Bezmrežna numerička metoda za analizu ploča

Hoster, Josip

Doctoral thesis / Disertacija

2011

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:243323

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Josip Hoster

BEZMREŽNA NUMERIČKA METODA ZA ANALIZU PLOČA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2011



UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Josip Hoster

MESHLESS NUMERICAL METHOD FOR ANALYSIS OF PLATES

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2011



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

JOSIP HOSTER

BEZMREŽNA NUMERIČKA METODA ZA ANALIZU PLOČA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
dr. sc. Jurica Sorić, redoviti profesor

Zagreb, 2011



UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Josip Hoster

MESHLESS NUMERICAL METHOD FOR ANALYSIS OF PLATES

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Dr. sc. Jurica Sorić, Professor

Zagreb, 2011

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 519.6:621

Ključne riječi:

lokalna bezmrežna (*meshless*) Petrov-Galerkinova metoda (*MLPG*), mješovita (*mixed*) formulacija, slabi oblik uvjeta ravnoteže, kolokacija, B-spline aproksimacijska funkcija, interpolacijska funkcija oblika, Poisson (*thickness*) debljinski *locking*, poprečni posmični (*shear*) *locking*, kaznena (*penalty*) metoda

Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI

Znanstveno polje: STROJARSTVO

Institucija u kojoj je rad izrađen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

Mentor rada: dr. sc. Jurica Sorić, redoviti profesor

Broj stranica: 183

Broj slika: 105

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 50

Datum obrane: 26. listopada 2011.

Povjerenstvo:

dr. sc. Jurica Sorić, redoviti profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

dr. sc. Tina Bosner, docent, Prirodoslovno matematički fakultet, Zagreb

Institucija u kojoj je rad pohranjen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

ZAHVALA

Zahvaljujem prvenstveno mojem mentoru, profesoru Jurici Soriću, za strpljenje i vodstvo koje je pokazao kroz godine istraživanja. Njegova sustavnost i kritičnost su uvelike pomogle u nastanku ovoga rada.

Zahvaljujem profesoru Zdenku Tonkoviću za svu pomoć tijekom istraživanja. Zahvaljujem i svim suradnicima u Laboratoriju za numeričku mehaniku uz koje je svo vrijeme istraživanja prošlo mnogo ugodnije. Njihova susretljivost u raspravama o problemima i prijedlozi su vrlo vrijedni. Zahvaljujem suradnicima na Katedri za mehaniku i čvrstoću i Zavodu za tehničku mehaniku, trenutno zaposlene i sve koji su otišli sa Zavoda.

Posebnu zahvalu upućujem doktoru Tomislavu Jarku koji mi je uz mentora otvorio vrata programiranja numeričkih metoda i olakšao put do završetka ovog rada.

Zahvaljujem docentici Tini Bosner sa Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu za pomoć u istraživanju *B-splinea*.

Hvala vam svima!

SADRŽAJ

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU VII
ZAHVALA IX
SADRŽAJ XI
PREDGOVOR XIII
SAŽETAK XVII
SUMMARY XIX
KLJUČNE RIJEČI XXI
POPIS OZNAKA XXIII
POPIS SLIKA XXXI
1. UVOD 1
1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja 1
1.2. Motivacija 6
1.3. Hipoteza 7
2. O bezmrežnoj formulaciji 9
2.1. Jednadžbe mehanike kontinuuma za *MLPG* formulacije za ploče 9
2.1.1. Geometrija i opisivanje deformiranja ploče 9
2.1.2. Jednadžbe ravnoteže za trodimenzijsko tijelo 11
2.2. Metoda lokalnog težinskog ostatka (reziduala) – Petrov-Galerkinova metoda 13
2.3. *Element Free Galerkin* (*EFG*) metoda 16
2.4. Aproksimacijske funkcije 17
2.4.1. *Moving Least Squares* (*MLS*) aproksimacijska funkcija 19
2.4.2. *B-spline* aproksimacijska funkcija 25
2.4.3. Point Interpolation Method (*PIM*) 34
3. *MLPG* (*Meshless Local Petrov-Galerkin*) metoda za dvodimenzijske probleme 38
3.1. Mješovita bezmrežna formulacija slabog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja 39
3.1.1. Opći oblik jednadžbi 39
3.1.2. Diskretizirani oblik jednadžbi 42
3.1.3. Numerički primjeri 45
3.1.3.1. Konzola opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem 45
3.1.4. Uvjetovanost matrice krutosti s *B-spline* aproksimacijom 2. stupnja 53
3.2. Mješovita bezmrežna formulacija jakog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja 55

3.2.1. Diskretizirani oblik jednadžbi 55
3.2.2. Numerički primjeri 57
3.2.2.1. Konzola opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem 57
3.2.2.2. Membrana opterećena promjenjivo raspodjeljenim opterećenjem 65
3.2.2.3. Debeli zakrivljeni štap 69
3.2.3. Uvjetovanost matrice krutosti, zadovoljavanje rubnih uvjeta sila s *B-spline* aproksimacijom 74
3.3. Mješovita bezmrežna formulacija kombiniranog slabog-jakog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja 79
3.4. Kritički osvrt na primijenjene formulacije za dvodimenzijske probleme 79
4. *MLPG* bezmrežna formulacija za probleme savijanja ploča 83
4.1. O teorijama savijanja ploča 83
4.1.1. Kirchhoff-Loveova teorija ploča 84
4.1.2. Reissner-Mindlinova teorija ploča 85
4.1.3. Klasične teorije višeg reda 87
4.1.4. *Solid-shell* koncept 87
4.1.5. Trodimenzijski opis deformiranja 88
4.2. Mješovita *MLPG* formulacija slabog oblika 88
4.3. *Locking* problemi 92
4.3.1. Poissonov debljinski (*thickness*) *locking* 92
4.3.2. Poprečni posmični (*transversal shear*) *locking* 94
4.3.3. Formulacija s linearnom raspodjelom pomaka po debljini 103
4.3.3.1. Diskretizacija 105
4.3.3.2. Numerički primjeri 112
4.3.4. Formulacija s kvadratičnom raspodjelom pomaka po debljini 120
4.3.4.1. Diskretizacija 122
4.3.4.2. Numerički primjeri 129
5. ZAKLJUČAK 139
LITERATURA 143
ŽIVOTOPIS 147
CURRICULUM VITAE 149

PREDGOVOR

Današnja primijenjena fizika, mehanika i ostale prirodne znanosti oslanjaju se na numeričke metode u rješavanju problema pomoću računala. Najčešće korištena metoda je metoda konačnih elemenata pomoću koje se rješavaju razni problemi u mehanici čvrstih tijela, biomehanici, elektrotehnici, itd. Proširena je njena primjena kroz razne računalne programe za mnoge probleme mehanike čvrstih tijela. Velik problem odnosno nedostatak je stvaranje mreže konačnih elemenata od koje uvelike ovisi kvaliteta rješenja. Velik utjecaj ima i geometrija konačnih elemenata. Primjerice za trokutni element je najpovoljniji oblik stostranični trokut, a svako odstupanje od tog oblika može dovesti do rasta greške. Samo stvaranje mreže je vrlo često dugotrajno i kvaliteta mreže mnogo ovisi o ljudskom faktoru.

U nelinearnim problemima kao npr. velike deformacije ili analiza širenja pukotine potrebna je lokalna promjena mreže tijekom analize. Razlog tomu je distorzija elemenata u slučaju velikih deformacija ili potreba za promjenom elemenata zbog nepodudaranja širenja pukotine i granice elementa. Vrlo distordirani element može dalje uzrokovati gubitak točnosti. Promjena mreže elemenata tijekom analize dovodi do povećanja računalnog vremena. Metoda konačnih elemenata je detaljno istražena i izvedene su formulacije elemenata koje uspješno rješavaju različite probleme. Ostaju otvorena pitanja između ostalih i u kontekstu elemenata za analizu ploča. Općenito, problem je ostvariti C^1 kontinuitet preko granica elemenata.

Ploče su uz ljuskaste konstrukcije vrlo česte u tehničkoj praksi pa se stoga i provode mnoga istraživanja u cilju poboljšanja postojećih metoda analize pločastih i ljuskastih konstrukcija. Formulacije konačnih elemenata za analizu ploča temelje se na klasičnim teorijama ploča, i to Kirchhoff-Loveovoj za savijanje tankih ploča i Reissner-Mindlinovoj za savijanje debelih ploča. U numeričkim metodama za analizu ploča primjenjuju se i teorije ploča višeg reda koje omogućuju opisivanje složenije raspodjele poprečnih posmičnih komponenata naprezanja po debljini ploče i tzv. *solid-shell* metoda. U *solid-shell* metodi pretpostavljena je linearna raspodjela poprečne komponente pomaka po debljini ploče i primjenjuje se potpuni konstitutivni model. U klasičnim teorijama ploča, Kirchhoff-Loveovoj i Reissner-Mindlinovoj ne uzimaju se u obzir sve komponente naprezanja ili deformacija što onemogućuje primjenu potpunog konstitutivnog modela. Nadalje, Kirchhoff-Loveova teorija savijanja tankih ploča zanemaruje poprečne posmične komponente naprezanja, tj. deformacije, te je stoga nepogodna za analizu savijanja debelih ploča. U Reissner-

Mindlinovoj teoriji poprečne posmične komponente deformacije su uzete u obzir kao nezavisne veličine koje opisuju stvarnu raspodjelu tih komponenata deformacija u prosječnom smislu. Prilikom analize tankih ploča u kojima iščezava utjecaj poprečnih posmičnih naprezanja dolazi do značajne greške jer tim načinom opisa deformiranja ploče nije zadovoljen Kirchhoff-Loveov uvjet da je kut nagiba normale na srednju deformiranu plohu ovisan o progibu, tj. derivaciji progiba po koordinatama u srednjoj ravnini, kao jedinoj veličini. Numeričke metode koje se temelje na teorijama ploča višeg reda imaju velik broj stupnjeva slobode što je numerički nepovoljno.

U posljednja dva desetljeća pojavila se nova grupa numeričkih metoda koja se značajno razlikuje od metode konačnih elemenata. To su bezmrežne numeričke metode. Principijelno, u grupu bezmrežnih metoda spada i metoda konačnih razlika, kao najstarija bezmrežna metoda. Razlika između metode konačnih razlika i „modernih“ bezmrežnih metoda je u aproksimaciji veličina polja kao što su pomaci, kutovi zakreta ili naprezanja. U metodi konačnih razlika nema *a priori* aproksimacije, nego se u diskretiziranim jednadžbama koriste samo podaci u čvorovima. Postoje i izmijenjene metode konačnih razlika koje koriste interpolaciju na osnovi čvornih podataka u cilju zadovoljavanja rubnih uvjeta.

Bezmrežne metode se razlikuju od metode konačnih elemenata po načinu aproksimacije funkcije rješenja. U metodi konačnih elemenata u aproksimaciju funkcije rješenja ulaze samo čvorovi koji definiraju element, odnosno podaci u tim čvorovima. U bezmrežnim metodama funkcija rješenja je aproksimirana pomoću skupa slučajno razmještenih čvorova, tj. podataka u tim čvorovima, pa principijelno mogu svi čvorovi proračunskog modela sudjelovati u aproksimaciji rješenja u nekoj točki. Oblik, odnosno stupanj, funkcije rješenja je ograničen brojem podataka u konačnom elementu dok je to neovisno o broju čvorova modela (uz neka ograničenja kao npr. minimalni broj podataka potreban za definiranje funkcije određenog stupnja) u bezmrežnim metodama. Tako se u bezmrežnim metodama može za jedan proračunski model, odnosno za isti broj čvorova, odabrati više različitih aproksimacijskih funkcija. U bezmrežnim numeričkim metodama se primjenjuju različite aproksimacijske funkcije. Najčešće korištene aproksimacijske funkcije su Metoda pomičnih najmanjih kvadrata (*Moving Least Squares* (*MLS*) [1]), Metoda interpolacije po točkama (*Point Interpolation Method* (*PIM*) [2]) s polinomnom (*Polynomial Point Interpolation Method* (*PPIM*)) i radijalnom (*Radial Point Interpolation Method* (*RPIM*)) bazom, Metoda reprodukcije osnovnih dijelova (*Reproducing Kernel Particle Method* (*RKPM*) [3]), Metoda particije jedinice (Partition of Unity (PU) [4]), itd.

Još jedna bitna razlika metode konačnih elemenata i bezmrežnih metoda je u načinu integracije slabog oblika uvjeta ravnoteže. U metodi konačnih elemenata se integriranje provodi po elementu, a mreža konačnih elemenata prekriva područje problema. U bezmrežnim metodama integriranje se provodi po proizvoljnim lokalnim područjima integracije kojih zbroj nužno ne prekriva područje problema. Metoda koja ne odgovara u potpunosti „definiciji“ bezmrežnih metoda je „između“ metode konačnih elemenata i bezmrežnih metodama (u literaturi se razlikuju stoga istinske (*truly*) bezmrežne metode) je Bezmrežna Galerkinova metoda (*Element Free Galerkin Method* (*EFG*)). U toj metodi primjenjuju se tzv. pozadinske ćelije (*background cells*) koje su područja integracije slabog oblika uvjeta ravnoteže. Zbroj tih ćelija je jednak području problema. U grupu bezmrežnih metoda ubrajaju se Bezmrežna lokalna Petrov-Galerkinova metoda (*Meshless Local Petrov-Galerkin* (*MLPG*) [5]), Metoda prirodnih elemenata (*Natural Element Method* (*NEM*) [6]), Metoda lokalnih rubnih integrala (*Local Boundary Integral Equation Method* (*LBIE*) [7]), Metoda konačnih točaka (*Finite Point Method* (*FPM*) [8]), Galerkinova metoda bez elemenata (Element-free Galerking (EFG) [9]), itd. *MLPG* metoda je najčešće primijenjena u području mehanike deformabilnih tijela.

Doktorski rad je podijeljen u 5 poglavlja:

- U 1. poglavlju su ukratko prikazana dosadašnja istraživanja na području bezmrežnih metoda. Opisana je motivacija za nastanak ovog rada i hipoteza očekivanog znanstvenog doprinosa.
- U 2. poglavlju dan je kratki opis jednadžbi mehanike kontinuuma koje se koriste u formulacijama prikazanih bezmrežnih metoda. Prikazane su osnove metode lokalnog težinskog ostatka na kojem se temelje formulacije u radu. Opisane su i primijenjene aproksimacijske funkcije.
- U 3. poglavlju prikazane su mješovite bezmrežne metode za rješavanje problema ravninskog stanja naprezanja. Prikazane su metode temeljene na slabom obliku uvjeta ravnoteže, na jakom obliku uvjeta ravnoteže (kolokacija) i kratko je opisana kombinirana metoda slabog-jakog oblika uvjeta ravnoteže. Na numeričkim primjerima je pokazana numerička učinkovitost prikazanih formulacija. Prikazana je *B-spline* aproksimacija. Postavljanjem uvjeta interpolacije na *B-spline* aproksimacijske funkcije nastaje problem uvjetovanja konačne matrice krutosti. Prikazano je kratko objašnjenje mogućeg uzroka tog problema.

- U 4. poglavlju prikazane su mješovite bezmrežne metode za rješavanje problema savijanja tankih i debelih ploča. Prikazane su metode temeljene na slabom obliku uvjeta ravnoteže. Objašnjena su dva problema koji se javljaju pri analizi ploča, debljinski (*thickness*) i poprečni posmični (*transversal shear*) *locking*. Prikazane se formulacije s linearnom i kvadratičnom raspodjelom poprečne komponente pomaka. Na numeričkim primjerima je pokazana numerička učinkovitost prikazanih formulacija i uklanjanje problema *lockinga*. Primijenjene su *IMLS* i *B-spline* aproksimacijske funkcije.
- U 5. poglavlju prikazan je zaključak, rezultati i dane su smjernice daljnjih istraživanja.

SAŽETAK

U radu su predložene nove bezmrežne numeričke metode za analizu deformiranja ploča koje se temelje na metodi lokalnog težinskog ostatka (reziduala), odnosno lokalnoj Petrov-Galerkinovoj (*MLPG*) metodi. Pritom se provodi integracija slabog oblika uvjeta ravnoteže po lokalnom području integracije. Izbor težinske funkcije u težinskom ostatku je proizvoljan. Ploče su promatrane kao trodimenzijska tijela što omogućuje primjenu trodimenzijskih materijalnih modela. Diskretizacija je provedena čvorovima na donjoj i gornjoj plohi. Težinske funkcije su odabrane kao umnožak jedinične odskočne (Heaviside) funkcije u srednjoj ravnini i linearnih polinoma u pravcu okomitom na srednju ravninu. Nepoznanice u čvorovima su aproksimirane funkcijama definiranim u srednjoj ravnini i polinomima po debljini ploče. Primijenjene su Interpolacijska metoda pomičnih najmanjih kvadrata (*Interpolating Moving Least Squares - IMLS*) i *B-spline* aproksimacijska funkcija. Koriste se interpolacijske funkcije, tj. funkcije oblika imaju Kronecker delta svojstvo.

Predložena je mješovita formulacija pri čemu su komponente pomaka i naprezanja aproksimirane zasebno istim funkcijama. Diskretizacijom uvjeta ravnoteže čvornim komponentama naprezanja dobiva se sustav jednadžbi u kojem je više čvornih nepoznanica od jednadžbi, stoga je potrebno uvesti dodatne jednadžbe. To su konstitutivne relacije koje povezuju komponente naprezanja s komponentama deformacija i kinematičke relacije koje povezuju komponente deformacija s komponentama pomaka. Te su jednadžbe diskretizirane čvornim komponentama pomaka. Nakon uvrštavanja dodatnih diskretiziranih jednadžbi u prvotni sustav s komponentama naprezanja dobiva se sustav s jednakim brojem nepoznanica i jednadžbi. Zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka provodi se izravno, analogno metodi konačnih elemenata zbog interpolacijskih funkcija oblika. Rubni uvjeti sila zadovoljeni su u integralnom smislu.

Aproksimacijom kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka po debljini uklonjen je Poissonov debljinski (*thickness*) *locking*. Aproksimacijom komponenata naprezanja uklonjen je poprečni posmični (*transversal shear*) *locking*.

Točnost predloženih metoda provjerena je na numeričkim primjerima uspoređivanjem rezultata s dostupnim analitičkim rješenjima.

SUMMARY

New meshless numerical methods for the analysis of plate deformation process, which are based on the local weighted residual, i.e. the Local Petrov-Galerkin (MLPG) method, are presented in this PhD thesis. Integration of the weak form of equilibrium equations over a local subdomain is carried out. The choice of the weight function in the weighted residual is arbitrary. Plates are considered as three dimensional bodies, which enables the use of the three-dimensional constitutive law. Discretization is carried out by nodes on both the upper and lower surfaces. The weight functions are chosen as the product of the Heaviside step function in the middle plane and linear polynomials in the direction perpendicular to the middle plane. The nodal unknowns are approximated by functions defined in the middle plane and polynomials over the plate thickness. Interpolating Moving Least Squares (IMLS) and B-spline approximation functions are applied in the middle plane. The applied functions are interpolating, i.e., the shape functions have the Kronecker delta property.

A mixed formulation, with displacement and stress components approximated separatley by the same functions, is proposed. Discretizing the equilibrium equations with the nodal stress components yields a system of equations with more nodal unknowns than equations, and it is therefore necessary to introduce additional equations. These equations are the constitutive relations which connect nodal stress components with nodal strain components and the kinematic relations which connect nodal strain components with nodal displacement components. These relations have been discretized by nodal displacement components. After inserting these additional relations into the first system of equations, a system with an equal number of unknowns and equations is derived. Imposition of the displacement boundary conditions is carried out directly, analogously to the finite element method because of the interpolating shape functions. The traction boundary conditions are satisfied in integral sense.

The Poisson thickness locking has been eliminated by approximating the quadratical transversal displacement component. The transversal shear locking has been eliminated by approximating the stress components.

Accuracy of the proposed methods has been validated in numerical examples by comparing the results with available analythical solutions.

KLJUČNE RIJEČI

Ključne riječi:

lokalna bezmrežna (*meshless*) Petrov-Galerkinova (*MLPG*) metoda,
mješovita (*mixed*) formulacija,
slabi oblik uvjeta ravnoteže,
kolokacija,
B-spline aproksimacijska funkcija,
interpolacijska funkcija oblika,
Poisson (*thickness*) debljinski *locking*,
poprečni posmični (*shear*) *locking* i
kaznena (*penalty*) metoda.

Keywords:

local meshless Petrov-Galerkin (MLPG) method,
mixed formulation,
weak form of equlibrium equations,
collocation,
B-spline aproximation function,
interpolatory shape function,
Poisson thickness locking,
shear locking and
penalty method.

POPIS OZNAKA

a_i - *i*-ti koeficijent u aproksimacijskoj funkciji,

$a_i(\mathbf{x})$ - *i*-ti koeficijent u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{a}$ - vektor koeficijenata u aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ - vektor koeficijenata u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ - momentna matrica u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{A}_{,x_i}(\mathbf{x})$ - derivacija momentne matrice po koordinati x_i u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$ - inverzna matrica momentne matrice u *MLS* aproksimacijskoj funkciji, $\mathbf{A}_{,x_i}^{-1}$

$\mathbf{A}_{,x_i}^{-1}(\mathbf{x})$ - derivacija inverzne matrice po koordinati x_i u *MLS* aproksimacijskoj funkciji, $\mathbf{A}_{,x_i}$

b_j - *j*-ti koeficijent u *PPIM* aproksimacijskoj funkciji,

$b_k(\mathbf{x})$ - *k*-ta bazna funkcija u *B-spline* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{b}$ - vektor koeficijenata u aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$ - matrica u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{B}_{,x_i}(\mathbf{x})$ - derivacija matrice po koordinati x_i u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{B}_0$ - matrica vrijednosti baznih funkcija u čvorovima diskretizacije B-spline aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{B}_I(\mathbf{x}^J)$ - matrica koja povezuje pomake i naprezanja,

$\mathbf{B}_0^{-1}$ - inverzna matrica vrijednosti baznih funkcija u čvorovima diskretizacije B-spline aproksimacijskoj funkciji,

cond - uvjetovanost matrice,

$\mathbf{c}$ - vektor koeficijenata u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

C_{ijkm} - tenzor elastičnosti,

C^m - *m*-ti stupanj kontinuiteta funkcije,

d_C - prosječni čvorni razmak za čvor C u *RPIM* aproksimacijskoj funkciji,

d_k - udaljenost trenutne točke računanja od čvora k u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

d_J - udaljenost trenutne točke računanja od čvora J u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

d_x - veličina lokalnog područja integracije duž osi x,

d_y - veličina lokalnog područja integracije duž osi y,

D - fleksijska (savojna) krutost ploče,

D_1 - kombinacija materijalnih konstanti,

D_2 - kombinacija materijalnih konstanti,

$\mathbf{D}$ - matrica elastičnosti,

$\mathbf{D}_k$ - matrica kinematičkog diferencijalnog operatora,

$\mathbf{D}_k^{(\varepsilon)}$ - matrica diferencijalnog operatora,

e_1 - diskretna srednja vrijednost relativne greške pomaka,

e_2 - diskretna norma relativne greške pomaka,

E - modul elastičnosti,

f_i - komponenta volumenske sile,

$\hat{f}_k$ - fiktivna vrijednost funkcije u točki x_k,

$f^{(h)}(\mathbf{x})$ - aproksimirana funkcija,

$f^{(h)}{}_{,x_i}(\mathbf{x})$ - derivacija aproksimirane funkcije po koordinati x_i,

$\mathbf{f}$ - vektor vrijednosti funkcija u čvorovima,

$\hat{\mathbf{f}}$ - vektor fiktivnih vrijednosti funkcija u čvorovima,

$\tilde{\mathbf{f}}$ - vektor kombiniran od fiktivnih vrijednosti funkcija u čvorovima i nula u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

F - poprečna koncentrirana sila,

G - modul smicanja,

$\mathbf{G}$ - matrica koeficijenata u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{G}^{-1}$ - inverzna matrica koeficijenata u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{G}_{aa}^{-1}$ - podmatrica inverzne matrice koeficijenata u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

$\mathbf{G}_{ba}^{-1}$ - podmatrica inverzne matrice koeficijenata u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

h - debljina ploče,

h_x - razmak čvorova duž osi x,

h_y - razmak čvorova duž osi y,

$H(x,y)$ - Heavisideova funkcija u srednjoj ravnini,

H - visina konzole,

$\mathbf{I}_3$ - jedinična matrica ranga 3,

$J(a(\mathbf{x}))$ - diskretna norma greške aproksimacije u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

k - faktor uprosječavanja utjecaja poprečnih sila na deplanaciju poprečnog presjeka u Reissner-Mindlinovoj teoriji ploča,

$\mathbf{K}$ - matrica krutosti,

$\mathbf{K}_1$ - matrica koeficijenata u diskretizaciji uvjeta ravnoteže čvornim komponentama naprezanja,

$\mathbf{K}_2$ - matrica koeficijenata u diskretizaciji jednadžbi koje povezuju čvorne komponente naprezanja sa čvornim komponentama pomaka,

$\mathbf{K}_1^{(IJ)}$ - podmatrica matrice $\mathbf{K}_1$,

l - oznaka donjeg čvora u paru (skupu) čvorova,

L - duljina konzole,

L_s - dio plohe lokalnog područja integracije koja je unutar područja Ω,

m -broj monoma u bazi aproksimacijske funkcije,

M -spreg sila,

n -broj čvorova koji utječe na aproksimaciju u trenutnoj točki,

n_j - komponenta vektora normale na plohi,

n_x - komponenta normale na pravcu osi x na plohi,

n_y - komponenta normale na pravcu osi y na plohi,

N - broj čvorova diskretizacije proračunskog modela,

$\mathbf{N}$ - matrica komponenata normale,

$N_{j,p}$ - *B-spline* bazna funkcija stupnja p,

$N^{(l)}(z)$ - funkcija oblika pridružena donjem čvoru

$N^{(u)}(z)$ - funkcija oblika pridružena gornjem čvoru

p - raspodijeljeno opterećenje,

$\mathbf{p}$ - vektor monoma baze aproksimacijske funkcije,

$\mathbf{p}$ - vektor koeficijenata u *B-spline* aproksimacijskoj funkciji,

p_k - k-ti koeficijent u *B-spline* aproksimacijskoj funkciji,

$p_m(\mathbf{x})$ - m-ti monom u bazi aproksimacijske funkcije,

$p_{i,x_i}(\mathbf{x})$ - derivacija m-tog monoma u bazi aproksimacijske funkcije po koordinati x_i,

$\mathbf{P}_m$ - matrica polinomnih baza u *RBF* aproksimacijskoj funkciji,

q - eksponent u radijalnoj baznoj funkciji,

r - udaljenost od trenutne točke,

$R_i(r)$ - radijalna bazna funkcija,

R_1 - unutarnji radijus debelog zakrivljenog štapa,

R_2 - vanjski radijus debelog zakrivljenog štapa,

$\mathbf{R}$ - matrica radijalnih baznih funkcija,

$\mathbf{R}$ - vektor opterećenja,

$\mathbf{R}_0$ - matrica vrijednosti radijalnih baznih funkcija u čvorovima diskretizacije,

t - stupanj bazne funkcije u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

t_i - komponenta vektora površinskih sila,

$\mathbf{t}$ - vektor površinskih sila,

T_1 - vrijeme sklapanja matrice krutosti,

u - komponenta pomaka na pravcu osi x,

u - oznaka gornjeg čvora u paru (skupu) čvorova,

$\mathbf{u}$ - vektor pomaka,

$\bar{\mathbf{u}}$ - vektor zadanih pomaka,

$\tilde{\mathbf{u}}$ - vektor pretpostavljenog rješenja,

u_i - komponenta vektora pomaka,

u_i^a - analitička vrijednost komponente vektora pomaka,

u_i^{num} - numerička vrijednost komponente vektora pomaka,

$u_i^{(l)I}$ - komponenta vektora pomaka u donjem čvoru para čvorova I,

$u_{k,m}$ - derivacija komponenta vektora pomaka po koordinati x_m,

v - komponenta vektora pomaka na pravcu osi y,

v - testna funkcija u težinskom ostatku,

$\mathbf{v}$ - vektor testne funkcije u težinskom ostatku,

$\overline{\mathbf{v}}$ - vektor testne funkcije za zadovoljavanje rubnih uvjeta,

v_1 - testna funkcija u težinskom ostatku pridružena donjem čvoru u paru (skupu) čvorova,

v_2 - testna funkcija u težinskom ostatku pridružena gornjem čvoru u paru (skupu) čvorova,

v_{ki} - testna funkcija u težinskom ostatku zapisana indeksno,

$v^{(1)}_{ki}$ - testna funkcija u težinskom ostatku pridružena donjem čvoru zapisana indeksno,

$v^{(2)}_{ki}$ - testna funkcija u težinskom ostatku pridružena gornjem čvoru zapisana indeksno,

$\hat{\mathbf{v}}^I$ - vektor čvornih komponenata pomaka za I –ti par (skup) čvorova,

$W_k(\mathbf{x})$ - težinska funkcija pridružena čvoru k u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\tilde{w}_{RJ}(\mathbf{x})$ - regularizirana težinska funkcija pridružena čvoru J u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

x_i - koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu,

x_{j+n+1} - *B-spline* čvor,

α - kazneni parametar,

α_s - faktor veličine lokalnog područja integracije,

α_C - parametar oblika u radijalnoj baznoj funkciji,

$\boldsymbol{\alpha}$ - matrica kaznenih parametara,

δ_{CS} - veličina područja utjecaja ograničene radijalne bazne funkcije,

$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^I)$ - Dirac impulsna funkcija definirana u točki $\mathbf{x}^I$,

δ_{ij} - Kronecker delta simbol,

∂_{x_i} - derivacija po koordinati x_i,

$\partial\Omega_s$ - rub lokalnog područja integracije,

$\nabla\mathbf{v}^{(l)}$ - gradijent testne funkcije,

ε - faktor u regulariziranoj težinskoj funkciji u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

ε_{ij} - komponenta tenzora deformacije,

$\varepsilon_x^{(l)I}$ - komponenta deformacije u donjem čvoru para (skupa) čvorova *I*,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tenzor deformacije,

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^J$ - vektor čvornih komponenata deformacije,

Γ - rub područja Ω,

Γ_s - rub lokalnog područja integracije Ω_s,

Γ_{su} - rub lokalnog područja integracije Ω_s sa zadanim rubnim uvjetima pomaka,

Γ_{st} - rub lokalnog područja integracije Ω_s sa zadanim rubnim uvjetima sila,

Θ_x - kut zakreta normale ploče uslijed progiba i poprečnih posmičnih deformacija,

ν - Poissonov faktor,

σ_{ij} - komponenta tenzora naprezanja,

$\sigma_{ij}^{(h)}(\mathbf{x})$ - aproksimirana komponenta tenzora naprezanja,

$\boldsymbol{\sigma}$ - tenzor naprezanja,

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ - vektor komponenata naprezanja proračunskog modela,

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I$ - čvorni vektor komponenata naprezanja,

$\sigma_x^{(l)I}$ - komponenta naprezanja u donjem čvoru za par (skup) čvorova *I*,

$\phi_k(\mathbf{x})$ - funkcija oblika pridružena čvoru *k*,

ϕ_x - kut zakreta normale ploče uslijed poprečnih posmičnih deformacija,

$\phi_{k,x_i}(\mathbf{x})$ - derivacija funkcije oblika pridružena čvoru *k* po koordinati x_i,

$\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_I(\mathbf{x})$ - funkcija oblika pridružena čvoru *I* u aproksimaciji naprezanja,

$\boldsymbol{\Phi}_0$ - matrica funkcija oblika u čvorovima u *MLS* aproksimacijskoj funkciji,

$\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x})$ - funkcija oblika u tri dimenzije pridružena čvoru *I* u aproksimaciji pomaka,

$\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I(\mathbf{x})$ - funkcija oblika u tri dimenzije pridružena čvoru *I* u aproksimaciji naprezanja,

$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_J(\mathbf{x})$ - funkcija oblika u tri dimenzije pridružena čvoru *I* u aproksimaciji deformacija,

Ω - područje definicije problema,

Ω_s - lokalno područje integracije,

$\mathfrak{I}$ - diferencijalni operator u uvjetima ravnoteže,

$\mathfrak{N}$ - diferencijalni operator u rubnim uvjetima sila i

0 - oznaka čvora na srednjoj ravnini.

POPIS SLIKA

Slika 1. Geometrija ploče s dva čvora po debljini 10
Slika 2. Geometrija ploče s tri čvora po debljini 10
Slika 3. Tijelo u statičkoj ravnoteži s rubnim uvjetima 13
Slika 4. Težinska funkcija i funkcija pretpostavljenog rješenja 14
Slika 5. Čvorovi u dvodimenzijskom području s pridruženim lokalnim područjima 14
Slika 6. Područje problema u dvodimenzijskom prostoru s pridruženim pozadinskim ćelijama 16
Slika 7. Utjecaj čvorova u aproksimaciji *MLS*-om u dvodimenzijskom prostoru 21
Slika 8. Aproksimacija *MLS*-om u jednodimenzijskom prostoru 21
Slika 9. *B-spline* bazne funkcije u jednodimenzijskom prostoru [27] 26
Slika 10. De Boor-Cox-ov algoritam [27] 26
Slika 11. Shematski prikaz bikvadratne *B-spline* baze u dvodimenzijskom prostoru 29
Slika 12. Bikvadratna *B-spline* baza u dvodimenzijskom prostoru 29
Slika 13. Bikvadratna *B-spline* funkcija oblika u dvodimenzijskom prostoru 31
Slika 14. Parcijalna derivacija $\phi_{,x}$ *B-spline* funkcije oblika sa slike 13 31
Slika 15. Parcijalna derivacija $\phi_{,y}$ *B-spline* funkcije oblika sa slike 13 32
Slika 16. Konzola opterećena promjenjivim raspodijeljenim opterećenjem 46
Slika 17. Konzola s mješovitim rubnim uvjetima 46
Slika 18. Diskretizacija i lokalna područja integracije konzole sa slike 17 46
Slika 19. Konveregencija pomaka na $x = L, y = 0$ za konzolu sa slike 18 47
Slika 20. e_1 diskretna relativna greška za konzolu sa slike 18 49
Slika 21. e_2 diskretna norma za konzolu sa slike 18 49
Slika 22. Utjecaj parametra *c* u *MQ RBF* aproksimaciji za konzolu sa slike 18 50
Slika 23. e_1 diskretna relativna greška za *MQ RBF* aproksimaciju za konzolu sa slike 18 50
Slika 24. Utjecaj parametra *c* u *EXP RBF* aproksimaciji za konzolu sa slike 18 51
Slika 25. e_2 diskretna norma za *EXP RBF* aproksimacijiom za konzolu sa slike 18 51
Slika 26. Utjecaj veličine područja utjecaja čvora u *IMLS* aproksimaciji uz kinematičku transformaciju za konzolu sa slike 18 52
Slika 27. Četvrtina membrane s mješovitim rubnim uvjetima 53
Slika 28. Uvjetovanost matrice krutosti $\mathbf{K}$ za *B-spline* aproksimaciju 2. stupnja 54
Slika 29. Konzola opterećena promjenjivim raspodijeljenim opterećenjem 57
Slika 30. Konzola s rubnim uvjetima pomaka 58
Slika 31. Konzola s mješovitim rubnim uvjetima 58
Slika 32. Konzola s minimalno rubnih uvjeta pomaka 58

Slika 33. e_1 diskretna relativna greška za konzolu sa slike 30 59

Slika 34. e_2 diskretna norma za konzolu sa slike 30 59

Slika 35. Konvergencija pomaka u točki $x = L, y = 0$ za konzolu sa slike 31 60

Slika 36. e_1 diskretna relativna greška za konzolu sa slike 31 60

Slika 37. e_2 diskretna norma za konzolu sa slike 31 61

Slika 38. Konvergencija pomaka u točki $x = L, y = 0$ za konzolu sa slike 32 61

Slika 39. e_1 diskretna relativna greška za konzolu sa slike 32 62

Slika 40. e_2 diskretna norma za konzolu sa slike 32 62

Slika 41. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u za konzolu sa slike 31 63

Slika 42. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u za konzolu sa slike 31 63

Slika 43. Utjecaj kaznenog parametra s *B-spline* aproksimacijskom funkcijom za primjer sa slike 31 64

Slika 44. Membrana opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem 65

Slika 45. Konvergencija pomaka u u točki A membrane sa slike 44 66

Slika 46. Konvergencija pomaka u u točki B membrane sa slike 44 66

Slika 47. Konvergencija pomaka v u točki B membrane sa slike 44 67

Slika 48. Konvergencija pomaka v u točki C membrane sa slike 44 67

Slika 49. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *MLS*-u s kinematičkom transformacijom na pomak u u točki A za membranu sa slike 44 68

Slika 50. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u s kinematičkom transformacijom na pomak u u točki B za membranu sa slike 44 68

Slika 51. Debeli zakrivljeni štap opterećen promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem 69

Slika 52. Debeli zakrivljeni štap sa zadanim rubnim uvjetima pomaka 70

Slika 53. Debeli zakrivljeni štap s mješovitim rubnim uvjetima 70

Slika 54. Debeli zakrivljeni štap s rubnim uvjetima sila i minimalno rubnih uvjeta pomaka 71

Slika 55. e_1 diskretna srednja relativna greška za štap sa slike 52 71

Slika 56. e_2 diskretna norma za štap sa slike 52 72

Slika 57. Konvergencija pomaka u na srednjem radijusu i $y = 0$ za štap sa slike 53 72

Slika 58. e_1 diskretna srednja relativna greška za štap sa slike 53 73

Slika 59. e_2 diskretna norma za štap sa slike 53 73

Slika 60. Četvrtina membrane s minimalno zadanih rubnih uvjeta pomaka 75

Slika 61. Četvrtina membrane s mješovitim rubnim uvjetima 75

Slika 62. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ (definirana u (2.60)) i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za $\alpha = 10^6$ 75

Slika 63. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za $\alpha = 10^0$ ... 76

Slika 64. Usporedba uvjetovanosti matrica krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 61 za razne rubne uvjete i vrijednosti kaznenog parametra 77

Slika 65. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 61 za $\alpha = 10^0$ ... 78

Slika 66. Usporedba vremena sklapanja matrice $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za kolokacijsku i intergralnu metodu ... 78

Slika 67. Baze koje sudjeljuju u aproksimaciji (različite od 0) u čvoru 7 ... 80

Slika 68. Baze koje sudjeljuju u definiciji funkcije oblika (različite od 0) u čvoru 7 ... 81

Slika 69. Deformirana ploča i nagib normale prema Kirchhoff-Loveovoj teoriji ... 85

Slika 70. Deformirana ploča i nagib normale prema Reissner-Mindlinovoj teoriji ... 86

Slika 71. Lokalna područja integracije i plohe koje ih omeđuju ... 91

Slika 72. Čisto savijanje ploče s rubnim uvjetima ... 93

Slika 73. Točna raspodjela komponenata naprezanja i deformacija za čisto savijanje ploče ... 93

Slika 74. Netočna raspodjela komponenata naprezanja i deformacija za čisto savijanje ploče ... 94

Slika 75. Lokalno područje integracije za unutarnji par čvorova ... 95

Slika 76. Diskretizacija ploče s 2 čvora po debljini ... 104

Slika 77. Konzolno uklještena ploča ... 113

Slika 78. Utjecaj odnosa duljina stranice prema debljini za ploču prema slici 77 ... 113

Slika 79. Konvergencija progiba u točki $x = 10,\ y = 0,5$ za ploču sa slike 77 ... 114

Slika 80. Utjecaj broja stupnjeva slobode i odnosa duljine stranica prema debljini na uvjetovanost matrice krutosti za ploču prema slici 77 ... 114

Slika 81. Utjecaj broja stupnjeva slobode na uvjetovanost matrice krutosti za ploču sa slike 77 ... 115

Slika 82. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 77 ... 115

Slika 83. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploče uklještene po svim stranicama ... 116

Slika 84. Pogled u ravnini O*xy* kvadratne ploče sa slike 83 ... 117

Slika 85. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0,\ z = 0$ sa $\nu = 0$ za ploču sa slike 84 ... 118

Slika 86. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0,\ z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 84 ... 118

Slika 87. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0$ za ploču sa slike 84 ... 119

Slika 88. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču prema slici 84 ... 119

Slika 89. Diskretizacija ploče s 3 čvora po debljini ... 121

Slika 90. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploča uklještene po svim stranicama ... 130

Slika 91. Pogled u ravnini O*xy* ploče sa slike 90 ... 130

Slika 92. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 91 ... 131

Slika 93. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 91 ... 131

Slika 94. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 91 ... 132

Slika 95. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploče slobodno oslonjene po svim stranicama ... 133

Slika 96. Pogled u ravnini O*xy* ploče sa slike 95 ... 133

Slika 97. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 96 ... 134

Slika 98. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 96 ... 134

Slika 99. Četvrtina kvadratne ploče uklještene na svim stranicama silom ... 135

Slika 100. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 99 ... 135

Slika 101. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 99 136

Slika 102. Četvrtina kvadratne ploče slobodno oslonjene na svim stranicama opterećene silom..... 136

Slika 103. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 102 . 137

Slika 104. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 102 137

Slika 105. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 102 138

1. UVOD

1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja

Dosad su razvijene bezmrežne metode za analizu deformiranja ploča temeljene na klasičnim teorijama ploča kao što su Kirchhoff-Loveova i Reissner-Mindlinova teorija kao i općenitija *solid-shell* metoda koja opisuje deformiranje ploče kao trodimenzijskog kontinuuma uz pretpostavku o linearnoj raspodjeli poprečne komponente pomaka po debljini. U toj metodi primjenjuje se potpuni trodimenzijski konstitutivni model. Formulacija temeljena na trodimenzijskom konceptu primijenjena je u bezmrežnim metodama temeljenim na lokalnoj integraciji slabog oblika uvjeta ravnoteže.

U analizi savijanja ploča numeričkim metodama mogući su *locking* problemi. *Locking* predstavlja ograničenje ili nemogućnost numeričke metode da točno opiše neka elementarna stanja deformiranosti. Jedan primjer takvog stanja je čisto savijanje. U slučaju nemogućnosti opisivanja tog stanja u numeričkim metodama se javlja debljinski (*thickness*) *locking*. Drugo elementarno stanje deformiranosti je savijanje tanke ploče, u kojem slučaju utjecaj poprečnih posmičnih komponenata naprezanja u energiji deformiranja mora isčezavati. Nemogućnost opisivanja toga stanja uzrokuje poprečni posmični (*transversal shear*) *locking*. U bezmrežnim metodama temeljenim na teoriji prvog reda za poprečne posmične deformacije, kao što je Reissner–Mindlinova, javlja se problem poprečnog posmičnog *lockinga*. Pojava nekog od *locking* problema može proizaći iz primjene istih interpolacijskih funkcija za sve poopćene pomake u formulaciji, odnosno za pomake i kutove zakreta [10]. Takvim opisivanjem deformiranja ne može se dobro opisati deformiranje tankih ploča. To je u području metode konačnih elemenata riješeno primjenom selektivne reducirane integracije [11].

U radu [12] pokazano je da se selektivnom reduciranom integracijom u metodama pomaka može ukloniti pojava poprečnog posmičnog *lockinga*, te je taj postupak ekvivalent nekim mješovitim modelima dobivenim iz Hellinger-Reissner funkcionala. Taj postupak je nazvan teorem ekvivalencije. Primjena teorema ekvivalencije zahtijeva određivanje točaka postavljenim u elementu na mjestima koja su određena prema točnoj numeričkoj integraciji podintegralnih funkcija. U bezmrežnim metodama u pravilu ne postoji takva točna numerička integracija za aproksimacijske funkcije te stoga selektivna reducirana integracija nije

primjenjiva u bezmrežnim metodama. Često se u metodi konačnih elemenata primjenjuju različite metode ublažavanja ili uklanjanja poprečnog posmičnog *lockinga* kao što su metoda pretpostavljene prirodne deformacije (*Assumed Natural Strain* [13]), metoda poboljšane pretpostavljene deformacije (*Enhanced Assumed Strain* [14]), itd.

U literaturi su predloženi neki od primjenjivih načina uklanjanja poprečnog posmičnog *lockinga* u bezmrežnim metodama. Najjednostavniji način u metodi pomaka je povećanje reda baznih funkcija što može smanjiti ali ne nužno i ukloniti poprečni posmični *locking* [10]. Taj pristup može uzrokovati slučajne skokovite posmične sile [15]. Integracija po čvoru je naziv za podintegraciju tj. smanjenje broja točaka integracije od minimalnog za točnu integraciju slabog oblika uvjeta ravnoteže, no to može dovesti do slučajnih singularnih modova što je pokazano u [16] pa to zahtijeva neku vrstu stabilizacije. U postupku stabilizacije se javljaju druge derivacije funkcija oblika [16] što zahtjeva dodatno vrijeme računanja. Mješovita formulacija može uspješno ukloniti poprečni posmični *locking*. Još jedan od načina je i tzv. pravilo konzistencije [15] ili drugog naziva nejednak red interpolacije što je za bezmrežne metode prikazano u [17]. U tom se pristupu interpolacija ili aproksimacija različitih kinematičkih veličina kao npr. pomaka i kutova zakreta provodi funkcijama različitih redova [10], [18]. Zamjenom nezavisnih veličina moguće je ukloniti *locking* pojave [19]. Jedan od načina zamjena varijabli je i zamjena dodatnog kuta zakreta normale uslijed poprečnih posmičnih deformacija komponentama deformacije.

U Galerkinovoj metodi primjena derivacija funkcija oblika progiba za polje kutova zakreta uzrokuje singularnu matricu krutosti jer su te funkcije linearno zavisne. Autori [10] pokazuju da je jedini način da takav pristup bude primjenjljiv korištenje dodatnih uvjeta na funkcije oblika i njihove derivacije, tzv. *partition of unity paradigm*, tj. uvjet jediničnog zbroja dijelova za funkcije oblika i tzv. *partition of nullity paradigm* za derivacije funkcija oblika. To znači da u bilo kojoj točki područja definicije problema i aproksimacijskih funkcija zbroj funkcija oblika mora biti jedan, a zbroj njihovih derivacija u bilo kojoj točki mora biti nula. Ovo proizlazi iz aproksimacije polinomnim bazama reda m. Za probleme ploča kojima je deformiranje opisano progibom i kutovima rotacije aproksimacija polinomima vodi na $m + 1$ mogućnosti koje zadovoljavaju uvjet linearne zavisnosti pa proizlazi da je za ploče broj linearnih zavisnosti $2(m + 1)$. Te činjenice su dosad bile nezapažene, iako su zabilježene u numeričkim ispitivanjima. Linearno zavisne aproksimacije uzrokovat će vrlo slabo uvjetovane matrice sustava.

Ovaj zaključak ipak ne znači da se pristup konzistencije ne bi trebao koristiti. To upućuje na potrebu posebnih mjera vezanih za korišteni algoritam rješavanja sustava

jednadžbi i u slučaju kad broj nultih vlastitih vrijednosti matrice sustava ima značajnu ulogu za problem koji se rješava. Nulte vlastite vrijednosti imaju poseban značaj u geometrijski nelinearnim analizama u blizini točke bifurkacije. Ovakve pojave su izražene u vrlo tankim pločama. Primjena pristupa konzistencije može se provesti ugrađivanjem uvjeta konzistencije u operator kompatibilnosti i korištenjem istih aproksimacijskih funkcija za sve poopćene pomake.

Isti autori predlažu formulaciju koja uključuje posmične deformacije prvog reda uz aproksimaciju deformacija umjesto rotacija što je vrlo slično Reissner-Mindlinovoj teoriji. U obje formulacije je konstitutivni model jednak. U predloženoj formulaciji poprečne posmične deformacije mogu težiti nuli za slučaj tanke ploče. U operatoru kompatibilnosti i ravnoteže su uključene i druge derivacije, što je analogno Kirchhoff-Loveovoj formulaciji što pak vodi na zahtjev za minimalno C^1 kontinuitet aproksimacije. Također nema zapreka za korištenjem istih aproksimacija za pomake i deformacije što ubrzava proračun. Stoga se ova formulacija može opisati kao generalizacija modela za tanke ploče s dodanim posmičnim deformacijama.

