mathbf{H} \mathbf{n} \mathrm{d}S, \tag{2.29}$$

Prema definiciji, krutost je relacija između inkrementalne sile i pomaka, i može se odrediti iz varijacijske jednadžbe

$$\delta F^h = -\rho g \iint_S \left[H_z + Z\left(\nabla \mathbf{H}\right) \right] \delta \mathbf{H} \mathbf{n} \mathrm{d}S. \tag{2.30}$$

Budući da se koristi metoda superpozicije prirodnih oblika, varijaciju je potrebno prenijeti na oblike, odnosno modalne sile i pomake

$$\delta F^h = \sum_{j=1}^{N} \delta F_j^h, \quad \mathbf{H} = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{h}_j, \quad \delta \mathbf{H} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{h}_j \delta \xi_j, \tag{2.31}$$

pa se jednadžba (2.30) može razložiti na modalne jednadžbe:

$$\delta F_i^h = -\sum_{j=1}^{N} \left[\left(C_{ij}^p + C_{ij}^{nh} \right) \xi_j \right] \delta \xi_i. \tag{2.32}$$

C_{ij}^p i C_{ij}^{nh} su povratni koeficijenti uslijed tlaka i doprinosa vektora normale i oblika vibriranja te su jednaki:

$$C_{ij}^p = \rho g \iint_S \mathbf{h}_i h_z^j \mathbf{n} \mathrm{d}S, \qquad C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_S Z \mathbf{h}_i \left(\nabla \mathbf{h}_j \right) \mathbf{n} \mathrm{d}S. \tag{2.33}$$

Na sličan način kao sila tlaka, može se izraziti poopćena gravitacijska sila

$$F^m = -g \iiint_V \rho_s \left(\mathbf{H} \nabla \right) H_z \mathrm{d}V, \tag{2.34}$$

gdje ρ_s i V predstavljaju gustoću, odnosno volumen konstrukcije. Slično kao jednadžba (2.30) može se pisati

$$\delta F^m = -g \iiint_V \rho_s \left(\delta \mathbf{H} \nabla \right) H_z \mathrm{d}V, \tag{2.35}$$

odnosno uz primjenu modalne superpozicije:

$$\delta F_i^m = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij}^m \xi_j \delta \xi_i, \qquad C_{ij}^m = g \iiint_V \rho_s \left(\mathbf{h}_i \nabla \right) h_z^j \mathrm{d}V. \tag{2.36}$$

C_{ij}^m su koeficijenti gravitacijskog dijela povratne krutosti. Potpuni koeficijenti povratne krutosti dobiju se sumiranjem njihovih konstitutivnih dijelova

$$C_{ij} = C_{ij}^p + C_{ij}^{nh} + C_{ij}^m. \tag{2.37}$$

Koeficijenti povratne krutosti zapisani u razvijenoj formi glase [70]:

$$C_{ij}^{p} = \rho g \iint_{S} \left(h_x^i n_x + h_y^i n_y + h_z^i n_z \right) h_z^j \mathrm{d}S, \tag{2.38}$$

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \iint_{S} Z \left(h_x^i n_x + h_y^i n_y + h_z^i n_z \right) \left(\frac{\partial h_x^j}{\partial x} + \frac{\partial h_y^j}{\partial y} + \frac{\partial h_z^j}{\partial z} \right) \mathrm{d}S, \tag{2.39}$$

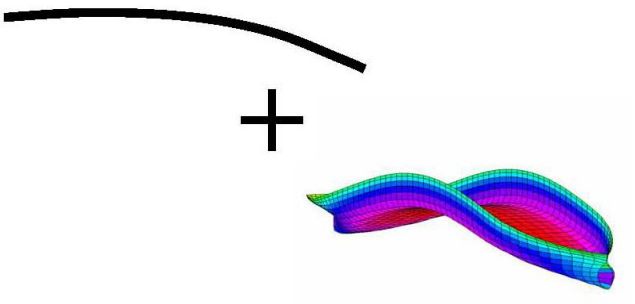
$$C_{ij}^{m} = g \iiint_{V} \rho_s \left(h_x^i \frac{\partial h_z^j}{\partial x} + h_y^i \frac{\partial h_z^j}{\partial y} + h_z^i \frac{\partial h_z^j}{\partial z} \right) \mathrm{d}V. \tag{2.40}$$

2.6. Hidroelastični model

Nakon što su definirani strukturni, hidrodinamički i hidrostatički model može se konstituirati hidroelastični model, Slika 2.4, u frekvencijskoj domeni čija jednadžba prema [3, 52, 53, 54, 56] glasi:

$$\left([k] + [C] - i\omega \left([d] + [B(\omega)] \right) - \omega^2 \left([m] + [A(\omega)] \right) \right) \{\xi\} = \{F\}, \tag{2.41}$$

gdje su [*k*], [*d*] *i* [*m*] modalne matrice krutosti, prigušenja i mase konstrukcije. [*C*] je povratna krutost, dok su [*B*(*ω*)] i [*A*(*ω*)] modalno hidrodinamičko prigušenje i modalna pridružena masa. $\{\xi\}$ su modalne amplitude, $\{F\}$ je valna uzbuda, dok ω predstavlja susretnu frekvenciju (za slučaj bez brzine napredovanja, jednaka je je valnoj frekvenciji).



Slika 2.4 Hidroelastični FSB-BV model

Strukturno prigušenje, za potrebe hidroelastičnih analiza, može se zadati kao određeni postotak iznosa kritičnog prigušenja, na temelju iskustva.

Rješavanje jednadžbe (2.41) daje modalne amplitude ξ_i a pomak bilo koje točke na konstrukciji dobije se natražnim uvrštavanjem u (2.15).

Prikladnost opisanog teorijskog modela za analizu hidroelastičnog odziva potvrđena je i eksperimentalno, usporedbom izračunatog i izmjerenog odziva modela elastične segmentne barže na valovima [59, 74, 75].

3. UTJECAJ SMICANJA NA UVIJANJE BRODSKOG TRUPA

3.1. Izvod diferencijalnih jednadžbi vibracija grede

U skladu s teorijom savijanja grede ukupni progib savijanja s utjecajem smicanja w, sastoji se od progiba zbog savijanja, w_b, i progiba uslijed smicanja, w_s, pri čemu kut zakreta presjeka ovisi samo o progibu uslijed savijanja [34, 76, 77], Slika 3.1:

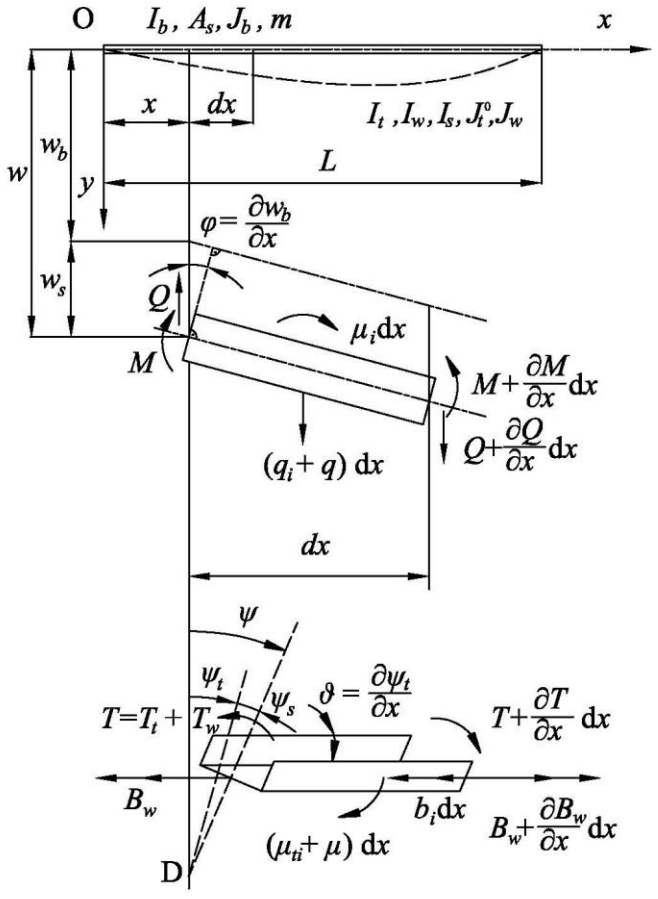
$$w = w_b + w_s, \quad \varphi = \frac{\partial w_b}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Presječne sile su moment savijanja i smična sila:

$$M = -EI_b \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{3.2}$$

$$Q = GA_s \frac{\partial w_s}{\partial x}, \tag{3.3}$$

gdje su E i G Youngov modul elastičnosti i modul smicanja, I_b predstavlja moment tromosti poprečnog presjeka, dok je A_s smična površina.



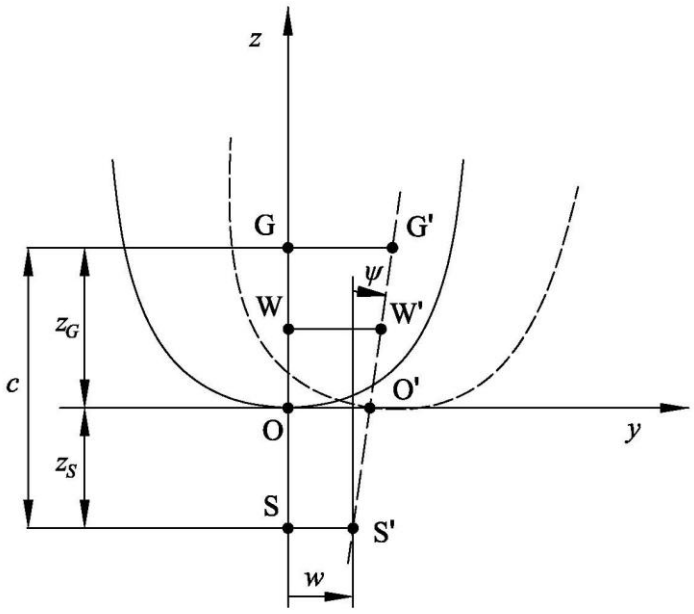
Slika 3.1 Savijanje i uvijanje grede

Inercijsko opterećenje sastoji se od distribuiranog poprečnog opterećenja, q_i, i distribuiranog momenta savijanja, μ_i, a za slučaj spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija može se pisati

$$q_i = -m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right), \tag{3.4}$$

$$\mu_i = -J_b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

gdje je m distribuirana masa (masa broda i pridružena masa), J_b označava moment tromosti mase broda oko osi z (vertikalne osi), dok je c udaljenost između težišta mase i centra smicanja, $c = z_G - z_S$, Slika 3.2.



Slika 3.2 Poprečni presjek tankostjenog nosača

Ukupni kut uvijanja, ψ, analogno ukupnom progibu kod savijanja, sastoji se od kuta uvijanja, ψ_t, i kuta uvijanja zbog smicanja, ψ_s, dok drugi gredni pomak, koji uzrokuje vitoperenje (deplanaciju) poprečnog presjeka, predstavlja prirast kuta uvijanja ψ_t, Slika 3.1 [13]

$$\psi = \psi_t + \psi_s, \ \vartheta = \frac{\partial \psi_t}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Presječne sile uključuju čisti moment torzije, T_t, bimoment, B_w, i dodatni moment izvitoperenja, T_w

$$T_t = GI_t\vartheta, \tag{3.7}$$

$$B_w = -EI_w \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \tag{3.8}$$

$$T_w = GI_s \frac{\partial \psi_s}{\partial x}, \tag{3.9}$$

gdje I_t, I_w i I_s predstavljaju redom faktor krutosti na uvijanje, faktor krutosti na vitoperenje i smični modul tromosti poprečnog presjeka.

Inercijsko opterećenje sastoji se od distribuiranog momenta uvijanja, μ_{ti}, i distribuiranog bimomenta, b_i, koji se mogu izraziti u sljedećem obliku

$$\mu_{ti} = -J_t \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - mc \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.10}$$

$$b_i = -J_w \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \tag{3.11}$$

gdje je J_t polarni moment tromosti mase broda i pridružene mase oko centra smicanja, a J_w bimoment tromosti mase broda oko centra vitoperenja, Slika 3.2.

Razmatrajući ravnotežu diferencijalnog elementa nosača, može se pisati da vrijedi za savojne vibracije

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q + \mu_i, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -q_i - q, \tag{3.13}$$

odnosno za torzijske vibracije [11]

$$\frac{\partial B_w}{\partial x} = T_w + b_i, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial x} + \frac{\partial T_w}{\partial x} = -\mu_{ti} - \mu, \tag{3.15}$$

pri čemu q i μ predstavljaju distribuirano poprečno vanjsko opterećenje i distribuirani vanjski moment uvijanja.

Gornje jednadžbe mogu se reducirati na dvije spregnute parcijalne diferencijalne jednadžbe, pri čemu se uvrštavanjem (3.2) i (3.3) u (3.12) dobiva

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = -\frac{EI_b}{GA_s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{J_b}{GA_s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{3.16}$$

Uvrštavanjem (3.3) i (3.4) u (3.13) slijedi

$$EI_b \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(J_b + m \frac{EI_b}{GA_s} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ_b}{GA_s} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + mc \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial q}{\partial x}. \tag{3.17}$$

Na sličan način, supstituirajući jednadžbe (3.8) i (3.9) u (3.14) može se pisati

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} = -\frac{EI_w}{GI_s}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{J_w}{GI_s}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}. \tag{3.18}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.7), (3.9) i (3.10) u (3.15) dobije se sljedeći izraz

$$\begin{aligned} &EI_w \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + J_t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \left(J_w + J_t \frac{EI_w}{GI_s} \right) \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ &\frac{J_w}{GI_s}\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial t^4} + mc\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial \mu}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Nadalje, ψ, u jednadžbi (3.17) se može razlučiti na $\psi_t + \psi_s$, te se drugi član može izraziti preko jednadžbe (3.18). Slična supstitucija može se napraviti za progib uslijed savijanja i smicanja u (3.19), $w = w_b + w_s$, pri čemu je progib uslijed smicanja definiran jednadžbom (3.16). Uzimajući u obzir da vrijedi $\varphi = \partial w_b / \partial x$ i $\vartheta = \partial \psi_t / \partial x$ jednadžbe (3.17) i (3.19), nakon integracije po koordinati *x*, prelaze u oblik

$$\begin{aligned} &EI_b \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \left(J_b + m\frac{EI_b}{GA_s} \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{mJ_b}{GA_s}\frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} \\ &+mc\left(\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} - \frac{EI_w}{GI_s}\frac{\partial^4 \psi_t}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J_w}{GI_s}\frac{\partial^4 \psi_t}{\partial t^4} \right) = q, \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} &EI_w \frac{\partial^4 \psi_t}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} + J_t \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} - \left(J_w + J_t \frac{EI_w}{GI_s} \right) \frac{\partial^4 \psi_t}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J_w}{GI_s}\frac{\partial^4 \psi_t}{\partial t^4} \\ &+mc\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{EI_b}{GA_s}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J_b}{GA_s}\frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} \right) = \mu. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nakon rješavanja jednadžbi (3.20) i (3.21) ukupni pomak i kut uvijanja dobiju se preko (3.16) i (3.18)

$$w = w_b + w_s = w_b - \frac{EI_b}{GA_s}\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{J_b}{GA_s}\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + f(t), \tag{3.22}$$

$$\psi = \psi_t + \psi_s = \psi_t - \frac{EI_w}{GI_s}\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} + \frac{J_w}{GI_s}\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} + g(t), \tag{3.23}$$

gdje $f(t)$ i $g(t)$ predstavljaju integracijske funkcije, koje ovise o početnim uvjetima.

Izvođenjem diferencijalnih jednadžbi (3.20) i (3.21) dobiva se jasan uvid u fizikalnu pozadinu problema, te mjesto i ulogu parametara krutosti i mase, kao i spregu koja se realizira preko inercijskih članova. Ukoliko se moment uvijanja T_t izostavi iz prethodnog teorijskog razmatranja, očito je da postoji potpuna analogija između savijanja i uvijanja [11].

Mogućnosti primjene izvedenih diferencijalnih jednadžbi su, nažalost, ograničene na prizmatične nosače, a za složenije probleme, poput onih vezanih za dinamiku brodskog trupa, potrebno je izvesti formulaciju preko konačnih elemenata.

3.2. Torzijske vibracije prizmatičnog nosača

Kako bi se analizirao utjecaj parametara krutosti i mase na torzijske vibracije, te kako bi se ilustrirala primjena jednadžbi (3.20) i (3.21), razmatraju se prirodne vibracije prizmatičnog nosača. Diferencijalna jednadžba gibanja dobivena je iz (3.21) zanemarivanjem udaljenosti između težišta i centra smicanja, $c = 0$, te uz pretpostavku da je maseni bimoment vitoperenja jednak nuli, $J_w = 0$, radi jednostavnosti.

$$EI_w \frac{\partial^4 \psi_t}{\partial x^4} - GI_t \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial x^2} + J_t^0 \left(\frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2} - \frac{EI_w}{GI_s} \frac{\partial^4 \psi_t}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = 0. \tag{3.24}$$

Budući da su prirodne vibracije harmonijske jednadžba (3.24) se može zapisati kao

$$EI_w \frac{d^4 \psi_t}{dx^4} - GI_t \left(1 - \omega^2 J_t^0 \frac{EI_w}{GI_t GI_s} \right) \frac{d^2 \psi_t}{dx^2} - \omega^2 J_t^0 \psi_t = 0, \tag{3.25}$$

gdje je ψ_t oblik vibriranja, a ω prirodna frekvencija.

Rješenje jednadžbe (3.25) pretpostavlja se u obliku eksponencijalne funkcije:

$$\psi_t = e^{\alpha x}, \tag{3.26}$$

čijim uvrštavanjem u (3.25) se dobije karakteristična bikvadratna jednadžba:

$$\alpha^4 + b\alpha^2 + c = 0, \tag{3.27}$$

gdje je

$$b = \frac{GI_t}{EI_w} \left(\omega^2 J_t^0 \frac{EI_w}{GI_t GI_s} - 1 \right), \quad c = -\frac{\omega^2 J_t^0}{EI_w}. \tag{3.28}$$

Rješenja jednadžbe (3.27) glase:

$$\alpha_j = \pm\eta, \ \pm i\chi, \tag{3.29}$$

gdje je

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{b^2 - 4c} - b}, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{b^2 - 4c} + b}. \tag{3.30}$$

Rješenje jednadžbe (3.25) sada se može zapisati u obliku:

$$\psi_t = A_1 \mathrm{sh}\,\eta x + A_2 \mathrm{ch}\,\eta x + A_3 \sin \chi x + A_4 \cos \chi x. \tag{3.31}$$

Ukoliko se razmatraju vibracije slobodnog nosača duljine $2l$, uz pretpostavku spriječenog vitoperenja na njegovim krajevima, $u = \bar{u}\vartheta$, odgovarajući rubni uvjeti glase:

$$x = \pm l : T = 0, \ u = 0, \tag{3.32}$$

što dovodi do:

$$x = \pm l : \frac{d\psi_t}{dx} = 0, \ \frac{d^3\psi_t}{dx^3} = 0 . \tag{3.33}$$

U slučaju simetričnih oblika vibriranja vrijedi $A_1 = A_3 = 0$, dok za antisimetrične oblike vrijedi $A_2 = A_4 = 0$. Odgovarajući problemi svojstvenih vrijednosti glase:

$$\begin{bmatrix} \eta \mathrm{sh}\,\eta l & -\chi \sin \chi l \\ \eta^3 \mathrm{sh}\,\eta l & \chi^3 \sin \chi l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \{0\}, \tag{3.34}$$

$$\begin{bmatrix} \eta \mathrm{ch}\,\eta l & \chi \cos \chi l \\ \eta^3 \mathrm{ch}\,\eta l & -\chi^3 \cos \chi l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \{0\}. \tag{3.35}$$

Iz uvjeta netrivijalnosti rješenja slijedi da determinante u (3.34) i (3.35) moraju biti jednake nuli, što dovodi do frekvencijskih jednadžbi

$$\eta\chi\left(\eta^2 + \chi^2\right) \mathrm{sh}\,\eta l \sin \chi l = 0 \tag{3.36}$$

$$\eta\chi\left(\eta^2 + \chi^2\right) \mathrm{ch}\,\eta l \cos \chi l = 0 \tag{3.37}$$

s jednakom formulom za svojstvene vrijednosti za simetrične ($n = 0,\ 2, \ldots$) i antisimetrične ($n = 1,\ 3, \ldots$) oblike vibriranja

$$\chi l = \frac{n\pi}{2}, \ n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.38}$$

Uvrštavanjem (3.38) u (3.30) za χ, dobije se sljedeći izraz za prirodne frekvencije torzijskih vibracija

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI_t}{J_t^0}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2 \frac{EI_w}{GI_t}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2 \frac{EI_w}{GI_s}}}, \ n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3.39}$$

Prvi član u gornjoj jednadžbi predstavlja prirodne frekvencije slobodne grede bez spriječenog vitoperenja:

$$\tilde{\omega}_n = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI_t}{J_t^0}} . \tag{3.40}$$

Iz izraza (3.39) jasno se razabire utjecaj krutosti na vitoperenje GI_w, krutosti na uvijanje GI_t, te smične krutosti GI_s, na prirodne frekvencije torzijskih vibracija prizmatičnog nosača.

Konstante integracije A_2 i A_4, odnosno A_1 i A_3, određuju se iz jednadžbi (3.34) i (3.35). Simetrični i antisimetrični oblici vibriranja prema (3.31) glase:

$$\psi_{tn} = \chi_n \sin \chi_n l \mathrm{ch}\,\eta_n x + \eta_n \mathrm{sh}\,\eta_n l \cos \chi_n x, \ n = 0, 2 \ldots \tag{3.41}$$

$$\psi_{tn} = \chi_n \cos\chi_n l \operatorname{sh}\eta_n x - \eta_n \operatorname{ch}\eta_n l \sin\chi_n x,\ n = 1,3... \tag{3.42}$$

Imajući u vidu jednadžbu (3.23), ukupni kut uvijanja koji se sastoji od torzijskog i smičnog doprinosa jednak je:

$$\psi_n = \left(1 - \frac{EI_w}{GI_s}\eta_n^2\right)\chi_n \sin\chi_n l \operatorname{ch}\eta_n x + \left(1 + \frac{EI_w}{GI_s}\chi_n^2\right)\eta_n \operatorname{sh}\eta_n l \cos\chi_n x,\ n = 0,2... \tag{3.43}$$

$$\psi_n = \left(1 - \frac{EI_w}{GI_s}\eta_n^2\right)\chi_n \cos\chi_n l \operatorname{sh}\eta_n x - \left(1 - \frac{EI_w}{GI_s}\chi_n^2\right)\eta_n \operatorname{ch}\eta_n l \sin\chi_n x,\ n = 1,3... \tag{3.44}$$

3.3. Gredni konačni element

Funkcije oblika grednog konačnog elementa za analizu vibracija moraju zadovoljavati sljedeće konzistentne odnose za harmonijske vibracije koji se dobiju iz jednadžbi (3.22) i (3.23), [76]:

$$w = w_b + w_s = \left(1 - \omega^2 \frac{J_b}{GA_s}\right) w_b - \frac{EI_b}{GA_s}\frac{\mathrm{d}^2 w_b}{\mathrm{d}x^2} \tag{3.45}$$

$$\psi = \psi_t + \psi_s = \left(1 - \omega^2 \frac{J_w}{GI_s}\right)\psi_t - \frac{EI_w}{GI_s}\frac{\mathrm{d}^2\psi_t}{\mathrm{d}x^2}. \tag{3.46}$$

Jednadžba grednog konačnog elementa za spregnute horizontalne i torzijske vibracije može se izvesti iz ukupne energije elementa. Ona se sastoji od energije deformacije, kinetičke energije, rada vanjskog lateralnog opterećenja, q, i distribuiranog momenta, μ, i rada rubnih sila, pa se prema [24, 76] može pisati:

$$\begin{aligned} E_{tot} = {} & \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI_b\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right)^2 + GA_s\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 + EI_w\left(\frac{\partial^2\psi_t}{\partial x^2}\right)^2 + GI_s\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial x}\right)^2 + GI_t\left(\frac{\partial\psi_t}{\partial x}\right)^2 \right]\mathrm{d}x \\ & + \frac{1}{2}\int_0^l \left[m\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + J_b\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + 2mc\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + J_w\left(\frac{\partial^2\psi_t}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + J_t\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \right]\mathrm{d}x \\ & - \int_0^l (qw + \mu\psi)\mathrm{d}x + (Qw - M\varphi + T\psi + B_w\vartheta)_0^l, \end{aligned} \tag{3.47}$$

gdje je l duljina elementa.

Budući da greda ima četiri pomaka, w, φ, ψ, ϑ, konačni element s dva čvora ima osam stupnjeva slobode, tj. četiri smicanje-savijanje i uvijanje-vitoperenje pomaka, Slika 3.3,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} w(0) \\ \varphi(0) \\ w(l) \\ \varphi(l) \end{Bmatrix}, \qquad \{V\} = \begin{Bmatrix} \psi(0) \\ \vartheta(0) \\ \psi(l) \\ \vartheta(l) \end{Bmatrix}. \tag{3.48}$$

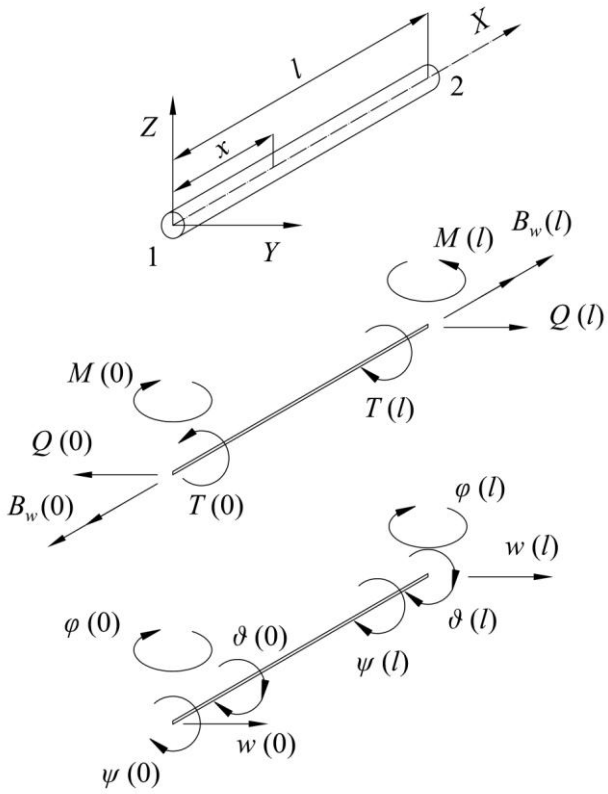
Osnovni pomaci grede, w_b i ψ_t mogu se izraziti polinomima trećeg stupnja [78]

$$w_b = \langle a_k \rangle \{\xi^k\}, \quad \psi_t = \langle d_k \rangle \{\xi^k\}, \quad k = 0,1,2,3,$$
$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \langle \dots \rangle = \{ \dots \}^T. \tag{3.49}$$

Štoviše, naizmjeničnim izjednačavanjem pojedinog čvornog pomaka vektora $\{U\}$ s jedinicom, te preostalih s nulom, te čineći isto za vektor $\{V\}$, slijedi:

$$w_b = \langle w_{bi} \rangle \{U\}, \; w_s = \langle w_{si} \rangle \{U\}, \; w = \langle w_i \rangle \{U\},$$
$$\psi_t = \langle \psi_{ti} \rangle \{V\}, \; \psi_s = \langle \psi_{si} \rangle \{V\}, \; \psi = \langle \psi_i \rangle \{V\}, \; i = 1,2,3,4, \tag{3.50}$$

gdje su w_{bi}, w_{si}, w_i i ψ_{ti}, ψ_{si}, ψ_i, funkcije oblika.



Slika 3.3 Gredni konačni element

Za funkcije oblika, imajući u vidu jednadžbe (3.45) i (3.46), može se pisati

$$w_{bi} = \langle a_{ik} \rangle \{\xi^k\}, \quad w_{si} = \langle b_{ik} \rangle \{\xi^k\}, \quad w_i = \langle c_{ik} \rangle \{\xi^k\}$$
$$\psi_{ti} = \langle d_{ik} \rangle \{\xi^k\}, \quad \psi_{si} = \langle e_{ik} \rangle \{\xi^k\}, \quad \psi_i = \langle f_{ik} \rangle \{\xi^k\} \tag{3.51}$$

$$[a_{ik}] = \frac{1}{\alpha(\alpha+12\beta)} \begin{bmatrix} \alpha+6\beta & 0 & -3\alpha & 2\alpha \\ -4\beta(\alpha+3\beta)l & \alpha(\alpha+12\beta)l & -2\alpha(\alpha+3\beta)l & \alpha^2 l \\ 6\beta & 0 & 3\alpha & -2\alpha \\ -2\beta(\alpha-6\beta)l & 0 & -\alpha(\alpha-6\beta)l & \alpha^2 l \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

$$
\begin{aligned}
b_{i0} &= -(1-\alpha)a_{i0} - 2\beta a_{i2} \\
b_{i1} &= -(1-\alpha)a_{i1} - 6\beta a_{i3} \\
b_{i2} &= -(1-\alpha)a_{i2} \\
b_{i3} &= -(1-\alpha)a_{i3},
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

$$
[c_{ik}] = [a_{ik}] + [b_{ik}], \quad i = 1,2,3,4, \quad k = 0,1,2,3 \tag{3.54}
$$

$$
\alpha = 1 - \omega^2 \frac{J_b}{GA_s}, \quad \beta = \frac{EI_b}{GA_s l^2}. \tag{3.55}
$$

Konstitucija torzijskih matrica $[d_{ik}]$, $[e_{ik}]$ i $[f_{ik}]$ je jednaka kao za matrice $[a_{ik}]$, $[b_{ik}]$ i $[c_{ik}]$, s tim što je parametre α i β potrebno zamijeniti s

$$
\eta = 1 - \omega^2 \frac{J_w}{GI_s}, \quad \gamma = \frac{EI_w}{GI_s l^2}, \tag{3.56}
$$

prema (3.46).

Uvrštavanjem jednadžbi (3.50) u (3.47) dobiva se

$$
\begin{aligned}
E_{tot} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{bs} & 0 \\ 0 & k_{ws} + k_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{sb} & m_{st} \\ m_{ts} & m_{tw} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{Bmatrix} \\
- \begin{Bmatrix} q \\ \mu \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ R \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

gdje su, pretpostavljajući konstantne vrijednosti značajki elementa:

- matrica krutosti savijanje-smicanje

$$
[k]_{bs} = \left[EI_b \int_0^l \frac{\mathrm{d}^2 w_{bi}}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 w_{bj}}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x + GA_s \int_0^l \frac{\mathrm{d}w_{si}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}w_{sj}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right], \tag{3.58}
$$

- matrica krutosti vitoperenje-smicanje

$$
[k]_{ws} = \left[EI_w \int_0^l \frac{\mathrm{d}^2 \psi_{ti}}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 \psi_{tj}}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x + GI_s \int_0^l \frac{\mathrm{d}\psi_{si}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\psi_{sj}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right], \tag{3.59}
$$

- matrica krutosti na uvijanje

$$
[k]_t = \left[GI_t \int_0^l \frac{\mathrm{d}\psi_{ti}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\psi_{tj}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right], \tag{3.60}
$$

- matrica mase smicanje-savijanje

$$
[m]_{sb} = \left[m \int_0^l w_i w_j \mathrm{d}x + J_b \int_0^l \frac{\mathrm{d}w_{bi}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}w_{bj}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right], \tag{3.61}
$$

- matrica mase uvijanje-vitoperenje

$$[m]_{tw} = \left[J_t \int_0^l \psi_i \psi_j \,\mathrm{d}x + J_w \int_0^l \frac{\mathrm{d}\psi_{ti}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\psi_{tj}}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x \right], \tag{3.62}$$

- matrica mase smicanje-uvijanje

$$[m]_{st} = \left[mc \int_0^l w_i \psi_j \,\mathrm{d}x \right], \qquad [m]_{ts} = [m]_{st}^T, \tag{3.63}$$

- vektor smičnih sila i vektor momenta uvijanja

$$\begin{aligned} \{q\} &= \left\{ \int_0^l q\, w_j \,\mathrm{d}x \right\} \\ \{\mu\} &= \left\{ \int_0^l \mu \psi_j \,\mathrm{d}x \right\}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Vektori $\{P\}$ i $\{R\}$ iz izraza (3.57) su vektor čvornih sila smicanje-savijanje, odnosno vektor čvornih sila uvijanje-vitoperenje

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ -M(l) \end{Bmatrix}, \qquad \{R\} = \begin{Bmatrix} -T(0) \\ B_w(0) \\ T(l) \\ -B_w(l) \end{Bmatrix}. \tag{3.65}$$

Matrica krutosti savijanje-smicanje, izraz (3.58), dobiva se sumiranjem matrica krutosti savijanja i smicanja:

$$[k]_{bs} = [k]_b + [k]_s, \tag{3.66}$$

$$k_{ij}^b = \frac{4EI_b}{l^3} \left[a_{i2}a_{j2} + \frac{3}{2}\left(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2}\right) + 3a_{i3}a_{j3} \right], \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^s = \frac{GA_s}{l} \Big[& b_{i1}b_{j1} + b_{i1}b_{j2} + b_{i2}b_{j1} + b_{i1}b_{j3} + b_{i3}b_{j1} \\ & + \frac{4}{3}b_{i2}b_{j2} + \frac{3}{2}\left(b_{i2}b_{j3} + b_{i3}b_{j2}\right) + \frac{9}{5}b_{i3}b_{j3} \Big]. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Matrica krutosti vitoperenje-smicanje $[k]_{ws}$ konstituira se na isti način kao matrica $[k]_{bs}$, samo što se I_b, A_s, a_{ik} i b_{ik} trebaju zamijeniti s I_w, I_s, d_{ik} i e_{ik}, prema (3.56). Matrica krutosti na uvijanje $[k]_t$ istog je tipa kao matrica $[k]_s$, samo što je članove A_s i b_{ik} potrebno zamijeniti s I_t i a_{ik}. Smično-savojna matrica mase dobije se sumiranjem smične i savojne matrice mase:

$$[m]_{sb} = [m]_s + [m]_b, \tag{3.69}$$

$$m_{ij}^{s} = ml\Big[c_{i0}c_{j0} + \frac{1}{2}\big(c_{i1}c_{j0} + c_{i0}c_{j1}\big) + \frac{1}{3}\big(c_{i2}c_{j0} + c_{i1}c_{j1} + c_{i0}c_{j2}\big)$$
$$+ \frac{1}{4}\big(c_{i0}c_{j3} + c_{i1}c_{j2} + c_{i2}c_{j1} + c_{i3}c_{j0}\big) + \frac{1}{5}\big(c_{i1}c_{j3} + c_{i2}c_{j2} + c_{i3}c_{j1}\big), \tag{3.70}$$
$$+ \frac{1}{6}\big(c_{i2}c_{j3} + c_{i3}c_{j2}\big) + \frac{1}{7}c_{i3}c_{j3}\Big]$$

$$m_{ij}^{b} = \frac{J_b}{l}\Big[a_{i1}a_{j1} + a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1} + a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1}$$
$$++\frac{4}{3}a_{i2}a_{j2} + \frac{3}{2}\big(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2}\big) + \frac{9}{5}a_{i3}a_{j3}\Big]. \tag{3.71}$$

Matrica mase uvijanje-vitoperenje $\left[m\right]_{tw}$ je jednake konstitucije kao i smično-savojna matrica mase, pri čemu je veličine m, J_b, c_{ik} i a_{ik} potrebno zamijeniti s veličinama J_t, J_w, f_{ik} i d_{ik}. Smično-torzijska matrica mase, izraz (3.63), jednaka je:

$$m_{ij}^{st} = mcl\Big[c_{i0}f_{j0} + \frac{1}{2}\big(c_{i1}f_{j0} + c_{i0}f_{j1}\big) + \frac{1}{3}\big(c_{i2}f_{j0} + c_{i1}f_{j1} + c_{i0}f_{j2}\big)$$
$$+ \frac{1}{4}\big(c_{i0}f_{j3} + c_{i1}f_{j2} + c_{i2}f_{j1} + c_{i3}f_{j0}\big) + \frac{1}{5}\big(c_{i1}f_{j3} + c_{i2}f_{j2} + c_{i3}f_{j1}\big) \tag{3.72}$$
$$+ \frac{1}{6}\big(c_{i2}f_{j3} + c_{i3}f_{j2}\big) + \frac{1}{7}c_{i3}f_{j3}\Big].$$

Izraz za vektor smičnog opterećenja, (3.64), glasi:

$$q_i = q_0 l\left(c_{i0} + \frac{1}{2}c_{i1} + \frac{1}{3}c_{i2} + \frac{1}{4}c_{i3}\right) + q_1 l\left(\frac{1}{2}c_{i0} + \frac{1}{3}c_{i1} + \frac{1}{4}c_{i2} + \frac{1}{5}c_{i3}\right), \tag{3.73}$$

dok je vektor momenta uvijanja μ_i istog oblika, izražen s veličinama μ_0, μ_1 i f_{ik} umjesto q_0, q_1 i e_{ik}. U izrazima (3.58) do (3.73) vrijedi $i, j = 1,2,3,4$.

Konzistentne funkcije oblika presječnih sila konačnih elemenata su sljedeće:

- moment savijanja, jednadžba (3.2)

$$M_i = -EI_b \frac{d^2 w_{bi}}{dx^2} = -EI_b \left\langle a_{ik}^{(2)} \right\rangle \left\{ \xi^k \right\}, \quad k = 0,1,2,3., \tag{3.74}$$

- poprečna sila, jednadžba (3.3)

$$Q_i = GA_s \frac{\mathrm{d}w_{si}}{\mathrm{d}x} = GA_s \left\langle b_{ik}^{(1)} \right\rangle \left\{ \xi^k \right\}, \quad k = 0,1,2,3., \tag{3.75}$$

- moment čistog uvijanja, jednadžba (3.7)

$$T_{ti} = GI_t \frac{d\psi_{ti}}{dx} = GI_t \left\langle d_{ik}^{(1)} \right\rangle \left\{ \xi^k \right\}, \quad k = 0,1,2,3., \tag{3.76}$$

- moment izvitoperenja, jednadžba (3.9)

$$T_{wi} = GI_s \frac{\mathrm{d}\psi_{si}}{\mathrm{d}x} = GI_s \left\langle e_{ik}^{(1)} \right\rangle \left\{ \xi^k \right\}, \quad k = 0,1,2,3., \tag{3.77}$$

- bimoment, jednadžba (3.8)

$$B_{wi} = -EI_w \frac{d^2\psi_{ti}}{dx^2} = -EI_w \left\langle d_{ik}^{(2)} \right\rangle \left\{ \xi^k \right\}, \qquad k = 0,1,2,3. \tag{3.78}$$

- vektori funkcija oblika, jednadžba (3.8)

$$\begin{aligned}
&\left\langle a_{ik}^{(2)} \right\rangle = \frac{2}{l^2} \left\langle a_{i2}, 3a_{i3}, 0, 0 \right\rangle, \qquad \left\langle b_{ik}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{l} \left\langle b_{i1}, 2b_{i2}, 3b_{i3}, 0 \right\rangle, \\
&\left\langle d_{ik}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{l} \left\langle d_{i1}, 2d_{i2}, 3d_{i3}, 0 \right\rangle, \quad \left\langle e_{ik}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{l} \left\langle e_{i1}, 2e_{i2}, 3e_{i3}, 0 \right\rangle, \\
&\left\langle d_{ik}^{(2)} \right\rangle = \frac{2}{l^2} \left\langle d_{i2}, 3d_{i3}, 0, 0 \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Važno je istaknuti da su sve matrice krutosti i mase grednih konačnih elemenata (a posljedično i globalne matrice konstrukcije koje se formiraju spajanjem konačnih elemenata) ovisne o frekvenciji zbog koeficijenata α i η u formulaciji funkcija oblika, jednadžbe (3.55) i (3.56). Stoga se za rješavanje problema svojstvenih vrijednosti (3.1) mora primijeniti iterativni postupak. Zbog ovisnosti spomenutih matrica o frekvenciji, svojstveni vektori više nisu ortogonalni, a uporaba neortogonalnih oblika u metodi superpozicije prirodnih oblika vibriranja, posebice u slučaju vremenske integracije, nije praktična. Za tu svrhu prikladnije je upotrijebiti matematički ortogonalne oblike koji se dobiju za statičke pomake u (3.45) i (3.46) uz $\omega = 0$ što vodi do $\alpha = \eta = 1$. Utjecaj frekvencijski ovisnih i neovisnih formulacija matrica krutosti i mase grednih konačnih elemenata na rezultate analiziran je u [77], a osnovni rezultati su prikazani u poglavlju 6. Utjecaj pojednostavljene formulacije također je analiziran energetskom metodom, na primjeru prizmatičnog pontona, Prilog A.

Matrice krutosti formulirane uz pretpostavku neovisnosti o frekvenciji izvedene su pomoću [80] te se mogu izraziti u eksplicitnom obliku na sljedeći način:

$$\left[k\right]_{bs} = \frac{2EI_b}{\left(1+12\beta\right)l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2\left(1+3\beta\right)l^2 & -3l & \left(1-6\beta\right)l^2 \\ & & 6 & -3l \\ Sym. & & & 2\left(1+3\beta\right)l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.80}$$

$$\left[k\right]_{ws} = \frac{2EI_w}{\left(1+12\gamma\right)l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2\left(1+3\gamma\right)l^2 & -3l & \left(1-6\gamma\right)l^2 \\ & & 6 & -3l \\ Sym. & & & 2\left(1+3\gamma\right)l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.81}$$

$$[k]_t = \frac{GI_t}{30(1+12\gamma)^2 l}$$

$$\times \begin{bmatrix} 36 & 3(1-60\gamma)l & -36 & 3(1-60\gamma)l \\ & 4(1+15\gamma+360\gamma^2)l^2 & -3(1-60\gamma)l & -(1+60\gamma-720\gamma^2)l^2 \\ & & 36 & -3(1-60\gamma)l \\ Sym. & & & 4(1+15\gamma+360\gamma^2)l^2 \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

Matrice mase (frekvencijski neovisna formulacija):

$$[m]_{sb} = [m]_s + [m]_b, \tag{3.83}$$

$$[m]_s = \frac{ml}{420(1+12\beta)^2}$$

$$\times \begin{bmatrix} 156+3528\beta+20160\beta^2 & (22+462\beta+2520\beta^2)l & 54+1512\beta+10080\beta^2 & -(13+378\beta+2520\beta^2)l \\ & (4+84\beta+504\beta^2)l^2 & (13+378\beta+2520\beta^2)l & -(3+84\beta+504\beta^2)l^2 \\ & & 156+3528\beta+20160\beta^2 & -(22+462\beta+2520\beta^2)l \\ Sym. & & & (4+84\beta+504\beta^2)l^2 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

$$[m]_b = \frac{J_b}{30(1+12\beta)^2 l} \begin{bmatrix} 36 & (3-180\beta)l & -36 & (3-180\beta)l \\ & (4+60\beta+1440\beta^2)l^2 & (-3+180\beta)l & -(1+60\beta-720\beta^2)l^2 \\ & & 36 & (-3+180\beta)l \\ Sym. & & & (4+60\beta+1440\beta^2)l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.85}$$

$$[m]_{tw} = [m]_t + [m]_w, \tag{3.86}$$

$$[m]_t = \frac{J_t l}{420(1+12\gamma)^2}$$

$$\times \begin{bmatrix} 156+3528\gamma+20160\gamma^2 & (22+462\gamma+2520\gamma^2)l & 54+1512\gamma+10080\gamma^2 & -(13+378\gamma+2520\gamma^2)l \\ & (4+84\gamma+504\gamma^2)l^2 & (13+378\gamma+2520\gamma^2)l & -(3+84\gamma+504\gamma^2)l^2 \\ & & 156+3528\gamma+20160\gamma^2 & -(22+462\gamma+2520\gamma^2)l \\ Sym. & & & (4+84\gamma+504\gamma^2)l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

$$[m]_w = \frac{J_w}{30(1+12\gamma)^2 l} \begin{bmatrix} 36 & (3-180\gamma)l & -36 & (3-180\gamma)l \\ & (4+60\gamma+1440\gamma^2)l^2 & (-3+180\gamma)l & -(1+60\gamma-720\gamma^2)l^2 \\ & & 36 & (-3+180\gamma)l \\ Sym. & & & (4+60\gamma+1440\gamma^2)l^2 \end{bmatrix}, \tag{3.88}$$

$$[m]_{st} = \frac{mlc}{420(1+12\beta)(1+12\gamma)}$$

$$\times \begin{bmatrix} 156+1764\beta+1764\gamma+20160\beta\gamma & (22+252\beta+210\gamma+2520\beta\gamma)l & 54+756\beta+756\gamma+10080\beta\gamma & -(13+168\beta+210\gamma+2520\beta\gamma)l \\ (22+210\beta+252\gamma+2520\beta\gamma)l & (4+42\beta+42\gamma+504\beta\gamma)l^2 & (13+210\beta+168\gamma+2520\beta\gamma)l & -(3+42\beta+42\gamma+504\beta\gamma)l^2 \\ 54+756\beta+756\gamma+10080\beta\gamma & (13+168\beta+210\gamma+2520\beta\gamma)l & 156+1764\beta+1764\gamma+20160\beta\gamma & -(22+252\beta+210\gamma+2520\beta\gamma)l \\ -(13+210\beta+168\gamma+2520\beta\gamma)l & -(3+42\beta+42\gamma+504\beta\gamma)l^2 & -(22+210\beta+252\gamma+2520\beta\gamma)l & (4+42\beta+42\gamma+504\beta\gamma)l^2 \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

$$[m]_{ts} = [m]_{st}^{T}. \tag{3.90}$$

Vektori opterećenja:

$$\{q\} = \frac{q_0 l}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{Bmatrix} + \frac{q_1 l}{60(1+12\beta)}\begin{Bmatrix} 9+120\beta \\ (2+30\beta)l \\ 21+240\beta \\ -(3+30\beta)l \end{Bmatrix}, \tag{3.91}$$

$$\{\mu\} = \frac{\mu_0 l}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{Bmatrix} + \frac{\mu_1 l}{60(1+12\gamma)}\begin{Bmatrix} 9+120\gamma \\ (2+30\gamma)l \\ 21+240\gamma \\ -(3+30\gamma)l \end{Bmatrix}. \tag{3.92}$$

Omjeri krutosti:

$$\beta = \frac{EI_b}{GA_s l^2}, \quad \gamma = \frac{EI_w}{GI_s l^2}, \tag{3.93}$$

Ukupna energija po elementu mora biti minimalna, te stoga treba zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{tot}}{\partial \{U\}} &= \{0\}, \\ \frac{\partial E_{tot}}{\partial \{V\}} &= \{0\}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Ukoliko se uz prethodne uvjete primijeni Lagrangeov opis gibanja, jednadžba konačnog elementa glasi:

$$\{f\} = [k]\{\delta\} + [m]\{\ddot{\delta}\} - \{f\}_{q\mu}, \tag{3.95}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \{f\} &= \begin{Bmatrix} P \\ R \end{Bmatrix}, \quad \{f\}_{q\mu} = \begin{Bmatrix} q \\ \mu \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \\ [k] &= \begin{bmatrix} k_{bs} & 0 \\ 0 & k_{ws} + k_t \end{bmatrix}, \quad [m] = \begin{bmatrix} m_{sb} & m_{st} \\ m_{ts} & m_{tw} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Očito je da se sprezanje savijanja i uvijanja odvija (jednako kao u izrazu (2.3)) samo preko matrice mase, odnosno preko spregnutih matrica $[m]_{st}$ i $[m]_{ts}$.

3.4. Transformacija konačnog elementa

U jednadžbi konačnog elementa (3.95), najprije se pojavljuju svojstva elementa vezana za savijanje, a zatim ona vezana za uvijanje. Da bi bilo moguće uobičajeno spajanje

konačnih elemenata, potrebno je jednadžbu (3.95) transformirati na takav način da se najprije pojavljuju značajke koje se odnose na prvi čvor, a zatim značajke drugog čvora. Prema tome, preuređeni vektori čvornih sila i pomaka glase

$$\left\{\tilde{f}\right\}=\begin{Bmatrix}-Q(0)\\ M(0)\\ -T(0)\\ B_w(0)\\ Q(l)\\ -M(l)\\ T(l)\\ -B_w(l)\end{Bmatrix},\qquad \left\{\tilde{\delta}\right\}=\begin{Bmatrix}w(0)\\ \varphi(0)\\ \psi(0)\\ \vartheta(0)\\ w(l)\\ \varphi(l)\\ \psi(l)\\ \vartheta(l)\end{Bmatrix}. \tag{3.97}$$

Istu transformaciju potrebno je napraviti za vektor opterećenja $\{f\}_{q\mu}$ koji prelazi u $\left\{\tilde{f}\right\}_{q\mu}$. Gornja transformacija vektora zahtijeva zamjenu redaka i stupaca u matricama prema sljedećoj shemi:

	1	2	5	6	3	4	7	8
1	11	12	15	16	13	14	17	18
2	21	22	25	26	23	24	27	28
5	51	52	55	56	53	54	57	58
6	61	62	65	66	63	64	67	68
3	31	32	35	36	33	34	37	38
4	41	42	45	46	43	44	47	48
7	71	72	75	76	73	74	77	78
8	81	82	85	86	83	84	87	88 .

(3.98)

Pomak elementa vezan je za centar smicanja kao ishodište lokalnog koordinatnog sustava. Budući da vertikalni položaj centra smicanja varira duž brodskog trupa, nužno je propisati pomak elementa vezan za zajednički pravac, kako bi se elementi mogli spojiti. Ukoliko se *x* os globalnog koordinatnog sustava, koja se poklapa s osnovkom, izabere kao referentni pravac, vrijede sljedeći odnosi:

$$\begin{aligned} w(0) &= \bar{w}(0) + z_S\psi(0)\\ w(l) &= \bar{w}(l) + z_S\psi(l), \end{aligned} \tag{3.99}$$

gdje je z_S koordinata centra smicanja, Slika 3.2. Ostali pomaci su isti u oba koordinatna sustava. Kut uvijanja ψ nema utjecaj na kut rotacije presjeka φ. Lokalni vektor pomaka se može izraziti kao:

$$\left\{\tilde{\delta}\right\}=\left[\tilde{T}\right]\left\{\bar{\tilde{\delta}}\right\}, \tag{3.100}$$

gdje je $\left[\tilde{T}\right]$ matrica transformacije

$$\left[\tilde{T}\right]=\begin{bmatrix}[T] & [0]\\ [0] & [T]\end{bmatrix},\qquad [T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & z_S & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{3.101}$$

Budući da se ukupna energija elementa ne mijenja uslijed opisanih transformacija, nova jednadžba konačnog elementa se može izvesti uzimajući u obzir izraz (3.100). Prema tome, u globalnom koordinatnom sustavu dobiva se

$$\left\{\bar{\tilde{f}}\right\}=\left[\bar{\tilde{k}}\right]\left\{\bar{\tilde{\delta}}\right\}+\left[\bar{\tilde{m}}\right]\left\{\ddot{\bar{\tilde{\delta}}}\right\}-\left\{\bar{\tilde{f}}\right\}_{q\mu}, \tag{3.102}$$

gdje je

$$\begin{aligned}&\left\{\bar{\tilde{f}}\right\}=\left[\tilde{T}\right]^T\left\{\tilde{f}\right\},\qquad \left[\bar{\tilde{k}}\right]=\left[\tilde{T}\right]^T\left[\tilde{k}\right]\left[\tilde{T}\right],\\ &\left[\bar{\tilde{m}}\right]=\left[\tilde{T}\right]^T[\tilde{m}]\left[\tilde{T}\right],\quad \left\{\bar{\tilde{f}}\right\}_{q\mu}=\left[\tilde{T}\right]^T\left\{\tilde{f}\right\}_{q\mu}.\end{aligned} \tag{3.103}$$

Prvi od izraza u (3.103) transformira čvorne momente uvijanja u sljedeći oblik:

$$\begin{aligned}&-\bar{T}(0)=-T(0)-z_S Q(0)\\ &\bar{T}(l)=T(l)+z_S Q(l).\end{aligned} \tag{3.104}$$

3.5. Usporedba razvijenog konačnog elementa za analizu spregnutih vibracija s poznatim formulacijama iz literature

Razvijeni konačni element za analizu spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija brodskog trupa razlikuje se od ranije poznatih formulacija opisanih u literaturi kao primjerice u [3, 22, 23, 24]. Ukoliko se usporede jednadžbe (2.3) i (3.96) vidljivo je da je dio koji se odnosi na inercijske članove jednak, dok se dio koji se odnosi na krutost razlikuje.

Da bi se objasnio dio vezan za krutost, potrebno je poći od osnovnih pretpostavki na kojima počiva formulacija poznatih matrica krutosti [23]:

1. Budući da je nosač tankostjen, smični tok je konstantan po njegovoj debljini.
2. Uslijed uvijanja, poprečni presjek se rotira i vitoperi, ali mu se oblik ne mijenja (distorzija poprečnog presjeka se zanemaruje).
3. Vitoperenje uzrokuje dodatna (sekundarna) naprezanja, i to normalna i smična, ali dodatna smična deformacija uzrokovana sekundarnim smičnim naprezanjem se može zanemariti.

Budući da se sprega između horizontalnog savijanja i uvijanja realizira preko matrice mase, u matrici krutosti se odvojeno može promatrati dio vezan za horizontalno savijanje i dio vezan za uvijanje.

Matrica krutosti savijanja s utjecajem smicanja u modelu koji je razvijen u ovom radu, jednaka je matrici u poznatim modelima [3, 22, 23, 24] i definirana je jednadžbom (3.80).

Dio koji se odnosi na uvijanje u poznatim modelima opisan je tzv. matricom uvijanje-vitoperenje [3], dok se u unaprijeđenom modelu koji je predmet ovog rada, ne uzima u obzir pretpostavka br. 3, pa jednadžba (3.96) podrazumijeva matricu krutosti vitoperenje-smicanje, izraz (3.59), i matricu krutosti na uvijanje, definiranu izrazom (3.60). Direktna posljedica izostavljanja pretpostavke br. 3 je postojanje dodatnog parametra krutosti (smični modul tromosti, I_s) u unaprijeđenom modelu.

3.6. Numerički postupak za analizu vibracija

Brodski trup modelira se nizom grednih konačnih elemenata, čije spajanje u globalnom koordinatnom sustavu, provedeno standardnim postupkom, rezultira matričnom jednadžbom gibanja, koja se može proširiti uvođenjem prigušnih sila

$$[K]\{\Delta\}+[C]\{\dot{\Delta}\}+[M]\{\ddot{\Delta}\}=\{F(t)\}, \tag{3.105}$$

gdje $\{F(t)\}$ predstavlja vektor opterećenja.

U slučaju prirodnih vibracija vrijedi da je $\{F(t)\} = \{0\}$. Utjecaj strukturnog prigušenja u brodskim konstrukcijama za slučaj prirodnih vibracija može se zanemariti. Ukoliko se pretpostavi:

$$\{\Delta\}=\{\phi\}\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{3.106}$$

gdje su $\{\phi\}$ i ω vektor prirodnog oblika vibriranja i prirodna frekvencija, jednadžba (3.105) prelazi u problem svojstvenih vrijednosti izražen jednadžbom (2.4), koja se može riješiti primjenom različitih numeričkih metoda [57]. Osnovna metoda je tzv. metoda traženja svojstvene vrijednosti pomoću determinante (eng. *determinant search method*), gdje se ω odredi iterativno iz uvjeta:

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0. \tag{3.107}$$

Zatim se može odrediti vektor $\{\phi\}$ iz (2.4) pretpostavljajući jediničnu vrijednost za jedan od elemenata traženog vektora.

Prisilne vibracije se mogu analizirati direktnim rješenjem jednadžbe (3.105) ili primjenom metode superpozicije prirodnih oblika vibriranja, pri čemu se vektor pomaka izrazi u obliku:

$$\{\Delta\} = [\phi]\{X\}, \tag{3.108}$$

gdje je $[\phi] = [\{\phi\}]$ matrica neprigušenih oblika vibriranja, a $\{X\}$ poopćeni vektor pomaka. Supstitucijom (3.108) u (3.105), modalna jednadžba glasi:

$$[k]\{X\} + [c]\{\dot{X}\} + [m]\{\ddot{X}\} = \{f(t)\}, \tag{3.109}$$

gdje su $[c]$ i $\{f(t)\}$ modalna matrica prigušenja, odnosno modalni vektor opterećenja koji se odrede prema:

$$[c] = [\phi]^T [C][\phi], \tag{3.110}$$

$$\{f(t)\} = [\phi]^T \{F(t)\}\ . \tag{3.111}$$

Modalna matrica krutosti $[k]$ definirana je izrazom (2.6), a modalna matrica mase $[m]$ izrazom (2.7). Već je u drugom poglavlju rada naznačeno da su matrice $[k]$ i $[m]$ dijagonalne, dok je matrica $[c]$ dijagonalna samo u posebnom slučaju, primjerice ukoliko je $[C] = \alpha_0 [M] + \beta_0 [K]$, gdje su α_0 i β_0 koeficijenti [76].

Rješavajući jednadžbu (3.109) za neprigušene slobodne vibracije, odredi se $[k] = [\omega^2 m]$, čijim se unatražnim uvrštavanjem u (3.109) dobije konačni oblik modalne jednadžbe:

$$\left[\omega^2\right]\{X\} + 2[\omega][\zeta]\{\dot{X}\} + \{\ddot{X}\} = \{\varphi(t)\}, \tag{3.112}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
&[\omega] = \left[\sqrt{\frac{k_{ii}}{m_{ii}}}\right] - \text{matrica prirodnih frekvencija,} \\
&[\zeta] = \left[\frac{c_{ij}}{2\sqrt{(k_{ii} m_{ii})}}\right] - \text{relativna matrica prigušenja,} \\
&\{\varphi(t)\} = \left\{\frac{f_i(t)}{m_{ii}}\right\} - \text{relativni vektor opterećenja.}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Ukoliko je matrica relativnog prigušenja $[\zeta]$ dijagonalna, jednadžba (3.112) se raspreže na niz samostalnih jednadžbi.

Kada je riječ o vibracijama pobuđenim radom glavnog stroja ili vijka, zbog njihova periodičkog karaktera, one se mogu razdvojiti na harmonike, pa se odziv brodskog trupa odredi rješavanjem jednadžbe (3.105) ili (3.109). U oba slučaja sustav diferencijalnih jednadžbi pretvori se u sustav algebarskih jednadžbi.

Ukoliko su vibracije brodskog trupa uzrokovane valovima, potrebno je izvršiti vremensku integraciju jednadžbe (3.105) ili (3.109), za što postoji nekoliko raspoloživih numeričkih metoda; Houboltova metoda, Newmarkova metoda, Wilsonova θ metoda [57] ili metoda harmonijskog ubrzanja [81, 82].

3.7. Određivanje značajki poprečnog presjeka brodskog trupa

Parametri krutosti tankostjenog nosača uključuju površinu poprečnog presjeka A, moment tromosti poprečnog presjeka I_b, smičnu površinu A_s, faktor krutosti na uvijanje I_t, faktor krutosti na vitoperenje I_w i smični modul tromosti I_s. Ovi parametri mogu se, kao čisto geometrijske veličine, za jednostavni presjek odrediti analitički [11, 12, 13, 27, 28].

Određivanje spomenutih veličina za otvoreni ćelijasti presjek poput presjeka brodskog trupa, kao statički neodređen problem, prilično je složen zadatak, koji se može riješiti primjenjujući metodu odsječaka [83]. Najprije se izračunaju uzdužni pomaci čvorova uslijed savijanja uzrokovanog smičnom silom i uslijed uvijanja uzrokovani promjenom kuta zaokreta. Zatim se odrede smična naprezanja u savijanju τ_b, smična naprezanja uslijed čistog uvijanja τ_t, i smična i normalna naprezana zbog spriječenog vitoperenja, τ_w i σ_w. Na temelju ravnoteže energija deformacija uzrokovanih presječnim silama i izračunatim naprezanjima, moguće je specificirati spomenute parametre krutosti, koji se mogu izraziti preko tokova naprezanja, odnosno preko jediničnih presječnih sila [30, 84].

- smična površina

$$A_s = \frac{Q^2}{\int_A \tau_b^2 dA} = \frac{1}{\int_A g_b^2 dA}, \quad g_b = \frac{\tau_b}{Q}. \tag{3.114}$$

- faktor krutosti poprečnog presjeka na uvijanje

$$I_t = \frac{T_t^2}{\int_A \tau_t^2 dA} = \frac{1}{\int_A g_t^2 dA}, \quad g_t = \frac{\tau_t}{T_t}. \tag{3.115}$$

- smični modul tromosti

$$I_s = \frac{T_w^2}{\int_A \tau_w^2 dA} = \frac{1}{\int_A g_w^2 dA}, \quad g_w = \frac{\tau_w}{T_w}. \tag{3.116}$$

- faktor krutosti poprečnog presjeka na vitoperenje

$$I_w = \frac{B_w^2}{\int_A \sigma_w^2 dA} = \frac{1}{\int_A f_w^2 dA}, \quad f_w = \frac{\sigma_w}{B_w}; \quad I_w = \int_A w^2 dA. \tag{3.117}$$

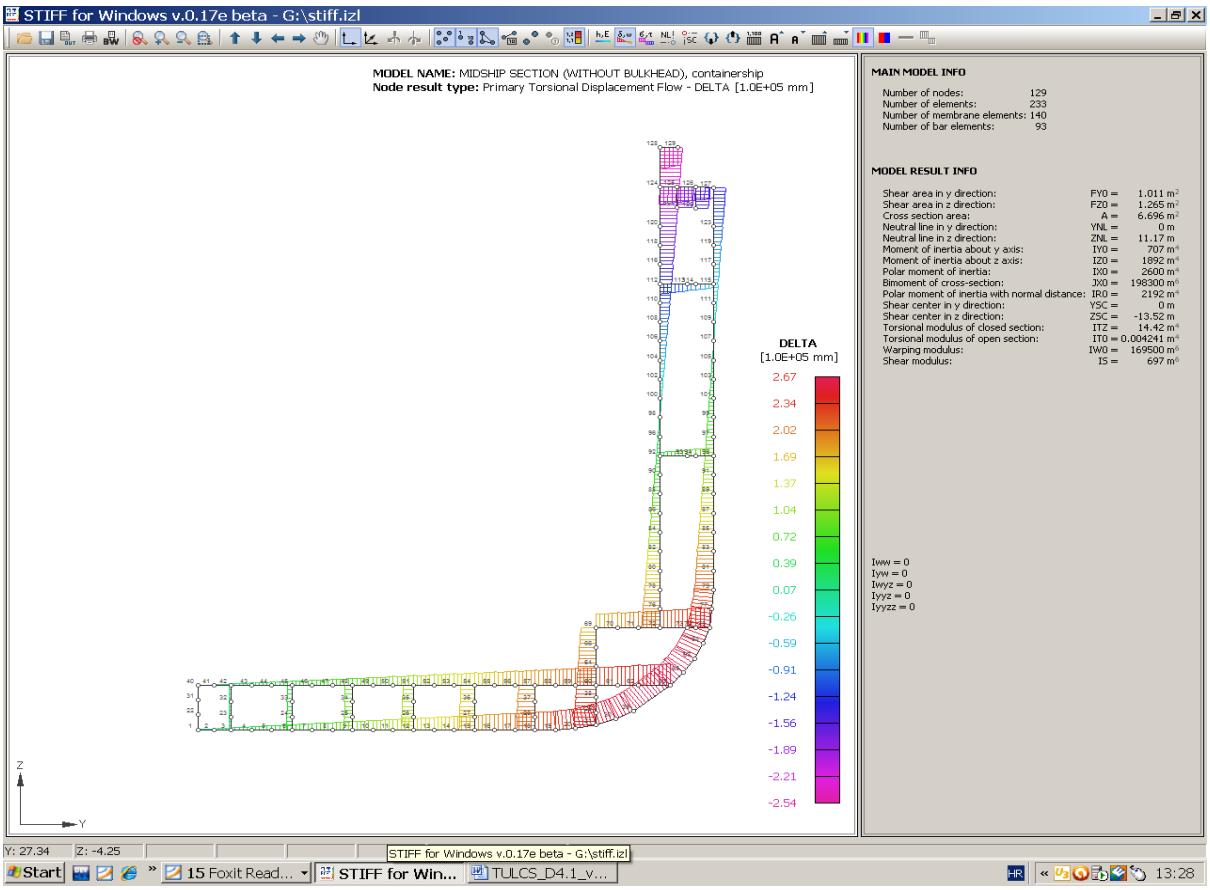
Budući da prethodno navedene veličine ovise o Poissonovu koeficijentu kao fizikalnom parametru, one više nisu čisto geometrijske značajke.

Parametri tromosti za brod bez tereta mogu se odrediti pomoću zadane distribucije mase po jediničnoj duljini, *m*, i izračunatih parametara presjeka:

$$J_b = \frac{m}{A} I_b, \qquad J_t^0 = \frac{m}{A}\left(I_{by} + I_{bz}\right), \qquad J_w = \frac{m}{A} I_w, \tag{3.118}$$

gdje je $I_p = I_{by} + I_{bz}$ polarni moment tromosti poprečnog presjeka.

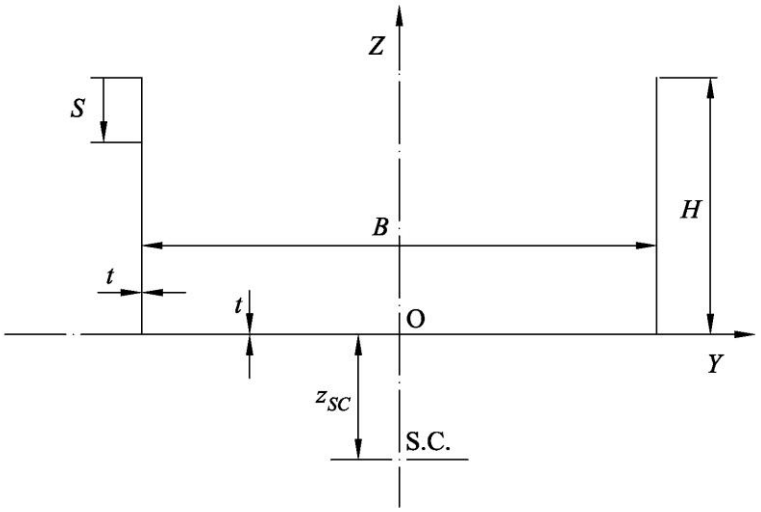
Teorija za određivanje parametara krutosti poprečnog presjeka uprogramirana je u program STIFF [48], koji je na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku FSB-a razvijen prije dvadesetak godina te se kontinuirano usavršava, Slika 3.4. Inače, razvoj alata za određivanje parametara krutosti poprečnog presjeka na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku ima razmjerno dugu tradiciju. Od radova koji su prethodili suvremenoj verziji programa STIFF [48], važno je istaknuti članke [85, 86] i disertacije [11, 87].



Slika 3.4 Program STIFF za proračun parametara krutosti – vitoperenje poprečnog presjeka

Određivanje inercijskog smičnog modula, I_s, koji se za višećelijaste nosače numerički određuje tzv. vrpčastom metodom [48], analitički se može dodatno pojasniti na

jednostavnom „U“ presjeku kakvim se može približno idealizirati brodski trup, Slika 3.5, [88].



Slika 3.5 Idealizacija poprečnog presjeka brodskog trupa

Prema [11, 14, 37], izraz za smični modul tromosti može se napisati u sljedećem obliku:

$$I_s = \frac{I_w^2}{\int_A \left(\frac{S_w^*}{t} \right)^2 \mathrm{d}A}, \tag{3.119}$$

gdje je S_w^* sektorski moment odsječka površine poprečnog presjeka, a A ukupna površina. Prema [14] sektorska koordinata ljuske boka i dna, Slika 3.6, glasi:

$$w_1 = \frac{B}{2}\left(H + z_{SC} - s\right), \quad 0 < s < H, \tag{3.120}$$

$$w_2 = z_{SC}\left(H + \frac{B}{2} - s\right), \quad H < s < H + B, \tag{3.121}$$

gdje je s konturna koordinata, a z_{SC} koordinata centra smicanja, Slika 3.5, definirana izrazom:

$$z_{SC} = -\frac{3H^2}{B + 6H}. \tag{3.122}$$

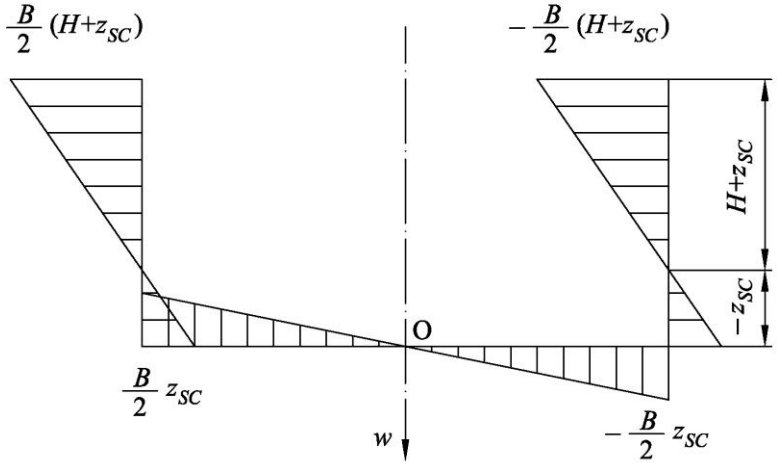
Faktor krutosti poprečnog presjeka na vitoperenje po definiciji je jednak:

$$I_w = \int_A w^2 \mathrm{d}A = \frac{B^2 t}{6}\left[\left(H + z_{SC}\right)^3 + \left(\frac{B}{2} - z_{SC} \right) z_{SC}^2 \right]. \tag{3.123}$$

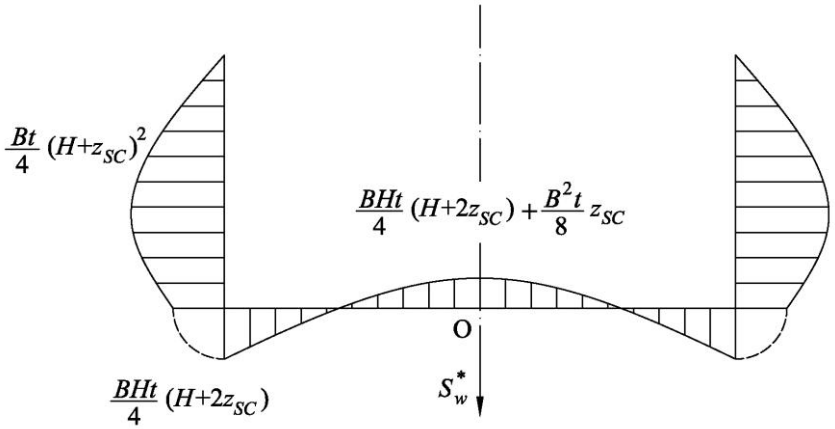
Sektorski moment se može podijeliti na dva područja, Slika 3.7:

$$S_{w1}^* = \int_0^s w_1 t \mathrm{d}s = \frac{Bt}{2}\left[\left(H + z_{SC}\right)s - \frac{s^2}{2} \right], \quad 0 < s < H, \tag{3.124}$$

$$S_{w2}^{*} = S_{w1}^{*}\Big|_{0}^{H} + \int_{H}^{s} w_2 t\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{BtH^2}{4} + z_{SC}t\left[-\frac{H^2}{2} + \left(H + \frac{B}{2}\right)s - \frac{s^2}{2}\right], \quad H < s < H + B. \tag{3.125}$$



Slika 3.6 Sektorska koordinata, *w*



Slika 3.7 Integral sektorske koordinate, S_w^*

Za integrale smičnog toka vrijedi:

$$I_{f1} = 2\int_{0}^{H}\left(\frac{S_{w1}^{*}}{t}\right)^2 t\,\mathrm{d}s = \frac{B^2tH^3}{120}\left(8H^2 + 25Hz_{SC} + 20z_{SC}^2\right), \tag{3.126}$$

$$I_{f2} = 2\int_{H}^{H+\frac{B}{2}}\left(\frac{S_{w2}^{*}}{t}\right)^2 t\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{B^3t}{240}\left[15H^4 + 10H^2\left(B + 6H\right)z_{SC} + 2\left(B^2 + 10HB + 30H^2\right)z_{SC}^2\right], \tag{3.127}$$

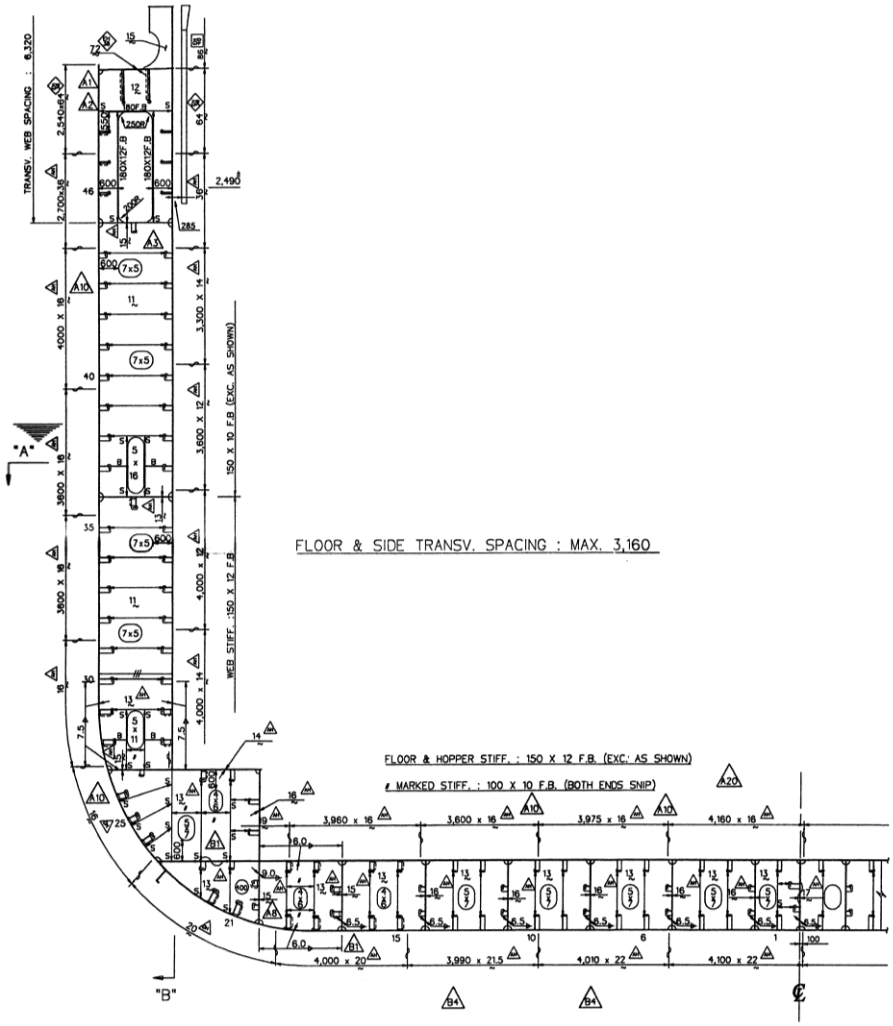
pa izraz (3.119) prelazi u oblik:

$$I_s = \frac{I_w^2}{I_{f1} + I_{f2}}. \tag{3.128}$$

3.8. Verifikacija matematičkog modela za utjecaj smicanja na uvijanje

Verifikacija teorijskog modela za utjecaj smicanja na uvijanje provedena je koreliranjem statičkog odziva (u vidu kuta uvijanja) određenog analizom 3D FEM modela prizmatičnog pontona, upetog na jednom, a opterećenog koncentriranim silama koje tvore odgovarajući statički moment uvijanja, na drugom kraju, i odziva dobivenog analitičkim rješenjem jednadžbe ravnoteže [88].

Glavne značajke i dimenzije pontona određene su na temelju nacrta kontejnerskog broda kapaciteta 7800 TEU, čije glavno rebro prikazuje Slika 3.8. Opći plan broda i njegov detaljan tehnički opis prikazani su u [3].



Slika 3.8 Glavno rebro kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU [3]

Osnovne dimenzije na kojima se temelji geometrija pontona su sljedeće:

Duljina preko svega	$L_{oa} = 334$ m
Duljina između okomica	$L_{pp} = 319$ m
Širina	$B = 42,8$ m
Visina	$H = 24,6$ m
Gaz	$T = 14,5$ m
Istisnina	$\Delta = 135530$ t

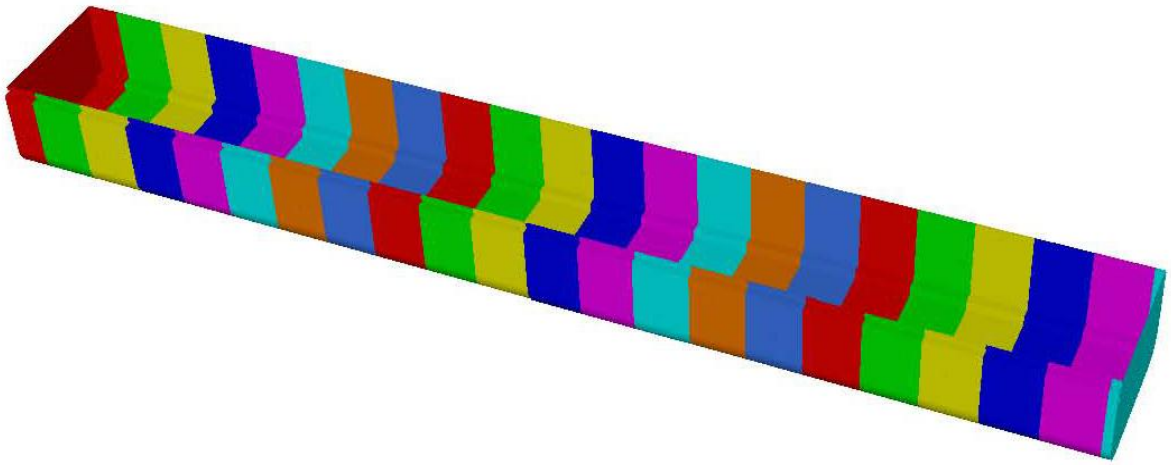
Značajke materijala:

Youngov modul elastičnosti	$E = 2,06 \cdot 10^8$ kN/m^2
Modul smicanja	$G = 0,7923 \cdot 10^8$ kN/m^2
Poissonov koeficijent	$v = 0,3$

Geometrijske značajke poprečnog presjeka pontona, za potrebe analitičkog rješenja, određene su programom STIFF [48].

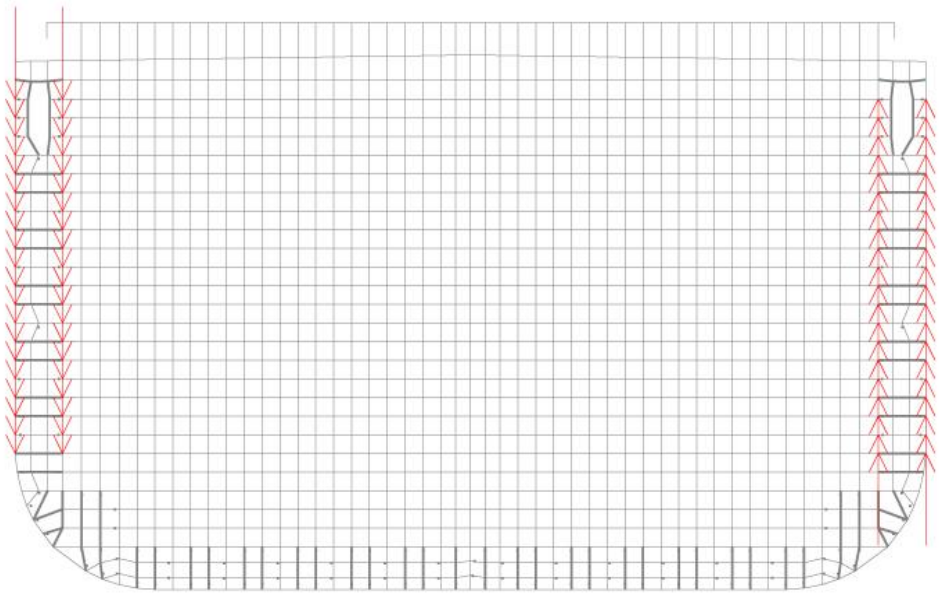
3.8.1. 3D FEM analiza modela jednolikog prizmatičnog pontona

Izrađen je 3D FEM prizmatični model pontona jednolikog presjeka, duljine 300 m i ostalih dimenzija prema glavnom rebru prethodno spomenutog broda, u programskom paketu SESAM [89]. Model se sastoji od 22 otvorena superelementa, Slika 3.9, sa zatvorenim krajevima u vidu vrlo krutih poprečnih pregrada.



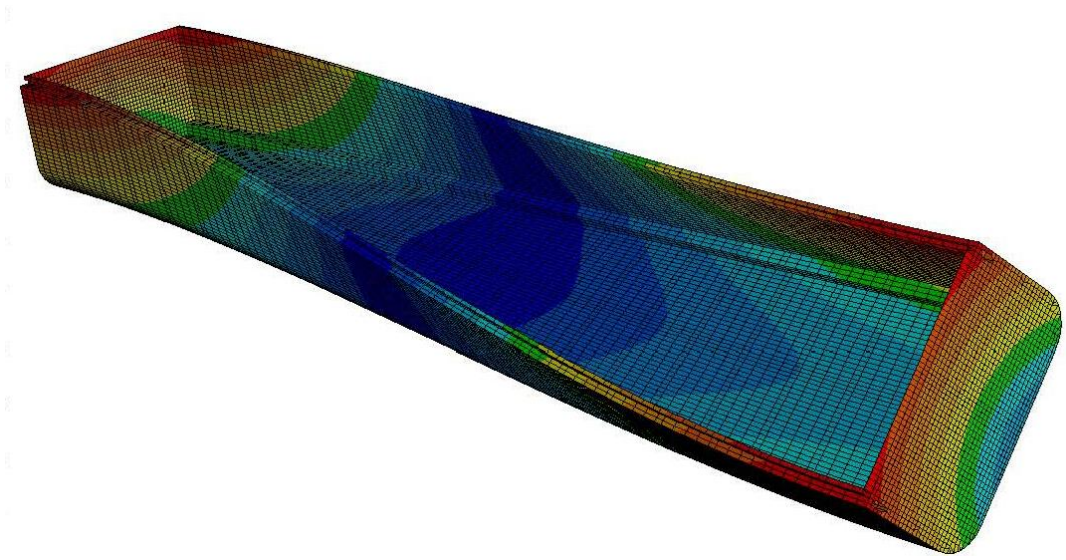
Slika 3.9 Model superelemenata jednolikog pontona

Krajnje pregrade opterećene su koncentriranim silama koje tvore odgovarajući moment uvijanja od $M_t = 40750$ kNm, Slika 3.10. Korišteni su konačni elementi ljuske.



Slika 3.10 Rubno opterećenje modela

Slika 3.11 prikazuje deformaciju jednolikog pontona uslijed narinutog opterećenja.

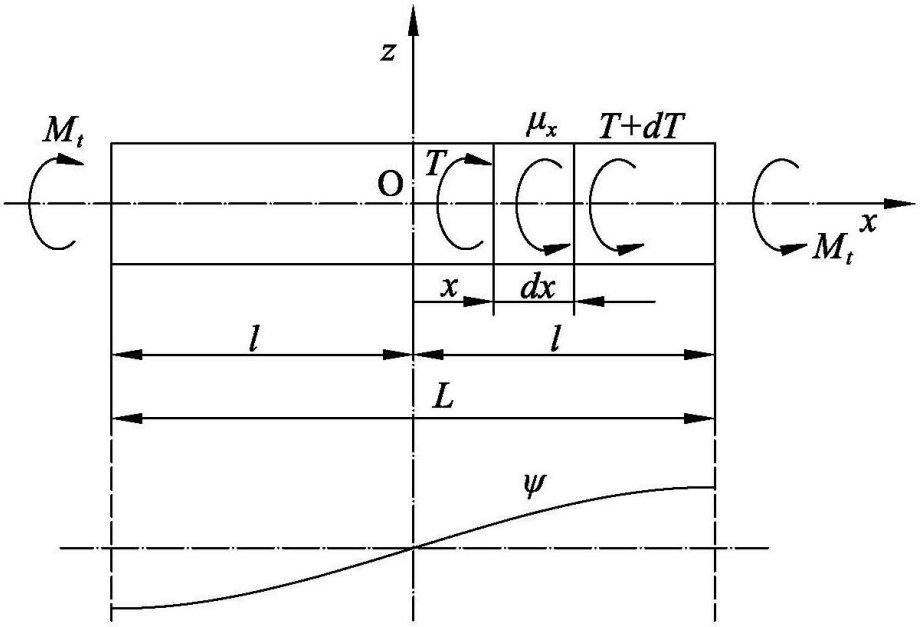


Slika 3.11 Deformacija pontona momentom uvijanja na slobodnom kraju, 3D FEM model

3.8.2. Analitičko rješenje za uvijanje jednolikog nosača

Razmatra se prizmatični nosač, opterećen momentom uvijanja M_t na krajevima i kontinuiranim opterećenjem μ_x, Slika 3.12. Već je ranije naznačeno da se presječni momenti uvijanja nosača sastoje od momenta čiste torzije i vitopernog doprinosa i za statički slučaj dani su izrazima [79]:

$$T = T_t + T_w,\ T_t = GI_t \frac{\mathrm{d}\psi_t}{\mathrm{d}x},$$
$$T_w = GI_s \frac{\mathrm{d}\psi_s}{\mathrm{d}x} = -EI_w \frac{\mathrm{d}^3\psi_t}{\mathrm{d}x^3}. \tag{3.129}$$



Slika 3.12 Uvijanje prizmatičnog nosača

Jednadžba ravnoteže presječnih momenata i distribuiranog opterećenja ima oblik:

$$EI_w \frac{\mathrm{d}^4\psi_t}{\mathrm{d}x^4} - GI_t \frac{\mathrm{d}^2\psi_t}{\mathrm{d}x^2} = \mu_x. \tag{3.130}$$

Rješenje jednadžbe (3.130) glasi:

$$\psi_t = A_0 + A_1 \frac{x}{l} + A_2 \mathrm{ch}\alpha x + A_3 \mathrm{sh}\alpha x + \psi_p, \tag{3.131}$$

gdje je

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_w}}, \tag{3.132}$$

a ψ_p predstavlja partikularno rješenje. Ukupni kut uvijanja, koji se sastoji od čistog uvijanja i smičnog doprinosa i za dinamički slučaj izražen je jednadžbom (3.6) (nepotpuni diferencijal) jednak je:

$$\psi = A_0 + A_1 \frac{x}{l} + A_2 \left(1 - \frac{I_t}{I_s}\right) \mathrm{ch}\alpha x + A_3 \left(1 - \frac{I_t}{I_s}\right) \mathrm{sh}\alpha x + \psi_p - \frac{EI_w}{GI_s} \psi_p''. \tag{3.133}$$

Spriječeno vitoperenje uzrokuje polje normalnog naprezanja

$$\sigma = Ew \frac{\mathrm{d}^2\psi_t}{\mathrm{d}x^2}, \tag{3.134}$$

gdje je w funkcija vitoperenja. Normalna distribucija naprezanja po presjeku sažeta je u bimoment, B_w, koji predstavlja rad naprezanja na relativnom pomaku w

$$B_w = \int_s \sigma t w \mathrm{d}s = EI_w \frac{\mathrm{d}^2\psi_t}{\mathrm{d}x^2}, \qquad I_w = \int_s w^2 t \mathrm{d}s. \tag{3.135}$$

Sada je, imajući u vidu jednadžbe (3.129) i (3.135), moguće izvesti izraze za vitoperenje i presječne momente;

$$u = w\frac{\mathrm{d}\psi_t}{\mathrm{d}x} = w\left(\frac{A_1}{l} + A_2\alpha\mathrm{sh}\alpha x + A_3\alpha\mathrm{ch}\alpha x + \psi_p'\right), \tag{3.136}$$

$$T_t = GI_t\left(\frac{A_1}{l} + A_2\alpha\mathrm{sh}\alpha x + A_3\alpha\mathrm{ch}\alpha x + \psi_p'\right), \tag{3.137}$$

$$T_w = -GI_t\left(A_2\alpha\mathrm{sh}\alpha x + A_3\alpha\mathrm{ch}\alpha x\right) - EI_w\psi_p''', \tag{3.138}$$

$$T = GI_t\left(\frac{A_1}{l} + \psi_p'\right) - EI_w\psi_p''', \tag{3.139}$$

$$B_w = GI_t\left(A_2\mathrm{ch}\alpha x + A_3\mathrm{sh}\alpha x\right) + EI_w\psi_p''. \tag{3.140}$$

Uz spriječeno vitoperenje na krajevima pretpostavlja se i $\mu_x = 0$. Kut uvijanja je antisimetrična funkcija pa su nepoznate konstante A_0 i A_2 jednake nuli, dok se preostale konstante A_1 i A_3 određuju zadovoljavanjem rubnih uvjeta:

$$x = l: \qquad T = M_t, \qquad u = 0. \tag{3.141}$$

Na temelju navedenog vrijedi:

$$A_1 = \frac{M_t l}{GI_t}, \qquad A_3 = -\frac{M_t l}{GI_t}\frac{1}{\alpha l\mathrm{ch}\alpha l}. \tag{3.142}$$

Pomaci i sile definirani jednadžbama (3.133) te od (3.136) do (3.140) sada poprimaju sljedeći oblik:

$$\psi = \frac{M_t l}{GI_t}\left[\frac{x}{l} - \left(1 - \frac{I_t}{I_s}\right)\frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\alpha l\mathrm{ch}\alpha l}\right], \tag{3.143}$$

$$u = \frac{M_t}{GI_t}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\alpha x}{\mathrm{ch}\alpha l}\right)w, \tag{3.144}$$

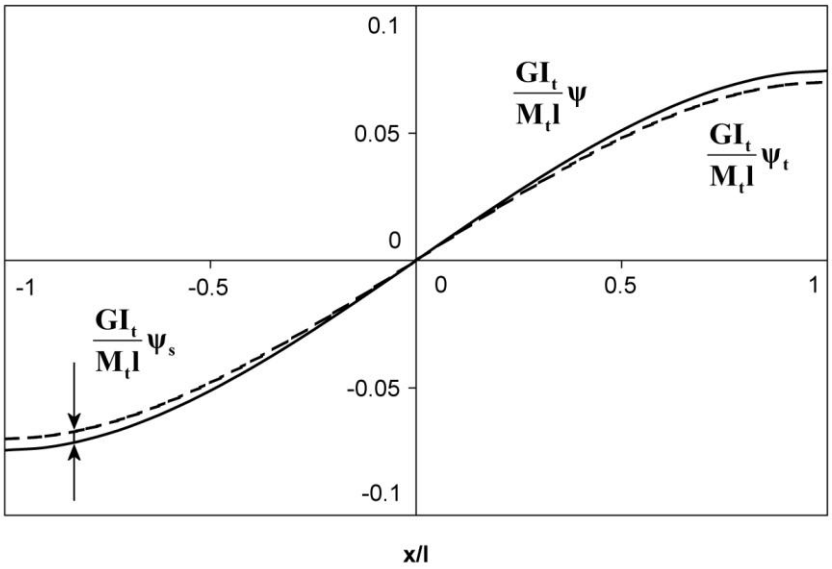
$$T_t = M_t\left(1 - \frac{\mathrm{ch}\alpha x}{\mathrm{ch}\alpha l}\right), \tag{3.145}$$

$$T_w = M_t\frac{\mathrm{ch}\alpha x}{\mathrm{ch}\alpha l}, \tag{3.146}$$

$$B_w = -M_t\frac{\mathrm{sh}\alpha x}{\alpha\mathrm{ch}\alpha l}. \tag{3.147}$$

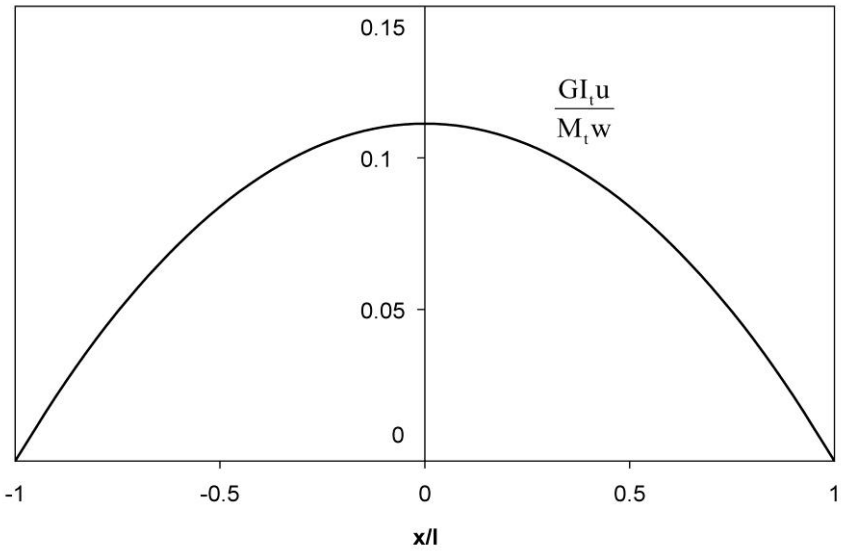
3.8.3. Usporedba rezultata

Slika 3.13 prikazuje kut uvijanja pontona, određen analitički, u bezdimenzijskom obliku, pri čemu se jasno razabire smični doprinos, ψ_s.

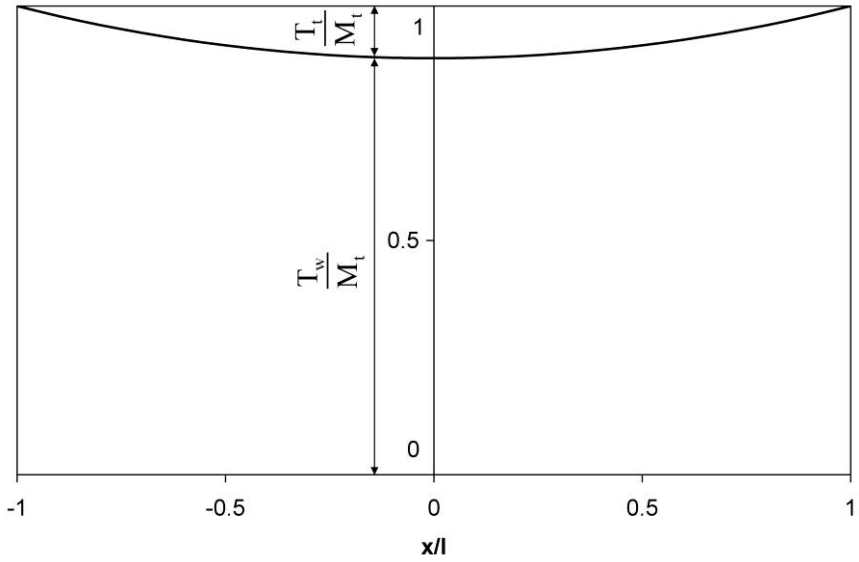


Slika 3.13 Kut uvijanja pontona

Relativni uzdužni pomak (relativno vitoperenje) prikazan je na Slici 3.14, dok Slika 3.15 prikazuje distribuciju relativnih momenata uvijanja T_t (čisto uvijanje) i T_w (dodatni moment uslijed spriječenog vitoperenja), koji zajedno uravnotežuju opterećenje M_t.

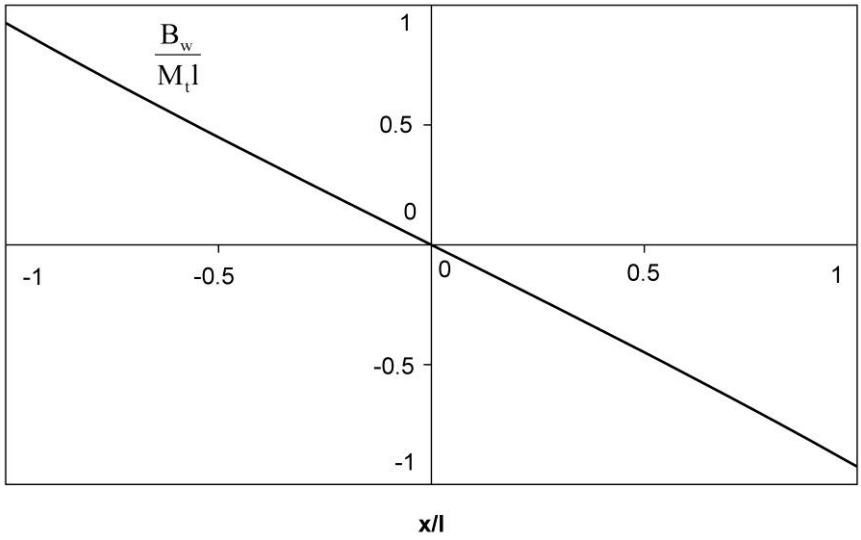


Slika 3.14 Relativni uzdužni pomak



Slika 3.15 Relativni moment uvijanja i vitoperenja

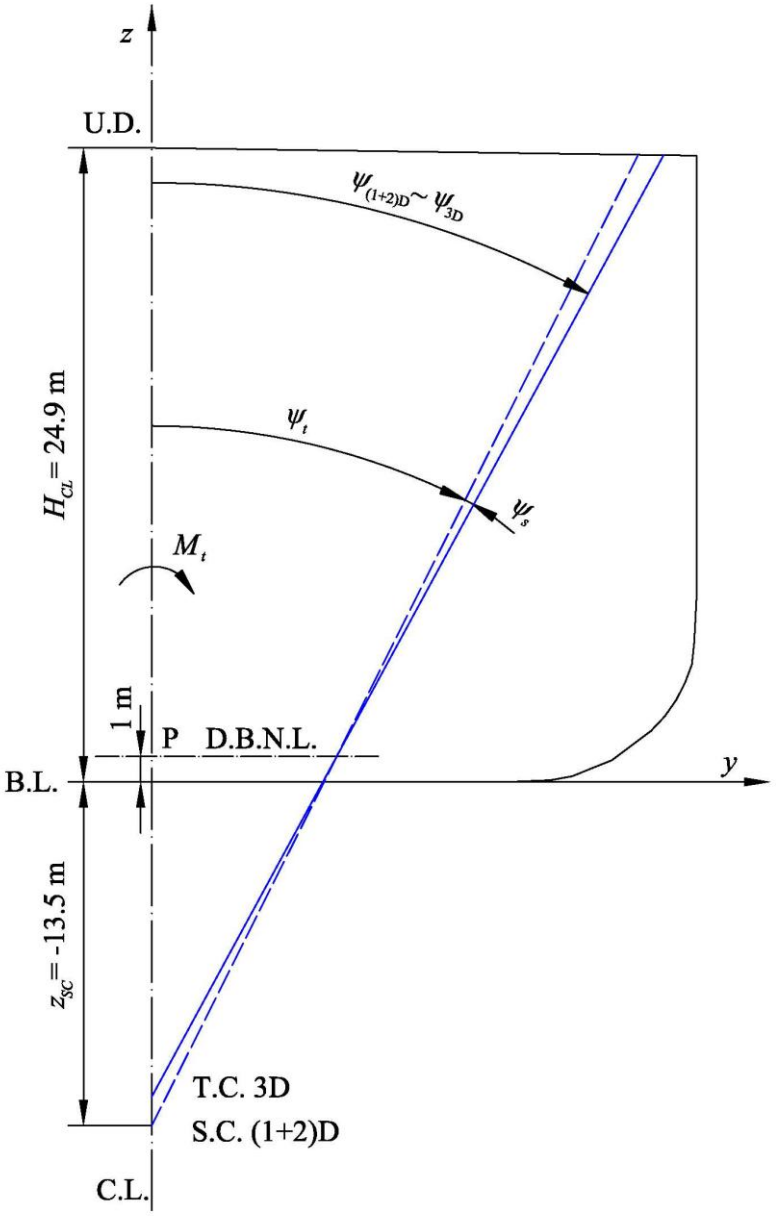
Slika 3.16 prikazuje distribuciju relativnog bimomenta vitoperenja koji je rezultat normalnog naprezanja po presjeku.