U radu [20] razvijena je bezmrežna numerička metoda temeljena na lokalnom slabom obliku uvjeta ravnoteže i metodi pomaka. Metoda se temelji na Kirchhoff-Loveovoj teoriji za tanke ploče. Za aproksimaciju poprečne komponente pomaka, progiba, koristi se *MLS* aproksimacijska funkcija koja nema svojstvo interpolacije. Zbog tog razloga potrebno je zadovoljiti rubne uvjete pomaka na poseban način. Autori koriste kaznenu metodu u kojoj se integrira greška rubnih uvjeta pomaka pomnožena kaznenim parametrom. To se provodi za progibe i kutove nagiba dobivene derivacijom progiba po koordinatama u srednjoj ravnini ploče. U Petrov-Galerkinovoj metodi proizvoljan je odabir testne funkcije. Integracija slabog oblika provodi se lokalno, po lokalnim područjima pravilnog, jednostavnog geometrijskog oblika. Testna funkcija je odabrana tako da joj je i vrijednost i derivacija jednaka nuli na rubu lokalnog područja. Na integrale težinskog ostatka primjenjuje se Gaussov integralni poučak tako da se smanjuje zahtjev na kontinuitet aproksimacijske funkcije i istovremeno uključe rubni uvjeti sila. Iz toga i proizlazi jednakost zahtjeva na testnu i aproksimiranu funkciju. Pokazano je da je i Heavisideova funkcija dobar odabir za probleme savijanja ploča. Primijenjena aproksimacijska funkcija ima C^2 kontinuitet pa su i izračunati momenti kontinuirane funkcije po području problema. Metoda je provjerena na numeričkim primjerima tankih ploča. Rezultati pokazuju da metoda daje vrlo dobra rješenja za probleme savijanja tankih ploča. Nedostatak metode je numerička integracija te računanje drugih derivacija *MLS* funkcija koje su komplicirane te stoga vremenski zahtjevne.

U radu [21] prikazana je *MLPG* metoda temeljena na teoriji ploča višeg reda, nazvana teorija ploča višeg reda s uključenim poprečnim posmičnim i normalnim deformacijama, (*Higher order shear and normal deformable plate theory* - *HOSNDPT*). Primijenjene su dvije lokalne bezmrežne metode (*Meshless Local Petrov-Galerkin – MPLG*), *MLPG*1 koja koristi težinsku funkciju u *MLS* aproksimacijskoj funkciji kao testnu i *MLPG*5 koja koristi Heaviside funkciju kao testnu. Teorija ploča višeg reda na kojoj je temeljena metoda uzima u obzir rubne uvjete sila na gornjoj i donjoj plohi tako da su izravno zadovoljeni rubni uvjeti za posmična i normalna poprečna naprezanja. Za raspodjelu pomaka po debljini korišteni su normalizirani Legendreovi polinomi. Najviši stupanj tih polinoma je 7. Vrlo bitno u toj formulaciji je činjenica da su u teoriji višeg reda tenzori deformacija i naprezanja potpuni, pa je moguće primijeniti potpuni trodimenzijski konstitutivni model. Rezultati analize numeričkih primjera pokazuju da je za debele ploče konvergencija postignuta za 4. red teorije, što znači da je potreban vrlo velik broj stupnjeva slobode. To je glavni nedostatak metode. Pogodnost je točnije opisivanje stanja naprezanja i deformacija. Primijenjena je kvadratična raspodjela poprečne komponente pomaka po debljini ploče, kao i *MLS* aproksimacijska funkcija koja zahtijeva mnogo vremena za računanje derivacija funkcija oblika u odnosu na npr. *PPIM* aproksimacijsku funkciju.

U radu [22] prikazana je bezmrežna *locking-free* metoda temeljena na metodi pomaka. Slična metoda opisana je u radu [23]. Razlika u odnosu na [23] je u opisu deformiranja, odnosno uvedena je nova varijabla koja omogućuje opisivanje deformiranja debele i tanke ploče, bez pojave poprečnog posmičnog *lockinga*. U metodama razvijenim u [22] i [23] zadovoljavanje rubnih uvjeta sila je provedeno integriranjem. Na taj način rubni uvjeti sila su približno zadovoljeni. Zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka je provedeno pomoću kaznene metode jer funkcije oblika temeljene na *MLS* aproksimacijskoj funkciji nemaju svojstvo interpolacije čvornih vrijednosti. Odabir kaznenog parametra utječe na točnost zadovoljavanja rubnih uvjeta pomaka.

U radu [24] je primijenjena bezmrežna mješovita metoda temeljena na lokalnoj integraciji slabog oblika uvjeta ravnoteže. Neovisno su aproksimirana polja pomaka i deformacija. Nadalje je provedena diskretizacija jednadžbi ravnoteže čvornim komponentama deformacija. Sustav jednadžbi tako nije zatvoren zbog većeg broja nepoznanica od broja jednadžbi te je potrebno uvesti dodatne jednadžbe. Dodatne su jednadžbe kinematička ograničenja u integralnom obliku. Ploča je diskretizirana parovima čvorova na gornjoj i donjoj plohi. Na osnovi diskretizacije moguće je aproksimirati linearnu raspodjelu poprečne

duljinske komponente deformacije (ε_z). U cilju izbjegavanja debljinskog *lockinga* raspodjela ε_z ne smije biti konstantna pa je uveden uvjet da su čvorne komponente ε_z različite u gornjem i donjem čvoru. Rubni uvjeti sila su zadovoljeni u integralnom smislu a rubni uvjeti pomaka kaznenom metodom. U ovoj metodi se koriste samo prve derivacije funkcija oblika. Nedostatak metode je što je točnost rješenja ovisna o odabiru broja Gaussovih točaka integracije, parametara u *MLS* aproksimacijskoj funkciji te veličini lokalnog područja integracije.

U radu [25] je primijenjena metoda vrlo slična onoj u [24] s razlikom da su kao nepoznanice za parove čvorova uz komponente deformacije $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ i normalna poprečna komponenta naprezanja σ_z pridružena točki u srednjoj ravnini. Nepoznanice u srednjoj ravnini su opisane kao srednja vrijednost odgovarajućih nepoznanica u čvorovima na gornjoj i donjoj plohi. U *MLS* aproksimacijskoj funkciji primijenjena je regularizirana težinska funkcija koja daje približno (relativna greška oko 10^{-5}) interpolacijsko svojstvo. Rubni uvjeti pomaka su zadovoljeni izravno. U metodama primijenim u [24] i [25] nedostatak je integracija kompliciranih *MLS* aproksimacijskih funkcija što metodu čini vremenski zahtjevnom. Problemi poprečnog posmičnog i debljinskog *lockinga* su uklonjeni.

Značajan je rad [26] u području mješovitih kolokacijskih bezmrežnih metoda za analizu dvodimenzijskih problema. Razvijena metoda je primijenjena na ravninske probleme linearne elastičnosti. Pretpostavljena je raspodjela polja naprezanja i polja pomaka, zasebno, istom *MLS* aproksimacijskom funkcijom. Funkcije oblika su izvedene uz uvjet interpolacije radi izravnog zadovoljavanja prirodnih rubnih uvjeta. Jednadžbe ravnoteže su diskretizirane čvornim komponentama naprezanja. Čvorne komponente naprezanja su razdijeljene na poznate, vezane za rubne uvjete sila i ostale, nepoznate. U idućem koraku su naprezanja prikazana deformacijama preko Hookeovog zakona a deformacije pomacima preko kinematičkih relacija. Metoda je jednostavna, relativno brza jer nema integracije i kao u [24] i [25], potrebne su samo prve derivacije funkcija oblika.

U metodama koje koriste „klasičnu“, neinterpolacijsku *MLS* aproksimacijsku funkciju rubni uvjeti pomaka su zadovoljeni kaznenom metodom pa to komplicira metodu i povećava vrijeme računanja. Općenito, među aproksimacijskim funkcijama je *MLS* najkompliciranija u smislu izračunavanja funkcija oblika i njihovih derivacija. U mješovitim formulacijama s diskretizacijom s čvorovima na gornjoj i donjoj plohi ploče potrebni su dodatni uvjeti kojima

se osigurava linearna raspodjela duljinske poprečne komponente deformacije ε_z u cilju izbjegavanja debljinskog *lockinga*.

1.2. Motivacija

Bezmrežne numeričke metode pružaju mnoge prednosti pred metodom konačnih elemenata. Najznačajnija prednost je fleksibilnost diskretizacije u smislu promjene položaja čvorova diskretizacije tijekom analize te dodavanje ili oduzimanje čvorova iz proračunskog modela. Takve promjene proračunskog modela se mogu pojaviti u linearnim problemima mehanike loma prilikom analize širenja pukotine, u nelinearnim problemima, pri velikim pomacima i velikim deformacijama, npr. duboko vučenje, analiza sudara itd. U takvim analizama u metodi konačnih elemenata potrebno je provoditi preuređivanje mreže (*remeshing*) ako se geometrija elemenata značajno promijeni jer to može dovesti do lošijih rezultata. Globalni kontinuitet funkcije rješenja je za većinu primijenjenih aproksimacijskih funkcija u bezmrežnim metodama barem C^2 što je vrlo pogodno u analizi ploča temeljenim na klasičnim teorijama ploča. U formulacijama temeljenim na integriranju slabog oblika uvjeta ravnoteže slobodan je izbor oblika i veličine lokalnog područja integracije što je manje ograničenje prema konačnim elementima kojih zbroj mora prekriti područje problema.

U području bezmrežnih metoda za analizu ploča primjenjuju se i formulacije temeljene na klasičnim teorijama ploča što donosi ograničenja. Formulacije koje se temelje na Kirchhoff-Loveovoj teoriji ploča ne mogu točno opisati deformiranje debelih ploča jer ne uzimaju u obzir poprečne posmične deformacije, dok formulacije temeljene na Reissner-Mindlinovoj teoriji ne mogu bez dodatnih ograničenja točno opisati deformiranje tankih ploča zbog pojave problema poprečnog posmičnog (*transversal shear*) *lockinga*. Postoje i formulacije koje se temelje na trodimenzijskom opisivanju deformiranja ploče u kojima ne postoje *locking* problemi.

U većini formulacija koristi se aproksimacijska funkcija temeljena na metodi pomičnih najmanjih kvadrata (*Moving Least Squares – MLS*) koja nema svojstvo interpolacije čvornih vrijednosti što otežava zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka. Sama *MLS* aproksimacijska funkcija je relativno komplicirana, odnosno numerički zahtjevna. Koriste se, ali mnogo rjeđe, i aproksimacijske funkcije temeljene na Metodi interpolacije po točkama (*Point Interpolation Method – PIM*) s polinomnim ili radijalnim bazama.

Vrlo poželjna karakteristika aproksimacijskih funkcija primijenjenim u bezmrežnim metodama je lokalnost što u konačnici vodi pojasnoj matrici krutosti. *PIM* s radijalnim bazama nema tu karakteristiku. Istraživanjem aproksimacijskih funkcija pokazalo se da bi *B-spline* aproksimacijska funkcija, [27] i [28], mogla biti dobra zamjena za *MLS* funkciju. Ima vrlo povoljnih svojstava, lokalnost, polinomnu bazu što je povoljno za većinu problema u tehničkoj praksi u području mehanike čvrstih tijela, itd. Računanje *B-spline* funkcija oblika je numerički manje zahtjevno od računanja *MLS* funkcija oblika. Nepovoljna karakteristika *B-spline* funkcije je da ne interpolira čvorne vrijednosti.

Uzevši u obzir moguće prednosti motivacija za ovaj rad je primijeniti *B-spline* kao aproksimacijsku funkciju u bezmrežnim metodama za analizu savijanja tankih i debelih ploča. Na tu aproksimacijsku funkciju je potrebno nametnuti uvjete interpolacije čvornih vrijednsoti da bi se u mješovitoj formulaciji moglo opisati čvorne komponente naprezanja čvornim komponentama pomaka. Ideja je primijeniti kvadratičnu raspodjelu poprečne komponente pomaka po debljini ploče u cilju uklanjanja debljinskog *lockinga* i aproksimacija komponenata naprezanja u cilju uklanjanja poprečnog posmičnog *lockinga*.

1.3. Hipoteza

Hipoteza rada je razvoj novih bezmrežnih numeričkih metoda temeljenih na mješovitoj formulaciji za analizu tankih i debelih ploča u kojima će biti uklonjeni *locking* problemi. Pretpostavka je da će debljinski *locking* biti uklonjen primjenom kvadratične aproksimacije poprečne komponente pomaka po debljini ploče. Pretpostavka je i da će poprečni posmični *locking* biti uklonjen aproksimacijom komponenata naprezanja. Dosad se u bezmrežnim numeričkim metodama nije koristila *B-spline* funkcija za aproksimaciju nepoznatih veličina polja. Za aproksimaciju komponenata pomaka i naprezanja koristit će se *MLS* i *B-spline* aproksimacijske funkcije. Pretpostavlja se veća numerička učinkovitost primjenom *B-spline* aproksimacijske funkcije od numeričke učinkovitosti s *MLS* aproksimacijskom funkcijom.

2. O bezmrežnoj formulaciji

2.1. Jednadžbe mehanike kontinuuma za *MLPG* formulacije za ploče

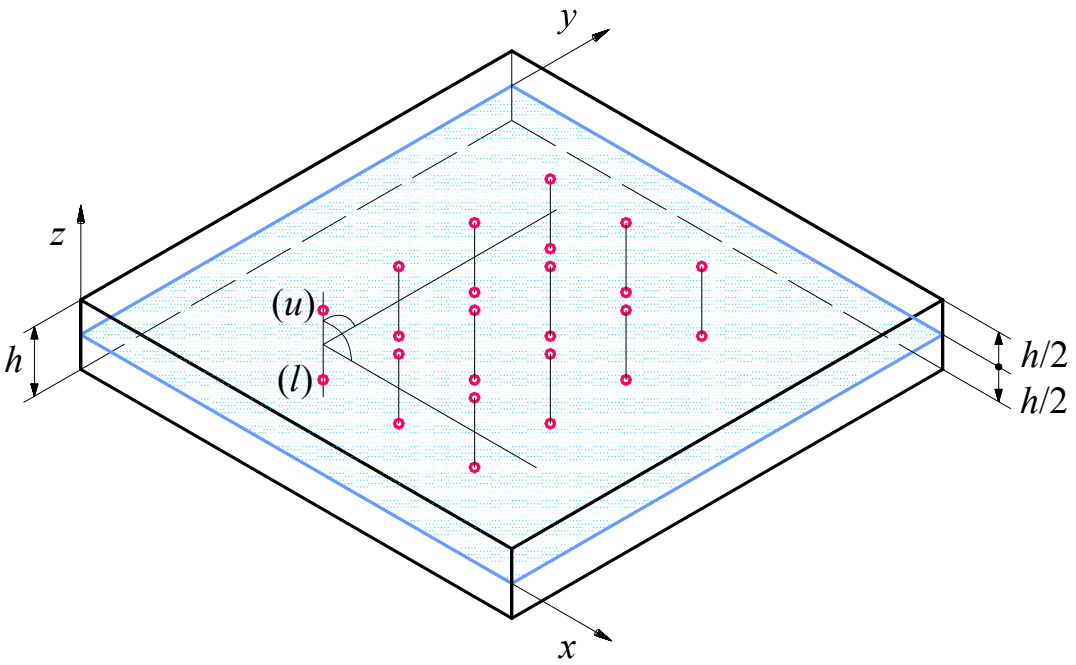
U ovom radu razvijene su bezmrežne numeričke metode za statičku linearno-elastičnu analizu savijanja ploča. U cilju razvijanja bezmrežne formulacije, u ovom poglavlju bit će prikazane osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma koje su temelj za razvoj tih formulacija. Bit će prikazane i osnove aproksimacijskih funkcija koje služe za aproksimaciju rješenja diferencijalnih jednadžbi. Promatra se deformiranje ploča malih pomaka u odnosu prema debljini ploče, s pretpostavkom malih deformacija.

2.1.1. Geometrija i opisivanje deformiranja ploče

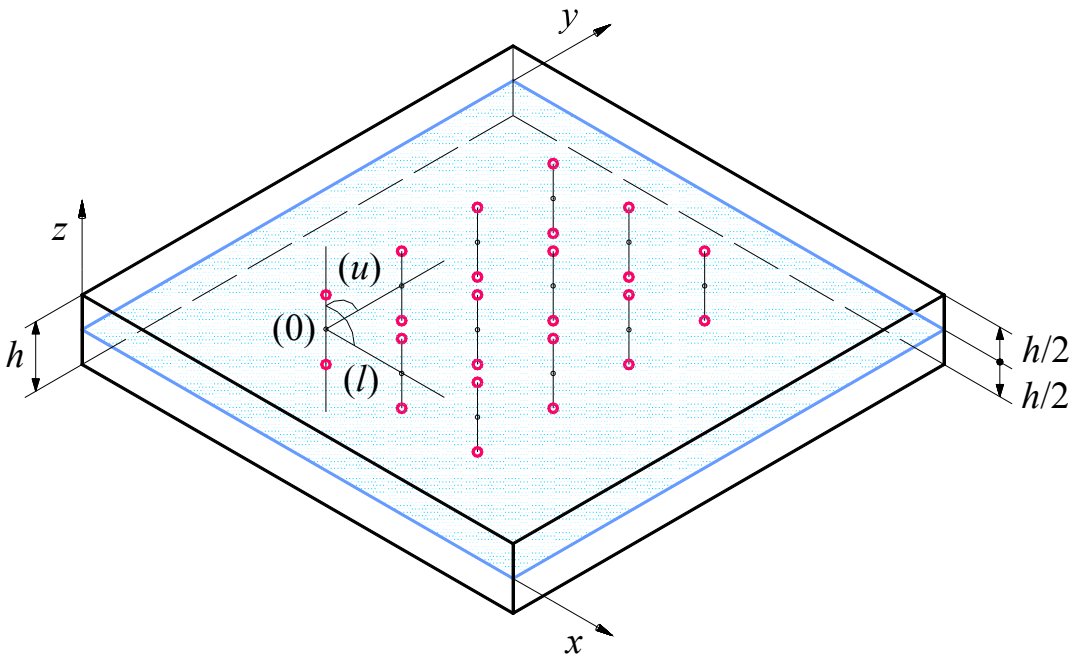
U ovom radu analiziraju se ploče jednostavne geometrije, pravokutnog oblika. Debljina ploče je pretpostavljena konstantnom. Srednja ravnina koja raspolavlja debljinu leži u jednoj od koordinatnih ravnina globalnog koordinatnog sustava. Geometrija ploče opisana je čvorovima diskretiziranog modela. Čvorovi su postavljeni na gornju i donju ravninu ploče na istoj normali na srednju ravninu. U slučaju linearne raspodjele poprečne komponente pomaka po debljini ploča je diskretizirana s dva čvora po debljini. U slučaju kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka potreban je dodatni čvor s jednim podatkom za raspodjelu poprečne komponente pomaka. Dodatni čvor je smješten na srednjoj ravnini. U ovim formulacijama ploča se promatra kao trodimenzijsko tijelo.

Svaka točka ploče pri deformiranju ima tri komponente pomaka u_1, u_2, u_3 u pravcu Kartezijevih koordinatnih osi x_1, x_2 i x_3. U tehničkoj praksi je uobičajeno komponente pomaka označavati pojednostavljeno *u*, *v* i *w*. Također je uobičajeno koordinatne osi pojednostavljeno označavati *x, y* i *z*. Svi stupnjevi slobode diskretiziranog modela su komponente pomaka u čvorovima. Nema rotacijskih stupnjeva slobode kao što je slučaj u numeričkim metodama temeljenim na klasičnim teorijama ploča. Razlikuju se čvorovi na donjoj *l* (*lower*) i gornjoj *u* (*upper*) plohi pa su i čvornim komponentama pomaka i naprezanja dodijeljene te dodatne oznake te u slučaju kvadratične raspodjele poprečne

komponente pomaka po debljini još dodatni čvor na srednjoj ravnini koji ima oznaku 0 . Geometrija i položaj čvorova diskretiziranog modela s dva čvora po debljini ploče prikazani su na slici Slika 1, dok su geometrija i položaj čvorova s tri čvora po debljini prikazani su na slici 2.



Slika 1. Geometrija ploče s dva čvora po debljini



Slika 2. Geometrija ploče s tri čvora po debljini

2.1.2. Jednadžbe ravnoteže za trodimenzijsko tijelo

Promatra se trodimenzijsko tijelo volumena Ω omeđeno rubnom plohom Γ na kojoj su zadani rubni uvjeti. Tijelo može biti pod utjecajem polja volumenske sile $\mathbf{f}$. Promatra se statički slučaj opterećenja. Opterećivanjem tijela javljaju se naprezanja koja uravnotežuju djelovanje vanjskih opterećenja. Posljedica naprezanja je promjena oblika i veličine, tj. nastaju deformacije, a one se očituju u pomacima točaka tijela. Promatrana veličina polja je prvenstveno pomak, tj. na osnovi izračunatih pomaka izračunavaju se sve ostale veličine.

U općem slučaju javlja se 6 različitih komponenata naprezanja u svakoj točki tijela i one su funkcije prostornih koordinata. Pomak u svakoj točki tijela opisan je s 3 komponente. Naprezanje je tenzor 2. reda, no prikazuje se u obliku vektora na način

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{zx} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

U tehničkoj praksi je uobičajeno pojednostavljeno označavati

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \sigma_{y} & \sigma_{z} & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Pomak se prikazuje kao

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Tenzor deformacija ima 6 različitih komponenata i zapisuje se kao vektor na način

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & 2\varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

U tehničkoj praksi je uobičajeno pojednostavljeno označavati komponente deformacija kao inženjerske komponente

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} & \varepsilon_{y} & \varepsilon_{z} & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Komponente deformacije se prema teoriji malih deformacija izračunavaju prema

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i} \right]. \tag{2.6}$$

Simbolički se jednadžbe (2.6) mogu zapisati

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}\ , \tag{2.7}$$

gdje je $\mathbf{D}_k$ matrica kinematičkog diferencijalnog operatora oblika

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

∂_{x_i} označava parcijalnu derivaciju po koordinati x_i. Nadalje, jednadžbe koje povezuju naprezanja i deformacije, konstitutivne relacije, su za linearno elastični, homogeni, izotropni materijal

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Matrica materijalnih svojstava $\mathbf{D}$ je definirana prema

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Za tijelo u stanju statičke ravnoteže zadovoljeni su uvjeti ravnoteže [29] u obliku

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \tag{2.11}$$

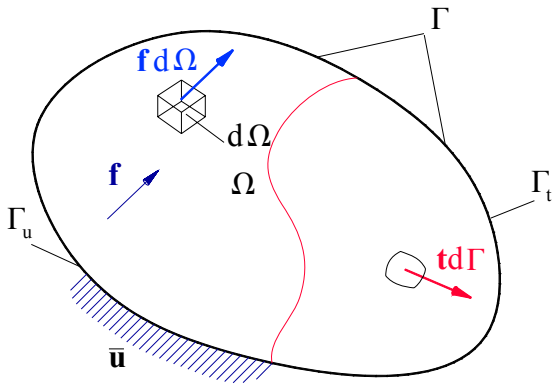
gdje su f_i komponente volumne sile. Za sve točke na rubu tijela Γ moraju biti zadovoljeni rubni uvjeti sila

$$\sigma_{ij} n_j = t_i = \overline{t}_i, \tag{2.12}$$

gdje je n_j komponenta jedinične normale na površini, $\overline{t}_i$ komponenta zadane površinske sile, ili rubni uvjeti pomaka

$$u_i = \overline{u}_i, \tag{2.13}$$

gdje je $\overline{u}_i$ zadana komponenta pomaka.

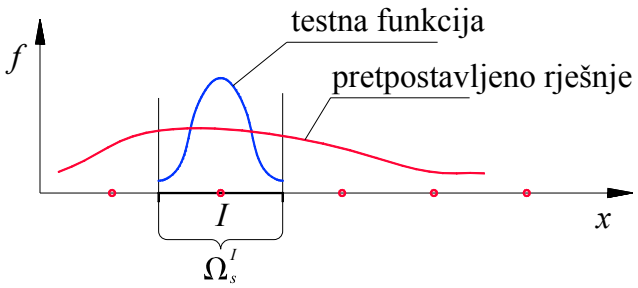


Slika 3. Tijelo u statičkoj ravnoteži s rubnim uvjetima

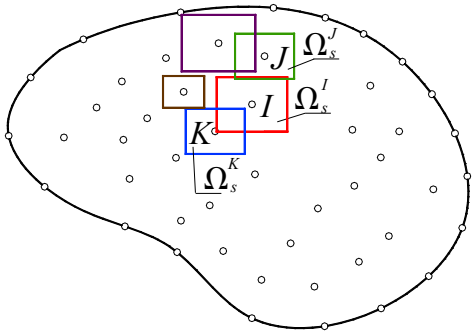
Na slici Slika 3 prikazano je tijelo koje zauzima volumen Ω omeđeno plohom Γ na kojoj su zadani rubni uvjeti pomaka i sila. Tijelo je opterećeno i volumnom silom $\mathbf{f}$ koja djeluje po jedinici volumena. Rubni uvjeti pomaka zadani su na dijelu rubne plohe označene Γ_u, a rubni uvjeti sila zadani su na dijelu rubne plohe označene Γ_t. U svakoj točki na rubu su zadani ili rubni uvjeti pomaka ili rubni uvjeti sila.

2.2. Metoda lokalnog težinskog ostatka (reziduala) – Petrov-Galerkinova metoda

Bezmrežne formulacije koje će biti prikazane u radu temelje se na metodi lokalnog težinskog ostatka (reziduala) [5]. Ta se metoda u literaturi naziva Petrov-Galerkinova metoda. Temelji se na integraciji težinskog ostatka (reziduala) diferencijalne jednadžbe koji nastaje uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u diferencijalnu jednadžbu i množenjem težinskom funkcijom. Težinska funkcija je proizvoljna u ovoj metodi. Često se težinska funkcija u literaturi naziva testna funkcija. Težinska i funkcija pretpostavljenog rješenja u jednodimenzijskom prostoru prikazane su na slici 4. Težinska funkcija je u metodama koje će biti prikazane u radu definirana na lokalnom području koje je pridruženo, tj. definirano oko čvorova diskretizacije. Lokalno područje je proizvoljnog oblika i veličine za svaki čvor. Primjer pravokutnih lokalnih područja za dvodimenzijske probleme prikazan je na slici 5. U metodi pomaka pretpostavljeno je rješenje za pomake koje se uvrštava u jednadžbe (2.11), (2.7) i (2.9). U mješovitoj formulaciji bezmrežne metode, s aproksimiranim naprezanjem i pomacima, uvrštava se pretpostavljeno rješenje za naprezanja u jednadžbe (2.11).



Slika 4. Težinska funkcija i funkcija pretpostavljenog rješenja



Slika 5. Čvorovi u dvodimenzijskom području s pridruženim lokalnim područjima

Općenito se uvjeti ravnoteže i rubni uvjeti sila mogu zapisati simbolički kao

$$\Im(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{u } \Omega, \tag{2.14}$$

$$\aleph(\mathbf{u}) - \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad \text{na } \Gamma \tag{2.15}$$

gdje je $\Im$ diferencijalni operator uvjeta ravnoteže a $\aleph$ diferencijalni operator rubnih uvjeta sila. Stupanj derivacije u (2.14) je *m* dok u (2.15) može biti najviše *m*-1. $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ je u (2.14) i (2.15) nepoznata funkcija koja predstavlja točno rješenje diferencijalnih jednadžbi. Za približno rješavanje sustava jednadžbi pretpostavlja se funkcija rješenja $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ koja se temelji na nekoj od aproksimacijskih funkcija koje će biti opisane u idućem odjeljku. Uvrštavanjem te pretpostavljene funkcije nastaje ostatak

$$\Im(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{f} \neq \mathbf{0}, \quad \text{u } \Omega, \tag{2.16}$$

$$\aleph(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{t} \neq \mathbf{0}, \quad \text{na } \Gamma. \tag{2.17}$$

Na pretpostavljene funkcije rješenja postavljaju se ublaženi uvjeti

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{v}\left(\Im(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}\right) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.18}$$

gdje je Ω_s lokalno područje po kojem se vrši integracija slabog oblika. Na tom području je definirana težinska funkcija. $\mathbf{v}$ je matrica testnih (težinskih) funkcija oblika

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & v_N \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Ukupan broj testnih funkcija u (2.19) N jednak je broju jednadžbi u (2.14). Ovo je ujedno najjednostavniji slučaj odabira testne funkcije koji osigurava linearno nezavisne jednadžbe. Iz (2.18) je vidljivo da su zahtjevi na $\tilde{\mathbf{u}}$ da su derivacije do reda m-1 kontinuirane funkcije, tj. C^{m-1} kontinuirane funkcije, dok ne postoje zahtjevi na testnu funkciju koja stoga može biti i C^{-1} funkcija. Slijedi da je izbor testnih funkcija proizvoljan. Prema odabiru testne funkcije razlikuju se i bezmrežne formulacije.

U cilju smanjenja zahtjeva na kontinuitet pretpostavljene funkcije rješenja i implicitnog uvođenja rubnih uvjeta sila primjenjuje se Gaussov integralni poučak. Nakon primjene Gaussova integralnog poučka u izrazima se mogu prepoznati implicitno sadržani rubni uvjeti sila. Ovi rubni uvjeti su zadovoljeni *a posteriori* pa su stoga nazvani prirodni rubni uvjeti. Rubni uvjeti pomaka mogu biti zadovoljeni ili *a priori* odabirom pretpostavljene funkcije rješenja ili *a posteriori* u sustavu diskretiziranih jednadžbi određenim numeričkim postupcima. Budući da pretpostavljena funkcija mora zadovoljiti rubne uvjete pomaka, ti su uvjeti osnovni za funkciju.

U slučaju da pretpostavljene funkcije rješenja ne zadovoljavaju osnovne rubne uvjete potrebno je dodatno zadovoljiti te uvjete na neki drugi način, npr. kaznenom metodom [5], [30] što je vrlo često u bezmrežnim metodama prema

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{v}\left(\mathfrak{I}\left(\tilde{\mathbf{u}}\right) - \mathbf{f}\right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \bar{\mathbf{v}}\boldsymbol{\alpha}\left(\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}\right) \mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{2.20}$$

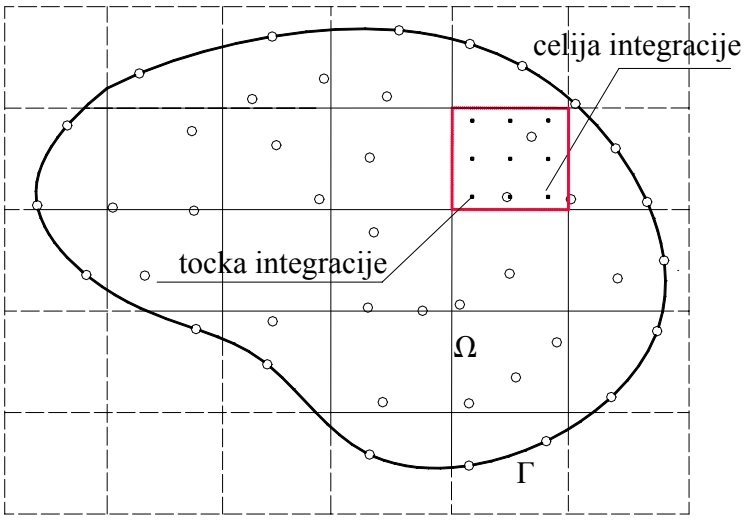
gdje je Γ_u dio ruba sa zadanim osnovnim rubnim uvjetima, $\bar{\mathbf{v}}$ matrica proizvoljne testne funkcije pridružene zadovoljavanju osnovnih rubnih uvjeta. Obično se za testne funkcije $\bar{\mathbf{v}}$ odabiru iste funkcije kao i (2.19). $\boldsymbol{\alpha}$ je dijagonalna matrica kaznenog parametra u obliku $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{I}$ gdje je α kazneni parametar, proizvoljna skalarna vrijednost. $\bar{\mathbf{u}}$ su zadani osnovni rubni uvjeti. Kazneni parametar α je proizvoljni pozitivni realni parametar koji mora biti dovoljno velik da osigura zadovoljavanje osnovnih rubnih uvjeta, no istovremeno prevelik parametar može uzrokovati numeričke probleme.

2.3. *Element Free Galerkin* (*EFG*) metoda

EFG metoda se može svrstati u globalne metode težinskog ostatka (reziduala). Težinska funkcija je ovdje funkcija pretpostavljenog rješenja. Metoda se temelji na rješavanju varijacijske formulacije. Za probleme mehanike čvrstih tijela uvjeti ravnoteže su opisani izrazom (2.11) s rubnim uvjetima sila (2.12) te rubnim uvjetima pomaka (2.13). Aproksimacija rješenja je provedena najčešće *MLS* funkcijama koje u općem slučaju nemaju Kronecker delta svojstvo, tj. ne interpoliraju čvorne vrijednosti. Stoga je potrebna neka numerička procedura za zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka. U tu svrhu se primjenjuje ili kaznena metoda [5], [2] ili metoda Lagrangeovih multiplikatora [5], [2]. Za problem rubnih vrijednosti u mehanici čvrtih tijela koristi se varijacijska formulacija u slučaju korištenja kaznene metode prema

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\delta(\mathbf{Lu})^{T}\,\mathbf{D}(\mathbf{Lu})\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}\delta\mathbf{u}^{T}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^{T}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma-\\&\delta\int_{\Gamma_u}\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})^{T}\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{u}-\overline{\mathbf{u}})\,\mathrm{d}\Gamma=0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

U jednadžbama (2.21) $\mathbf{u}$ je vektor pomaka, $\mathbf{L}$ je matrica diferencijalnog operatora, $\mathbf{f}$ vektor volumenske sile i $\boldsymbol{\alpha}$ dijagonalna matrica kaznenih parametara. Za integraciju (2.21) koristi se tzv. pozadinska mreža ćelija integracije (*background mesh of cells*) koja je prikazana na slici 6.



Slika 6. Područje problema u dvodimenzijskom prostoru s pridruženim pozadinskim ćelijama

Pozadinska mreža ćelija je neovisna o diskretizaciji područja. U svakoj ćeliji koristi se Gaussova integracijska shema, a broj točaka integracije ovisi o gustoći, tj. broju čvorova u

dotičnoj ćeliji. Primjena kaznene metode za zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka ima neka pozitivna svojstva, tj. rezultira simetričnom, pozitivno definitnom te pojasnom matricom krutosti za pozitivne kaznene paramtre. No, kaznena metoda ima i nedostatke:

- rubni uvjeti pomaka su zadovoljeni samo približno, ovisno o veličini kaznenog parametra. Teorijski, što veći kazneni parametar, to točnije zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka.
- Teško je odrediti vrijednosti kaznenih parametara koji su optimalni za bilo koji problem. Prevelika vrijednost uzrokuje numeričke probleme, loše uvjetovanu matricu krutosti.
- Rezultati dobiveni kaznenom metodom su obično lošiji od onih dobivenih metodom Lagrangeovih multiplikatora.

U slučaju primjene metode Lagrangeovih multiplikatora, funkcional rubnih uvjeta pomaka, uz Lagrangeove multiplikatore $\boldsymbol{\lambda}$, ima oblik

$$\int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}\right) \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{2.22}$$

Varijacijski oblik može biti zapisan, koristeći (2.22), kao

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \delta\left(\mathbf{Lu}\right)^T \left(\mathbf{DLu}\right) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \overline{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma - \\ &\int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}}\right) \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} \, \mathrm{d}\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Lagrangeovi multiplikatori su funkcije prostornih koordinata i interpolirani su linearnim funkcijama oblika duž krivulje na kojoj su zadani rubni uvjeti pomaka. Nepovoljna karakteristika korištenja Lagrangeovih multiplikatora je povećanje sustava, tj. broja nepoznanica, matrica krutosti nije pojasna i nepozitivna što značajno smanjuje numeričku učinkovitost.

2.4. Aproksimacijske funkcije

U bezmrežnim metodama se za aproksimaciju pretpostavljenog rješenja kao što su komponente pomaka, naprezanja, deformacija i sl., koriste aproksimacijske funkcije. To su linearne kombinacije baznih funkcija i koeficijenata ili parametara. Te funkcije trebaju moći interpolirati podatke na slučajno razmještenim točkama, tj. čvorovima modela. Funkcije se ne temelje na aproksimaciji po unaprijed definiranim područjima dobivenim povezivanjem čvorova kao što je slučaj u konačnim elementima. Dodatna razlika aproksimacijskih funkcija

primijenjenih u bezmrežnim metodama prema interpolaciji po konačnom elementu je u prvom redu što je broj čvornih podataka, parametara u konačnom elementu ograničavajuća veličina koja određuje mogućnosti odabira aproksimacijskih funkcija. U aproksimaciji u bezmrežnim metodama to nije slučaj jer ako je zadovoljen uvjet minimuma broja podataka u čvorovima, tj. broja čvorava za određenu aproksimacijsku funkciju, moguće je za isti broj čvorova proračunskog modela koristiti različite aproksimacije. Uvjet najmanjeg broja podataka je analogan uvjetu da su za jednoznačno određivanje parabole u jednodimenzijskom prostoru potrebna 3 podatka. Iz toga slijedi da je vrlo jednostavno mijenjati aproksimacijsku funkciju za jedan proračunski model, tj. isti broj čvorova i broj stupnjeva slobode. U općem slučaju je globalni kontinuitet bezmrežnih aproksimacija viši od globalnog kontinuiteta aproksimacije u modelu konačnih elemenata. Mnoge aproksimacije posjeduju C^1 kontinuitet koji je uvjet za polje pomaka tj. progiba za ploče. Ispunjavanje tog uvjeta nije jednostavno u modelu konačnih elemenata.

Vrlo značajna karakteristika aproksimacija je i lokalnost, što kasnije vodi pojasnoj matrici sustava što je pak povoljno za rješavanje sustava. Aproksimacijske funkcije u bezmrežnim metodama bi trebale imati i svojstvo reprodukcije tj. mogućnosti opisivanja funkcije sadržane u bazi. Sve funkcije višeg reda od one u bazi opisivat će takva aproksimacija samo približno. U bezmrežnim metodama za rješavanje problema mehanike čvrstih tijela bitna su svojstva aproksimacijskih funkcija jedinični zbroj (*partition of unity*) funkcija oblika i nulti zbroj (*partition of nullity*) derivacija funkcija oblika. Ta dva svojstva osiguravaju opisivanje pomaka krutog tijela. Bitna je i najmanje linearna konzistencija (mogućnost opisivanja najmanje linearnog polja radi zadovoljavanja uvjeta za opisivanje polja konstantne deformacije).

Od mogućih funkcija koje zadovoljavaju sve zahtjeve za primjenu u bezmrežnim metodama, najčešće se koriste Metoda najmanjih pomičnih kvadrata (*Moving Least Squares – MLS* [1], [5]), Metoda interpolacije po točkama (*Point Interpolation Method – PIM*) s polinomnim (*Polynomial Point Interpolation Method – PPIM*, [30] [2]) ili radijalnim bazama (*Radial Point Interpolation Method – RPIM* [2], [30]), Metoda particije jedinice (*Partition of Unitiy – PU* [4]), Metoda reprodukcije osnovnih dijelova (*Reproducing Kernel Particle Method – RKPM* [3]), Metoda prirodnih susjednih interpolacija (*Natural Neighbour Interpolations – NNI* [31]), itd. U ovom radu je predložena *B-spline* aproksimacijska funkcija. Dosad ta funkcija nije korištena za aproksimaciju nepoznatih veličina polja u bezmrežnim metodama.

U *PIM* aproksimacijskoj funkciji koriste se polinomne (*PPIM*) ili radijalne baze kod kojih opet postoji razdioba na globalno definirane radijalne baze (klasične) (*RPIM*) i lokalne tj. ograničene (*compactly supported*) (*CSRBF*). Značajan problem prilikom korištenja globalnih radijalnih baza je uvjetovanost matrice koja potječe iz uvjeta interpolacije s povećanjem broja čvorova. Još jedna nepovoljna karakteristika tih aproksimacijskih (interpolacijskih) funkcija je i nemogućnost opisivanja linearnog polja bitnog za opisivanje polja konstantne deformacije. To je prema literaturi [32], [33] riješeno dodavanjem polinomne baze do prve potencije uz uvođenje dodatnog uvjeta jednoznačnosti interpolacije što povećava matricu uvjeta interpolacije. Radijalne baze u svojoj jednadžbi imaju tzv. parametre oblika (*shape parameter*) koji utječu na točnost metode. U ovoj aproksimacijskoj funkciji koeficijenti pridruženi bazama su konstantni.

U *MLS* aproksimacijskoj funkciji koeficijenti pridruženi bazama su funkcije položaja. Izračunavanje funkcija oblika izvedenih iz aproksimacije je ovdje složeno, vremenski zahtjevno. U derivacijama se ponekad javljaju skokovi, tj. derivacije nisu nužno monotone funkcije.

Vrlo važne karakteristike aproksimacijskih funkcija primijenjenih u bezmrežnim metodama su opisivanje funkcije na osnovi podataka u slučajno razmještenim točkama, tj. čvorovima i lokalnost. U ovom radu su korištene aproksimacijske funkcije polinomnih baza koje imaju svojstvo lokalnosti. Funkcija s radijalnim bazama je globalnog karaktera. Primijenjene su pravilne diskretizacije, što znači da su čvorovi ekvidistantni, zasebno na pravcu osi x i na pravcu osi y razmaci su jednaki.

2.4.1. *Moving Least Squares* (*MLS*) aproksimacijska funkcija

MLS aproksimacijska funkcija se temelji na minimiranju diskretne norme greške aproksimacije. Aproksimacijska funkcija je linearna kombinacija članova vektora baze i koeficijenata. Koeficijenti su funkcije prostornih koordinata. Aproksimacija neke skalarne funkcije $f(\mathbf{x})$ može se opisati simbolički

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \tag{2.24}$$

gdje je $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ vektor baznih funkcija u obliku

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}) & \cdots & p_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

i $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektor koeficijenata u obliku

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ a_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

U (2.26) m označava broj članova u vektoru baznih funkcija, a određen je stupnjem monoma koji se odabire. Obično se odabire potpuni polinom stupnja t prema Pascalovom trokutu [34] za dvodimenzijske aproksimacije, pa je m određen prema $m = (t+1)(t+2)/2$. Nepoznati koeficijenti $a_i(\mathbf{x})$ izračunavaju se iz uvjeta minimuma diskretne norme greške aproksimacije prema

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_{k=1}^{n} W_k(\mathbf{x}) \left(\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{f}_k \right)^2 \rightarrow \min, \tag{2.27}$$

gdje su $W_k(\mathbf{x})$ težinska funkcija pridružena čvoru k i $\hat{f}_k$ vrijednost funkcije u točki (čvoru) k koju aproksimiramo. Iz jednadžbi (2.27) dobiva se izraz za određivanje nepoznatih koeficijenata prema

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{f}}, \tag{2.28}$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tzv. momentna matrica a definirana je prema

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} W_k(\mathbf{x})\, \mathbf{p}(\mathbf{x}_k)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k), \tag{2.29}$$

dok je matrica $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ jednaka

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} W_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & W_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \cdots & W_m(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_m) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

U jednadžbama (2.28) $\hat{\mathbf{f}}$ je vektor fiktivnih čvornih vrijednosti funkcije koju aproksimiramo

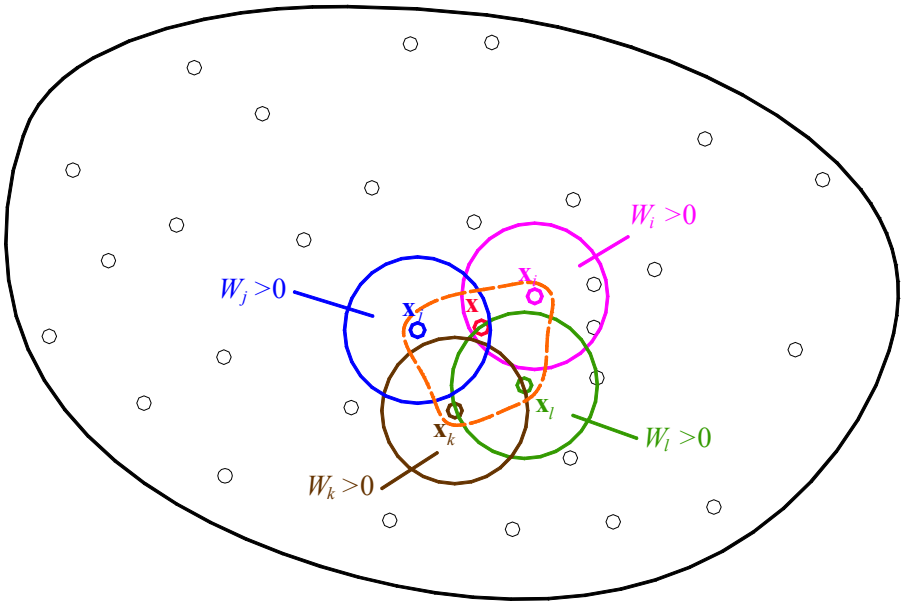
$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 & \hat{f}_2 & \cdots & \hat{f}_m \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Uvrštavanjem koeficijenata (2.28) u početni izraz za aproksimaciju (2.24), dobiva se izraz za aproksimaciju s tzv. funkcijama oblika

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(\mathbf{x})\hat{f}_k, \tag{2.32}$$

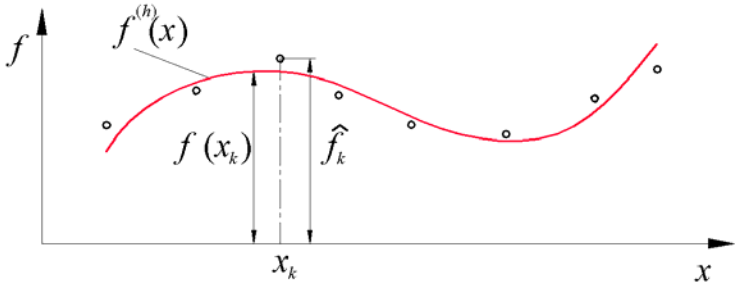
gdje je ϕ_k funkcija oblika definirana kao

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\mathbf{x}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]_{ik}. \tag{2.33}$$



Slika 7. Utjecaj čvorova u aproksimaciji *MLS*-om u dvodimenzijskom prostoru

U općem slučaju *MLS* aproksimacija ne opisuje vrijednosti u čvorovima $\hat{f}_k$ pa se stoga te vrijednosti nazivaju fiktivne čvorne vrijednosti. Na slici 8 shematski je prikazana aproksimacija *MLS*-om u jednodimenzijskom prostoru.



Slika 8. Aproksimacija *MLS*-om u jednodimenzijskom prostoru

Budući da se funkcije oblika računaju pomoću inverzne matrice $\mathbf{A}$, bitno je da je ta matrica dobro uvjetovana. Loše uvjetovanu matricu $\mathbf{A}$ može uzrokovati specifičan razmještaj čvorova koji utječu na aproksimaciju kao npr. u dvodimenezijskim problemima razmještaj čvorova u liniji. Singularnu matricu $\mathbf{A}$ uzrokovao bi nedovoljan broj čvorova koji utječu na aproksimaciju, tj. $n < m$ ali i kad je $n = m$ također je momentna matrica loše uvjetovana. Derivacije aproksimirane funkcije izračunavaju se na slijedeći način

$$f^{(h)}{}_{,x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k,x_i}(\mathbf{x}) \hat{f}_k , \tag{2.34}$$

gdje je ϕ_{k,x_i} parcijalna derivacija funkcije oblika po koordinati x_i koja se izračunava na način

$$\phi_{k,x_i} = \sum_{i=1}^{m} \left[p_{i,x_i} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + p_i \left(\mathbf{A}_{,x_i}{}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,x_i} \right) \right]_{ik} . \tag{2.35}$$

U izrazu (2.35) pojavljuje se derivacija inverzne matrice koja je određena prema

$$\mathbf{A}^{-1}_{,x_i} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_i}\mathbf{A}^{-1} . \tag{2.36}$$

Druga derivacija aproksimirane funkcije računa se analogno (2.34) na način

$$\phi_{k,x_i x_j} = \sum_{i=1}^{m} \left[\begin{array}{l} p_{i,x_i x_j} \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)_{ik} + p_{i,x_i} \left(\mathbf{A}^{-1}_{,x_j}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,x_j} \right)_{ik} + p_{i,x_j} \left(\mathbf{A}_{,x_i}{}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,x_i} \right)_{ik} + \\ p_i \left(\mathbf{A}^{-1}_{,x_i x_j}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}_{,x_i}\mathbf{B}_{,x_j} + \mathbf{A}^{-1}_{,x_j}\mathbf{B}_{,x_i} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,x_i x_j} \right)_{ik} \end{array} \right] . \tag{2.37}$$

Druge derivacije inverzne matrice $\mathbf{A}$ računaju se prema

$$\mathbf{A}^{-1}_{,x_i x_j} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_i}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_i x_j}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_i}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x_j}\mathbf{A}^{-1} . \tag{2.38}$$

Težinska funkcija u *MLS*-u mora zadovoljiti osnovne uvjete koji osiguravaju određena svojstva aproksimacije. Svojstva koja bi težinska funkcija trebala imati su:

- Pozitivnost. $W_k(\mathbf{x}) > 0$ na cijelom području definicije težinske funkcije, tj. na području utjecaja (*support domain*). Ovo svojstvo osigurava postojanje minimuma diskretne L_2 norme (2.27).
- Ograničen utjecaj. $W_k(\mathbf{x}) = 0$ izvan područja utjecaja. Ograničen utjecaj težine nekog čvora osigurava lokalnost aproksimacije.
- Monotono opadanje. Najveća vrijednost težine bi trebala biti u čvoru a s udaljenosti od čvora opadati monotono. To daje veći utjecaj točkama bliže čvoru.