Slika 3.16 Relativni bimoment vitoperenja

U skladu s ranije spomenutim, uspoređeni su kutovi uvijanja na slobodnom kraju modela dobiveni analitičkim rješenjem, i rezultati 3D FEM proračuna. Slika 3.17 pokazuje da je kut uvijanja dobiven analitičkim rješenjem, $\psi_{(1+2)D}$, skoro jednak kutu koji je dobiven FEM analizom, ψ_{3D}. Iznos kuta $\psi_{(1+2)D}$ sastoji se od torzijskog, ψ_t, i smičnog doprinosa, ψ_s, pri čemu torzijski dio uzrokuje zakretanje presjeka oko centra smicanja S.C., dok smični dio

nastavlja njegovo zakretanje oko točke P koja se nalazi u razini neutralne linije dvodna. Kao rezultat, dobije se centar uvijanja T.C., Slika 3.17, koji se razlikuje od centra smicanja S.C.

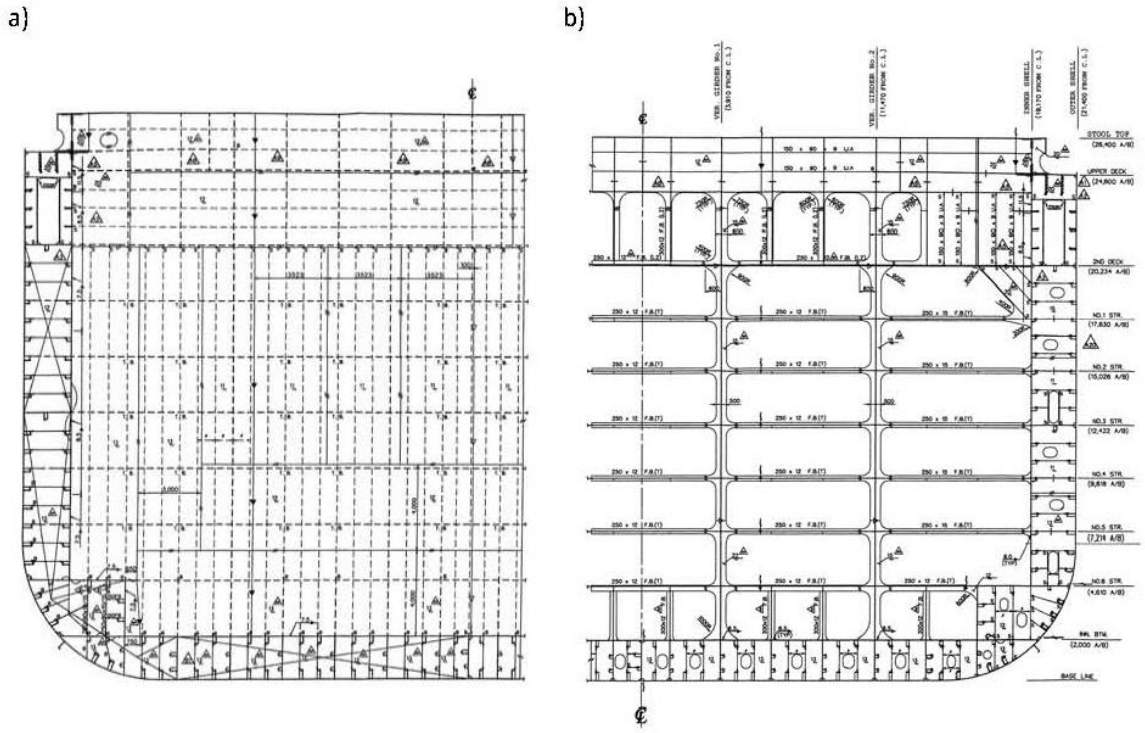


Slika 3.17 Kut uvijanja na kraju pontona

4. DOPRINOS POPREČNIH PREGRADA KRUTOSTI BRODSKOG TRUPA

Istraživanje doprinosa poprečnih pregrada krutosti trupa velikih kontejnerskih brodova završeno je prije početka izrade ovog doktorskog rada i autor u njemu nije sudjelovao, ali s uzimanjem u obzir utjecaja smicanja na uvijanje i određivanjem efektivne krutosti konstrukcije strojarnice, kao poboljšanjima postojećeg strukturnog modela, čini nedjeljivu cjelinu, tim više što je dio istih istraživačkih projekata. Štoviše, iako je pitanje distorzije poprečnog presjeka, koje je razmatrano u ovom radu, vezano za problem spoja zatvorenog i otvorenog presjeka (distorzija se razmatra lokalno, a ne kao distorzija kontinuiranih nosača), u numeričkim primjerima torzijske analize segmentnog pontona, u sljedećem poglavlju, pojavljuje se redukcija distorzije uslijed utjecaja pregrada. Imajući u vidu prethodno navedeno, kao i važnost rezultata spomenutog istraživanja zbog namjere da se po istom principu izvede formulacija efektivne krutosti strojarnice, te uzimanje u obzir doprinosa poprečnih pregrada ukupnoj krutosti trupa u nekim od numeričkih primjera, ovdje je opisan postupak i predloženo rješenje s pregledom osnovnih formula.

Kod suvremenih kontejnerskih brodova postoje dva tipa poprečnih pregrada i to tzv. vodonepropusne (eng. *watertight bulkhead*) i propusne pregrade (eng. *support bulkhead*), za koje je intuitivno jasno da povećavaju krutost trupa, Slika 4.1.

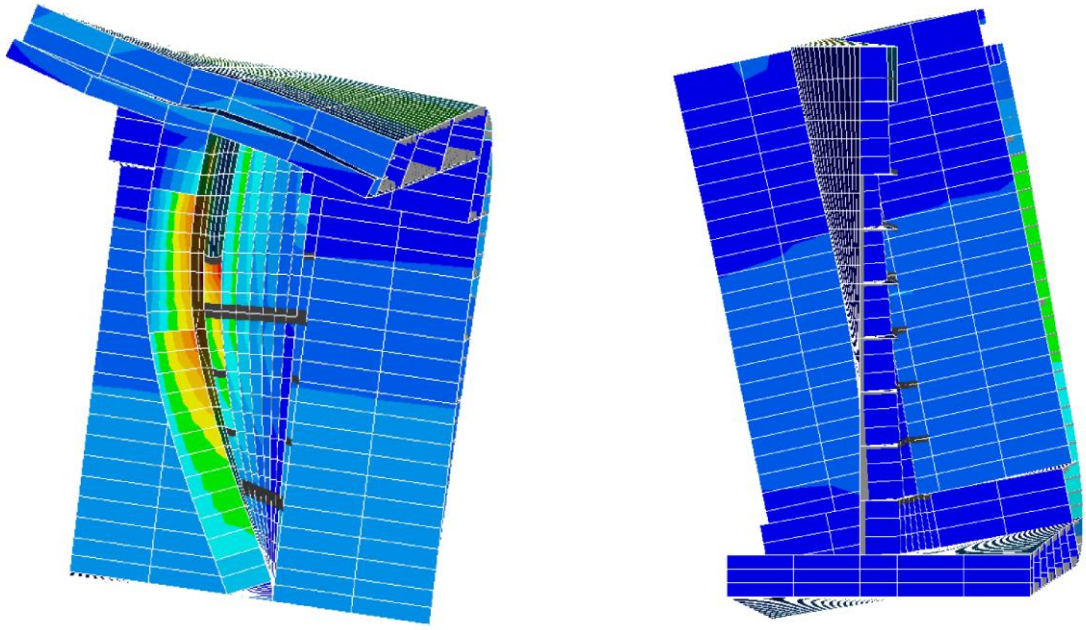


Slika 4.1 Poprečne pregrade kontejnerskog broda, a) vodonepropusna, b) propusna [14]

Rješenje za direktno uključivanje utjecaja pregrada u gredni model do sada je podrazumijevalo kratke gredne elemente zatvorenog poprečnog presjeka [27, 40]. Ipak zbog njihova velikog broja, te zbog potrebe modeliranja diskontinuiteta, čini se prikladnije uračunati njihov doprinos u opću krutost trupa [14, 15]. Pokušaji uzimanja u obzir utjecaja poprečnih pregrada na krutost brodskog trupa imaju razmjerno dugu tradiciju, a jedan od njih je bio povećavanje debljine palube koje se temeljilo na jednakosti energije deformacije poprečne pregrade i povećane energije palube [90]. Jedan od današnjih načina modeliranje je poprečnih pregrada pomoću elastičnih opruga na mjestu njihova spoja s ostatkom brodskog trupa. Efekt opruge sažeto se izrazi pomoću distribuiranog bimomenta, a u slučaju velikog broja poprečnih pregrada bimomenti se mogu distribuirati uzduž nosača [11, 79]. Posljednji radovi s ovog područja rezultat su rada istraživačke grupe na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku FSB-a [14, 15]. U njima se parametri krutosti određuju kombiniranjem teorije tankostjenih nosača za brodski trup i teorije ortotropne ploče za pregrade, pri čemu je postupak provjeren pomoću analize odziva 3D modela pontona (izrađenog od paralelnog srednjaka kontejnerskog broda) s pregradama i bez njih.

Prema [14, 15] faktor krutosti poprečnog presjeka na uvijanje potrebno je uvećati proporcionalno odnosu energije deformacije pregrade i energije deformacije odsječka brodskog trupa, Slika 4.2. Pregrada se idealizira modelom ortotropne ploče s vrlo jakim kutijastim nosačem (eng. *stool*) [91], a njena energija deformacije određuje se za zadano polje vitoperenja presjeka kao rubni uvjet.

a) b)



Slika 4.2 Deformacija pregrade, 3D FEM model, a) pogled odozgo, b) bočni pogled (od središnje linije) [14]

Vitoperenje uzrokuje uvijanje i savijanje pregrade. Progib pregrade (aksijalni pomak) dan je sljedećim izrazom, Slika 4.3:

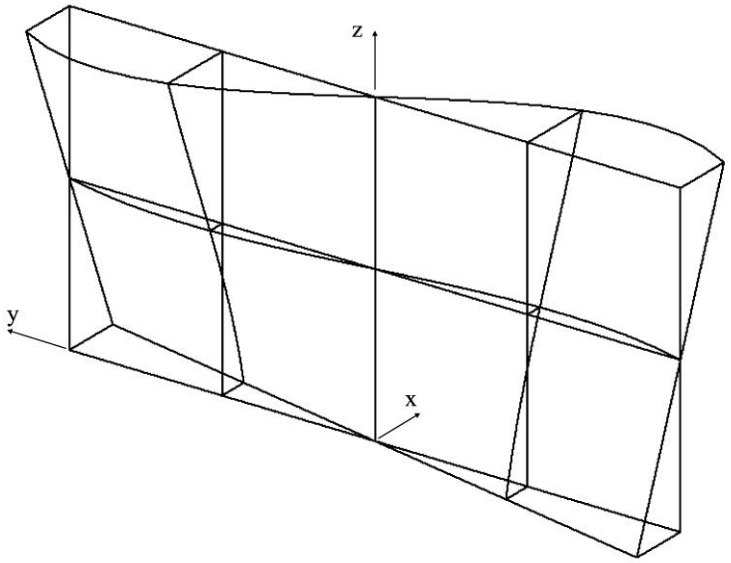
$$u(y,z) = -y\left\{(z-d) + \left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\frac{z^2}{H}\left(2-\frac{z}{H}\right)\right\}\psi', \tag{4.1}$$

gdje je H visina broda, b je polovina širine pregrade, d predstavlja udaljenost centra vitoperenja od neutralne linije dvodna, y i z su poprečna i vertikalna koordinata, dok ψ' predstavlja derivaciju kuta zakreta.

Energija deformacije roštilja pregrade uključuje doprinos uslijed horizontalnog i vertikalnog savijanja s kontrakcijom i uvijanja [14]

$$U_g = \frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{116H^3}{35b}i_y + \frac{32b^3}{105H}i_z + \frac{8Hb}{75}\nu\left(i_y+i_z\right) + \frac{143Hb}{75}(1-\nu)i_t\right]E\psi'^2, \tag{4.2}$$

gdje su i_y, i_z i i_t prosječni momenti tromosti presjeka, odnosno prosječni faktor krutosti na uvijanje za jediničnu širinu.

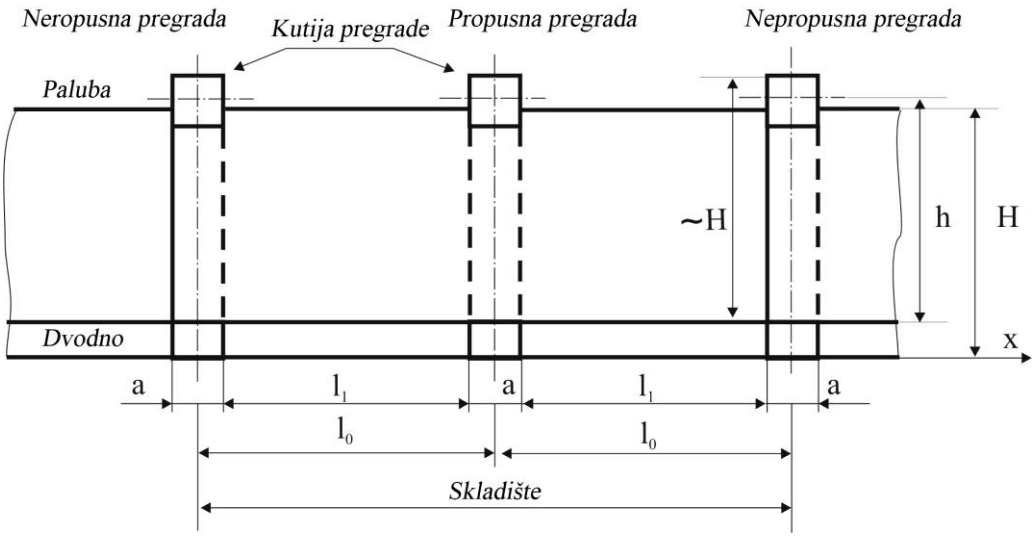


Slika 4.3 Deformacija pregrade uslijed vitoperenja poprečnog presjeka [14]

Energija deformacije kutijastog nosača sastoji se od savojnog, smičnog i torzijskog doprinosa

$$U_s = \left[\frac{12h^2 I_{sb}}{b} + 72(1+\nu)\frac{h^2}{b^3}\frac{I_{sb}^2}{A_s} + \frac{9bI_{st}}{10(1+\nu)}\right]E\psi'^2, \tag{4.3}$$

gdje je I_{sb} moment tromosti presjeka, A_s predstavlja smičnu površinu, dok je I_{st} faktor krutosti na uvijanje kutijastog nosača. Veličina h predstavlja udaljenost kutijastog nosača od dvodna, Slika 4.4.



Slika 4.4 Uzdužni presjek skladišta kontejnerskog broda [14]

Izraz za ekvivalentni faktor krutosti na uvijanje glasi:

$$I_t^* = \left[1 + \frac{a}{l_1} + \frac{4(1+\nu)C}{I_t l_0}\right] I_t, \tag{4.4}$$

gdje je a visina nosača pregrade (jednaka je razmaku rebara), l_0 je razmak pregrada, $l_1 = l_0 - a$ je neto duljina, dok je C energijski koeficijent definiran sljedećim izrazom:

$$C = \frac{U_g + U_s}{E\psi'^2}. \tag{4.5}$$

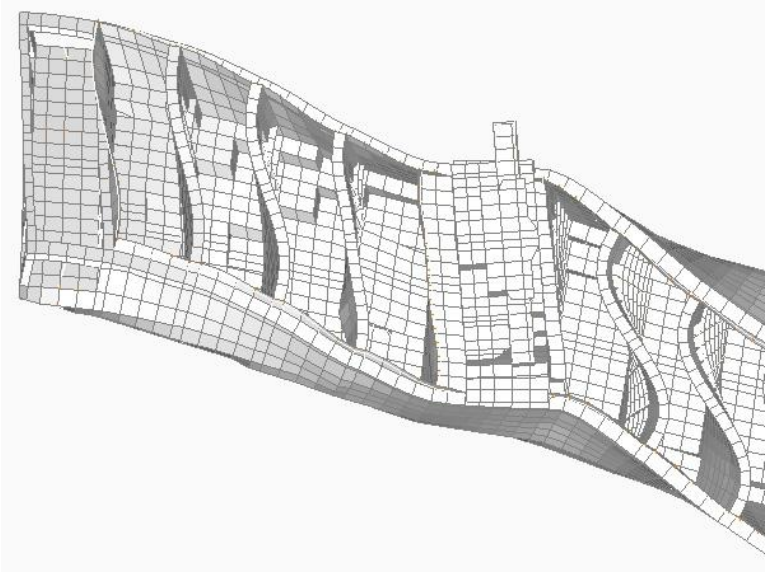
Drugi član u jednadžbi (4.4) označava doprinos pregrade kao elementa brodskog trupa zatvorenog poprečnog presjeka, dok je u trećem članu sadržana energija deformacije pregrade.

U ovoj disertaciji analiziran je utjecaj modeliranja pregrada na odziv broda, na primjeru uvijanja prizmatičnog pontona, metodom konačnih elemenata, Prilog B.

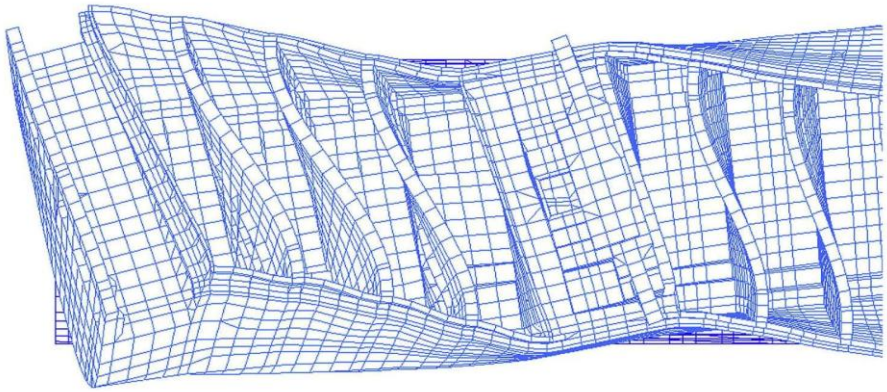
5. DOPRINOS KONSTRUKCIJE STROJARNICE KRUTOSTI BRODSKOG TRUPA

5.1. Općenito o problemu modeliranja strojarnice grednim modelom

Konstrukciju trupa suvremenih velikih kontejnerskih brodova, uz relativno kruti pramčani i krmeni peak i mnoštvo poprečnih pregrada u skladišnim prostorima koje spriječavaju distorziju, karakterizira i relativno kratka strojarnica, Slika 2.2. Takvu relativno kratku strojarnicu, moguće je promatrati kao zatvoreni segment odgovarajuće krutosti ili otvoreni segment povećane torzijske krutosti uslijed utjecaja paluba [40]. Istraživanja su pokazala da potonji pristup daje rezultate koji se bolje poklapaju s onima dobivenim 3D FEM analizom [25]. U okviru ovog rada složena deformacija konstrukcije strojarnice preliminarno je istražena na 3D FEM modelima velikog kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU, Slika 5.1, i 11400 TEU, Slika 5.2.



Slika 5.1 Deformacija krmenog dijela kontejnerskog broda kapaciteta 7800 TEU, 3D FEM model



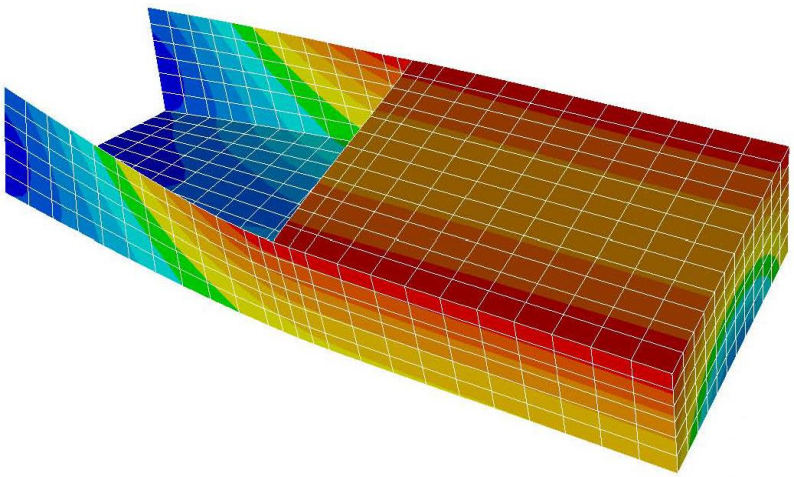
Slika 5.2 Deformacija krmenog dijela kontejnerskog broda kapaciteta 11400 TEU, 3D FEM model [77]

Na prethodnim slikama vidljivo je da je dominantna smična deformacija palube, dok je kutijasti nosač skladišnih poprečnih pregrada izložen savijanju. Zbog kratkoće strojarnice i njene pregrade su izvitoperene, ali znatno manje nego skladišne pregrade. Važno je zamijetiti da je krmeni dio (transom) skoro ostao ravan, što je bitno za vjerodostojan odabir rubnih uvjeta. Također, 3D FEM analiza pokazuje da se strojarnica ponaša poput otvorene konstrukcije i da joj je centar smicanja pomaknut ispod kobilice (izvan presjeka), blizu centra smicanja otvorenog presjeka, što omogućuje zanemarenje sprege između uvijanja i horizontalnog savijanja.

Neovisno o odabiru jednog od gore navedenih pristupa, problem matematičkog opisivanja trodimenzionalne konstrukcije strojarnice grednim modelom svodi se na određivanje njene efektivne krutosti, uz zadovoljavanje uvjeta kompatibilnosti na spoju zatvorenog i otvorenog presjeka. Kompatibilnost na spoju može biti zadovoljena na jedan od sljedećih načina:

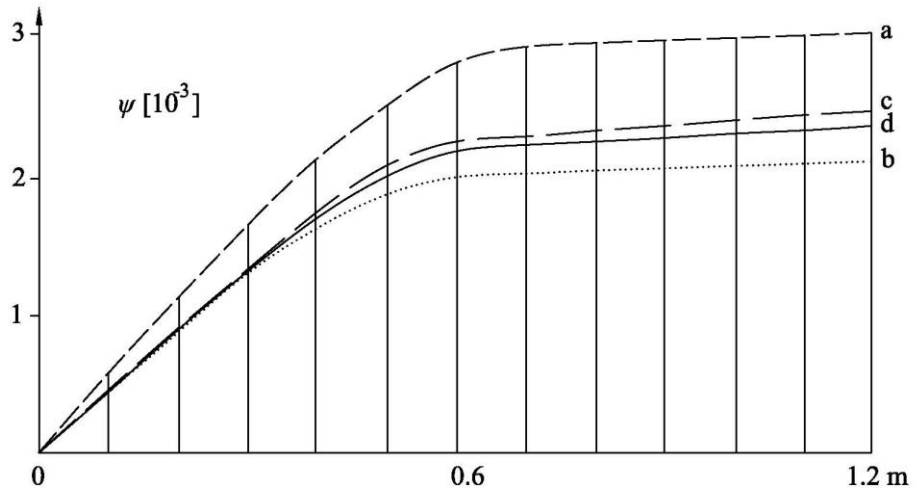
- Ravnoteža bimomenata, B_w, i kompatibilnost derivacije kuta uvijanja, ψ', [92].
- Diskontinuitet u derivacijama kutova uvijanja $\psi'\left(x^+\right)=s_1\psi'\left(x^-\right)$ i sprega između kutova savijanja i kuta uvijanja $\varphi\left(x^+\right)=\varphi\left(x^-\right)+s_2\psi'\left(x^-\right)$; ravnoteža momenata savijanja $M\left(x^-\right)=M\left(x^+\right)$ i bimomenata $B_w\left(x^-\right)=s_1B_w\left(x^+\right)-s_2M\left(x\right)$, gdje su s_1 i s_2 faktori kompatibilnosti vitoperenja koji ovise o funkciji vitoperenja [25, 27].

Prikladnost uvjeta na spoju analizirana je u literaturi na primjeru prizmatičnog pontona s otvorenim središnjim dijelom i zatvorenim krajevima, Slika 5.3, opterećenog momentima uvijanja od 1 kNm na krajevima, sljedećih dimenzija: $L\times B\times H=2{,}4\times0{,}4\times0{,}2$ m, $l_z+l_o+l_z=0{,}6+1{,}2+0{,}6$ m, $t=3$ mm [40].



Slika 5.3 Deformirani 3D FEM model (polovica) kutijastog nosača

Usporedbom kutova uvijanja za dva seta gore nabrojanih rubnih uvjeta i trećeg rješenja koje se temelji na efektivnoj krutosti određenoj iz teorije elastičnosti [93], zaključeno je da treće rješenje daje rezultate koji se najbolje poklapaju s rezultatima 3D FEM analize, te je zbog jednostavnosti najpogodnije za primjenu, Slika 5.4, [92].



Slika 5.4 Kut uvijanja otvorenog kutijastog nosača sa zatvorenim krajevima, a) (B_w, ψ') kompatibilnost, b) (ψ', φ) diskontinuitet, c) efektivna krutost, d) FEM

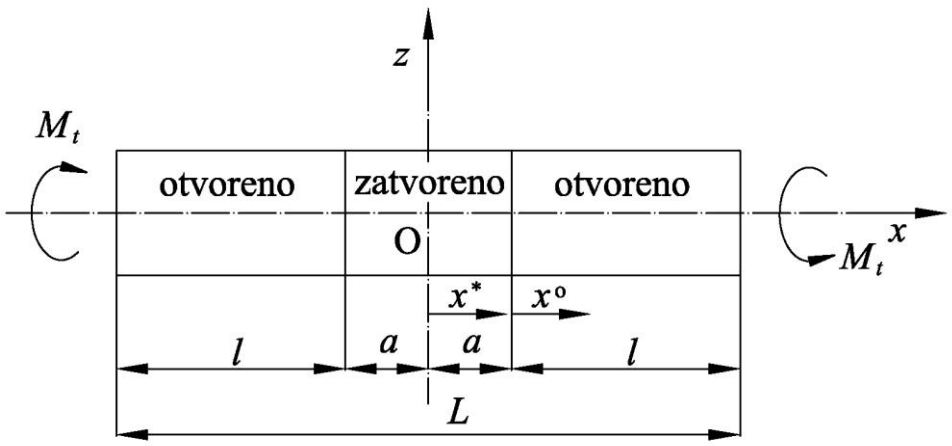
U okviru ove disertacije, pretpostavlja se da se konstrukcija strojarnice ponaša kao otvoreni dio brodskog trupa, uz povećanu torzijsku krutost uslijed utjecaja paluba, a njihov doprinos određuje se energetskim pristupom, slično kao što je to napravljeno za slučaj poprečnih pregrada [14, 15]. Na temelju poznatog odziva uvijanja i vitoperenja, analizirana je distorzija poprečnog presjeka brodskog trupa. Spomenuti postupak, prije primjene na brodski trup, verificiran je usporedbom s rezultatima 3D FEM analize pontona izrađenog na temelju nacrta kontejnerskog broda kapaciteta 7800 TEU.

Gredni model s konceptom efektivne krutosti, tj. krutošću strojarnice određenoj na prethodno opisani način, konzistentan je na globalnoj razini energetske ravnoteže, što je dovoljno za hidroelastičnu analizu, gdje se traže ispravne vrijednosti prirodnih frekvencija i oblici vibriranja suhog brodskog trupa.

Dijelovi teorijskog doprinosa opisani u ovom poglavlju te neki od numeričkih primjera prikazani su u radovima koje je autor objavio u koautorstvu s mentorom i kolegama iz istraživačke grupe u znanstvenim časopisima [94, 95, 96], znanstvenim knjigama [97, 98] i zbornicima međunarodnih znanstvenih skupova [99, 100].

5.2. Analitičko rješenje za uvijanje segmentnog nosača

Razmatrani nosač sastoji se od tri segmenta, pri čemu se drugi segment nalazi u sredini te zadovoljava uvjete simetrije, Slika 5.5. Rubni uvjeti i opterećenje jednaki su kao kod jednolikog nosača, točka 3.8.



Slika 5.5 Uvijanje segmentnog nosača

Svaki segment promatra se u vlastitom koordinatnom sustavu, a značajke središnjeg i krajnjih segmenata označene su sa (*), odnosno (°), dok se simboli A_i i B_i koriste za integracijske konstante. Zbog antisimetrične deformacije konstante A_0 i A_2 jednake su nuli.

Uvjeti kompatibilnosti na spoju i rubni uvjeti su sljedeći:

$$\begin{aligned} &\psi^*(a)=\psi^\circ(0), \quad && \psi_t^{*\prime}(a)=\varepsilon\psi_t^{\circ\prime}(0), \\ &T^*(a)=T^\circ(0), && B_w^*(a)=\eta B_w^\circ(0), \\ &u^\circ(l^\circ)=0, && T^\circ(l^\circ)=M_t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Faktori kompatibilnosti vitoperenja, ε i η, uvedeni su kako bi bila moguća uporaba bilo kojeg seta rubnih uvjeta opisanih u uvodnom razmatranju. Iz trećeg i posljednjeg uvjeta u jednadžbi (5.1) slijedi:

$$A_1=\frac{M_t a}{GI_t^*}, \qquad B_1=\frac{M_t l^\circ}{GI_t^\circ}. \tag{5.2}$$

Preostala četiri uvjeta u (5.1) daju sljedeći sustav algebarskih jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} \alpha\mathrm{ch}\alpha a & 0 & -\varepsilon\beta \\ I_t^*\mathrm{sh}\alpha a & -\eta I_t^\circ & 0 \\ 0 & \beta\mathrm{sh}\beta l^\circ & \beta\mathrm{ch}\beta l^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_3 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \frac{M_t}{G} \begin{Bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{I_t^\circ}-\dfrac{1}{I_t^*} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{I_t^\circ} \end{Bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$B_0 = A_1 + A_3\left(1-\frac{I_t^*}{I_s^*}\right)\mathrm{sh}\alpha a - B_2\left(1-\frac{I_t^\circ}{I_s^\circ}\right), \tag{5.4}$$

gdje je

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_t^*}{EI_w^*}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{GI_t^\circ}{EI_w^\circ}}. \tag{5.5}$$

Rješenje sustava (5.3) glasi:

$$A_3 = \frac{D_{A3}}{D}, \quad B_2 = \frac{D_{B2}}{D}, \quad B_3 = \frac{D_{B3}}{D}, \tag{5.6}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
D_{A3} &= \frac{M_t\eta}{G}\left[\left(\varepsilon-\frac{I_t^\circ}{I_t^*}\right)\mathrm{ch}\beta l^\circ - \varepsilon\right],\\
D_{B2} &= -\frac{M_t}{G}\mathrm{sh}\alpha a\left[\left(1-\frac{\varepsilon I_t^*}{I_t^\circ}\right)\mathrm{ch}\beta l^\circ + \frac{\varepsilon I_t^*}{I_t^\circ}\right],\\
D_{B3} &= \frac{M_t}{G}\left[\left(1-\frac{\varepsilon I_t^*}{I_t^\circ}\right)\mathrm{sh}\alpha a\ \mathrm{sh}\beta l^\circ - \frac{\eta\alpha}{\beta}\mathrm{ch}\alpha a\right],\\
D &= \eta I_t^\circ\alpha\,\mathrm{ch}\alpha a\ \mathrm{ch}\beta l^\circ + \varepsilon I_t^*\beta\,\mathrm{sh}\alpha a\ \mathrm{sh}\beta l^\circ.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.3. Efektivna krutost konstrukcije strojarnice

Omjer duljine i širine strojarnice velikih kontejnerskih brodova iznosi otprilike 1:2, pa se zbog njene relativne kratkoće dvobok nastavlja iz teretnih prostora kroz njenu konstrukciju, kako bi se osigurao kontinuirani tok naprezanja uslijed vitoperenja i savijanja kroz poprečne pregrade koje omeđuju strojarnicu. Gornja paluba je u polju visokog vitoperenja po presjeku te je izložena rubnom smičnom opterećenju, dok se dvodno zakreće oko vertikalne osi slično kao kruto tijelo, Slika 5.2. Dakle, smična deformacija nižih paluba strojarnice smanjuje se od gornje palube prema dvodnu.

Zbog prethodno iznesenih činjenica parametri krutosti zatvorene strojarnice nisu u potpunosti efektivni, pa se može pretpostaviti, kao u slučaju poprečnih pregrada [14], da je efektivni faktor krutosti na vitoperenje i smični moment tromosti jednak kao kod otvorenog presjeka (bez paluba), tj. $\tilde{I}_w \approx I_w^\circ$ i $\tilde{I}_s \approx I_s^\circ$, dok se samo faktor krutosti na uvijanje povećava uslijed utjecaja paluba. Njegova vrijednost je negdje između vrijednosti za otvoreni i zatvoreni presjek, ovisno o palubama, $I_t^\circ < \tilde{I}_t < I_t^*$.

Efektivni faktor krutosti na uvijanje $\tilde{I}_t$ može se odrediti energetskim pristupom, te se u općem obliku može prikazati jednadžbom:

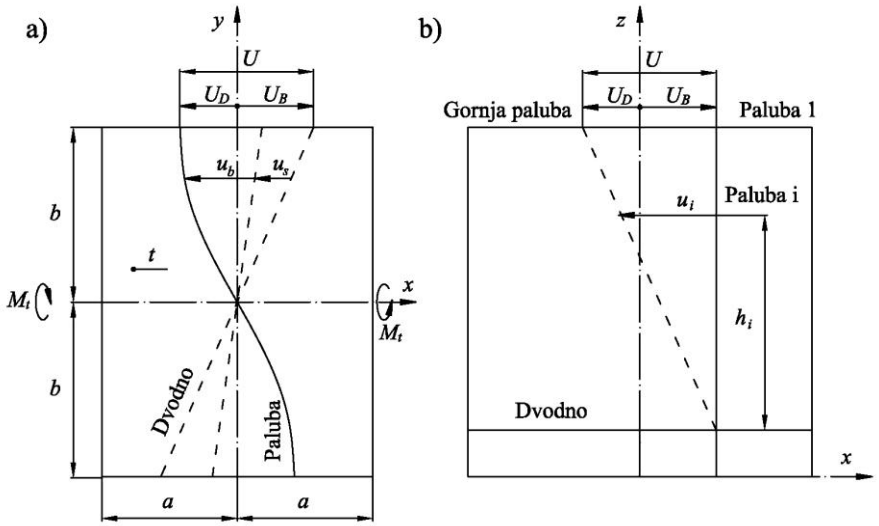
$$\tilde{I}_t = (1+C) I_t^{\circ}, \tag{5.8}$$

gdje je C omjer energije deformacije paluba i energije deformacije odgovarajućeg odsječka brodskog trupa bez paluba.

Relativni uzdužni pomak rubova gornje palube u odnosu na dvodno, koji uzrokuje njenu deformaciju u ravnini (membransku), rezultat je vitoperenja, (3.136)

$$U = |U_D| + |U_B| = (|w_D| + |w_B|)\psi_t'. \tag{5.9}$$

Spomenuti problem na približan (ali dovoljno pouzdan) način može se riješiti idealizirajući palubu gredom, pri čemu se njena ukupna deformacija sastoji od doprinosa savijanja i smicanja, Slika 5.6.



Slika 5.6 Deformacija gornje palube i zakretanje dvodna, a) ptičji pogled, b) bočni pogled

Savojni doprinos može se izračunati iz sljedećeg izraza:

$$u_b = \frac{y}{2b}\left[3 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right] U_b, \tag{5.10}$$

koji zadovoljava odgovarajuće rubne uvjete: $u_b(0) = 0$ i $u_b''(0) = 0$, gdje je U_b rubni pomak uslijed savijanja. Smična deformacija ovisna je o savojnoj i jednaka:

$$u_s = -\frac{EI}{GA}\frac{\mathrm{d}^2 u_b}{\mathrm{d}y^2} = 2(1+\nu)\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y}{b} U_b, \tag{5.11}$$

gdje je $A = 2at$ površina poprečnog presjeka palube, $I = \frac{2}{3}a^3 t$ moment tromosti, te je uzeta u obzir relacija $E = 2(1+\nu)G$, Slika 5.6. Ukupni progib dobije se sumiranjem jednadžbi (5.10) i (5.11), tj. $u = u_b + u_s$. Odnos između ukupnog rubnog pomaka i rubnog pomaka uslijed savijanja jednak je:

$$U = \left[1 + 2(1+v)\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] U_b . \tag{5.12}$$

Ukupna energija deformacije palube sastoji se od energija deformacije savijanja i smicanja

$$E_1 = \frac{1}{2} EI \int_{-b}^{b} \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_b}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \mathrm{d}y + \frac{1}{2} GA \int_{-b}^{b} \left(\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}y}\right)^2 \mathrm{d}y . \tag{5.13}$$

Uvrštavajući (5.10), (5.11) i (5.12) u (5.13) dobivamo:

$$E_1 = \frac{4(1+v)Gt\left(\frac{a}{b}\right)^3}{1 + 2(1+v)\left(\frac{a}{b}\right)^2} U^2 . \tag{5.14}$$

Nadalje, energija deformacije odsječka brodskog trupa u području strojarnice, bez paluba i poprečnih pregrada, jednaka je:

$$E_H = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} T_t \psi_t' \mathrm{d}x = G I_t^{\circ} a \psi_t'^2 , \tag{5.15}$$

gdje je T_t specificiran u (3.129), a za ψ_t' pretpostavljena je konstantna vrijednost unutar raspona 2a. Konačno, uzimajući u obzir energije deformacije svih paluba i jednadžbu (5.9), može se napisati izraz za koeficijent C u jednadžbi (5.8)

$$C = \frac{\sum E_i}{E_H} = \frac{4(1+v)t_1\left(\frac{a}{b}\right)^3 \left(|w_D| + |w_B|\right)^2 k}{\left[1 + 2(1+v)\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] I_t^{\circ} a} , \tag{5.16}$$

gdje

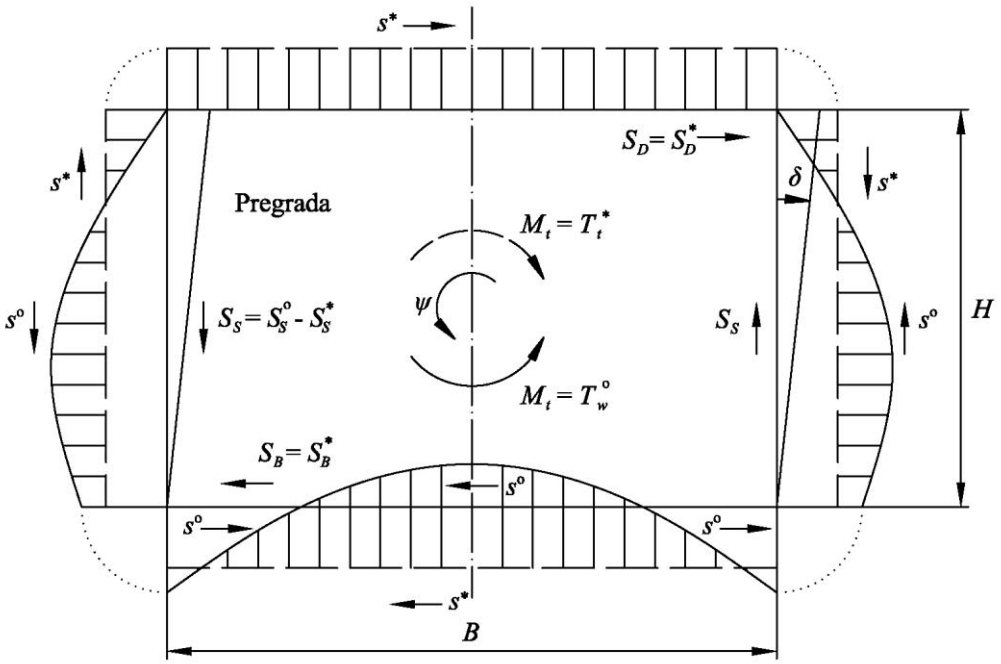
$$k = \sum \frac{V_i}{V_1}\left(\frac{h_i}{h_1}\right)^2 \tag{5.17}$$

predstavlja sumu utjecajnih koeficijenata paluba, te je dobiven pretpostavljajući da je energija deformacije paluba proporcionalna njihovu volumenu, V, i da se deformacija linearno povećava s udaljenošću od dvodna, h, Slika 5.6.

Iako je omjer duljine i širine palube 1:2, 2D FEM analize ravninske deformacije palube provedene u okviru ovog istraživanja pokazale su da gredni model primijenjen za određivanje ravninske deformacije daje prilično dobre rezultate (gredni model ima samo 6% veću krutost od FEM modela).

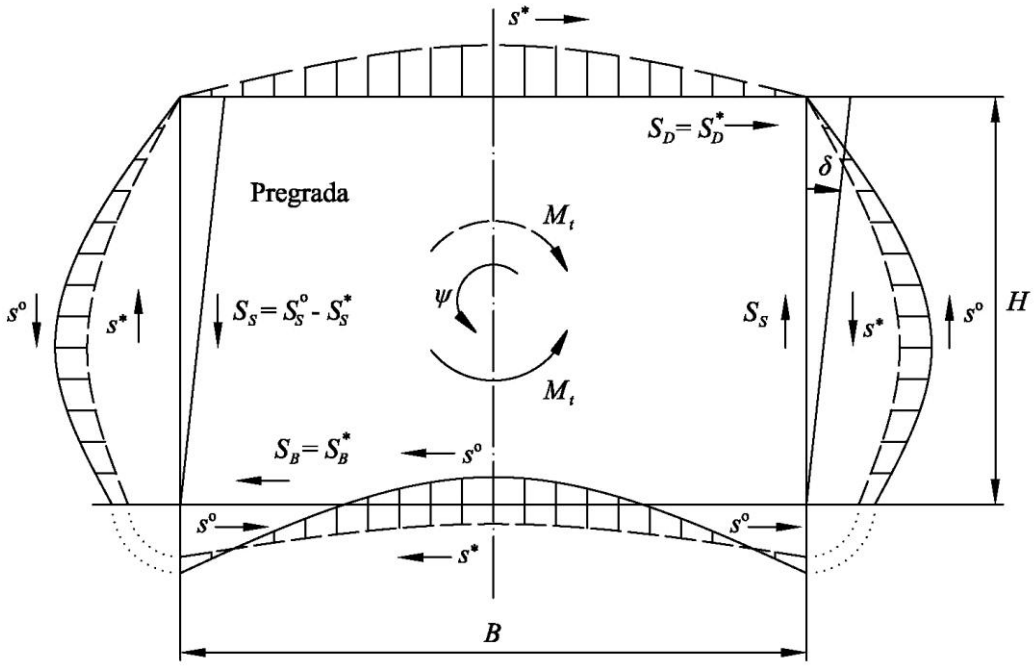
5.4. Distorzija segmentnog pontona

Otvoreni i zatvoreni segmenti trupa spajaju se na poprečnoj pregradi, koja je izložena distorziji zbog različitih smičnih tokova na njenoj prednjoj i stražnjoj strani, induciranih vanjskim momentom uvijanja, M_t, Slika 5.7.



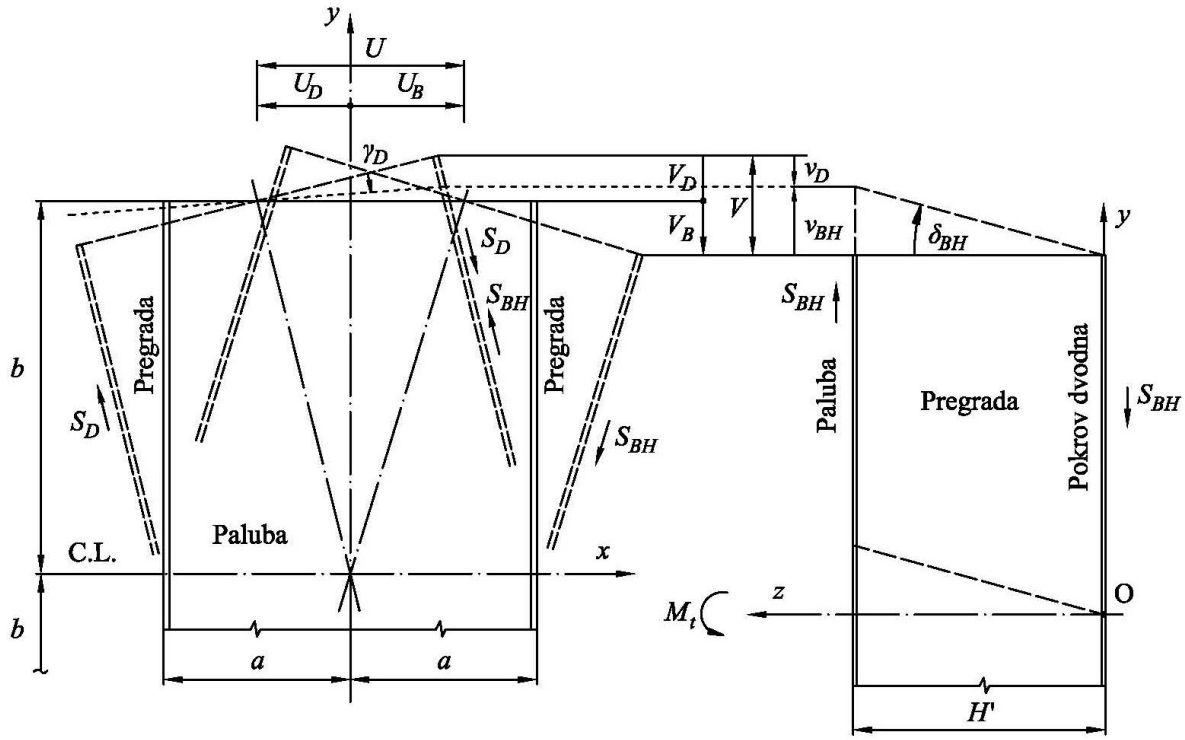
Slika 5.7 Smične sile na spoju otvorenog (°) i zatvorenog segmenta (*)

Smični tok otvorenog presjeka, s°, je parabolička funkcija dok je na zatvorenom presjeku, s^*, jednolik. Rezultirajuće sile na stranama su $S_S = S_S^\circ - S_S^*$, dok za palubu i dno vrijedi $S_D = S_D^*$, odnosno $S_B = S_B^*$, zato što za otvoreni presjek vrijedi $S_D^\circ = 0$, te za dani tok na dnu s°, zbog ravnoteže vrijedi $S_B^\circ = 0$, Slika 5.7. Navedene smične sile zadovoljavaju uvjete statičke ravnoteže. Unutarnja ravnoteža naprezanja dovodi do distorzije poprečne pregrade, δ. Tokovi smičnih naprezanja, Slika 5.7, realistično su prikazani za duge zatvorene i otvorene segmente pontona. U slučaju kratkog zatvorenog segmenta, kao u slučaju kratke strojarnice broda, paluba nije potpuno efektivna, pa se njen smični tok znatno smanjuje, Slika 5.8, što rezultira da se preostali dio poprečnog presjeka ponaša poput otvorenog. Razlika između smičnih tokova, $s^\circ - s^*$, je relativno mala ali i dovoljna da uzrokuje distorziju pregrade, δ, koja se može procijeniti na sljedeći način.



Slika 5.8 Smične sile na spoju dugog otvorenog i kratkog zatvorenog segmenta (kvalitativni prikaz)

Tendencija palube i dvodna strojarnice koja je izložena uvijanju je rotacija oko vertikalne osi u suprotnim smjerovima zbog vitoperenja presjeka, Slika 5.9.



Slika 5.9 Pomaci i membranske deformacije palube i pregrade

Ukupna poprečna zračnost koja se pojavi između kuta palube i vrha pregrade, Slika 5.9, iznosi:

$$V = V_D + V_B = \frac{a}{b}U\,, \tag{5.18}$$

gdje je relativni uzdužni pomak palube u odnosu na dvodno, *U*, dan jednadžbom (5.9). Zračnost *V* nastaje poprečnim pomakom kuta palube, v_D, i pomakom vrha palube, v_{BH}, u suprotnim smjerovima, kao rezultat uravnoteženja unutarnjih smičnih sila, S_D i S_{BH}, Slika 5.9. Smične sile ovise o smičnim deformacijama $\gamma_D = v_D / a$, odnosno $\delta_{BH} = v_{BH} / H'$, gdje je δ_{BH} kut distorzije, Slika 5.9. Za smičnu silu palube može se pisati:

$$S_D = 2Gt_t k \frac{b}{a} v_D\,, \tag{5.19}$$

gdje je t_1 debljina gornje palube, dok faktor *k* uzima u obzir doprinos svih paluba ukupnoj rezultantnoj sili S_D. Faktor *k* dobije se uz pretpostavku proporcionalnog povećanja smične deformacije paluba od dvodna prema vrhu i ravnoteže momenata smičnih sila S_i i S_D. Navedeno daje jednaku definiciju faktora *k* kao što je dobiven iz ravnoteže energije u jednadžbi (5.17).

Na sličan način može se pisati za smičnu silu pregrade

$$S_{BH} = 2Gt_{BH} \frac{b}{H'} v_{BH}\,. \tag{5.20}$$

Iz ravnoteže sila dobiva se omjer poprečnih pomaka palube i pregrade

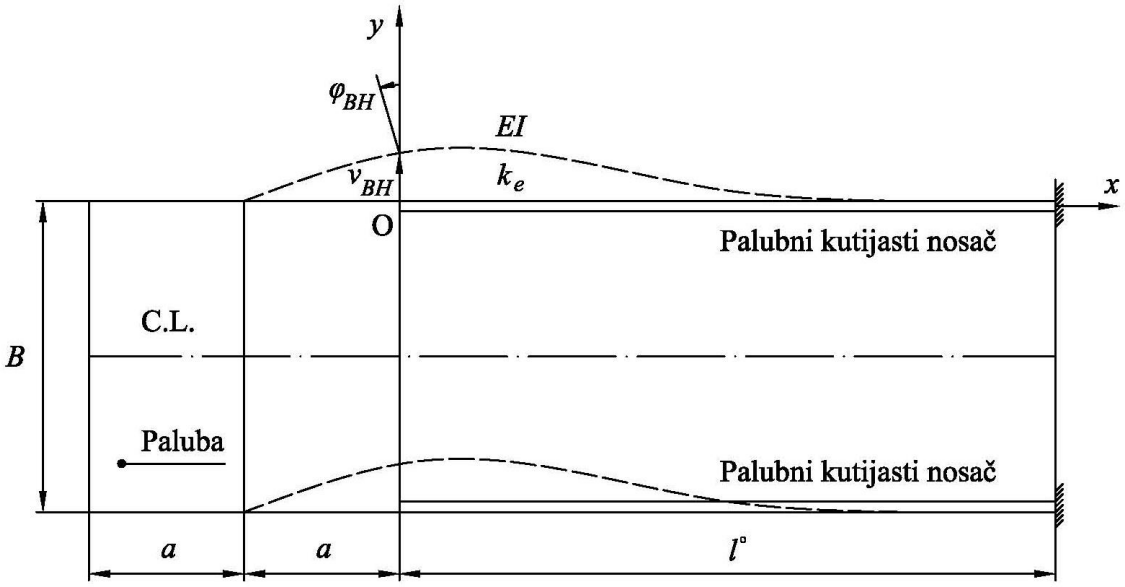
$$\frac{v_D}{v_{BH}} = \frac{t_{BH} a}{t_1 k H'}\,, \tag{5.21}$$

koji su obrnuto proporcionalni njihovim krutostima. S druge strane, uzimajući u obzir da vrijedi $v_D + v_{BH} = V$ i izraze (5.9), (5.18) i (5.21), dobiva se:

$$\delta_{BH} = \frac{v_{BH}}{H'} = \frac{\left(|w_D| + |w_B|\right)\psi_t'}{b\left(\frac{H'}{a} + \frac{t_{BH}}{t_1 k}\right)}\,. \tag{5.22}$$

Ukoliko se debljina pregrade t_{BH} poveća, kut distorzije će se smanjiti i obrnuto.

Distribucija kuta distorzije δ u području strojarnice je skoro linearna. Uzduž otvorenog presjeka distorzija uzrokuje savijanje kutijastih nosača palube poput greda na elastičnim osloncima, Slika 5.11, [101].

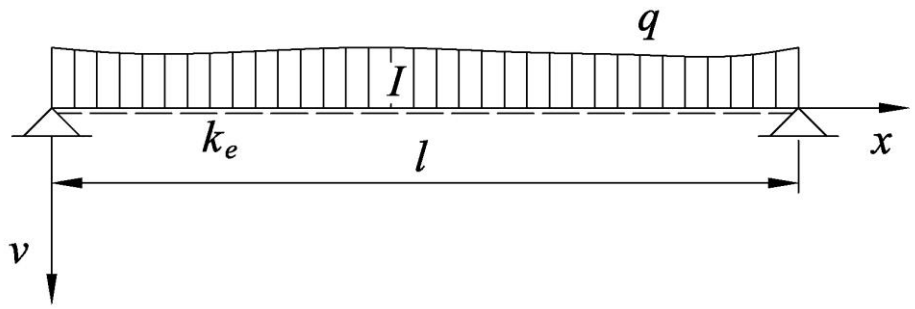


Slika 5.10 Palubni kutijasti nosači kao grede na elastičnoj podlozi

Diferencijalna jednadžba elastične linije savijanja grede na elastičnoj podlozi, prema [101], glasi:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + \frac{k_e v}{EI} = \frac{q}{EI}, \tag{5.23}$$

gdje je v progib grede, q kontinuirano raspodijeljeno vanjsko opterećenje, EI krutost grede na savijanje, dok k_e predstavlja krutost elastične podloge, Slika 5.11.



Slika 5.11 Greda na elastičnoj podlozi [101]

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe (koja se dobije ukoliko se na desnoj strani izraza (5.23) izostavi kontinuirano opterećenje) može se zapisati u obliku:

$$v_h = Ae^{\eta x}, \tag{5.24}$$

gdje su A i η konstante. Uvrštavanjem izraza (5.24) u jednadžbu (5.23) ona prelazi u oblik:

$$\eta^4 + \frac{k_e}{EI} = 0, \tag{5.25}$$

čiji se korijeni mogu zapisati u obliku:

$$\eta = \pm i\left(1 \pm i\right)\vartheta, \tag{5.26}$$

gdje je

$$\vartheta = \sqrt[4]{\frac{k_e}{4EI}}\,. \tag{5.27}$$

Rješenje homogene jednadžbe dobiva se uvrštavanjem izraza (5.26) u (5.25):

$$v_h = C_1 e^{\vartheta(1+i)x} + C_2 e^{-\vartheta(1+i)x} + C_3 e^{\vartheta(1-i)x} + C_4 e^{-\vartheta(1-i)x}. \tag{5.28}$$

Uvođenjem sljedećih odnosa između trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija:

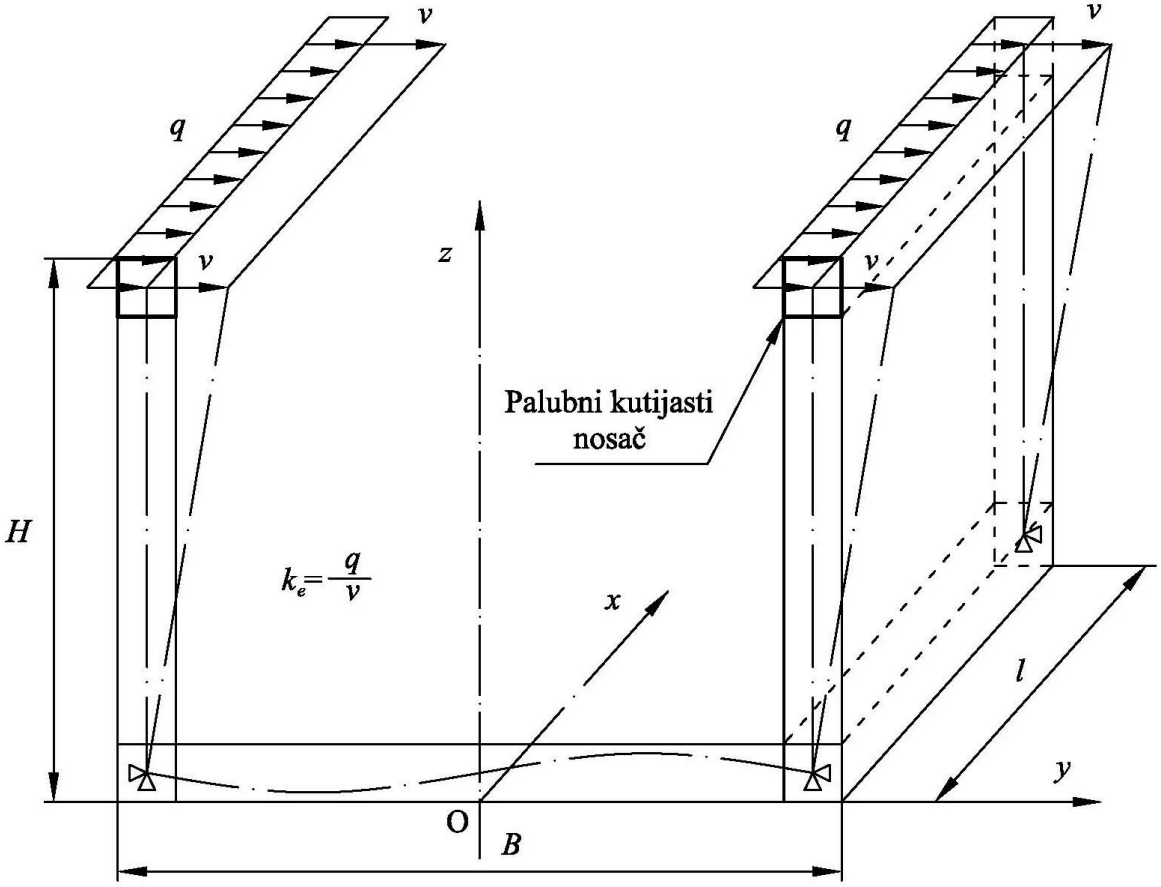
$$e^{i\vartheta x} = \cos\vartheta x + i\sin\vartheta x \tag{5.29}$$

$$e^{-i\vartheta x} = \cos\vartheta x - i\sin\vartheta x\,, \tag{5.30}$$

rješenje homogene jednadžbe se može zapisati u sljedećem obliku:

$$v_h = e^{\vartheta x}\left(A\cos\vartheta x + B\sin\vartheta x\right) + e^{-\vartheta x}\left(C\cos\vartheta x + D\sin\vartheta x\right). \tag{5.31}$$

Krutost podloge, k_e, određuje se kao omjer narinutog opterećenja na palubi, q, i odgovarajućeg pomaka, v, Slika 5.12.



Slika 5.12 Definiranje krutosti elastične podloge palubnih nosača

Budući da je otvoreno skladište razmjerno dugo, l_0, uzajamni utjecaj rubova je zanemariv, pa se mogu koristiti samo prigušujući članovi homogenog rješenja za gredu na elastičnoj podlozi. Zadovoljavajući odgovarajuće rubne uvjete prikazane na Slici 5.10, tj. $v(0)=v_{BH}$ i $\varphi(0)=\varphi_{BH}$, dobiva se

$$v=e^{-\vartheta x}\left[v_{BH}\cos\vartheta x+\left(v_{BH}+\frac{\varphi_{BH}}{\vartheta}\right)\sin\vartheta x\right], \tag{5.32}$$

gdje je nadalje $\varphi_{BH}=v_{BH}/a$, dok se v_{BH} odredi iz jednadžbe (5.22). Naposljetku, funkcija za kut distorzije glasi $\delta=v/H'$.

Na temelju poznatog progiba kutijastog palubnog nosača, moguće je odrediti moment savijanja, $M=-EIv''$, i naprezanje, $\sigma=My/I$, pri čemu *y* predstavlja udaljenost razmatrane točke na presjeku kutijastog nosača od neutralne linije. Pomoću izraza (5.32) dobije se:

$$\sigma_b=y\sqrt{\frac{Ek_e}{I}}e^{-\vartheta x}\left[\left(v_{BH}+\frac{\varphi_{BH}}{\vartheta}\right)\cos\vartheta x-v_{BH}\sin\vartheta x\right]. \tag{5.33}$$

Ukupno naprezanje sastoji se od membranske komponente uslijed spriječenog vitoperenja, izraz (3.134), i naprezanja uslijed savijanja, izraz (5.33).

5.5. Verifikacija predloženog postupka za određivanje efektivne krutosti

Teorijski doprinos istraživanju efektivne krutosti strojarnice provjeren je usporedbom rezultata dobivenih 3D FEM analizom i grednim (1+2)D modelom, za nekoliko inačica prizmatičnog pontona izrađenog na temelju nacrta kontejnerskog broda kapaciteta 7800 TEU, kako je opisano u točki 3.8. Analizirani su, dakle, odzivi dobiveni za:

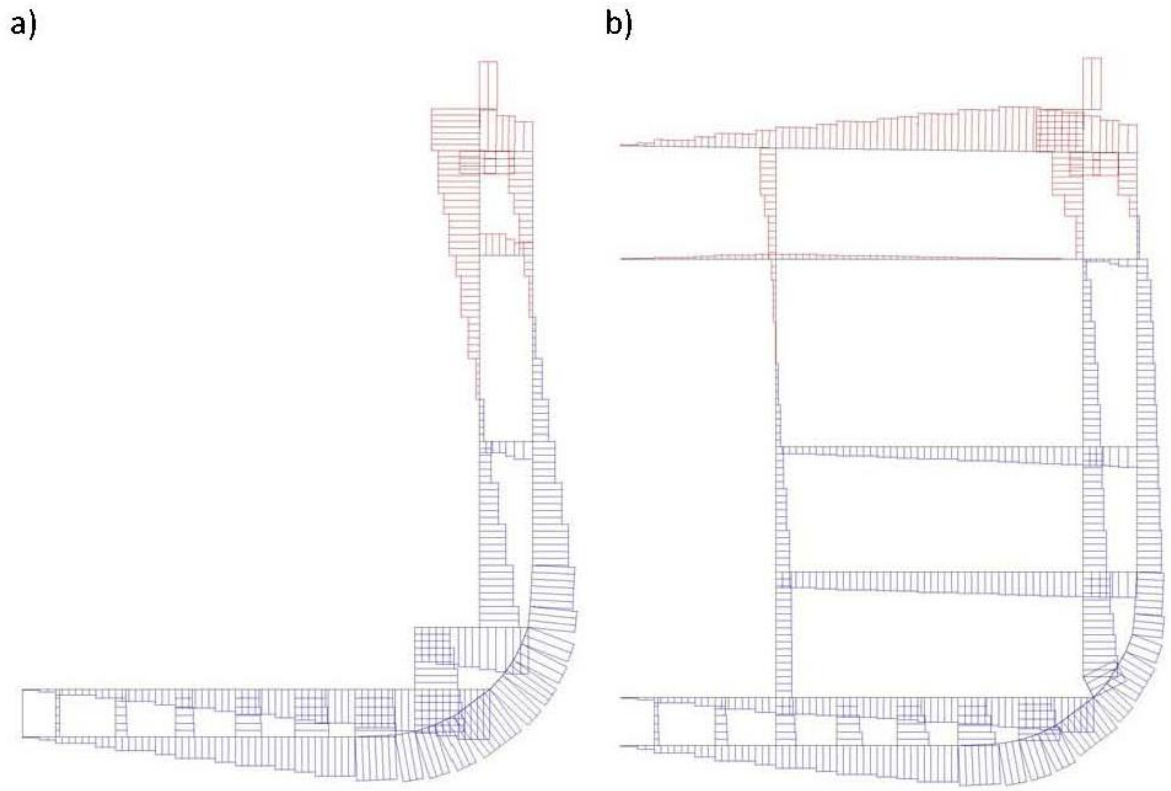
- jednoliki ponton bez pregrada
- jednoliki ponton s pregradama
- segmentni ponton bez pregrada, stvarni parametri krutosti
- segmentni ponton bez pregrada, efektivni parametri krutosti
- segmentni ponton s pregradama, stvarni parametri krutosti
- segmentni ponton s pregradama, efektivni parametri krutosti

Geometrijske značajke otvorenog i zatvorenog presjeka pontona određene su, jednako kao u točki 3.8., programom STIFF [48], Tablica 5.1. Površina zatvorenog presjeka je oko 50% veća od površine otvorenog presjeka. Centar smicanja zatvorenog presjeka je negdje u sredini, dok je kod otvorenog izvan presjeka (ispod kobilice). Vidljivo je da je i faktor krutosti na uvijanje mnogo veći kod zatvorenog nego kod otvorenog presjeka.

Tablica 5.1 Geometrijske značajke poprečnih presjeka broda

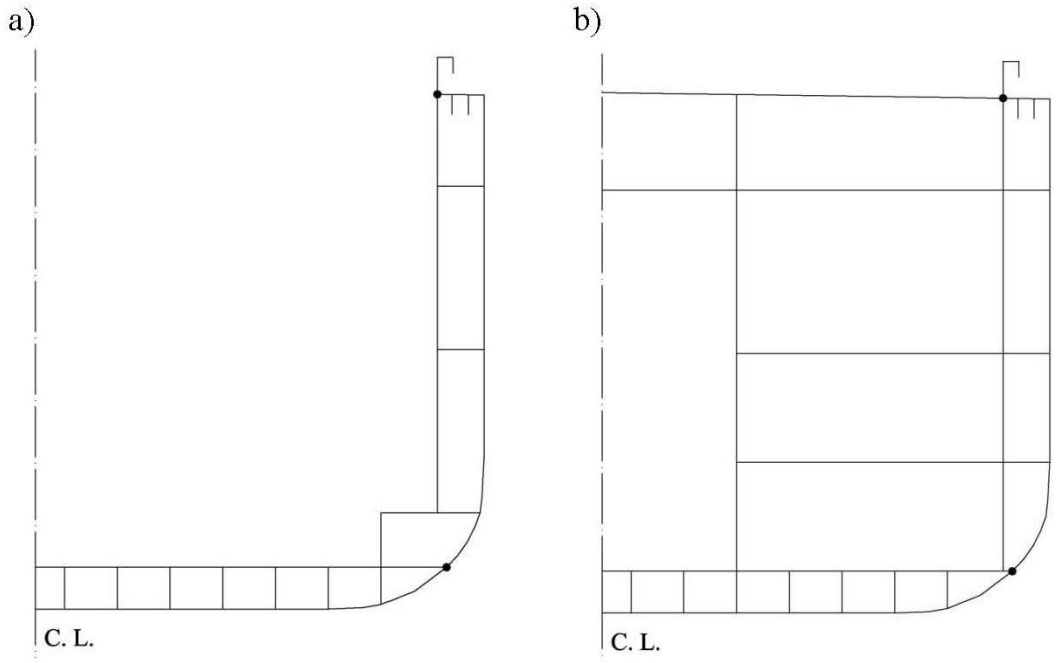
Veličina	Oznaka, jedinica	Otvoreni presjek (°)	Zatvoreni presjek (*)
Površina presjeka	A, m^2	6,394	10,200
Horizontalna smična površina	A_{sh}, m^2	1,015	2,959
Vertikalna smična površina	A_{sv}, m^2	1,314	2,094
Vertikalni položaj neutralne linije	z_{NL}, m	11,66	13,96
Vertikalni položaj centra smicanja	z_{SC}, m	-13,50	9,60
Horizontalni moment tromosti	I_{bh}, m^4	1899	2331
Vertikalni moment tromosti	I_{bv}, m^4	676	889
Faktor krutosti na uvijanje	I_t, m^4	14,45	939,5
Faktor krutosti na vitoperenje	I_w, m^6	171400	24010
Inercijski smični modul	I_s, m^4	710,5	173,6

Slika 5.13 prikazuje funkcije vitoperenja, *w*, otvorenog, i zatvorenog presjeka poprečnog presjeka.



Slika 5.13 Vitoperenje poprečnog presjeka, a) otvoreni, b) zatvoreni

Kao referentne veličine uzete su vrijednosti relativnog uzdužnog pomaka na spoju dvoboka i palube (w_D = -221 m^2) i na spoju pokrova dvodna i boka (w_B = 267 m^2). Relativni momenti tromosti volumena konstrukcije paluba izračunati su prema jednadžbi (5.17), Tablica 5.2.



Slika 5.14 Položaj referentnih točaka, a) otvoreni presjek, b) zatvoreni presjek

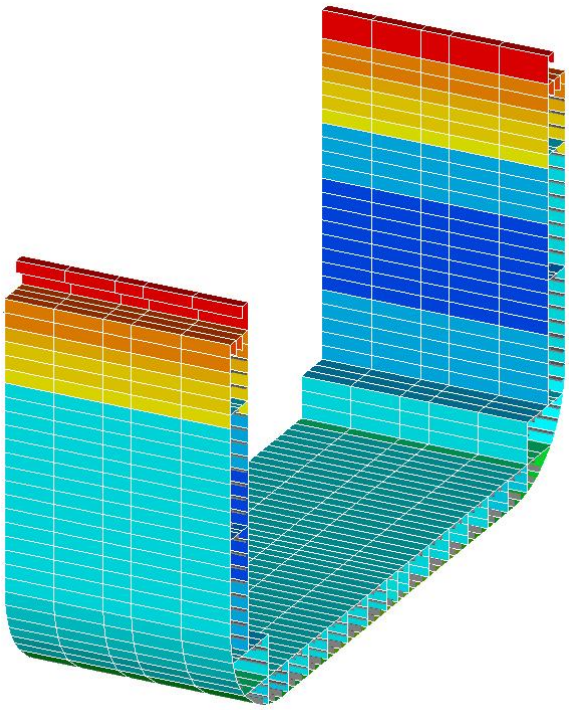
Tablica 5.2 Relativni moment tromosti volumena konstrukcije paluba

Redni broj	Podstruktura	V_i (m^3)	h_i (m)	$\frac{V_i}{V_1}\left(\frac{h_i}{h_1}\right)^2$
1	Gornja paluba	12,738	22,6	1
2	Paluba 2	14,038	18,234	0,7174
3	Paluba 3	8,955	10,422	0,1495
4	Paluba 4	6,434	5,214	0,0269
				k = 1,894

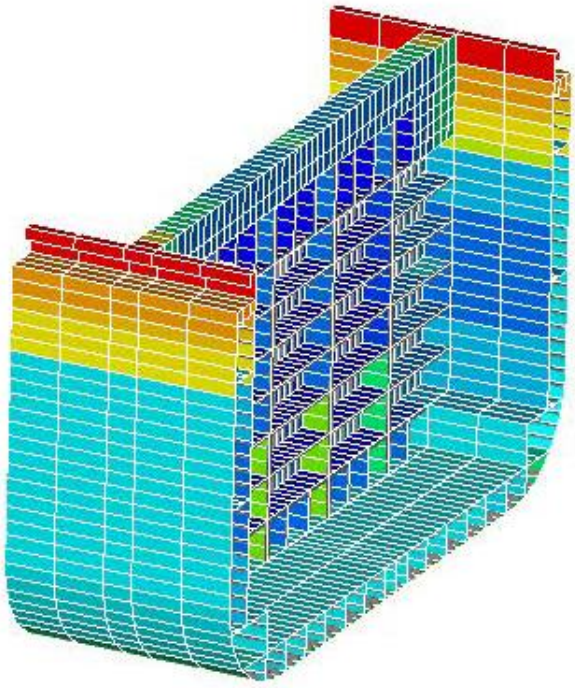
5.5.1. 3D FEM analiza modela prizmatičnih pontona

Kao što je već spomenuto, prema glavnom rebru velikog kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU, izrađeno je nekoliko 3D FEM prizmatičnih modela (duljine 300 m), u programskom paketu SESAM [89]. Osnovni model je onaj opisan u točki 3.8., Slika 3.9, koji se sastoji od 22 otvorena superelementa, Slika 5.15. U drugom koraku su spomenuti superelementi zamijenjeni otvorenim superelementima s pregradom, Slika 5.16. Iako je

prednost modela bez pregrada njegova jednostavnost a time i transparentnost ponašanja strojarnice, model s pregradama je potreban jer predstavlja stvarnu konstrukciju trupa.

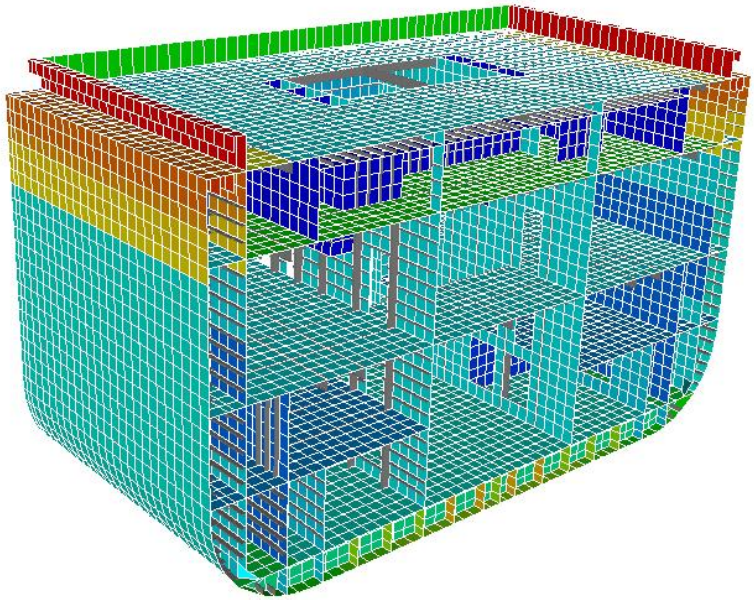


Slika 5.15 Karakteristični superelement skladišta

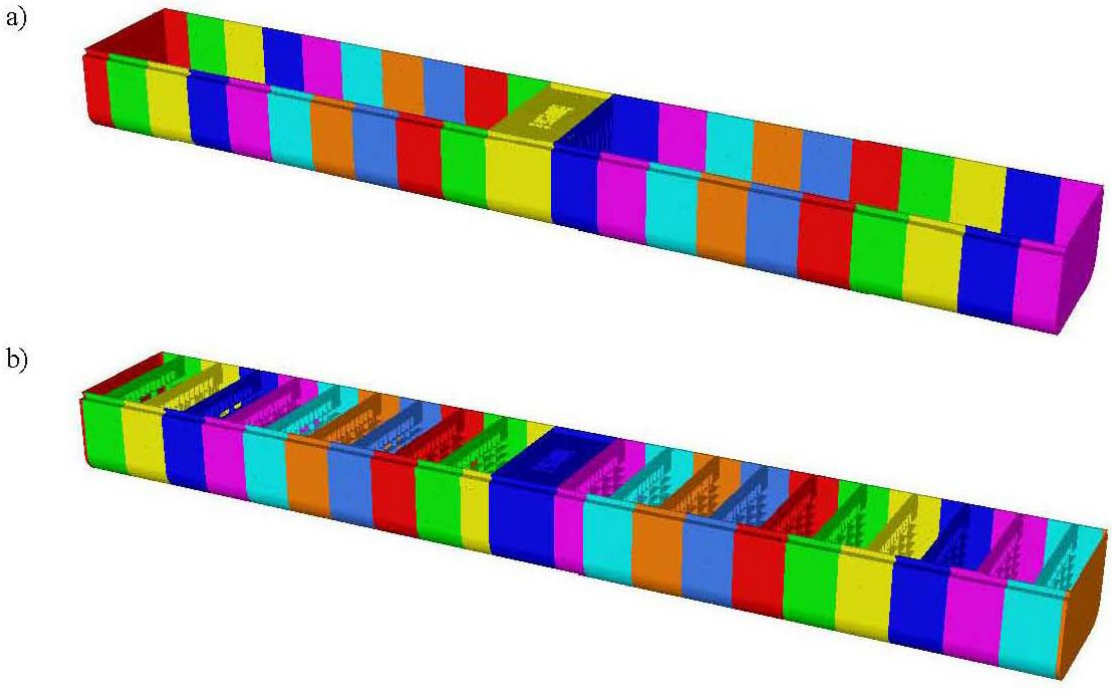


Slika 5.16 Karakteristični superelement skladišta s poprečnom pregradom

U sljedećem koraku su dva središnja superelementa 3D FEM modela zamijenjena jednim superelementom strojarnice, Slika 5.17, koji je izrađen na temelju nacrta strojarnice kontejnerskog broda, ali kao dio paralelnog srednjaka (bez sužavanja prema krmi), kako bi se dobio simetričan model, Slika 5.18, za potrebe analitičkog rješenja.



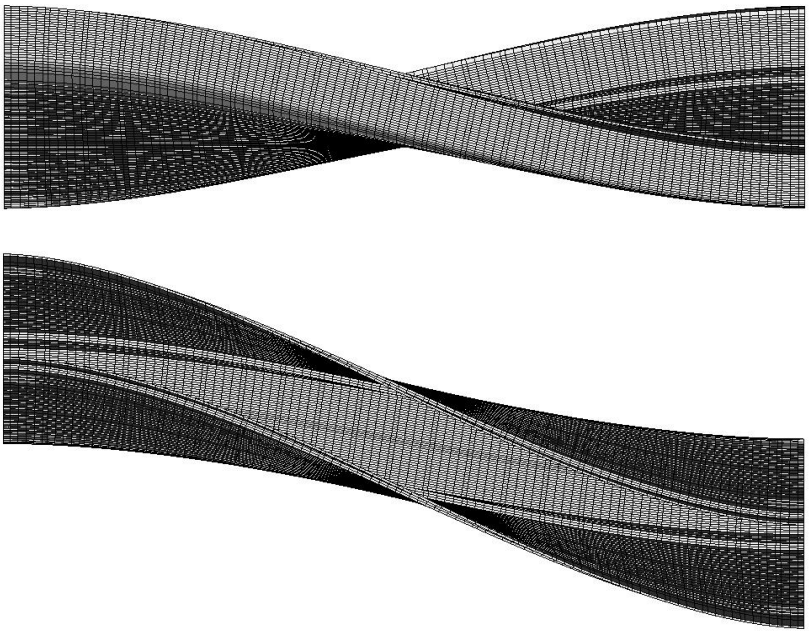
Slika 5.17 Superelement strojarnice



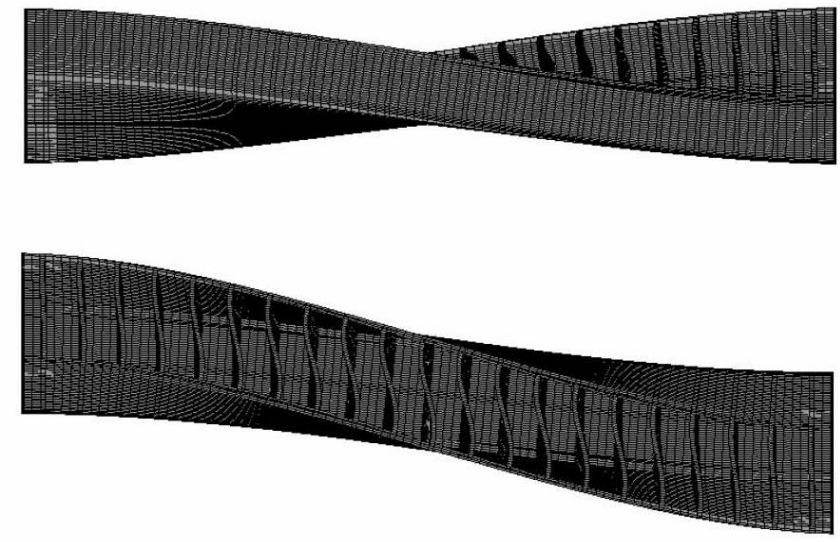
Slika 5.18 Model superelemenata segmentnog pontona, a) bez pregrada, b) s pregradama

U sva četiri slučaja (jednoliki ponton bez pregrada i s pregradama, segmentni ponton bez pregrada i s pregradama) opterećenje je jednako kao u točki 3.8. (moment uvijanja od $M_t = 40750$ kNm na slobodnom kraju, induciran koncentriranim silama, Slika 3.11.). Na sredini modela spriječeni su poprečni i vertikalni pomaci.

Nakon provedene analize utvrđeno je da je deformacija jednolikog pontona bez pregrada monotona, Slika 5.19, jednaka kao i kod modela s pregradama, Slika 5.20, dok je kod modela sa strojarnicom evidentan utjecaj njene krutosti na globalnu deformaciju, Slike 5.21 i 5.22.



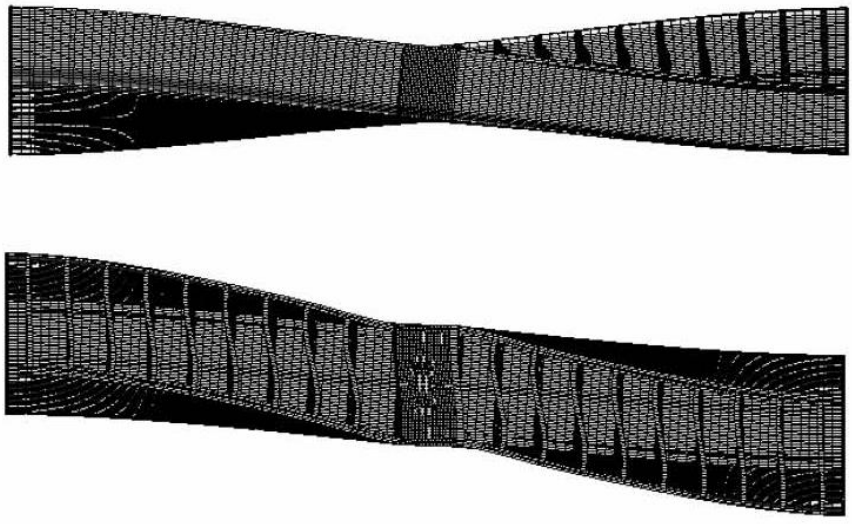
Slika 5.19 Deformacija jednolikog pontona bez pregrada, bočni i ptičji pogled



Slika 5.20 Deformacija jednolikog pontona s pregradama, bočni i ptičji pogled



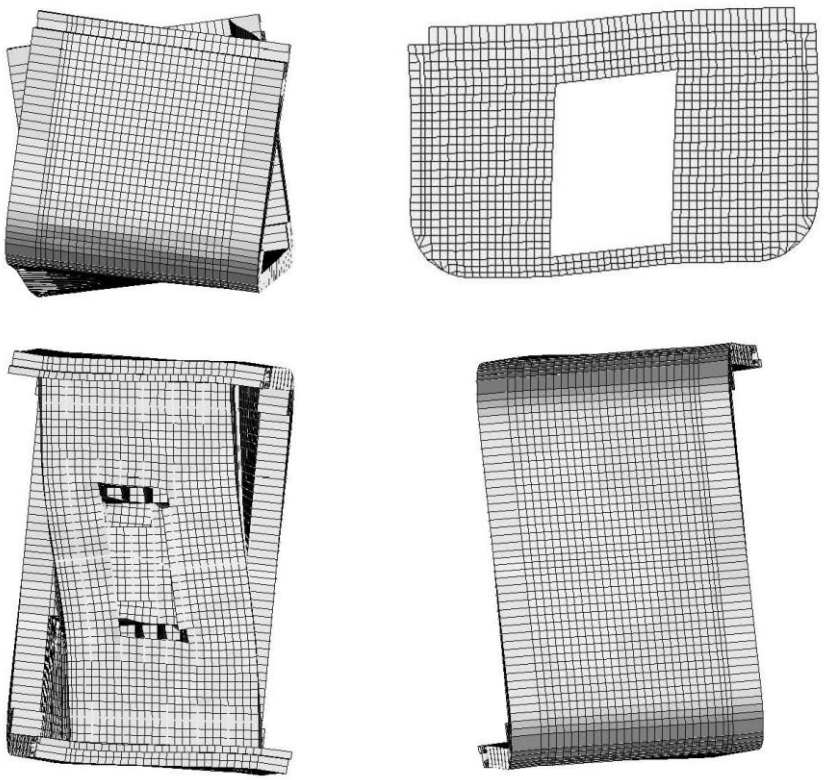
Slika 5.21 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, bočni i ptičji pogled



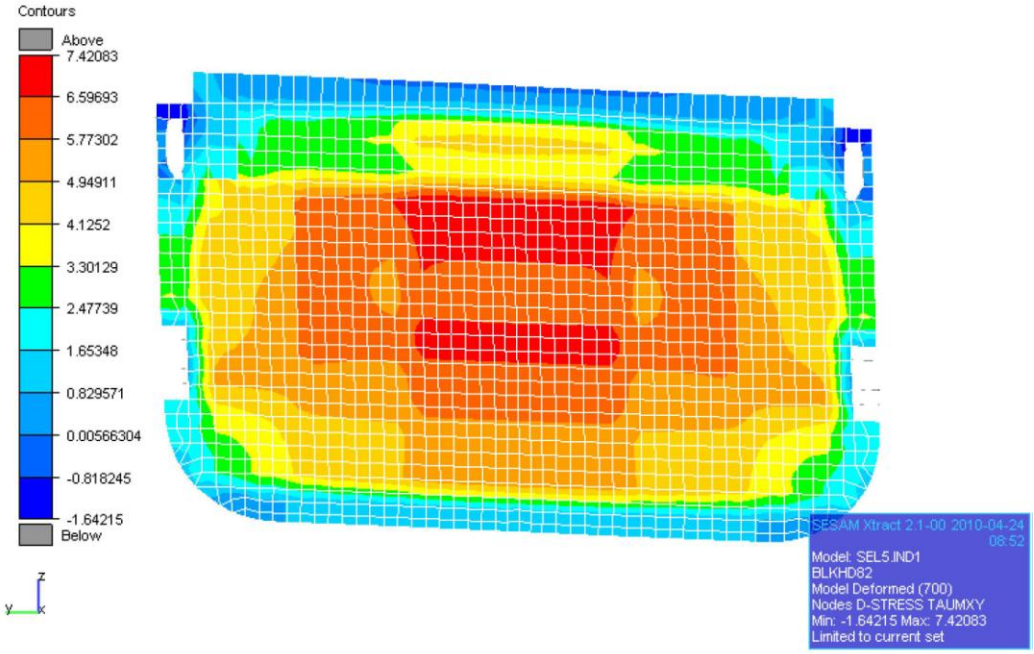
Slika 5.22 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, bočni i ptičji pogled

Iz detaljnog pogleda na deformiranu strojarnicu očito je da se njeno dvodno i bokovi zakreću kao „kruto tijelo“, dok su palube i poprečne pregrade izložene smičnoj deformaciji, Slika 5.23.

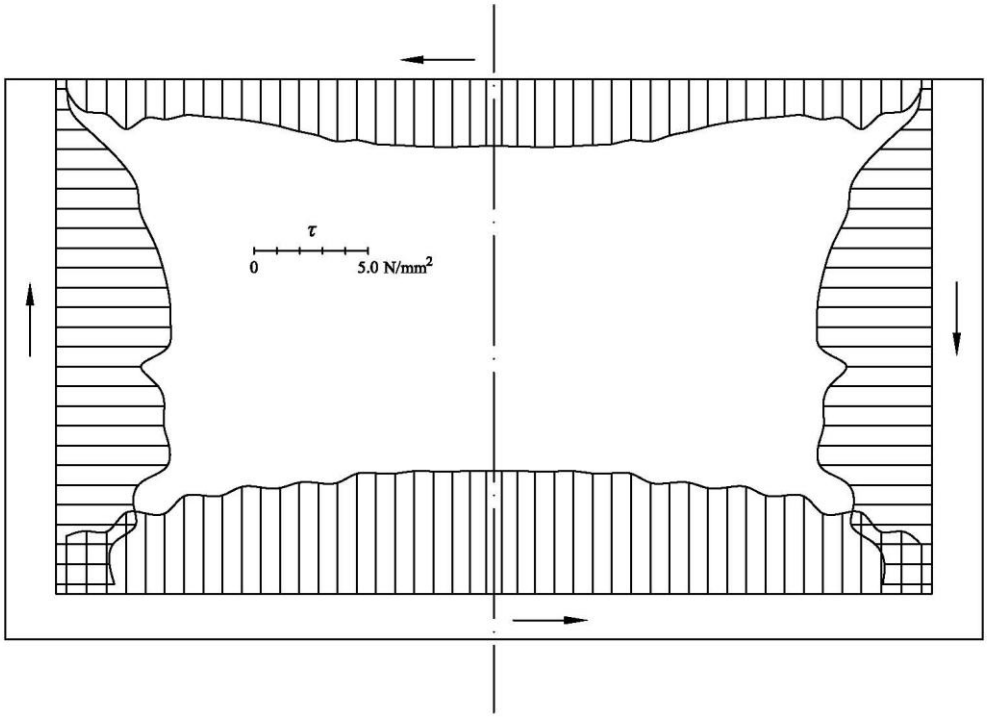
Na Slikama 5.24 i 5.25 prikazana je distribucija smičnih naprezanja pramčane pregrade strojarnice, te distribucija rubnih naprezanja pregrade koja uzrokuju distorziju.



Slika 5.23 Deformirani superelement strojarnice (ponton bez pregrada), bočni, uzdužni, ptičji i riblji pogled



Slika 5.24 Smična naprezanja u pramčanoj pregradi strojarnice (ponton bez pregrada)



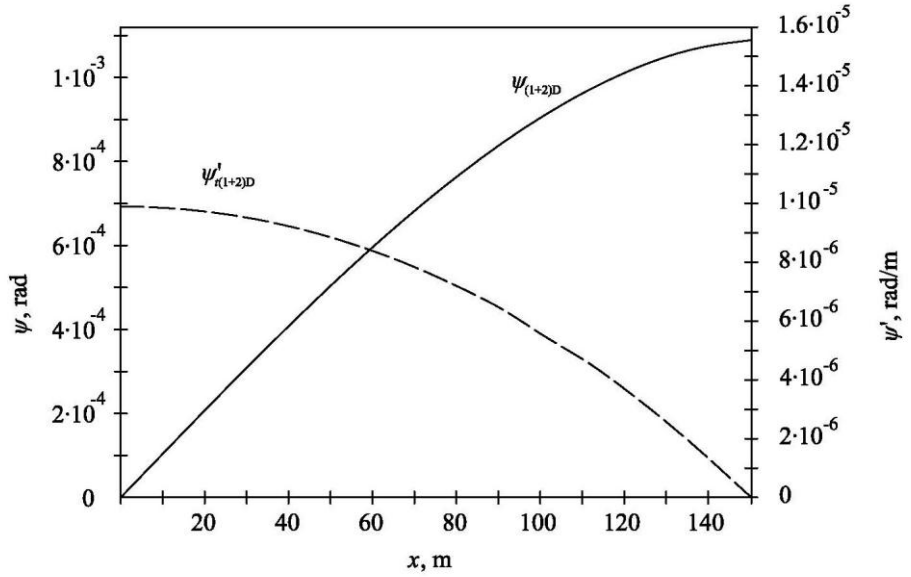
Slika 5.25 Smična naprezanja na unutarnjem rubu pramčane pregrade strojarnice (ponton bez pregrada)

Vidljivo je da je pretpostavljeni smični tok u okviru teorijskog razmatranja distorzije, Slika 5.8, sličan stvarnoj raspodijeli smičnih naprezanja na unutarnjem rubu pregrade, Slika 5.25.

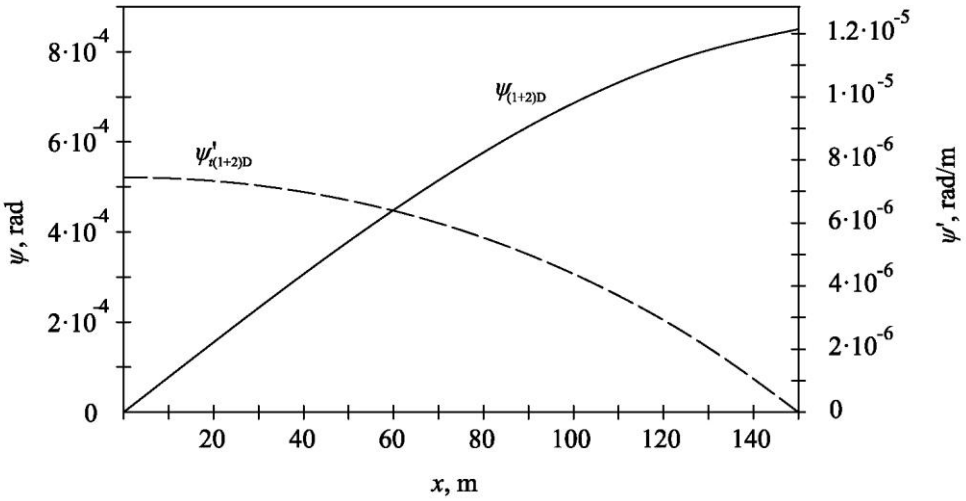
5.5.2. Analiza uvijanja prizmatičnih pontona grednim (1+2)D modelom

U prvom koraku primijenjeni su analitički izrazi za uvijanje prizmatičnog pontona duljine 300 m, opterećenog momentom uvijanja jednakim kao na 3D FEM modelu s istim rubnim uvjetima. Slika 5.26 prikazuje ukupni kut uvijanja, $\psi = \psi_t + \psi_s$, i derivaciju torzijskog doprinosa, ψ_t', koja je potrebna za određivanje vitoperenja, jednadžbe (3.143) i (3.144), za jednoliki ponton bez pregrada.

Za jednoliki ponton s pregradama, kutovi uvijanja po duljini imaju nešto nižu vrijednost, zbog doprinosa poprečnih pregrada krutosti trupa, Slika 5.27.

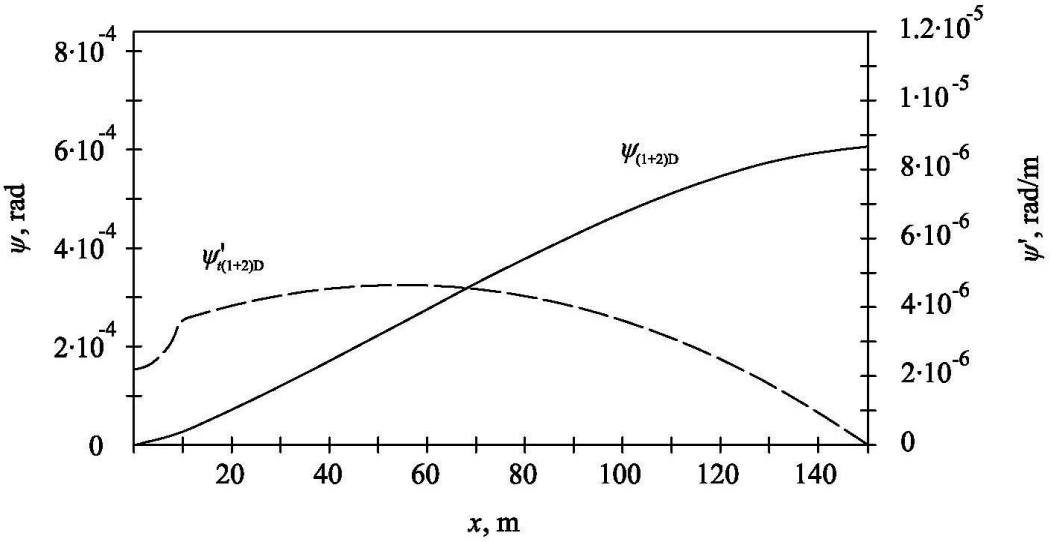


Slika 5.26 Deformacija jednolikog pontona bez pregrada

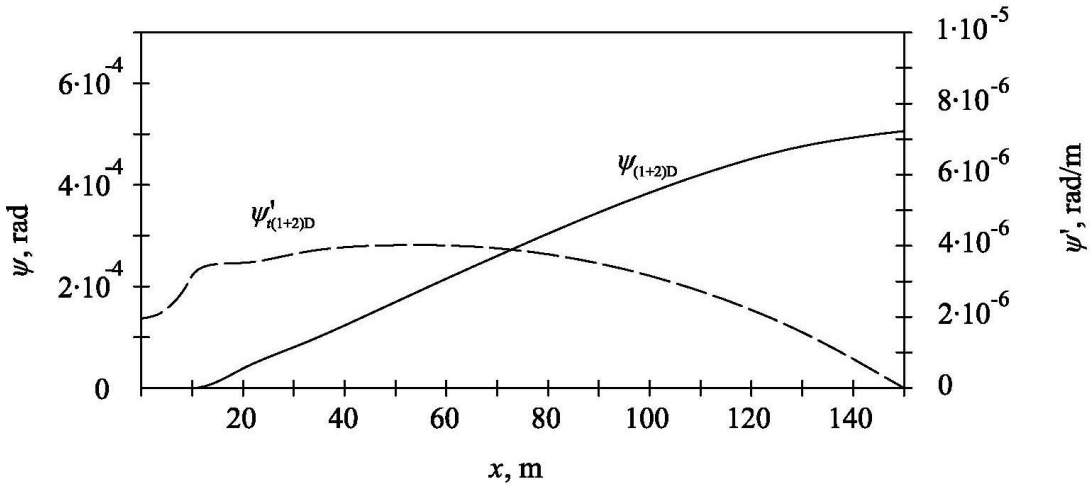


Slika 5.27 Deformacija jednolikog pontona s pregradama

Zatim je analitičko rješenje za uvijanje segmentnog nosača primijenjeno za ponton sa strojarnicom u sredini, bez pregrada i s pregradama, Slike 5.28 i 5.29, (duljina središnjeg zatvorenog dijela $2a$ = 20,2 m), s prethodno izračunatim geometrijskim značajkama presjeka, Tablica 5.1. Pretpostavljen je prvi uvjet kompatibilnosti, $\varepsilon = \eta = 1$.

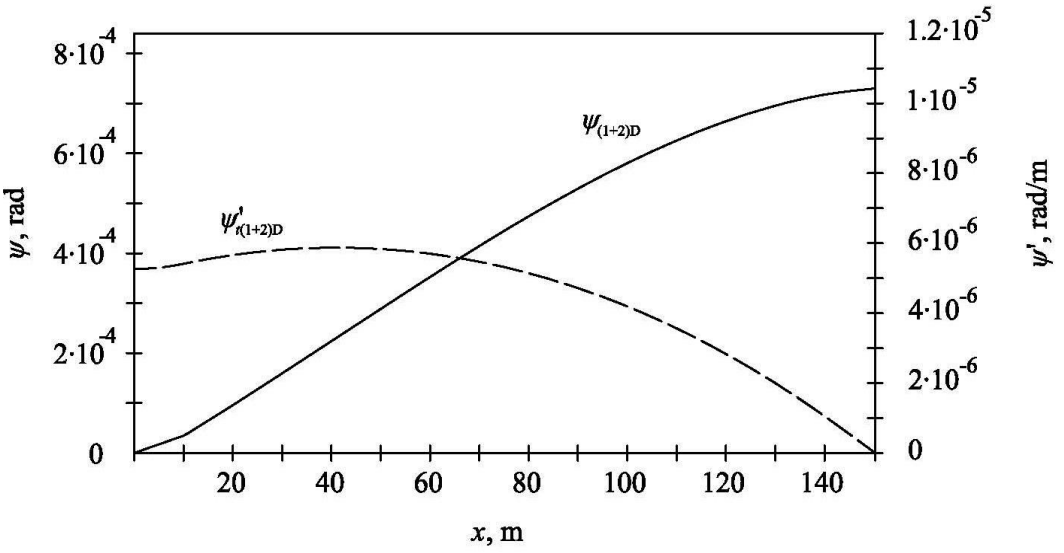


Slika 5.28 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, sa stvarnim parametrima

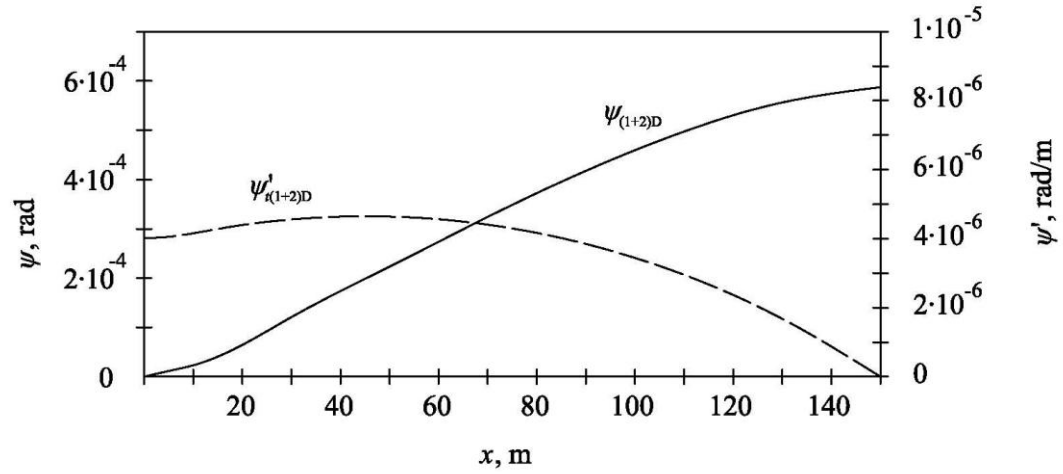


Slika 5.29 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, sa stvarnim parametrima

Isti proračun proveden je uz korekciju faktora krutosti na uvijanje zatvorenog presjeka zbog kratkoće strojarnice, kako je opisano u točki 5.3. Uzete su u obzir sljedeće vrijednosti osnovnih parametara: $a = 10{,}1$ m, $b = 19{,}17$ m, $t_1 = 0{,}01645$ m, $w_D = -221$ m^2, $w_B = 267$ m^2, $I_t^\circ = 14{,}45$ m^4, Tablica 5.1, $k = 1{,}894$, Tablica 5.2. Kao rezultat dobije se vrijednost koeficijenta $C = 22{,}42$, jednadžba (5.16), odnosno vrijednost korigiranog faktora krutosti na uvijanje $\tilde{I}_t = 338{,}4$ m^4, jednadžba (5.8). Budući da je $\tilde{I}_t = 0{,}36 I_t^*$ utjecaj kratkoće strojarnice na njenu krutost na uvijanje je evidentan.