Na osnovi ovih zahtjeva najčešće korištene funkcije su polinomne funkcije (*spline*), Gaussova funkcija i sl. Najčešće korištena funkcija polinomnog tipa je *spline* 4. stupnja koja je određena prema

$$W_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_k}{r_{sk}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_k}{r_{sk}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_k}{r_{sk}}\right)^4 & 0 \le d_k \le r_{sk} \\ 0 & d_k > r_{sk} \end{cases} , \tag{2.39}$$

gdje je d_k udaljenost trenutne točke od čvora k i r_{sk} je veličina područja utjecaja čvora k.

Funkcije oblika dobivene koristeći težinsku funkciju (2.39) nemaju Kronecker delta svojstvo, tj. ne interpoliraju vrijednosti u čvorovima što je nepovoljno u kontekstu

zadovoljavanja rubnih uvjeta pomaka. Nadalje, greška ili kvaliteta aproksimacije dosta ovisi o veličini područja utjecaja. U cilju interpolacije čvornih vrijednosti razvijena je regularizirana težinska funkcija koja osigurava Kronecker delta svojstvo funkcija oblika. Razvili su je Most i Bucher [35]. Ta težinska funkcija sadrži parametar koji određuje „približavanje“ Kronecker delta svojstvu, tj. vrijdnost funkcije oblika u čvoru može biti matematički točna (1.0) ili približno, tj. praktično, jednaka jedinici. Regularizirana težinska funkcija je

$$W_{Rk}\left(\mathbf{x}\right)=\frac{\tilde{w}_{Rk}\left(\mathbf{x}\right)}{\sum_{J=1}^{n}\tilde{w}_{RJ}\left(\mathbf{x}\right)}, \tag{2.40}$$

gdje je

$$\tilde{w}_{RJ}\left(\mathbf{x}\right)=\frac{\left(\left(\frac{d_J}{r_J}\right)^4+\varepsilon\right)^{-2}-\left(1+\varepsilon\right)^{-2}}{\varepsilon^{-2}-\left(1+\varepsilon\right)^{-2}}. \tag{2.41}$$

U izrazu (2.40) n je broj čvorova koji utječu na aproksimaciju u trenutnoj točki a ε je parameter regularizacije o kojem ovisi točnost ispunjavanja Kronecker delta svojstva. U ovom radu odabrana je vrijednost $\varepsilon=10^{-5}$. Primjenom (2.40) kao težinske funkcije dobiva se

$$\phi_J\left(\mathbf{x}_I\right)\approx\delta_{JI}. \tag{2.42}$$

Prva i druga derivacija težinske funkcije (2.40) su različite od nule na rubu područja utjecaja pa stoga ima samo C^0 kontinuitet. To nepovoljno utječe na kontinuitet aproksimirane funkcije. Stoga se ta težinska funkcija množi nekom uobičajenom funkcijom kao što je (2.39) ili Gaussova funkcija da bi se postigao viši kontinuitet. *MLS* aproksimacija s regulariziranom težinskom funkcijom je manje osjetljiva na veličinu područja utjecaja kao što je to slučaj s uobičajenim težinskim funkcijama, kako će biti prikazano u daljnjem izlaganju. *MLS* aproksimacijska funkcija s regulariziranom težinskom funkcijom i interpolacijskim svojstvom će se u daljnjem izlaganju označavati *IMLS* (*Interpolating Moving Least Squares*). Ako je primijenjena *MLS* aproksimacija s inteprolacijskim svojstvom dobivenim nametanjem uvjeta interpolacija, to će biti posebno naznačeno.

Drugi način postizanja interpolacije čvornih vrijednsoti klasičnim *MLS* aproksimacijskim funkcijama je provođenje tzv. kinematičke transformacije [7], tj. uvjeta interpolacije. U tom pristupu postavlja se uvjet da aproksimirana vrijednost u čvoru i ima određenu vrijednost f_i što vodi sustavu jednadžbi postavljanjem za sve čvorove u numeričkom modelu prema

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j(\mathbf{x}_i)\,\hat{f}_j = f_i, \quad i = 1, N, \tag{2.43}$$

gdje je N broj čvorova numeričkog modela. Matrično se (2.43) može zapisati kao

$$\begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_1) \\ \phi_1(\mathbf{x}_2) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{x}_N) & \phi_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

tj. simbolički

$$\boldsymbol{\Phi}_0 \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}. \tag{2.45}$$

Invertiranjem matrice $\boldsymbol{\Phi}_0$ određuju se fiktivne čvorne vrijednosti u funkciji interpoliranih čvornih vrijednosti prema

$$\hat{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\Phi}_0^{-1} \mathbf{f}. \tag{2.46}$$

Ovakve aproksimacijske funkcije pokazuju loše svojstvo. Matrica krutosti sustava dobivena diskretizacijom ovakvom *MLS* interpolacijskom funkcijom je to lošije uvjetovana što je veći broj čvorova modela.

Svojstva *MLS* aproksimacijskih funkcija su:

- Visok red kontinuiteta. Kontinuitet i glatkoća *MLS* aproksimacijske funkcije ovise o kontinuitetu bazne i težinske funkcije.
- Reprodukcija. *MLS* aproksimacija može opisati sve funkcije koje su sadržane u vektoru baze.
- Konzistencija. Definirana je kao svojstvo opisivanja aproksimacije polinomne funkcije određenog stupnja. Budući da *MLS* ima svojstvo reprodukcije, zadovoljava i svojstvo konzistencije.
- Jedinični zbroj. Zbroj funkcija oblika u svakoj točki jednak je jedan. Ovo svojstvo omogućuje opisivanje pomaka krutog tijela.
- Složen oblik funkcija oblika. Iz (2.33) vidljivo je da je za izračunavanje funkcija oblika potrebno izračunavati inverznu matricu $\mathbf{A}$ što uz računanje matrice $\mathbf{B}$ zahtijeva više vremena izračunavanja.
- Robusnost. *MLS* aproksimacija može aproksimirati podatke u slučajno razmještenim točkama.

2.4.2. *B-spline* aproksimacijska funkcija

B-spline je kratica za *Basic spline*. Aproksimacija se temelji na polinomnim bazama koje su definirane lokalno. *B-spline* baza je po dijelovima polinom. To znači da je na području na kojem je neka baza definirana ta baza zbroj polinoma koji su definirani po dijelovima tog područja definicije. Funkcija aproksimirana *B-spline* aproksimacijskom funkcijom je linearna kombinacija konstantnih koeficijenata i baza. Općenito se to može prikazati kao

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} b_k(\mathbf{x})\, p_k \,, \tag{2.47}$$

gdje je $b_k(\mathbf{x})$ *B-spline* bazna funkcija, p_k koeficijent pridružen odgovarajućoj bazi i n broj baza koje utječu na aproksimaciju u trenutnoj točki. Simbolički, aproksimirana funkcija može se prikazati kao

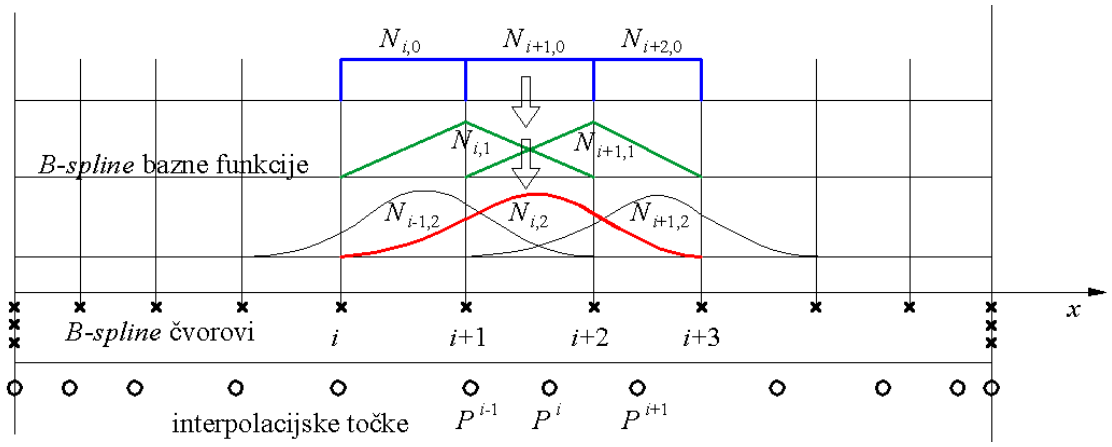
$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{p} \,. \tag{2.48}$$

Velika razlika između *MLS* aproksimacijske funkcije i *B-spline* aproksimacijske funkcije je u broju čvorova koji utječu na aproksimaciju u nekoj točki. U *MLS*-u je moguće odabrati posredno preko veličine područja utjecaja težinske funkcije pridružene čvorovima broj utjecajnih čvorova, dok je to u *B-spline*-u jednoznačno određeno stupnjem baze i razmještajem točaka koje ograničavaju tj. određuju područja na kojima su baze. Te točke su nazvane *B-spline* čvorovi. Kontinuitet *B-spline* aproksimacijske funkcije je jednoznačno određen odabranim stupnjem baze i dodatno ponavljanjem *B-spline* čvorova. *B-spline* čvorovi mogu biti definirani tako da na istoj koordinati postoji više čvorova, do najviše $p+1$ puta gdje je p stupanj polinoma baze. To ponavljanje *B-spline* čvorova uvjetuje promjenu svojstava aproksimirane funkcije na tom mjestu.

Bazne funkcije se računaju rekurzivno, što znači sve baze višeg stupnja od 0 određene su pomoću baza stupnja 0. Baze stupnja 0 su jedinične odskočne funkcije. Definirane su na jediničnom nenultom rasponu *B-spline* čvorova, tj. na području između dva *B-spline* čvora koji nisu na istoj koordinati. Baza stupnja 0 određena je prema

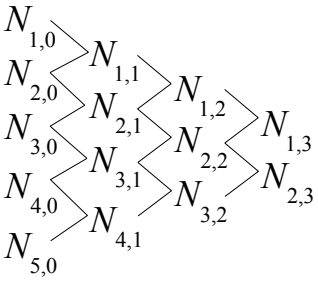
$$N_{j,0} = \begin{cases} 1,\, x \in \left[x_j, x_{j+1} \right\rangle, \left(x_{j+1} > x_j \right), \\ 0,\, x \notin \left[x_j, x_{j+1} \right\rangle \end{cases} . \tag{2.49}$$

Primjer baza drugog stupnja u jednodimenzijskom prostoru je prikazan na slici 9.



Slika 9. *B-spline* bazne funkcije u jednodimenzijskom prostoru [27]

Računanje baznih funkcija je određeno De Boor-Cox-ovim algoritmom opisanim simbolički na slici 10.



Slika 10. De Boor-Cox-ov algoritam [27]

Na slikama 9 i 10 $N_{i,p}$ označava baznu funkciju stupnja p. Bazne funkcije se računaju prema De Boor-Cox-ovom algoritmu na sljedeći način

$$N_{j,n} = \frac{x - x_j}{x_{j+n} - x_j} N_{j,n-1} + \frac{x_{j+n+1} - x}{x_{j+n+1} - x_{j+1}} N_{j+1,n-1}. \tag{2.50}$$

U (2.50) $N_{j,n}$ označava *B-spline* baznu funkciju određenu s prvim *B-spline* čvorom označenim s x_j u jednodimenzijskom prostoru, stupnja je n a definirana je na rasponu od x_j do x_{j+n+1}. *B-spline* čvorovi koji određuju jedinične bazne funkcije nultog reda mogu biti ponovljeni, što za jednadžbu (2.50) znači da ako su x_i i x_{i+1} jednakih vrijednosti, ponovljeni, pripadna $N_{i,0}$ jednaka je nuli jer je i raspon nulte duljine. Pri računanju baza primjerice trećeg stupnja raspisuje se baza prvog stupnja pomoću baza nultog stupnja što daje

$$N_{j,1}=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}N_{j,0}+\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}N_{j+1,0};$$
$$N_{j+1,1}=\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}N_{j+1,0}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}N_{j+2,0};\tag{2.51}$$
$$N_{j+2,1}=\frac{x-x_{j+2}}{x_{j+3}-x_{j+2}}N_{j+2,0}+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+3}}N_{j+3,0}.$$

Nadalje se raspisuju baze drugog stupnja

$$N_{j,2}=\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}N_{j,1}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}N_{j+1,1},\tag{2.52}$$

$$N_{j,2}=\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}N_{j,0}+\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}N_{j+1,0}\right)+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\left(\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}N_{j+1,0}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}N_{j+2,0}\right),\tag{2.53}$$

$$N_{j,2}=\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}N_{j,0}+\left(\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\right)N_{j+1,0}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}N_{j+2,0},\tag{2.54}$$

$$N_{j,2}=\begin{cases}\dfrac{x^2-2xx_j+x_j{}^2}{\left(x_{j+2}-x_j\right)\left(x_{j+1}-x_j\right)},x\in\left[x_j,x_{j+1}\right\rangle\\ \dfrac{-x^2+x\left(x_j+x_{j+2}\right)-x_jx_{j+2}}{\left(x_{j+2}-x_j\right)\left(x_{j+2}-x_{j+1}\right)}+\dfrac{-x^2+x\left(x_{j+1}+x_{j+3}\right)-x_{j+1}x_{j+3}}{\left(x_{j+3}-x_{j+1}\right)\left(x_{j+2}-x_{j+1}\right)},x\in\left[x_{j+1},x_{j+2}\right\rangle\\ \dfrac{x^2-2xx_{j+3}+x_{j+3}{}^2}{\left(x_{j+3}-x_{j+1}\right)\left(x_{j+3}-x_{j+2}\right)},x\in\left[x_{j+2},x_{j+3}\right\rangle.\end{cases}\tag{2.55}$$

Konačno je baza trećeg stupnja

$$N_{j,3}=\frac{x-x_j}{x_{j+3}-x_j}N_{j,2}+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+1}}N_{j+1,2},\tag{2.56}$$

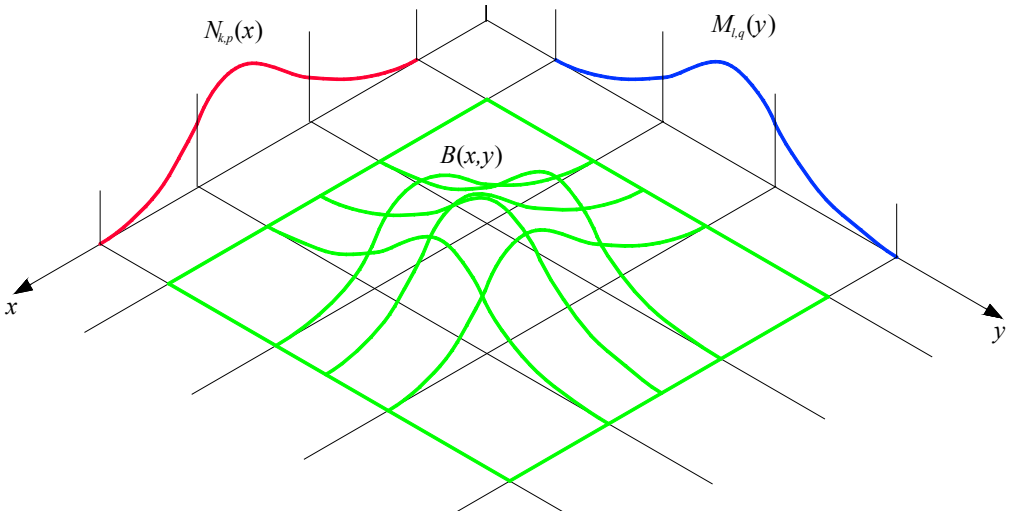
$$N_{j,3}=\frac{x-x_j}{x_{j+3}-x_j}\left[\begin{array}{l} N_{j,0}\left(\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)+N_{j+1,0}\left(\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\right)+ \\ N_{j+2,0}\left(\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}\right) \end{array}\right]+$$

$$\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+1}}\left[\begin{array}{l} N_{j+1,0}\left(\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\right)+N_{j+2,0}\left(\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+2}}\frac{x-x_{j+2}}{x_{j+3}-x_{j+2}}\right)+ \\ N_{j+3,0}\left(\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+2}}\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+3}}\right), \end{array}\right] \tag{2.57}$$

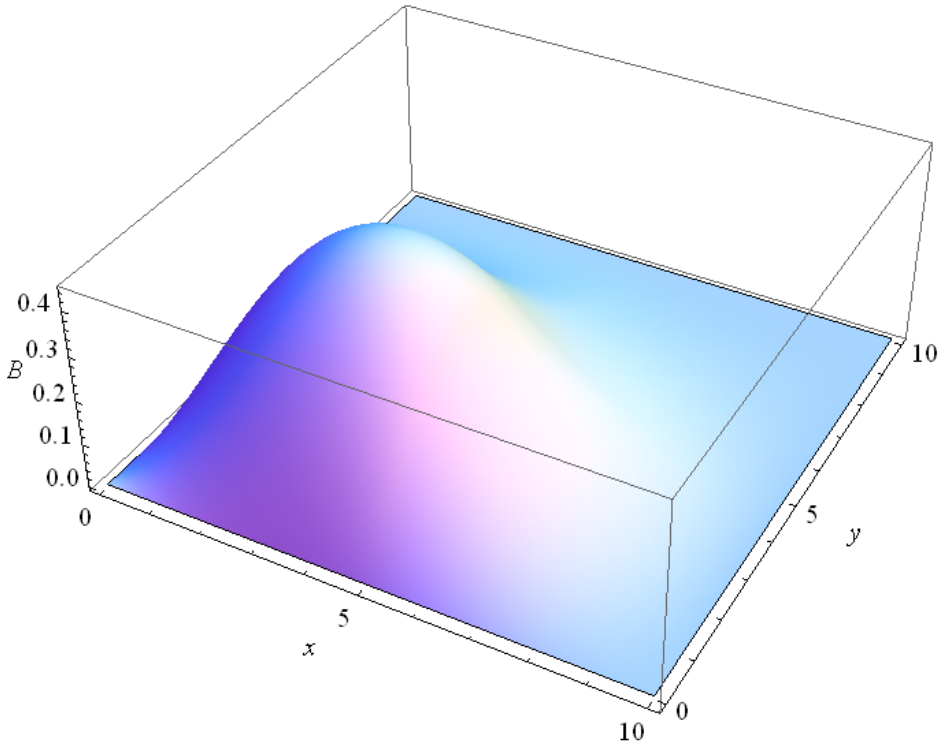
$$N_{j,3}=\begin{cases} \left(\frac{x-x_j}{x_{j+3}-x_j}\right)\left(\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right), x\in\left[x_j,x_{j+1}\right\rangle \\ \frac{x-x_j}{x_{j+3}-x_j}\left(\frac{x-x_j}{x_{j+2}-x_j}\frac{x_{j+2}-x}{x_{j+2}-x_{j+1}}+\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\right)+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+1}}\left(\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\right), \\ x\in\left[x_{j+1},x_{j+2}\right\rangle \\ \frac{x-x_j}{x_{j+3}-x_j}\left(\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}\right)+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+1}}\left(\frac{x-x_{j+1}}{x_{j+3}-x_{j+1}}\frac{x_{j+3}-x}{x_{j+3}-x_{j+2}}+\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+2}}\frac{x-x_{j+2}}{x_{j+3}-x_{j+2}}\right), \\ x\in\left[x_{j+2},x_{j+3}\right\rangle \\ \frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+1}}\left(\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+2}}\frac{x_{j+4}-x}{x_{j+4}-x_{j+3}}\right), x\in\left[x_{j+3},x_{j+4}\right\rangle. \end{cases} \tag{2.58}$$

U radu je *B-spline* aproksimacijska funkcija primijenjena u metodi za analizu dvodimenzijskih problema i analizu savijanja ploča gdje je korištena za aproksimaciju u srednjoj ravnini. Za aproksimaciju u dvodimenzijskom prostoru koristi se ortogonalni tenzorski umnožak *B-spline* baza u jednodimenzijskom prostoru. Množenjem baza na pravcu osi x $N_{k,p}(x)$ sa bazama na pravcu osi y $M_{l,q}(y)$ nastaje dvodimenzijska baza $B_I(x,y)=N_{k,p}(x)M_{l,q}(y)$. Primjer bikvadratne baze prikazan je na slikama 11 i 12.

Kao što je vidljivo sa slike 12, *B-spline* baze nemaju u općem slučaju svojstvo interpolacije, tj. vrijednost jedan u bilo kojoj točki a vrijednost nula u ostalim karakterističnim točkama (čvorovima diskretizacije, tj. interpolacijskim točkama prikazanim na slici 9). Poželjno svojstvo aproksimacijskih funkcija u bezmrežnim metodama je da interpoliraju čvorne vrijednosti. To je vrlo povoljno prilikom zadovoljavanja rubnih uvjeta pomaka i u mješovitim formulacijama prilikom opisivanja čvornih naprezanja čvornim pomacima. Stoga će se i u slučaju *B-spline* aproksimacije provesti transformacija baznih funkcija u takve koje će imati svojstvo interpolacije čvornih vrijednosti. Uz poznate funkcije baze prema (2.50) odabiru se točke u kojima će biti postavljeni uvjeti opisivanja određenih vrijednosti. Te će točke imati koordinate čvorova diskretizacije numeričkog modela.



Slika 11. Shematski prikaz bikvadratne *B-spline* baze u dvodimenzijskom prostoru



Slika 12. Bikvadratna *B-spline* baza u dvodimenzijskom prostoru

Na slici 9 te točke su nazvane interpolacijske točke. U kontekstu aproksimacije *B-spline* funkcijama, čvorovi predstavljaju čvorove diskretiziranog modela, a *B-spline* čvorovi točke koje određuju bazne funkcije prema slici 9. U svakoj interpolacijskoj točki postavlja se uvjet da vrijednost aproksimirane funkcije ima vrijednost f_I, analogno [7], što vodi sustavu jednadžbi

$$f^{(h)}(\mathbf{x}_I) = \sum_{k=1}^{n} B_k(\mathbf{x}_I)\, p_k = f_I, \quad I = 1, N, \tag{2.59}$$

gdje je N broj interpolacijskih točaka, tj. čvorova, a n je broj baza nenulte vrijednosti na koordinati $(\mathbf{x}_I)$ što ovisi o stupnju baze.

Ovime se dobiva sustav jednadžbi s koeficijentima kao nepoznanicama.

$$\begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}_1) & B_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & B_N(\mathbf{x}_1) \\ B_1(\mathbf{x}_2) & B_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & B_N(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(\mathbf{x}_N) & B_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & B_N(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \tag{2.60}$$

što se simbolički može zapisati

$$\mathbf{B}_0\, \mathbf{p} = \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.61}$$

Članovi matrice $\mathbf{B}_0$ su vrijednosti baznih funkcija u interpolacijskim točkama, te su stoga konstante. Nepozanti koeficijenti dobivaju se rješavanjem sustava (2.61) , tj. (2.60) pa slijedi

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}_0^{-1}\, \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.62}$$

Uvrštavanjem koeficijenata izraženih pomoću čvornih vrijednosti, aproksimacija (2.48) se može prikazati na sljedeći način

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{B}_0^{-1}\, \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.63}$$

Nove baze $\mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{B}_0^{-1}$ dobivene primjenom uvjeta interpolacije nazivaju se funkcije oblika pa se aproksimirana funkcija zapisuje u obliku

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})\, \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.64}$$

Ovako definirane funkcije oblika imaju Kronecker delta svojstvo. Prema (2.63) funkcije oblika se računaju prema

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} b_k(\mathbf{x}) \left(B_0^{-1}\right)_{kI}. \tag{2.65}$$

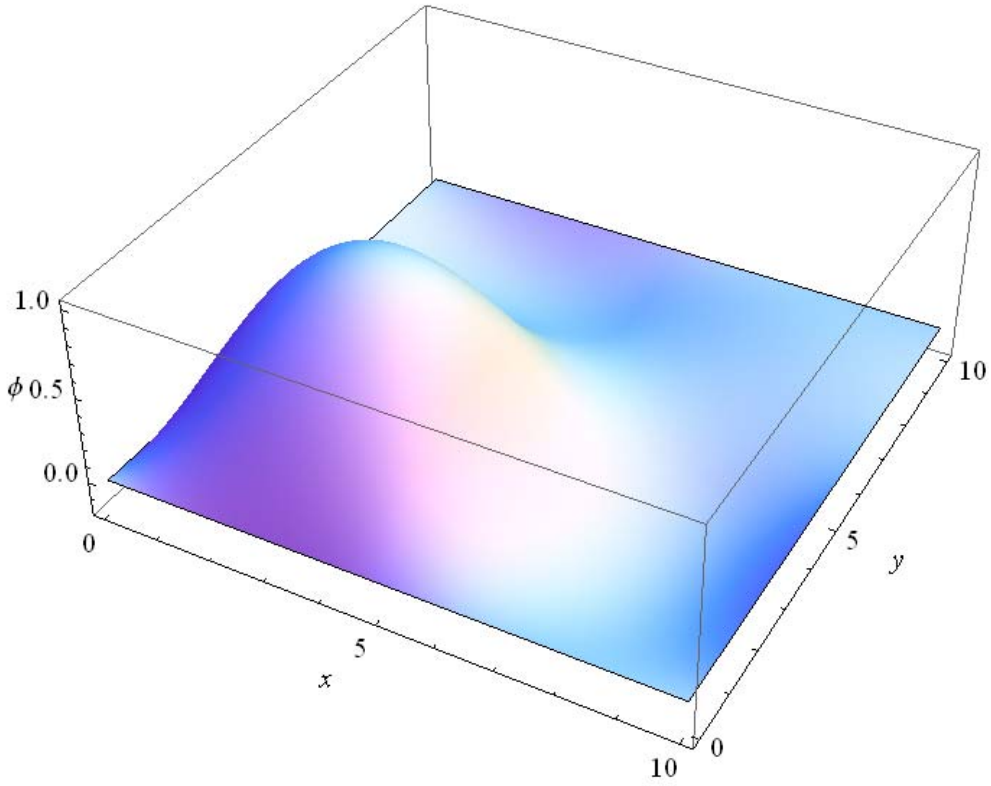
Primjer funkcije oblika izvedene prema (2.65) prikazan je na slici 13. Derivacije funkcije aproksimirane *B-spline*-om izračunavaju se prema

$$f_{,x_i}{}^{(h)}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_{,x_i}(\mathbf{x})\mathbf{B}_0^{-1}\, \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.66}$$

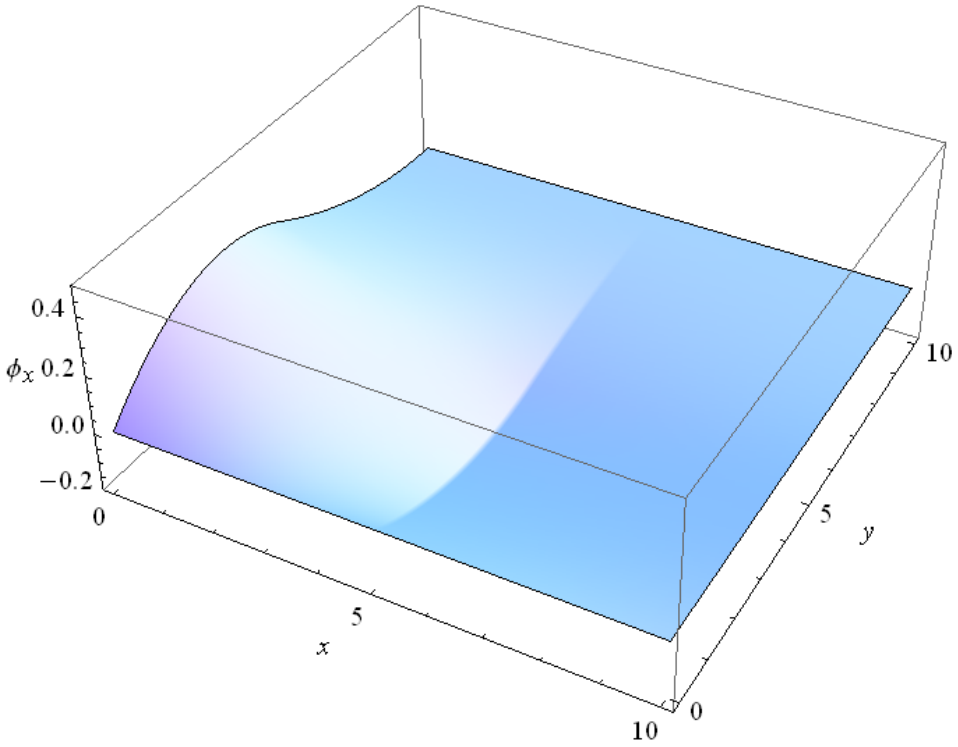
Derivacije funkcija oblika jednake su

$$\phi_{,x_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_{,x_i}(\mathbf{x})\mathbf{B}_0^{-1} \tag{2.67}$$

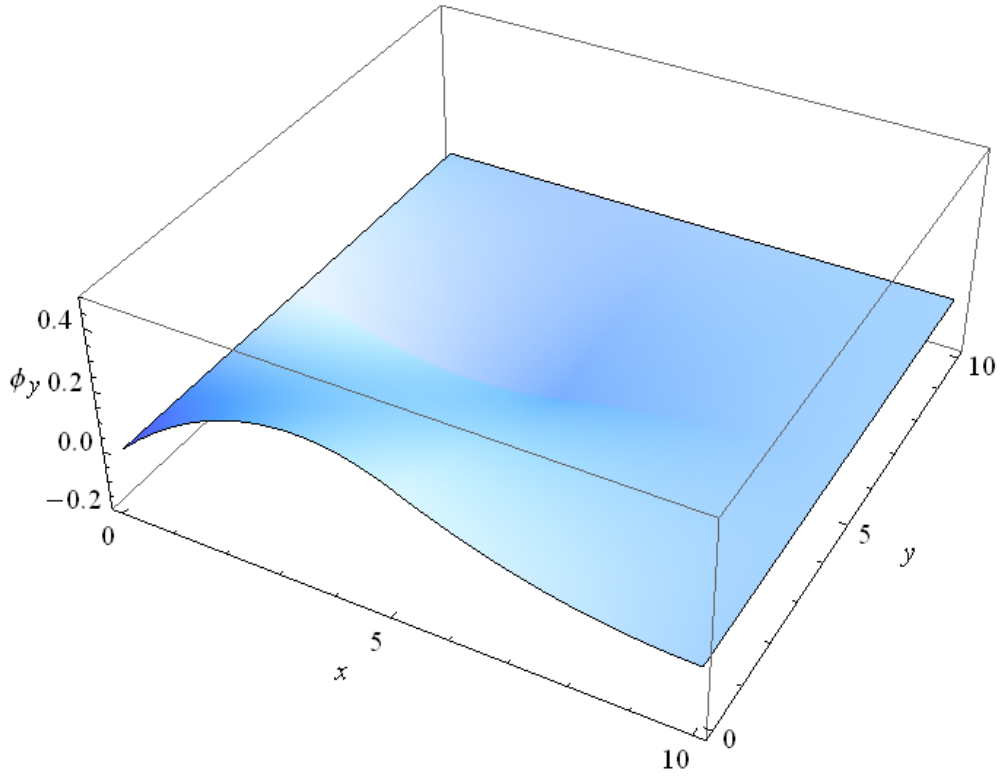
Primjeri parcijalnih derivacija funkcija oblika prikazane su na slikama 14 i 15.



Slika 13. Bikvadratna *B-spline* funkcija oblika u dvodimenzijskom prostoru



Slika 14. Parcijalna derivacija $\phi_{,x}$ *B-spline* funkcije oblika sa slike 13



Slika 15. Parcijalna derivacija $\phi_{,y}$ *B-spline* funkcije oblika sa slike 13

B-spline aproksimacijska funkcija ima sljedeća svojstva:

- Kontinuitet C^{p-1} gdje je p stupanj baze, ako *B-spline* čvorovi nisu ponovljeni u toj točki. Ponavljanje *B-spline* čvorova uzrokuje smanjenje kontinuiteta aproksimirane funkcije.
- Reproduktivnost. *B-spline* aproksimacijska funkcija opisuje polinome koji su sadržani u bazi, tj. opisuje polinome do stupnja određenog stupnjem baze.
- Konzistentnost. *B-spline* aproksimacija može opisati potpune polinome do stupnja baze.
- Jedinični zbroj. U svakoj točki zbroj funkcija oblika ili baza jednak je jedinici. Ovo svojstvo osigurava opisivanje pomaka krutog tijela.
- Nulti zbroj. U svakoj točki zbroj derivacija funkcija oblika ili baza jednak je nuli. Ovo svojstvo osigurava opisivanje nulte deformacije pri pomaku krutog tijela.
- Lokalnost. *B-spline* baze su definirane na lokalnom području kao po dijelovima polinomi. Područje definicije neke baze određeno je stupnjem p.
- Jednostavnost. Računanje funkcija oblika je vrlo jednostavno. U cilju postizanja interpolacijskog svojstva koristi se uvjet interpolacije u određenim točkama,

čvorovima proračunskog modela što rezultira matricom uvjeta interpolacije. Osim toga, računanje funkcija oblika i njihovih derivacija je mnogo jednostavnije od *MLS* aproksimacijskih funkcija.

- Nedostatak robustnosti. *B-spline* baza u više dimenzija je definirana kao tenzorski umnožak baza po koordinatnim osima te stoga nije jednostavno korištenje ove aproksimacijske funkcije za područje problema općenite geometrije, tj. potrebno je preslikavanje iz parametarskog u realni prostor.

2.4.3. *Point Interpolation Method* (*PIM*)

U ovoj grupi aproksimacijskih funkcija koristi se polinomna i radijalna baza. Aproksimirana funkcija je linearna kombinacija baznih funkcija i koeficijenata pridruženih čvorovima. U slučaju korištenja polinomne baze odabire se stupanj potpunog polinoma u globalnim koordinatama analogno (2.25), pri čemu su koeficijenti konstantni [2]. Budući da je aproksimacijska funkcija temeljena na interpolaciji, tj. točnom opisivanju čvornih vrijednosti funkcije, koeficijenti pridruženi čvorovima izračunavaju se postavljanjem uvjeta točnog opisivanja čvornih vrijednosti u svakoj točki aproksimacije. Potrebno je postaviti onoliko jednadžbi koliko je članova monoma vektora baze tj. nepoznatih koeficijenata. U tom postupku postoji neodređenost odabira čvorova koji utječu na aproksimaciju jer nema težinske funkcije kao što je slučaj u *MLS*-u. Postoje ograničenja u smislu odabira čvorova u dvodimenzijskom prostoru jer određeni odabir, tj. položaj čvorova koji su odabrani za utjecaj na aproksimaciju u nekoj točki mogu stvoriti singularnu momentnu matricu tj. matricu uvjeta interpolacije. Položaj čvorova u liniji, simetrično postavljeni čvorovi prema globalnim koordinatnim osima su neki od razmještaja čvorova koji uzrokuju singularnu matricu uvjeta interpolacije. Ako je osigurana regularnost momentne matrice, izvedene funkcije oblika imaju Kronecker delta svojstvo. Postavljanje uvjeta interpolacije je analogno (2.59) tj. (2.60). Funkcije oblika se računaju analogno (2.65). Derivacije aproksimirane funkcije računaju se analogno (2.66).

Svojstva *PPIM* aproksimacijske funkcije su:

- Konzistentnost. *PPIM* aproksimacijska funkcija može opisati polinom stupnja baze ako je u bazi sadržan potpuni polinom tog stupnja.
- Reproduktivnost. *PPIM* opisuje sve polinome (funkcije) sadržane u bazi.
- *PPIM* funkcije oblika imaju Kronecker delta svojstvo.
- Jedinični zbroj. Zbroj funkcija oblika u bilo kojoj točki jednak je jedan.
- Lokalnost. Budući da je u uvjetu interpolacije sadržan broj čvorova određen brojem članova baze, samo relativno mali broj čvorova najbližih trenutnoj točki utječe na aproksimaciju.
- Momentna matrica može biti singularna za određen razmještaj (odabir) čvorova koji su odabrani u području utjecaja na aprokismaciju trenutne točke.

Da bi se izbjegli problemi regularnosti momentne matrice prilikom korištenja polinomne baze razvijena je aproksimacijska funkcija s radijalnom bazom. Aproksimacija „klasičnom“ radijalnom bazom koja je „neograničena“ je globalnog karaktera, tj. definirana je za bilo koji radijus. Aproksimacija s radijalnom bazom nema svojstvo konzistencije, tj. ne može opisati linarno polje. Stoga se često koristi izmijenjena aproksimacija s radijalnom bazom uz dodatak polinomnog dijela do obično nekog niskog stupnja, najčešće prvog, da bi se postiglo zadovoljavanje opisivanja linearnog polja. Jedan od uvjeta konvergencije je opisivanje konstantne deformacije. U tom slučaju potrebno je zadovoljiti dodatni uvjet jednoznačnosti aproksimacije. Aproksimacija s radijalnom bazom i dodanim polinomnim dijelom je oblika

$$f^{(h)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} R_i\left(r(\mathbf{x})\right) a_i + \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{R}^T\left(r(\mathbf{x})\right)\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}, \tag{2.68}$$

gdje je $R_i(\mathbf{x})$ radijalna baza pridružena *i*-tom čvoru i $p_j(\mathbf{x})$ polinomna baza analogno (2.25) . Koeficijenti a_i i b_j su konstante, $r(\mathbf{x})$ je udaljenost trenutne točke od čvora *i*. Uvjeti interpolacije i jednoznačnosti opisani su izrazima

$$\mathbf{R}_0\mathbf{a} + \mathbf{P}_m\mathbf{b} = \hat{\mathbf{f}}. \tag{2.69}$$

Momentna matrica $\mathbf{R}_0$ je oblika

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(nxn)}, \tag{2.70}$$

a momentna matrica za polinomni dio je jednaka

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{(mxn)}. \tag{2.71}$$

U jednadžbama (2.69) je $n+m$ nepoznatih koeficijenata. Stoga je potrebno postaviti dodatne jednadžbe. Te su jednadžbe vezane za jednoznačnost aproksimacije u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} p_j(\mathbf{x}_i) a_i = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_m^T\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad j = 1, m. \tag{2.72}$$

Jednadžbe (2.69) i (2.72) mogu se zapisati zajedno u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{2.73}$$

Uvodeći nove oznake gornji sustav se može zapisati kao

$$\mathbf{G}\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{f}}\,. \tag{2.74}$$

Rješavanjem sustava (2.74) dobivaju se nepoznati koeficijenti

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{G}_{aa}^{-1}\right)_{(nxn)} & \left(\mathbf{G}_{ab}^{-1}\right)_{(nxm)} \\ \left(\mathbf{G}_{ba}^{-1}\right)_{(mxn)} & \left(\mathbf{G}_{bb}^{-1}\right)_{(mxm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.75}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{G}_{aa}^{-1}\,\hat{\mathbf{f}}\,;\ \ \mathbf{b} = \mathbf{G}_{ba}^{-1}\,\hat{\mathbf{f}}.$$

Vraćanjem koeficijenata (2.75) u aproksimaciju (2.68), dobiva se sljedeći izraz za funkcije oblika

$$f^{(h)}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{R}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{aa}^{-1}\,\hat{\mathbf{f}} + \mathbf{p}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{ba}^{-1}\,\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}\right)\hat{\mathbf{f}}\,, \tag{2.76}$$

gdje su funkcije oblika određene prema

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{R}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{aa}^{-1} + \mathbf{p}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{ba}^{-1}. \tag{2.77}$$

Derivacije funkcija oblika jednake su

$$\mathbf{\Phi}_{,x_i}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{R}_{,x_i}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{aa}^{-1} + \mathbf{p}_{,x_i}^T\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{G}_{ba}^{-1}. \tag{2.78}$$

U ovoj aproksimacijskoj funkciji radijalne baze mogu biti globalnog karaktera, najčešće se tu koriste tzv. Gaussian (*EXP*) [2], [33]

$$R_i\left(r\right) = \exp\left[-cr^2\right] \tag{2.79}$$

i *Multi-quadrics* (*MQ*) [2], [33]

$$R_i\left(r\right) = \left(r^2 + c^2\right)^q. \tag{2.80}$$

Koriste se i ograničene (lokalne) (*Compactly Supported RBF – CSRBF* [36]) baze

$$R_i\left(r\right) = f\left(\frac{r}{\delta_{CS}}\right)^q, \tag{2.81}$$

gdje je δ_{CS} veličina lokalnog područja utjecaja nekog čvora, a q je potencija čija je najmanja vrijednost 5. Prema literaturi [30] nije dokazana posebna prednost *CSRBF* pred klasičnim *RBF* u aproksimaciji tj. opisivanju ploha i u rješavanju problema mehanike čvrstih tijela.

Svojstva aproksimacije radijalnim baznim funkcijama su:

- Funkcije oblika *RPIM* imaju Kronecker delta svojstvo.
- Funkcije oblika imaju svojstvo jediničnog zbroja.
- *RPIM* aproksimacija je visokog kontinuiteta.

- Ako je dodan linearni polinomni dio, *RPIM* aproksiamcija može opisati taj polinom sadržan u dodatku. Same radijalne baze ne mogu opisati linearno polje.
- Riješen je problem regularnosti momentne matrice koji postoji pri korištenju polinomne baze.
- *RPIM* aproksimacija je stabilna (što znači da mala promjena u razmještaju čvorova neće uzrokovati značajnu promjenu u kvaliteti aproksimacije) i fleksibilna što se tiče razmještaja čvorova.
- *RPIM* aproksimacija može se lako proširiti na tri dimenzije jer je jedina varijabla radijus tj. udaljenost od čvora.
- *RPIM* aproksimacija daje lošije rezultate u problemima mehanike čvrstih tijela u usporedbi s *MLS* ili *PPIM* aproksimacijom.
- Radijalne baze globalnog karaktera imaju parametre oblika koji mnogo utječu na točnost aproksimacije i na rješenje bezmrežne metode.
- *RPIM* aproksimacija je skuplja u kontekstu računalnog vremena jer je obično više čvorova uključeno u aproksimaciju u nekoj točki.

3. *MLPG* (*Meshless Local Petrov-Galerkin*) metoda za dvodimenzijske probleme

Posebnost Petrov-Galerkinove metode je sloboda odabira testne funkcije u odnosu na pretpostavljenu funkciju rješenja [5], [37], što je najznačajnija razlika prema Galerkinovoj metodi. Testna funkcija i pretpostavljeno rješenje mogu biti različite funkcije. Bezmrežne metode u ovom radu su temeljene na Petrov–Galerkinovoj metodi, uz različite testne funkcije. Integracija slabog oblika provedena je po lokalnim područjima koji su odabrani jednostavnog oblika, kao što je prikazano na slici 5. Ne postoji unaprijed određena povezanost među čvorovima u cilju integracije slabog oblika ni aproksimacije rješenja.

Područje definicije problema Ω omeđeno rubnom plohom Γ diskretizirano je čvorovima u unutrašnjosti i na rubu. Svakom čvoru pridruženo je područje Ω_s (*local sub-domain*) po kojem će se provesti integracija slabog oblika uvjeta ravnoteže. Veličina tog područja je kontrolirana, tj. određena bezdimenzijskim parametrom koji određuje veličinu Ω_s u odnosu na prosječni razmak najbližih čvorova. Svaki čvor može imati različitu veličinu i oblik lokalnog područja integracije. Lokalna područja se mogu preklapati, ili drugim riječima, ukupan zbroj područja integracije ne mora pokriti čitavo područje Ω. Ovisno o problemu, dobro rješenje se može postići iako lokalna područja ne prekrivaju čitavo područje problema Ω. Matrica sustava dobiva se postavljanjem, tj. integracijom članova za svaki čvor što znači da nema potrebe za algoritmom transformacije lokalnih matrica u globalnu kao što je slučaj u metodi konačnih elemenata.

U ovom radu će se koristiti aproksimacijske funkcije s interpolacijskim svojstvom (Kronecker delta svojstvo funkcija oblika) te će se stoga zadovoljavanje osnovnih rubnih uvjeta provesti izravno, analogno metodi konačnih elemenata i nisu potrebni posebni numerički postupci. Numerička integracija u svim metodama koje se temelje na integraciji slabog oblika uvjeta ravnoteže provodi se izravno, tj. bez posebnih podjela područja integracije.

3.1. Mješovita bezmrežna formulacija slabog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja

U idućih nekoliko odjeljaka bit će prikazane bezmrežne formulacije za rješavanje problema ravninskog stanja naprezanja (RN) za linearno elastično ponašanje materijala, uz pretpostavku malih deformacija. Uvjeti ravnoteže u tom slučaju jesu formalno isti kao i (2.11) s iznimkom da indeksi i, j poprimaju vrijednosti 1,2. Matrica elastičnih svojstava je definirana kao

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Stanje naprezanja prikazuje se komponentama različitim od nule

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Komponente tenzora deformacije koje utječu na energiju deformiranja su

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

3.1.1. Opći oblik jednadžbi

Za testnu funkciju odabrana je Heaviside funkcija [7] definirana na području integracije, tj.

$$v = H(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_s, \tag{3.4}$$

odnosno, u indeksnom zapisu je testna funkcija oblika

$$v_{ki} = v\delta_{ki} \tag{3.5}$$

gdje je δ_{ki} Kronecker delta simbol. Integral slabog oblika uvjeta ravnoteže (2.18) jednak je

$$\int_{\Omega_s} v_{ki}\left(\sigma_{ij,j} + f_i\right)\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{3.6}$$

U mješovitoj formulaciji zasebno su aproksimirane komponente naprezanja i pomaka istim aproksimacijskim funkcijama opisanim u odjeljku 2.3. U svrhu diskretizacije jednadžbi ravnoteže (3.6), koristi se aproksimacija komponenata naprezanja analogno (2.32). Aproksimirani oblik komponenata naprezanja bez ulaženja u detalje pojedine aproksimacijske funkcije je u obliku

$$\sigma_{ij}^{(h)}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \phi_I(\mathbf{x}) \hat{\sigma}_{ij} \tag{3.7}$$

gdje su $\hat{\sigma}_{ij}$ čvorne komponente naprezanja.

Iako ovdje nisu visoki zahtjevi za kontinuitetom aproksimirane funkcije naprezanja, na integral (3.6) se primjenjuje Gaussov integralni poučak radi smanjenja reda derivacije (zahtjeva za kontinuitetom) aproksimiranih komponenata naprezanja i radi implicitnog zadovoljavanja rubnih uvjeta sila. Integral (3.6) se transformira u izraz

$$\int_{\Omega_s} v_{ki}\sigma_{ij,j} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} v_{ki} f_i \, \mathrm{d}\Omega = 0 . \tag{3.8}$$

Prije primjene Gaussovog integralnog poučka provodi se zamjena derivacija u podintegralnoj funkciji prvog integrala prema

$$\left(v_{ki}\sigma_{ij}\right)_{,j} = v_{ki,j}\sigma_{ij} + v_{ki}\sigma_{ij,j} \Rightarrow v_{ki}\sigma_{ij,j} = \left(v_{ki}\sigma_{ij}\right)_{,j} - v_{ki,j}\sigma_{ij} . \tag{3.9}$$

Uvrštavanjem desne strane izraza (3.9) u prvi integral uz ponovno raspisivanje dobiva se

$$\int_{\Omega_s} \left(v_{ki}\sigma_{ij}\right)_{,j} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_s} v_{ki,j}\sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} v_{ki} f_i \, \mathrm{d}\Omega = 0 . \tag{3.10}$$

Na prvi integral u (3.10) može se primijeniti Gaussov integralni poučak pa taj integral prelazi u

$$\int_{\Omega_s} \left(v_{ki}\sigma_{ij}\right)_{,j} \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega_s} v_{ki}\sigma_{ij} n_j \mathrm{d}\Gamma . \tag{3.11}$$

U (3.11) $\partial\Omega_s$ označava plohu koja omeđuje područje integracije a n_j komponente vanjske jedinične normale na tu plohu. Nadalje (3.10) se pomoću (3.11) može zapisati kao

$$\int_{\partial\Omega_s} v_{ki}\sigma_{ij} n_j \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} v_{ki,j}\sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} v_{ki} f \, \mathrm{d}\Omega = 0 . \tag{3.12}$$

U drugom integralu u (3.12) javljaju se derivacije testne funkcije koje su uzimanjem Heavisideove funkcije (3.4) jednake nuli, pa se drugi integral u (3.12) može ispustiti. Na taj način (3.12) prelazi u

$$\int_{\partial\Omega_s} v_{ki}\sigma_{ij} n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_s} v_{ki} f \, \mathrm{d}\Omega = 0 . \tag{3.13}$$

Ploha koja omeđuje područje integracije, $\partial\Omega_s$, dijeli se na tri dijela. Dio koji je potpuno unutar globalnog područja Ω, označen je L_s. Dio koji ima presjek s globalnim rubom na kojem su zadani rubni uvjeti sila, Γ_t, je označen Γ_{st}. Dio koji ima presjek s globalnim rubom na kojem su zadani rubni uvjeti pomaka, Γ_u, je označen Γ_{su}. U općem slučaju ne postoje za svaki čvor sva tri dijela plohe $\partial\Omega_s$. Zbroj svih dijelova ruba područja integracije, $L_s \cup \Gamma_{st} \cup \Gamma_{su} = \partial\Omega_s$, je ukupna ploha koja omeđuje područje integracije. U skladu s tim se (3.13) zapisuje na sljedeći način

$$\int_{L_s} v_{ki}\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} v_{ki}\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_s} v_{ki} f \,\mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_{st}} v_{ki}\overline{t}_i \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{3.14}$$

U (3.14) se koristi jednakost koja povezuje površinske sile i komponente naprezanja

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \tag{3.15}$$

pa $\overline{t}_i$ predstavljaju zadane komponente površinskih sila. Nadalje se zanemaruje volumenska sila f_i pa je konačno slabi oblik uvjeta ravnoteže, za odabranu Heaviside testnu funkciju i uz $v_{ki}\sigma_{ij} = \sigma_{kj}$ za svaki čvor, jednak

$$\int_{L_s} \sigma_{kj}n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{kj}n_j \mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{st}} \overline{t}_k \mathrm{d}\Gamma \,. \tag{3.16}$$

U simboličkom zapisu jednadžbe (3.16) su

$$\int_{L_s} \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{st}} \overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{3.17}$$

gdje je $\mathbf{N}$ matrica komponenata vanjske jedinične normale definirana kao

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

U jednadžbama (3.17) broj jednadžbi jednak je $2N$ gdje je N broj čvorova diskretizacije. Za svaki čvor diskretizacije postavlja se jednadžba ravnoteže na pravcu osi x i y pa stoga za svaki čvor postoje dvije jednadžbe. Budući da su jednadžbe (3.17) diskretizirane čvornim komponentama naprezanja kojih je za svaki čvor tri, kako je prikazano u (3.27), broj nepoznanica je $3N$. Budući da je u sustavu više nepoznanica od jednadžbi, sustav je pododređen, što znači da nije moguće jednoznačno odrediti nepoznanice. Potrebno je uvesti dodatne jednadžbe u sustav kako bi postao rješiv.