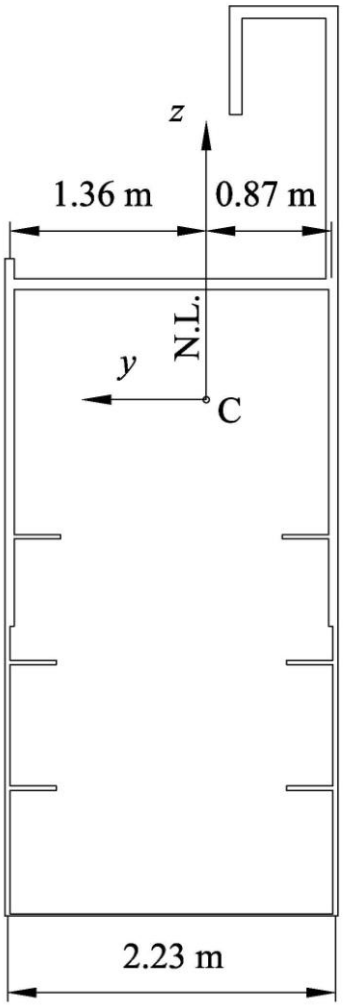
Slika 5.30 Deformacija segmentnog pontona bez pregrada, s efektivnim parametrima



Slika 5.31 Deformacija segmentnog pontona s pregradama, s efektivnim parametrima

Dobivene vrijednosti deformacija segmentnih pontona sa stvarnim, Slike 5.28 i 5.29, i efektivnim parametrima, Slike 5.30 i 5.31, primjetno se razlikuju. Tablica 5.3 prikazuje usporedbu rezultata za sva tri razmatrana slučaja, za ponton bez pregrada, dok su za ponton s pregradama rezultati dani u Tablici 5.4.

Distorzija segmentnog pontona je analizirana prema matematičkom modelu opisanom u točki 5.4., uz sljedeće ulazne podatke: $\psi_t' = 5,454 \cdot 10^{-6}$, $H' = 22,6$ m, $t_1 = 0,01645$ m, $t_{BH} = 0,01131$ m u jednadžbi (5.22); moment tromosti presjeka kutijastih nosača $I = 0,711$ m^4, Slika 5.32, krutost elastične podloge $k_e = 721$ kN/m^2. Vrijednost k_e je dobivena 3D FEM analizom za otvoreni segment pontona.



Slika 5.32 Poprečni presjek kutijastog nosača palube

Tablica 5.3 Pomaci pontona bez pregrada

	Jednoliki ponton	Segmentni ponton	
		Stvarni parametri	Efektivni parametri
$\psi(L/2)$, rad	0,0010893	0,0006066	0,0007331
$\psi_t'(0)$, rad/m	$9{,}897\cdot10^{-6}$	$2{,}202\cdot10^{-6}$	$5{,}306\cdot10^{-6}$

Tablica 5.4 Pomaci pontona s pregradama

	Jednoliki ponton	Segmentni ponton	
		Stvarni parametri	Efektivni parametri
$\psi(L/2)$, rad	0,00085025	0,0005060	0,0005875
$\psi_t'(0)$, rad/m	$7{,}447\cdot10^{-6}$	$1{,}956\cdot10^{-6}$	$4{,}159\cdot10^{-6}$

5.5.3. Usporedba rezultata

Jednoliki ponton bez pregrada – (1+2)D vs. 3D FEM

Uspoređeni su maksimalni pomaci (kut uvijanja i uzdužni pomak) dobiveni 3D FEM analizom i grednim modelom u karakterističnim točkama;

$$x = L/2: \ \frac{\psi_{(1+2)\mathrm{D}}}{\psi_{3\mathrm{D}}} = \frac{0,00108934}{0,00108192} = 1,00685,$$

$$x = 0, \text{ gornja paluba: } \frac{u_{(1+2)\mathrm{D}}}{u_{3\mathrm{D}}} = \frac{-2,18718 \text{ mm}}{-2,17655 \text{ mm}} = 1,00488,$$

$$x = 0, \text{ uzvoj: } \frac{u_{(1+2)\mathrm{D}}}{u_{3\mathrm{D}}} = \frac{2,63947 \text{ mm}}{2,59264 \text{ mm}} = 1,01806.$$

Razlike u ovom jednostavnom slučaju su unutar 2%, što je jako dobro poklapanje rezultata.

Jednoliki ponton s pregradama – (1+2)D vs. 3D FEM

$$x = L/2: \ \frac{\psi_{(1+2)\mathrm{D}}}{\psi_{3\mathrm{D}}} = \frac{0,00085025}{0,00087265} = 0,974,$$

$$x = 0, \text{ gornja paluba: } \frac{u_{(1+2)\mathrm{D}}}{u_{3\mathrm{D}}} = \frac{-1,6457 \text{ mm}}{-1,6245 \text{ mm}} = 1,0131,$$

$$x = 0, \text{ uzvoj: } \frac{u_{(1+2)\mathrm{D}}}{u_{3\mathrm{D}}} = \frac{1,986 \text{ mm}}{1,9574 \text{ mm}} = 1,0146.$$

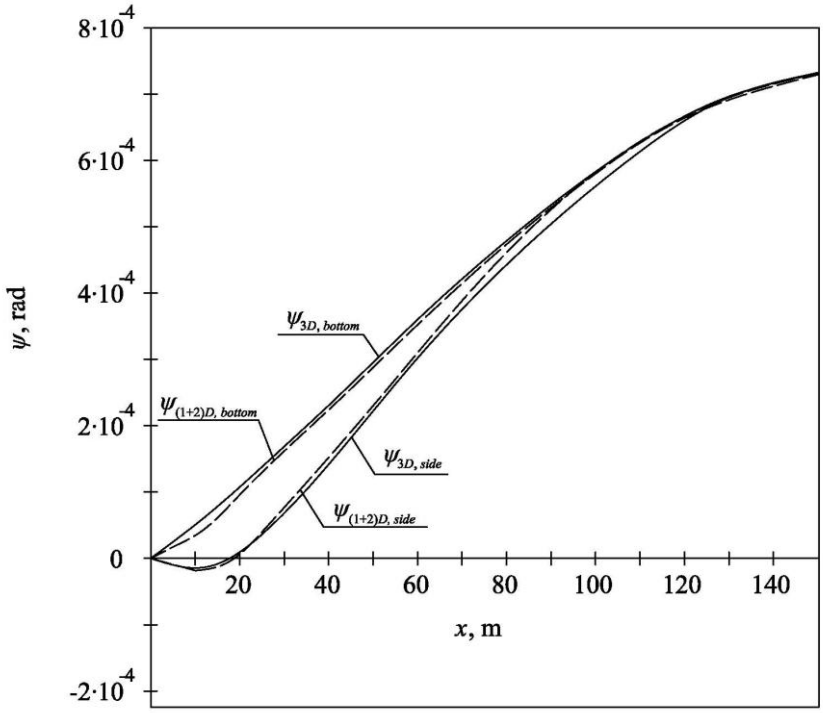
Razlike između kutova uvijanja iznose nešto manje od 3%, dok su razlike u uzdužnim pomacima oko 1,5%.

Segmentni ponton bez pregrada, efektivni parametri – (1+2)D vs. 3D FEM

Slika 5.33 prikazuje usporedbu kutova uvijanja za dno i bok segmentnog pontona bez pregrada, dobivenih analitički i 3D FEM analizom. Vidljivo je da postoje male razlike između veličina $\psi_{(1+2)D,bottom}$ i $\psi_{3D,bottom}$, koje se smanjuju do zanemarive vrijednosti na kraju pontona:

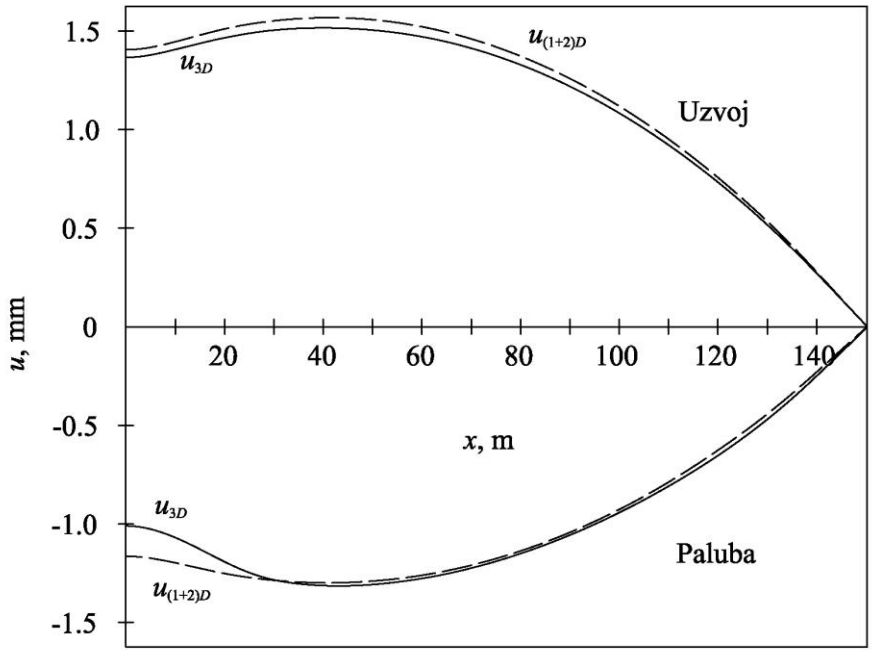
$$x = L/2: \ \frac{\psi_{(1+2)\mathrm{D,bottom}}}{\psi_{3\mathrm{D,bottom}}} = \frac{0,000733153}{0,000731985} = 1,0016.$$

Kut distorzije dobiven (1+2)D postupkom, $\delta_{(1+2)D} = \psi_{(1+2)D,side} - \psi_{(1+2)D,bottom}$, također se dobro slaže s kutom distorzije određenim FEM analizom.



Slika 5.33 Kutovi uvijanja segmentnog pontona bez pregrada

Nadalje, analizirano je vitoperenje presjeka usporedbom uzdužnih pomaka u karakterističnim točkama modela, dobivenih različitim postupcima, Slika 5.34, koji se s inženjerskog stajališta dobro poklapaju.



Slika 5.34 Uzdužni pomaci palube i dna segmentnog pontona bez pregrada

Nešto veće razlike, kao rezultat smične deformacije, vidljive su za točku na palubi u području strojarnice, koje se, kao lokalni fenomen, vrlo teško mogu obuhvatiti grednim modelom.

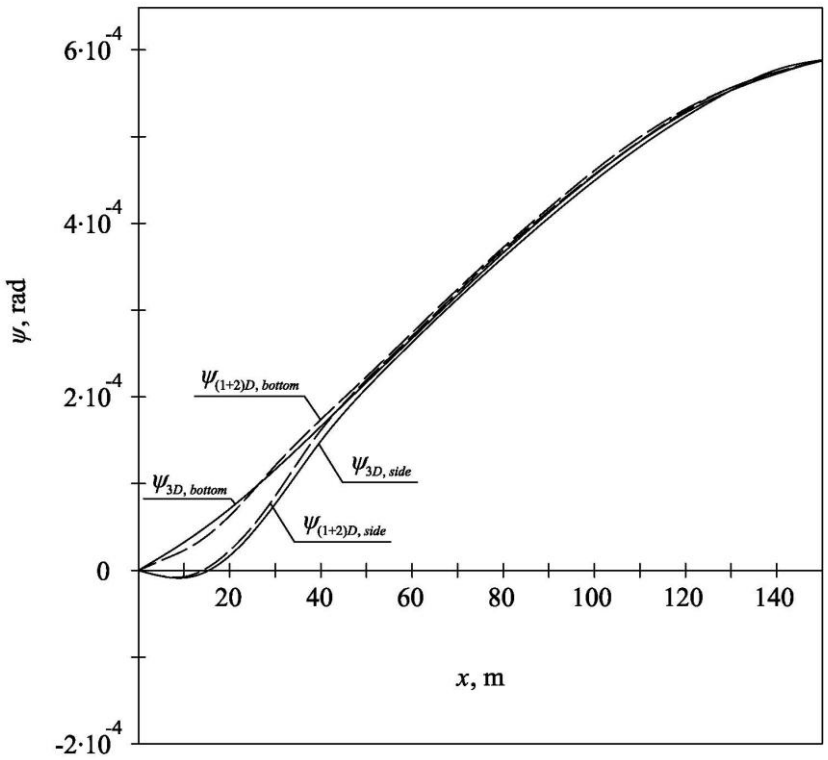
Segmentni ponton s pregradama, efektivni parametri – (1+2)D vs. 3D FEM

Slika 5.35 prikazuje usporedbu kutova uvijanja segmentnog pontona s pregradama, gdje je također vidljivo relativno dobro podudaranje između veličina $\psi_{(1+2)D,bottom}$ i $\psi_{3D,bottom}$, slično kao kod segmentnog pontona bez pregrada, Slika 5.33. Omjer kutova uvijanja na kraju pontona iznosi:

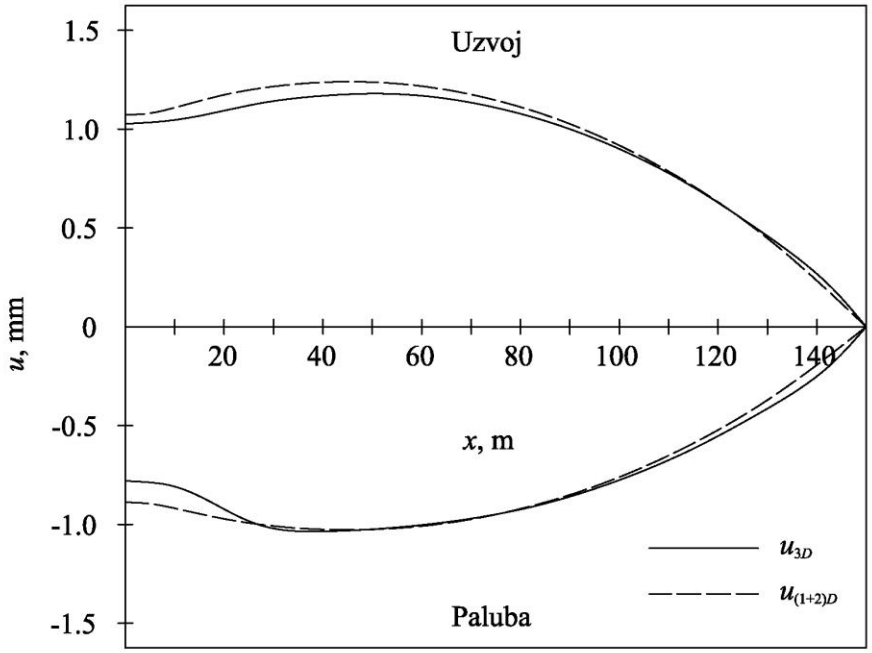
$$x = L/2: \quad \frac{\psi_{(1+2)\mathrm{D,bottom}}}{\psi_{3\mathrm{D,bottom}}} = \frac{0,000587484}{0,000588450} = 0,998.$$

Kut distorzije kod segmentnog pontona s pregradama pokazuje nešto lošije podudaranje, upravo zbog utjecaja pregrada, čija uloga i jeste spriječavanje distorzije poprečnog presjeka (distorzija se razmjerno brzo reducira). Također, poprečne pregrade predstavljaju diskontinuitete koji se inače teško obuhvaćaju grednim modelima, pa je nešto lošije podudaranje u skladu s očekivanjima.

Uzdužni pomaci pokazuju razmjerno dobro podudaranje, Slika 5.36, ali i ovdje su vidljive veće razlike za područje palube strojarnice, uslijed njene smične deformacije, koje su lokalnog karaktera.



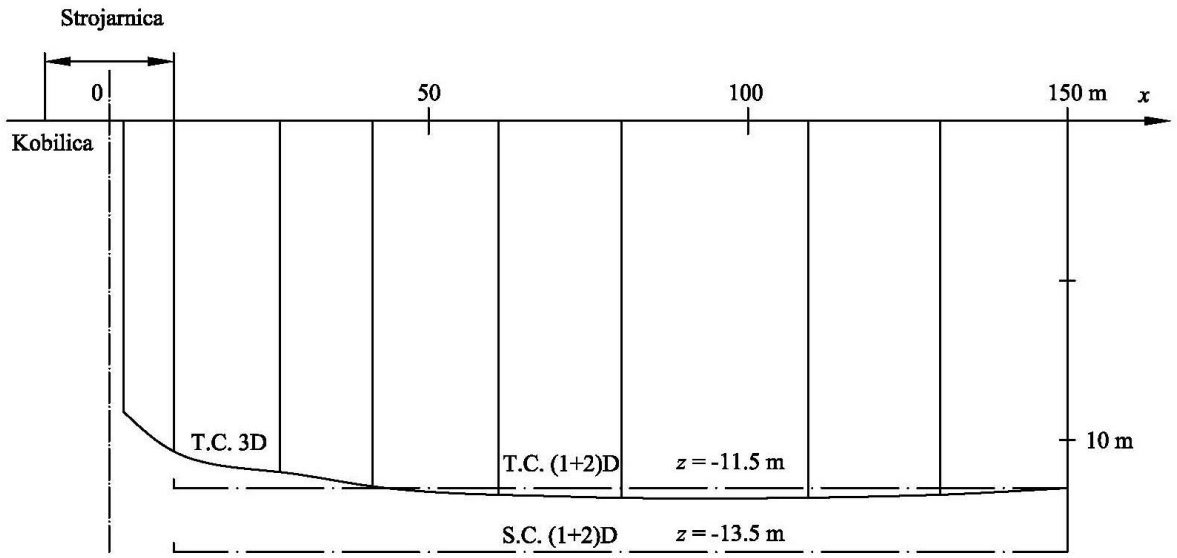
Slika 5.35 Kutovi uvijanja segmentnog pontona s pregradama



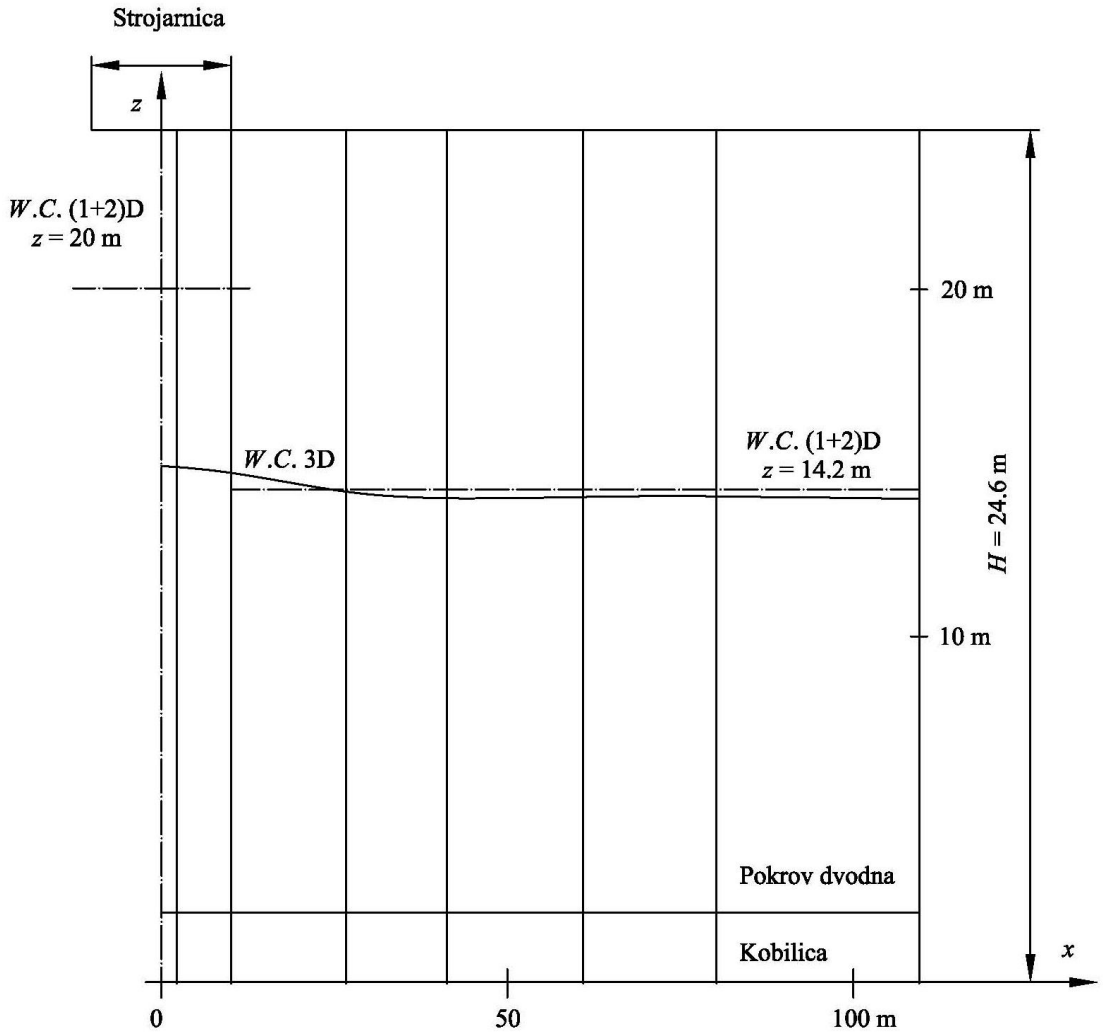
Slika 5.36 Uzdužni pomaci palube i dna segmentnog pontona s pregradama

Kako bi se stekao bolji uvid u deformaciju konstrukcije, za segmentni ponton bez pregrada, analizirana je uzdužna distribucija vertikalnog položaja centra uvijanja, Slika 5.37. Njegova vrijednost je nešto smanjena u području strojarnice, ali je i dalje daleko od centra uvijanja zatvorenog presjeka, koji bi inducirao značajno horizontalno savijanje. Drugi kriterij za prepoznavanje savijanja u torzijskom odzivu je vrijednost integrala $I_{wy} = \int_A wy\mathrm{d}A$, koja je u slučaju bez savijanja jednaka nuli. Ovisno o toj vrijednosti, centar vitoperenja (definiran kao točka na dvoboku s nultim uzdužnim pomakom) se pomiče od vrijednosti za otvoreni presjek do vrijednosti za zatvoreni, Slika 5.38. Budući da je promjena spomenute vrijednosti unutar raspona strojarnice relativno mala, može se zaključiti da je horizontalno savijanje zanemarivo. Ove činjenice potvrđuju pretpostavku da se relativno kratka strojarnica može idealizirati otvorenim presjekom s povećanom krutošću na uvijanje.

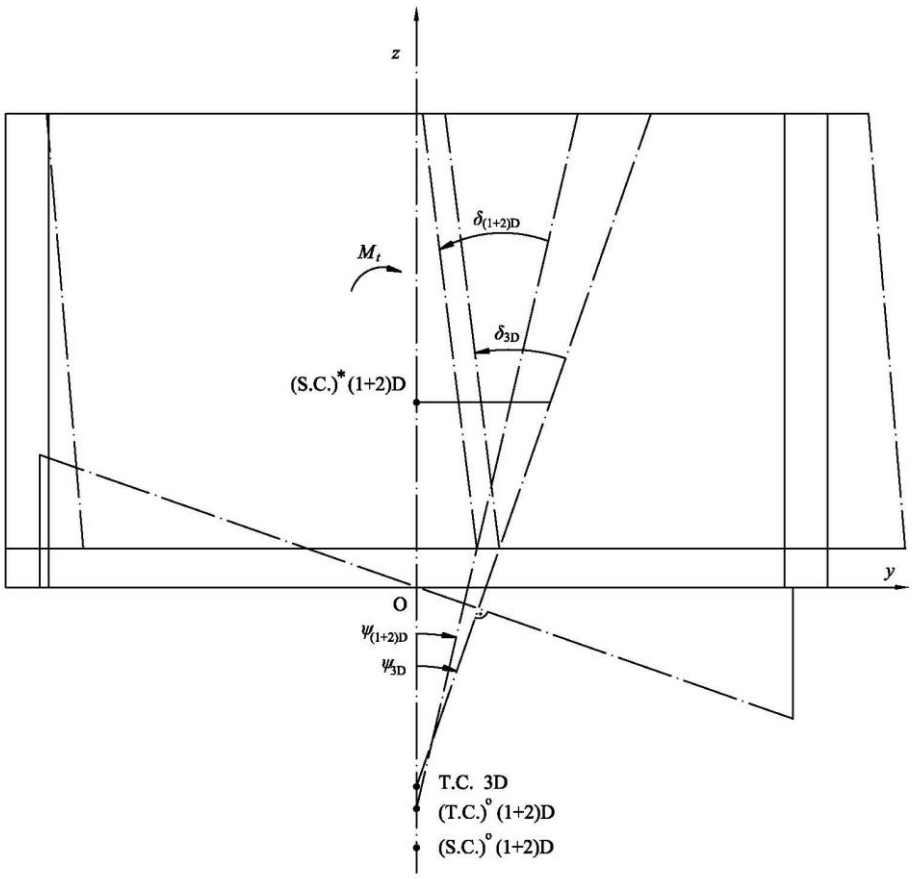
Slika 5.39 pokazuje deformaciju presjeka na spoju zatvorenog i otvorenog segmenta. Prikazani su centri uvijanja otvorenog i zatvorenog presjeka i uspoređeni s centrom vitoperenja za stvarnu 3D konstrukciju. Također, prikazani su kutovi uvijanja ψ_{3D} i $\psi_{(1+2)D}$, kao i kut distorzije δ. Potrebno je napomenuti da distorzija, koja se smanjuje s povećanjem debljine pregrade, nema veliki utjecaj na uvijanje, pa je kao sekundarna deformacija izračunata u drugom koraku, na temelju rezultata dobivenih za uvijanje.



Slika 5.37 Vertikalni položaj centra uvijanja

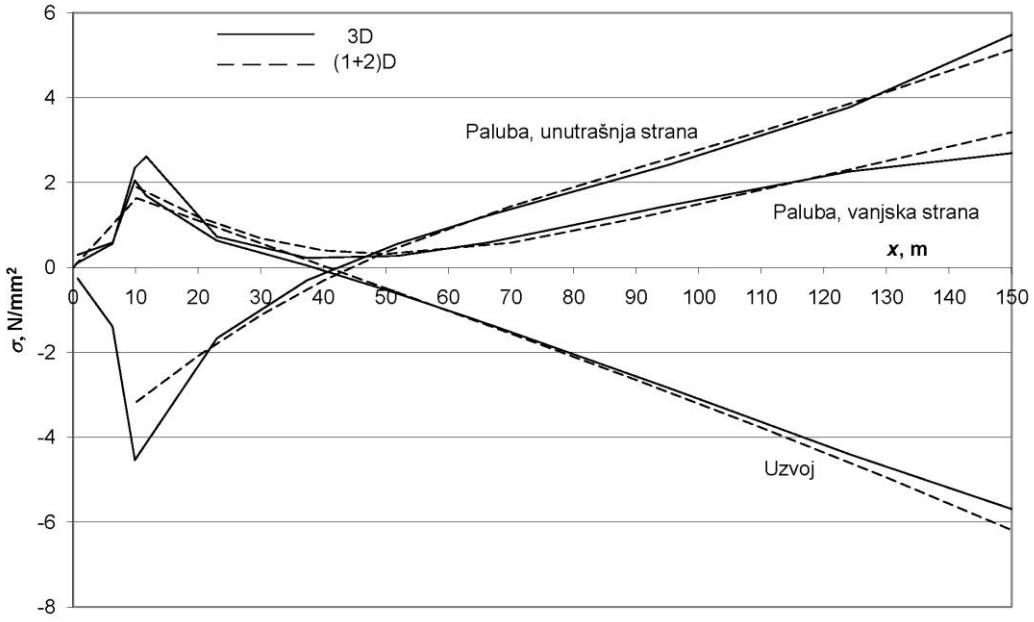


Slika 5.38 Vertikalni položaj centra vitoperenja



Slika 5.39 Kutovi uvijanja i distorzije spoja otvorenog i zatvorenog segmenta

Slika 5.40 prikazuje uzdužne distribucije aksijalnih normalnih naprezanja na unutrašnjoj i vanjskoj strani palube i na uzvoju (prednja strana, lijevo), određene (1+2)D i 3D FEM analizom.



Slika 5.40 Distribucija naprezanja na gornjoj palubi i uzvoju

Na kraju se može zaključiti da je kvalitativno podudaranje rezultata dobro, pri čemu gredni model daje nešto niže vrijednosti koncentracije naprezanja na spoju zatvorenog i otvorenog segmenta, što je u skladu s očekivanjem. Važno je istaknuti da su vršne vrijednosti naprezanja određene 3D FEM analizom izrazito ovisne o gustoći mreže, tako da klasifikacijska društva često propisuju gustoću mreže u direktnim proračunima čvrstoće brodske konstrukcije.

6. GLOBALNI HIDROELASTIČNI ODZIV KONTEJNERSKOG BRODA

6.1. Glavne izmjere i značajke analiziranog broda

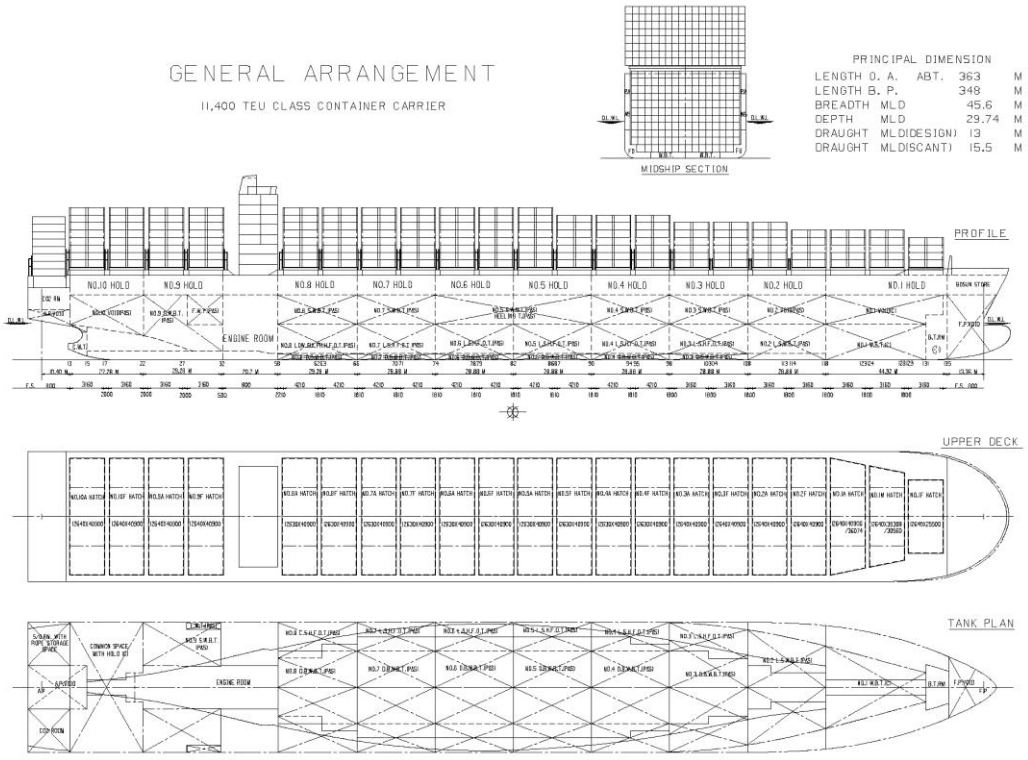
Primjena unaprijeđenog hidroelastičnog modela ilustrirana je na primjeru analize velikog kontejnerskog broda nosivosti 11400 TEU, Slika 6.1, i osnovnih dimenzija:

Duljina preko svega	$L_{oa} = 363,44$ m
Duljina između okomica	$L_{pp} = 348$ m
Širina	$B = 45,6$ m
Visina	$H = 29,74$ m
Gaz	$T = 15,5$ m,

te sljedećih značajki:

Istisnina, potpuno nakrcan brod	$\Delta_f = 171445$ t
Istisnina, brod na lakoj vodnoj liniji	$\Delta_l = 37151$ t
Snaga glavnog stroja	$P = 72240$ kW
Brzina broda u službi	$v = 24,7$ čv.

Iscrpniji prikaz podataka o brodu (nacrt glavnog rebra, nacrti poprečnih pregrada, određena stanja krcanja) raspoloživ je u [102].



Slika 6.1 Opći plan analiziranog kontejnerskog broda, nosivosti 11400 TEU

6.2. Provjera valjanosti grednog strukturnog modela

Valjanost grednog modela provjerena je usporedbom suhih prirodnih frekvencija i oblika vibriranja određenih programom DYANA (podrazumijevajući unaprijeđenu inačicu grednog strukturnog modela) i rezultata analize slobodnih vibracija 3D FEM modela broda, koja je provedena pomoću komercijalnog programskog paketa NASTRAN [49]. Zbog konciznosti rada, ovdje je naveden samo dio osnovnih podataka potrebnih za analizu, dok je cijeli postupak pripreme ulaznih podataka zajedno s postupkom provedbe proračuna prikazan u [102]. Također, iz mnoštva rezultata odabrani su samo najbitniji, vodeći računa o njihovoj reprezentativnosti.

Trup broda podijeljen je u 50 konačnih elemenata. Utjecaj pregrada na opću krutost trupa uzet je u obzir u skladu s teorijom opisanom u poglavlju 4. Značajke krutosti propusne i nepropusne pregrade prikazane su u Tablicama 6.1 i 6.2, a krutost kutijastog nosača pregrade predstavljena je u Tablici 6.3.

Tablica 6.1 Značajke krutosti propusne pregrade

Nosač	Moment tromosti I [m^4]	Krutost na uvijanje I_t [m^4]	Razmak nosača c [m]	Moment tromosti po jedinici širine i [m^3]	Krutost na uvijanje po jedinici širine i_t [m^3]
Horizontalni	0,00972	0,00486	5,184	0,001875	0,002293
Vertikalni	0,02017	0,02827	5,04	0,004002	

Tablica 6.2 Značajke krutosti nepropusne pregrade

Nosač	Moment tromosti I [m^4]	Krutost na uvijanje I_t [m^4]	Razmak nosača c [m]	Moment tromosti po jedinici širine i [m^3]	Krutost na uvijanje po jedinici širine i_t [m^3]
Horizontalni	0,0216	0,00905	5,184	0,004164	0,002843
Vertikalni	0,03094	0,02333	5,04	0,006139	

Tablica 6.3 Krutost kutije pregrade

Smična površina A_s [m^2]	Moment tromosti I_{sb} [m^4]	Krutost na uvijanje I_{st} [m^4]
0,045	0,12236	0,433

U sljedećoj tablici su navedene relativne energije deformiranja pregrada koje se sastoje od energije ortotropne ploče i energije kutije pregrade, Tablica 6.4.

Tablica 6.4 Relativna energija deformiranja pregrada

Pregrada	Ortotropna ploča $U/[E\psi']$	Kutija $U/[E\psi']$	Ukupno $U/[E\psi']$
Propusna	11,059	60,437	71,496
Nepropusna	22,248	60,437	82,885

Budući da se u skladišnim prostorima kontejnerskog broda sukcesivno izmjenjuju propusne i nepropusne pregrade, kod određivanja ekvivalentne vrijednosti faktora krutosti na uvijanje u obzir je uzeta njihova prosječna vrijednost energije.

Najprije su analizirane horizontalne vibracije podrazumijevajući konzistentnu (frekvencijski ovisnu) i nekonzistentnu (frekvencijski neovisnu) formulaciju konačnih elemenata, te utjecaj zanemarenja zakretanja masa, Tablica 6.5.

Tablica 6.5 Prirodne frekvencije horizontalnih vibracija u ovisnosti o formulaciji konačnih elemenata, f_i (Hz)

Redni broj oblika	Fizikalni oblik	Matematički oblik	$J_{bz} = 0$	Razlika, %	
	a	*b*	*c*	*b/a*-1	*c/a*-1
1	1,552	1,552	1,584	0	2,06
2	2,740	2,740	2,801	0	2,23
3	4,022	4,021	4,070	-0,02	1,19
4	5,697	5,694	5,743	-0,05	0,08
5	7,398	7,392	7,483	-0,08	1,15
6	8,451	8,444	8,766	-0,08	3,73
7	9,569	9,557	9,802	-0,13	2,43
8	11,370	11,359	11,469	-0,10	0,87
9	13,352	13,329	13,115	-0,17	-1,81
10	14,490	14,453	14,311	-0,26	-2,56

Evidentne su zanemarivo male razlike između frekvencija koje odgovaraju fizikalnim i matematičkim oblicima vibriranja, dok je utjecaj zakretanja masa na rezultate u granicama 4%, iz čega se može zaključiti da se matematički oblici određeni na temelju konačnih elemenata, koji su formulirani neovisno o frekvenciji, pouzdano mogu koristiti u hidroelastičnoj analizi. Rezultati dobiveni numerički slični su onima dobivenim energetskom metodom za prizmatični ponton, Prilog A.

3D FEM model analiziranog broda preuzet je od klasifikacijskog društva Bureau Veritas, Pariz. Sastoji se od 84076 konačnih elemenata (38288 ljuskastih i 45788 grednih), te

ima 33072 čvora s 187290 stupnjeva slobode. Distribucija mase broda zadana je prilagođavanjem gustoće za grupe konačnih elemenata, dok je masa glavnog stroja zadana koncentrirano. Za rješenje problema svojstvenih vrijednosti korištena je Lanczosova metoda.

Da bi se raspregnule horizontalne i torzijske vibracije, u svrhu detaljnije korelacije, 3D FEM model je u uzdužnoj simetralnoj ravnini ojačan skupom vertikalnih krutih greda bez mase, u čijim čvorovima je spriječena rotacija oko uzdužne osi.

Prirodne frekvencije suhih vertikalnih, horizontalnih i spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija su prikazane u Tablicama 6.6, 6.7 i 6.8.

Tablica 6.6 Prirodne frekvencije vertikalnih vibracija trupa, f_i (Hz)

Oblik br.	1D FEM	3D FEM	Razlika, %
1	1,149	1,159	-0,86
2	2,318	2,327	-0,39
3	3,695	3,654	1,12
4	5,457	5,409	0,89
5	6,913	6,605	4,66

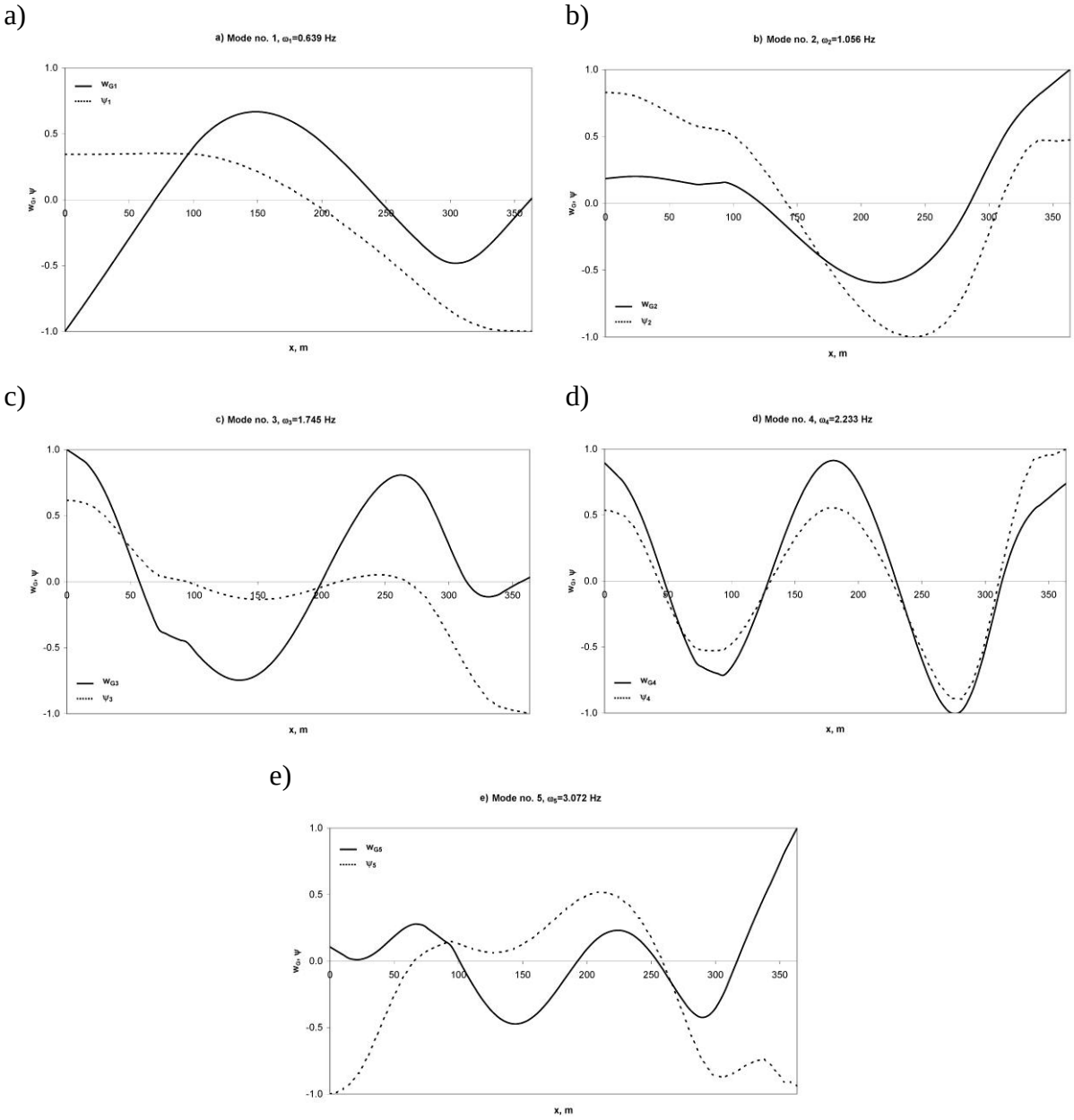
Tablica 6.7 Prirodne frekvencije horizontalnih vibracija trupa, f_i (Hz)

Oblik br.	1D FEM	3D FEM	Razlika, %
1	1,552	1,625	-4,49
2	2,740	2,787	-1,69
3	4,021	4,018	0,10
4	5,694	5,505	3,49
5	7,392	6,798	8,78

Tablica 6.8 Prirodne frekvencije spregnutih vibracija trupa, f_i (Hz)

Oblik br.	Spregnuti oblik	1D FEM	3D FEM	Razlika, %
1	T1	0,639	0,638	0,16
2	T2+H1	1,056	1,076	-1,86
3	T3+H2	1,745	1,749	-0,23
4	T4+H3	2,233	2,429	-8,07
5	T2+H5	3,072	2,630	16,81
6	T5+H4	3,350	3,519	-4,80

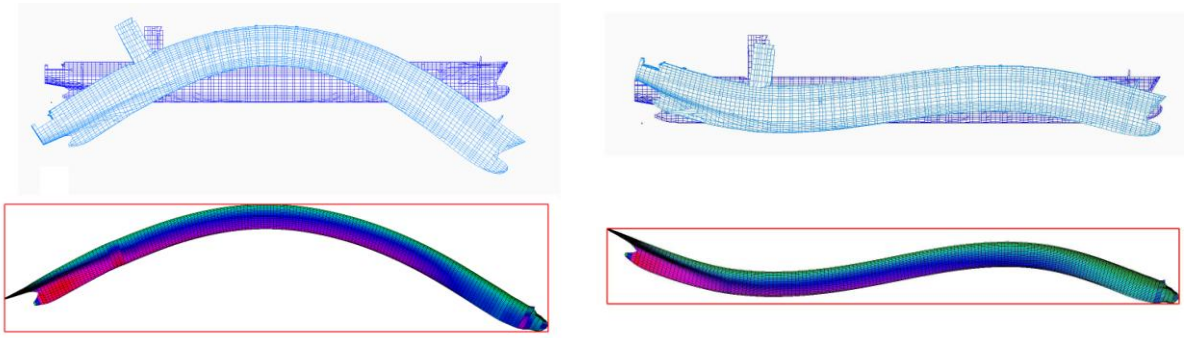
Odgovarajući oblici vibriranja vertikalnih i horizontalnih vibracija određeni grednim modelom imaju uobičajenu formu, a za spregnute vibracije prvih 5 prirodnih oblika reprezentirano je kutom uvijanja, ψ, i progibom na razini težišta, w_G, Slika 6.2. Prikazane funkcije su uzajamno ovisne, a normalizirane su na temelju vlastitih maksimalnih iznosa, radi jednostavnijeg prikaza.



Slika 6.2 Prirodni oblici spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija, 1D model

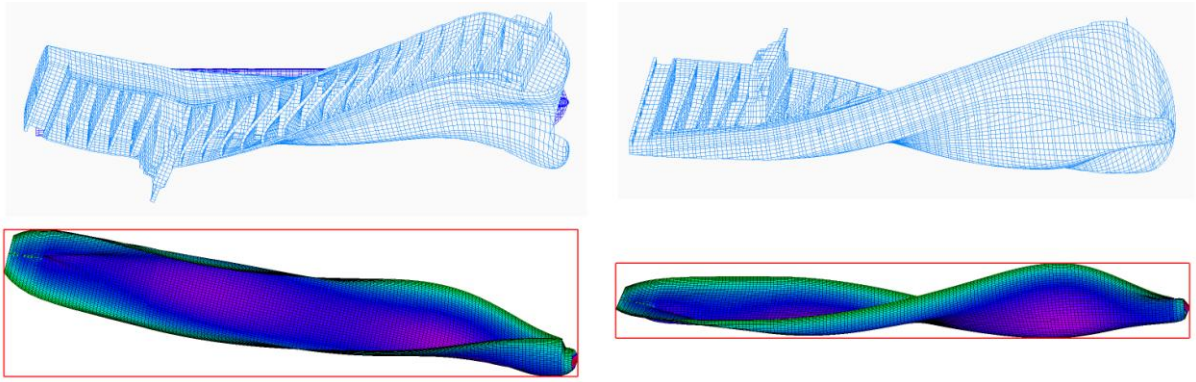
Vizualna usporedba prirodnih oblika je prikladnija ukoliko se pomaci s grednih konačnih elemenata prenesu na pomake oplakane površine pomoću tzv. funkcija raspršivanja, koje su za vertikalne i spregnute horizontalne i torzijske oblike vibriranja definirane izrazima

(2.9) i (2.12). Slika 6.3 prikazuje usporedbu prva dva oblika vertikalnih vibracija broda na lakoj vodnoj liniji (LVL).

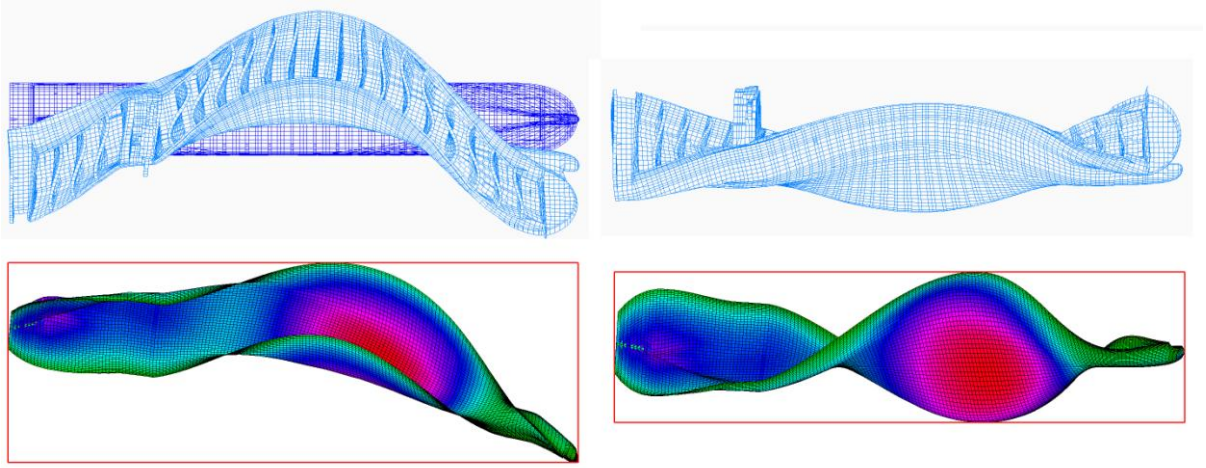


Slika 6.3 Prvi i drugi prirodni oblik vertikalnih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM

Usporedba prvog i drugog prirodnog oblika spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija prikazana je na Slikama 6.4 i 6.5 (pogled odozgo i s boka).



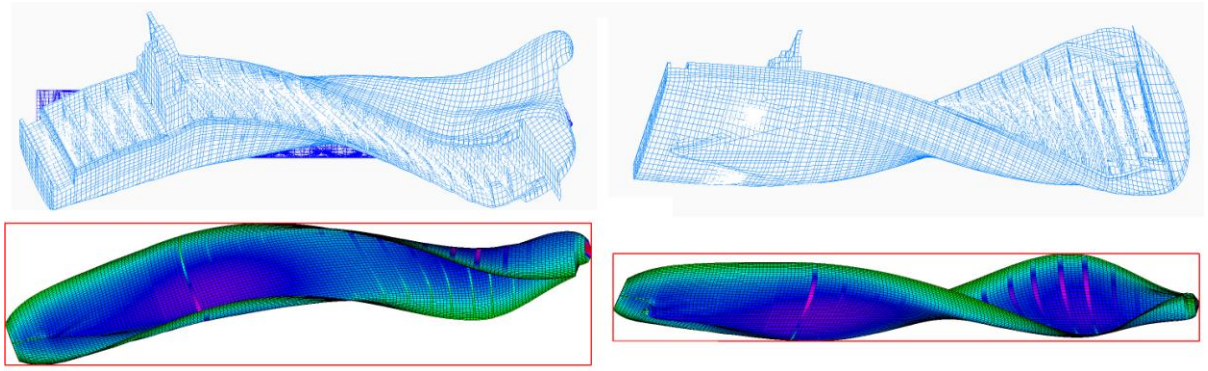
Slika 6.4 Prvi prirodni oblik spregnutih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM



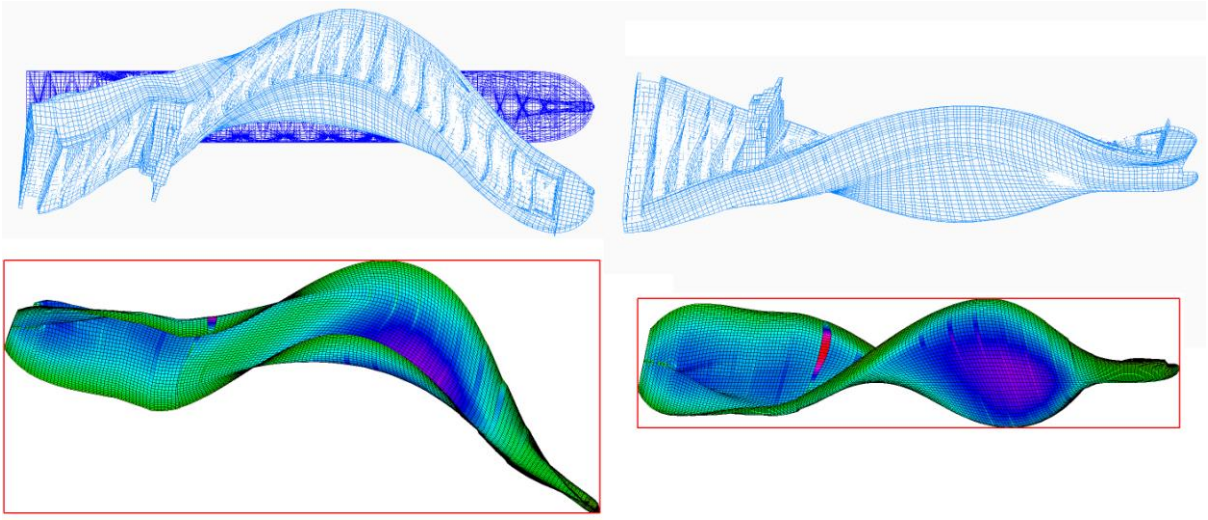
Slika 6.5 Drugi prirodni oblik spregnutih vibracija broda na LVL, 3D FEM i 1D FEM

Podudaranje većine prirodnih frekvencija određenih grednim i 3D FEM modelom je na razini 5%, što je prihvatljivo gledajući u kontekstu inženjerske prakse. Nešto veća odstupanja pojavila su se kod petih prirodnih frekvencija horizontalnih (8,78 %) i spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija (16,81%). Peti prirodni oblik spregnutih vibracija posebice je zanimljiv, jer se radi o sprezi drugog torzijskog i petog horizontalnog savojnog oblika, Slika 6.2e. Obrazloženje ovog odstupanja dano je u [77], pri čemu je istaknuto da je problem svojstvenih vrijednosti 1D modela riješen za fiksne vrijednosti parametara krutosti i inercije. Naime, ukoliko se u obzir uzmu efektivne vrijednosti parametara (u ovisnosti o obliku vibriranja), razlike u rezultatima se mogu smanjiti i valjanost 1D analize se može protegnuti do desetog prirodnog oblika. Za razmatrani peti oblik spregnutih vibracija, računanjem s efektivnim vrijednostima momenta tromosti poprečnog presjeka i smične površine, Prilog C, dobiva se podudaranje s 3D FEM rezultatima u granicama od 5% [77].

Slike 6.6 i 6.7 pokazuju dobro podudaranje prirodnih oblika vibriranja određenih 1D i 3D FEM modelima i za slučaj poptuno nakrcanog broda.



Slika 6.6 Prvi prirodni oblik spregnutih vibracija nakrcanog broda, 3D FEM i 1D FEM

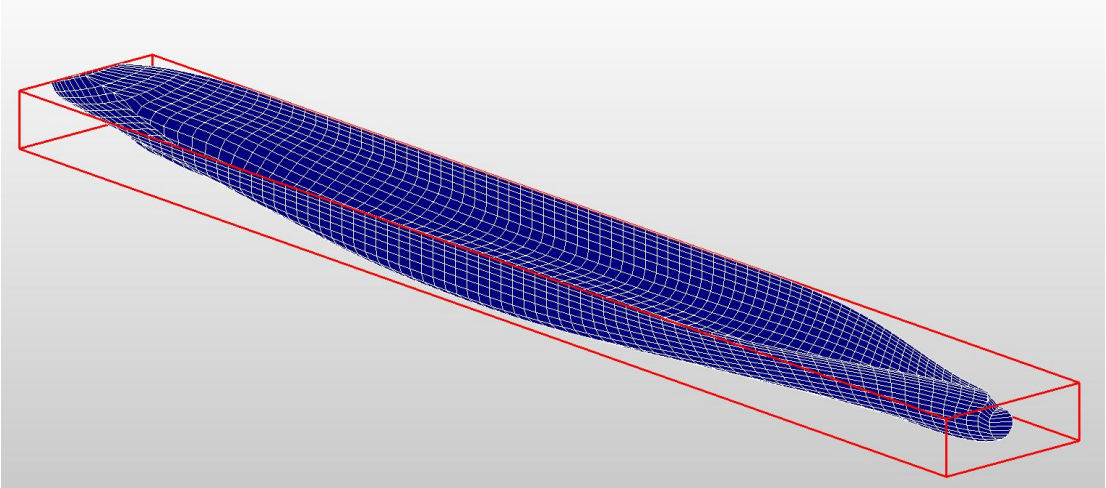


Slika 6.7 Drugi prirodni oblik spregnutih vibracija nakrcanog broda, 3D FEM i 1D FEM

Usporedba prirodnih oblika (i frekvencija) dobivenih pomoću 1D i 3D modela konačnih elemenata potvrđuje valjanost grednog modela za primjenu u analizi hidroelastičnog odziva broda na valovima.

6.3. Odziv broda

Hidroelastični odziv potpuno nakrcanog broda određen je za nekoliko brzina plovidbe i susretnih kutova, za niz poprečnih presjeka broda. Slika 6.8 prikazuje hidrodinamički model potpuno nakrcanog analiziranog kontejnerskog broda, dok su njegove suhe i mokre prirodne frekvencije (za isto stanje krcanja) dane u Tablici 6.9.

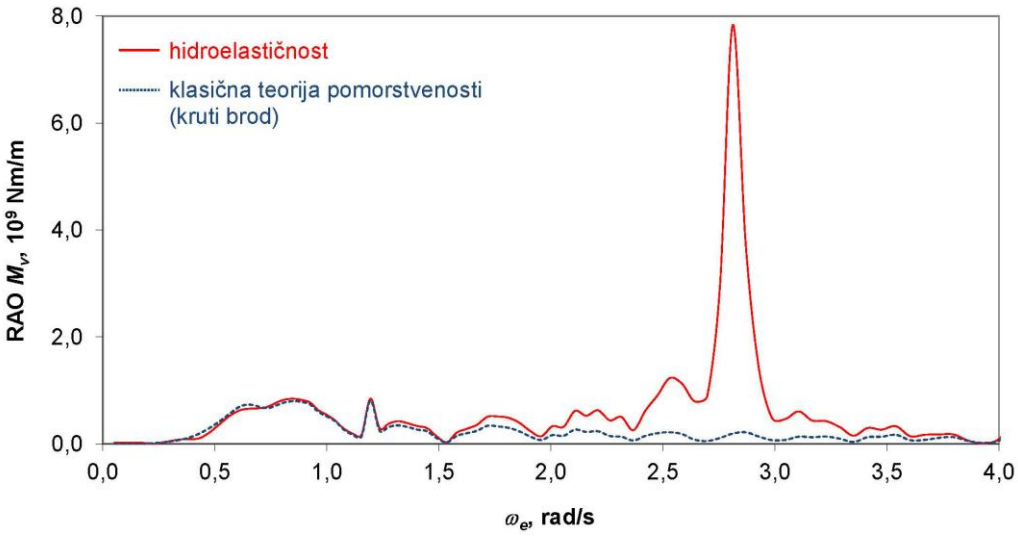


Slika 6.8 Hidrodinamički model kontejnerskog broda

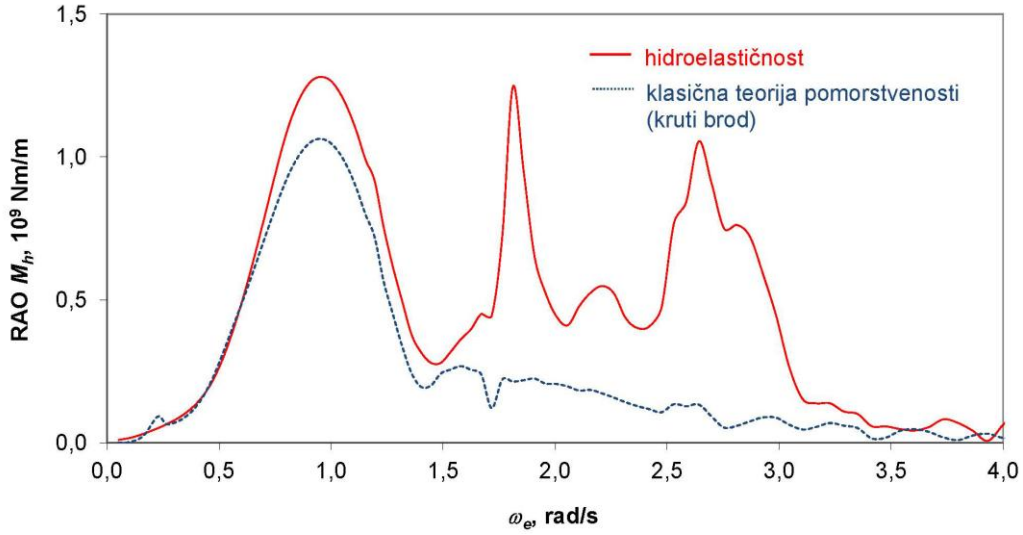
Tablica 6.9 Prirodne frekvencije nakrcanog broda, f_i (Hz)

Oblik br.	Suhe		Mokre	
	Spregnute	Vertikalne	Spregnute	Vertikalne
1	0,306	0,586	0,288	0,444
2	0,504	1,220	0,443	0,911
3	0,781	1,918	0,709	1,438

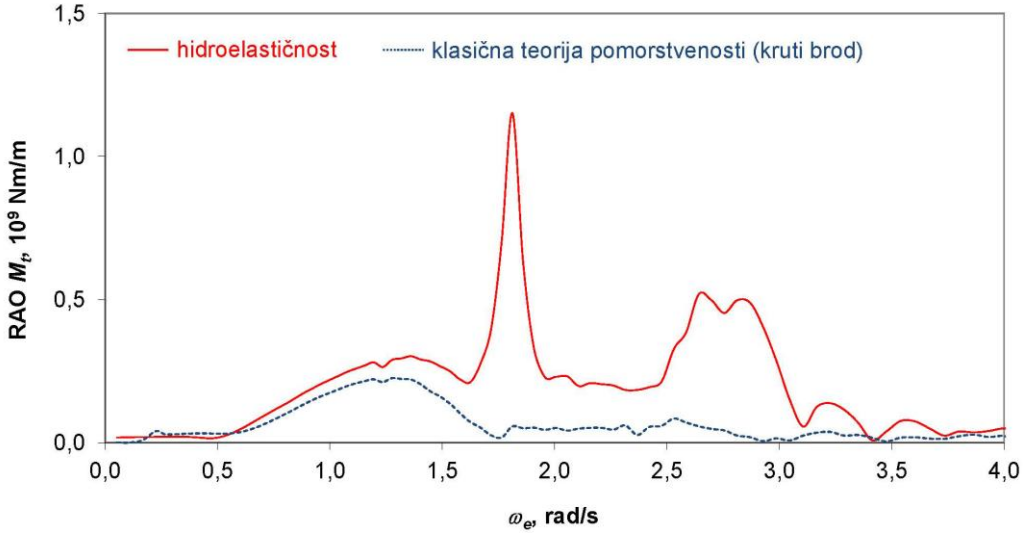
Od mnoštva raspoloživih rezultata ovdje su prikazane prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, Slika 6.9, horizontalnog momenta savijanja, Slika 6.10, i momenta uvijanja, Slika 6.11, za presjek koji se nalazi po sredini broda (x=174,65 m od krmene okomice), u ovisnosti o susretnoj frekvenciji. Susretni kut jednak je χ=120° (valovi u pramac za χ=180°), a brzina broda v=24,7 čv.



Slika 6.9 Prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, χ=120°, v=24,7 čv



Slika 6.10 Prijenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja, χ=120°, v=24,7 čv



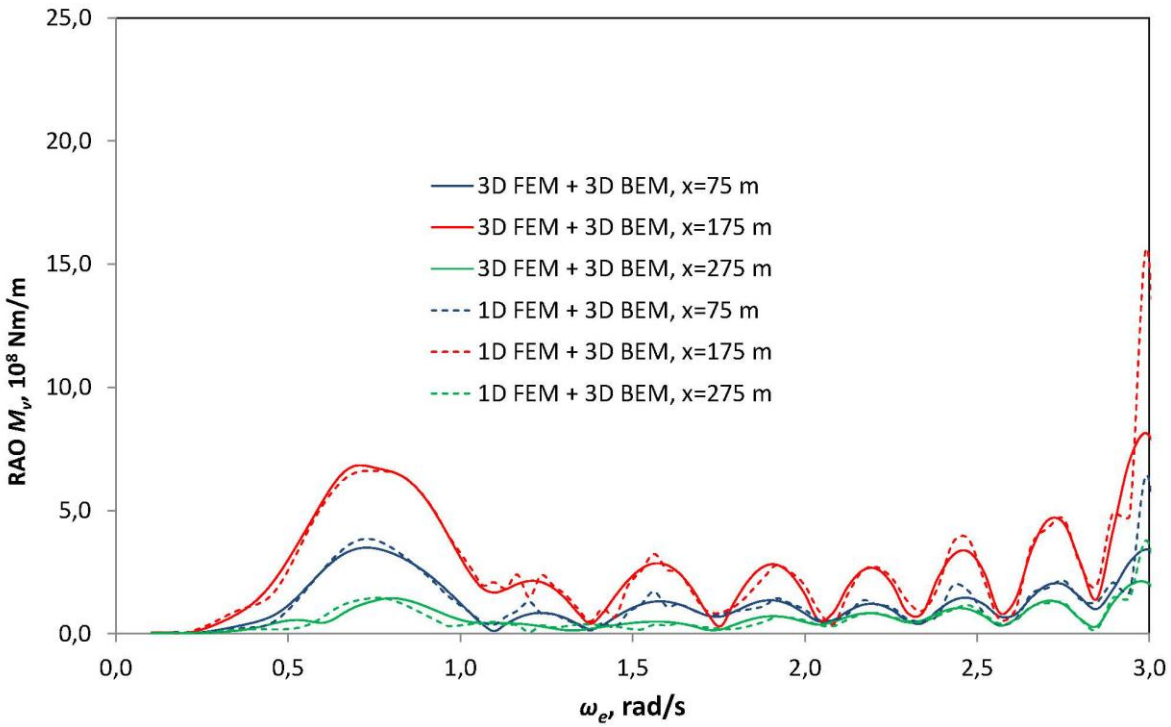
Slika 6.11 Prijenosne funkcije momenta uvijanja, χ=120°, v=24,7 čv

Na prethodnim slikama ucrtan je i odziv dobiven klasičnim proračunom pomorstvenosti, primjenom programa HYDROSTAR [58], pri čemu se izraženije razlike u odzivima pojavljuju s približavanjem pojedinim prirodnim frekvencijama elastičnih oblika vibriranja.

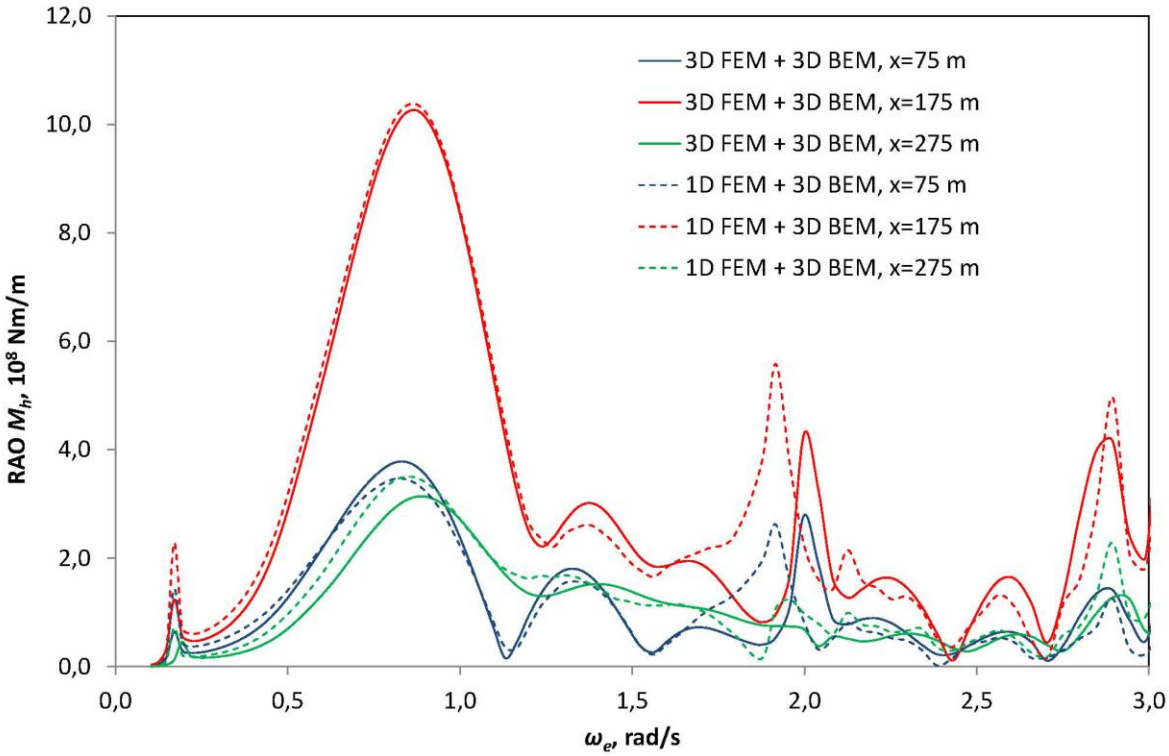
6.4. Usporedba s 3D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelom

U dosadašnjim analizama, valjanost numeričkog postupka za hidroelastičnu analizu kontejnerskih brodova, podrazumijevajući gredni strukturni model, provjeravana je usporedbom prirodnih frekvencija i oblika vibriranja broda u zraku, dobivenih 1D FEM i 3D FEM modelima [53, 54, 55, 56, 69, 70, 97, 98, 99, 100, 102].

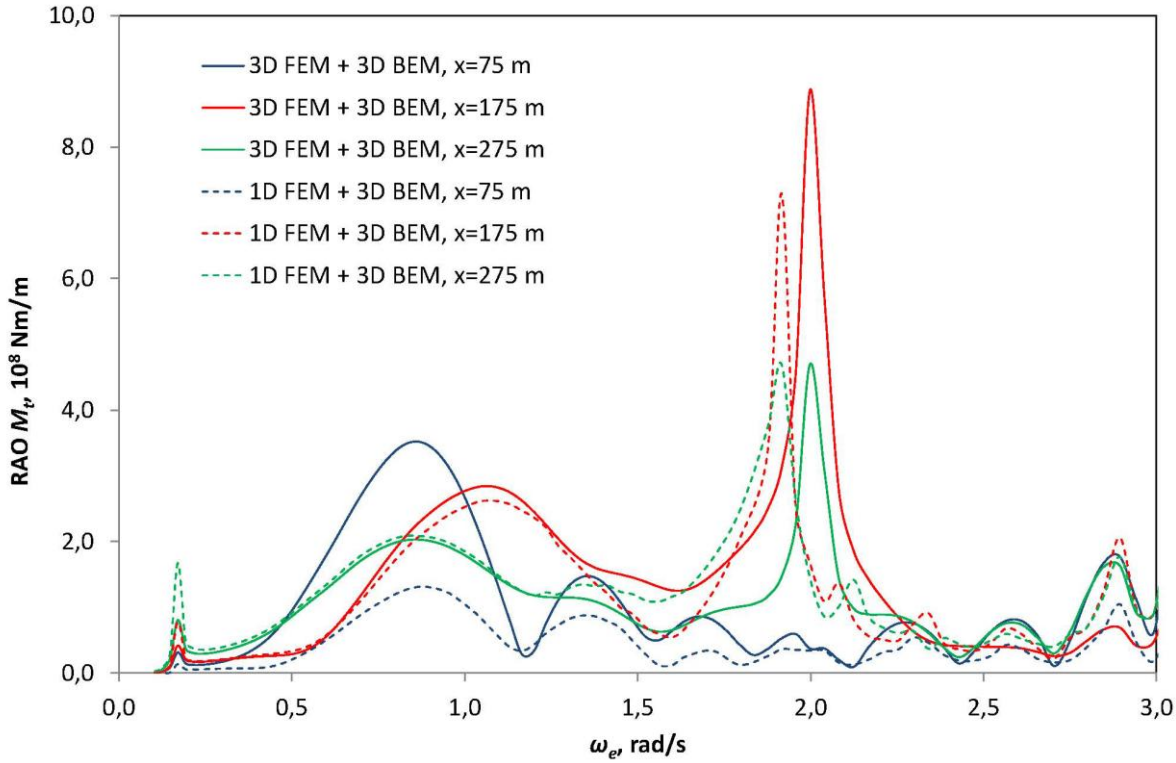
U ovom poglavlju, referentne veličine globalnog hidroelastičnog odziva, uspoređene su s rezultatima 3D FEM + 3D BEM analize, provedene u Bureau Veritasu. Proračun Bureau Veritasa odnosi se na tzv. stanje krcanja 7 (s ukupnom istisninom $\Delta = 136450$ t), iz knjige trima i stabiliteta, susretni kut χ=120°, i brzinu broda v=15,75 čv. Prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, horizontalnog momenta savijanja i momenta uvijanja za odabrane presjeke broda (ishodište koordinatnog sustava na krmenoj okomici) prikazane su na Slikama 6.12, 6.13 i 6.14.



Slika 6.12 Prijenosne funkcije vertikalnog momenta savijanja, χ=120°, v=15,75 čv



Slika 6.13 Prijenosne funkcije horizontalnog momenta savijanja, χ=120°, v=15,75 čv



Slika 6.14 Prijenosne funkcije momenta uvijanja, χ=120°, v=15,75 čv

Nešto veća odstupanja pojavljuju se kod prijenosne funkcije momenta uvijanja, Slika 6.14, za presjek x=75 m od krmene okomice, što objašnjava činjenica da se spomenuti presjek

nalazi u području strojarnice, te odgovara zatvorenom dijelu trupa, pa je moguće da uslijed utjecaja nadgrađa krutost nije na adekvatan način simulirana grednim modelom. Odstupanja u području viših frekvencija za susretne frekvencije iznad 2,8 rad/s, vezana su za hidrodinamički dio hidroelastičnog modela. Naime, u okviru panelne metode, duljina vala mora biti pokrivena s odgovarajućim brojem panela. Budući da su valovi više frekvencije kraći, broj panela je potrebno dodatno povećavati, kako bi se očuvala točnost proračuna, što drastično povećava vrijeme trajanja proračuna.

7. OCJENA UTJECAJA PRUŽENJA NA ZAMOR STRUKTURNOG DETALJA

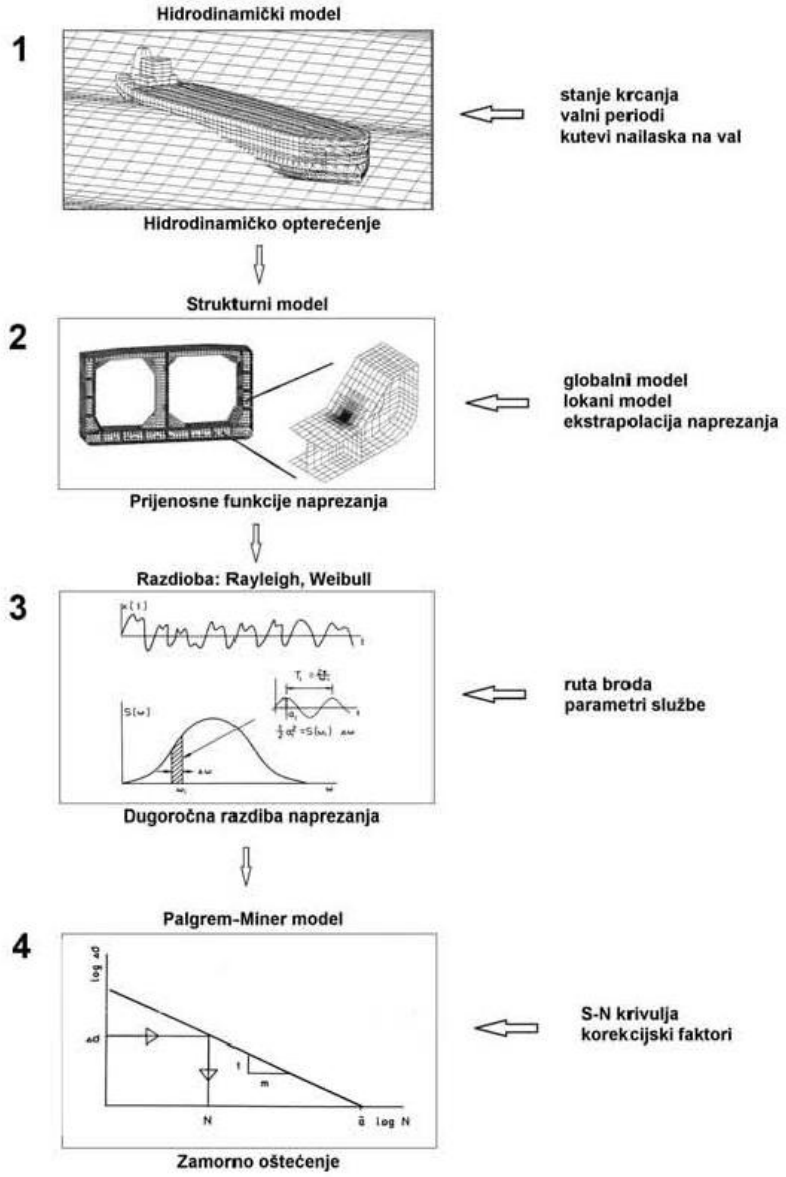
Globalni hidroelastični odziv kontejnerskog broda izračunat je u frekvencijskoj domeni, pa će se proračun zamora strukturnog detalja broda provesti spektralnom metodom. Budući da je u radu naglasak na istraživanju granica primjenjivosti grednog strukturnog modela (unaprijeđenog hidroelastičnog modela), ne razmatra se metodologija proračuna zamora, već se radi po metodologiji koja je raspoloživa u literaturi [46]. Paralelno se provodi proračun koncentracija naprezanja i njima uzrokovanog zamornog oštećenja istog strukturnog detalja, unaprijeđenim 1D FEM + 3D BEM modelom i 3D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelom, za ista stanja mora. Dakle, naglasak je na koraku spektralne analize koji obuhvaća određivanje prijenosne funkcije naprezanja i ulozi grednog modela u tom koraku.

7.1. Teorijske osnove

7.1.1. Spektralna metoda

Spektralna metoda predstavlja sofisticirani način određivanja zamornog vijeka, uz primjenu S-N krivulja, a izvorni postupak se sastoji od četiri koraka, Slika 7.1, [7]. U prvom koraku određuje se hidrodinamičko opterećenje modela za niz valnih perioda, susretnih kutova i stanja krcanja, podrazumijevajući kruti brod na valovima. Uobičajeno se koristi dvadesetak valnih perioda, petnaestak susretnih kutova i dva stanja krcanja, što čini oko 600 različitih slučajeva opterećenja, koji zahtijevaju zaseban proračun. Analiza se obavlja u frekvencijskom području panelnom metodom, a rezultat proračuna su prijenosne funkcije valnog opterećenja, inercijske sile i hidrodinamički tlak na oplakanim površinama za svaku kombinaciju parametara. Nakon hidrodinamičkog proračuna slijedi određivanje prijenosnih funkcija odziva konstrukcije, odnosno prijenosnih funkcija naprezanja u kritičnim točkama razmatranog strukturnog detalja. Za svaku kombinaciju ulaznih parametara hidrodinamičko opterećenje se prenese na strukturni model, a zatim se metodom konačnih elemenata odrede nominalna, žarišna ili zarezna naprezanja, ovisno o finoći mreže. Određivanje dugoročne razdiobe predstavlja treći korak i sastoji se od dva dijela. U prvom od njih određuje se kratkoročni spektar odziva na temelju izračunatih prijenosnih funkcija naprezanja i zadanog valnog spektra za kratkoročno stacionarno stanje mora. U drugom dijelu određuje se

dugoročna razdioba naprezanja na temelju vjerojatnosti pojave svakog od kratkoročnih stanja mora, te vjerojatnosti stanja krcanja i brzine broda za svakog od njih.

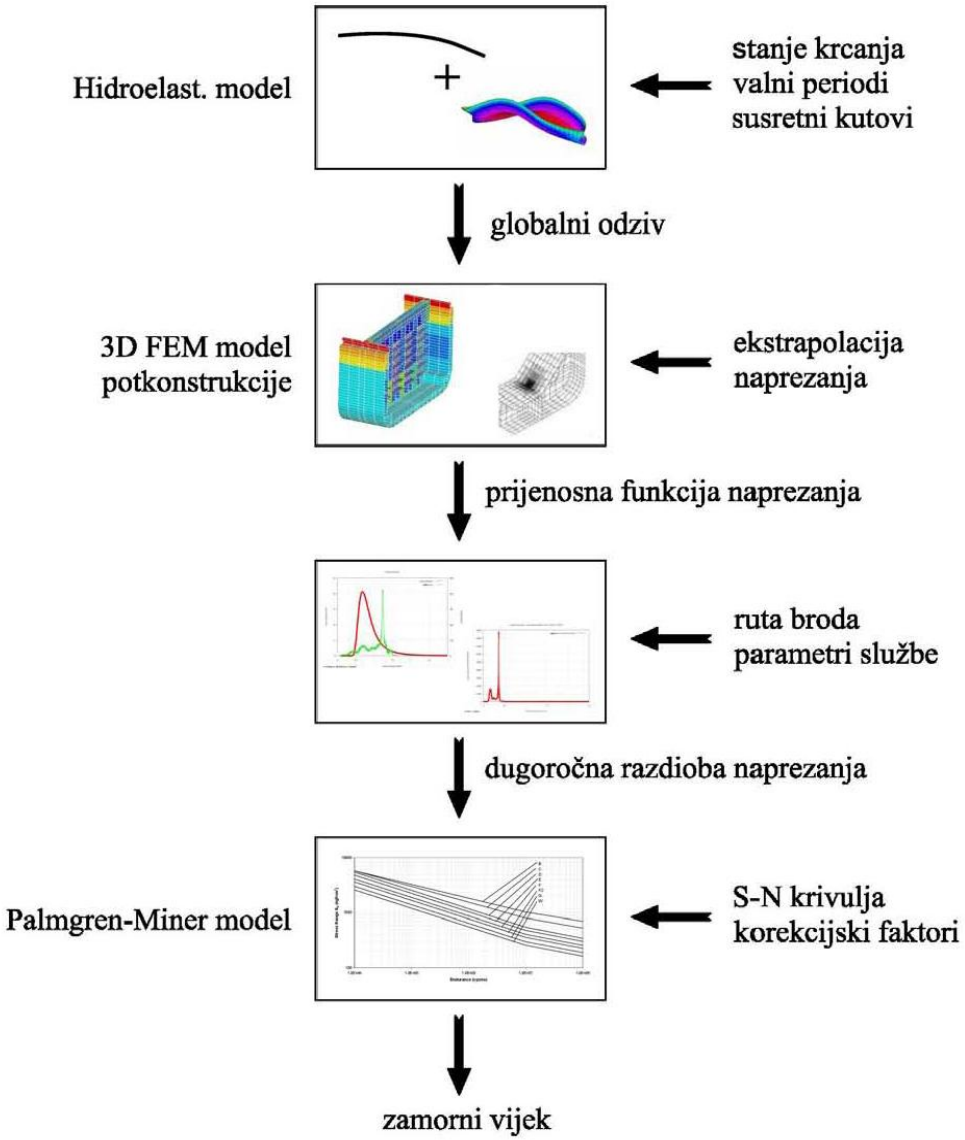


Slika 7.1 Izvorni postupak spektralne analize [7]

Četvrti korak spektralne analize započinje aproksimacijom izračunate dugoročne razdiobe naprezanja dvoparametarskom Weibullovom razdiobom naprezanja, na temelju koje se računa kumulativno zamorno oštećenje, u kombinaciji s Palmgren-Minerovom formulom. U lit. [7] su detaljno prikazani pojedini koraci opisanog postupka, kao i niz problema s kojima se analitičar može susresti; problem odabira veličine panela, kompatibilnost hidrodinamičkog i strukturnog modela, ograničenja linearne teorije harmonijskih valova, problem odabira rubnih uvjeta na strukturnom modelu, određivanje žarišnih naprezanja, ekstrapolacija naprezanja,

utjecaj topologije konačnih elemenata na koncentraciju naprezanja, odabir S-N krivulje, dugotrajnost proračuna itd.

Veliki kontejnerski brodovi podvrgnuti su kombinaciji dinamičkog odziva i kvazistatičkog valnog odziva, pa je za ocjenu zamora prethodno opisani postupak potrebno modificirati, Slika 7.2. Potrebno je napomenuti da postupak ne uzima u obzir podrhtavanje broda, koje se u proračunu ukupnog zamornog oštećenja ne smije zanemariti.



Slika 7.2 Spektralna analiza na osnovi hidroelastičnog modela

Za određivanje hidrodinamičkog opterećenja kontejnerskih brodova, umjesto hidrodinamičkog modela koji podrazumijeva kruti brod na valovima, Slika 7.1, koristi se hidroelastični model, Slika 7.2, pri čemu se uobičajeno koristi 3D strukturni model (u ovom slučaju istražuju se mogućnosti FSB-BV hidroelastičnog modela pa je zato na slici prikazan

gredni model) spregnut s 3D hidrodinamičkim modelom, opisanim u poglavlju 2. Odzivi (pomaci) dobiveni globalnim hidroelastičnim modelom predstavljaju opterećenja (rubne uvjete) 3D FEM modela potkonstrukcije, na kojem su dijelovi od primarnog interesa modelirani finom mrežom konačnih elemenata, te se odrede prijenosne funkcije naprezanja. Slijedi određivanje kratkoročnog spektra odziva množenjem kvadrata prijenosne funkcije naprezanja sa spektrom valova, te određivanje dugoročne razdiobe naprezanja, pomoću koje je moguće odrediti akumulirano zamorno oštećenje.

U ovom radu, za proračun akumuliranog zamornog oštećenja, korišten je program FATA [103]. U osnovne ulazne parametre, između ostalog, spada definicija amplitudnog operatora naprezanja (RAO) u ovisnosti o valnoj frekvenciji. Nakon što se odredi RAO naprezanja, postupak je automatiziran i sastoji se od nekoliko koraka koji su pobliže objašnjeni na temelju lit. [46].

7.1.2. Dugoročna razdioba naprezanja

Kratkoročni spektar odziva (naprezanja) dobiva se kao umnožak prijenosne funkcije naprezanja i spektra valova:

$$S_\sigma(\omega) = \mathrm{RAO}_\sigma^2(\omega) \cdot S_w(\omega). \tag{7.1}$$

gdje je ω valna frekvencija.

Općenito, spektar odziva može biti iskazan u ovisnosti o susretnoj ili valnoj frekvenciji, što nema utjecaja na izračunati značajni odziv već samo na oblik funkcije u dijagramu odziva (površina ispod krivulje je u oba slučaja ista, ostali spektralni momenti se mijenjaju).

Za duge, razvijene oceanske valove obično se koristi Pierson-Moskowitz dvoparametarski valni spektar:

$$S_w(\omega | H_s, T_Z) = \alpha g^2 \omega^{-5} e^{-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^{-4}}, \tag{7.2}$$

gdje su H_s i T_Z značajna valna visina i nulti valni period.

Iz spektra naprezanja mogu se izračunati spektralni momenti, a nadalje i neki statistički parametri odziva; standardna devijacija ili korijen srednje vrijednosti kvadrata odstupanja (eng. *RMS – Root Mean Square*), vršni period, T_p, nulti valni period, T_Z, itd. Raspon naprezanja izračuna se kao dvostruka vrijednost amplitude naprezanja. Spektralni momenti definirani su jednadžbom:

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S_\sigma(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{7.3}$$

Prema lit. [104] srednji valni period i nulti valni period, računaju se iz statističkih momenata sljedećim izrazima:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{m_4}}, \tag{7.4}$$

$$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{m_2}}. \tag{7.5}$$

Kratkoročni odziv odgovara periodu jednog stanja mora (obično 3 sata), za koje se može pretpostaviti svojstvo stacionarnosti.

Dugoročna razdioba raspona naprezanja, prema [46], odredi se, uzimajući u obzir 200 razreda raspona naprezanja, te podrazumijevajući uskopojasan proces naprezanja čije vrijednosti za određeno stanje mora slijede Rayleighovu razdiobu

$$p(X) = \exp\left(\frac{-X^2}{8m_0}\right). \tag{7.6}$$

Broj ciklusa izračuna se za svaki razred u dugoročnoj razdiobi, uzimajući u obzir doprinos pojedinačnog stanja mora. U osnovi radi se o brojanju premašivanja razine odziva *X*, po svim stanjima mora tijekom referentnog perioda D_{REF}:

$$n_{ex}(X) = \sum_1^{N_{SS}} n_{SS} \cdot p_{SS}(X), \tag{7.7}$$

gdje je:

$n_{ex}(X)$ - očekivani broj premašivanja razine odziva *X*, tijekom referentnog perioda D_{REF} (trajanje službe broda),

N_{SS} - broj stanja mora,

$p_{SS}(X)$ - vjerojatnost premašivanja razine odziva *X*, za pojedinačno stanje mora *SS*,

n_{ss} - broj ciklusa odziva za pojedinačno stanje mora *SS* definirano kao $\frac{(\alpha_0 \cdot D_{REF} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600)}{T_Z} \cdot p(SS)$, gdje je *p*(*SS*) vjerojatnost pojavljivanja pojedinačnog stanja mora u ukupnom broju stanja mora definiranom raspršnim dijagramom, a α_0 je tzv. faktor plovidbe koji uzima u obzir vrijeme plovidbe na otvorenom moru.

7.1.3. Određivanje zamornog oštećenja uporabom S-N krivulja

Zamorno oštećenje se uobičajeno računa Palmgren-Minerovom formulom, koja pretpostavlja njegovu linearnu akumulaciju:

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i}, \tag{7.8}$$

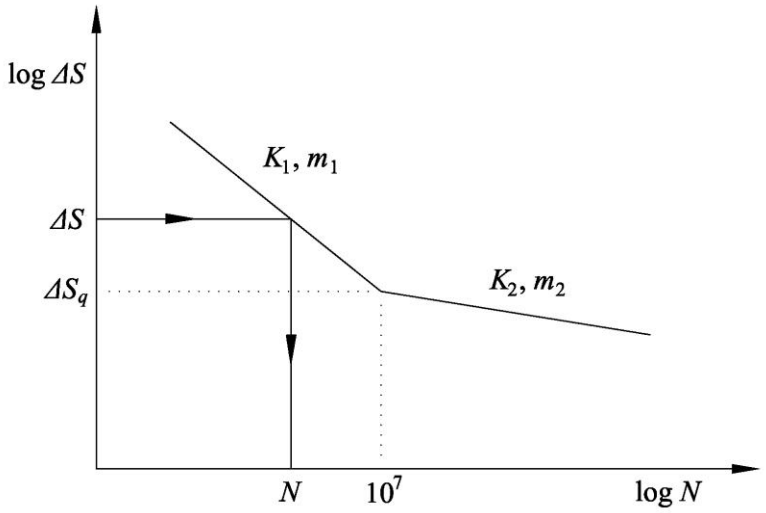
gdje je:

k - broj referentnih vrijednosti naprezanja,

n_i - broj ciklusa naprezanja za konstantni raspon naprezanja, ΔS_i,

N_i - broj ciklusa naprezanja koji uzrokuje lom detalja pri ΔS_i.

Palmgren-Minerovo pravilo podrazumijeva da lom materijala nastupa kada ukupno zamorno oštećenje dosegne jediničnu vrijednost. Slika 7.3 prikazuje određivanje broja ciklusa do loma za određeni raspon naprezanja pomoću S-N krivulje,



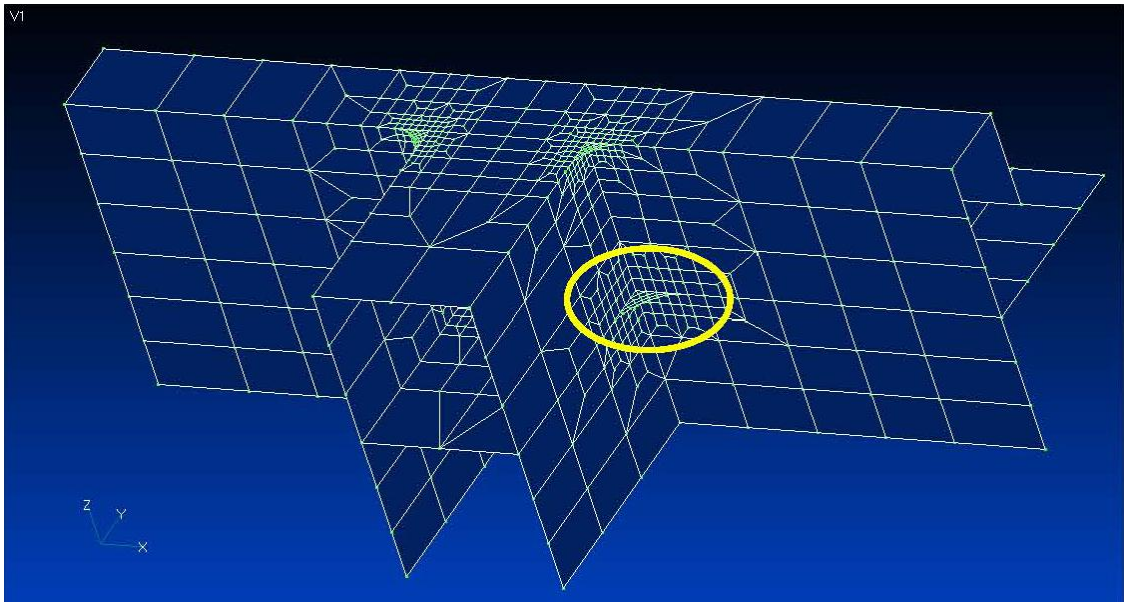
Slika 7.3 Shematski prikaz korištenja S-N krivulje

pri čemu vrijedi $\Delta S^{m_i} N = K_i$, gdje su K_1 i K_2 koeficijenti prvog i drugog segmenta S-N krivulje, a m_1 i m_2 inverzni nagibi prvog, odnosno drugog segmenta S-N krivulje. ΔS_q predstavlja raspon naprezanja na promjeni nagiba, pri $N = 10^7$.

7.2. Analiza zamora hidroelastičnim 3D FEM + 3D BEM modelom

3D FEM + 3D BEM hidroelastični proračun kojim su određene prijenosne funkcije naprezanja razmatranih strukturnih detalja, proveden je u klasifikacijskom društvu Bureau

Veritas. Razmatrani strukturni detalj je koljeno na spoju dvoboka i poprečne pregrade u razini glavne palube, na sredini broda, Slika 7.4. Inače, proračun zamornog oštećenja istog strukturnog detalja, proveden je u Bureau Veritasu prije nekoliko godina, za maksimalnu brzinu broda. Osnovni opis proračuna s rezultatima i zaključcima objavljen je u članku [46], dok je nešto detaljniji opis metodologije uz širi pregled istih rezultata, prikazan u internom izvještaju [105]. Nakon toga su napravljena određena poboljšanja korištenog programskog paketa i modela, tako da rezultati u navedenim referencijama nisu direktno usporedivi s novim rezultatima BV-a i proračuna grednim modelom u ovom radu. Nadalje, dobiveni rezultati su u lit. [46, 105], u cilju verifikacije predložene metodologije, uspoređeni s rezultatima dobivenim tzv. „metodom brojanja ciklusa“ (eng. *Rainflow counting method*), koja je općenito prihvaćena kao najtočnija metoda, ali ima neke druge nedostatke, od kojih se ističe vremenska zahtjevnost. Utvrđeno je iznimno dobro podudaranje za kraće valne periode (gdje je pretpostavka uskopojasnog spektra bliža realnosti), dok s povećanjem parametra širine pojasa, ε (ε =0 za uskopojasne, a ε =1 za širokopojasne procese) razlike postaju značajnije. Podrijetlo i važnost spomenutih razlika detaljno su raspravljeni u lit. [46, 105]. U svakom slučaju, važno je istaknuti da spektralni postupak redovito daje nešto veće vrijednosti akumuliranog oštećenja u odnosu na metodu brojanja ciklusa.

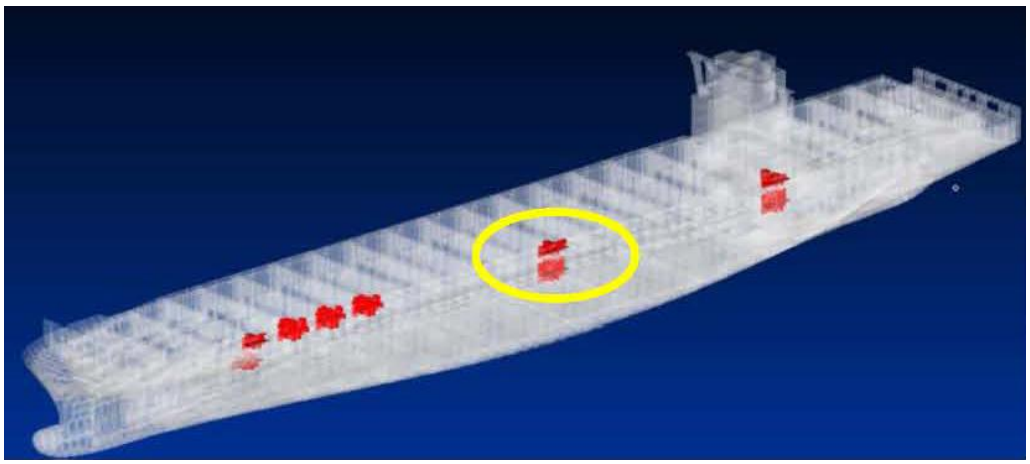


Slika 7.4 Razmatrani strukturni detalj kontejnerskog broda

Budući da je od primarnog interesa usporedba grednog i 3D FEM modela u kontekstu proračuna prijenosnih funkcija koncentracija naprezanja, radi jednostavnosti, odabrana su stanja mora kao za proračun prikazan u [105] (iako ne moraju imati

reprezentativan karakter u smislu proračuna akumuliranog zamornog oštećenja kao projektnog kriterija), definirana značajnom valnom visinom i valnim periodom:

- $H_s = 2$ m; $T_Z = 3{,}5$ s
- $H_s = 3$ m; $T_Z = 4{,}5$ s
- $H_s = 5$ m; $T_Z = 6{,}5$ s
- $H_s = 5$ m; $T_Z = 10{,}5$ s



Slika 7.5 Položaj razmatranog strukturnog detalja na brodu

Proračuni su provedeni za susretni kut broda i valova jednak χ=120° (valovi u pramac za χ=180°), za koji se pretpostavlja da je utjecaj pruženja dominantan, i brzinu broda v=15,75 čv.

Kao spektar energije mora uzet je Pierson-Moskowitz valni spektar.

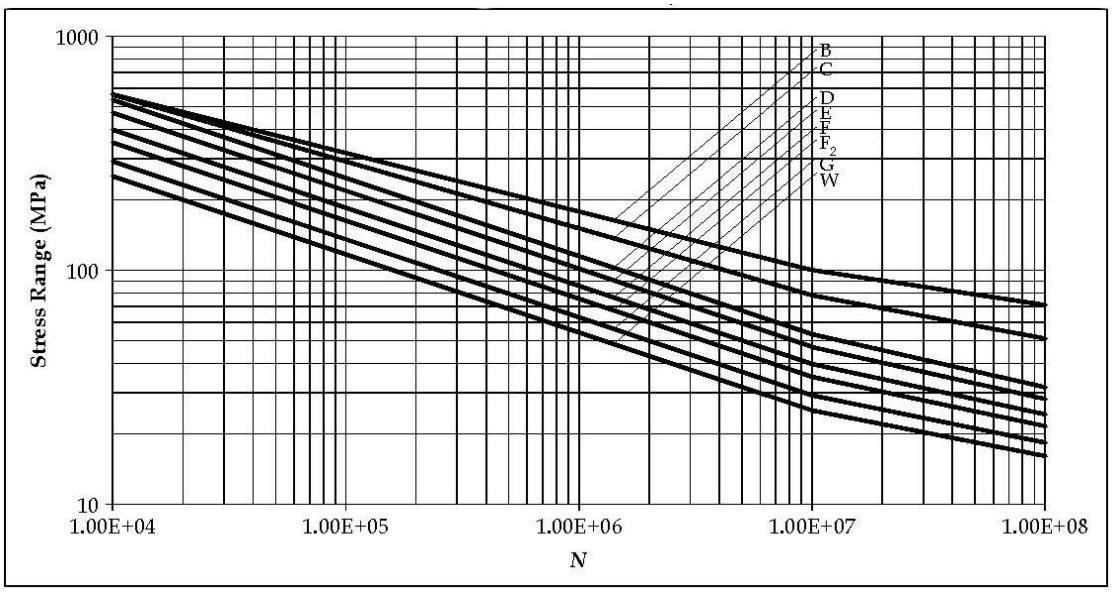
Broj ciklusa do loma razmatranog strukturnog detalja određen je korištenjem B S-N krivulje iz [106], koja je definirana sljedećim vrijednostima, Slike 7.3 i 7.6:

$K_1 = 1{,}012 \cdot 10^{15}$, $m_1 = 4$ (za $N \le 10^7$ ili $\Delta S \ge \Delta S_q$),

$K_2 = 1{,}021 \cdot 10^{21}$, $m_2 = 7$ (za $N \le 10^7$ ili $\Delta S < \Delta S_q$),

$\Delta S_q = 100{,}3$ MPa.