Dodatne jednadžbe su konstitutivne jednadžbe kombinirane s kinematičkim jednadžbama. Kinematičke jednadžbe povezuju, tj. opisuju, komponente deformacije komponentama pomaka, a konstitutivne jednadžbe povezuju komponente naprezanja i

deformacija. Ovo implicitno znači da su u čvorovima modela nametnuti uvjeti kompatibilnosti deformacija s pomacima.

Konstitutivni zakon za ravninsko stanje naprezanja [38] raspisan po komponentama je

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right);\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right);\\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{3.19}$$

Simbolički se konstitutivne jednadžbe (3.19) mogu zapisati

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{3.20}$$

Kinematičke relacije raspisane po komponentama glase

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x};\\ \varepsilon_y &= v_{,y};\\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x}\end{aligned} \tag{3.21}$$

Kinematičke jednadžbe se simbolički mogu zapisati

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k\mathbf{u} \tag{3.22}$$

gdje je $\mathbf{D}_k$ matrica kinematičkog diferencijalnog operatora definirana kao

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix}\partial_x & 0\\ 0 & \partial_y\\ \partial_y & \partial_x\end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Diskretiziranjem kombiniranih konstitutivnih i kinematičkih jednadžbi čvornim komponentama pomaka i uvrštavanjem u (3.17), dobiva se zatvoreni sustav jednadžbi u koji se uvode rubni uvjeti pomaka.

3.1.2. Diskretizirani oblik jednadžbi

U cilju stvaranja algoritma temeljem jednadžbi (3.16), tj. (3.17) izvodi se diskretizirani oblik istih. Temeljem aproksimacije (3.7), stanje naprezanja (3.2) opisuje se u diskretiziranom obliku

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_n & 0 & 0\\ 0 & \Phi_1 & 0 & \cdots & 0 & \Phi_n & 0\\ 0 & 0 & \Phi_1 & \cdots & 0 & 0 & \Phi_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x^{\,1}\\ \sigma_y^{\,1}\\ \tau_{xy}^{\,1}\\ \vdots\\ \sigma_x^{\,n}\\ \sigma_y^{\,n}\\ \tau_{xy}^{\,n}\end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

odnosno prikazano simbolički

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{I}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{I} \tag{3.25}$$

gdje je $\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{I}(\mathbf{x})$ matrica funkcija oblika za naprezanje

$$\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{I}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\phi_I(\mathbf{x}) & 0 & 0\\ 0 & \phi_I(\mathbf{x}) & 0\\ 0 & 0 & \phi_I(\mathbf{x})\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

a $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{I}$ je čvorni vektor komponenata naprezanja

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{I}=\begin{bmatrix}\sigma_x^{\,I}\\ \sigma_y^{\,I}\\ \tau_{xy}^{\,I}\end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Uvrštavanjem (3.25) u (3.17) dobiva se diskretizirani oblik

$$\sum_{J=1}^{n}\left(\int_{(L_s)^I}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{J}\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{(\Gamma_{su})^I}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{J}\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{J}=-\int_{(\Gamma_{st})^I}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{3.28}$$

Ovakve se jednadžbe integriraju za svaki čvor I pa su članovi matrice koeficijenata

$$\mathbf{K}_1^{(IJ)}=\int_{(L_s)^I}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{J}\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{(\Gamma_{su})^I}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_{J}\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{3.29}$$

gdje $\mathbf{K}_1^{(IJ)}$ predstavlja podmatricu matrice krutosti sustava, tj. modela. Dimenzija $\mathbf{K}_1^{(IJ)}$ je 3x3. Provođenjem integracije za sve čvorove u modelu dobiva se prvi sustav jednadžbi simbolički zapisan

$$\mathbf{K}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{R}. \tag{3.30}$$

Nadalje se provodi diskretizacija kombiniranih jednadžbi (3.21) i (3.19) tako da su prvo diskretizirane kinematičke jednadžbe (3.21) u čvoru diskretizacije

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \cdots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \cdots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \cdots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

odnosno simbolički zapisano

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{x}^J\right) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^J = \sum_{I=1}^{n} \mathbf{D}_k \boldsymbol{\Phi}_I \left(\mathbf{x}^J\right) \hat{\mathbf{v}}^I \tag{3.32}$$

gdje je $\boldsymbol{\Phi}_I\left(\mathbf{x}\right)$ matrica funkcija oblika definirana prema

$$\boldsymbol{\Phi}_I\left(\mathbf{x}\right) = \begin{bmatrix} \phi_I\left(\mathbf{x}\right) & 0 \\ 0 & \phi_I\left(\mathbf{x}\right) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

i $\hat{\mathbf{v}}^I$ vektor čvornih komponenata pomaka

$$\hat{\mathbf{v}}^I = \begin{bmatrix} u^I \\ v^I \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Umnožak matrica $\mathbf{D}_k \boldsymbol{\Phi}_I\left(\mathbf{x}^J\right)$ označava se kao $\mathbf{B}_I\left(\mathbf{x}^J\right) = \mathbf{D}_k \boldsymbol{\Phi}_I\left(\mathbf{x}^J\right)$. Uvrštavanjem (3.32) u (3.27) dobiva se diskretizirani oblik konstitutivnih jednadžbi

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{D} \sum_{J=1}^{n} \mathbf{B}_J\left(\mathbf{x}^I\right) \hat{\mathbf{v}}^J . \tag{3.35}$$

Jednadžbe (3.35) postavljaju se za sve čvorove u proračunskom modelu što daje novi sustav jednadžbi

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{DB}\hat{\mathbf{v}} . \tag{3.36}$$

Uvrštavanjem (3.36) u (3.30) dobiva se sustav jednadžbi s komponentama pomaka u čvorovima kao nepoznanicama

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{DB}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R} . \tag{3.37}$$

U sustav (3.37) se uvode rubni uvjeti pomaka izravno, analogno metodi konačnih elemenata prema algoritmu koji će ukratko biti opisan u nastavku.

Za svaku komponentu pomaka koja je zadana, $v^I = \overline{v}^I$, u svim jednadžbama sustava (3.37) uvodi se ta komponenta pomaka na način [34], [39] da se pomnoži koeficijent (član) u pripadnom stupcu matrice krutosti $\mathbf{K}_{(iI)}$ vrijednošću $\overline{v}^I$ te se takav vektor oduzima od desnog vektora sustava prema

$$\mathbf{R}_{(i)} = \mathbf{R}_{(i)} - \mathbf{K}_{(iI)}\overline{v}^{I}. \tag{3.38}$$

Idući korak je izjednačavanje nulom svih članova matrice krutosti u pripadnom retku i stupcu

$$\mathbf{K}_{1(iI)} = \mathbf{K}_{1(Ij)} = 0, \quad i = 1,\, 2N,\, j = 1,\, 2N. \tag{3.39}$$

Član na glavnoj dijagonali dobiva vrijednost jedan

$$\mathbf{K}_{1(II)} = 1. \tag{3.40}$$

Zadnji korak je zamjena vrijednosti desnog vektora vrijednošću zadane komponente pomaka

$$\mathbf{R}_{(I)} = \overline{v}^{I}. \tag{3.41}$$

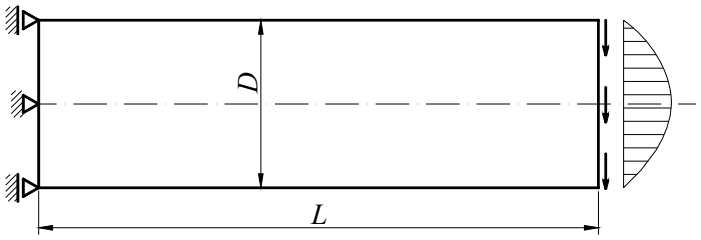
Nakon provedenih koraka za sve zadane komponente pomaka provodi se invertiranje matrice krutosti i određivanje nepoznatih komponenata pomaka.

3.1.3. Numerički primjeri

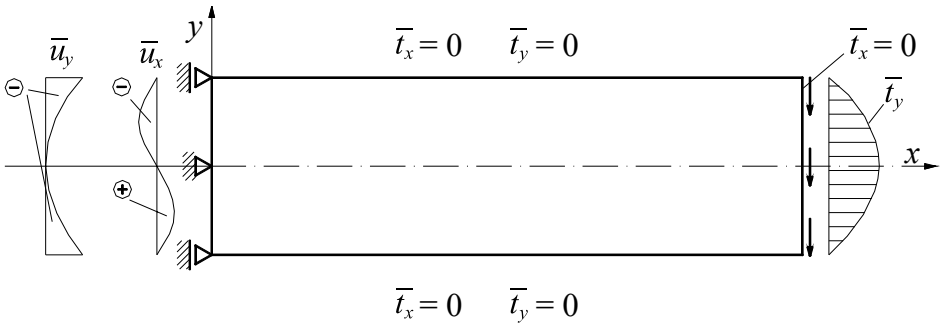
3.1.3.1. Konzola opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem

Prvi numerički primjer je konzolni nosač opterećen promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem po zakonu parabole. Konzola je izmjera $L = 30, H = 10$ i jedinične debljine. Rubni uvjeti pomaka su zadani u svim čvorovima na koordinati $x = 0$ prema slici 17. U svim numeričkim primjerima u ovom odjeljku korištena su jednostavna lokalna područja integracije pravokutnog oblika, prikazana na slici 18.

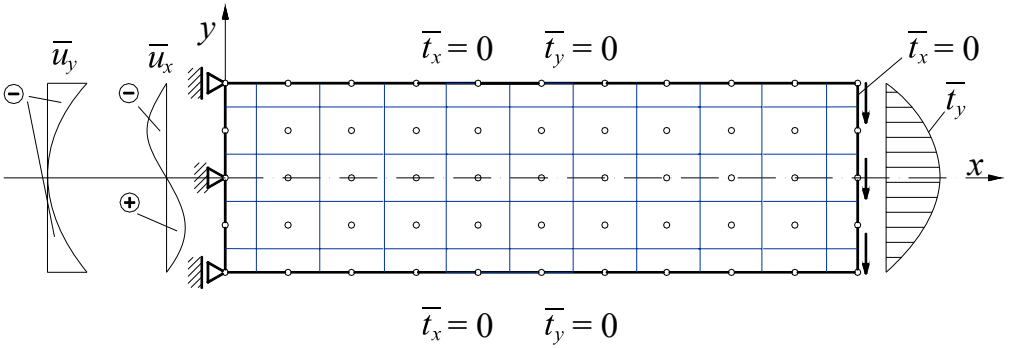
Veličina lokalnog područja određena je razmakom između čvorova i proizvoljnim skalarnim parametrom α_s [2], [7]. Veličina područja se od čvora u pozitivnom i negativnom smjeru na pravcu koordinatnih osi x i y određuje prema $d_x = \alpha_s\, h_x$; $d_y = \alpha_s\, h_y$ gdje su h_x i h_y razmaci između trenutnog čvora i prvih susjednih čvorova. U ovom radu je odabrano $\alpha_s = 0{,}5$. To ujedno znači i da je zbroj lokalnih područja svih čvorova jednak veličini područja Ω. Materijalne konstatne su $E = 200\,000,\ \nu = 0{,}3$. Čvorovi su razmješteni ravnomjerno duž osi x i y. Za rubne uvjete prikazane na slici 17 postoji analitičko rješenje [40].



Slika 16. Konzola opterećena promjenjivim raspodijeljenim opterećenjem



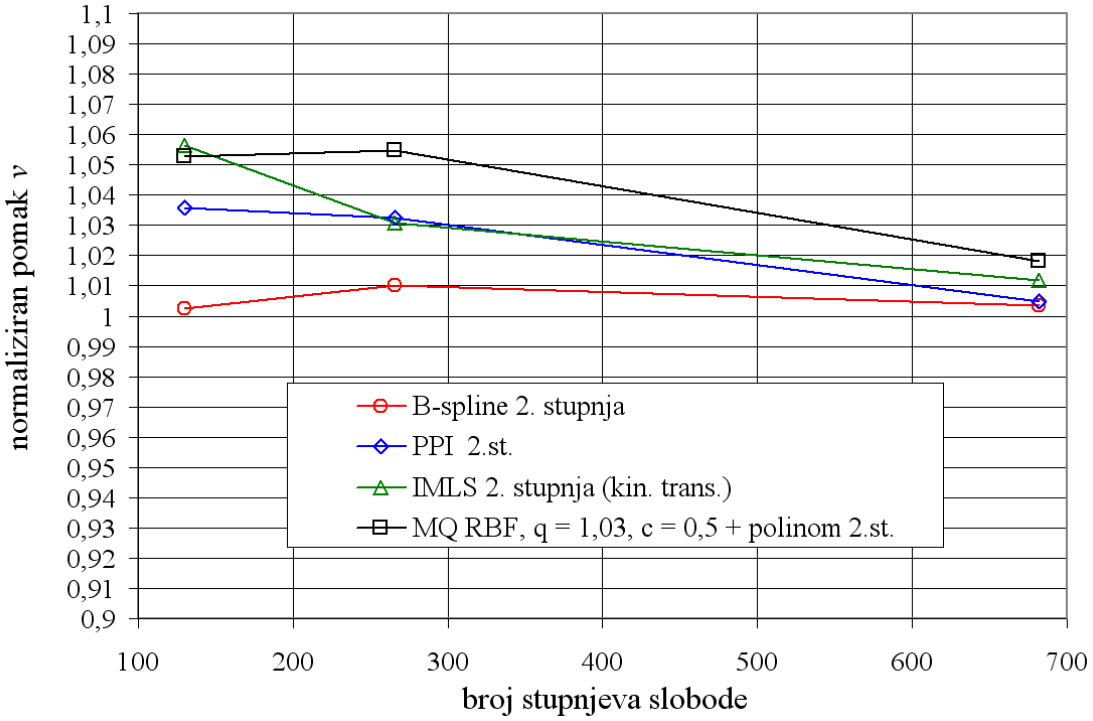
Slika 17. Konzola s mješovitim rubnim uvjetima



Slika 18. Diskretizacija i lokalna područja integracije konzole sa slike 17

Za analizirani primjer na slici 18 prikazane su nadalje u dijagramima konvergencija pomaka na pravcu osi y na sredini desne stranice te e_1 diskretna relativna greška pomaka i e_2 diskretna norma greške pomaka. Te veličine su određene prema

$e_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|u_i^{num} - u_i^{a}\right|}{\left|u_i^{a}\right|}$; $e_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{num} - u_i^{a}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{a}\right)^2}}$. U izrazima za e_1 i e_2 u_i^{num} predstavlja vrijednost komponente pomaka i izračunate prema numeričkom algoritmu, a u_i^{a} ista komponenta izračunata prema analitičkom rješenju. N je broj čvorova diskretizacije.



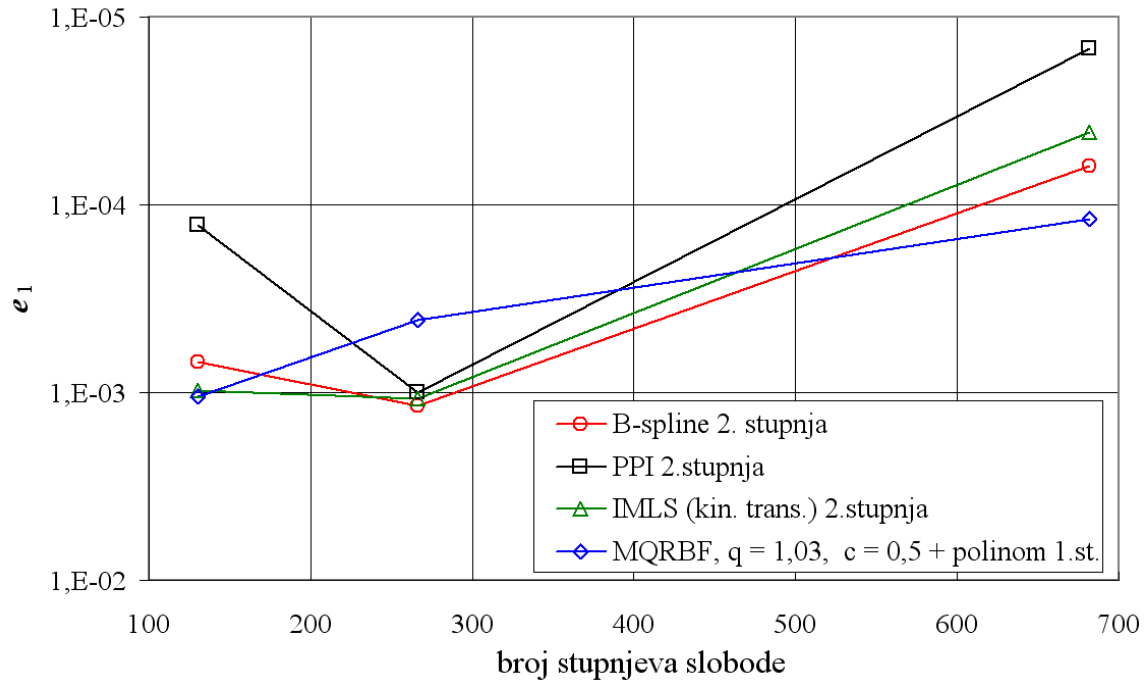
Slika 19. Konveregencija pomaka na $x = L, y = 0$ za konzolu sa slike 18

Na slici 19 prikazana je konvergencija normalizirane komponente pomaka v u točki $x = L$, $y = 0$ na konzoli prema slici 18. Analiza je provedena pomoću formulacije prikazane u ovom odjeljku s primijenjene 4 aproksimacijske funkcije. Od *RBF* „grupe“ aproksimacijskih funkcija provedene su analize s „klasičnim“ radijalnim neograničenim bazama oblika, *Multi quadrics – MQ* koje imaju bazu oblika (2.80), gdje su c i q proizvoljne konstante, *Exponential, Gaussian – EXP* koje imaju bazu oblika (2.79) te „ograničene“, *Compactly supported – CS* koje imaju bazu oblika

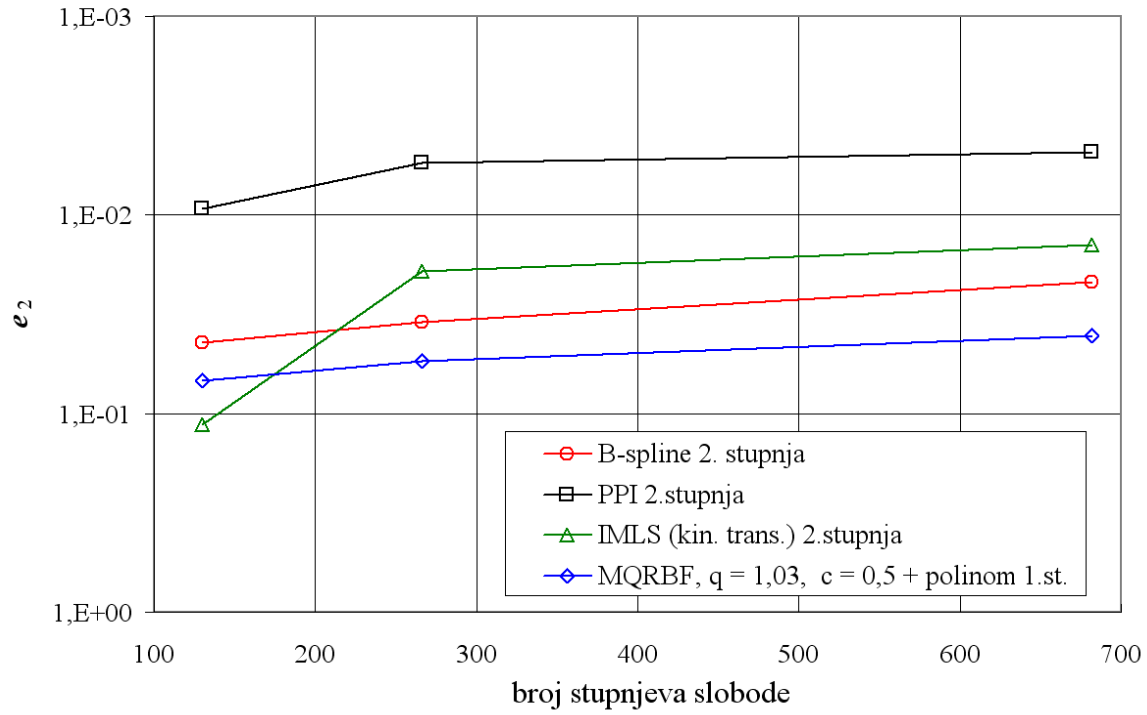
$R_i(r) = \left(1 - \left(\frac{r}{\delta_{CS}}\right)^3\right)\left(1 + 3\left(\frac{r}{\delta_{CS}}\right)\right)$. Pokazalo se da ograničene radijalne baze nemaju značajne prednosti prema klasičnim, za što rezultati nisu ovdje prikazani. Od najčešće korištenih neograničenih radijlanih baza *MQ* i *EXP* pokazalo se da je za ovakvu vrstu

problema stabilnija i točnija *MQ* i to s odabranim parametrima $c = 0,5,\ q = 1,03$ [30]. Prema [30] pokazano je da su vrijednosti za eksponenet q kritične vrijednosti cijeli brojevi $1,2,3,...$ koji uzrokuju singularnu ili loše uvjetovanu matricu uvjeta interpolacije. Za *IMLS* aproksimacijsku funkciju Kronecker delta svojstvo je u ovom slučaju dobiveno nametanjem uvjeta interpolacije analogno (2.60). Pokazuje se da je takva aproksimacijska funkcija relativno osjetljiva na veličinu relativnog radijusa težinske funkcije definirane s (2.39) gdje se radijus težinske funkcije d_k izračunava na način $d_k = r_{tr}\, h$. r_{tr} je faktor tj. relativni radijus težinske funkcije a h prosječni čvorni razmak u blizini trenutnog čvora. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u ovom primjeru biti će prikazan na slici 26.

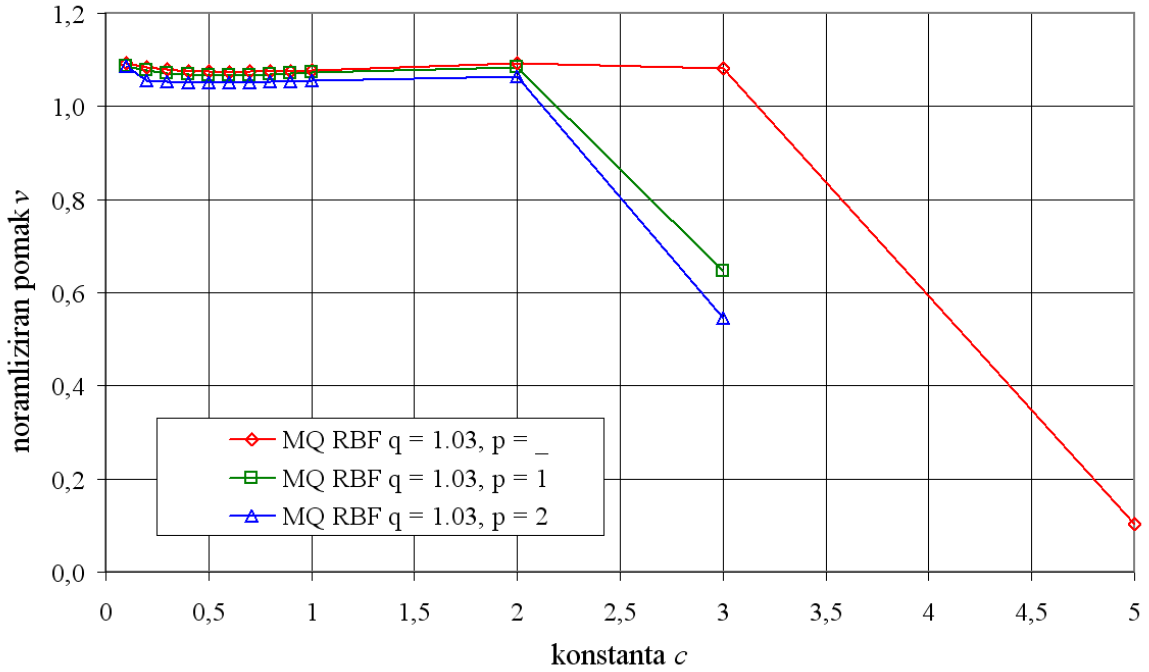
Uspoređujući rezultate za četiri aproksimacijske funkcije vidljivo je da *B-spline* daje najbolje rezultate za vrlo mali broj čvorova odnosno stupnjeva slobode. *PPIM* aproksimacijska funkcija daje malo lošije rezultate za isti broj čvorova što bi se moglo objasniti utjecajem „odabira“ utjecajnih čvorova koji je „više – manje“ proizvoljan, naravno, uz uvjet da je broj utjecajnih čvorova jednak broju monoma vektora baze. Iako je *MLS* funkcija polinomne baze jednakog stupnja kao i *B-spline* i *PPIM* ne daje jednaku točnost jer u ovakvom načinu dobivanja interpolacijskih funkcija relativno je značajan utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije za mali broj čvorova što će biti prikazano na slici 26. Očekivano je najlošija *RBF* aproksimacijska funkcija i to uz „optimalne“ paramtere $c = 0,5,\ q = 1,03$ za ovu grupu problema kako je pokazano u [30] jer je rješenje problema polinom u x i u y što radijalne baze mogu relativno slabo opisati. U ovoj *RBF* aproksimacijskoj funkciji dodan je polinomni dio do linearnog člana što teorijski znači da bi takva aproksimacijska funkcija morala opisivati upravo taj polinom, tj. imati konzistenciju. Ipak, u provedenim analizama pokazalo se da to nije tako, tj. za malo područje parametara oblika ovisno o radijalnoj bazi aproksimacijska funkcija stvarno i opisuje polinomni dodani dio, tj. ima konzistenciju, dok u općem slučaju postoji utjecaj radijalne baze, što će posredno biti prikazano na slikama od 22 do 25.



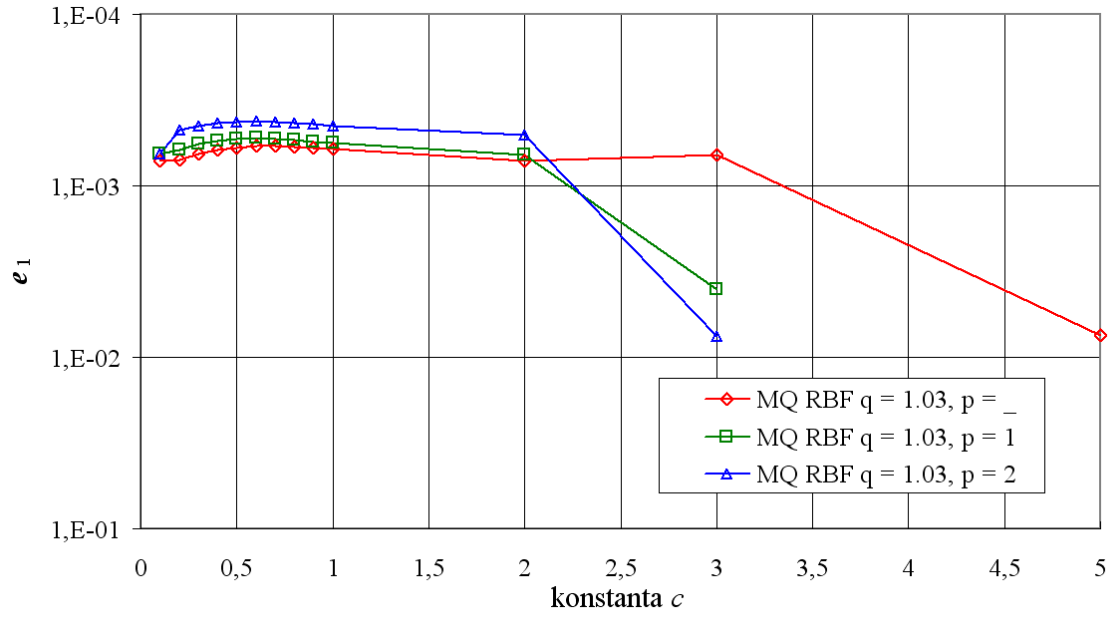
Slika 20. e_1 **diskretna relativna greška za konzolu sa slike 18**



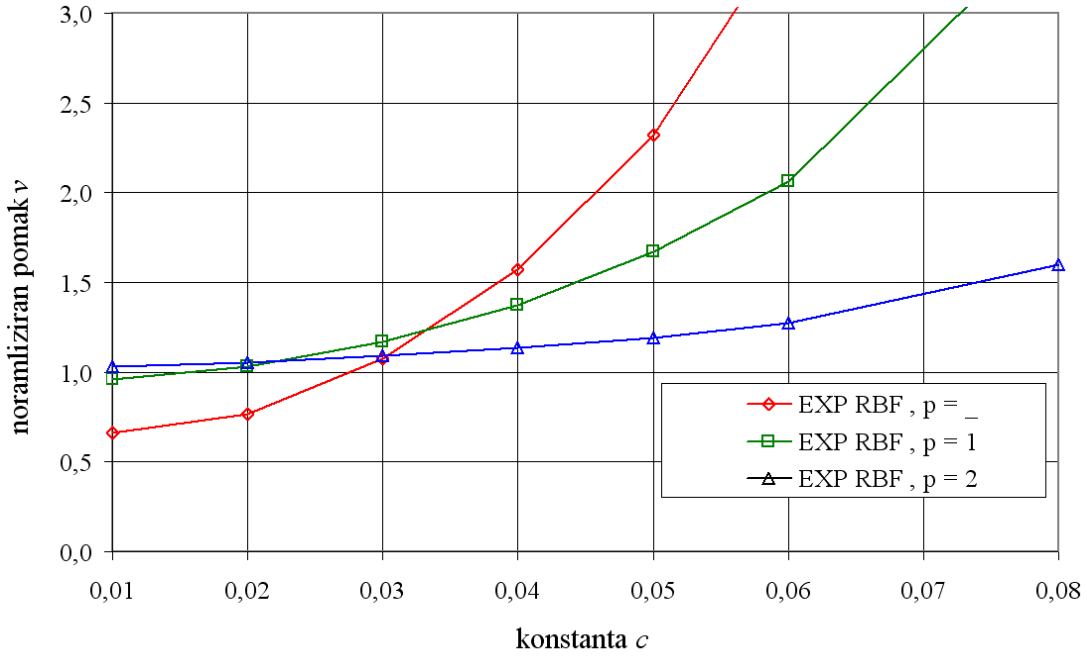
Slika 21. e_2 **diskretna norma za konzolu sa slike 18**



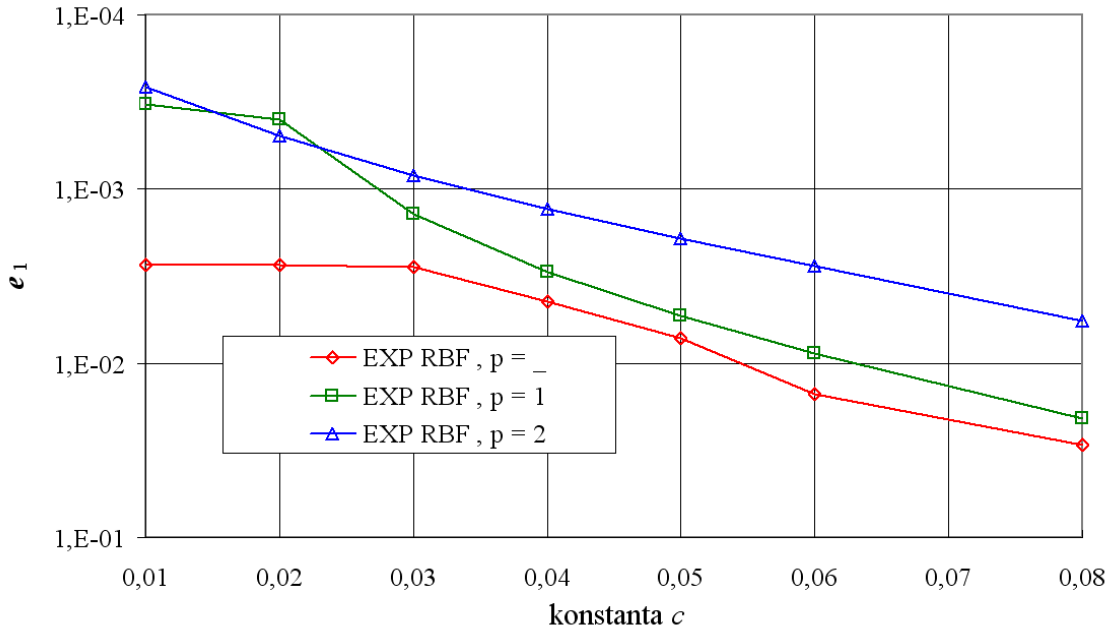
Slika 22. Utjecaj parametra *c* u *MQ RBF* aproksimaciji za konzolu sa slike 18



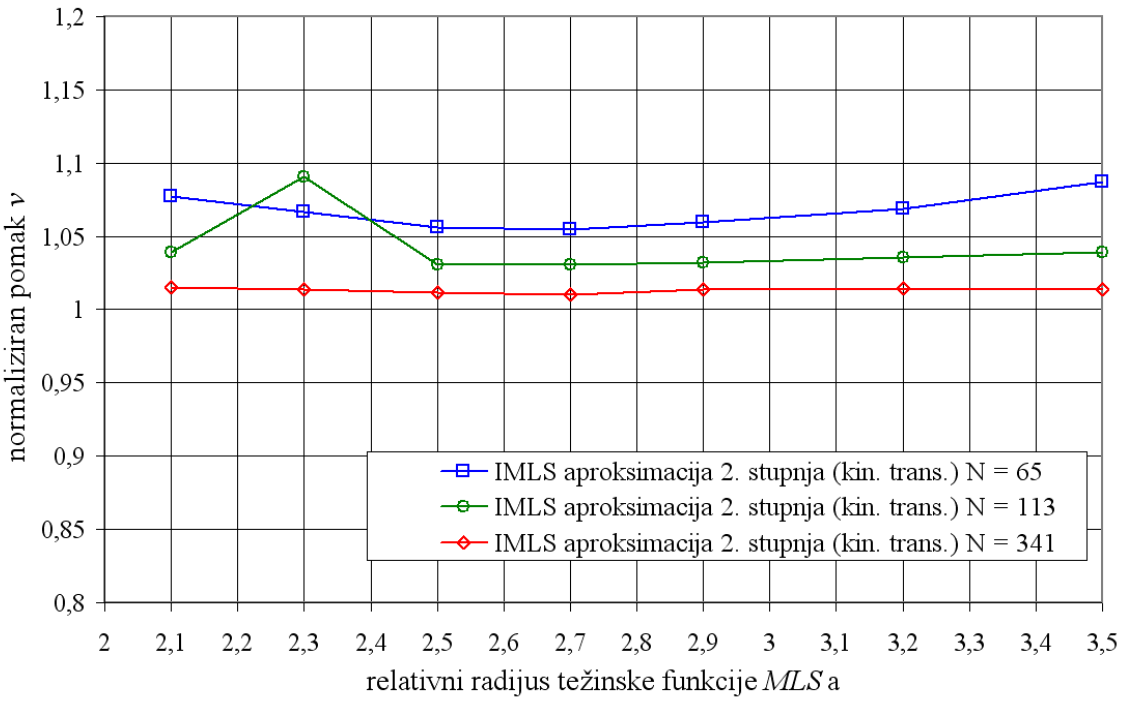
Slika 23. e_1 diskretna relativna greška za *MQ RBF* aproksimaciju za konzolu sa slike 18



Slika 24. Utjecaj parametra *c* u *EXP RBF* aproksimaciji za konzolu sa slike 18



Slika 25. e_2 diskretna norma za *EXP RBF* aproksimacijiom za konzolu sa slike 18



Slika 26. Utjecaj veličine područja utjecaja čvora u *IMLS* aproksimaciji uz kinematičku transformaciju za konzolu sa slike 18

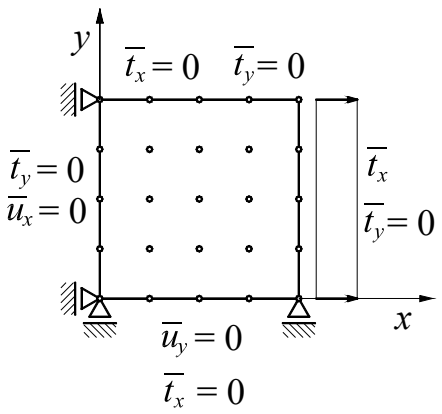
U dijagramima na slikama 22, 23, 24 i 25 oznaka $p = _$ znači da nije dodan polinomni dio, oznaka $p = 1$ znači da je dodan linearni polinom i $p = 2$ znači da je dodan kvadratični dio. Na tim dijagramima broj čvorova diskretizacije je $N = 13 \times 5$. Na slikama 22 i 24 vidljivo je da *RBF* aproksimacijska funkcija s dodanim polinomnim dijelom do 2. stupnja još uvijek ne opisuje „dobro“ problem s polinomnim rješenjem. Ovdje nije prikazano rješenje za velik broj čvorova koje nije zadovoljavajuće točnosti. Postoji relativno malo područje vrijednosti parametra c u *MQ RBF* za koji je, uz $q = 1,03$, rješenje prihvatljive točnosti. Za vrijednost $q = 2,03$ praktično se ne može postići greška manja od oko 50% na nekom većem području parametra c čak uz dodani polinomni dio 2. stupnja. U slučaju *EXP RBF* vidljivo je sa slike 24 da je na vrlo malom području vrijednosti parametra c točnost zadovoljavajuća. No, u slučaju *EXP RBF* ne postoji toliko široko područje u kojem je aproksimacija približno stalnih karakteristika kao što je to slučaj s *MQ RBF*.

Na osnovi ovog primjera može se zaključiti da je *RBF* aproksimacijska funkcija najlošija od primijenjenih za probleme u kojima je rješenje polinomnog oblika. Na slici 26 vidljiv je značajan utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *MLS* aproksimacijskoj funkciji na točnost rješenja. Utjecaj je to veći što je manji broj čvorova diskeretiziranog modela.

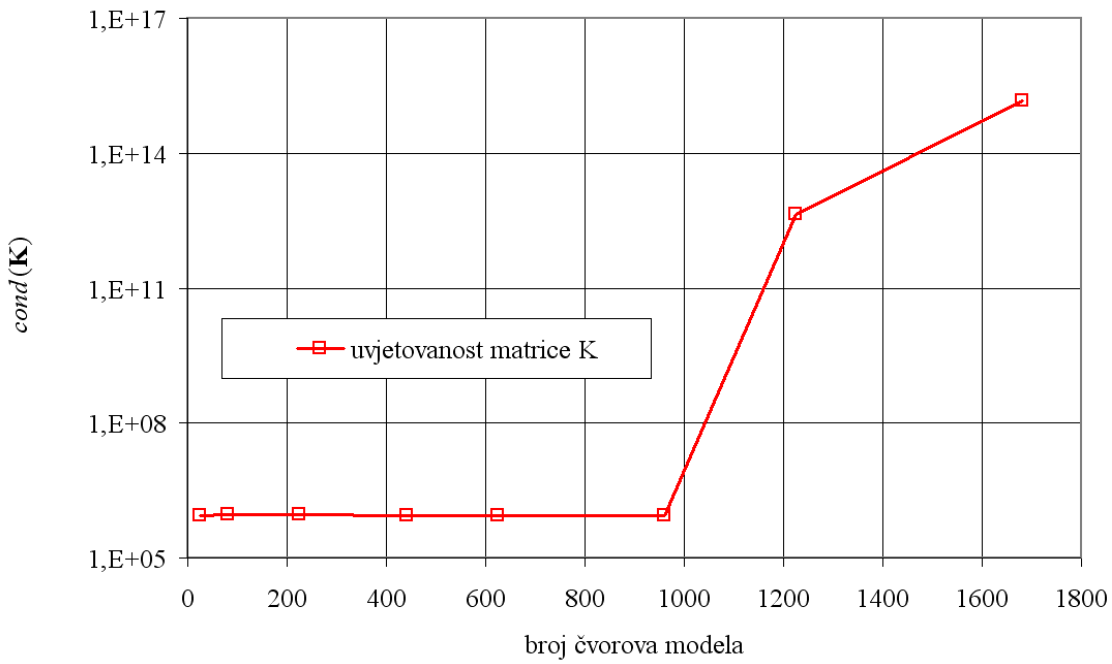
3.1.4. Uvjetovanost matrice krutosti s *B-spline* aproksimacijom 2. stupnja

Primjenjujući *B-spline* aproksimacijsku funkciju uočava se problem uvjetovanosti matrice krutosti proračunskog modela za relativno mali broj čvorova diskretizacije. Uzrok toga vrlo vjerojatno leži u nametanju uvjeta inteprolacije, (2.60). Matrica uvjeta interpolacije nije loše uvjetovana. Uvjetovanost te matrice je manja od 100 za najveći broj čvorova analiziranog modela.

U cilju određivanja karakteristika metode analizirana je četvrtina membrane (tanka ploča konstantne debljine opterećena u srednjoj ravnini, promatrana kao dvodimenzijski problem) s mješovitim rubnim uvjetima prikazana na slici 27. Naizgled postoji određeni broj čvorova proračunskog modela pri kojem rješenje povećavajući broj čvorova gubi značajno na točnosti. Uvjetovanost matrice krutosti se približava 10^{17} za koju rješavač upozorava da inverzna matrica krutosti više vjerojatno nije točna. Vidljivo je da je već za oko 35 čvorova diskretizacije duž osi x i y, odnosno oko 1200 čvorova u modelu, uvjetovanost dosta loša, što znači da je točnost rješenja za pomake narušena a za izračunata naprezanja još više. Na slici 28 prikazana je uvjetovanost matrice krutosti za analiziran primjer sa slike 27. Zadano je minimalno rubnih uvjeta pomaka da se spriječi pomak krutog tijela. Model je dobiven diskretizacijom ravnomjerno razmaknutim čvorovima. Iako se još i za model s najviše čvorova, oko 1600, dobiju relativno dobra rješenja za pomake, izračunata naprezanja su relativno netočna. Budući da je polje pomaka u tom primjeru linearno i po x i po y, a polje naprezanja konstantno, to je nedovoljno dobro rješenje za aproksimacijsku funkciju 2. stupnja. Ovaj problem uvjetovanosti istražen je u još nešto više detalja u odjeljku 3.2.



Slika 27. Četvrtina membrane s mješovitim rubnim uvjetima



Slika 28. Uvjetovanost matrice krutosti $\mathbf{K}$ za *B-spline* aproksimaciju 2. stupnja

3.2. Mješovita bezmrežna formulacija jakog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja

Kada se za testnu funkciju odabere Dirac-delta impulsna funkcija definirana u čvoru diskretizacije, prema

$$v = \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^I\right), \tag{3.42}$$

integral (3.6) prelazi u podintegralnu funkciju u točki definicije impulsne funkcije, [7], pa slijedi

$$\int_{(\Omega_s)^I} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^I\right)\left(\sigma_{ij,j} + f_i\right) \mathrm{d}\Omega = \sigma_{ij,j}\left(\mathbf{x}^I\right) + f_i\left(\mathbf{x}^I\right) = 0\,. \tag{3.43}$$

U formulaciji temeljenoj na jakom obliku uvjeta ravnoteže u svakoj točki na rubu područja moraju biti zadovoljeni ili rubni uvjeti sila ili rubni uvjeti pomaka. Svaka komponenta rubnih uvjeta sila mora biti eksplicitno zadovoljena. Nasuprot tome, u formulaciji temeljenoj na slabom obliku uvjeta ravnoteže rubni uvjeti sila su zadovoljeni implicitno u integralnom smislu, pa ako su na nekoj plohi, tj. području integracije zadane površinske sile iznosa nula, u slabom obliku ih je moguće zanemariti.

Za zadovoljavanje rubnih uvjeta sila u rubnim čvorovima koristi se kaznena metoda [7]. Jednadžbe za zadovoljavanje rubnih uvjeta sila kazenenom metodom su oblika

$$\int_{(\Omega_s)^I} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^I\right)\left(\sigma_{ij,j} + f_i\right) \mathrm{d}\Omega - \alpha \int_{(\Gamma_{st})^I} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^I\right)\left(t_i - \overline{t}_i\right) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{3.44}$$

što daje

$$\sigma_{ij,j}\left(\mathbf{x}^I\right) - \alpha\left(t_i\left(\mathbf{x}^I\right) - \overline{t}_i\left(\mathbf{x}^I\right)\right) = 0\,. \tag{3.45}$$

α je u (3.44) i (3.45) kazneni parametar. Uz uvjete ravnoteže sadržani su i rubni uvjeti sila pomnoženi kaznenim parametrom. Kazneni član isčezava za unutarnje čvorove. Ponovno je zanemarena volumenska sila $\mathbf{f}$.

3.2.1. Diskretizirani oblik jednadžbi

U cilju stvaranja numeričkog algoritma na temelju jednadžbi (3.45) izvodi se diskretizirani oblik jednadžbi (3.45). Temeljem aproksimacije (3.7), stanje naprezanja (3.2) opisuje se diskretiziranim oblikom prema (3.25). Jednadžbe (3.45) su nadalje diskretizirane

čvornim komponentama naprezanja prema (3.25) što za svaki čvor diskretizcije daje jednadžbe

$$\sum_{I=1}^{n} \mathbf{B}_{kI}\left(\mathbf{x}^J\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \mathbf{0} \tag{3.46}$$

U jednadžbama (3.46) je $\mathbf{B}_{kI}$ matrica derivacija funkcija oblika. Član $\mathbf{B}_{kI}$ predstavlja utjecaj čvora I na trenutni čvor i jednaka je

$$\mathbf{B}_{kI}\left(\mathbf{x}^J\right) = \begin{bmatrix} \phi_{I,x}\left(\mathbf{x}^J\right) & 0 & \phi_{I,y}\left(\mathbf{x}^J\right) \\ 0 & \phi_{I,y}\left(\mathbf{x}^J\right) & \phi_{I,x}\left(\mathbf{x}^J\right) \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Dio jednadžbi za zadovoljavanje rubnih uvjeta sila u (3.45) se nakon diskretizacije može prikazati analogno (3.46) u obliku

$$-\alpha\sum_{I=1}^{n} \mathbf{N}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_I\left(\mathbf{x}^J\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = -\alpha\,\overline{\mathbf{t}}\left(\mathbf{x}^J\right). \tag{3.48}$$

Matrica komponenata vanjske jedinične normale označena $\mathbf{N}$ u (3.48) je oblika

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x\left(\mathbf{x}^J\right) & 0 & n_y\left(\mathbf{x}^J\right) \\ 0 & n_y\left(\mathbf{x}^J\right) & n_x\left(\mathbf{x}^J\right) \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Iako u nekom čvoru nisu nužno zadane obje komponente površinske sile, vektor zadanih površinskih sila $\overline{\mathbf{t}}$ u čvoru s koordinatama $\left(\mathbf{x}^J\right)$ se ovdje zapisuje s dvije komponente u obliku

$$\overline{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \overline{t}_x \\ \overline{t}_y \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

U čvorovima sa zadanim rubnim uvjetima sila zbrajaju se jedandžbe (3.46) i (3.48), dok se u ostalim čvorovima postavljaju samo jednadžbe ravnoteže (3.46). Diskretizirane jednadžbe u čvorovima na rubu su nakon zbrajanja (3.46) i (3.48)

$$\sum_{I=1}^{n}\left(\mathbf{B}_{kI}\left(\mathbf{x}^J\right) - \alpha\mathbf{N}\boldsymbol{\Phi}^{\sigma}{}_I\left(\mathbf{x}^J\right)\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = -\alpha\,\overline{\mathbf{t}}\left(\mathbf{x}^J\right). \tag{3.51}$$

Postavljanjem kolokacijskih jednadžbi (3.51) u rubnim čvorovima ili (3.46) u čvorovima unutar modela dobiva se sustav jednadžbi

$$\mathbf{K}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}. \tag{3.52}$$

Ovaj sustav je pododređen kao i (3.30) pa se provodi uvođenje jednadžbi (3.36) te slijedi

$$\mathbf{K}_1\mathbf{D}\mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R}. \tag{3.53}$$

Umnožak matrica $\mathbf{K}_1\mathbf{DB}$ označava se kao matrica krutosti $\mathbf{K}$ pa se sustav jednadžbi zapisuje na način

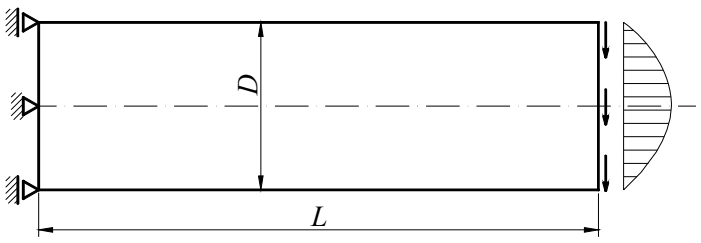
$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R}. \tag{3.54}$$

Uvođenje rubnih uvjeta pomaka se provodi analogno postupku opisanom od (3.38) do (3.41). Nakon uvođenja rubnih uvjeta pomaka provodi se rješavanje sustava jednadžbi.

3.2.2. Numerički primjeri

3.2.2.1. Konzola opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem

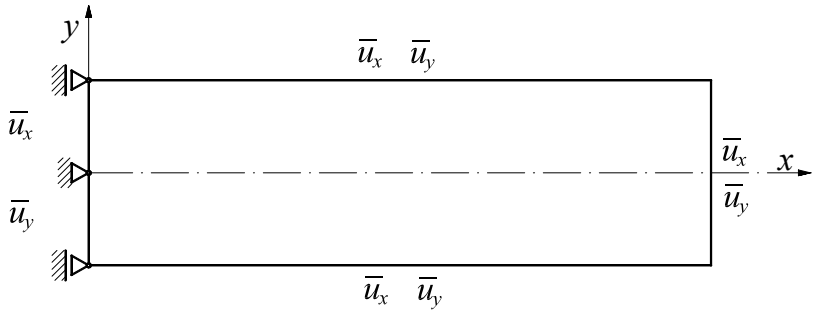
Prvi primjer je konzola prikazana na slici 29. Za konzolu s prikazanim rubnim uvjetima postoji analitičko rješenje [40]. Na slici 30 prikazana je ista konzola, tj. iste geometrije i materijalnih konstati, sa zadanim rubnim uvjetima pomaka iz istog analitičkog rješenja. Rubni uvjeti pomaka su zadani po svim rubovima. Na slici 31 za istu konzolu zadani su rubni uvjeti pomaka na stranici s koordinatom $x = 0$ dok su na ostalim stranicama zadane površinske sile. Na slici 32 na istoj konzoli zadano je minimalno rubnih uvjeta pomaka da se spriječi pomak krutog tijela. Za primjere prikazane na slikama od 30 do 32 geometrija je zadana izmjerama: $L = 30, H = 10$ i jedinične debljine, a materijalne konstante su: $E = 200\,000,\ \nu = 0,3$.



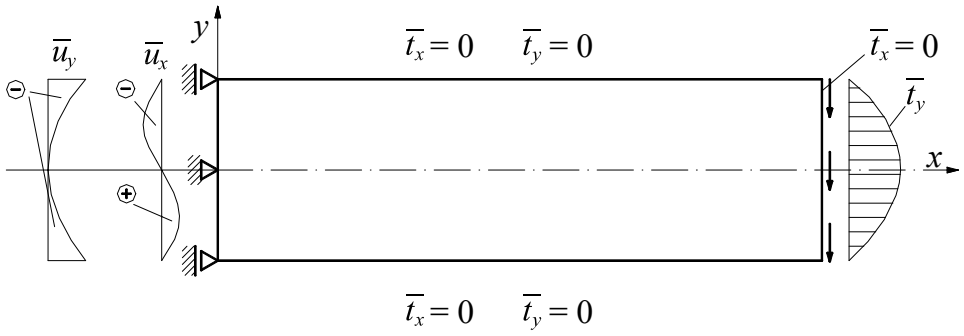
Slika 29. Konzola opterećena promjenjivim raspodijeljenim opterećenjem

Za analizirane primjere na slikama od 30 do 32 prikazane su nadalje u dijagramima konvergencija pomaka te e_1, diskretna relativna greška pomaka i e_2, diskretna norma greške pomaka. Te veličine su određene prema

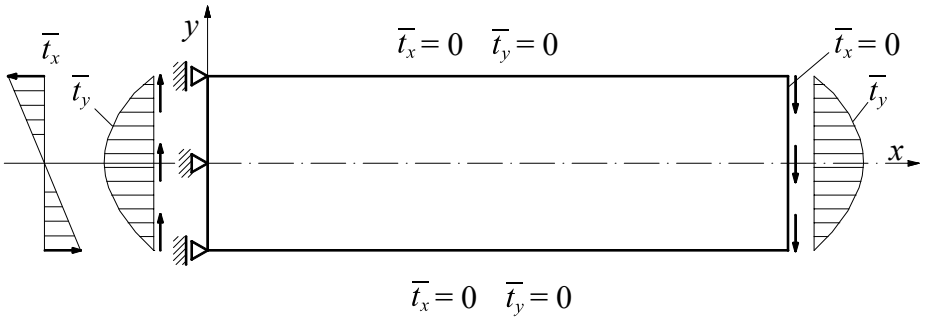
$$e_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|u_i^{num} - u_i^{a}\right|}{\left|u_i^{a}\right|};\; e_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{num} - u_i^{a}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{a}\right)^2}}\,.$$



Slika 30. Konzola s rubnim uvjetima pomaka

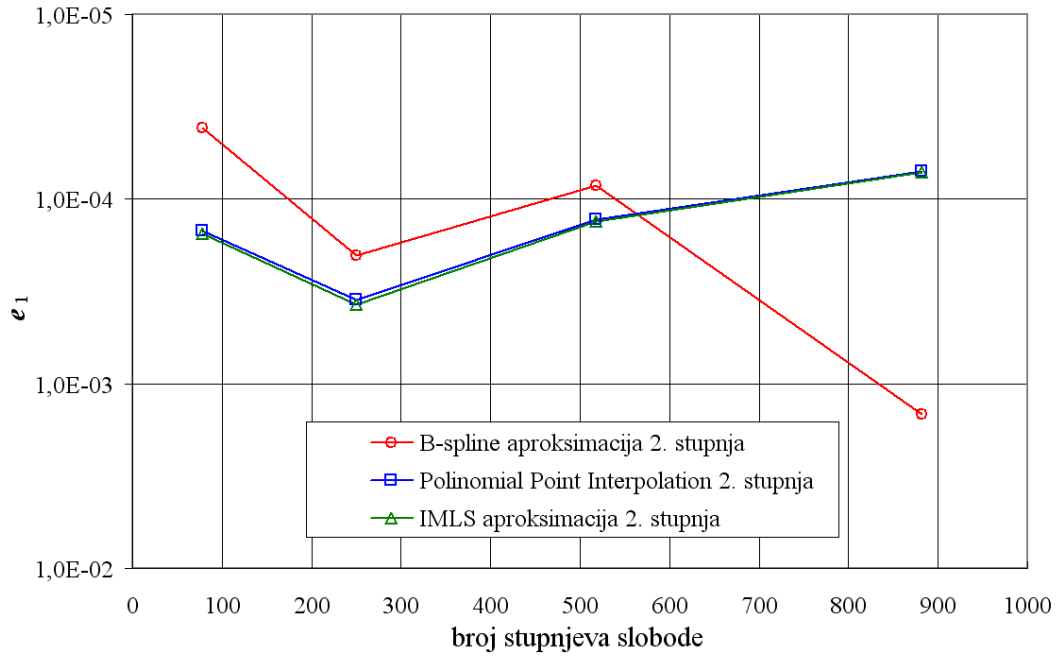


Slika 31. Konzola s mješovitim rubnim uvjetima

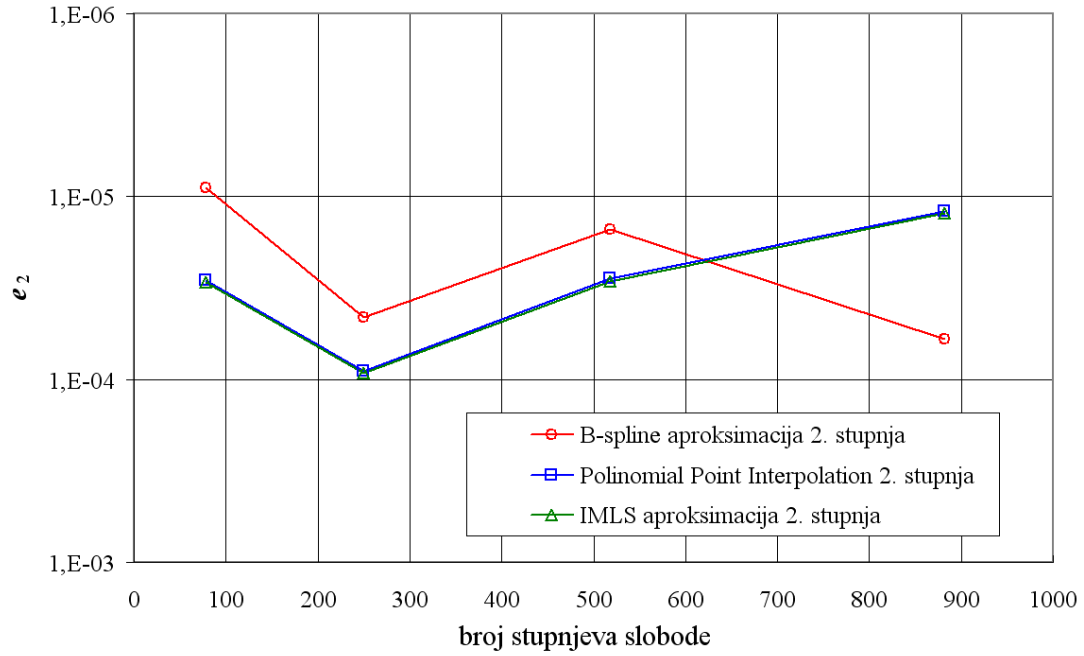


Slika 32. Konzola s minimalno rubnih uvjeta pomaka

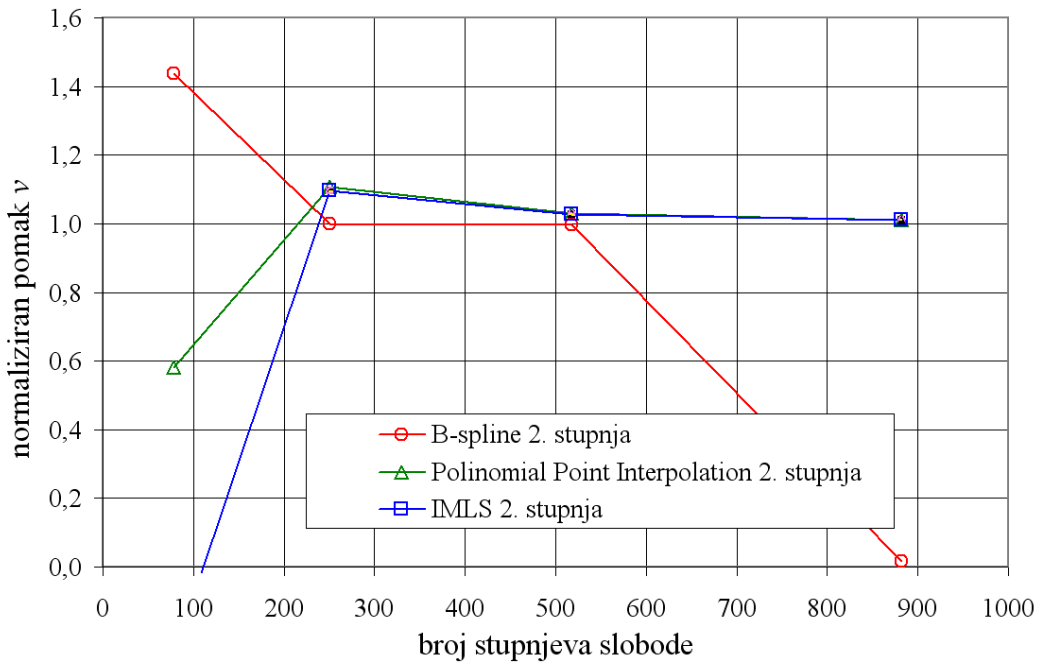
Dijagram konvergencije pomaka za primjer sa slike 30 nije prikazan budući da je u dijagramima konvergencije pomaka za ovaj primjer prikazana konvergencija komponente pomaka u točki $x = L, y = 0$, tj. u točki na sredini desne stranice gdje je ta komponenta pomaka i zadana. Funkcije oblika su interpolirajuće pa su svi zadani pomaci točno opisani.



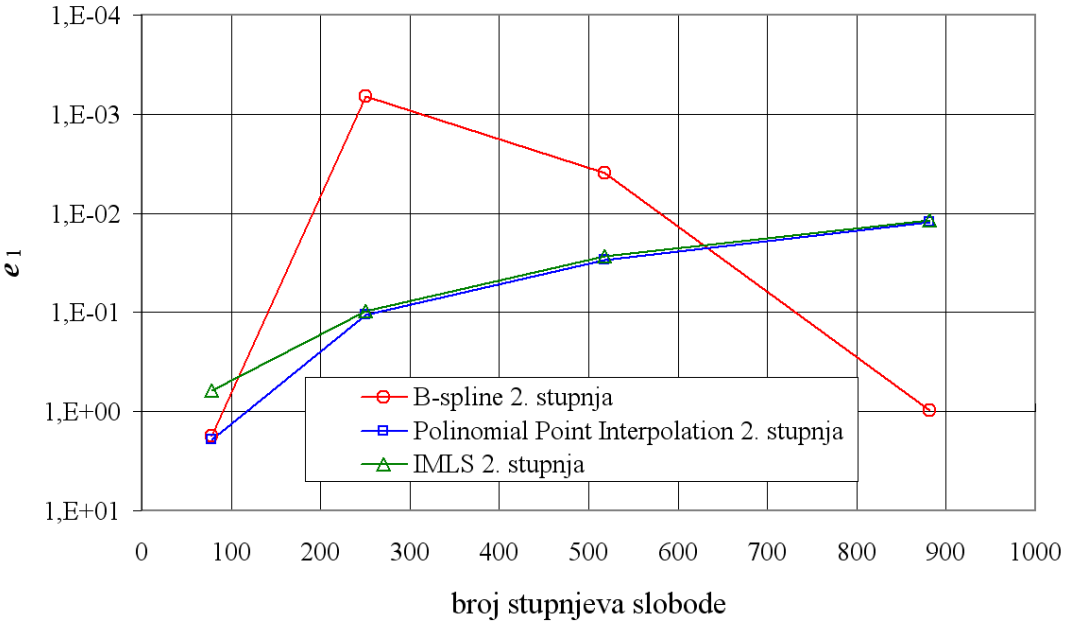
Slika 33. e_1 **diskretna relativna greška za konzolu sa slike 30**



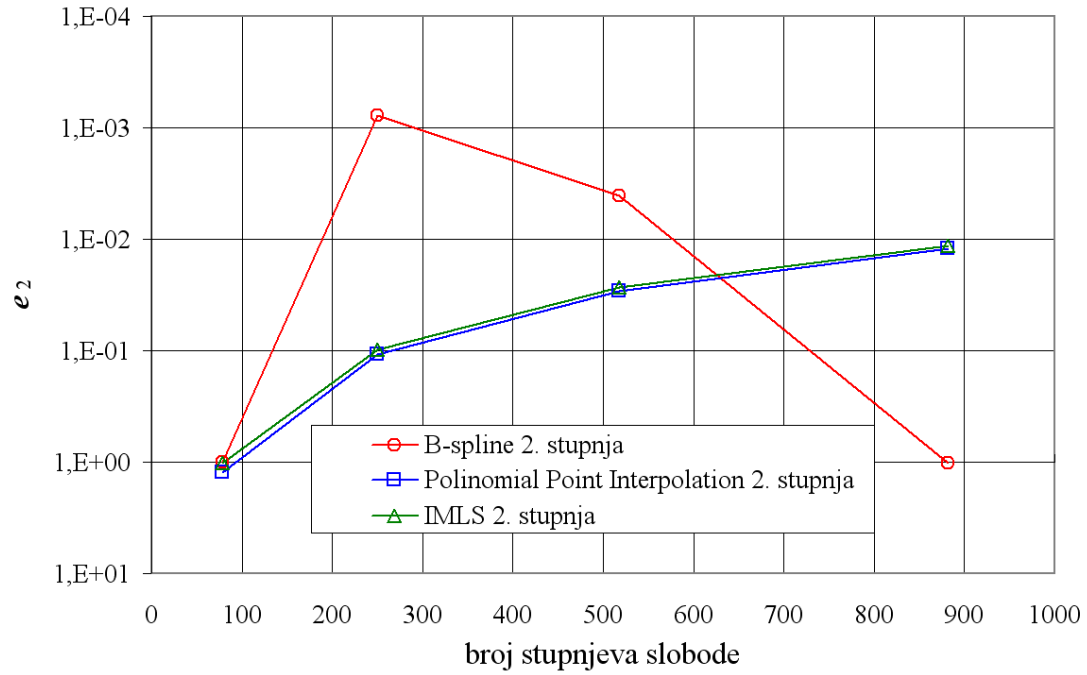
Slika 34. e_2 **diskretna norma za konzolu sa slike 30**



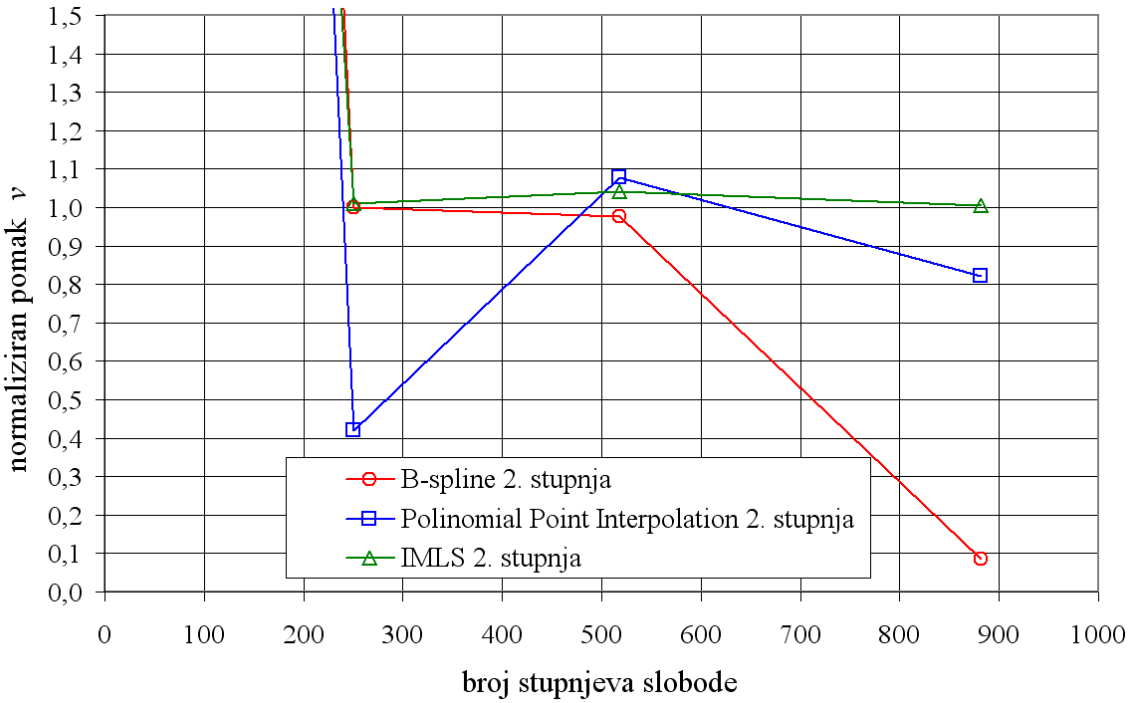
Slika 35. Konvergencija pomaka u točki $x = L, y = 0$ za konzolu sa slike 31



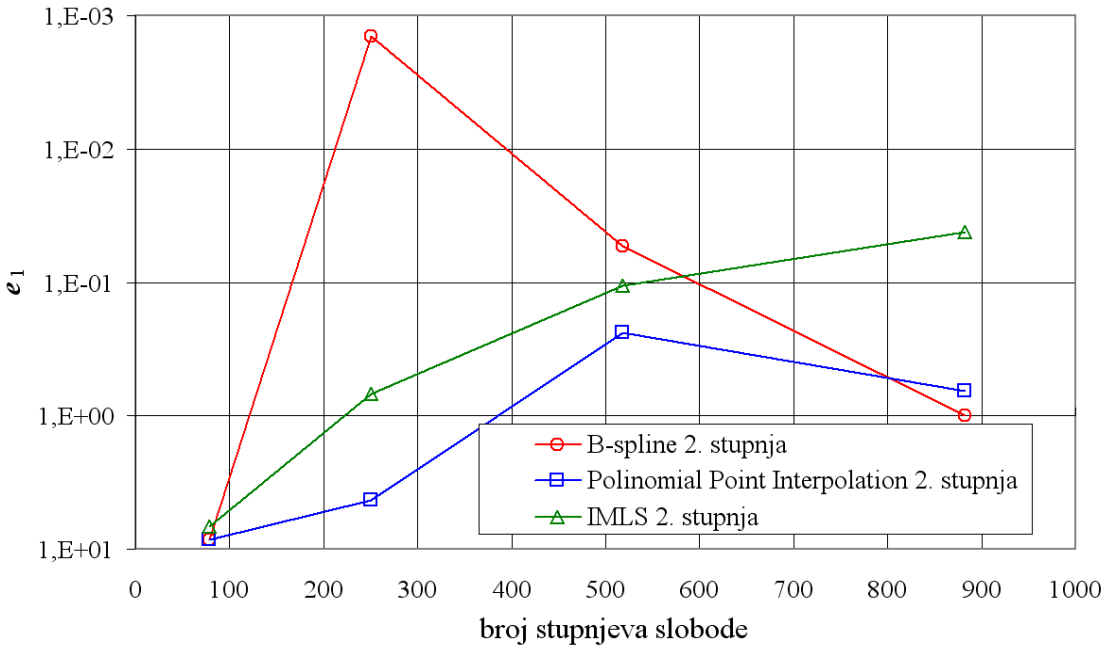
Slika 36. e_1 diskretna relativna greška za konzolu sa slike 31



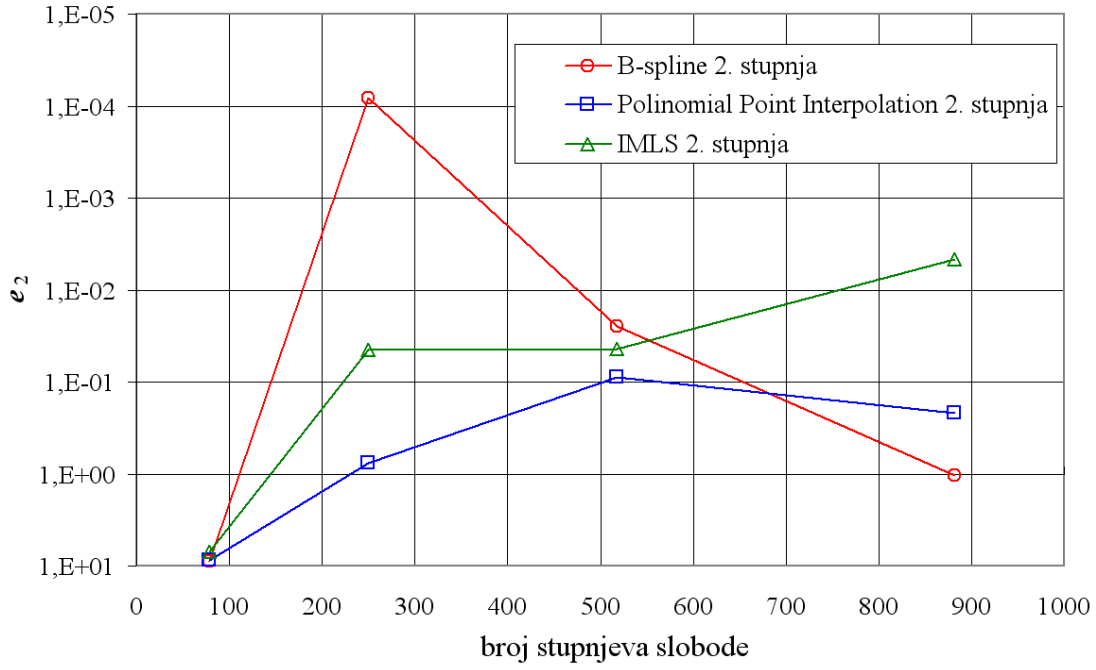
Slika 37. e_2 **diskretna norma za konzolu sa slike 31**



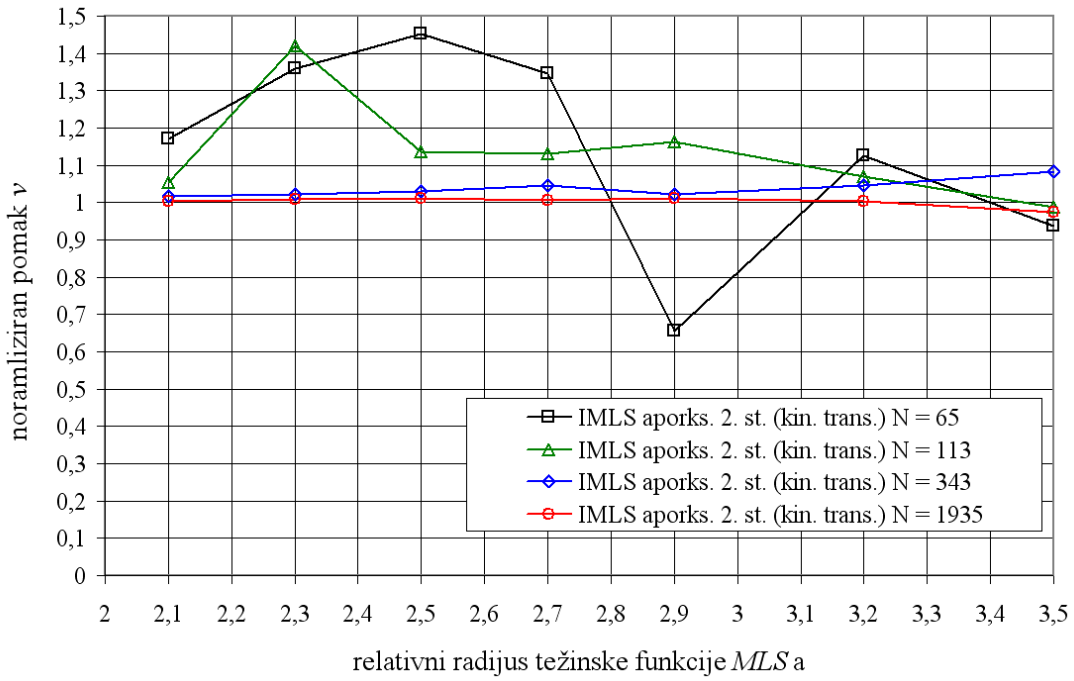
Slika 38. Konvergencija pomaka u točki $x = L, y = 0$ **za konzolu sa slike 32**



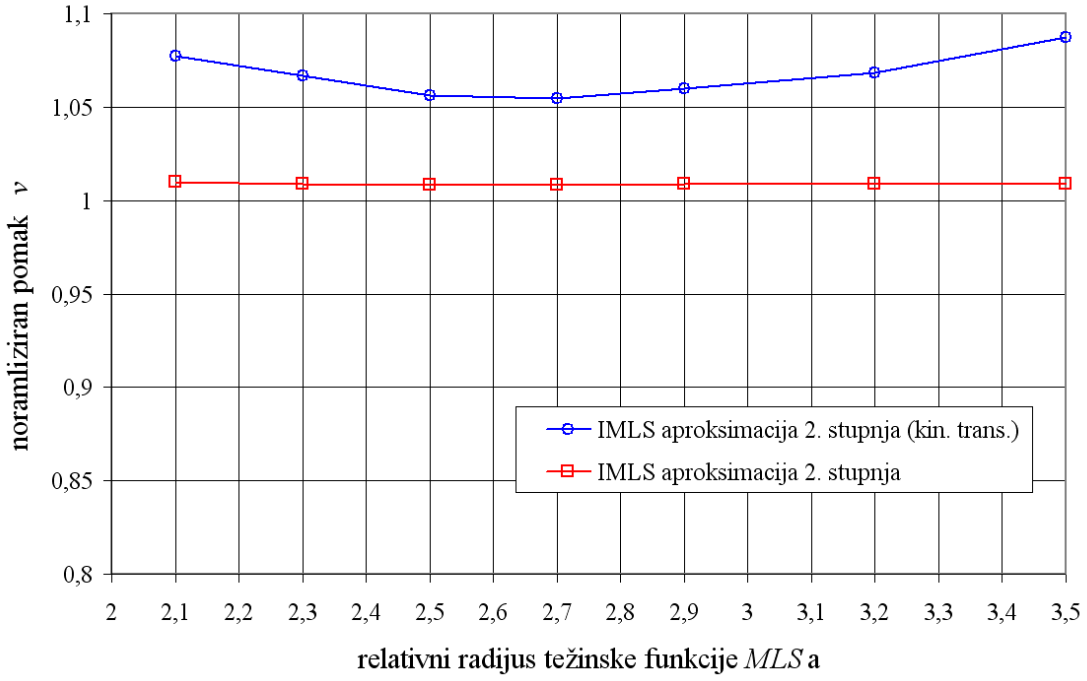
Slika 39. e_1 **diskretna relativna greška za konzolu sa slike 32**



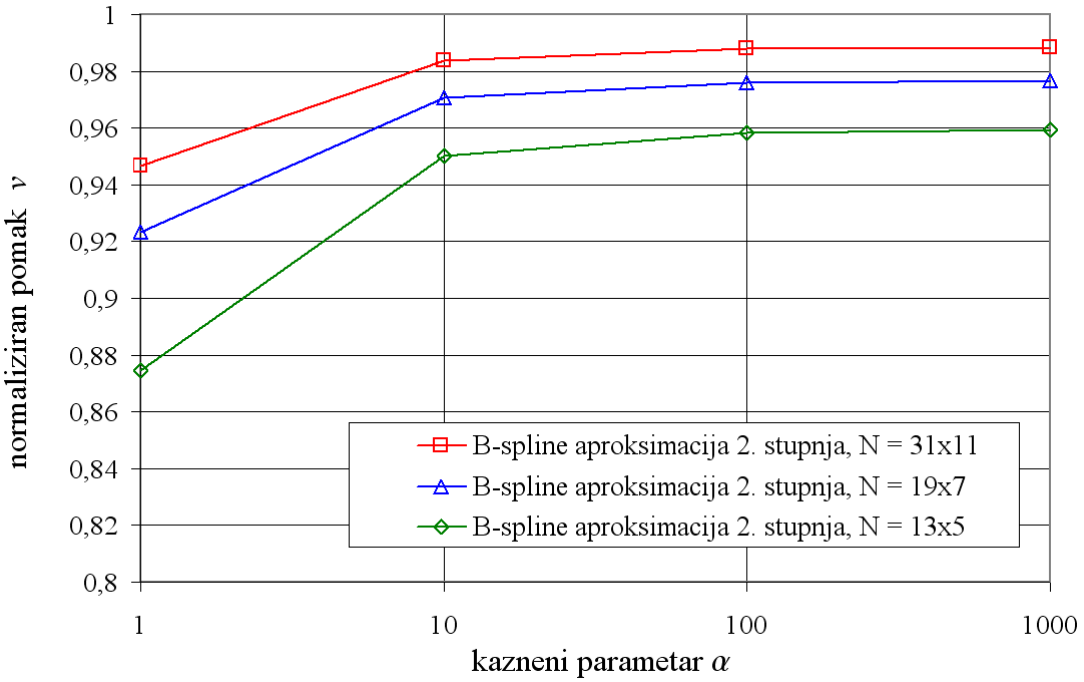
Slika 40. e_2 **diskretna norma za konzolu sa slike 32**



Slika 41. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u za konzolu sa slike 31



Slika 42. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u za konzolu sa slike 31



Slika 43. Utjecaj kaznenog parametra s *B-spline* aproksimacijskom funkcijom za primjer sa slike 31

Na slikama 33 i 34 prikazane su diskretna relativna greška i diskretna norma za pomake. *PPIM* aproksimacija i *IMLS* s regulariziranom težinskom funkcijom opisanom u (2.41) daju praktično iste rezultate za manji broj čvorova tj. stupnjeva slobode dok u skladu s prijašnjim primjerima *B-spline* aproksimacija za manji broj čvorova daje najbolje rezultate. *B-spline* aproksimacijska funkcija ima u nekom smislu slobodnih "parametara". Slobodan je odabir čvornog vektora *B-spline* čvorova koji mogu utjecati na kvalitetu rješenja. To je manji utjecaj od onog u *PPIM* aproksimaciji u kontekstu odabira utjecajnih čvorova ili u *IMLS*-u veličina utjecaja čvora težinskom funkcijom tj. relativnom radijusu težinske funkcije. I u ovom primjeru tj. formulaciji se pokazuje da *B-spline* ima vrlo povoljnih svojstava tj. karakteristika u odnosu na uobičajene aproksimacijske funkcije.

Sa slika 35 do 40 vidljiv je velik utjecaj „broja" odnosno odnosa broja rubnih uvjeta pomaka prema broju rubnih uvjeta sila na točnost rješenja. Što je veći broj rubnih uvjeta sila to je u kolokacijskim metodama manja točnost rješenja. Za manje brojeve stupnjeva slobode *B-spline* aproksimacijska funkcija daje najbolje rješenje jer je analitičko rješenje za taj primjer u obliku polinoma 3. stupnja na pravcu osi x što *B-spline* može dobro opisati i sa malim brojem čvorova.

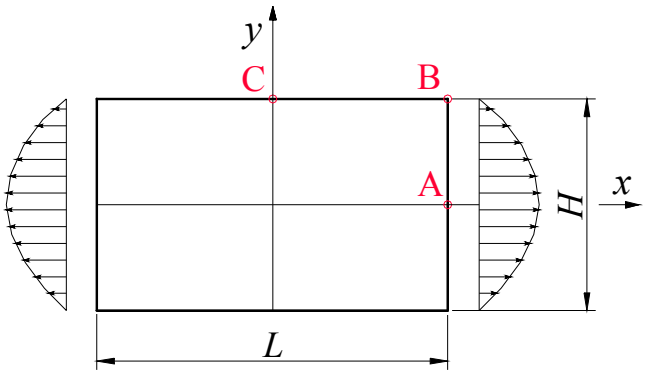
Na slici 41 prikazan je utjecaj veličine relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS* aproksimaciji s kinematičkom transformacijom koji je to više izražen što je manji broj

čvorova. Na slici 42 se vidi da je primjenom regularizirane težinske funkcije u *MLS* aproksimaciji izbjegnut nedostatak te aproksimacijske funkcije u smislu osjetljivosti rješenja o veličini relativnog radijusa težinske funkcije. Osim toga, postignuta je i veća točnost za isti broj stupnjeva slobode.

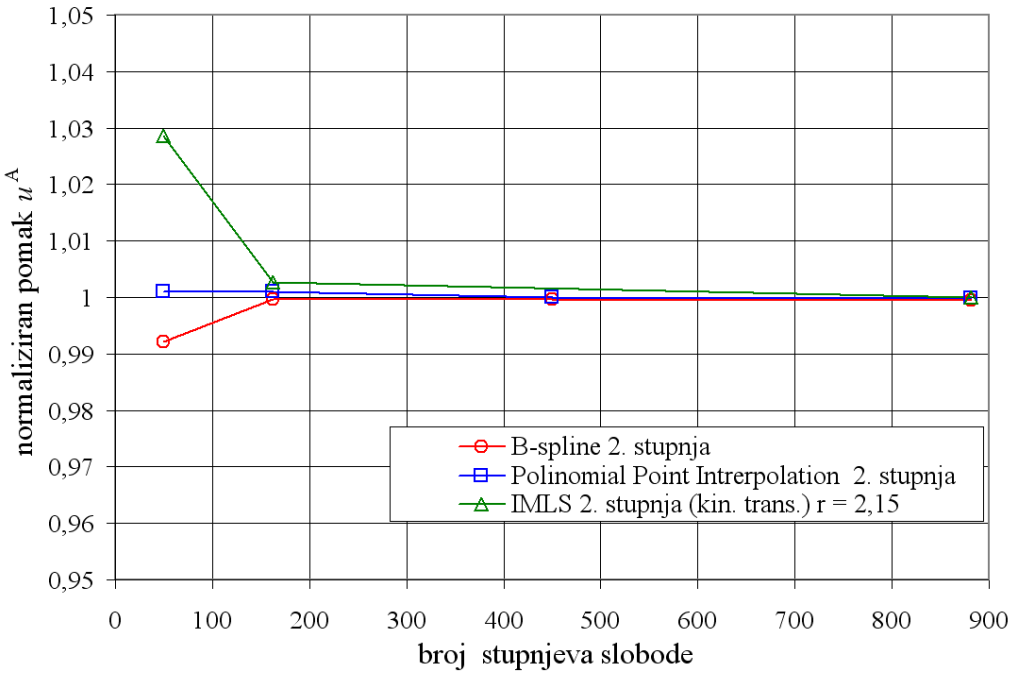
U kolokacijskim metodama problem je zadovoljavanje rubnih uvjeta sila. Na slici 43 vidljivo je da je za *B-spline* aproksimacijsku funkciju, a slično je i za ostale funkcije samo nije ovdje prikazano, za sve proračunske modele dovoljno odabrati vrijednost kaznenog parametra 1000. Sve veće vrijednosti ne donose veću točnost rješenja nego naprotiv, pogoršavaju uvjetovanost matrice sustava.

3.2.2.2. Membrana opterećena promjenjivo raspodjeljenim opterećenjem

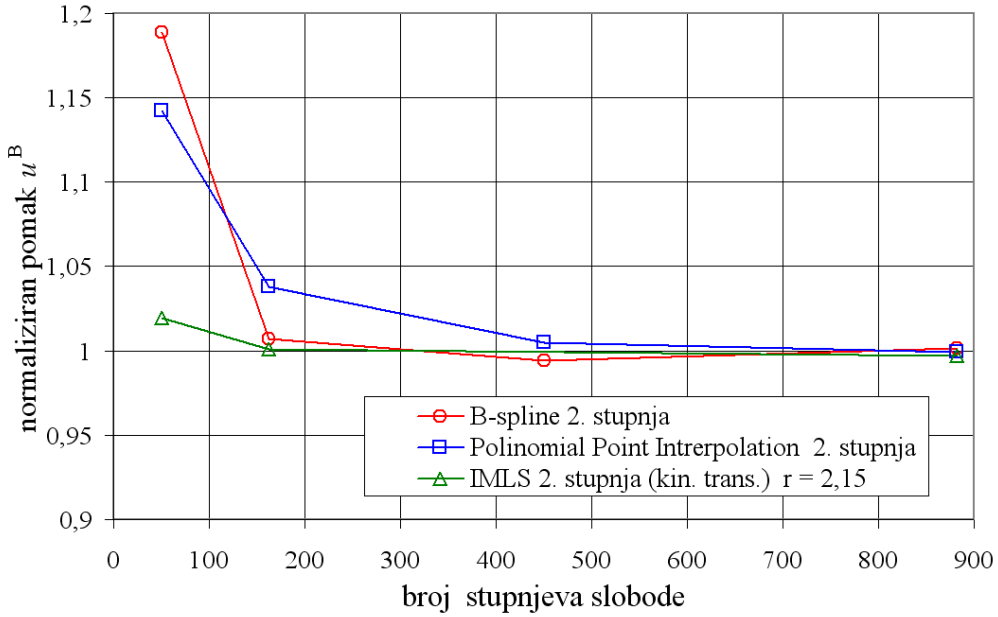
Kao četvrti primjer uzeta je membrana jednakih stranica opterećena raspodjeljenim opterećenjem po zakonu parabole, prikazana na slici 44. Budući da je to dvostruko simetričan problem, modelirana je jedna četvrtina. Geometrija membrane je opisana izmjerama: $L=10$, $H=10$ i jedinične debljine. Materijalne konstante su $E=200\,000$, $\nu=0,3$.



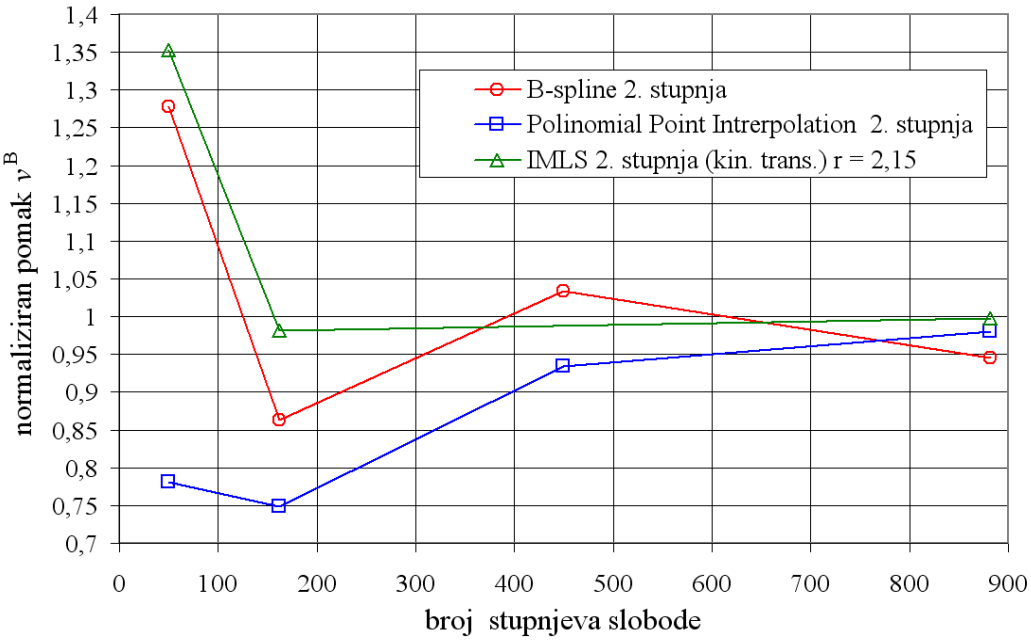
Slika 44. Membrana opterećena promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem



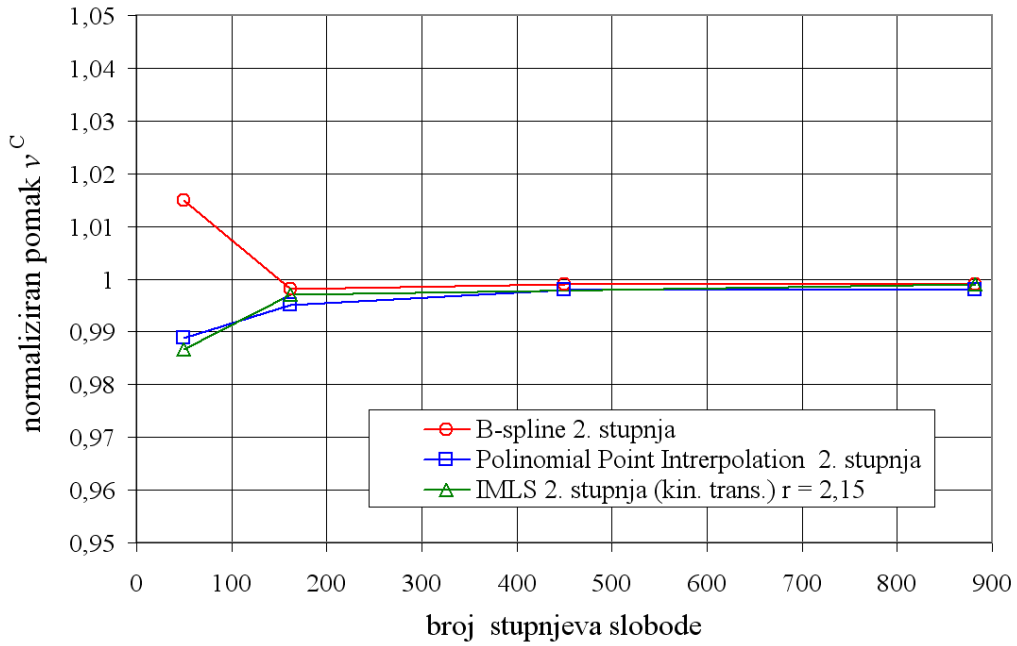
Slika 45. Konvergencija pomaka u u točki A membrane sa slike 44



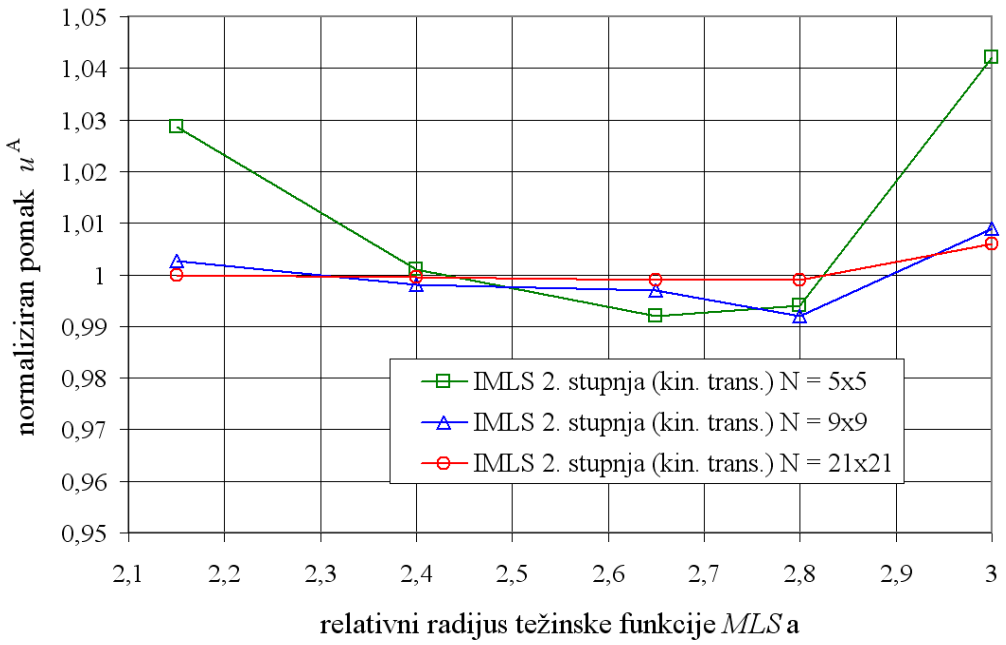
Slika 46. Konvergencija pomaka u u točki B membrane sa slike 44



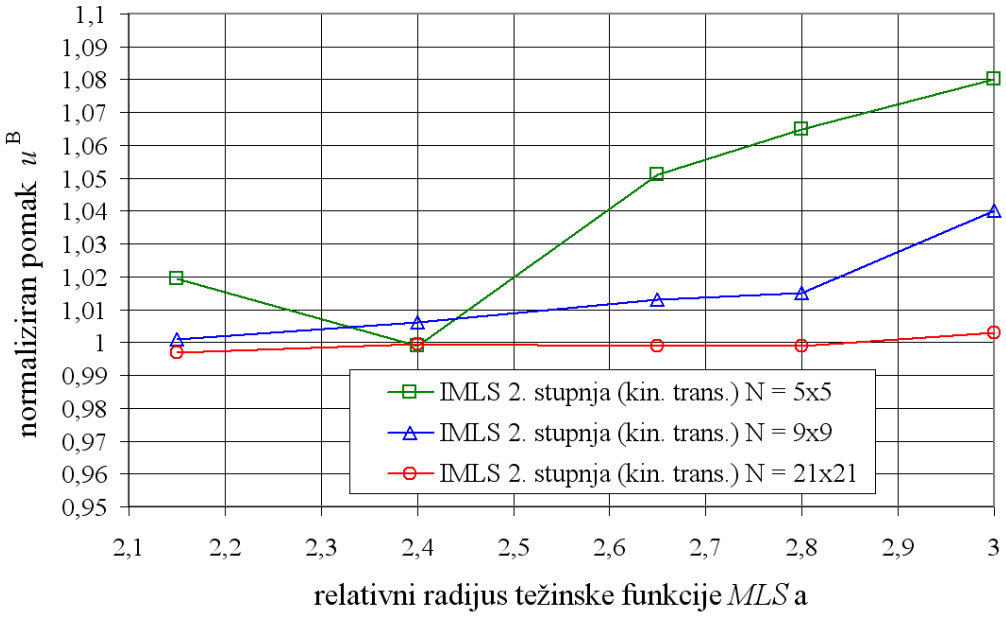
Slika 47. Konvergencija pomaka v u točki B membrane sa slike 44



Slika 48. Konvergencija pomaka v u točki C membrane sa slike 44



Slika 49. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *MLS*-u s kinematičkom transformacijom na pomak u u točki A za membranu sa slike 44



Slika 50. Utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS*-u s kinematičkom transformacijom na pomak u u točki B za membranu sa slike 44

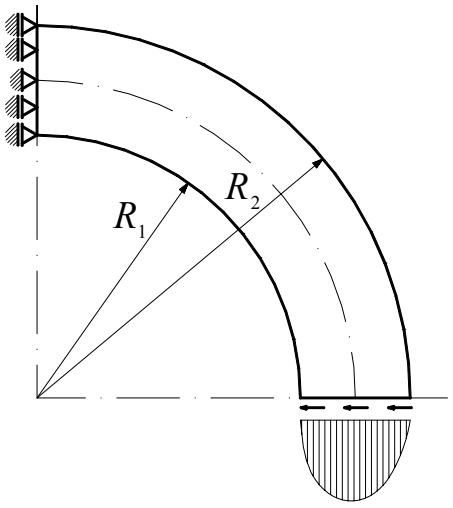
Na slikama 45 do 48 prikazana je konvergencija komponenata pomaka u raznim točkama membrane sa slike 44 za koju je korišteno numeričko rješenje dobiveno pomoću programskog paketa ABAQUS [41]. Značajno odstupanje se uočava u dijagramu na slici 47 što predstavlja konvergenciju pomaka u točki na vrhu s nedefiniranom normalom. Za točku B normala je bilo koji pravac od onog paralelnog osi x do onog paralelnog osi y što uvodi

neodređenost. O odabiru normale u kolokacijskoj metodi uvelike ovisi točnost rješenja što ovdje nije prikazano. Iz razloga izbjegavanja neodređenosti u svim točkama na vrhovima u kolokacijskim metodama je provedeno pomicanje čvorova na vrhu za vrlo malu vrijednost čvornog razmaka na jednu od stranica. Odstupanje od „pravila“ točnosti za ostale komponente pomaka u ostalim točkama za ovaj primjer ukazuje da ovaj odabir nije optimalan, tj. pomicanje točke na stranicu s normalom na osi x.