Dugoročne distribucije raspona naprezanja za analizirane slučajeve određene su uzimajući referentni period jednak $D_{REF} = 3{,}4223 \cdot 10^{-4}$ godina i $\alpha_0 = 1$, što odgovara trajanju kratkoročnog stanja mora od 3 sata. Raspršni dijagram je konstituiran od samo jednog stanja mora (H_S, T_Z), čija je vjerojatnost pojavljivanja jednaka 1.



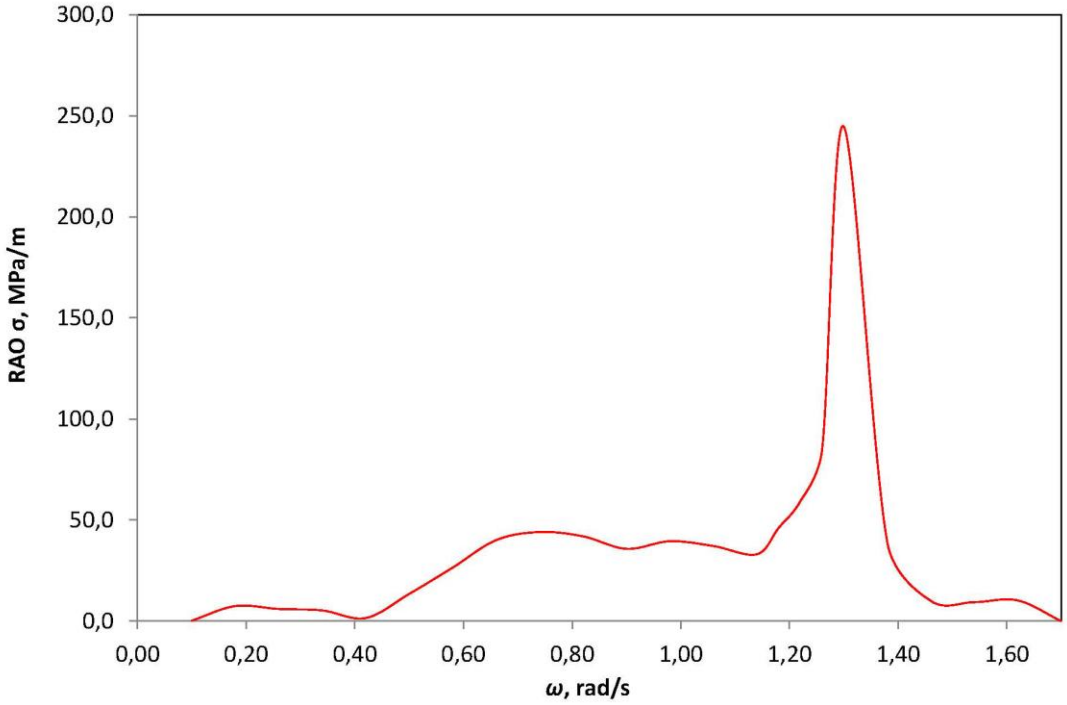
Slika 7.6 S-N krivulje [106]

Prema navedenim podacima napravljena je ulazna lista za provedbu spektralnog postupka, Slika 7.7, te je još potrebno zadati prijenosnu funkciju naprezanja kao niz diskretnih vrijednosti, između kojih korišteni program provodi linearnu interpolaciju (interpolirani RAO je proračunski).

```
                                    Fatigue-nvl-PhD-case01
# DEFINITION DES DONNEES METEO
SD_TITLE
Scatter World wide DNV2003
SD_SIZE
HS 1
TP 4
NB_SEASTATE     1
SD_ARRAY
        4.928   6.336   9.152   14.784
2.0     1.      0.      0.      0.
END_SD_ARRAY
JONSWAP 1.0
HEADING 1
120
1.0
END_HEADING
SPEED 8.11
DREF    3.4223E-4
SN_CURVE 2
100.3   4       1.012E15
0.01    7       1.021E21
PLOT X
#ENDFILE
```

Slika 7.7 Ulazna lista za proračun zamornog oštećenja

Kao referentno naprezanje uzeto je aksijalno naprezanje u tankim trakastim tzv. „bar“ elementima koji su ugrađeni u FEM model razmatranog strukturnog detalja. Slika 7.8 prikazuje prijenosnu funkciju naprezanja središnjeg konačnog elementa trake, određenu 3D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelom.



Slika 7.8 Prijenosna funkcija naprezanja središnjeg konačnog elementa trake, 3D FEM + 3D BEM model

Zamorna oštećenja strukturnih detalja izračunata pomoću 3D FEM + 3D BEM hidroelastičnog modela prikazana su u Tablici 7.1.

Tablica 7.1 Zamorno oštećenje, 3D FEM + 3D BEM model

Stanje mora	Zamorno oštećenje, D
H_S=2 m, T_Z=3,5 s	$0{,}527 \cdot 10^{-3}$
H_S=3 m, T_Z=4,5 s	$0{,}218 \cdot 10^{-2}$
H_S=5 m, T_Z=6,5 s	$0{,}470 \cdot 10^{-2}$
H_S=5 m, T_Z=10,5 s	$0{,}320 \cdot 10^{-3}$

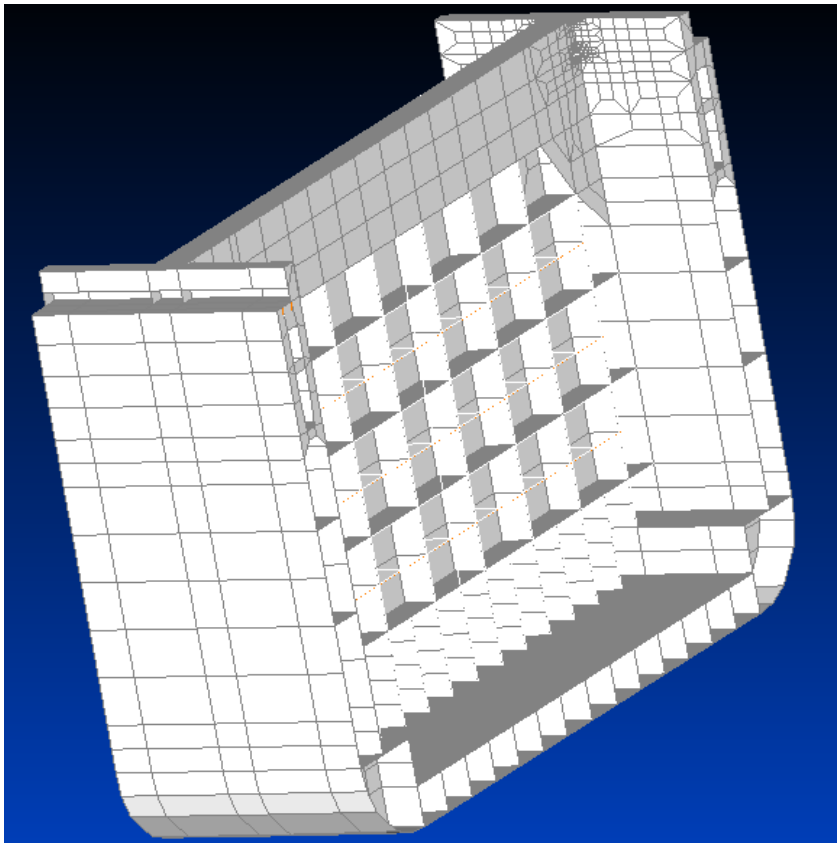
7.3. Analiza zamora hidroelastičnim 1D FEM + 3D BEM modelom

Globalni hidroelastični odziv velikog kontejnerskog broda, određen je za isto stanje krcanja (stanje krcanja 7), brzinu plovidbe i susretni kut, kao u prethodnoj točki.

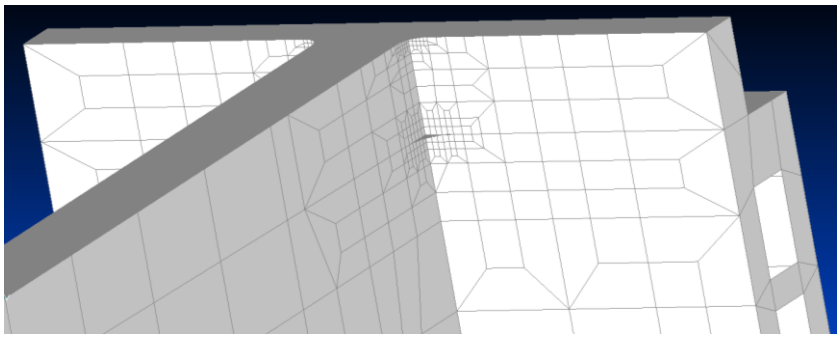
7.3.1. Prijenos odziva s grednog modela na 3D FEM model potkonstrukcije

Da bi se dobila prijenosna funkcija naprezanja razmatranog strukturnog detalja, hidroelastični odziv određen grednim modelom, potrebno je za svaku frekvenciju prenijeti na

3D FEM model potkonstrukcije, Slika 7.9, koji sadrži ufinjenu mrežu u području od interesa, Slika 7.10 (ufinjena mreža ista je kao u proračunima BV-a). Prijenos s grednog modela na 3D FEM model provodi se tako da se pomaci izračunati grednim hidroelastičnim modelom narinu kao rubno opterećenje 3D FEM modela potkonstrukcije.



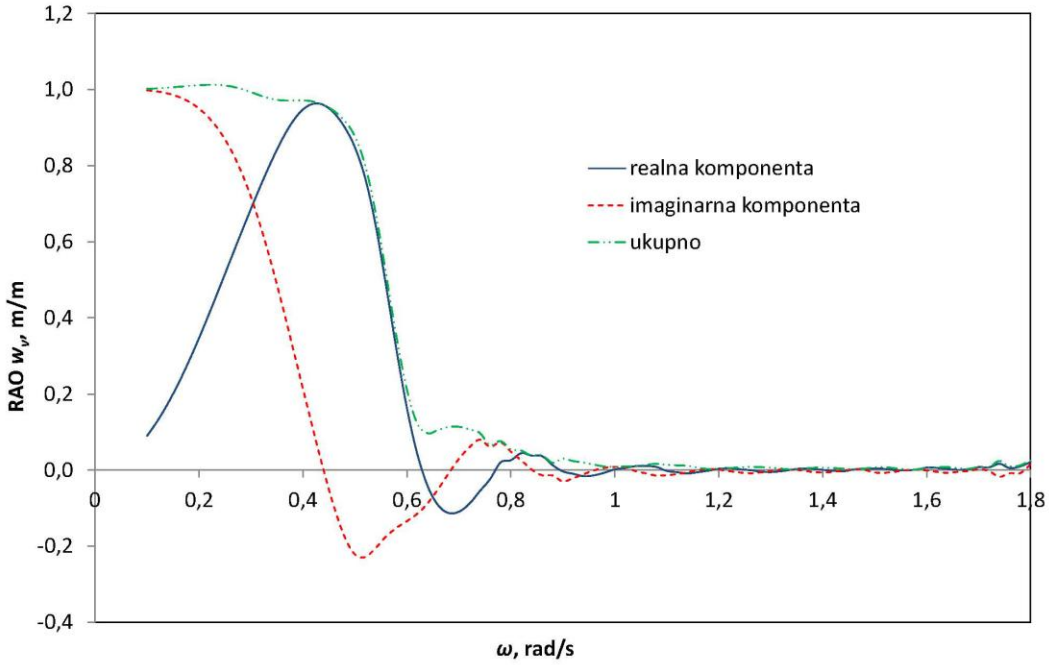
Slika 7.9 3D FEM model potkonstrukcije



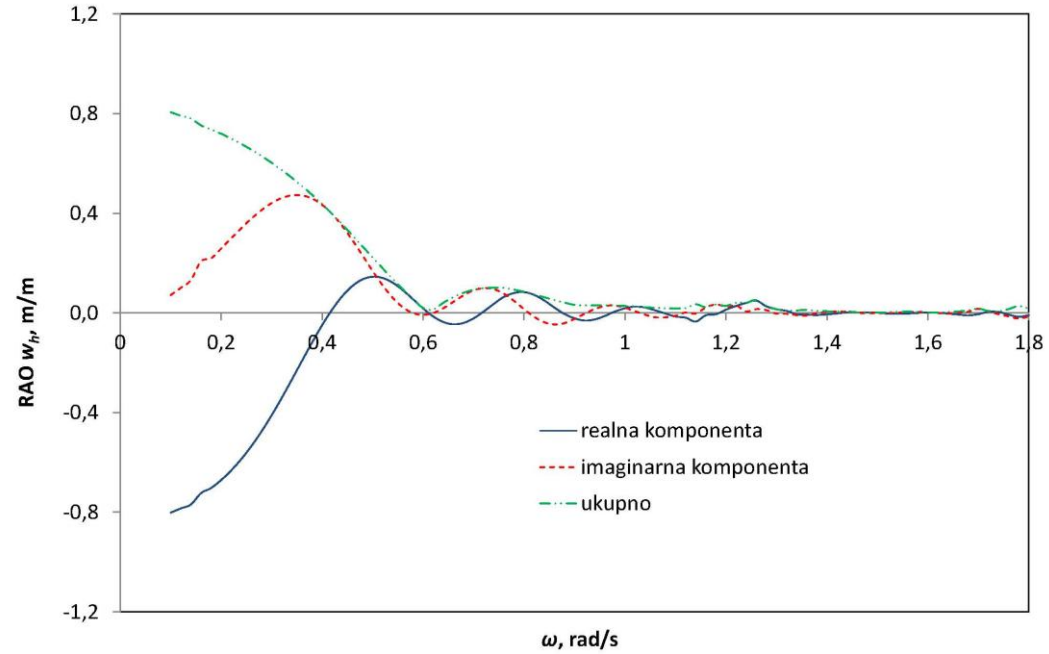
Slika 7.10 Fina mreža 3D FEM modela potkonstrukcije

Korišteni program za hidroelastičnu analizu [102] daje pomake pojedinih čvorova (progib uslijed vertikalnog savijanja, kut zakreta vertikalnog savijanja, progib uslijed horizontalnog savijanja, kut zakreta horizontalnog savijanja, kut uvijanja, derivaciju kuta uvijanja), i to u kompleksnoj ravnini. Od mnoštva rezultata, kao ilustrativni primjer prikazane

su prijenosne funkcije progiba vertikalnog i horizontalnog savijanja za uzdužnu koordinatu koja odgovara pramčanom poprečnom presjeku 3D FEM modela potkonstrukcije, Slike 7.11 i 7.12.



Slika 7.11 Prijenosne funkcije progiba vertikalnog savijanja, 1D model, *x*=177,12 m



Slika 7.12 Prijenosne funkcije progiba horizontalnog savijanja, 1D model, *x*=177,12 m

Tako određene pomake potrebno je raspršiti na krmeni i pramčani poprečni presjek 3D FEM modela (realnu i imaginarnu komponentu zasebno), slično raspršivanju čvornih pomaka na

oplakanu površinu za potrebe određivanja dodatne mase, hidrodinamičkog prigušenja i valnog opterećenja, kako je opisano u poglavlju 2. Izrazi za komponente pomaka u smjeru pojedinih koordinatnih osi, mogu se direktno iščitati iz izraza (2.8), odnosno (2.13), te uz zanemarnje pomaka krutog tijela koji ne doprinose naprezanju, glase:

$$\delta_X = \frac{\mathrm{d}w_v}{\mathrm{d}x}\left(Z - z_N\right) + \frac{\mathrm{d}w_h}{\mathrm{d}x}Y + \bar{u}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}, \tag{7.9}$$

$$\delta_Y = -w_h - \psi\left(Z - z_S\right), \tag{7.10}$$

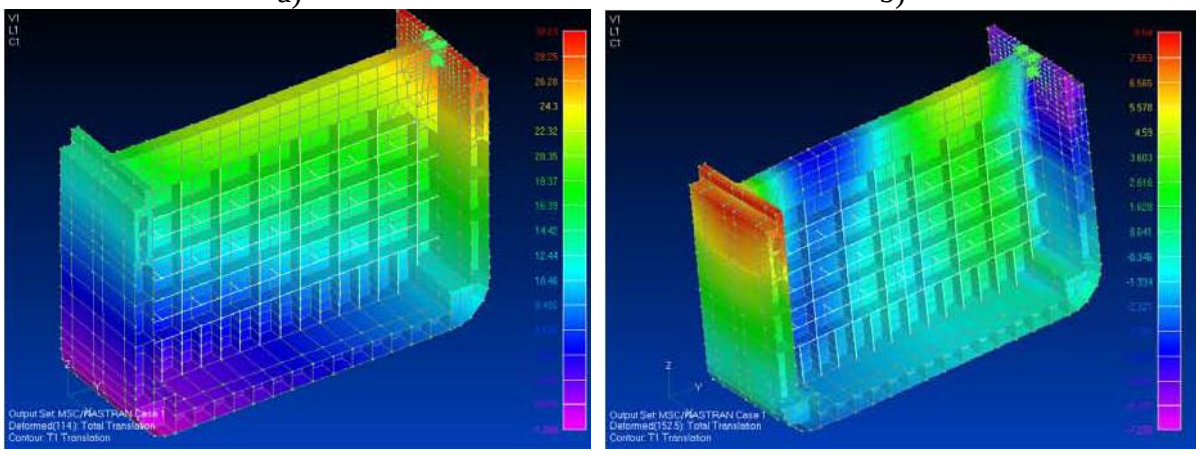
$$\delta_Z = -w_v + \psi Y. \tag{7.11}$$

Značenje pojedinih oznaka u prethodnim izrazima obrazloženo je u poglavlju 2, pri čemu valja napomenuti da funkcija vitoperenja $\bar{u}$, koja je u jednadžbi (2.8) svedena na oplakanu površinu, ovdje se uzima za svaki strukturni čvor, te je određena programom STIFF [48]. Izlazni dio programa za hidroelastičnu analizu [102], za potrebe ovog rada modificiran je tako da za zadane koordinate točke na poprečnom presjeku daje komponente pomaka u smjeru pojedinih koordinatnih osi, s tim što je za točke koje nisu na oplakanoj površini potrebno dodatno zadati vrijednost funkcije vitoperenja.

7.3.2. Prijenosna funkcija naprezanja

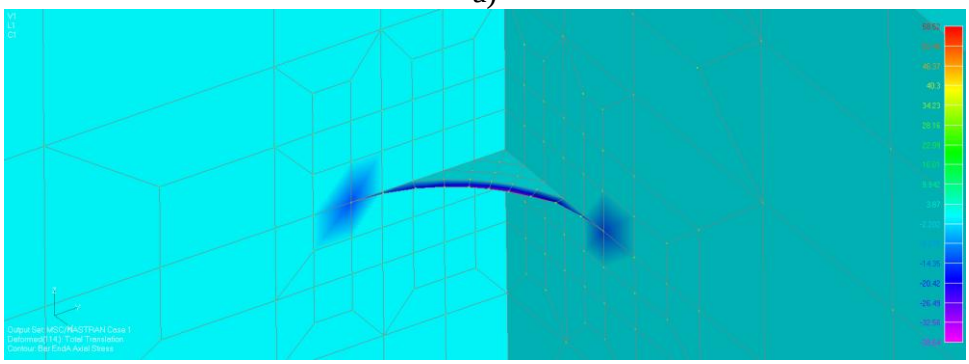
Prijenosna funkcija naprezanja, koja predstavlja niz ulaznih podataka za određivanje akumuliranog zamornog oštećenja [103], dobivena je očitavanjem realne i imaginarne komponente odabranih referentnih naprezanja za svaku frekvenciju i njihovim sumiranjem u kompleksnoj ravnini. Slika 7.13 prikazuje deformirani 3D FEM model potkonstrukcije, a Slika 7.14 distribuciju naprezanja u strukturnom detalju za odabranu valnu frekvenciju.

a) b)

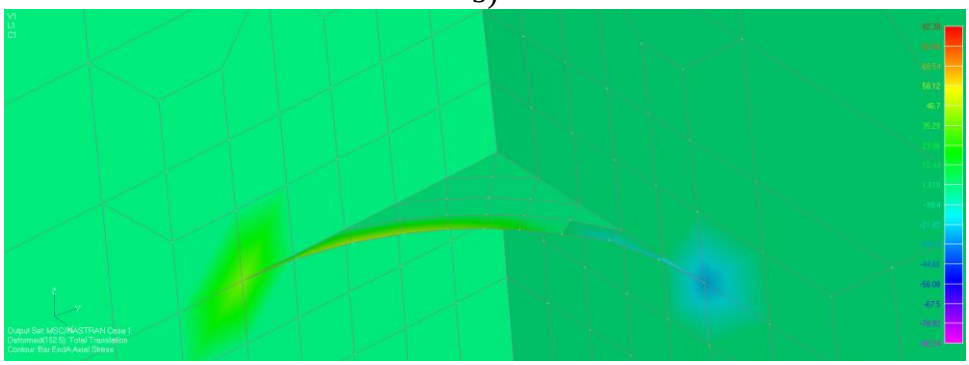


Slika 7.13 Deformirani 3D FEM model potkonstrukcije, ω=0,90 rad/s, a) realna komponenta, b) imaginarna komponenta

a)

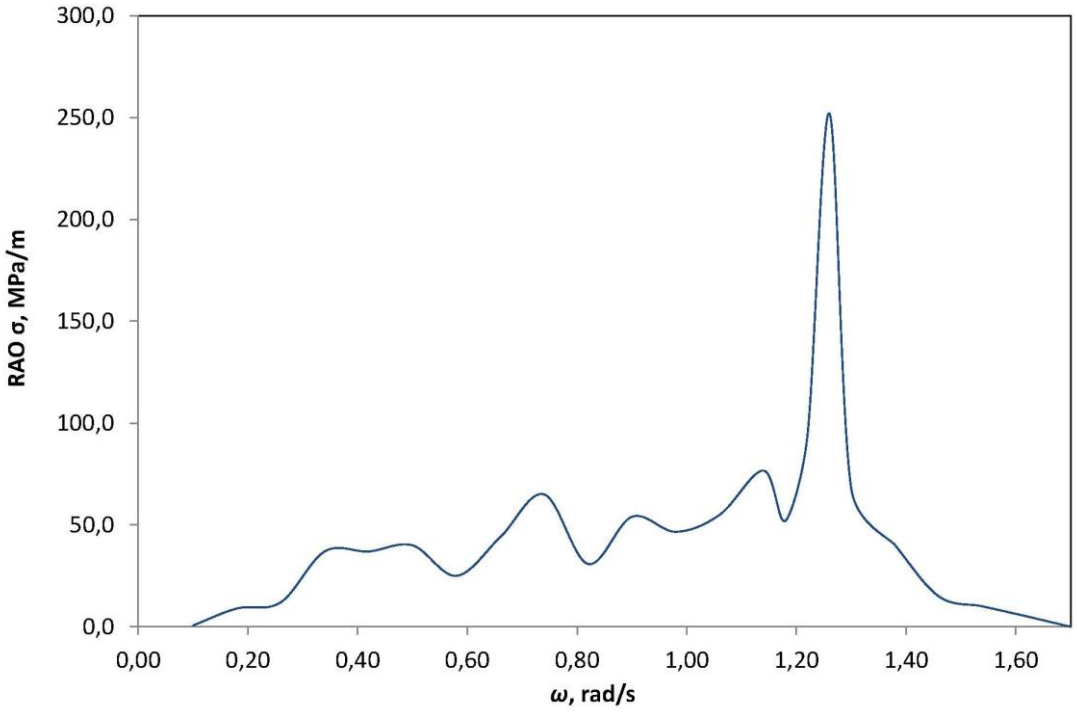


b)



Slika 7.14 Distribucija naprezanja u strukturnom detalju, ω=0,90 rad/s, a) realna komponenta, b) imaginarna komponenta

Prijenosna funkcija naprezanja strukturnog detalja određena 1D FEM + 3D BEM modelom prikazana je na Slici 7.15.



Slika 7.15 Prijenosna funkcija naprezanja središnjeg konačnog elementa trake, 1D FEM + 3D BEM model

7.3.3. Proračun akumuliranog zamornog oštećenja strukturnog detalja

Uz prikazanu prijenosnu funkciju naprezanja, Slika 7.15, i ostale ulazne podatke opisane u točki 7.2, prema ulaznoj listi za spektralnu analizu, Slika 7.7, proveden je proračun zamornog oštećenja 1D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelom, a rezultati su navedeni u Tablici 7.2.

Tablica 7.2 Zamorno oštećenje, 1D FEM + 3D BEM model

Stanje mora	Zamorno oštećenje, D
H_s=2 m, T_Z=3,5 s	$0{,}439 \cdot 10^{-3}$
H_s=3 m, T_Z=4,5 s	$0{,}255 \cdot 10^{-2}$
H_s=5 m, T_Z=6,5 s	$0{,}731 \cdot 10^{-2}$
H_s=5 m, T_Z=10,5 s	$0{,}157 \cdot 10^{-2}$

7.4. Usporedba rezultata

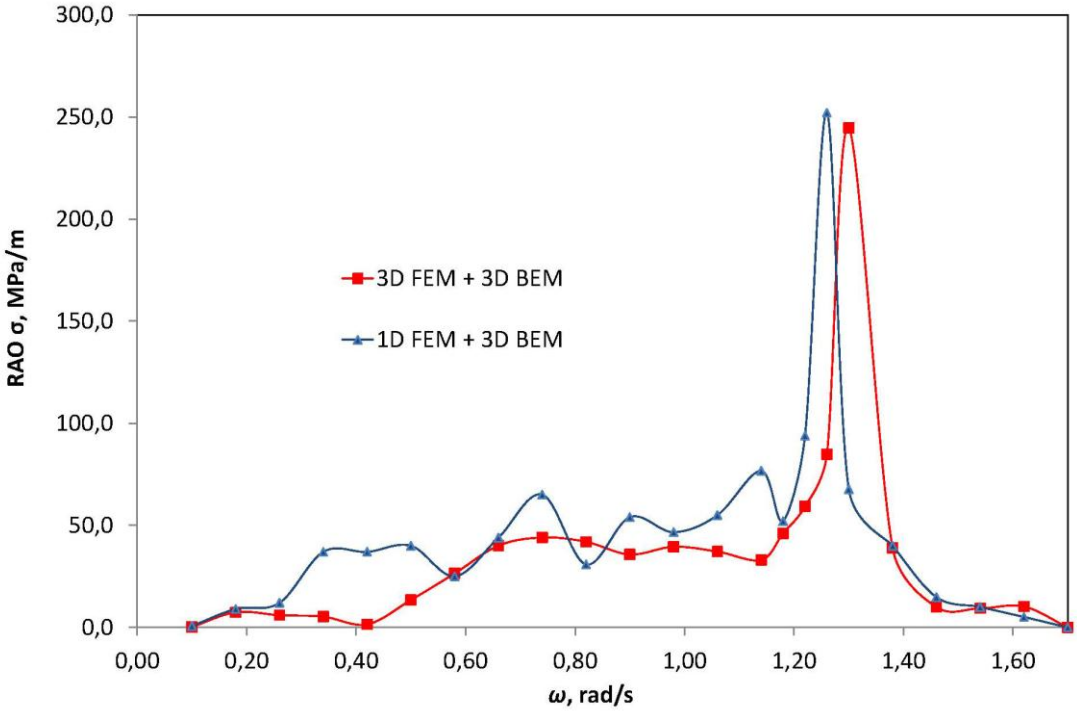
Usporedba zamornog oštećenja strukturnog detalja, izračunatog korištenjem dva različita hidroelastična modela, Tablice 7.1 i 7.2, pokazuje da je za stanje mora H_s=2 m, T_Z=3,5 zamorno oštećenje proračunato grednim modelom u odnosu na 3D model, podcijenjeno nešto manje od 17 %. Za stanje mora H_s=3 m, T_Z=4,5 s, gredni model zamorno oštećenje precijenjuje, također oko 17 %. Oba rezultata u prvom približenju se mogu smatrati prihvatljivim. S povećavanjem valnog perioda, odnosno sa smanjivanjem valne frekvencije razlike postaju izraženije, te se za period T_Z=10,5 razlikuju za red veličine.

Da bi se objasnile veće razlike u području nižih valnih frekvencija potrebno je pažnju usmjeriti na prijenosne funkcije naprezanja, Slika 7.16, budući da se zamorno oštećenje određuje iz spektra odziva (filtriranog signala) koji je dobiven množenjem prijenosne funkcije i odabranog valnog spektra prema izrazu (7.1).

U području nižih frekvencija, odstupanje prijenosnih funkcija je dosta izraženo, dok je u području dominantog pruženja podudaranje bolje. Također, vršna vrijednost odziva određena grednim modelom, pomaknuta je u lijevo u odnosu na 3D FEM + 3D BEM model, što je vezano za činjenicu da su i globalne prirodne frekvencije kod grednog modela malo niže, kako je za analizirano stanje krcanja vidljivo iz Slika 6.13 i 6.14.

Jedan od razloga odstupanja je taj što tzv. metodologija „RAO ukupnog naprezanja“ [105], nije primjenjena doslovce. Naime, problem pomorstvenosti broda može se rješavati tzv.

modalnim pristupom ili direktno [4]. Ukoliko se koristi modalni pristup, rješenje hidroelastične jednadžbe gibanja, izraz (2.41), direktno uključuje odziv linearnog pruženja.



Slika 7.16 Usporedba prijenosnih funkcija naprezanja

Stoga, ukoliko se jednadžba gibanja (2.41) jednom riješi, bilo koja potrebna veličina (pomak, ubrzanje, naprezanje, itd.) se može lako izračunati, jer modalna dekompozicija vrijedi za svaku pojedinačnu veličinu, pa se primjerice za naprezanje, prema [4], može pisati:

$$\sum(x,y,z,\omega)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i(\omega)\sigma^i(x,y,z), \tag{7.12}$$

gdje $\sigma^i(x,y,z)$ predstavlja distribuciju naprezanja za odgovarajući oblik vibriranja, a ξ_i su modalne amplitude, odnosno rješenja jednadžbe (2.41).

U kontekstu proračuna zamornog oštećenja strukturnog detalja, važno je istaknuti da kruti oblici ne doprinose naprezanju. Za opis odziva u uzdužnoj ravnini dovoljno je svega nekoliko oblika vibriranja (u provedenim proračunima korišteno je 5 vertikalnih i 10 spregnutih horizontalnih i torzijskih, uz svih 6 oblika koji odgovaraju pomaku krutog tijela), dok se za opis poprečnog opterećenja trebaju uvesti oblici vibriranja koji uključuju poprečnu deformaciju [4].

Budući da modalnim pristupom nije praktično računati odziv uključujući lokalne (sve) oblike vibriranja, uobičajeno je ukupni odziv raspregnuti na kvazistatičku i dinamičku komponentu. Zatim se naprezanja koja odgovaraju kvazistatičkom odzivu izračunaju na

temelju klasičnog proračuna pomorstvenosti krutog tijela (direktno) i dodaju se dinamičkom odzivu određenom modalnim pristupom [4].

Imajući u vidu prethodno objašnjenje, razumljivo je da je direktnom primjenom unaprijeđenog hidroelastičnog modela bolje podudaranje rezultata postignuto za slučajeve gdje je dominantan odziv uslijed pruženja broda.

Iako dobiveni rezultati ukazuju na mogućnost primjene grednog modela u određivanju utjecaja linearnog pruženja na koncentracije naprezanja strukturnih detalja, evidentno je da su za točniji proračun samog zamornog oštećenja nužna dodatna istraživanja.

8. ZAKLJUČAK

Gradnja sve većih kontejnerskih brodova, uvjetovana ekspanzijom globalne trgovinske razmjene u kombinaciji s prednostima kontejnerskog transporta, motivirala je relevantne institucije (klasifikacijska društva, sveučilišta, institute, itd.) na razvoj postupaka i alata za njihovo sigurno projektiranje, gradnju, eksploataciju i održavanje. Konstrukcijske i eksploatacijske karakteristike velikih kontejnerskih brodova aktualizirale su hidroelastične matematičke modele, koji bi trebali predstavljati učinkovite alate za direktne proračune njihovog odziva na valovima. Danas postoji veliki broj hidroelastičnih modela; linearnih, nelinearnih, u vremenskoj domeni, u frekvencijskoj domeni, pri čemu svaki od njih ima svoje prednosti i nedostatke, te pretpostavke na kojima počiva. U ranoj fazi osnivanja broda, prikladno je sprezanje grednog strukturnog modela s 3D hidrodinamičkim modelom, dok se za završne provjere zadovoljavanja projektnih kriterija umjesto grednog, koristi 3D FEM strukturni model.

Ova disertacija prvenstveno je rezultat težnje za poboljšanjem postojećeg matematičkog modela za hidroelastičnu analizu velikih kontejnerskih brodova, razvijenog kroz intenzivnu dugogodišnju suradnju Fakulteta strojarstva i brodogradnje Zagreb i klasifikacijskog društva Bureau Veritas Pariz, a zatim i istraživanja krajnjih granica njegove primjenjivosti, u vidu ocjene doprinosa linearnog pruženja broda na valovima akumulaciji zamornog oštećenja strukturnih detalja.

8.1. Zaključna razmatranja i izvorni znanstveni doprinos doktorskog rada

Istraživanje hidroelastičnosti brodskih konstrukcija, iz perspektive pojedinca, predstavlja iznimno složenu zadaću, koja zahtijeva specifična znanja vezana za ponašanje broda kao tankostjene konstrukcije, opis fluida koji ga okružuje, te odgovarajuće matematičko modeliranje njihove složene interakcije. U cilju davanja konkretnijeg znanstvenog doprinosa spomenutom području, u okviru ovog rada, veći napori su uloženi u razumijevanje uloge strukturnog dijela integralnog modela za hidroelastičnu analizu i na njegova teorijska unaprijeđenja u cilju dobivanja još pouzdanijeg numeričkog alata.

U radu je istaknuta važnost hidroelastičnog modela kao suvremenog i danas već nezaobilaznog alata za projektiranje velikih kontejnerskih brodova. Navedene su važnije definicije hidroelastičnosti, uz osnovni opis metodologije čiji temelj predstavlja modalna

analiza. Ktiritčki su opisani strukturni, hidrostatički i hidrodinamički model, čijim spajanjem nastaje hidroelastični model.

Jedno od osnovnih poboljšanja strukturnog modela vezano je za uvođenje utjecaja smicanja na uvijanje, po analogiji s utjecajem smicanja na savijanje. U cilju boljeg razumijevanja uloge pojedinih parametara krutosti najprije su izvedene diferencijalne jednadžbe vibriranja grede s utjecajem smicanja na savijanje i uvijanje, a zatim i formulacija matrica mase i krutosti konačnog elementa za primjenu na brodski trup, kao nosač promjenjivog poprečnog presjeka, na jedinstven način. Analiziran je utjecaj konzistentnosti formulacije konačnih elemenata i efekt zanemarenja rotacije masa na odziv konstrukcije. Opisan je numerički postupak za analizu vibracija, s pregledom osnovnih izraza za određivanje parametara krutosti, koji su ukodirani u program STIFF [48]. Ukratko je prikazano određivanje efektivne krutosti brodskih konstrukcija u analizi vibracija. Valjanost teorijskog razmatranja dokazana je numeričkim primjerom u kojem je analizirano uvijanje jednolikog prizmatičnog pontona analitički i 3D FEM modelom.

Nadalje, iako je matematički model za određivanje doprinosa poprečnih pregrada krutosti brodskog trupa, koji podrazumijeva distribuciju krutosti pregrade (određene po teoriji ortotropne ploče) po duljini trupa, poznat od ranije, dodatno je istražena njegova primjenjivost. Uspoređeni su rezultati dobiveni različitim načinima modeliranja pregrada, podrazumijevajući gredni model konačnih elemenata, te je potvrđeno da postupak razvijen na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku FSB-a daje rezultate koji se prilično dobro slažu s 3D FEM komercijalnim paketima.

Problem određivanja efektivne krutosti strojarnice prepoznat je kroz razvoj sofisticiranog grednog modela i usporedbu s rezultatima 3D FEM analiza. Strojarnica velikih kontejnerskih brodova relativno je kratka (s omjerom duljine i širine 1:2), te stoga nije djelotvorna cijelom duljinom kao zatvoreni presjek. Provedene analize pokazale su da se najrealniji rezultati dobivaju ukoliko se konstrukcija strojarnice u grednom modelu tretira kao segment otvorenog poprečnog presjek povećane krutosti na uvijanje uslijed doprinosa paluba. Uz izvod efektivne krutosti konstrukcije strojarnice, u ovom radu je prikazana i analiza distorzije poprečnog presjeka, lokalno, na temelju primarno provedene analize uvijanja.

Numerički primjer u kojem se ilustrira primjena unaprijeđenog strukturnog modela za određivanje globalnog hidroelastičnog odziva uključuje analizu velikog kontejnerskog broda nosivosti 11400 TEU. Metodologija je verificirana kroz usporedbu prirodnih vibracija broda izračunatih programom DYANA [32] i komercijalnim programskim paketom NASTRAN [49], podrazumijevajući 3D FEM model cijelog broda, dok su rezultati odziva

broda na valovima uspoređeni s proračunom po klasičnoj teoriji pomorstvenosti krutog tijela, provedenim u programu HYDROSTAR [58]. Zaključna verifikacija provedena je usporedbom globalnog hidroelastičnog odzva dobivenog 1D FEM + 3D BEM i 3D FEM i 3D BEM modelima, pri čemu je postignuto iznimno dobro podudaranje.

Naposljetku, analiziran je zamorni vijek strukturnog detalja broda. Opisane su teorijske osnove proračuna zamora s naglaskom na spektralnu metodu, te su dani rezultati proračuna zamornog oštećenja 3D FEM + 3D BEM i 1D FEM + 3D BEM hidroelastičnim modelima, s kritičkim osvrtom na njih.

8.2. Smjernice za daljnja istraživanja

Kada je riječ o hidroelastičnom modelu koji podrazumijeva gredni strukturni model, zbog njegove sofisticiranosti, koja uključuje uzimanje u obzir utjecaj smicanja na uvijanje (analogno utjecaju smicanja na savijanje), utjecaj pregrada na ukupnu krutost trupa, te matematički model efektivne krutosti relativno kratke strojarnice, teško je očekivati značajnija praktična poboljšanja. Naime, usporedba prirodnih frekvencija i oblika vibriranja dobivenih unaprijeđenim grednim modelom s istim veličinama dobivenim 3D FEM komercijalnim programskim paketom pokazuje iznimno dobro podudaranje s inženjerske točke gledišta. Točnost fizikalne idealizacije velikih kontejnerskih brodova grednim modelom bila bi veća ukoliko bi se u obzir uzela stvarna krutost krajeva brodskog trupa, koja bi se mogla izvesti po analogiji s efektivnom krutošću strojarnice. Ipak, treba imati na umu da takvo poboljšanje modela nužno ne mora značiti bolje podudaranje referentih veličina s onima koje se dobiju 3D FEM alatima, pri čemu se ne smije zanemariti činjenica da i 3D FEM modeli imaju svoje nedostatke, a kao jedan od važnijih, u kontekstu problema svojstvenih vrijednosti, svakako je način zadavanja mase broda.

Daljnja poboljšanja postojećeg hidroelastičnog modela moguće je postići unaprijeđenjem dijelova vezanih za integraciju jednadžbe gibanja u vremenskoj domeni, koja bi omogućila analizu podrhtavanja trupa, uzrokovanu impulsnom uzbudom. Nadalje, rješavanje radijacijsko-difrakcijskog problema elastičnog broda s brzinom napredovanja bez pojednostavljivanja rubnog uvjeta na slobodnoj površini (koje i za kruti brod predstavlja dovoljno složen problem), također bi predstavljalo značajan kvalitativni iskorak.

Da bi hidroelastični modeli postali dio standardne projektne procedure, potrebno je njihovu pouzdanost dokazati usporedbom s rezultatima ispitivanja u naravi. Rezultati koje daje hidroelastični model obrađen u ovom radu, u bližoj će budućnosti biti verificirani na

primjeru velikog kontejnerskog broda Rigoletto, nosivosti 9200 TEU, usporedbom s rezultatima mjerenja i modelskih ispitivanja, koja se trenutno odvijaju u okviru EU FP7 projekta TULCS. Metodologija hidroelastične analize koja je verificirana na primjeru elastične barže, u okviru prethodno spomenutog projekta će se dodatno kontrolirati na primjeru modelskih ispitivanja kontejnerskog broda Rigoletto, Slika 8.1.

a) b)



Slika 8.1 Model kontejnerskog broda Rigoletto[*]; a) ovješen, b) tijekom ispitivanja u vodi

Iako je ovom doktorskom disertacijom postojeći model za hidroelastičnu analizu poboljšan, te su rasvijetljene određene nejasnoće vezane za problematiku strukturnog modeliranja velikih kontejnerskih brodova, ona ukazuje na niz problema koje još treba riješiti, te otvara nova pitanja na koja valja odgovoriti u cilju povećanja sigurnosti ljudskih života i materijalnih dobara u surovim i nepredvidivim sredinama kakve predstavljaju morski plovni putovi.

[*] Fotografije su snimljene tijekom modelskih ispitivanja u Canal de Experiencias Hidrodinámicas de El Pardo (CEHIPAR) u Madridu, u srpnju 2011. godine, uz dopuštenje dr. Adolfa Marona.

LITERATURA

1. Drummen, I., Storhaug, G., Moan, T.: Experimental and numerical investigation of fatigue damage due to wave induced vibrations in a containership in head seas, *Journal of Marine Science and Technology*, 2008, 13 (4), 428-445.
2. http://www.emma-maersk.info/emma-maersk-pictures.htm (pristup: 12. srpnja 2011.).
3. Tomašević, S.: Hidroelastični model dinamičkog odziva kontejnerskih brodova na valovima, Doktorska disertacija, FSB Zagreb, 2007.
4. Malenica, Š., Tuitman, JT., Bigot, F., Sireta, FX.: Some aspects of 3D linear hydroelastic models of springing, *Proceedings of the Eighth International Conference on Hydrodynamics*, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, 2008.
5. Wu, YS., Cui, WC.: Advances in the three-dimensional hydroelasticity of ships, *Proc. IMechE Vol. 223 Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment*, 2009, 223 (3), 331-348.
6. Mao, W., Ringsberg, JW., Rychlik, I., Storhaug, G.: Development of a fatigue model useful in ship routing design, *Journal of Ship Research*, 2010, 54 (4), 281-293.
7. Rudan, S.: Spektralna analiza zamora brodskih konstrukcija, Magistarski rad, FSB Zagreb, 2002.
8. Drummen, I.: Experimental and numerical investigation of nonlinear wave-induced load effects in containerships considering hydroelasticity, Doctoral Thesis, NTNU Trondheim, 2008.
9. De Jong, G., Huther, M.: A comprehensive and practical strength assessment methodology for container ships taking into account non linear and hydroelastic loading, *Proceedings of the International Conference on Design and Operation of Container Ships*, RINA, London, 2008, 39-49.
10. --- Proceedings of the International Workshop on Springing & Whipping of Ships, Dubrovnik, Bureau Veritas & FAMENA, University of Zagreb, 2010.
11. Pavazza, R.: Savijanje i uvijanje štapova otvorenog tankostjenog presjeka na elastičnoj podlozi, Doktorska disertacija, FSB Zagreb, 1991.
12. Pavazza, R.: Utjecaj smicanja na uvijanje štapova otvorenog tankostjenog presjeka, *Strojarstvo*, 1993, 35 (3/4), 103-109.
13. Pavazza, R.: Torsion of thin-walled beams of open cross-sections with influence of shear, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, 47, 1099-1122.

14. Senjanović, I., Tomašević, S., Rudan, S., Senjanović, T.: Role of transverse bulkheads in hull stiffness of large container ships, *Engineering Structures*, 2008, 30, 2492-2509.
15. Senjanović, I., Senjanović, T., Tomašević, S., Rudan, S.: Contribution of transverse bulkheads to hull stiffness of large container ships, *Brodogradnja*, 2008, 59 (3), 228-238.
16. Hoffman, D., Van Hooff, RW.: Experimental and theoretical evaluation of springing on a great lakes bulk carrier, *International Shipbuilding Progress*, 1974.
17. Bishop, RED., Price, WG.: On modal analysis of ship strength, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 1974, 341, 121-134.
18. Bishop, RED., Price, WG.: Ship strength as a problem of structural dynamics, *The Naval Architect*, 1975, 2, 61-63.
19. Bishop, RED., Price, WG.: *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, 1979.
20. Bishop, RED., Clarke, JD., Price, WG.: Comparison of full scale and predicted response of two frigates in severe weather trial, *RINA Transactions*, 1986, 128, 205-212.
21. Chen, XJ., Wu, YS., Cui,WC., Jensen, JJ.: Review of hydroelasticity theories for global response of marine structures, *Ocean Engineering*, 2006, 33, 439-457.
22. Kawai, T.: The application of finite element method to ship structures, *Computers & Structures*, 1973, 2, 1175-1194.
23. Hughes, OF.: *Ship Structural Design*, Wiley, New York, 1983.
24. Senjanović, I., Grubišić, R.: Coupled horizontal and torsional vibration of a ship hull with large hatch openings, *Computers & Structures*, 1991, 41 (2), 213-226.
25. Pedersen, PT.: A beam model for torsional-bending response of ship hulls, *RINA Transactions*, 1983, 171-182.
26. Wu, JS., Ho, CS.: Analysis of wave induced horizontal and torsion coupled vibrations of ship hull, *Journal of Ship Research*, 1987, 31 (4), 235-252.
27. Haslum, K., Tonnessen, A.: An analysis of torsion in ship hulls, *European Shipbuilding*, 1972, 5/6, 67-89.
28. Vlasov, VZ.: Thin-walled elastic beams, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
29. Senjanović, I., Fan, Y.: A higher-order flexural beam theory, *Computers & Structures*, 1989, 32 (5), 973-986.

30. Senjanović, I., Fan, Y.: A higher-order theory of thin-walled girders with application to ship structures, *Computers & Structures*, 1992, 43 (1), 31-52.
31. Senjanović, I., Fan, Y.: A higher-order torsional beam theory, *Engineering Modelling*, 1997, 32 (1-4), 25-40.
32. DYANA, User's manual, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2007.
33. …, Dynamic Response, Committee II.2, *Proceedings of the 13th International Ship and Offshore Structures Congress*, San Diego, USA, 2003.
34. Timošenko, S., Young, DH.: *Vibration Problems in Engineering*, D. Van Nostrand, 1955.
35. Cowper, GR.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 2, 335-340.
36. Senjanović, I., Fan, Y.: The bending and shear coefficients of thin-walled girders, *Thin-Walled Structures*, 1990, 10, 31-57.
37. Pavazza, R.: *Uvod u analizu tankostjenih štapova*, Kigen, Zagreb, 2007.
38. Kollbruner, CF., Basler, K.: *Torsion in Structures*, Springer, Berlin,1969.
39. Gjelsvik, A.: *The Theory of Thin-walled Bars*, New York, Wiley, 1981.
40. Pedersen, PT.: Torsional response of container ships, *Journal of Ship Research*, 1985, 31, 194-205.
41. Filin, AP.: *Prikladnaja mehanika tverdogo deformiruemogo tela*, tom II, Nauka, Moskva, 1975.
42. Plazibat, B.: Utjecaj distorzije poprečnih presjeka na uvijanje tankostjenih štapova otvorenog i zatvoreno-otvorenog presjeka. Doktorska disertacija, FESB Split, 2011.
43. Hughes, OF., Paik, JK.: *Ship Structural Analysis and Design*, SNAME, New Jersey, 2010.
44. Tomašević, S.: Dinamička izdržljivost brodskih konstrukcija, Magistarski rad, FSB Zagreb, 2003.
45. Proceedings of the 17th International Ship and Offshore Structures Congress, Jang, CD. & Hong, SJ. (ur.), Seoul National University, 2009.
46. Boutillier, V., Maherault, S., Huther, M., Henry, J., Parmentier, G.: Fatigue damage calculation of ULCS due to quasi-static wave response and springing response, *The 11th International Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures – PRADS*, Rio de Janeiro, 2010, 1190-1199.

47. --- *Guidance notes on Springing Assessment for Container Ships*, ABS, Houston, 2010.
48. STIFF, User's manual, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2010.
49. MSC.Nastran 2005, Installation and Operations Guide, MSC.Software, 2005.
50. Heller, S., Abramson, HN.: Hydroelasticity: A new naval science, *Journal of American Society of Naval Engineers*, 1959, 71 (2), 205-209.
51. Faltinsen, OM.: Hydrodynamics of High-speed Marine Vessels, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
52. Senjanović, I., Malenica, Š., Tomašević, S.: Investigation of ship hydroelasticity, *Ocean Engineering*, 2008, 35, 523-535.
53. Senjanović, I., Malenica, Š., Tomašević, S.: Hydroelasticity of large container ships, *Marine Structures*, 2009, 22, 287-314.
54. Senjanović, I., Malenica, Š., Tomašević, S., Tomić, M.: Hydroelastic aspects of large container ships, *Proceedings of the ASME 27th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering OMAE 2008*, Estoril, 2008.
55. Senjanović, I., Tomašević, S., Rudan, S., Tomić, M., Vladimir, N., Malenica, Š.: Hydroelasticity of very large container ships, *Proceedings of the International Conference on Design and Operation of Container Ships*, RINA, London, 2008, 51-70.
56. Senjanović, I., Tomašević, S., Vladimir, N., Tomić, M., Malenica, Š.: Application of an advanced beam theory to ship hydroelastic analysis, *Proceedings of the International Workshop on Advanced Ship Design for Pollution Prevention*, Split, 2009, 31-42.
57. Bathe, KJ.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
58. HYDROSTAR, User's manual, Bureau Veritas, Pariz, 2006.
59. Malenica, Š., Molin, B., Remy, F., Senjanović, I.: Hydroelastic response of a barge to impulsive and non-impulsive wave loads, *Proceedings of the Third International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Oxford, UK, 2003, 107-115.
60. Malenica, Š., Senjanović, I., Chen, XB.: Automatic mesh generation for naval and offshore simulations, *Zbornik radova simpozija Teorija i praksa brodogradnje in memoriam prof. Leopold Sorta*, Plitvice, 2004.
61. Riggs, HR.: Discussion on "Investigation of ship hydroelasticity" by Senjanovic, Malenica and Tomasevic, *Ocean Engineering*, 2008, 35, 1285-1286.