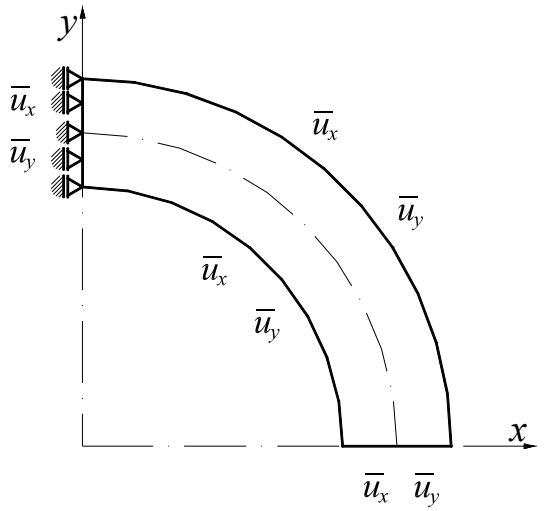
Na slikama 49 i 50 vidi se značajan utjecaj relativnog radijusa težinske funkcije u *IMLS* aporksimacijskoj funkciji s kinematičkom transformacijom na točnost rješenja.

3.2.2.3. Debeli zakrivljeni štap

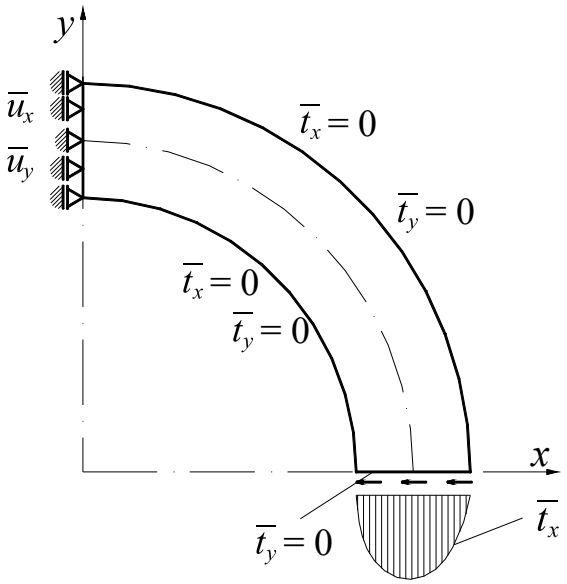
Kao peti primjer analiziran je debeli zakrivljeni štap prikazan na slici 51. Štap je jedinične debljine. Geometrija štapa je određena izmjerama: $R_1 = 13$, $R_2 = 17$. Za tri različite kombinacije rubnih uvjeta prikazane na slikama 52, 53 i 54 postoji analitičko rješenje [40]. Štap je opterećen raspodijeljenim opterećenjem po zakonu hiperbole što proizlazi iz analitičkog rješenja a oblika je $\bar{t}_x = -F\left(r + \left(R_1^2 R_2^2 / r^3\right) - \left(R_1^2 + R_2^2 / r\right)\right) / N$ gdje je F statički ekivivalent prikazanog opterećenja, r radijalna koodrinata mjerena od središta zakrivljenosti štapa i N konstanta definirana u [40]. Koordinatne osi su prikazane na slici 52. Prikazani primjeri imaju različit odnos broja zadanih rubnih uvjeta sila i pomaka. Pomoću tri primjera prikazana na slikama 52, 53 i 54 pokazat će se osjetljivost kolokacijske mješovite metode na zadovoljavanje rubnih uvjeta sila.



Slika 51. Debeli zakrivljeni štap opterećen promjenjivo raspodijeljenim opterećenjem



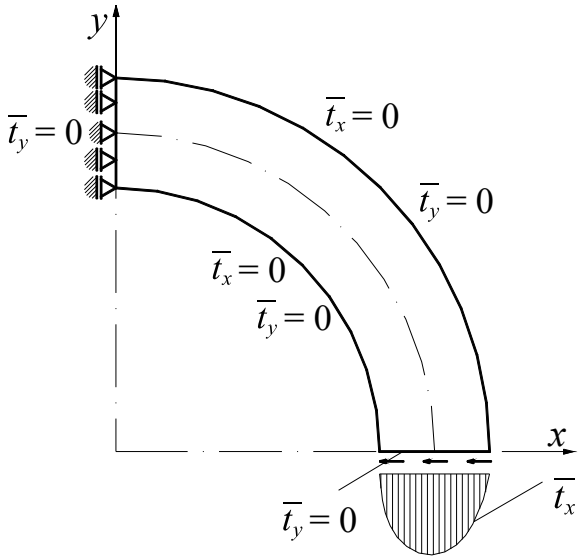
Slika 52. Debeli zakrivljeni štap sa zadanim rubnim uvjetima pomaka



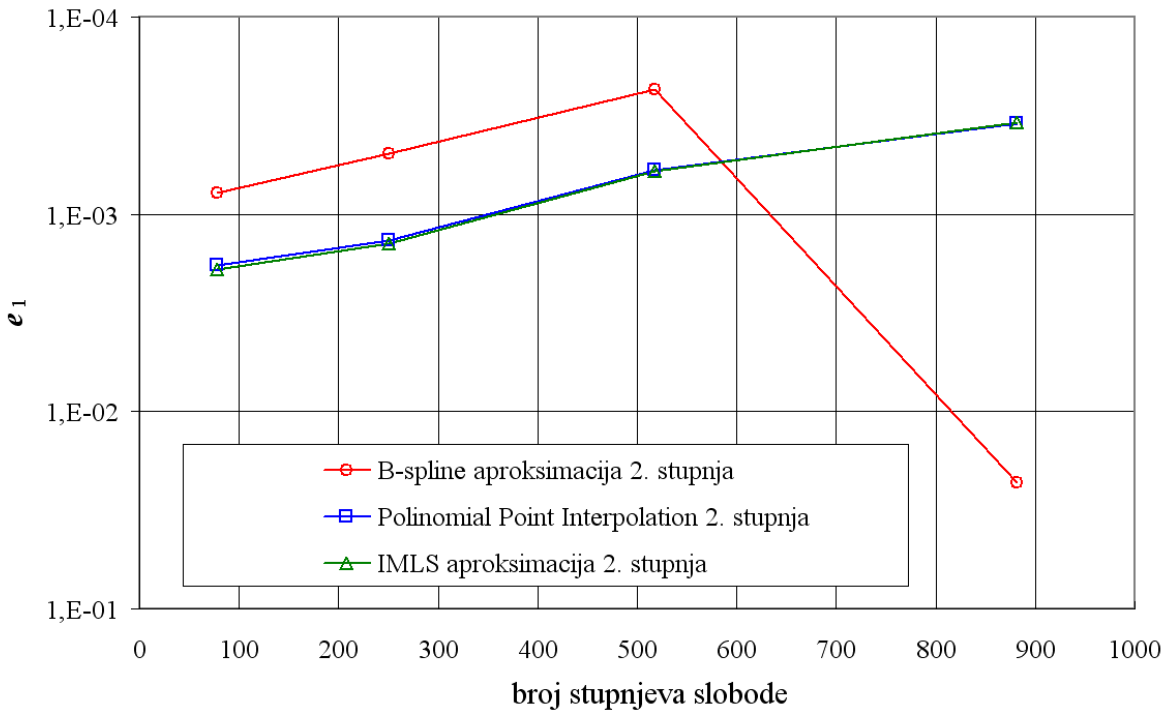
Slika 53. Debeli zakrivljeni štap s mješovitim rubnim uvjetima

Za analizirane primjere na slikama 52 i 53 prikazani su nadalje u dijagramima e_1, diskretna srednja greška pomaka i e_2, diskretna norma greške pomaka. Za primjer sa slike 53 prikazana je i konvergencija komponente pomaka u u točki $x = \frac{R_1 + R_2}{2}, y = 0$. e_1 i e_2 su određene prema

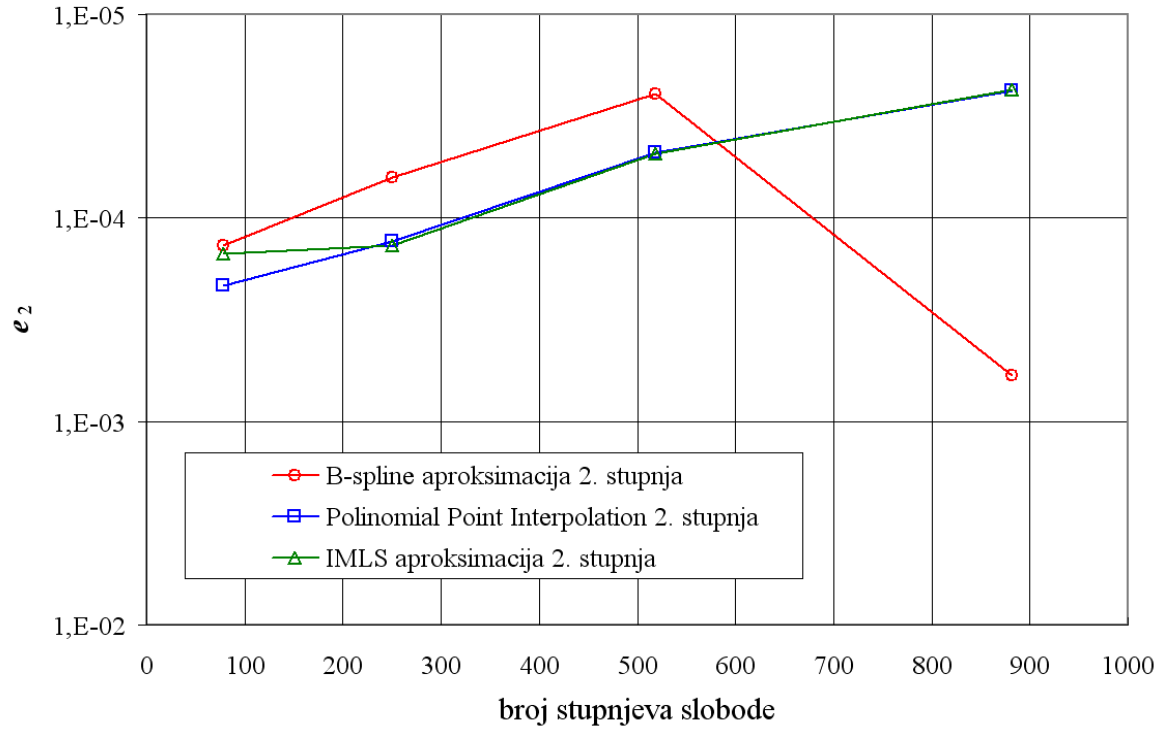
$$e_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|u_i^{num} - u_i^{a}\right|}{\left|u_i^{a}\right|};\; e_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{num} - u_i^{a}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^{a}\right)^2}}\,.$$



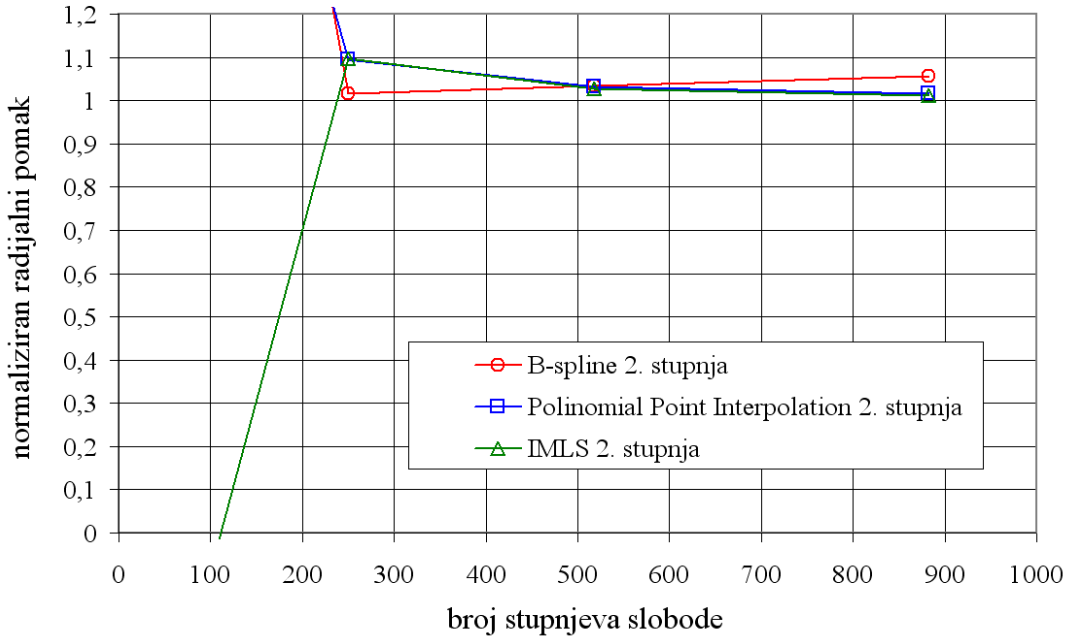
Slika 54. Debeli zakrivljeni štap s rubnim uvjetima sila i minimalno rubnih uvjeta pomaka



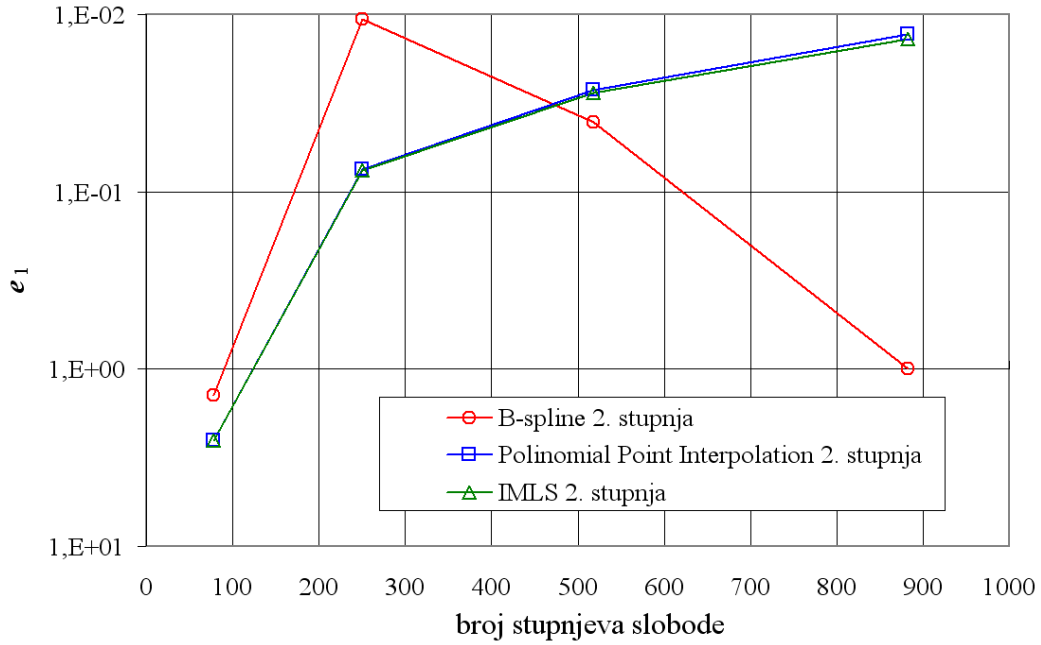
Slika 55. e_1 diskretna srednja relativna greška za štap sa slike 52



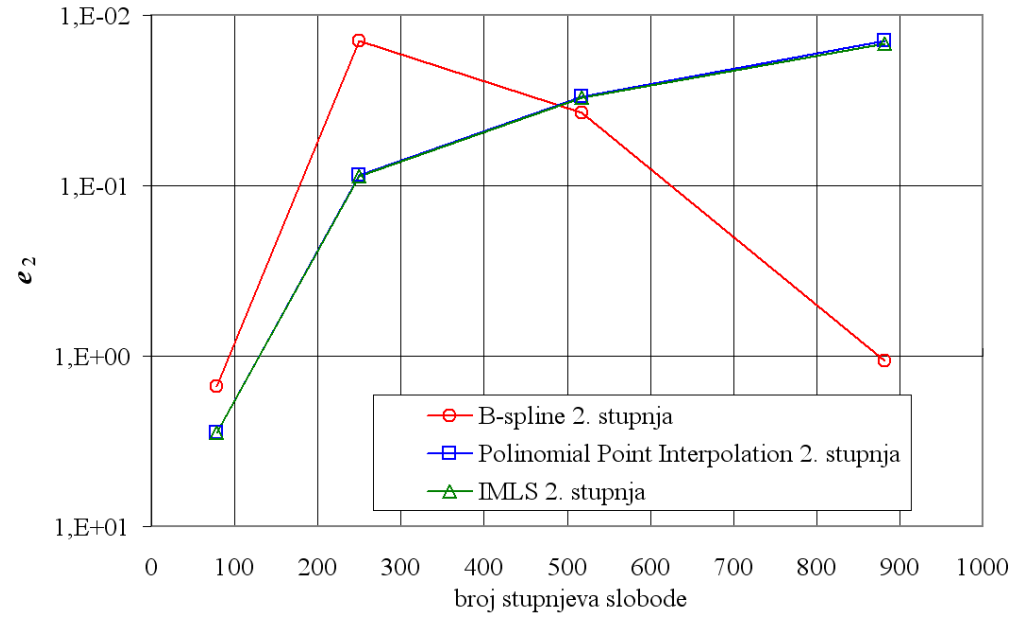
Slika 56. e_2 **diskretna norma za štap sa slike 52**



Slika 57. Konvergencija pomaka u **na srednjem radijusu i** $y = 0$ **za štap sa slike 53**



Slika 58. e_1 diskretna srednja relativna greška za štap sa slike 53



Slika 59. e_2 diskretna norma za štap sa slike 53

Na slikama od 55 do 59 vidljivo je da su greške izračunatih pomaka veće nego u primjeru sa slika 30 i 31 za isti broj stupnjeva slobode. Razlog tome leži i u zadovoljavanju rubnih uvjeta sila koji su vezani za normalu kojoj se pravac mijenja po čvorovima u odnosu na globalne koordinatne osi. Opet se pokazuje smjer povećanja greške s rastom odnosa broja rubnih uvjeta sila prema broju rubnih uvjeta pomaka. Dijagrami za kombinaciju rubnih uvjeta

sa slike 54 nisu ovdje prikazani jer su greške prevelike za analiziran broj stupnjeva slobode prikazan na dijagramima. Za primjer sa slike 54 *IMLS* aproksimacijska funkcija s regulariziranom težinskom funkcijom daje relativno zadovoljavajuće rezultate za pomak u točki $x = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_0,\ y = 0$. *PPIM* i *B-spline* aproksimacijske funkcije ne daju zadovoljavajuće rezultate za taj primjer.

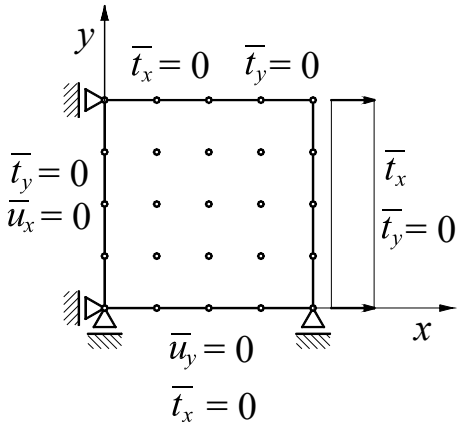
Jedan od načina smanjenja greške uslijed zadavanja rubnih uvjeta sila je transformacija koordinatnog sustava na način da se uvede lokalni koordinatni sustav u čvorovima sa zadanim rubnim uvjetima sila u kojem će jedna lokalna koordinatna os biti na pravcu normale u tom čvoru.

3.2.3. Uvjetovanost matrice krutosti, zadovoljavanje rubnih uvjeta sila s *B-spline* aproksimacijom

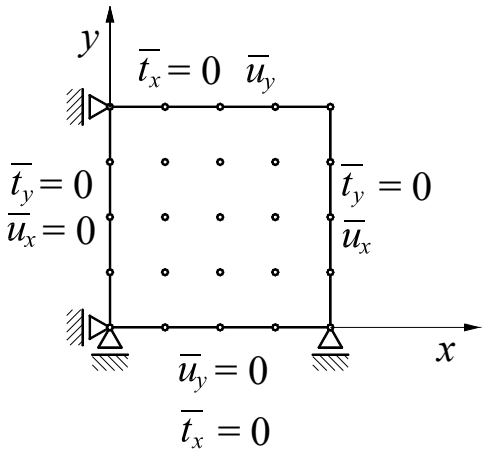
U kolokacijskim metodama prisutan je problem zadovoljavanja rubnih uvjeta sila, naročito u metodi pomaka. U metodi pomaka u jednadžbama rubnih uvjeta sila prisutne su derivacije funkcija oblika, što se može vidjeti u (3.15) tj. (3.19) i (3.21). U jednadžbama rubnih uvjeta sila u mješovitoj formulaciji su prisutne samo funkcije oblika.

U mješovitoj kolokaciji s *B-spline* aproksimacijom 2. stupnja uočen je problem uvjetovanosti matrice krutosti. Na uvjetovanost matrice krutosti modela najviše utječe broj čvorova diskretizacije, nakon toga kazneni parametar α kojim se utječe na točnost zadovoljavanja rubnih uvjeta sila prema (3.45) i konačno broj zadanih rubnih uvjeta pomaka u odnosu na ukupni broj nepoznanica. Naizgled postoji određeni broj čvorova za koji je rješenje zadovoljavajuće točnosti i to je za jednaku diskretizaciju na pravcu osi x i osi y, 25 čvorova duž svake koordinatne osi, jednoliko raspodijeljenih čvorova diskretizacije, što daje 625 čvorova.

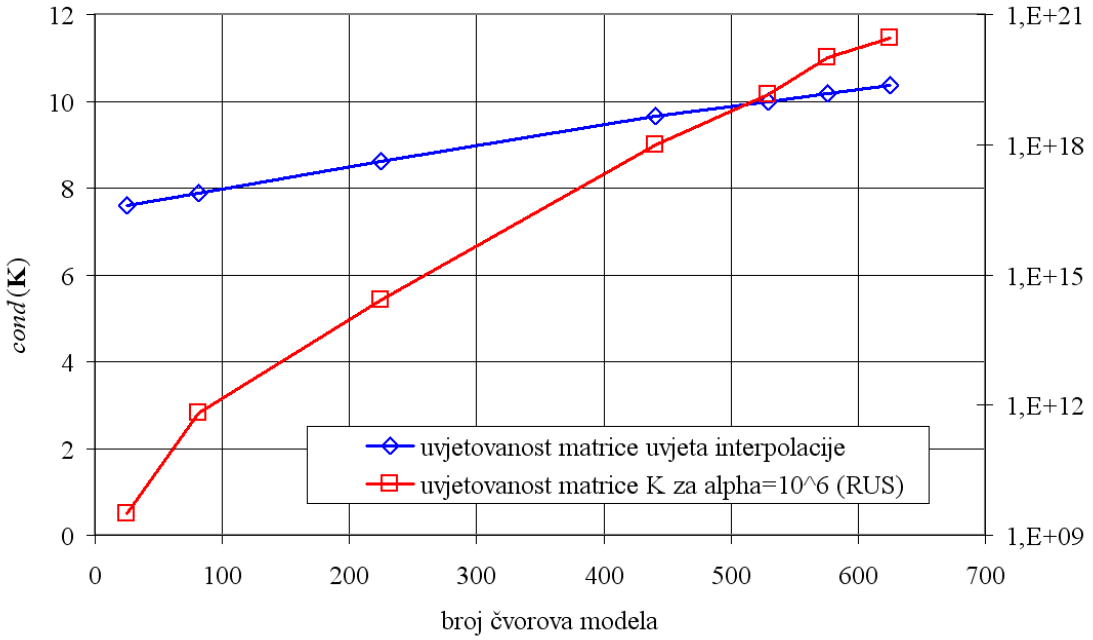
Za primjer rastezanja četvrtine membrane na slikama 60 i 61 prikazana je usporedba uvjetovanosti matrice krutosti proračunskog modela i uvjetovanosti matrice uvjeta interpolacije $\mathbf{B}_0$ prema (2.60).



Slika 60. Četvrtina membrane s minimalno zadanih rubnih uvjeta pomaka

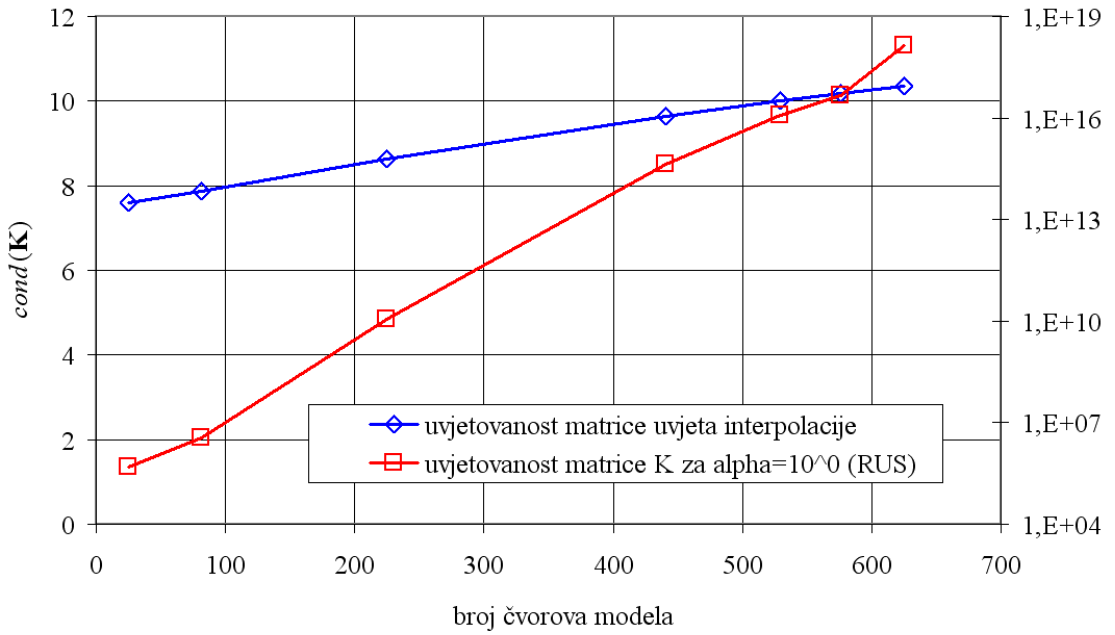


Slika 61. Četvrtina membrane s mješovitim rubnim uvjetima



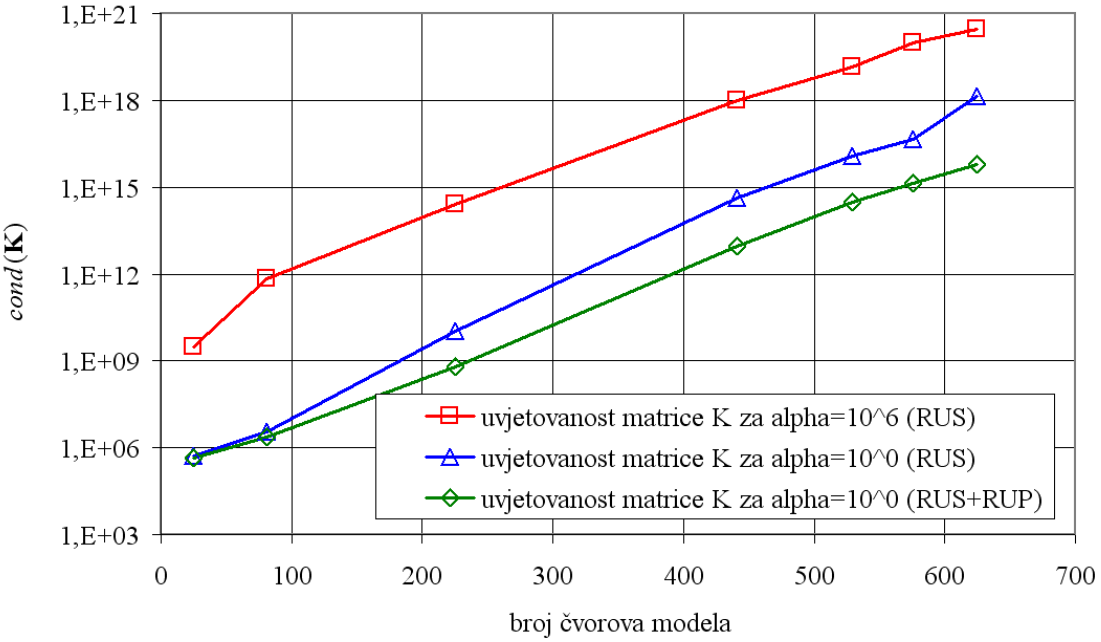
Slika 62. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ (definirana u (2.60)) i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za $\alpha = 10^6$

Na slici 62 prikazana je usporedba uvjetovanosti matrica uvjeta interpolacije, definiranu prema (2.60), za *B-spline* aproksimacijsku funkciju i rezultirajuće matrice krutosti kada je kazneni parametar odabran $\alpha = 10^6$. U legendi „RUS“ je kratica za „rubni uvjeti sila“, što znači da je mnogo veći broj rubnih uvjeta sila prema broju rubnih uvjeta pomaka. Lijeva ordinata prikazuje uvjetovanost $\mathbf{B}_0$, a desna ordinata prikazuje uvjetovasnot $\mathbf{K}$ .Vidljivo je da je matrica uvjeta interpolacije $\mathbf{B}_0$ dobro uvjetovana. Mijenjajući kazneni parametar na $\alpha = 10^0$ mijenja se i uvjetovanost $\mathbf{K}$ dok je uvjetovanost $\mathbf{B}_0$ doslovno ista jer je i numerički model, tj. diskretizacija ista.



Slika 63. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za $\alpha = 10^0$

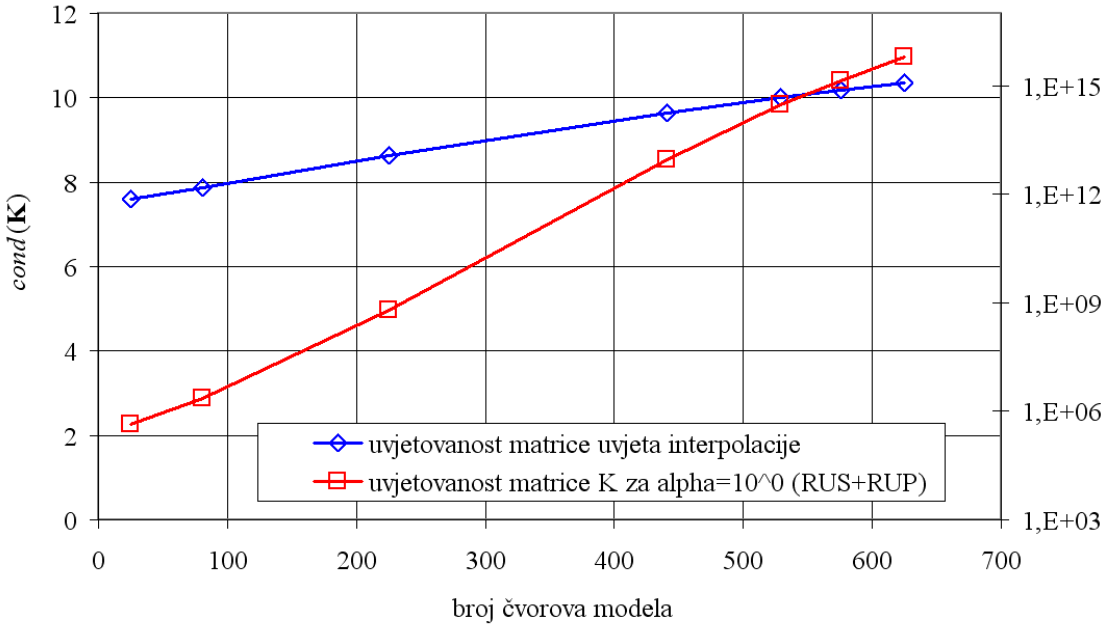
Sa slike 63 vidljivo je da smanjenje kaznenog parametra za šest redova veličine ne mijenja uvjetovanost $\mathbf{K}$ linearno, ali povoljno utječe na uvjetovanost. Usporedbom rezultata za pomake i naprezanja koji ovdje nisu prikazani može se zaključiti da ako je uvjetovanost matrice $\mathbf{K}$ „dobra“ kazneni parametar ne utječe značajno na rješenje, odnosno, za proračunske modele s dovoljno „malo“ čvorova utjecaj kaznenog parametra je mali. Velika vrijednost kaznenog parametra pogoršava uvjetovanost. Za primjer prema slikama 60 i 61 prikazana je na slici 64 usporedba utjecaja odnosa broja rubnih uvjeta sila prema broju rubnih uvjeta pomaka i vrijednosti kaznenog parametra na uvjetovanost matrice krutosti.



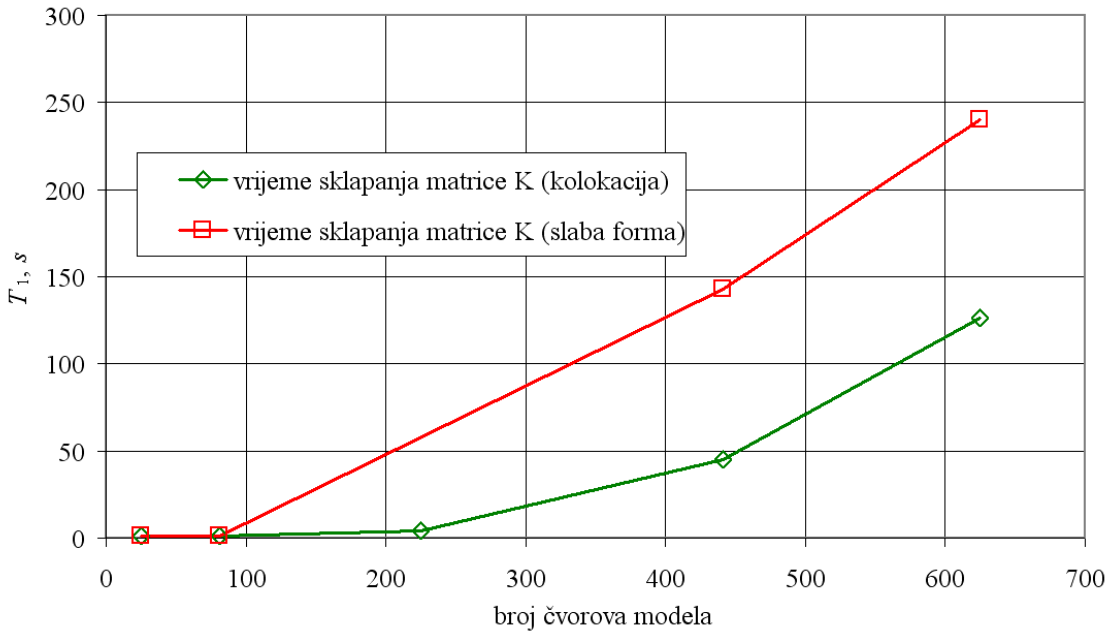
Slika 64. Usporedba uvjetovanosti matrica krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 61 za razne rubne uvjete i vrijednosti kaznenog parametra

Utjecajna veličina na uvjetovanost **K** je i odnos broja zadanih i nepoznatih komponenata pomaka. Općenito, što je više zadano rubnih uvjeta pomaka u odnosu na rubne uvjete sila u kolokacijskim metodama, to je rješenje bolje. To je posredno vidljivo kroz uvjetovanost **K** što je prikazano na slici 64. Analizirana je membrana s više zadanih kompomenta pomaka prikazana na slici 61 u odnosu na onu na slici 60. Za model u kojem su čvorovi raspodijeljeni ravnomjerno granični broj čvorova za koji je rješenje još prihvatljive točnosti je oko 440.

Budući da je numerička integracija zahtjevnija od kolokacije, uspoređeno je vrijeme sklapanja matrice krutosti T_1 za integralnu metodu sa 4x4 integracijske točke po području integracije i kolokacijske metode. Na slici 66 prikazana je usporedba vremena sklapanja matrice krutosti T_1 za kolokacijsku i intergralnu metodu.



Slika 65. Uvjetovanost matrice $\mathbf{B}_0$ i matrice krutosti $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 61 za $\alpha = 10^0$



Slika 66. Usporedba vremena sklapanja matrice $\mathbf{K}$ za membranu prema slici 60 za kolokacijsku i intergralnu metodu

3.3. Mješovita bezmrežna formulacija kombiniranog slabog-jakog oblika za probleme ravninskog stanja naprezanja

U kolokacijskim metodama, naročito metodama pomaka, smanjuje se točnost rješenja što je više zadanih rubnih uvjeta sila u odnosu na broj zadanih rubnih uvjeta pomaka. Stoga su razvijeni različiti postupci za zadovoljavanje rubnih uvjeta sila [30] kao što su metoda fiktivnih točaka, Hermiteova kolokacija s dodatnim nepoznanicama koje se koriste za izravno zadovoljavanje tj. opisivanje rubnih uvjeta sila i vjerojatno kao najbolja, kombinacija slabog oblika za sve čvorove na rubu u kojima su zadani rubni uvjeti sila a za unutarnje čvorove kolokacija [42].

Za sve čvorove unutar područja Ω, tj. za čvorove koji nisu na rubu sa zadanim rubnim uvjetima sila koristi se kolokacija za postavljanje diskretiziranih jednadžbi ravnoteže prema (3.43) a za sve čvorove sa zadanim rubnim uvjetima sila koristi se slabi oblik prema (3.28).

Ovakav prsitup objedinjuje prednosti jedne i druge metode, izbjegavanje numeričke integracije u većini čvorova modela što je vremenski povoljno. Povoljno je i u kontekstu zadovoljavanja rubnih uvjeta sila integriranjem. Rezultati analiza tom metodom na primjerima kao u prethodnom odjeljku ovdje nisu prikazani, no, po točnosti su između točnosti metoda temeljenih na slabom obliku i kolokaciji.

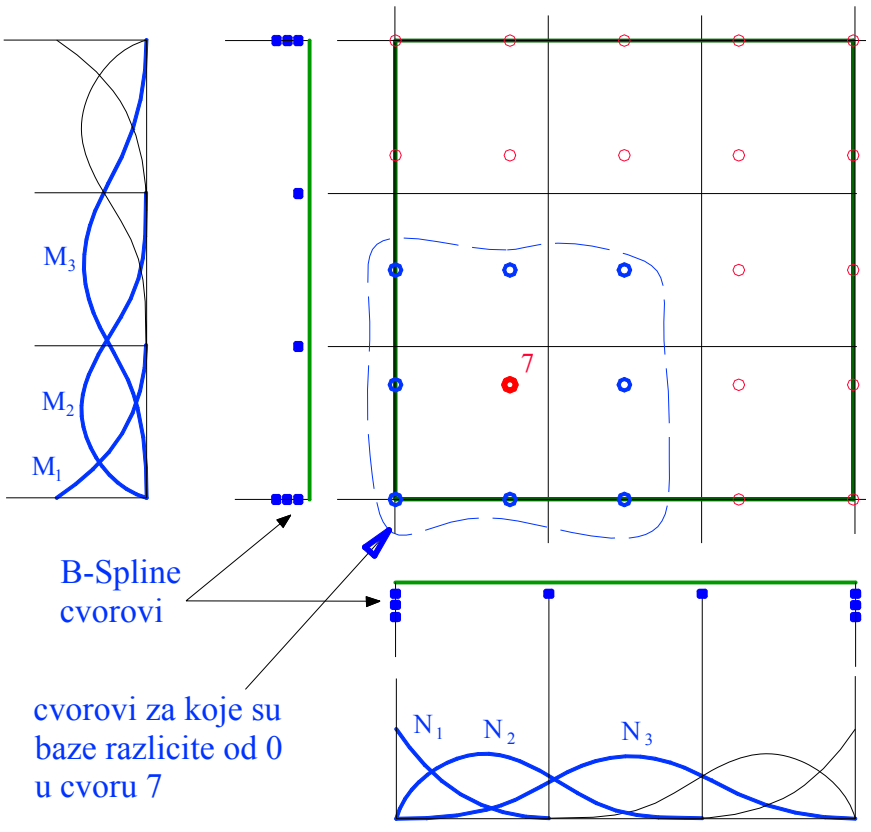
3.4. Kritički osvrt na primijenjene formulacije za dvodimenzijske probleme

Na osnovi rezultata prikazanih formulacija, slabog i jakog oblika, značajna je razlika u kontekstu vremena sastavljanja matrice krutosti. Numerička integracija je vremenski zahtjevna pa je općenito sastavljanje matrice u metodi temeljenoj na slabom obliku veće od istog u metodi temeljenoj na jakom obliku. Za isti broj stupnjeva slobode modela, tj. isti broj čvorova, metode temeljene na slabom obliku imaju veću točnost u odnosu na metode temeljene na jakom obliku ako su uključeni rubni uvjeti sila. Iako je primijenjena mješovita formulacija s aproksimiranim komponentama naprezanja koje izravno ulaze u rubne uvjete sila pa nema derivacija u jednadžbama zadovoljavanja rubnih uvjeta sila, lošija su rješenja od formulacije temeljene na slabom obliku. Taj je problem izraženiji u formulacijama temeljenim na metodi pomaka jer integriranje smanjuje, uprosječuje grešku dok je deriviranje

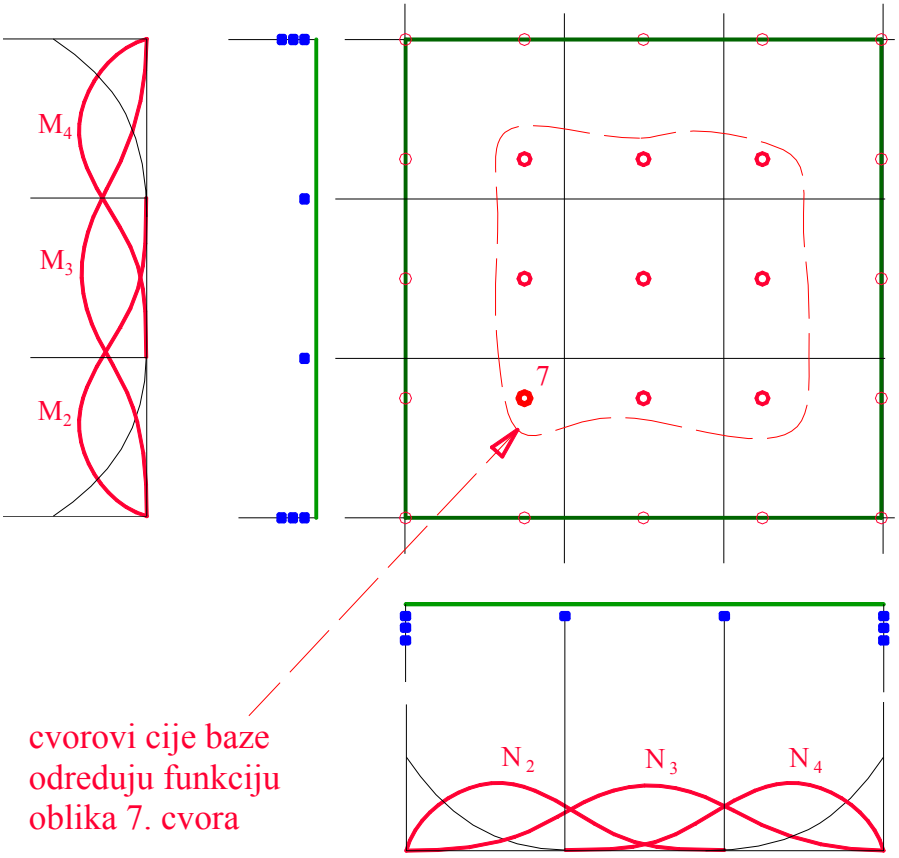
povećava. U metodi pomaka u jednadžbama rubnih uvjeta sila prisutne derivacije prema (3.15) tj. (3.19) i (3.21). U tim jednadžbama u mješovitoj formulaciji se ne javljaju derivacije funkcija oblika.

Naročit problem se očituje u primjeni *B-spline* aproksimacijske funkcije s interpolacijskim svojstvima u kolokacijskoj metodi dobivene nametanjem uvjeta interpolacije. Uvjetovanost konačne matrice sustava je s povećanjem broja čvorova sve lošija da bi otprilike za 700-njak čvorova koji su jednako raspodijeljeni po području definicije problema postala praktično singularna (uvjetovanost (*cond*) $>10^{20}$). Sama matrica koja proizlazi iz uvjeta interpolacije (2.60) nije loše uvjetovana kako je pokazano na slici 62.

Jedno od mogućih objašanjenja ovog problema je u razlici baznih funkcija koje se po definiciji javaljaju u aproksimaciji u nekoj točki i baza koje definiraju funkciju oblika prema (2.65). Ova razlika je prikazana za čvor 7 u modelu sa 5x5 čvorova diskretizacije na slici 67.



Slika 67. Baze koje sudjeljuju u aproksimaciji (različite od 0) u čvoru 7



Slika 68. Baze koje sudjeljuju u definiciji funkcije oblika (različite od 0) u čvoru 7

Na slici 67 prikazan je numerički model sa 5x5 čvorova diskretizacije i *B-spline* aproksimacijom 2. stupnja. *B-spline* čvorovi su prikazani kao mali plavi kvadrati. Debelom plavom krivuljom iscrtane su baze koje su pridružene odgovarajućim čvorovima diskretizacije i koje su različite od nule u čvoru 7. Postavljanjem uvjeta interpolacije u svim čvorovima prema (2.60) i definiranjem novih baza koje imaju Kronecker delta svojstvo (funkcija oblika) svaka od tih funkcija oblika je definirana ponovno pomoću baza i brojeva iz inverzne matrice $\mathbf{B}_0^{-1}$ prema (2.65). Baze koje na taj način sudjeluju u definiranju funkcije oblika pridružene čvoru 7 nisu više one koje su definirane aproksimacijom što je vidljivo na slici 68. Dakle, baze koje nisu definirane na području čvora 7 ulaze u definiciju funkcije oblika čvora 7 što bi mogao biti uzrok problema uvjetovanosti opisan u odjeljku 3.2.3. Budući da nije uočen sličan problem pri primjeni *PPIM* ili *IMLS* s regulariziranom težinskom funkcijom aproksimacijskih funkcija, to je vrlo moguć izvor loše uvjetovanosti matrice krutosti za veći broj čvorova.

Budući da je *B-spline* baza u dvodimenzijskom prostoru ortogonalni tenzorski umnožak baza po koordinatnim osima, u Kartezijevom ili nekom parametarskom pravokutnom koordinatnom sustavu područje definicije tih baza je uvijek pravokutno. To je u

neku ruku ograničenje ovakog korištenja *B-spline* aproksimacije u usporedbi s npr. *RBF* aproksimacijskom funkcijom. Za primjenu *B-spline* aproksimacijske funkcije za neko područje problema općenite geometrije potrebno je provesti preslikavanje iz parametarskog u realni prostor što komplicira formulaciju i zahtijeva više numeričkih operacija. Povoljna karakteristika baza je lokalnost koja može rezultirati pojasnom matricom sustava.

Jedan od moguće obećavajućih pristupa korištenja *B-spline* aproksimacijske funkcije je ne postavljanje uvjeta interpolacije nego korištenje neinterpolirajućih baza u metodi pomaka. U mješovitoj formulaciji to može predstavljati problem jer se u prvom sustavu jednadžbi ne pojavljuju čvorne vrijednosti naprezanja nego koeficijenti što predstavlja problem u drugom koraku u kojem se čvorne komponente naprezanja opisuju čvornim komponentama pomaka. Također je za zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka u tom slučaju potrebno koristiti posebnu proceduru, npr. kaznenu metodu.

4. *MLPG* bezmrežna formulacija za probleme savijanja ploča

Glavni dio ovog rada vezan je za razvoj i provjeru numeričke učinkovitosti novih metoda za analizu problema savijanja tankih i debelih ploča. Metode će se temeljiti na bezmrežnoj Petrov – Galerkinovoj metodi i mješovitoj formulaciji. Bit će aproksimirana polja pomaka i polja naprezanja zasebno, istim aproksimacijskim funkcijama. Cilj aproksimacije naprezanja je uklanjanje poprečnog posmičnog *lockinga.* U radu [25] je razvijena slična bezmrežna numerička metoda u kojoj su aproksimirani pomaci i komponente deformacije $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ i γ_{zx} te komponenta naprezanja σ_z koja je pretpostavljena konstantnom po debljini ploče. Takva formulacija je složenija od predložene u ovom radu jer je potrebno prikazivati komponente naprezanja koje se javljaju u diskretiziranim jednadžbama ravnoteže aproksimiranim komponentama deformacija. Predložene metode razlikuju se od dosadašnjih prikazanih u znanstvenoj i stručnoj literaturi temeljenih na klasičnim teorijama ploča po korištenju općih trodimenzijskih jednadžbi ravnoteže i trodimenzijskog konstitutivnog modela što omogućuje analizu materijalne nelinearnosti. Od metoda koje se temelje na promatranju ploče kao trodimenzijskog kontinuuma (*solid-shell* koncept) ove metode razlikuju se prema aproksimaciji kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka, progiba, (w) što omogućuje uklanjanje debljinskog *lockinga*. Cilj je razviti metode koje nemaju Poissonov debljinski (*thickness*) i poprečni posmični (*transversal shear*) *locking*, numerički što je moguće učinkovitije i što je moguće jednostavnije formulacije.

4.1. O teorijama savijanja ploča

Ploče u ovom radu promatramo kao trodimenzijski kontinuum sa svojom srednjom ravninom koja se prilikom opterećivanja ploče deformira u zakrivljenu plohu. Svaka točka ploče pri tome ima tri komponente pomaka koje su aproksimirane funkcijama u srednjoj ravnini i polinomima niskog stupnja (najviše drugog stupnja) po debljini. Tenzor naprezanja je potpun, tj. nema zanemarivanja pojedinih komponenata. Poprečne posmične komponente naprezanja su pretpostavljene konstatne po debljini. Predložene metode se razlikuju u opisivanju deformiranja od klasičnih teorija ploča kao što su Kirchhoff-Loveova za tanke

ploče, Reissner-Mindlinova za debele i teorijama višeg reda. U predloženim metodama u čvorovima nema kutova zakreta kao stupnjeva slobode kao što je to slučaj u numeričkim metodama temeljenim na klasičnim teorijama ploča. Također se razlikuju i od sličnih metoda u kojima se deformiranje ploče opisuje kao deformiranje trodimenzijskog kontinuuma u kojima su aproksimirane komponente deformacija. Nadalje će ukratko biti opisane klasične teorije ploča.

4.1.1. Kirchhoff-Loveova teorija ploča

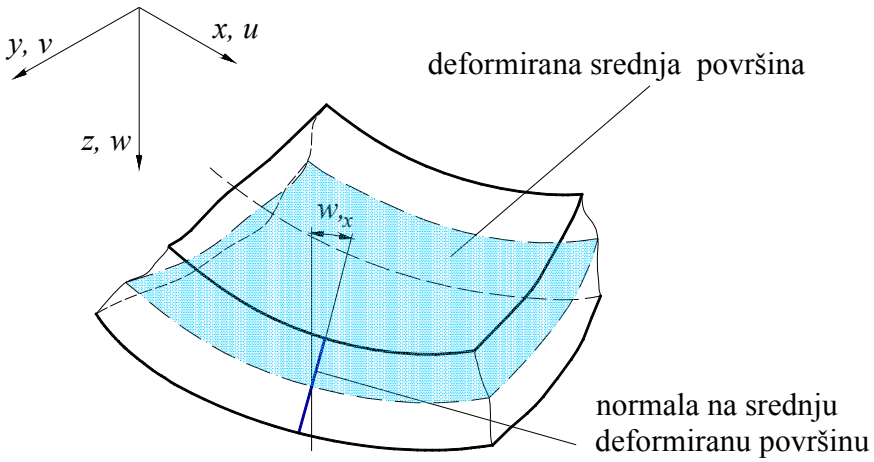
Kirchhoff-Loveova teorija promatra i opisuje deformiranje tanke ploče. Da bi ploča bila tanka odnos najmanje duljine savijanja tj. duljina stranica u jednostavnim slučajevima i debljine ploče je veći od 20. Progibi su u odnosu na debljinu ploče mali. To znači da u srednjoj ravnini nema rastezanja ili sabijanja prilikom savijanja. Za tanku ploču utjecaj poprečnih posmičnih naprezanja na deformiranje je zanemariv. Točke na normali na srednju ravninu u nedeforimiranom stanju nakon deformiranja ostaju na pravcu koji je normalan na deformiranu srednju plohu. To znači da se zakreti normale uslijed poprečnih posmičnih deformacija uzrokovanih odgovarajućim komponentama naprezanja, tj. poprečnim silama, zanemaruju.

Jedina nezavisna varijabla u opisivanju defomiranja je poprečna komponenta pomaka, u tehničkoj praksi često nazvana progib. Nagib normale na srednju plohu u deformiranom stanju ovisi isključivo o derivaciji progiba po koordinatama u srednjoj ravnini. Budući da je ploča tanka, poprečna normalna komponenta naprezanja σ_z je zanemarena kao i odgovarajuća duljinska komponenta deformacije ε_z, tj. ne ulaze u energiju deformiranja. U izrazu za energiju deformiranja javljaju se komponente naprezanja u srednjoj ravnini, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Deformirani oblik ploče i normala na srednju deformiranu plohu u Kirchhoff-Loveovoj teoriji prikazani su na slici 69.

Diferencijalna jednadžba Kirchhoff-Loveove teorije je jednadžba četvrtog reda [43] u obliku

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z}{D} \tag{4.1}$$

gdje je q_z površinsko raspodijeljeno opterećenje a $D = \dfrac{E h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ savojna (fleksijska) krutost ploče.



Slika 69. Deformirana ploča i nagib normale prema Kirchhoff-Loveovoj teoriji

Naprezanja se izračunavaju prema

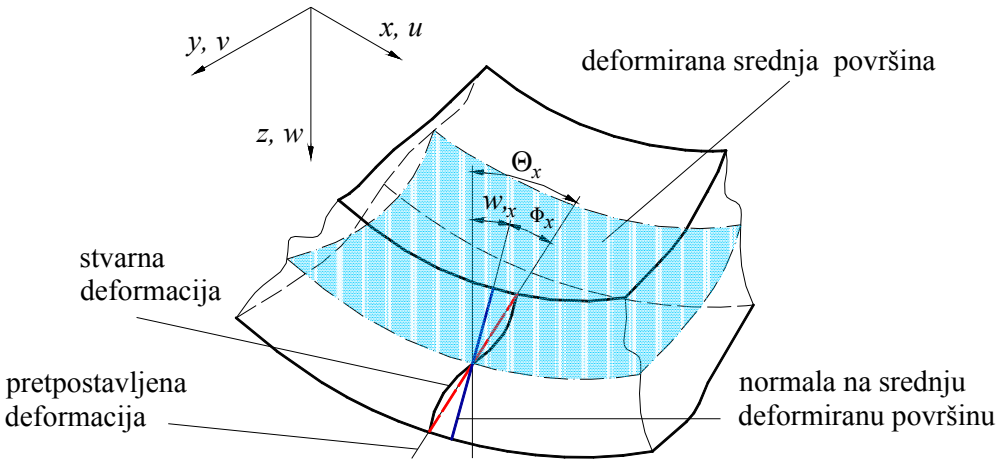
$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z,$$
$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)z, \qquad (4.2)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z.$$

4.1.2. Reissner-Mindlinova teorija ploča

Reissner-Mindlinova teorija opisuje deformiranje debelih ploča. U debelim pločama se javljaju značajne poprečne posmične deformacije. Utjecaj poprečnih posmičnih naprezanja tj. sila uzet je u obzir u prosječnom smislu, tj. pretpostavljena je konstantna poprečna posmična deformacija umjesto stvarne koja je raspodijeljena po zakonu parabole. Na slobodnim površinama ploče, gornjoj i donjoj, poprečno posmično naprezanje jednako je nuli ako drugačije nije nametnuto, tj. ako je ploča opterećena samo normalnim opterećenjem. Utjecaj poprečnih posmičnih naprezanja se uzima u obzir kao dodatni kut zakreta koji je neovisan o zakretanju normale koja je funkcija progiba.

Za razliku od Kirchhoff-Loveove teorije u Reissner-Mindlinovoj teoriji normala na srednju deformiranu plohu ostaje iste duljine i ravna ali ne nužno okomita na deformiranu srednju plohu. Poprečno normalno naprezanje se ne uzima u obzir, tj. umnožak poprečne duljinske deformacije i odgovarajućeg naprezanja ne ulaze u energiju deformiranja.

Deformirani oblik ploče i zakret normale na srednju deformiranu plohu u Reissner-Mindlinovoj teoriji prikazani su na slici 70.



Slika 70. Deformirana ploča i nagib normale prema Reissner-Mindlinovoj teoriji

Zbog neovisnog dijela kuta zakreta normale uslijed uprosječenih poprečnih posmičnih deformacija, javlja se poprečni posmični *locking* za slučaj tanke ploče. Pretpostavkom o neovisnom kutu zakreta ne može se ispuniti Kirchhoff-Loveov uvjet tanke ploče da su zakreti normale na deformiranu srednju plohu derivacije progiba po odgovarajućim koodrinatama u srednjoj ravnini.

Način na koji su neki autori izbjegli poprečni posmični *locking* u numeričkim metodama temeljenim na Reissner-Mindlinovoj teoriji je korištenje funkcija oblika za dodatne kutove zakreta koje su izvedene kao derivacije funkcija oblika za progib no to je dovelo do linearno zavisnih jednadžbi. Bolji način za izbjegavanje poprečnog posmičnog *lockinga* je zamjena nezavisnih varijabli, npr. aproksimacija deformacija umjesto dodatnih kutova zakreta.

Sa slike 70 može se vidjeti da je kut zakreta dužine u nedeformiranom stanju okomite na srednju ravninu ploče nakon deformiranja jednak

$$\Theta_x = w_{,x} + \phi_x \,, \tag{4.3}$$

a analogno vrijedi i za kut zakreta oko osi y

$$\Theta_y = w_{,y} + \phi_y \,. \tag{4.4}$$

Uvjeti ravnoteže mogu se prikazati jednom diferencijalnom jednadžbom trećeg reda i dvije diferencijalne jednadžbe drugog reda [44] u obliku

$$
\begin{aligned}
D\left[\Theta_{x,xxx}+\Theta_{x,xyy}+\Theta_{y,xxy}+\Theta_{y,yyy}\right]&=q,\\
D\left[\Theta_{x,xx}+\nu\Theta_{y,yx}+\frac{1-\nu}{2}\left(\Theta_{x,yy}+\Theta_{y,xy}\right)\right]+\frac{Gh}{k}\left(w_{,x}-\Theta_x\right)&=0,\\
D\left[\Theta_{y,yy}+\nu\Theta_{x,xy}+\frac{1-\nu}{2}\left(\Theta_{y,xx}+\Theta_{x,yx}\right)\right]+\frac{Gh}{k}\left(w_{,y}-\Theta_y\right)&=0.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

U (4.5) k predstavlja faktor kojim se uvodi prosječni utjecaj deplanacije poprečnog presjeka. U Reissner-Mindlinovoj teoriji uzima se $k=5/6$. Naprezanja se izračunavaju prema

$$
\begin{aligned}
\sigma_x&=-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Theta_{x,x}+\nu\Theta_{y,y}\right)z,\\
\sigma_y&=-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Theta_{y,y}+\nu\Theta_{x,x}\right)z,\\
\tau_{xy}&=-\frac{1-\nu}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Theta_{x,y}+\Theta_{y,x}\right)z,\\
\tau_{xz}&=\frac{1-\nu}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\left(w_{,x}-\Theta_x\right),\\
\tau_{yz}&=\frac{1-\nu}{2}\frac{E}{1-\nu^2}\left(w_{,y}-\Theta_y\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

4.1.3. Klasične teorije višeg reda

Teorije ploča višeg reda uzimaju u obzir utjecaj poprečnog normalnog i posmičnog naprezanja na deformiranje ploče. To znači da je dužina normalna na srednju ravninu prije deformiranja promijenila duljinu zbog utjecaja poprečnog normalnog naprezanja te nije ravna i okomita na deformiranu srednju plohu zbog utjecaja poprečnog posmičnog naprezanja. U bezmrežnim metodama temeljenim na teorijama ploča višeg reda mnogo je stupnjeva slobode po čvoru pa su stoga vremenski zahtjevne i rijetko se koriste.

Red teorije se odnosi na pretpostavljenu raspodjelu poprečne posmične deformacije pa je Reissner-Mindlinova teorija u tom kontekstu teorija prvog reda jer uzima u obzir poporečne posmične deformacije na najjednostavniji način, konstantne. Tenzor naprezanja je u teorijama višeg reda potpun. Raspodjela pomaka po debljini je aproksimirana Legendreovim polinomima do sedmog reda [21], [45].

4.1.4. *Solid-shell* koncept

U *solid-shell* konceptu ljuske i ploče se promatraju kao trodimenezijska deformabilna tijela s pretpostavkom linearne raspodjele pomaka po debljini, tj. u pravcu normale na srednju

plohu. Takva raspodjela pomaka po debljini može dovesti do debljinskog *lockinga* što će biti opisano kasnije. Ovaj pristup omogućuje upotrebu potpunog materijalnog (konstituivnog) modela što je naročito povoljno u problemima s materijalnom nelinearnošću.

4.1.5. Trodimenzijski opis deformiranja

U ovom radu metode koje će biti prikazane temelje se na trodimenzijskom opisivanju deformiranja, što znači da sve točke ploče prilikom deformiranja imaju tri komponente pomaka prikazane u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Nisu unaprijed uvedena ograničenja raspodjele komponenata pomaka po debljini kao u *solid-shell* konceptu za poprečnu komponentu pomaka. Ovakav pristup omogućuje opisivanje kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka po debljini a to znači linearne raspodjele duljinske komponente deformacije po debljini što je ključno za otklanjanje debljinskog *locking* problema. U ovom pristupu neće biti rotacijskih stupnjeva slobode. U slučaju kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka po debljini koristit će se dva načina opisivanja polinoma 2. stupnja. „Klasični“ polinom drugog stupnja s tri fizikalna stupnja slobode po debljini za svaki par čvorova i hijerarhijska kvadratična raspodjela po debljini. Za „klasični“ polinom 2. stupnja izvedene su interpolacijske funkcije oblika za svaki parametar, tj. stupanj slobode. U hijerarhijskoj kvadratičnoj raspodjeli po debljini koristi se dodatni skalarni parametar koji nema izravno značenje pomaka. Funkcije oblika pridružene pojedinim parametrima nisu iste kao u slučaju „klasičnog“ polinoma drugog stupnja. U srednjoj ravnini raspodjela svih komponenata pomaka i naprezanja provedena je aproksimacijskim funkcijama opisanim u odjeljku 2.4.

4.2. Mješovita *MLPG* formulacija slabog oblika

U mješovitoj formulaciji u ovom radu uz komponente pomaka aproksimirane su i komponente naprezanja. Mješovita formulacija u kojoj su aproksimirani pomaci i naprezanja primijenjena na dvodimenzijske probleme je prvotno prikazana u radu [26]. U opisu deformiranja u ovoj formulaciji nema kutova zakreta kao stupnjeva slobode, koriste se samo translacijski stupnjevi slobode. Metoda temeljena na slabom obliku ima prednosti u odnosu na kolokacijske metode prvenstveno u kontekstu točnosti zbog zadovoljavanja rubnih uvjeta sila integriranjem. Mješovita formulacija općenito smanjuje zahtjev na kontinuitet

aproksimacijske funkcije i omogućuje implicitno zadovoljavanje rubnih uvjeta sila integriranjem.

U formulacijama koje će biti prikazane aproksimirane su komponente naprezanja i komponente pomaka zasebno, istim aproksimacijskim funkcijama. Komponentama naprezanja se diskretiziraju uvjeti ravnoteže. U radu [25] aproksimirane su uz pomake i komponente deformacija $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ i γ_{zx} i komponenta naprezanja σ_z. U toj formulaciji nema poprečnog posmičnog *lockinga* zbog aproksimacije komponenata deformacija te nema debljinskog *lockinga* zbog aproksimacije komponente naprezanja σ_z. No, takva formulacija je kompliciranija od formulacije koja će biti prikazana u ovom radu jer je potrebno preračunavanje komponenata deformacija u komponente naprezanja za diskretizaciju uvjeta ravnoteže.

U mješovitim formulacijama izvedenim u ovom radu komponente naprezanja se povezuju kolokacijskim jednadžbama s komponentama deformacija u čvorovima prema konstitutivnom zakonu a u drugom koraku komponente deformacija s komponentama pomaka kinematičkim relacijama. Konstitutivni zakon i kinematičke relacije su u obliku

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Formulacije izvedene u narednim odjeljcima bit će provjerene za tanke i debele ploče. Za testne funkcije u lokalnom slabom obliku koriste se u srednjoj ravnini Heaviside funkcija a po debljini ploče linearne polinomne funkcije. Što je testna funkcija jednostavnija to je manje Gaussovih točaka integracije potrebno za točno integriranje podintegralnih funkcija. Testna

funkcija odabrana je kao umnožak Heavisideove funkcije u srednjoj ravnini definiranoj na području integracije i linearnih polinoma po koordinati z što se zapisuje kao

$$\begin{aligned} v^{(1)}{}_{ki} &= H\left(x,y\right)v_1\left(z\right)\delta_{ki}, \\ v^{(2)}{}_{ki} &= H\left(x,y\right)v_2\left(z\right)\delta_{ki} \end{aligned} \tag{4.9}$$

gdje $v^{(l)}{}_{ki}$ predstavlja l - ti set ili skup testnih funkcija. Ovdje će biti korištena dva skupa testnih funkcija jer su dva čvora po području integracije. Skalarni dijelovi testne funkcije su

$$\begin{aligned} v_1\left(z\right) &= \frac{1}{2}-\frac{z}{h}, \\ v_2\left(z\right) &= \frac{1}{2}+\frac{z}{h}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Funkcija v_1 je pridružena donjem čvoru, tj. ima vrijednost jedan u donjem čvoru a v_2 je pridružena gornjem čvoru. Jednadžbe slabog oblika izvode se na osnovi Petrov-Galerkinove metode analogno (3.6) u obliku

$$\int_{\Omega_s} v_{ki}^{(l)}\left(\sigma_{ij,j}+f_i\right)\mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{4.11}$$

Sve aproksimacijske funkcije koje će se koristiti imat će interpolacijsko (Kronecker delta) svojstvo pa je ispušten dodatni član za zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka u izrazu metode težinskog ostatka (4.11) koji je uobičajen u metodama bez takvog svojstva aproksimacijskih funkcija. Integral (4.11) se može raspisati na način

$$\int_{\Omega_s} v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij,j}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} v_{ki}^{(l)} f_i\ \mathrm{d}\Omega = 0\,, \tag{4.12}$$

pa se podintegralna funkcija u prvom integralu raspisuje koristeći pravilo lančanog deriviranja

$$\left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right)_{,j} = v_{ki,j}^{(l)}\sigma_{ij} + v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij,j} \rightarrow v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij,j} = \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right)_{,j} - v_{ki,j}^{(l)}\sigma_{ij}\,. \tag{4.13}$$

Uvrštavanjem (4.13) u (4.12) slijedi

$$\int_{\Omega_s}\left[\left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right)_{,j} - v_{ki,j}^{(l)}\sigma_{ij}\right]\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} v_{ki}^{(l)} f_i\ \mathrm{d}\Omega = 0\,. \tag{4.14}$$

Na prvi dio podintegralne funkcije u prvom integralu u (4.14) primjenjuje se Gaussov integralni poučak radi smanjenja reda dervacije aproksimacijske funkcije, tj. smanjenja zahtjeva na kontinuitet i implicitinog uključivanja rubnih uvjeta sila. U skladu s tim vrijedi relacija

$$\int_{\Omega_s}\left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right)_{,j}\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega_s}\left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right)n_j\mathrm{d}\Gamma\,. \tag{4.15}$$

U (4.15) je $\partial\Omega_s$ ploha koja omeđuje Ω_s a n_j su komponente jedinične normale na tu plohu. Ploha koja omeđuje područje integracije dijeli se na tri dijela. L_s je dio koji je u popunosti unutar globalnog područja Ω tj. ne postoji presjek s globalnom granicom, $L_s \cap \Gamma = \varnothing$, Γ_{st} je dio koji se preklapa s globalnom granicom sa zadanim rubnim uvjetima sila, $\Gamma_{st} \cap \Gamma_t \neq \varnothing$ i Γ_{su} je dio koji se preklapa s globalnom granicom sa zadanim rubnim uvjetima pomaka $\Gamma_{su} \cap \Gamma_u \neq \varnothing$. Zbroj ovih triju ploha, L_s, Γ_{su} i Γ_{st} je ukupna ploha koja omeđuje područje integracije. Plohe koje omeđuju lokalno područje integracije prikazane su na slici 71. Raspisivanjem integrala (4.15) po plohama koje omeđuju $\partial\Omega_s$ slijedi

$$\int_{\partial\Omega_s} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma = \int_{L_s} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma . \tag{4.16}$$

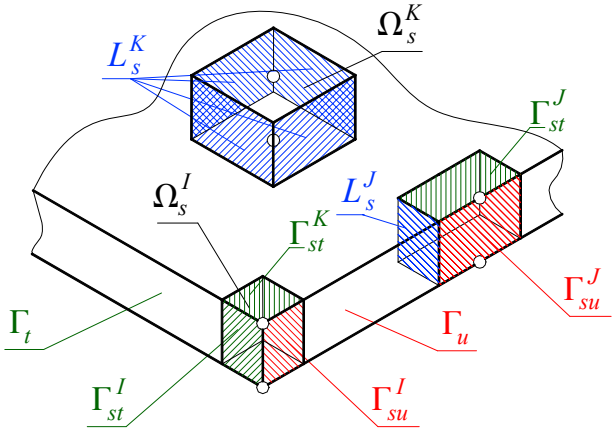
U integralu po Γ_{st} sadržani su rubni uvjeti sila pa se uz zanemarenje volumenske sile konačno (4.16) može preurediti u

$$\int_{L_s} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} v_{ki,j}^{(l)}\sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \left(v_{ki}^{(l)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{st}} \left(v_{ki}^{(l)}\overline{t}_i\right) \mathrm{d}\Gamma . \tag{4.17}$$

Za svaku od vrijednosti $(l) = 1,2$ dobiva se skup od tri jednadžbe što je ukupno šest jednadžbi u obliku

$$\begin{aligned} &\int_{L_s} \left(v_{ki}^{(1)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} v_{ki,j}^{(1)}\sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \left(v_{ki}^{(1)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{st}} \left(v_{ki}^{(1)}\overline{t}_i\right) \mathrm{d}\Gamma, \\ &\int_{L_s} \left(v_{ki}^{(2)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} v_{ki,j}^{(2)}\sigma_{ij} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \left(v_{ki}^{(2)}\sigma_{ij}\right) n_j \mathrm{d}\Gamma = -\int_{\Gamma_{st}} \left(v_{ki}^{(2)}\overline{t}_i\right) \mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nadalje se jednadžbe (4.18) diskretiziraju čvornim komponentama naprezanja.



Slika 71. Lokalna područja integracije i plohe koje ih omeđuju

4.3. *Locking* problemi

Locking je naziv za sustavnu grešku koja uzrokuje netočan „odziv“, tj. rezultate analize numeričkog modela. *Locking* pojave vezane su uz numeričke metode u kojima postoje ograničenja u smislu mogućnosti opisivanja nekih pojava u problemima koji se analiziraju. Posebnost analize ploča je opisivanje linearne raspodjele duljinske komponente deformacije po debljini što je vezano za slučaj čistog savijanja ploče i isčezavanje poprečnih posmičnih komponenata naprezanja u slučaju savijanja tankih ploča. Ovisno o ulaznim pretpostavkama, tj. nametnutim ograničenjima u opisivanju deformiranja, mogu se pojaviti Poissonov debljinski (*thickness*) i poporečni posmični (*shear*) *locking*.

4.3.1. Poissonov debljinski (*thickness*) *locking*

Poissonov debljinski (*thickness*) *locking* [46] predstavlja nemogućnost aproksimacijske funkcije da opiše točno stanje deformacija, tj. naprezanja u slučaju čistog savijanja. Za ploču, u slučaju čistog savijanja prema slici 72, raspodjela naprezanja je takva da je samo jedna normalna komponenta napreznja, u tom primjeru σ_x, različita od nule i raspodijeljena linearno po debljini ploče te opisana prema

$$\sigma_x = \frac{12M}{h^3} z \,. \tag{4.19}$$

Iz Hookeovog zakona slijedi da je linearna raspodjela duljinskih komponenata deformacija $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, što je prikazano na slici 73 i opisano prema

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu\varepsilon_x, \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu\varepsilon_x \,. \tag{4.20}$$

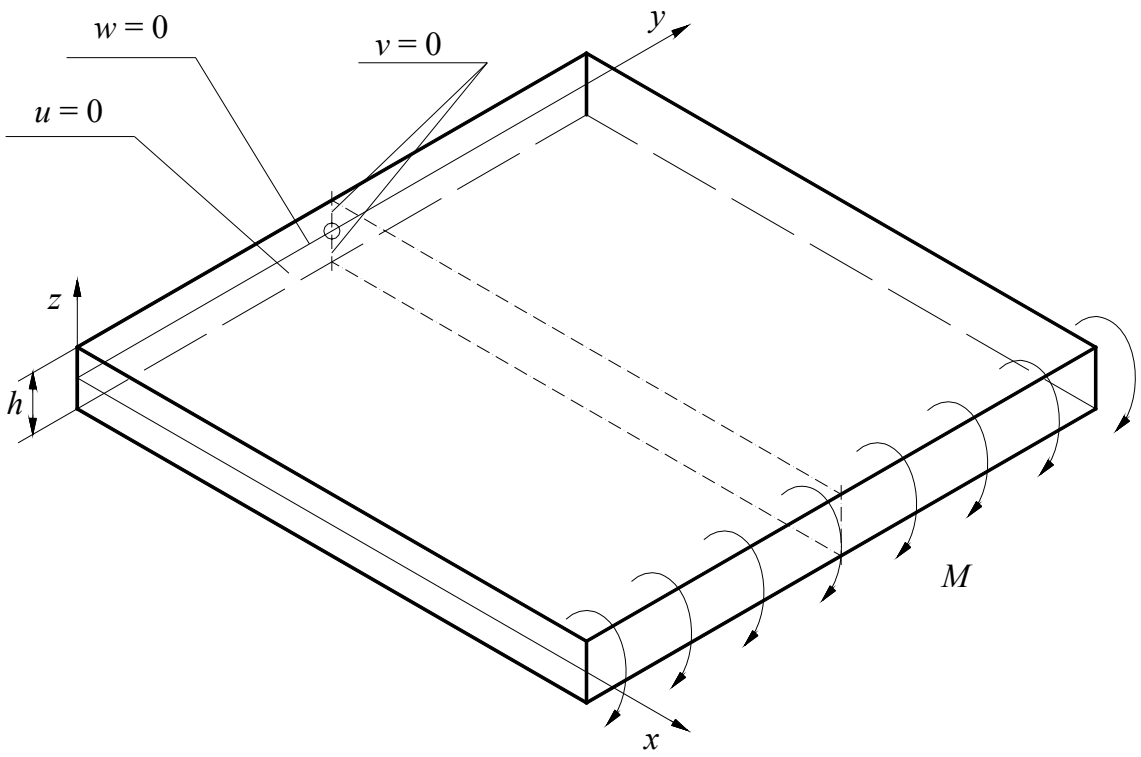
Ako je aproksimacija poprečne komponente pomaka po debljini linearna kao npr.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(u^{(l)}N^{(l)}(z) + u^{(u)}N^{(u)}(z)\right), \\ v(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(v^{(l)}N^{(l)}(z) + v^{(u)}N^{(u)}(z)\right), \\ w(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(w^{(l)}N^{(l)}(z) + w^{(u)}N^{(u)}(z)\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

gdje je $N^{(l)}(z) = \frac{1}{2} - \frac{2z}{h}$ funkcija oblika pridružena donjem čvoru i $N^{(u)}(z) = \frac{1}{2} + \frac{2z}{h}$ funkcija oblika pridružena gornjem čvoru, tada se iz kinematičkih relacija (2.6) izračunavaju duljinske komponente deformacija

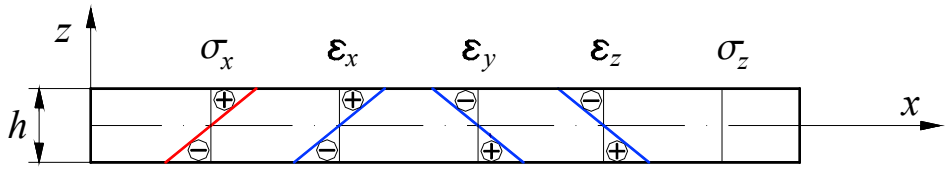
$$\varepsilon_x = u_{,x} = \sum_{I=1}^{n} \phi_{I,x}(x,y)\left(u^{(l)}N^{(l)}(z) + u^{(u)}N^{(u)}(z)\right) = f(z),$$
$$\varepsilon_y = v_{,y} = \sum_{I=1}^{n} \phi_{I,y}(x,y)\left(u^{(l)}N^{(l)}(z) + u^{(u)}N^{(u)}(z)\right) = f(z), \qquad (4.22)$$
$$\varepsilon_z = w_{,z} = \sum_{I=1}^{n} \phi_{I}(x,y)\left(u^{(l)}N^{(l)}{}_{,z}(z) + u^{(u)}N^{(u)}{}_{,z}(z)\right) \neq f(z)$$

jer su derivacije funkcija oblika po debljini $N^{(l)}(z)$ i $N^{(u)}(z)$ po koordinati z konstante pa je i duljinska komponenta deformacije konstantna po debljini.



Slika 72. Čisto savijanje ploče s rubnim uvjetima

Točna raspodjela naprezanja i deformacija za ploču prema slici 72 prikazana je na slici 73.

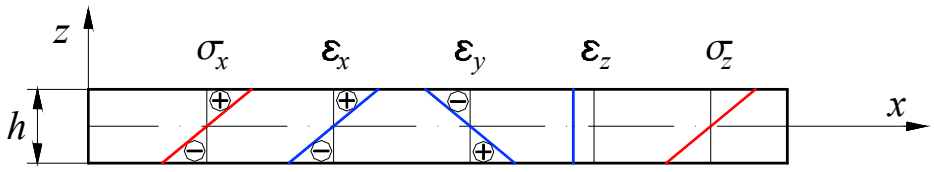


Slika 73. Točna raspodjela komponenata naprezanja i deformacija za čisto savijanje ploče

Raspodjela duljinkih komponenata deformacija opisanih u (4.22) nije u skladu sa stvarnim stanjem deformacija. Uvrštavanjem takve raspodjele komponenata deformacije u Hookeov zakon dobiva se linearna raspodjela normalne komponente naprezanja po debljini,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (2G+\lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z = f(z),\\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (2G+\lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z = f(z),\\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (2G+\lambda)\varepsilon_z = f(z),\end{aligned} \tag{4.23}$$

kao što je prikazanao na slici 74.



Slika 74. Netočna raspodjela komponenata naprezanja i deformacija za čisto savijanje ploče

Budući da su komponente deformacija spregnute preko Poissonovog faktora ν, za vrijednosti $\nu \neq 0$ aproksimacija (4.21) dat će netočnu raspodjelu normalne komponente naprezanja σ_z. To pak uzrokuje krući odziv konstrukcije što se naziva Poissonov debljinski (*thickness*) *locking* i ne ovisi o odnosu debjine i duljine ploče, te je prisutan za tanke i debele ploče.

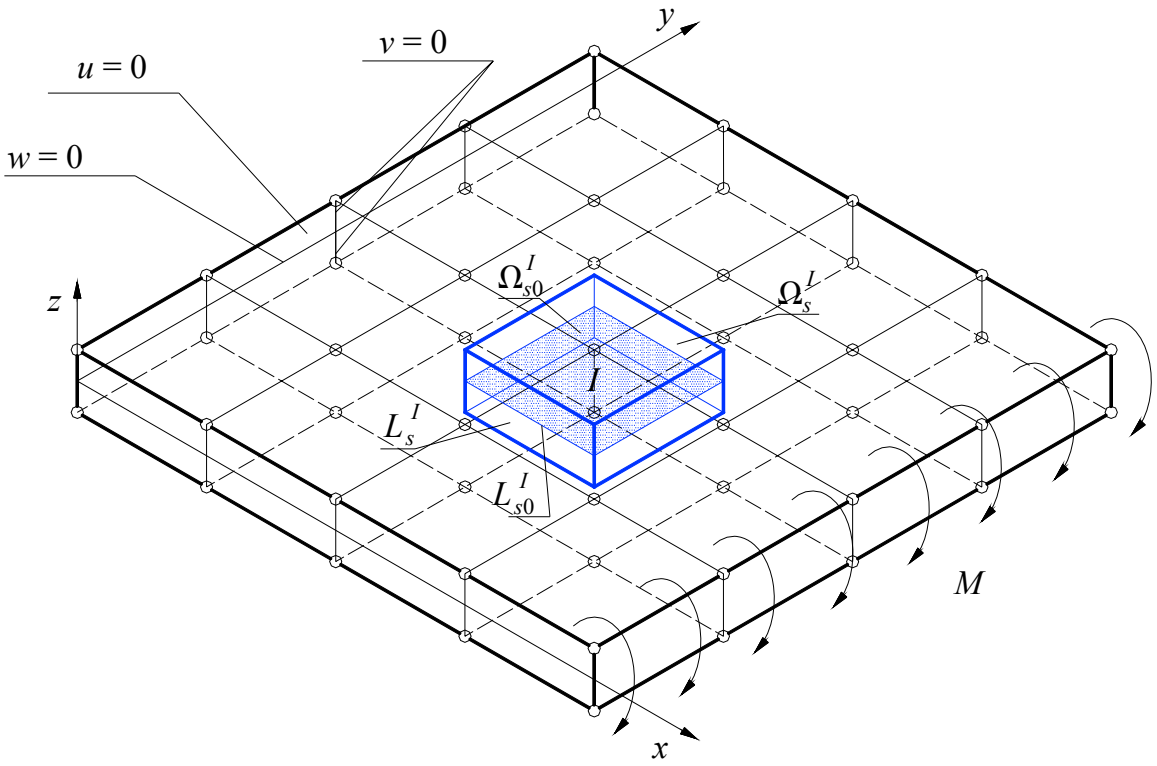
Najjednostavniji način za otklanjanje ovog *lockinga* je upotreba kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka što onda daje linearnu raspodjelu ε_z što je i provedeno u radu.

4.3.2. Poprečni posmični (*transversal shear*) *locking*

Poprečni posmični *locking* predstavlja nemogućnost numeričke metode da opiše isčezavanje poprečnih posmičnih komponenata deformacije u slučaju savijanja tankih ploča. U slučaju da nije zadovoljen uvjet isčezavanja poprečnih posmičnih komponenata deformacije, te komponente uzrokuju prekrut rezultat deformiranja. Taj je probelm to izraženiji što je ploča manje debljine prema duljinama stranica.

Prvotno je postojanje poprečnog posmičnog *lockinga* utvrđeno u bezmrežnim metodama temeljenim na metodi pomaka [22]. Teorijskim razmatranjem *MLS* aproksimacijske funkcije koja je korištena u metodi, došlo se do zaključka da je uzrok *lockinga* nemogućnost aproksimacijske funkcije zadovoljiti Kirchhoff-Loveovu pretpostavku

za tanke ploče da su kutovi zakreta normale funkcije derivacije progiba po koordinatama u srednjoj ranvini. Slijedeći izvod prikazan u [46] u metodi pomaka jednadžbe slabog oblika uvjeta ravnoteže (4.18) pokazuje se za jedno lokalno područje integracije uz zanemarenje volumenske sile postojanje poprečnog posmičnog *lockinga*. Zanemrena je mogućnost pojave debljinskog *lockinga* odabirom Poissonovog faktora $\nu = 0$. Promatra se područje integracije unutrašnjeg čvora za koji ne postoji presjek područja integracije s globalnim rubom, kao što je prikazano na slici 75.



Slika 75. Lokalno područje integracije za unutarnji par čvorova

Komponente pomaka su aproksimirane u obliku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y) \sum_{J=1}^{2} N^{(J)}(z)\, \hat{\mathbf{v}}^{(J)I} \tag{4.24}$$

gdje su $N^{(1)}(z) = N^{(l)}(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{h}$ i $N^{(2)}(z) = N^{(u)}(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{h}$ funkcije oblika po debljini pridružene donjem odnosno gornjem čvoru u paru čvorova I, te $\hat{\mathbf{v}}_I^{(1)} = \hat{\mathbf{v}}_I^{(l)} = \begin{bmatrix} u_I^{(l)} & v_I^{(l)} & w_I^{(l)} \end{bmatrix}^T$ i $\hat{\mathbf{v}}_I^{(2)} = \hat{\mathbf{v}}_I^{(u)} = \begin{bmatrix} u_I^{(u)} & v_I^{(u)} & w_I^{(u)} \end{bmatrix}^T$ čvorni vektori komponenata pomaka. Za jedan par čvorova vektor komponenata pomaka je u obliku

$$\hat{\mathbf{v}}^I = \begin{bmatrix} u^{(l)I} & v^{(l)I} & w^{(l)I} & u^{(u)I} & v^{(u)I} & w^{(u)I} \end{bmatrix}^T. \tag{4.25}$$

U svrhu pokazivanja postojanja poprečnog posmičnog *lockinga* u metodi pomaka, aproksimirani pomak treba prikazati kao umnožak funkcije pomaka u srednjoj ravnini i funkcije po koordinati z što je u obliku

$$\mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{u}\left(\mathbf{x}_{\alpha}\right)\mathbf{u}\left(z\right). \tag{4.26}$$

$\mathbf{x}_{\alpha}$ su koordinate u srednjoj ravnini odnosno $\mathbf{x}_{\alpha}=\left(x,\,y\right)$. Radi jednostavnosti uvest će se jednostavnije označavanje aproksimacije pomaka iz (4.26) na način

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\left(\mathbf{x}_{\alpha}\right)=\mathbf{u}^{\alpha}\;&\Rightarrow\begin{bmatrix}u^{\alpha}\\v^{\alpha}\\w^{\alpha}\end{bmatrix},\\ \mathbf{u}\left(z\right)=\mathbf{u}^{z}\;&\Rightarrow\begin{bmatrix}u^{z}\\v^{z}\\w^{z}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Normala na plohe koje okružuju lokalno područje integracije i koje su u potpunosti unutar područja problema Ω leži u koordinatnoj ravnini Oxy, tj. $n_3=n_z=0$. Testne funkcije su u obliku (4.9) odnosno (4.10). Jednadžbe ravnoteže u integralnom obliku (4.18) s aproksimiranim pomacima, konstitutinvim relacijama (4.7) i kinematičkim relacijama (4.8) su u obliku

$$\begin{aligned}&\int_{L_s} v_1 C_{i\alpha kl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)n_{\alpha}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s} v_{1,j}C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\ &\int_{L_s} v_2 C_{i\alpha kl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)n_{\alpha}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s} v_{2,j}C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\mathrm{d}\Omega=0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Integriranje po debljini može se provesti zasebno pa slijedi za prvi skup jednadžbi određen s v_1

$$\begin{aligned}&\int_{L_s} v_1 C_{i\alpha kl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)n_{\alpha}\mathrm{d}\Gamma=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} v_1 C_{i\alpha kl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)n_{\alpha}\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z,\\ &\int_{\Omega_s} v_{1,j}C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} v_{1,j}C_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Analogno je za drugi skup jednadžbi određen s v_2 što se ovdje neće prikazati. U jednadžbama (4.29) $\int_{L_{s0}}(\;)\mathrm{d}L_{s0}$ predstavlja integral po krivulju presječnicu plohe koja omeđuje lokalno

područje integracije, L_s, i srednje ravnine ploče, a $\int_{\Omega_{s0}} (\ )\mathrm{d}\Omega_{s0}$ predstavlja integral po plohi presječnici volumena lokalnog područja integracije Ω_s i srednje ravnine ploče. Za homogeni, izotropni, linearno elastični materijal s $\nu = 0$ samo su neke komponente tenzora elastičnosti različite od nule,

$$\begin{aligned} &C_{1111}, C_{2222}, C_{3333}, \\ &C_{1212} = C_{1221} = C_{2121}, \\ &C_{1313} = C_{3113} = C_{3131}, \\ &C_{2323} = C_{3223} = C_{3232}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Uvođenjem testnih funkcija (4.10) u jednadžbe (4.29) dobiva se

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{L_{s0}} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right) C_{i\alpha kl} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) n_\alpha \mathrm{d}\Gamma_0 \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{L_{s0}} C_{i\alpha kl} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) n_\alpha \mathrm{d}\Gamma_0 \mathrm{d}z - \\ &\frac{1}{h} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{L_{s0}} z\, C_{i\alpha kl} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) n_\alpha \mathrm{d}\Gamma_0 \mathrm{d}z, \\ &\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_{s0}} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)_{,j} C_{ijkl} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \mathrm{d}\Omega_0 \mathrm{d}z = -\frac{1}{h} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_{s0}} C_{i3kl} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \mathrm{d}\Omega_0 \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Za slobodni indeks *i* raspisane jedandžbe (4.31) uz uvođenje (4.30) su u obliku

$$\begin{aligned} i = 1: \ &\frac{1}{2} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{L_{s0}} \left[C_{1111} u_{1,1} n_1 + C_{1212} \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) n_2 \right] \mathrm{d}\Gamma_0 \mathrm{d}z - \\ &\frac{1}{h} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{L_{s0}} z \left[C_{1111} u_{1,1} n_1 + C_{1212} \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) n_2 \right] \mathrm{d}\Gamma_0 \mathrm{d}z - \\ &\frac{1}{h} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega_{s0}} C_{1331} \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right) \mathrm{d}\Omega_0 \mathrm{d}z = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$
\begin{aligned}
i=2:\ & \frac{1}{2}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u_{1,2}+u_{2,1}\right)n_1+C_{2222}u_{2,2}n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} z\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u_{1,2}+u_{2,1}\right)n_1+C_{2222}u_{2,2}n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} C_{2332}\frac{1}{2}\left(u_{2,3}+u_{3,2}\right)\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z=0.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
i=3:\ & \frac{1}{2}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u_{3,2}+u_{2,3}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} z\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u_{3,2}+u_{2,3}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} C_{3333}u_{3,3}\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z=0.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

U jednadžbama (4.32), (4.33) i (4.34) funkcije pomaka se prikazuju kao umnožak funkcija u srednjoj ravnini i po debljini prema (4.27) pa se mogu zapisati dalje kao

$$
\begin{aligned}
i=1:\ & \frac{1}{2}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left[C_{1111}\left(u^{\alpha}{}_{1,1}u^{z}{}_{1}\right)n_1+C_{1212}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}u^{z}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{2,1}u^{z}{}_{2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} z\left[C_{1111}\left(u^{\alpha}{}_{1,1}u^{z}{}_{1}\right)n_1+C_{1212}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}u^{z}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{2,1}u^{z}{}_{2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \\
& \frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} C_{1331}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1}u^{z}{}_{1,3}+u^{\alpha}{}_{3,1}u^{z}{}_{3}\right)\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z=0.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

$$i=2:\ \frac{1}{2}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}u^{z}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{2,1}u^{z}{}_{2}\right)n_1+C_{2222}\left(u^{\alpha}{}_{2,2}u^{z}{}_{2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z-$$

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} z\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}u^{z}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{2,1}u^{z}{}_{2}\right)n_1+C_{2222}\left(u^{\alpha}{}_{2,2}u^{z}{}_{2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \tag{4.36}$$

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} C_{2332}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}u^{z}{}_{2,3}+u^{\alpha}{}_{3,2}u^{z}{}_{3}\right)\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z=0.$$

$$i=3:\ \frac{1}{2}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1}u^{z}{}_{1,3}+u^{\alpha}{}_{3,1}u^{z}{}_{3}\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}u^{z}{}_{2,3}+u^{\alpha}{}_{3,2}u^{z}{}_{3}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z-$$

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}} z\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1}u^{z}{}_{1,3}+u^{\alpha}{}_{3,1}u^{z}{}_{3}\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}u^{z}{}_{2,3}+u^{\alpha}{}_{3,2}u^{z}{}_{3}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0\mathrm{d}z- \tag{4.37}$$

$$\frac{1}{h}\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}} C_{3333}\left(u^{\alpha}{}_{3}u^{z}{}_{3,3}\right)\mathrm{d}\Omega_0\mathrm{d}z=0.$$

Nakon integracije po koordinati z iz jednadžbi (4.35), (4.36) i (4.37) slijedi

$$i=1:\ \frac{1}{4}h\int_{L_{s0}}\left[C_{1111}\left(u^{\alpha}{}_{1,1}\right)n_1+C_{1212}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0-$$

$$\frac{1}{24}h\int_{L_{s0}}\left[C_{1111}\left(u^{\alpha}{}_{1,1}\right)n_1+C_{1212}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0- \tag{4.38}$$

$$\int_{\Omega_{s0}} C_{1331}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}u^{\alpha}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{3,1}\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\Omega_0=0.$$

$$i=2:\ \frac{1}{4}h\int_{L_{s0}}\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_1+C_{2222}\left(u^{\alpha}{}_{2,2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0-$$

$$\frac{1}{24}h\int_{L_{s0}}\left[C_{2121}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_1+C_{2222}\left(u^{\alpha}{}_{2,2}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0- \tag{4.39}$$

$$\int_{\Omega_{s0}} C_{2332}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}\frac{1}{h}+u^{\alpha}{}_{3,2}\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\Omega_0=0.$$

$$
\begin{aligned}
&i=3:\\
&\frac{1}{2}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1}+u^{\alpha}{}_{3,1}\frac{1}{2}h\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}+u^{\alpha}{}_{3,2}\frac{1}{2}h\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0-\\
&\frac{1}{h}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{1}\frac{1}{8}h+u^{\alpha}{}_{3,1}\frac{1}{24}h^2\right)n_1+C_{3232}\frac{1}{2}\left(u^{\alpha}{}_{2}\frac{1}{8}h+u^{\alpha}{}_{3,2}\frac{1}{24}h^2\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0-\\
&\frac{1}{h}\int_{\Omega_{s0}}C_{3333}u^{\alpha}{}_{3}\mathrm{d}\Omega_0=0.
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Preuređivanjem integrala u jednadžbama (4.38), (4.39) i (4.40) dobiva se

$$
\begin{aligned}
i=1:&h\int_{L_{s0}}\left[C_{1111}\frac{5}{24}u^{\alpha}{}_{1,1}\,n_1+C_{1212}\frac{5}{48}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0+\\
&\frac{1}{4}\int_{\Omega_{s0}}C_{1331}u^{\alpha}{}_{3,1}\mathrm{d}\Omega_0-\frac{1}{h}\frac{1}{2}\int_{\Omega_{s0}}C_{1331}u^{\alpha}{}_{1}\mathrm{d}\Omega_0=0.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

$$
\begin{aligned}
i=2:&h\int_{L_{s0}}\left[C_{2121}\frac{5}{48}\left(u^{\alpha}{}_{1,2}+u^{\alpha}{}_{2,1}\right)n_1+\frac{5}{24}C_{2222}u^{\alpha}{}_{2,2}\,n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0+\\
&\frac{1}{4}\int_{\Omega_{s0}}C_{2332}u^{\alpha}{}_{3,2}\mathrm{d}\Omega_0-\frac{1}{h}\frac{1}{2}\int_{\Omega_{s0}}C_{2332}u^{\alpha}{}_{2}\mathrm{d}\Omega_0=0.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

$$
\begin{aligned}
i=3:\;&h\frac{7}{48}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\,u^{\alpha}{}_{3,1}n_1+C_{3232}\,u^{\alpha}{}_{3,2}n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0+\\
&\frac{5}{16}\int_{L_{s0}}\left[C_{3131}\,u^{\alpha}{}_{1}n_1+C_{3232}\,u^{\alpha}{}_{2}n_2\right]\mathrm{d}\Gamma_0-\\
&\frac{1}{h}\int_{\Omega_{s0}}C_{3333}\,u^{\alpha}{}_{3}\mathrm{d}\Omega_0=0.
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

U integralima u jedandžbi (4.41) član s h teži nuli kako debljina teži nuli, član s konstatom je za red veličine veći dok je član s $1/h$ dominantan u slučaju da debljina teži nuli, tj. u slučaju tanke ploče. Dva dominantna člana s konstantom i s članom $1/h$ potječu od poprečnog posmičnog naprezanja $\tau_{13}=C_{1331}\varepsilon_{13}$. Isti je slučaj u jednadžbi (4.42) samo s drugom komponentom poprečnog posmičnog naprezanja, $\tau_{23}=C_{2332}\varepsilon_{23}$. To dokazuje postojanje poprečnog posmičnog *lockinga*. Uvjet za koji bi se izbjegao poprečni posmični *locking* je izveden iz dva dominantna člana u jednadžbama (4.41) i (4.42) u obliku

$$
\frac{1}{4}u^{\alpha}{}_{3,1}-\frac{1}{h}\frac{1}{2}u^{\alpha}{}_{1}=0\Rightarrow\frac{u^{\alpha}{}_{1}}{h/2}=u^{\alpha}{}_{3,1}
\tag{4.44}
$$

iz jednadžbe (4.41) te

$$
\frac{1}{4}u^{\alpha}{}_{3,2}-\frac{1}{h}\frac{1}{2}u^{\alpha}{}_{2}=0\Rightarrow\frac{u^{\alpha}{}_{2}}{h/2}=u^{\alpha}{}_{3,2}
\tag{4.45}
$$

iz jednadžbe (4.42). Jednadžba (4.44) se može zapisati na način prepoznatljiv u teoriji ploča

$$\frac{u^{\alpha}{}_{1}}{h/2} = u^{\alpha}{}_{3,1} \Rightarrow \frac{u}{h/2} = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}. \tag{4.46}$$

Jednadžba (4.45) se isto tako može zapisati na način

$$\frac{u^{\alpha}{}_{2}}{h/2} = u^{\alpha}{}_{3,2} \Rightarrow \frac{v}{h/2} = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}. \tag{4.47}$$

I jednadžba (4.46) i (4.47) ukazuju na isto; nagib normale mora biti funkcija progiba, tj. parcijalne derivacije progiba po koordinatama u srednjoj ravnini, tj. to je upravo Kirchhoff-Loveov uvjet za tanku ploču. Na aproksimaciju komponenata po pretpostavci nisu postavljeni takvi uvjeti.