62. Senjanović I., Reply to Professor Riggs's discussion on paper “Investigation of ship hydroelasticity” by Senjanovic, Malenica and Tomasevic, *Ocean Engineering*, 2008, 35, 1287-1288.

63. Price, WG., Wu, YS.: Hydroelasticity of marine structures. *The 16th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Lyngby, Denmark, 1985, 311-317.

64. Newman, JN.: Wave effects on deformable bodies, *Applied Ocean Research*, 1994, 16, 47-59.

65. Riggs, HR.: Hydrostatic stiffness of flexible floating structure, *Proceedings of the International Workshop on Very large floating structures*, Hayama, Japan, 1996, 229-234.

66. Huang, LL., Riggs, HR.: The hydrostatic stiffness of flexible floating structures for linear hydroelasticity, *Marine Structures*, 2000, 13, 91-106.

67. Malenica, Š.: Some aspects of hydrostatic calculations in linear seakeeping, *Proceedings of the 14th NAV Conference*, Palermo, 2003.

68. Senjanović, I., Tomić, M., Tomašević, S.: An explicit formulation for restoring stiffness and its performance in ship hydroelasticity, *Ocean Engineering*, 2008, 35, 1322-1338.

69. Senjanović, I., Tomašević, S., Vladimir, N., Malenica, Š.: Numerical procedure for ship hydroelastic analysis, *Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Methods in Marine Engineering*, Trondheim, Norway, 2009, 259-264.

70. Senjanović, I., Tomašević, S., Vladimir, N., Tomić, M., Malenica, Š.: Ship hydroelastic analysis with sophisticated beam model and consistent restoring stiffness, *Proceedings of the Fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Southampton, UK, 2009, 69-80.

71. Senjanović, I., Vladimir, N., Tomić, M.: Formulation of consistent restoring stiffness in ship hydroelastic analysis, *Journal of Engineering Mathematics*, (prihvaćeno).

72. Senjanović, I., Hadžić, N., Tomić, M.: Investigation of restoring stiffness in the hydroelastic analysis of slender marine structures, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2011, 133 (3), 031107.

73. Alfirević, I.: *Uvod u mehaniku kontinuuma*, Sveučilište u Zagrebu, Golden marketing, Zagreb, 2003.

74. Remy, F., Molin, B., Ledoux, A.: Experimental and numerical study of the wave response of a flexible barge, *Proceedings of the Fourth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Wuxi, China, 2006, 255-264.

75. Kim, Y., Kim, Y., Malenica, Š., Bigot, F., Senjanović, I.: Linear springing model – comparison of different numerical models, *Proceedings of the Fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Southampton, UK, 2009, 361-372.
76. Senjanović, I.: *Vibracije broda II*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1990.
77. Senjanović, I., Tomašević, S., Vladimir, N.: An advanced theory of thin-walled girders with application to ship vibrations, *Marine Structures*, 2009, 22, 387-437.
78. Sorić, J.: *Metoda konačnih elemenata*, Sveučilište u Zagrebu, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
79. Pavazza, R., Plazibat, B., Matoković, A.: Idealisation of ships with large hatch openings by a thin-walled rod of open section on many elastic supports, *Thin-Walled Structures*, 1998, 32, 305-325.
80. Mathematica 5.2., Wolfram Research Inc., 2005.
81. Senjanović, I.: Harmonic acceleration method for dynamic structural analysis, *Computers & Structures*, 1984, 18 (1), 71-80.
82. Lozina, Ž.: A comparison of harmonic acceleration method with the other commonly used methods for calculation of dynamic transient response, *Computers & Structures*, 1988, 29 (2), 227-240.
83. Cheung, YK.: *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, 1976.
84. Senjanović, I., Fan, Y.: A finite element formulation of initial ship cross-section properties, *Brodogradnja*, 1993, 41 (1), 27-36.
85. Žanić, V.: Proračun raspodjele smičnih naprezanja po poprečnom presjeku trupa kod savijanja u vertikalnoj i horizontalnoj ravnini, *Zbornik radova simpozija Teorija i praksa brodogradnje in memoriam prof. Leopold Sorta*, Split, 1981.
86. Žanić, V.: Determinazione Degli Sforzi Principali - Flessione e Torsione - Sollo Scafo di una nave Applicando Particolari Elementi Finiti, *Technica Italiana (Rivista D'Ingegneria)*, 1985, 3, 105-113.
87. Fan, Y.: Definiranje efektivnih vrijednosti parametara krutosti poprečnog presjeka brodskog trupa u analizi vibracija, Doktorska disertacija, FSB Zagreb, 1991.
88. Senjanović, I., Rudan, S., Vladimir, N.: Influence of shear on the torsion of thin-walled girders, *Transactions of FAMENA*, 2009, 33 (2), 35-50.
89. Det norske Veritas, SESAM, User's manual, Høvik, 2007.
90. Senjanović, I.: Jedno rješenje problema torzije kod brodova za prijevoz kontejnera (dio I i II). *Brodogradnja* 1972, Br. 1 i 2.

91. Szilard, R.: *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley and Sons, New New York, 2004.
92. Senjanović, I., Fan, Y.: Pontoon torsional strength analysis related to ships with large hatch openings, *Journal of Ship Research*, 1991, 35 (4), 339-351.
93. Senjanović, I., Fan, Y.: On torsional and warping stiffness of thin-walled girders, *Thin-Walled Structures*, 1991, 11, 233-276.
94. Senjanović, I., Vladimir, N., Tomić, M.: The contribution of the engine room structure to the hull stiffness of large container ships, *International Shipbuilding Progress*, 2010, 57 (1-2), 65-85.
95. Senjanović, I., Vladimir, N., Tomić, M.: Investigation of torsion, warping and distortion of large container ships, *Ocean Systems Engineering*, 2011, 1 (1), 73-93.
96. Senjanović, I., Vladimir, N., Tomić, M.: Effective stiffness of the engine room structure in large container ships, *Brodogradnja*, 2011, 62 (1), 15-27.
97. Senjanović, I., Vladimir, N., Hadžić, N., Tomić, M.: Beam structural modelling in hydroelastic analysis of ultra large container ships, in Vibration Analysis, ed. N. Baddour, InTech, 2011, 193-222.
98. Senjanović, I., Vladimir, N., Tomić, M., Malenica, Š.: A sophisticated beam model for hydroelastic analysis of ultra large container ships, in Marine Technology and Engineering, eds. C. Guedes Soares et al., Taylor & Francis, 2011, (prihvaćeno).
99. Senjanović, I., Vladimir, N., Hadžić, N., Tomić, M., Malenica, Š.: Advanced beam model for hydroelastic analysis of container ships, *Proceedings of the International Workshop on Springing & Whipping of Ships*, Dubrovnik, 2010, 110-119.
100. Senjanović, I., Vladimir, N., Malenica, Š., Tomić, M.: Improvements of beam structural modelling in hydroelasticity of ultra large containers ships, *Proceedings of the 30th Intenational Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, 2011, OMAE2011-49337.
101. Uršić, J.: *Čvrstoća broda II*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1983.
102. Senjanović, I., Tomašević, S., Vladimir, N., Rudan, S., Malenica, Š.: *Users manual for program HYELACS for hydroelastic analysis of ship structures (DYANA & HYDROSTAR)*, Deliverable 4.2, EU FP7 Project TULCS, 2011.
103. FATA, User's manual, Bureau Veritas, Pariz, 2008.
104. Prpić-Oršić, J., Čorić, V.: *Pomorstvenost plovnih objekata*, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2006.

105. --- *PC HHI11400 Fatigue Calculation with springing, FATA and Rainflow Counting Method comparison*, Technical Note, Bureau Veritas, Pariz, 2008.
106. IACS, Common Structural Rules for Oil Tankers, 2006.
107. Hirdaris, SE., Price, WG., Temarel , P.: Two- and three-dimensional hydroelastic modelling of a bulker in regular waves, *Marine Structures*, 2003, 16, 627-658.
108. Hirdaris, SE, Miao, SH., Price, WG., Temarel, P.: The influence of structural modelling on the dynamic behavior of a bulker in waves, *Proceedings of the Fourth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Wuxi, China, 2006, 25-34.
109. Hirdaris, SE., Miao, SH., Temarel, P.: The effect structural discontinuity on antisymmetric response of a container ship, *Proceedings of the Fifth International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*, Southampton, UK, 2009, 57-68.
110. Cowper, GR.: On the accuracy of Timoshenko's beam theory, *Journal of Engineering Mechanics*, 1968, 94, 1447-1453.
111. Stephen, NG.: Considerations on second order beam theory, *International Journal of Solids and Structures*, 1981, 17, 325-333.
112. Senjanović, I., Fan, Y.: Investigation of effective bending and shear stiffness of thin-walled girders related to ship hull vibration analysis, *Journal of Ship Research*, 1989, 33 (4), 298-309.
113. Jensen, JJ.: On the shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, 1983, 87 (4), 621-635.

ŽIVOTOPIS

Nikola Vladimir rođen je 5. studenog 1980. godine u Metkoviću, gdje je završio osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Studij brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu upisao je 1999., a završio 2007. godine. Zaposlen je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje od 1. siječnja 2008. godine, u Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku, u zvanju asistenta na Katedri za strojeve i uređaje plovnih objekata. Na istom fakultetu u akad. god. 2007/08. upisao je poslijediplomski studij Brodogradnja i pomorska tehnika.

Uključen je u istraživački rad koji se odvija u okviru projekta „Opterećenje i odziv brodskih konstrukcija“, financiranog od MZOŠ Republike Hrvatske pod vodstvom akademika Ive Senjanovića, professora emeritusa, te EU FP7 projekta „Tools for Ultra Large Container Ships – TULCS“, u kojem sudjeluje 14 institucija pod vodstvom Bureau Veritasa, Pariz. Istraživački rad pretežno je vezan uz područje vibracija s naglaskom na razvoj grednog modela za analizu hidroelastičnih vibracija velikih kontejnerskih brodova.

Nastavni rad odnosi se na održavanje vježbi iz predmeta Katedre za strojeve i uređaje plovnih objekata; Brodska akustika, Brodska motorna postrojenja, Brodska parna i plinska postrojenja, Brodski pomoćni strojevi, Osnivanje brodske strojarnice, Pogon broda II i Pogon broda III.

Koautor je tridesetak članaka, objavljenih u znanstvenim časopisima i zbornicima znanstvenih i stručnih skupova. Služi se engleskim i njemačkim jezikom.

Oženjen je i otac je jednog djeteta.

BIOGRAPHY

Nikola Vladimir was born on 5 November 1980 in Metković, where he attended the primary school and finished the sciences and mathematics oriented secondary grammar school. He enrolled in the studies of naval architecture at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture of the University of Zagreb in 1999 and graduated in 2007. Since 1 January 2008 he has been employed as an assistant at the Chair of Marine Engineering, Department of Naval Architecture and Offshore Engineering of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. In the academic year 2007/2008 he enrolled in the postgraduate studies of naval architecture and offshore engineering at the same faculty.

He is involved in the research carried out in the project "Load and response of ship structures", financed by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia and headed by the Professor Emeritus Ivo Senjanović, and also in the EU FP7 project "Tools for Ultra Large Container Ships – TULCS ", coordinated by Bureau Veritas, Paris. His research work is related to the field of vibrations with a special focus on the development of a beam model for the hydroelastic analysis of ultra large container ships.

In his teaching activities he is in charge of exercises in the courses taught by the teaching staff of the Chair of Marine Engineering: Ship Acoustics, Marine Power Plants, Marine Steam and Gas Power Plants, Ship Auxiliary Machinery, Ship Engine Room Design, Ship Propulsion II, and Ship Propulsion III.

He is a co-author of about thirty papers published in scientific journals and proceedings of scientific and professional conferences. He has a good command of English and German.

He is married and a father of one child.

PRILOG A – ANALIZA NETOČNOSTI USLIJED NEKONZISTENTNE FORMULACIJE KONAČNIH ELEMENATA

Značajke grednih konačnih elemenata određene su energetskim pristupom, podrazumijevajući frekvencijski ovisne i neovisne funkcije oblika. Prvi način temelji se na konzistentnoj teoriji vibracija grede, dok drugi slijedi statičku grednu teoriju. Razina točnosti pojednostavljenog pristupa može se odrediti korelacijom rezultata analize prirodnih vibracija prizmatične grede energetskom metodom. Iz jednadžbe energetske ravnoteže (3.47) može se izvesti izraz za prirodnu frekvenciju sustava, u formi Rayleighovog kvocijenta:

$$\omega^2 = \frac{EI\int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}^2 w_b}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + GA_s\int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x}{m\int_0^L w^2 \mathrm{d}x + J\int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}w_b}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x}. \tag{A1}$$

Zbog jednostavnosti, pretpostavljaju se sinusoidalni prirodni oblici

$$w_{bn} = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{A2}$$

U tom slučaju smični i ukupni progib prema jednadžbi (3.45) glase:

$$w_{sn} = \left[-\omega^2 \frac{J}{GA_s} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{A3}$$

$$w_n = \left[1 - \omega^2 \frac{J}{GA_s} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{A4}$$

Uvrštavanjem izraza (A2) odnosno (A3) i (A4) u jednadžbu (A1), te uzimajući u obzir

$$\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{L}{2} \tag{A5}$$

dobivamo:

$$\omega^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{m} \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{GA_s}{EI}\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s} - \omega_n^2 \frac{J}{GA_s}\right]^2}{\left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s} - \omega_n^2 \frac{J}{GA_s}\right]^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{J}{m}}. \tag{A6}$$

Budući da modalna krutost (brojnik) i modalna masa (nazivnik) ovise o nepoznatoj prirodnoj frekvenciji ω_n potrebno je jednadžbu (A6) riješiti iterativno, pri čemu je konvergencija brza zbog razmjerno malog utjecaja člana ω_n^2 na desnoj strani jednadžbe.

Jednadžba (A6) se može približno riješiti ukoliko se zapiše u polinomskoj formi, pri čemu se pojavljuje polinom trećeg stupnja po ω_n^2, koji se može zapisati u obliku produkta dva polinoma

$$P_3\left(\omega_n^2\right) = P_1\left(\omega_n^2\right) \cdot P_2\left(\omega_n^2\right) = 0, \tag{A7}$$

gdje je:

$$P_1\left(\omega_n^2\right) = \frac{J}{GA_s}\omega_n^2 - \left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}\right], \tag{A8}$$

$$P_2\left(\omega_n^2\right) = \frac{J}{GA_s}\omega_n^4 - \left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI}{GA_s} + \frac{J}{m}\right)\right]\omega_n^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m}. \tag{A9}$$

Rješenje $P_1\left(\omega_n^2\right) = 0$ nema fizikalni smisao, kao ni prva svojstvena vrijednost dobivena iz $P_2\left(\omega_n^2\right) = 0$. Druga svojstvena vrijednost predstavlja stvarne prirodne frekvencije

$$\omega_n^2 = \frac{GA_s}{2J}\left\{\left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI}{GA_s} + \frac{J}{m}\right)\right] - \left\{\left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{EI}{GA_s} + \frac{J}{m}\right)\right]^2 - 4\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{GA_s}\frac{J}{m}\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{A10}$$

Polinom $P_2\left(\omega_n^2\right)$ je jednak frekvencijskoj jednadžbi nespregnutih savojnih vibracija, koja se dobije iz jednadžbe (3.20).

U slučaju da vrijede izrazi za statičke pomake, izrazi (A3) i (A4) uz $\omega = 0$, jednadžba (A6) se reducira na približnu formulu za prirodne frekvencije

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m} \frac{1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}}{\left[1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}\right]^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{J}{m}}. \tag{A11}$$

Ukoliko se još zanemari i rotacija masa, tj. neka vrijedi $J = 0$, iz jednadžbe (A11) dobiva se

$$\omega_n^2 = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m}}{1 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{GA_s}}. \tag{A12}$$

Za ilustraciju prihvatljivosti približnog rješenja (A11) i utjecaja zanemarenja rotacije masa, (A12), analizirane su vibracije prizmatičnog pontona čiji parametri krutosti su izvedeni na temelju paralelnog srednjaka analiziranog kontejnerskog broda, poglavlje 6, te su usvojene sljedeće vrijednosti: L = 348 m, A = 7,049 m^2, A_{sy} = 1,056 m^2, I_{bz} = 2428 m^4, m = 100 t/m,

$E = 2{,}1 \cdot 10^8$ knN/m^2, $\nu = 0{,}3$, $\frac{E}{G} = 2(1+\nu)$, $\frac{J}{m} = \frac{I_{bz}}{A}$. Prirodne frekvencije za razmatrane slučajeve su prikazane u Tablici A.1.

Tablica A.1 Prirodne frekvencije vibracija prizmatičnog pontona, f_i (Hz)

Oblik br.	Egzaktno rješenje (A6)	Približno rješenje (A11)	$J = 0$ (A12)	Razlika, %	
	a	*b*	*c*	*b*/*a*-1	*c*/*a*-1
1	0,7540	0,7541	0,7588	0,00	0,63
2	2,1418	2,1422	2,1560	0,02	0,65
3	3,5739	3,5745	3,5900	0,02	0,45
4	4,9789	4,9796	4,9940	0,01	0,30
5	6,3610	6,3617	6,3745	0,01	0,21
6	7,7278	7,7284	7,7397	0,01	0,15
7	9,0844	9,0850	9,0951	0,01	0,12
8	10,4342	10,4347	10,4437	0,01	0,09
9	11,7791	11,7796	11,7877	0,00	0,07
10	13,1205	13,1209	13,1284	0,00	0,06

Razlike između egzaktnog i približnog rješenja su zanemarive. Rješenje za $J = 0$ pokazuje male razlike kod prvih oblika vibriranja, dok s povećanjem rednog broja oblika vibriranja prirodne frekvencije konvergiraju rezultatima dobivenim egzaktnim rješenjem.

PRILOG B – UTJECAJ MODELIRANJA POPREČNIH PREGRADA NA ODZIV BRODSKE KONSTRUKCIJE

Utjecaj modeliranja poprečnih pregrada na odziv brodske konstrukcije detaljnije je istražen na primjeru statičke analize uvijanja prizmatičnog pontona s poprečnim pregradama, izrađenog prema nacrtima kontejnerskog broda nosivosti 7800 TEU, kakav prikazuje Slika 5.20, 1D modelom konačnih elemenata. Osnovne dimenzije pontona prikazane su u točki 3.7.

Kut uvijanja određen je izrazom:

$$\{\psi\} = [k]_u^{-1} \{M_t\}, \tag{B1}$$

gdje je $\{M_t\}$ vektor vanjskog opterećenje (koncentrirani moment na kraju modela, jednak kao u točki 3.7), a $[k]_u$ matrica krutosti konačnog elementa jednaka je:

$$[k]_u = [k]_{ws} + [k]_t . \tag{B2}$$

Matrice krutosti $[k]_{ws}$ i $[k]_t$ su definirane izrazima (3.81) i (3.82).

Razmatrana su tri načina modeliranja; prvi podrazumijeva distribuciju krutosti pregrade na uvijanje (određenu po teoriji ortotropne ploče) po njenoj vlastitoj duljini i duljini skladišta (ostali parametri krutosti uzimaju se od otvorenog presjeka), drugi način je vezan za distribuciju krutosti pregrade, koja je određena po teoriji ortotropne ploče, samo po njenoj duljini, a skladišni prostor tretira kao otvoreni presjek stvarne krutosti, dok treći način modeliranja podrazumijeva pregrade kao kratke konačne elemente čija krutost je određena tretirajući ih kao zatvorene presjek, dok se skladišni prostori modeliraju konačnim elementima otvorenog presjeka stvarne krutosti. Stvarni parametri krutosti presjeka izračunati su programom STIFF, a proračun efektivnih parametara je za pojedini slučaj obrazložen zasebno.

Krutost pregrade distribuirana po duljini skladišta i pregrade

Parametri krutosti za ovaj slučaj određeni su u skladu s teorijom opisanom u poglavlju 4, te su za propusnu i nepropusnu pregradu i kutiju pregrade prikazani u Tablicama B.1-B.3 (tablice su preuzete iz lit. [14, 55]).

Tablica B.1 Značajke krutosti propusne pregrade pontona

Nosač	Moment tromosti I [m^4]	Krutost na uvijanje I_t [m^4]	Razmak nosača c [m]	Moment tromosti po jedinici širine i [m^3]	Krutost na uvijanje po jedinici širine i_t [m^3]
Horizontalni	0,02356	0,01555	2,6	0,00906	0,00493
Vertikalni	0,04196	0,03205	7,9	0,00531	

Tablica B.2 Značajke krutosti nepropusne pregrade pontona

Nosač	Moment tromosti I [m^4]	Krutost na uvijanje I_t [m^4]	Razmak nosača c [m]	Moment tromosti po jedinici širine i [m^3]	Krutost na uvijanje po jedinici širine i_t [m^3]
Horizontalni	0,00972	0,00486	2,6	0,00374	0,001696
Vertikalni	0,01944	0,01215	7,9	0,00246	

Tablica B.3 Krutost kutije pregrade pontona

Smična površina A_s [m^2]	Moment tromosti I_{sb} [m^4]	Krutost na uvijanje I_{st} [m^4]
0,45	0,07804	0,131

U sljedećoj tablici su dane energije deformiranja pregrada koje se sastoje od energije ortotropne ploče i energije kutije pregrade, Tablica B.4, [14, 55].

Tablica B.4 Energija deformiranja pregrada pontona

Pregrada	Ortotropna ploča $U/[E\psi']$	Kutija $U/[E\psi']$	Ukupno $U/[E\psi']$
Propusna	12,051	28,872	40,923
Nepropusna	29,691	28,872	57,563

Parametri krutosti pomoću kojih je proveden proračun prikazani su u Tablici B.5. Faktor krutosti na uvijanje određen je prema jednadžbi (4.4), a faktor krutosti na vitoperenje i smični modul tromosti programom STIFF.

Krutost pregrade distribuirana po njenoj duljini, skladište – stvarna krutost

Da bi se krutost na uvijanje pregrade izračunata po teoriji ortotropne ploče distribuirala po njenoj duljini, potrebno je izvesti odgovarajući izraz za efektivni faktor krutosti na uvijanje (jer jednadžba (4.4) nije primjenjiva).

Energija pregrade kao ortotropne ploče jednaka je:

$$U^p = U_{bg} + U_{sb} + U_{ss} + U_{st}\,. \tag{B3}$$

gdje je U_{bg} energija deformacije roštilja pregrade, definirana izrazom (4.2). U_{sb}, U_{ss} i U_{st} redom predstavljaju energiju deformacije kutije pregrade uslijed savijanja, smicanja i uvijanja, te vrijede sljedeći izrazi, [14]:

$$U_{sb} = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} EI_{sb}\left[\kappa_y\left(y,h\right)\right]^2 \mathrm{d}y = \frac{12h^2 I_{sb}}{b} E\psi'^2\,, \tag{B4}$$

$$U_{ss} = \frac{1}{2}\frac{\left(EI_{sb}\right)^2}{GA_s}\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial\kappa_y\left(y,h\right)}{\partial y}\right]^2 \mathrm{d}y = 72\left(1+\upsilon\right)\frac{h^2}{b^3}\frac{{I_{sb}}^2}{A_s}E\psi'^2, \tag{B5}$$

$$U_{st} = \frac{1}{2}GI_{st}\int_{-b}^{b}\left[\kappa_{yz}\left(y,h\right)\right]^2 \mathrm{d}y = \frac{9bI_{st}}{10\left(1+\upsilon\right)}E\psi'^2. \tag{B6}$$

Ukoliko se pregrada promatra kao zatvoreni presjek duljine *a*, njena energija deformacije, u skladu s [14], jednaka je:

$$U^z = \frac{1}{2}\int_0^a M_t\psi'\,\mathrm{d}x = \frac{M_t^2 a}{2GI_t^z} = \frac{1}{2}GI_t^z a\psi'^2. \tag{B7}$$

Efektivni faktor krutosti na uvijanje I_t^* može se odrediti iz sljedećeg odnosa:

$$\frac{U^p}{U^z} = \frac{\frac{1}{2}GI_t^* a\psi'^2}{\frac{1}{2}GI_t^z a\psi'^2}, \tag{B8}$$

odnosno:

$$I_t^* = \frac{U^p}{U^z}I_t^z. \tag{B9}$$

Povezanost između modula smicanja materijala, *G*, i Youngova modula elastičnosti, *E*, preko Poissonova omjera, *v*, dana je na sljedeći način:

$$G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}, \tag{B10}$$

pa se jednadžba (B7) može zapisati na sljedeći način:

$$U^z = \frac{1}{2}GI_t^z a\psi'^2 = \frac{E}{4\left(1+\nu\right)}I_t^z a\psi'^2 = \frac{I_t^z a}{4\left(1+\nu\right)}E\psi'^2. \tag{B11}$$

Ukoliko se članovi na desnoj strani jednadžbe (B3) pomnože i podijele s $E\psi'^2$, može se pisati:

$$U^p = \left[\frac{U_{bg}}{E\psi'^2} + \frac{U_{sb}}{E\psi'^2} + \frac{U_{ss}}{E\psi'^2} + \frac{U_{st}}{E\psi'^2}\right]E\psi'^2. \tag{B12}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (B11) i (B12) u izraz (B9), te njegovim sređivanjem, dobiva se izraz za efektivni faktor krutosti na uvijanje segmenta trupa s pregradom, duljine *a*:

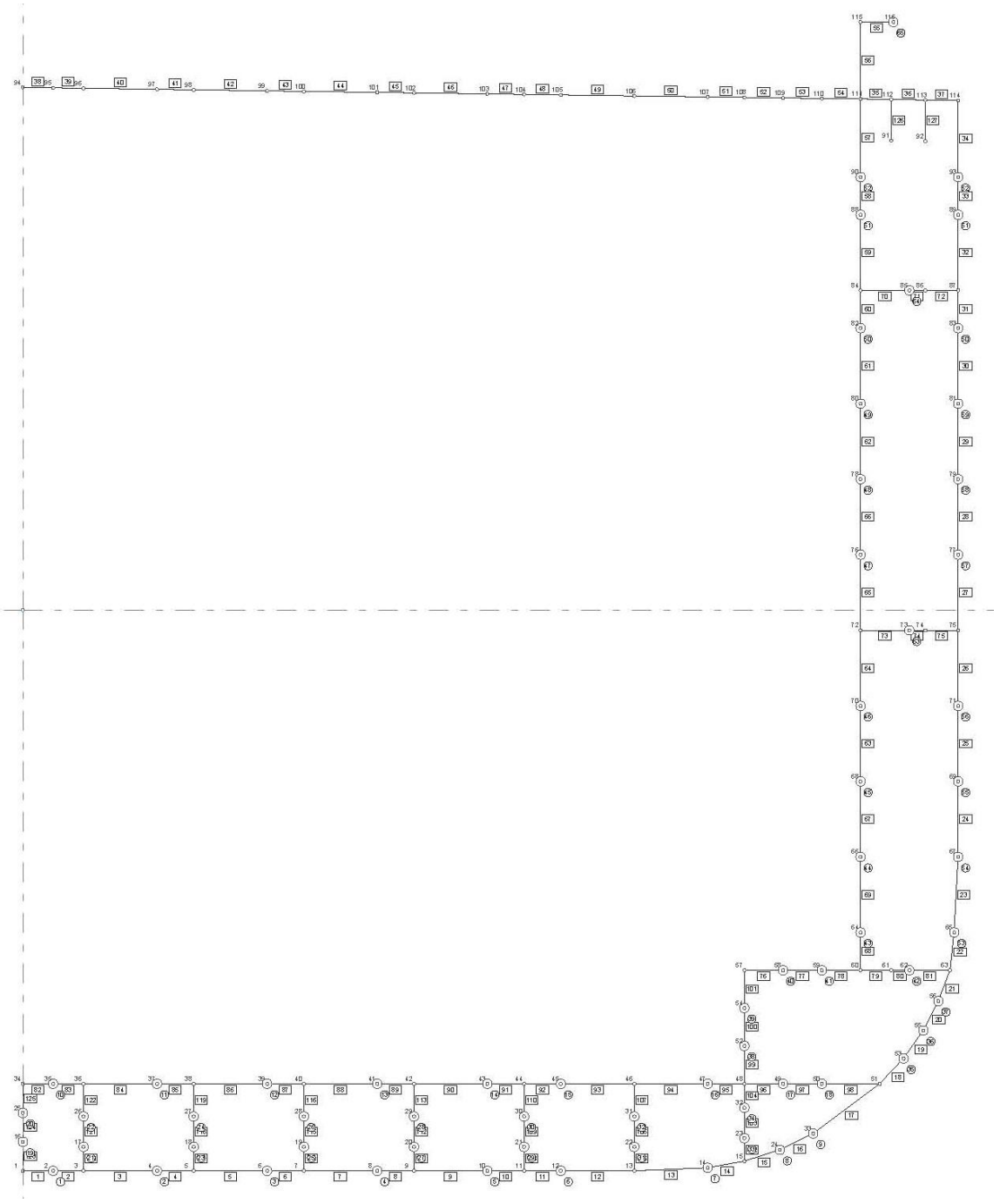
$$I_t^* = \frac{4\left(1+\nu\right)}{a}\left[\frac{U_{bg}}{E\psi'^2} + \frac{U_{sb}}{E\psi'^2} + \frac{U_{ss}}{E\psi'^2} + \frac{U_{st}}{E\psi'^2}\right]. \tag{B13}$$

Budući da su omjeri u uglatoj zagradi izraza (B13), već izračunati, Tablica B.4, može se odrediti torzijska krutost propusne i nepropusne pregrade, koje uz $a = 1{,}8$ m i $\nu = 0{,}3$, iznose $I_t^{*sb} = 118{,}22$ m^4, odnosno $I_t^{*wb} = 169{,}18$ m^4. Propusne i nepropusne pregrade se sukcesivno

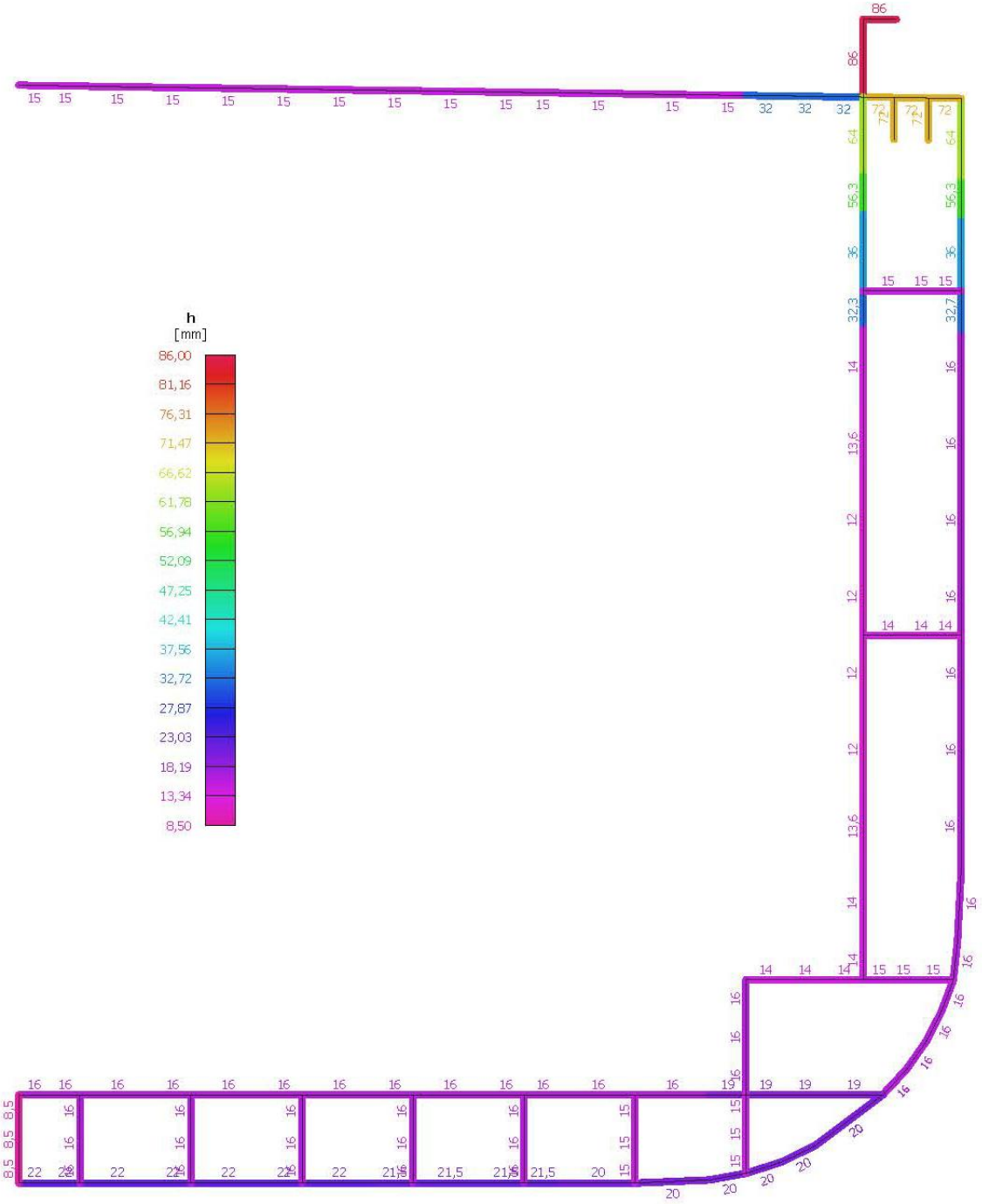
izmjenjuju po duljini pontona pa se za proračun može uzeti srednja vrijednost faktora krutosti na uvijanje, za sve pregrade, Tablica B.5, što primjetno ne utječe na rezultate.

Pregrada kao zatvoreni presjek, skladište – stvarna krutost

Krutost pregrade kao zatvorenog presjeka izračunata je programom STIFF. U obzir su uzeti svi elementi poprečnog presjeka koji sudjeluju u uzdužnoj čvrstoći, a presjek je zatvoren palubom prema nacrtima kontejnerskog broda (detalji u točki 3.7). Topologija čvorova i elemenata, te debljine oplate prikazane su na Slikama B.1 i B.2.



Slika B.1 Topologija čvorova i elemenata zatvorenog presjeka na području poprečne pregrade, program STIFF



Slika B.2 Debljine oplate zatvorenog presjeka, program STIFF

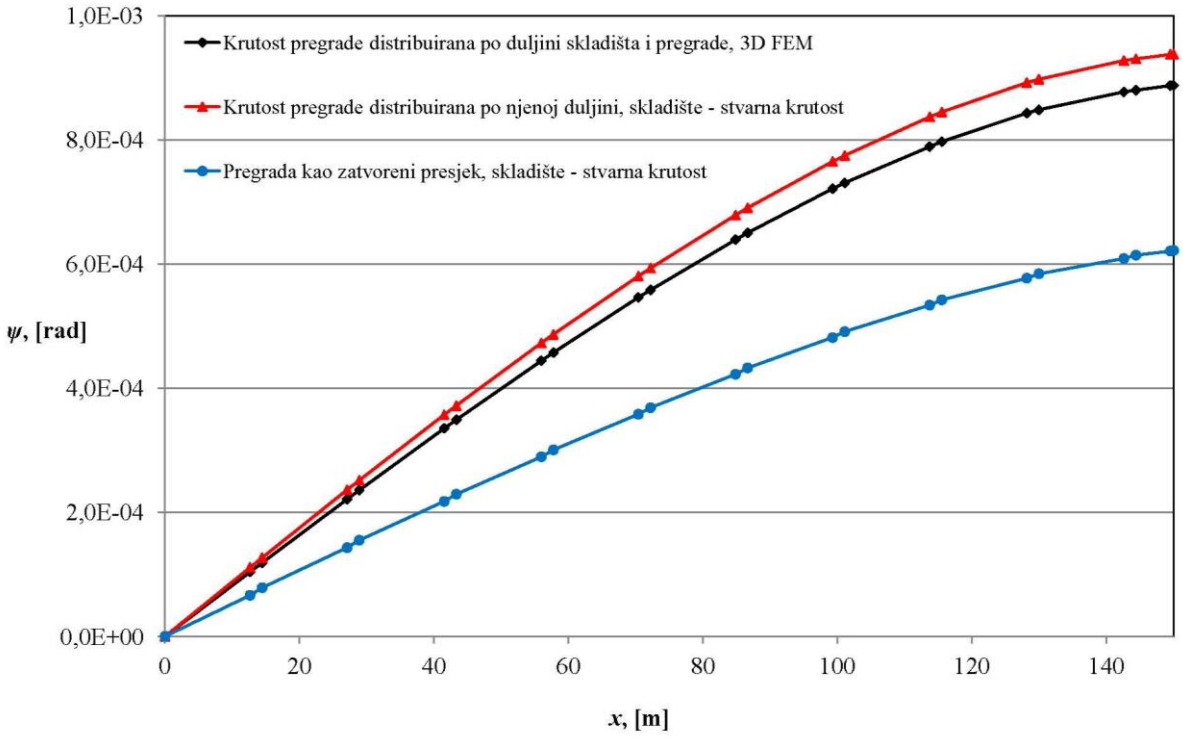
Parametri krutosti konačnih elemenata pregrade i skladišta za ovaj slučaj, kao i za prethodna dva, prikazani su u Tablici B.5.

Diskretizacija pontona za sva tri slučaja je jednaka; jednim dugim konačnim elementom modelirano je skladište, te jednim kratkim pregrada, što čini ukupno 23 konačna elementa. Zbog simetrije modelirana je samo jedna polovica pontona. Na sredini pontona spriječeni su pomaci u poprečnoj ravnini, dok je na kraju spriječeno vitoperenje. Rezultati proračuna prikazani su na slici B.3. Utjecaj topologije konačnih elemenata na rezultate,

provjeren je za prvi slučaj dijeljenjem skladišnog prostora na tri konačna elementa, umjesto na jedan, pri čemu se dobiju identični rezultati.

Tablica B.5 Parametri krutosti konačnih elemenata pregrade i skladišta

Način modeliranja	Segment trupa	Parametar krutosti		
		Krutost na uvijanje I_t, m^4	Krutost na vitoperenje I_w, m^6	Smični modul tromosti I_s, m^4
I	Pregrada	34,42	171400	710,5
	Skladište	34,42	171400	710,5
II	Pregrada	143,7	171400	710,5
	Skladište	14,45	171400	710,5
III	Pregrada	789,5	38040	217
	Skladište	14,45	171400	710,5



Slika B.3 Kutovi uvijanja pontona u ovisnosti o načinu modeliranja brodskog trupa

Rezultati prikazani na Slici B.3 sami za sebe ne govore mnogo ukoliko ih se ne promatra u kontekstu usporedbe s rezultatima dobivenim 3D FEM analizom prizmatičnog pontona s pregradama (točka 5.5.1). Ukoliko bi se ucrtala krivulja odziva dobivena 3D FEM modelom, ona bi se preklapala s rezultatima dobivenim za slučaj distribuirane krutosti

pregrade po duljini skladišta i pregrade (crna krivulja). Usporedba kutova uvijanja na kraju modela za spomenuti slučaj daje:

$$x = L/2: \ \frac{\psi_{1D,\,FEM}}{\psi_{3D,\,FEM}} = \frac{0,0008875}{0,00087265} = 1,017.$$

što predstavlja izuzetno dobro podudaranje. Ukoliko se krutost pregrade, kao ortotropne ploče, distribuira samo po njenoj duljini, dobije se nešto elastičnija konstrukcija (crvena krivulja). Najveća odstupanja dobiju se ukoliko se pregrada modelira kao zatvoreni presjek, a skladište kao otvoreni presjek stvarne krutosti (plava krivulja). Takav način modeliranja pregrada uvelike precjenjuje ukupnu krutost modela.

Dobiveni rezultati potvrđuju da se doprinos poprečnih pregrada ukupnoj krutosti brodskog trupa najtočnije uzima u obzir prema postupku koji je opisan u poglavlju 4. Ovaj primjer ujedno pokazuje neadekvatno modeliranje poprečne pregrade kao kratkog segmenta zatvorenog poprečnog presjeka koje se pojavljuje u literaturi [107, 108, 109].

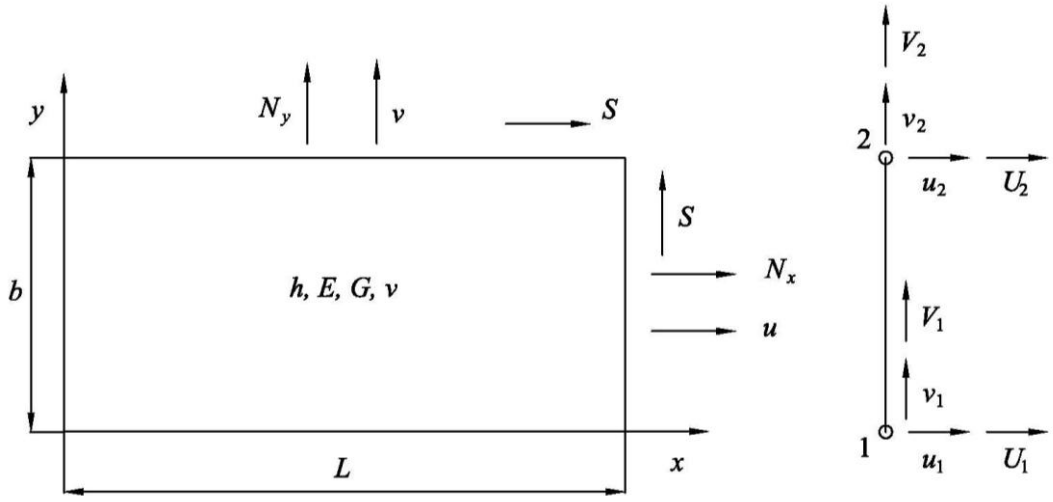
PRILOG C – EFEKTIVNA KRUTOST TANKOSTJENIH NOSAČA

Timošenkova gredna teorija za savojne vibracije, s uključenom smičnom površinom kao parametrom krutosti, vrijedi za prvih nekoliko prirodnih oblika. U literaturi se može pronaći veći broj referencija vezanih za određivanje efektivnih parametara krutosti, u cilju proširenja valjanosti gredne teorije na više oblike vibriranja, kao što su primjerice radovi [36, 93, 110, 111, 112]. Jedan od načina je računanje s fiksnom vrijednošću momenta tromosti i variranje smične površine, dok drugi podrazumijeva variranje oba parametra [113]. Budući da se s povećanjem rednog broja prirodnog oblika vibriranja progib uslijed smicanja povećava, a progib uslijed čistog savijanja smanjuje, drugi način se, kao fizikalno konszistentan, čini prihvatiljivijim. U lit. [77] je na numeričkom primjeru pokazano da je oba parametra potrebno varirati ukoliko se istovremeno želi postići veća točnost analize horizontalnih i spregnutih horizontalnih i torzijskih vibracija.

Određivanje efektivnih parametara tankostjenih nosača za savojne i torzijske vibracije iscrpno je opisano u [30], dok su ovdje navedeni samo osnovni izrazi za savojne vibracije.

Poprečni presjek brodskog trupa (zbog simetrije dovoljno je promatrati jednu polovicu) može se podijeliti na tzv. „strip“ elemente koji se protežu u uzdužnom smjeru, koji mogu biti: membranski, pločasti, štapni i gredni. Kako bi se izbjegla distorzija poprečnog presjeka sve poprečne pregrade po duljini pretpostavljenog prizmatičkog trupa se mogu sažeti u jednu pregradu zajedničke debljine, modeliranu uobičajenim membranskim konačnim elementima.

Slika C.1 prikazuje membranski „strip“ element s geometrijskim i fizikalnim značajkama, čvornim silama i čvornim pomacima.



Slika C.1 Membranski „strip“ element

Polje pomaka opisano je harmonijskim funkcijama (za slobodno oslonjene rubove):

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\phi]\{\delta\}, \tag{C1}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} &[\phi] = [\phi]_C \cos\alpha_n x + [\phi]_S \sin\alpha_n x, \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{L},\ n = 1, 2... \\ &[\phi]_C = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ [\phi]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \\ &\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{C2}$$

Fuknicje ϕ_1 i ϕ_2 su linearne funkcije oblika:

$$\phi_1 = 1 - \eta, \qquad \phi_2 = \eta, \qquad \eta = y / b. \tag{C3}$$

Polje deformacija membrane jednako je:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{\delta\} = [\Lambda][\phi]\{\delta\}, \tag{C4}$$

gdje $[\Lambda]$ predstavlja membranski diferencijalni operator

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{C5}$$

što vodi do izraza:

$$\begin{aligned} &[L] = [L]_C \cos\alpha_n x + [L]_S \sin\alpha_n x \\ &[L]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1' & \alpha_n\phi_1 & \phi_2' & \alpha_n\phi_2 \end{bmatrix}, \quad [L]_S = \begin{bmatrix} -\alpha_n\phi_1 & 0 & -\alpha_n\phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1' & 0 & \phi_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{C6}$$

Matrica elastičnosti membrane jednaka je:

$$[D] = \frac{h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)G \end{bmatrix}. \tag{C7}$$

U skladu s definicijom matrice krutosti u metodi konačnih elemenata i primjenjujući izraz (C3), mogu se dobiti odvojene matrice normalne i smične krutosti:

$$[K]=\int_0^L\int_0^b [L]^T[D][L]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=[K]_E+[K]_G\,, \tag{C8}$$

pri čemu vrijedi:

$$[K]_E=\frac{ELh}{2\left(1-\nu^2\right)b}\begin{bmatrix} \frac{\beta_n^2}{3} & \frac{\nu\beta_n}{2} & \frac{\beta_n^2}{6} & -\frac{\nu\beta_n}{2} \\ & 1 & \frac{\nu\beta_n}{2} & -1 \\ & & \frac{\beta_n^2}{3} & -\frac{\nu\beta_n}{2} \\ Sym. & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_G=\frac{GLh}{2b}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta_n}{2} & -1 & -\frac{\beta_n}{2} \\ & \frac{\beta_n^2}{3} & \frac{\beta_n}{2} & \frac{\beta_n^2}{6} \\ & & 1 & \frac{\beta_n}{2} \\ Sym. & & & \frac{\beta_n^2}{3} \end{bmatrix} \tag{C9}$$

$$\beta_n=\alpha_n b=\frac{n\pi b}{L}.$$

Slijedeći standardni postupak za spajanje konačnih elemenata, jednadžba sustava za svaki *n*-ti oblik glasi:

$$\left([K]_{En}+[K]_{Gn}\right)\{\delta\}_n=\frac{L}{2}\{q\}_n\,, \tag{C10}$$

gdje q_n predstavlja amplitudu pretpostavljenog vertikalnog i horizontalnog savijanja za vertikalne, odnosno horizontalne vibracije.

Smična sila Q i moment savijanja M se odrede jednostrukom, odnosno dvostrukom integracijom harmonijskog opterećenja q po duljini prizmatičkog trupa, a njihove amplitude za cijeli poprečni presjek su jednake:

$$Q_n=\frac{2}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{k}q_n^i,\qquad M_n=\frac{2}{\alpha_n^2}\sum_{i=1}^{k}q_n^i\,, \tag{C11}$$

gdje je k broj opterećenih čvorova na jednoj polovici poprečnog presjeka.

Energije deformacije savijanja i smicanja za jednoliki trup, uslijed harmonijskog momenta savijanja M i smične sile Q, jednake su:

$$\begin{aligned} U_{Mn}&=\frac{1}{2EI_n}\int_0^L M^2\mathrm{d}x=\frac{LM_n^2}{4EI_n} \\ U_{Qn}&=\frac{1}{2GA_{Sn}}\int_0^L Q^2\mathrm{d}x=\frac{LQ_n^2}{4GA_{Sn}}. \end{aligned} \tag{C12}$$

S druge strane, energije deformacije savijanja i smicanja za cijeli trup mogu se odrediti množenjem jednadžbe (C10) s $\langle\delta\rangle_n$, te izjednačavanjem takvog umnoška s izrazima (C12), dobivaju se formule za efektivni moment tromosti poprečnog presjeka, odnosno efektivnu smičnu površinu:

$$I_n = \frac{LM_n^2}{4E\langle\delta\rangle_n [K]_{En} \{\delta\}_n}$$
$$A_{Sn} = \frac{LQ_n^2}{4G\langle\delta\rangle_n [K]_{Gn} \{\delta\}_n}. \tag{C13}$$

Efektivni koeficijenti jednaki su $i_n = I_n / I_0$, odnosno $a_n = A_{Sn} / A_{S0}$. Na sličan način mogu se odrediti efektivne vrijednosti parametara krutosti za uvijanje [30].

Ukoliko se vrijednost momenta tromosti poprečnog presjeka želi držati fiksnom, a varirati samo smičnu površinu, ukupna energija defomacije se mora koristiti za korekciju smične površine.

Koristeći relaciju, koja se dobije iz jednadžbi (C11)

$$M_n = \frac{Q_n}{\alpha_n}, \tag{C14}$$

izveden je sljedeći izraz:

$$a_n^* = \frac{a_n}{1 + \frac{1}{2(1+\nu)\alpha_n^2} \frac{A_s}{I} \frac{a_n}{i_n}}. \tag{C15}$$

Ukoliko se računa s konstantim (o prirodnom obliku neovisnim) vrijednostima parametara krutosti prirodni oblici su ortogonalni, te vrijedi:

$$\int_0^L w_i w_j \mathrm{d}x = 0, \text{ za } i \neq j. \tag{C16}$$

Kada je riječ o prirodnim oblicima vibriranja određenim pomoću efektivnih parametara krutosti, svaki od njih se može izraziti pomoću gore navedenih ortogonalnih oblika, te se može pisati:

$$\int_0^L w_i^j w_j^j \mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i w_k \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j w_l \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i a_k^j \int_0^L w_k^2 \mathrm{d}x \neq 0. \tag{C17}$$