Kako je i provedeno u radu, u cilju uklanjanja poprečnog posmičnog *lockinga* primijenjena je mješovita formulacija u kojoj su aproksimirana naprezanja. U nastavku slijedi dokaz uklanjanja poprečnog posmičnog *lockinga* aproksimacijom komponenata naprezanja. Komponente naprezanja su aproksimirane tako da su poprečne posmične komponente konstantne po debljini, ostale su komponente linearno raspodijeljene po debljini kako će biti opisano u idućim odjeljcima pa se analogno (4.27) mogu komponente naprezanja prikazati simbolički

$$\begin{aligned}
\sigma_x(\mathbf{x}) &= \sigma_x(\mathbf{x}^{\alpha})\sigma_x(z) = \sigma_x^{\alpha}\sigma_x^{z},\\
\sigma_y(\mathbf{x}) &= \sigma_y(\mathbf{x}^{\alpha})\sigma_y(z) = \sigma_y^{\alpha}\sigma_y^{z},\\
\sigma_z(\mathbf{x}) &= \sigma_z(\mathbf{x}^{\alpha})\sigma_z(z) = \sigma_z^{\alpha}\sigma_z^{z},\\
\tau_{xy}(\mathbf{x}) &= \tau_{xy}(\mathbf{x}^{\alpha})\tau_{xy}(z) = \tau_{xy}^{\alpha}\tau_{xy}^{z},\\
\tau_{yz}(\mathbf{x}) &= \tau_{yz}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \tau_{yz}^{\alpha},\\
\tau_{zx}(\mathbf{x}) &= \tau_{zx}(\mathbf{x}^{\alpha}) = \tau_{zx}^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Uvrštavajući aproksimirani oblik komponenata naprezanja (4.48) u integralne jednadžbe ravnoteže (4.18), uz iste testne funkcije kao i u dokazu za metodu pomaka prethodno prikazanom, za testnu funkciju v_1 slijedi

$$\int_{L_s} v_1 \sigma_{i\alpha} n_{\alpha} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} v_{1,j}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{4.49}$$

Analogno vrijedi za testnu funkciju v_2 te taj dokaz ovdje neće biti prikazan. Raspisivanjem po slobodnom indeksu *i* slijede jednadžbe

$$
\begin{aligned}
i=1:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma_{13}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=2:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma_{23}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=3:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma_{33}\right)\mathrm{d}\Omega=0.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

U jednadžbe (4.50) se uvodi simbolički prikaz raspodjele komponenata naprezanja (4.48) pa slijedi

$$
\begin{aligned}
i=1:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma^{\alpha}_{11}\sigma^{z}_{11}n_1+\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma^{\alpha}_{13}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=2:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_1+\sigma^{\alpha}_{22}\sigma^{z}_{22}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma^{\alpha}_{23}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=3:&\ \int_{L_s} v_1\left(\sigma^{\alpha}_{13}n_1+\sigma^{\alpha}_{23}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(v_{1,3}\sigma^{\alpha}_{33}\sigma^{z}_{33}\right)\mathrm{d}\Omega=0.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Raspisivanjem testne funkcije i njene derivacije jednadžbe (4.51) se mijenjaju u

$$
\begin{aligned}
i=1:&\ \int_{L_s}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)\left(\sigma^{\alpha}_{11}\sigma^{z}_{11}n_1+\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(-\frac{1}{h}\sigma^{\alpha}_{13}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=2:&\ \int_{L_s}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)\left(\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_1+\sigma^{\alpha}_{22}\sigma^{z}_{22}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(-\frac{1}{h}\sigma^{\alpha}_{23}\right)\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=3:&\ \int_{L_s}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{h}\right)\left(\sigma^{\alpha}_{13}n_1+\sigma^{\alpha}_{23}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(-\frac{1}{h}\sigma^{\alpha}_{33}\sigma^{z}_{33}\right)\mathrm{d}\Omega=0.
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

$$
\begin{aligned}
i=1:&\ \frac{1}{2}\int_{L_s}\left(\sigma^{\alpha}_{11}\sigma^{z}_{11}n_1+\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{h}\int_{L_s} z\left(\sigma^{\alpha}_{11}\sigma^{z}_{11}n_1+\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\frac{1}{h}\int_{\Omega_s}\sigma^{\alpha}_{13}\,\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=2:&\ \frac{1}{2}\int_{L_s}\left(\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_1+\sigma^{\alpha}_{22}\sigma^{z}_{22}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{h}\int_{L_s} z\left(\sigma^{\alpha}_{12}\sigma^{z}_{12}n_1+\sigma^{\alpha}_{22}\sigma^{z}_{22}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\frac{1}{h}\int_{\Omega_s}\sigma^{\alpha}_{23}\,\mathrm{d}\Omega=0,\\
i=3:&\ \frac{1}{2}\int_{L_s}\left(\sigma^{\alpha}_{13}n_1+\sigma^{\alpha}_{23}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{h}\int_{L_s} z\left(\sigma^{\alpha}_{13}n_1+\sigma^{\alpha}_{23}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\frac{1}{h}\int_{\Omega_s}\sigma^{\alpha}_{33}\sigma^{z}_{33}\,\mathrm{d}\Omega=0.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Integriranjem po debljini ploče dobiva se

$$i=1:\ \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{11}^{\alpha}\sigma_{11}^{z}n_1+\sigma_{12}^{\alpha}\sigma_{12}^{z}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z-\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}z\left(\sigma_{11}^{\alpha}\sigma_{11}^{z}n_1+\sigma_{12}^{\alpha}\sigma_{12}^{z}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z+\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}}\sigma_{13}^{\alpha}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}z=0,$$

$$i=2:\ \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{12}^{\alpha}\sigma_{12}^{z}n_1+\sigma_{22}^{\alpha}\sigma_{22}^{z}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z-\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}z\left(\sigma_{12}^{\alpha}\sigma_{12}^{z}n_1+\sigma_{22}^{\alpha}\sigma_{22}^{z}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z+\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s0}}\sigma_{23}^{\alpha}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}z=0,$$

$$i=3:\ \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{13}^{\alpha}n_1+\sigma_{23}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z-\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{L_{s}}z\left(\sigma_{13}^{\alpha}n_1+\sigma_{23}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\,\mathrm{d}z+\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{\Omega_{s}}\sigma_{33}^{\alpha}\sigma_{33}^{z}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}z=0.$$

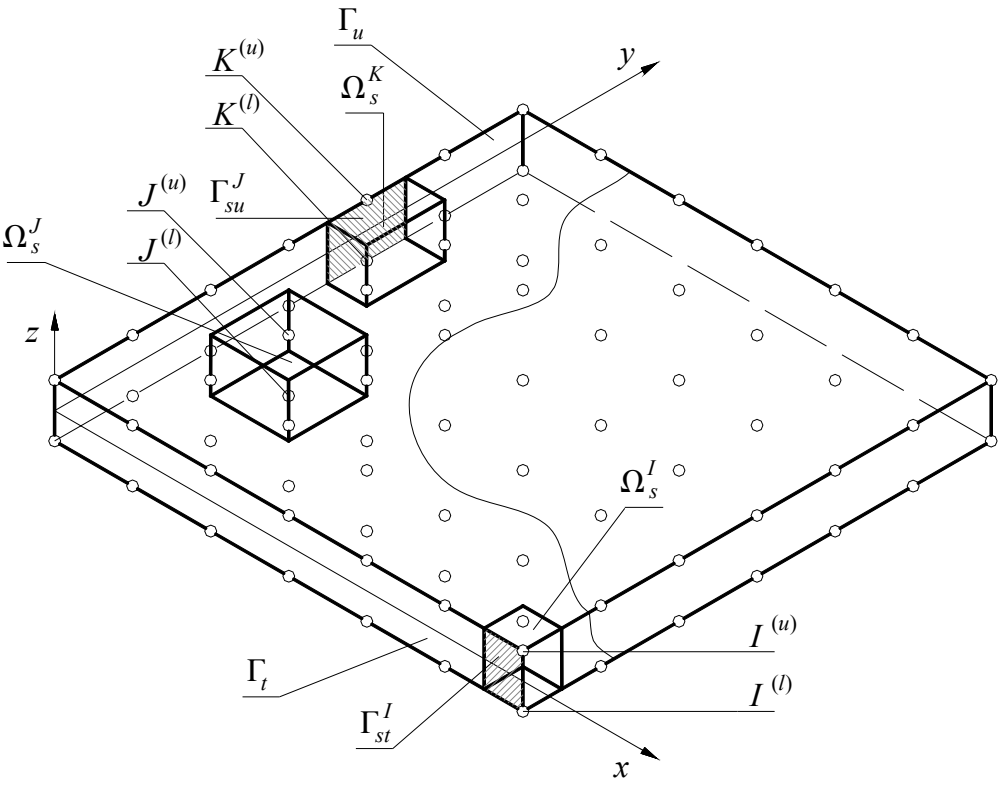
(4.54)

$$\begin{aligned}
&i=1:\ \frac{1}{4}h\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{11}^{\alpha}n_1+\sigma_{12}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{24}\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{11}^{\alpha}n_1+\sigma_{12}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_{s0}}\sigma_{13}^{\alpha}\,\mathrm{d}\Omega=0,\\
&i=2:\ \frac{1}{4}h\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{12}^{\alpha}n_1+\sigma_{22}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{24}\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{12}^{\alpha}n_1+\sigma_{22}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_{s0}}\sigma_{23}^{\alpha}\,\mathrm{d}\Omega=0,\\
&i=3:\ \frac{1}{2}h\int_{L_{s0}}\left(\sigma_{13}^{\alpha}n_1+\sigma_{23}^{\alpha}n_2\right)\mathrm{d}\Gamma+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{s}}\sigma_{33}^{\alpha}\,\mathrm{d}\Omega=0.
\end{aligned}\qquad(4.55)$$

U prvoj i drugoj jednadžbi u (4.55) integrali koji sadrže normalne i poprečne posmične komponente naprezanja imaju isti koeficijent, tj. istu potenciju debljine ploče h, što znači da poprečne posmične komponente naprezanja nisu dominantne. U trećoj jednadžbi poprečne posmične komopnente brže teže nuli kako se debljina ploče smanjuje u odnosu na normalnu komponentu. Ovime je dokazano da je aproksimacijom komponenata naprezanja uklonjen poprečni posmični *locking*.

4.3.3. Formulacija s linearnom raspodjelom pomaka po debljini

Kao što je spomenuto u odjeljku 4.3.1, linearna raspodjela poprečne komponente pomaka bez nekih dodatnih utjecaja na raspodjelu ε_z dovodi do pojave debljinskog *lockinga*. Stoga je ovdje provedena provjera teorijskih postavki i predviđanja pojave debljinskog *lockinga* uz linearnu raspodjelu poprečne komponente pomaka.



Slika 76. Diskretizacija ploče s 2 čvora po debljini

Ploča je diskretizirana čvorovima na gornjoj i donjoj plohi, kako je prikazano na slici 76. Čvorovi na gornjoj plohi dobivaju gornji indeks u (*upper*), a čvorovi na donjoj plohi indeks l (*lower*). Dva čvora koji imaju iste koordinate u srednjoj ravnini čine par čvorova. Svakom paru čvorova je pridruženo lokalno područje integracije, *local subdomain*, po kojem se vrši integriranje slabog oblika uvjeta ravnoteže. Ta su područja jednostavnog oblika, u ovom radu su odabrani paralelopipedi, pravokutne baze u srednjoj ravnini. Svaki čvor odnosno par čvorova može imati drugačije lokalno područje integracije. Lokalna područja su prikazana na slici 76.

Svaki čvor ima po tri stupnja slobode koje čine translacijske komponente na pravcima Kartezijevih koordinatnih osi x, y i z a označene su u, v i w.

$$\begin{aligned} u &= u\left(x, y, z\right), \\ v &= v\left(x, y, z\right), \\ w &= w\left(x, y, z\right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Svaki par čvorova ima šest komponenata pomaka i to su stupnjevi slobode tog para u obliku

$$\hat{\mathbf{v}}^I = \left[u^{(l)I} \quad v^{(l)I} \quad w^{(l)I} \quad u^{(u)I} \quad v^{(u)I} \quad w^{(u)I} \right]^T. \tag{4.57}$$

Označavanje u (4.57) predstavlja za npr. $w^{(l)I}$ komponentu pomaka na pravcu osi z u donjem čvoru para čvorova označenog I.

U ovoj mješovitoj formulaciji aproksimirane su zasebno i komponente naprezanja

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x\left(x,y,z\right);\\
\sigma_y &= \sigma_y\left(x,y,z\right);\\
\sigma_z &= \sigma_z\left(x,y\right);\\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}\left(x,y,z\right);\\
\tau_{yz} &= \tau_{yz}\left(x,y\right);\\
\tau_{zx} &= \tau_{zx}\left(x,y\right).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Svaki par čvorova stoga ima devet komponenata naprezanja i to su

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \left[\sigma_x^{(l)I} \quad \sigma_y^{(l)I} \quad \tau_{xy}^{(l)I} \quad \sigma_z^{(0)I} \quad \tau_{yz}^{(0)I} \quad \tau_{zx}^{(0)I} \quad \sigma_x^{(u)I} \quad \sigma_y^{(u)I} \quad \tau_{xy}^{(u)I}\right]^T. \tag{4.59}$$

$\sigma_z^{(0)I}, \tau_{yz}^{(0)I}, \tau_{zx}^{(0)I}$ označavaju srednje vrijednosti dotičnih komponenata naprezanja izračunatih osrednjavanjem vrijednosti dobivenih u gornjem i donjem čvoru para *I* prema

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(0)I} &= \frac{\sigma_z\left(\mathbf{x}^{(l)I}\right)+\sigma_z\left(\mathbf{x}^{(u)I}\right)}{2},\\
\tau_{yz}^{(0)I} &= \frac{\tau_{yz}\left(\mathbf{x}^{(l)I}\right)+\tau_{yz}\left(\mathbf{x}^{(u)I}\right)}{2},\\
\tau_{zx}^{(0)I} &= \frac{\tau_{zx}\left(\mathbf{x}^{(l)I}\right)+\tau_{zx}\left(\mathbf{x}^{(u)I}\right)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Svaka od vrijednosti komponenata naprezanja u (4.60) se izračunava kolokacijom prema (4.7) i (4.8). Za par čvorova odabire se testna funkcija koja će dati šest jednadžbi koje su diskretizirane čvornim komponentama naprezanja (4.59). Taj je sustav jednadžbi pododređen pa se postavljaju dodatne jednadžbe u čvorovima diskretizacije čime se sustav zatvara, tj. postaje rješiv. Dodatne jednadžbe su konstitutivne i kinematičke relacije.

4.3.3.1. Diskretizacija

U ovoj mješovitoj formulaciji aproksimirane su komponente pomaka $\mathbf{u} = \left[u \quad v \quad w\right]^T$ i komponente naprezanja $\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\right]^T$ istim aproksimacijskim funkcijama. Te su funkcije umnožak funkcija u srednjoj ravnini opisanih u odjeljku 2.4 i polinoma po koordinatnoj osi *z*.

Komponente pomaka su aproksimirane na način

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(u^{(l)I} N^{(l)}(z) + u^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),\\
v(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(v^{(l)I} N^{(l)}(z) + v^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),\\
w(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(w^{(l)I} N^{(l)}(z) + w^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

a komponente naprezanja

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_x{}^{(l)I} N^{(l)}(z) + \sigma_x{}^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),\\
\sigma_y(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_y{}^{(l)I} N^{(l)}(z) + \sigma_y{}^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),\\
\sigma_z(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_z{}^{(0)I}\right),\\
\tau_{xy}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{xy}{}^{(l)I} N^{(l)}(z) + \tau_{xy}{}^{(u)I} N^{(u)}(z)\right),\\
\tau_{yz}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{yz}{}^{(0)I}\right),\\
\tau_{zx}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{zx}{}^{(0)I}\right).
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Simbolički se aproksimacija pomaka (4.61) prikazuje

$$
\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x})\,\hat{\mathbf{v}}^I \tag{4.63}
$$

s matricom funkcija oblika $\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x})$

$$
\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y)\begin{bmatrix}
N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0\\
0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0\\
0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z)
\end{bmatrix} \tag{4.64}
$$

ili skraćeno

$$
\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y)\begin{bmatrix} N^{(l)}(z)\mathbf{I}_3 & N^{(u)}(z)\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \tag{4.65}
$$

U jednadžbama (4.63) $\hat{\mathbf{v}}^I$ je vektor čvornih pomaka definiran prema (4.57). Aproksimacija pomaka je koristeći zapise (4.63) i (4.64) jednaka

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_u} \phi_I(x,y) \begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(l)I} \\ v^{(l)I} \\ w^{(l)I} \\ u^{(u)I} \\ v^{(u)I} \\ w^{(u)I} \end{bmatrix} . \quad (4.66)$$

Analogno tome, aproksimacija naprezanja je simbolički zapisana

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_{I}(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{I} \quad (4.67)$$

s matricom funkcija oblika za naprezanja $\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_{I}$

$$\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_{I}(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y) \begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.68)$$

i $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{I}$ je vektor čvornih naprezanja definiran prema (4.57) odnosno (4.59).

U prvim integralima u (4.18) pojavljuju se matrice testnih funkcija koje su oblika

$$\mathbf{v}^{(l)} = v_l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.69)$$

U drugim integralima u (4.18) pojavljuju se matrice derivacija (gradijent) testnih funkcija koje su oblika

$$\nabla \mathbf{v}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{l,z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{l,z} & 0 \\ 0 & 0 & v_{l,z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.70)$$

Diskretizirani oblik komponenata naprezanja prikazuje se kao

$$\begin{bmatrix}\sigma_x(\mathbf{x})\\ \sigma_y(\mathbf{x})\\ \sigma_z(\mathbf{x})\\ \tau_{xy}(\mathbf{x})\\ \tau_{yz}(\mathbf{x})\\ \tau_{zx}(\mathbf{x})\end{bmatrix}=\sum_{I=1}^{n}\phi_I(x,y)\begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0\\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x^{(l)I}\\ \sigma_y^{(l)I}\\ \tau_{xy}^{(l)I}\\ \sigma_z^{(0)I}\\ \tau_{yz}^{(0)I}\\ \tau_{zx}^{(0)I}\\ \sigma_x^{(u)I}\\ \sigma_y^{(u)I}\\ \tau_{xy}^{(l)I}\end{bmatrix}$$

(4.71)

Komponente normale se u integralima u (4.18) prikazuju matrično

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z\\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0\\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x\end{bmatrix}. \tag{4.72}$$

Koristeći (4.72), (4.67), (4.70) i (4.69), jednadžbe (4.18) prikazuju se u diskretiziranom obliku

$$\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(l)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(l)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(l)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(l)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma\,. \tag{4.73}$$

Za dvije vrijednosti indeksa *l* u jednadžbama (4.73) dobivaju se dva skupa jednadžbi što je svukupno šest jednadžbi za lokalno područje integracije.

$$\begin{aligned}&\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(1)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma,\\ &\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(2)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma.\end{aligned} \tag{4.74}$$

Jednadžbe (4.74) se izravno postavljaju u matricu koeficijenata označenu $\mathbf{K}_1$. Simbolički se taj prvi sustav jednadžbi s čvornim komponentama kao nepoznanicama za jedno područje integracije, tj. par čvorova zapisuje

$$\mathbf{K}_1{}^I\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=\mathbf{R}^I\,. \tag{4.75}$$

Ovdje je $\mathbf{K}_1{}^I$ podmatrica matrice $\mathbf{K}_1$ te sadrži šest redova pridruženih *I* – tom području integracije. Integriranjem po svim područjima integracije dobiva se sustav

$$\mathbf{K}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{R}\,. \tag{4.76}$$

U ovom sustavu rubni uvjeti sila su uključeni implicitno, tj. u integralnom smislu. Rubni uvjeti pomaka bit će zadovoljeni izravno u sustavu s komponentama pomaka kao nepoznanicama u idućem koraku. Sustav (4.76) je pododređen pa se uvode dodatne jednadžbe da bi sustav postao rješiv. Te dodatne jednadžbe su kolokacijske jednadžbe koje predstavljaju uvjete kompatibilnosti polja pomaka i polja deformacija izraženih preko naprezanja u čvorovima diskretizacije. Dodatne jednadžbe koje su „kombinacija“ konstitutivnih i kinamtičkih relacija [29] su indeksno zapisane u obliku

$$\frac{1}{2}C_{ijkm}\left(u_{k,m}\left(\mathbf{x}^I\right)+u_{m,k}\left(\mathbf{x}^I\right)\right)=\sigma_{ij}{}^I\,. \tag{4.77}$$

U (4.77) $\frac{1}{2}\left(u_{k,m}\left(\mathbf{x}^I\right)+u_{m,k}\left(\mathbf{x}^I\right)\right)=\varepsilon_{km}\left(\mathbf{x}^I\right)$ predstavljaju komponente deformacije u kolokacijskim točkama. Čvorne komponente deformacija su

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I=\left[\begin{array}{cccccccccc}\varepsilon_x{}^{(l)I} & \varepsilon_y{}^{(l)I} & \gamma_{xy}{}^{(l)I} & \varepsilon_z{}^{(0)I} & \gamma_{yz}{}^{(0)I} & \gamma_{zx}{}^{(0)I} & \varepsilon_x{}^{(u)I} & \varepsilon_y{}^{(u)I} & \gamma_{xy}{}^{(l)I}\end{array}\right]^T \tag{4.78}$$

koje se izračunavaju diskretizacijom (4.8) u paru čvorova I čvornim pomacima definiranim u (4.63) mogu se simbolički zapisati u obliku

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I=\sum_{J=1}^{n}\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J\,. \tag{4.79}$$

U jednadžbama (4.79) $\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}$ predstavlja matricu kinematičkog diferencijalnog operatora koja je određena prema

$$\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}=\left[\begin{array}{cccccc}\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0\\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_z & 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_z\\ 0 & \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2}\partial_y & 0 & \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2}\partial_y\\ \frac{1}{2}\partial_z & 0 & \frac{1}{2}\partial_x & \frac{1}{2}\partial_z & 0 & \frac{1}{2}\partial_x\\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x\end{array}\right]. \tag{4.80}$$

U jedandžbama (4.79) $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}\right)$ predstavlja matricu funkcija oblika za pomake koja je jednaka

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)=\phi_J\left(x^I,y^I\right)\begin{bmatrix} N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) \\ N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

Za konstantne članove prema (4.60) uprosječavanje vrijednosti čvornih naprezanja u gornjem i donjem čvoru daje

$$\sigma_{i3}\left(\mathbf{X}^{(0)J}\right)=\frac{\sigma_{i3}\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\sigma_{i3}\left(\mathbf{X}^{(l)J}\right)}{2}=\sigma_{i3}{}^{(0)J}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_z{}^{(0)J}=D_1\left(\frac{\varepsilon_z\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\varepsilon_z\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)}{2}\right)+D_2\left(\frac{\varepsilon_x\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\varepsilon_x\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\varepsilon_y\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\varepsilon_y\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)}{2}\right), \tag{4.82}$$

$$\tau_{yz}{}^{(0)J}=G\left(\frac{\gamma_{yz}\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\gamma_{yz}\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)}{2}\right),$$

$$\tau_{xz}{}^{(0)J}=G\left(\frac{\gamma_{xz}\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)+\gamma_{xz}\left(\mathbf{X}^{(u)J}\right)}{2}\right).$$

gdje su simboli D_1, D_2 i G određeni prema $D_1=\dfrac{E\left(1-\nu\right)}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}$, $D_2=\dfrac{E\nu}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)}$ i $G=\dfrac{E}{2\left(1+\nu\right)}$. Čvorne komponente naprezanja (4.59) se opisuju pomoću (4.79), koristeći relacije (4.60) za konstantne članove, te se dobiva sustav jednadžbi koje povezuju komponente pomaka i naprezanja u čvorovima u obliku

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=\tilde{\mathbf{D}}\sum_{J=1}^{n}\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J\ . \tag{4.83}$$

Matrica materijalnih konstanti $\tilde{\mathbf{D}}$ u (4.83) određena je prema

$$\tilde{\mathbf{D}}=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\nu & \frac{1}{2}\nu & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & \frac{1}{2}\nu & \frac{1}{2}\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Umnožak matrice kinematičkog diferencijalnog operatora $\mathbf{D}_k^{(\varepsilon)}$ i matrice funkcija oblika $\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)$ pojednostavljeno će se nadalje zapisati kao matrica

$$\mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right)=\mathbf{D}_k^{(\varepsilon)}\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right). \quad (4.85)$$

Diskretizirane jednadžbe koje povezuju komponente naprezanja i pomaka u paru čvorova I zapisuju se simbolički

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=\tilde{\mathbf{D}}\sum_{J=1}^{n}\mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J. \quad (4.86)$$

Uvrštavanjem čvornih komponenata naprezanja opisanih čvornim komponentama pomaka (4.86) u diskretizirane jednadžbe ravnoteže (4.73) dobiva se konačni oblik jednadžbi

$$\begin{aligned}
&\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\tilde{\mathbf{D}}\sum_{J=1}^{n}\mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(1)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma, \\
&\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(2)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(2)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(2)}\mathbf{\Psi}^{\sigma}{}_I\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\tilde{\mathbf{D}}\sum_{J=1}^{n}\mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(2)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma.
\end{aligned} \quad (4.87)$$

U numeričkom algoritmu je uvođenje dodatnih jednadžbi prikazano u jednadžbama (4.87) izvedeno zasebno. U prvom koraku se sastavlja matrica uvjeta ravnoteže (4.76), a nakon toga se sastavlja sustav jednadžbi koje povezuju čvorne pomake s naprezanjima (4.86) u obliku

$$\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{v}}=\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.88)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (4.88) u jednadžbe ravnoteže (4.76) dobiva se

$$\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{R}. \quad (4.89)$$

U algoritmu se provodi množenje matrica $\mathbf{K}_1$ i $\mathbf{K}_2$ pa slijedi

$$\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}\,. \tag{4.90}$$

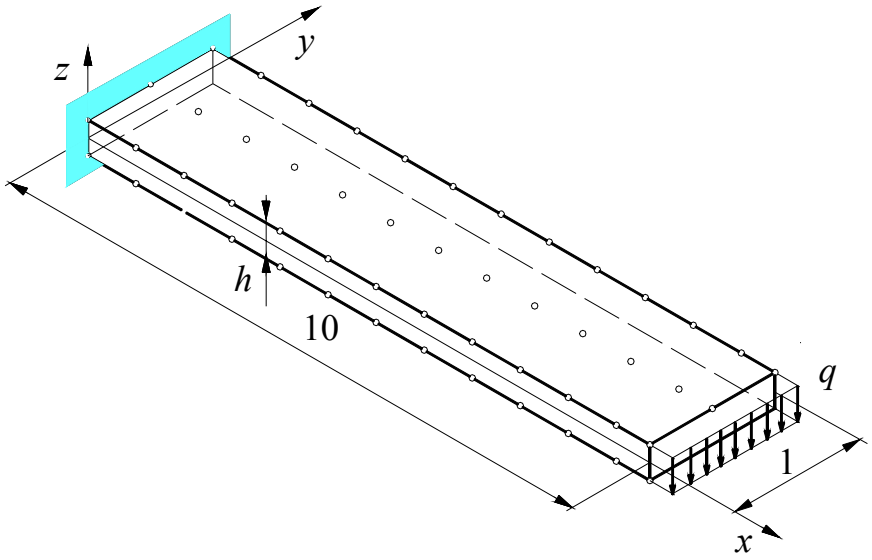
Konačno se sustav prikazuje s matricom krutosti $\mathbf{K}$ i vektorom čvornih stupnjeva slobode $\hat{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\,. \tag{4.91}$$

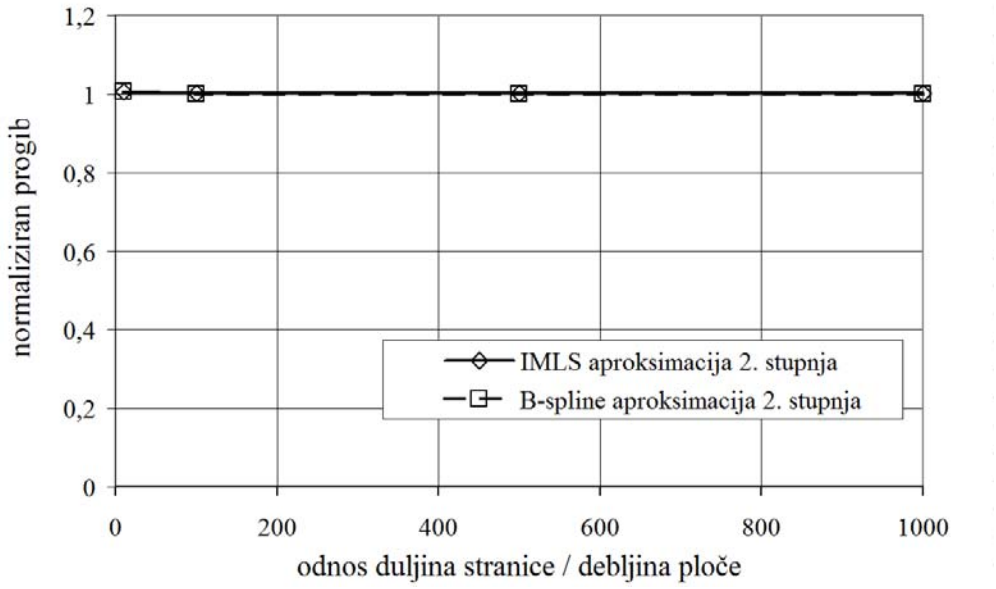
U sustav jednadžbi (4.91) se uvode rubni uvjeti pomaka analogno postupku opisanom u jednadžbama (3.38) do (3.41).

4.3.3.2. Numerički primjeri

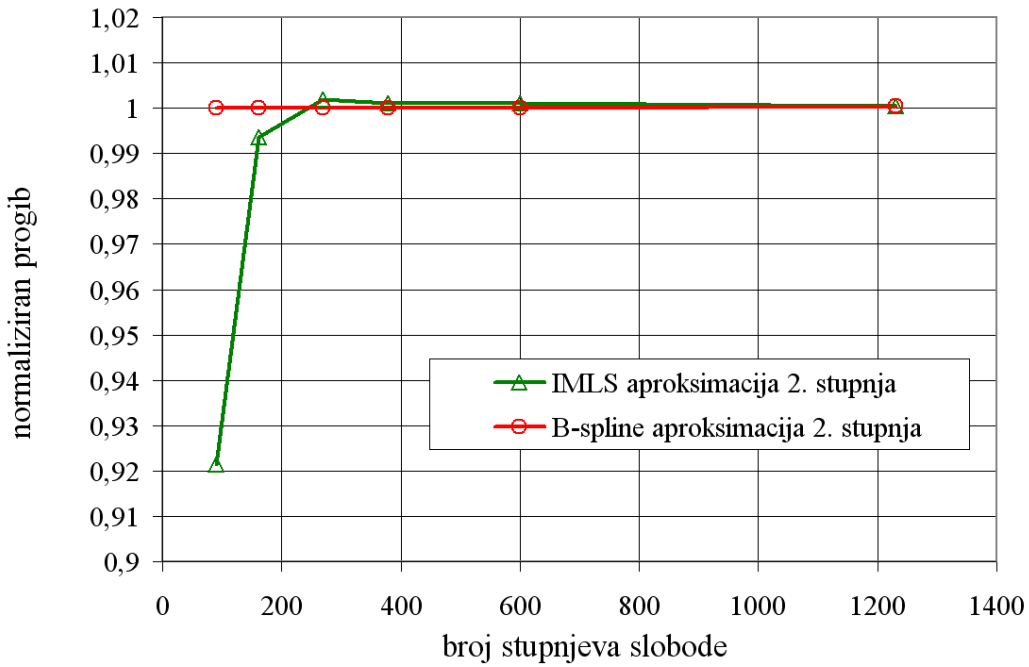
Za formulaciju opisanu u odjeljku 4.3.3 očekuje se postojanje debljinskog *lockinga* ali ne i poprečnog posmičnog *lockinga.* U cilju utvrđivanja postojanja poprečnog posmičnog *lockinga* u literaturi se najčešće spominje test savijanja tanke uklještene ploče opterećene poprečnom silom. Stoga je kao prvi numerički primjer analizirana konzolna ploča opterećena raspodijeljenim opterećnjem na slobodnom kraju prema slici 77. Ploča ima duljinu i širinu zadanu slikom dok se debljina mijenja u odnosu na duljinu tako da odnos duljine prema debljini ima vrijednosti $h/l = \{1/10, 1/100, 1/1000\}$. Cilj analize velikih odnosa duljine prema debljini je provjera postojanja poprečnog posmičnog *lockinga*. Da bi se izbjegla pojava debljinskog *lockinga* uzima se da je Poissonov faktor jednak nuli. Materijalne konstante su: $E = 200\,000,\ \nu = 0$. Ploča je na stranici s koordinatom $x = 10$ opterećena posmičnom površinskom silom iznosa $\overline{t}_z = 100\,h^2$. Uklještenje na koordinati $x = 0$ modelirano je spriječenim svim komponentama pomaka u čvorovima na toj koordinati. Za prikazane rubne uvjete dostupno je analitičko rješenje [47]. Analizirani su numerički modeli s različitim brojem čvorova tj. stupnjeva slobode od 15 čvorova, tj. 60 stupnjeva slobode najmanji model, do 729 čvorova tj. 4374 stupnja slobode kao najveći model.



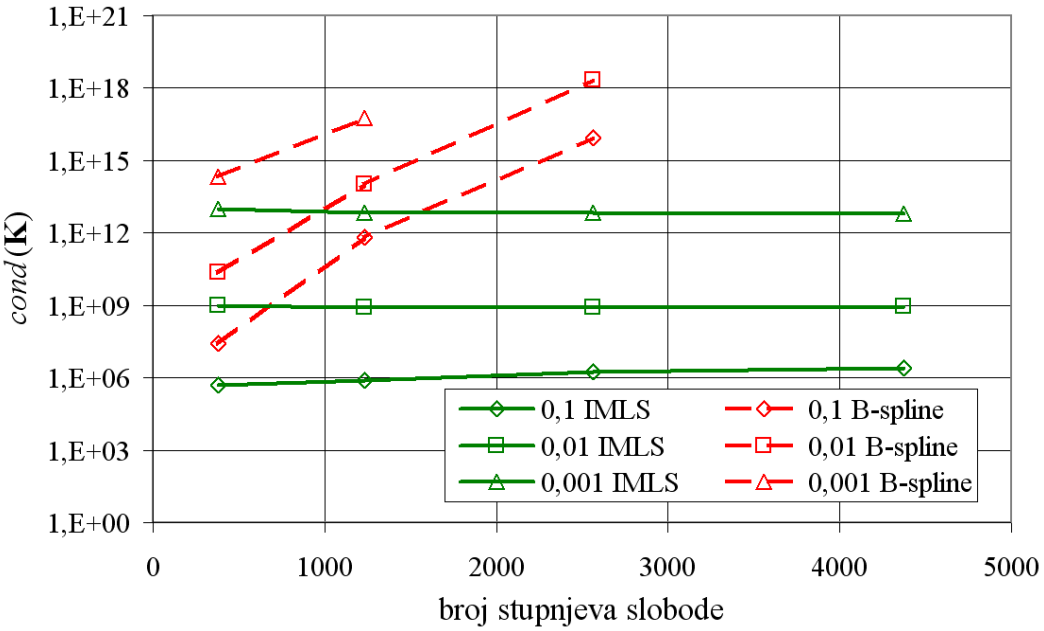
Slika 77. Konzolno uklještena ploča



Slika 78. Utjecaj odnosa duljina stranice prema debljini za ploču prema slici 77



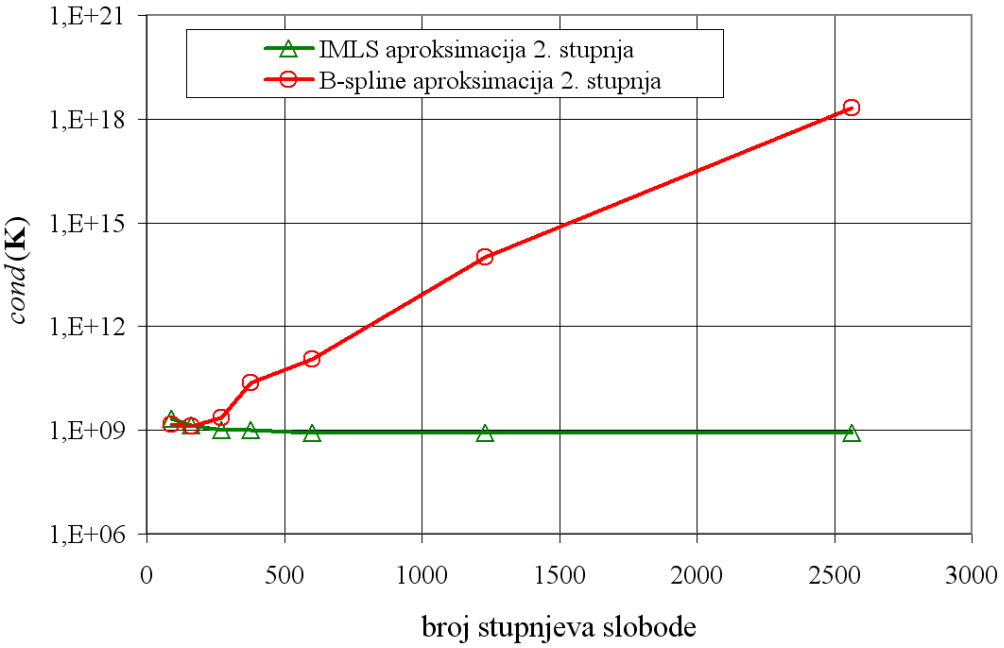
Slika 79. Konvergencija progiba u točki $x = 10,\ y = 0,5$ za ploču sa slike 77



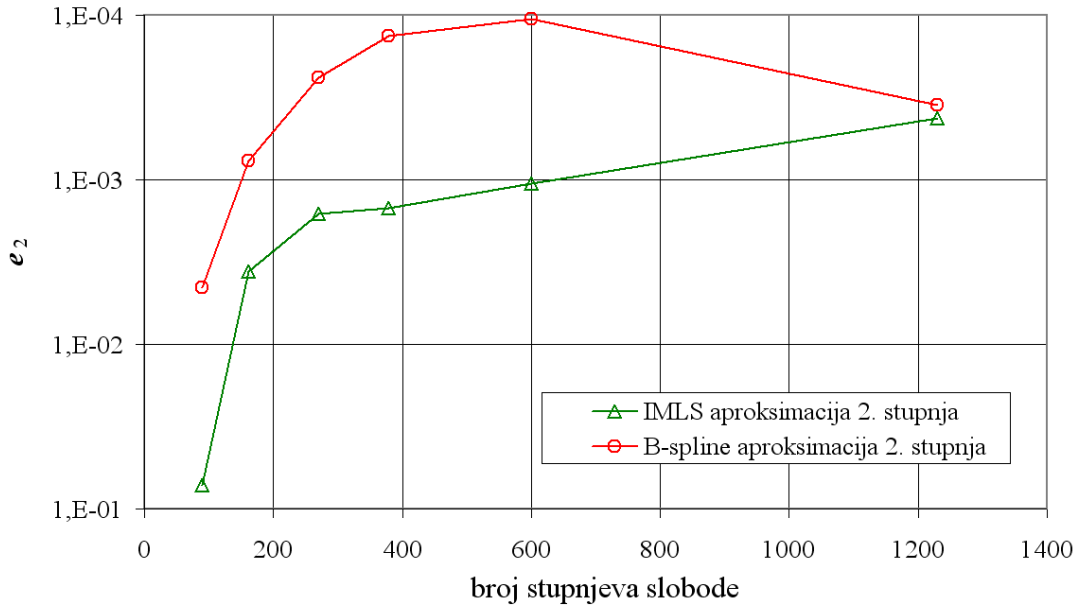
Slika 80. Utjecaj broja stupnjeva slobode i odnosa duljine stranica prema debljini na uvjetovanost matrice krutosti za ploču prema slici 77

U dijagramu na slici 80 u legendi su prikazani različiti odnosi duljine dulje stranice ploče na slici 77 prema debljini. Tako npr. 0,01 *IMLS* znači rezultat analize *IMLS*

aproksimacijskom funkcijom u formulaciji opisanoj u odjeljku 4.3.3 za ploču sa slike 77 koja ima odnos debljine prema duljini 0,01.



Slika 81. Utjecaj broja stupnjeva slobode na uvjetovanost matrice krutosti za ploču sa slike 77

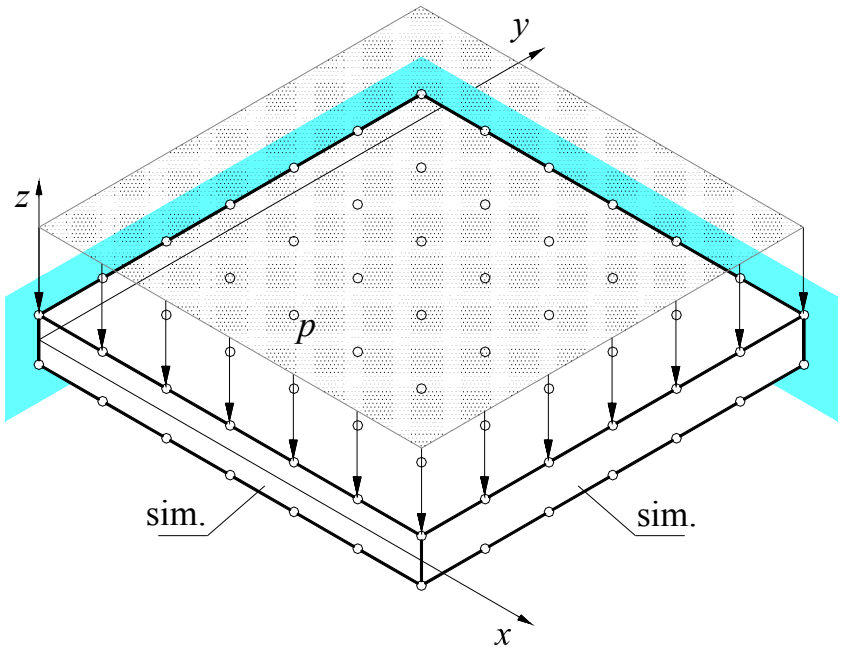


Slika 82. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 77

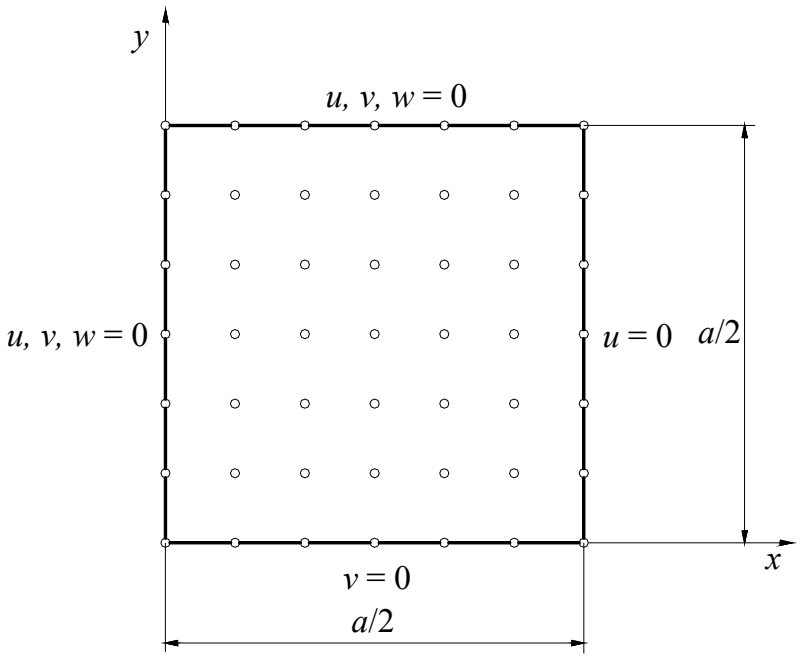
U dijagramima na slikama 79, 81 i 82 analizirana je ploča sa slike 77 za odnos duljine prema debljini 100. Dijagram na slici 78 jasno pokazuje da je uklonjen poprečni posmični *locking*. U tom dijagramu su prikazana rješenja za model s $N = 31 \times 11$ čvorova. Rješenje ne ovisi o odnosu duljine stranice prema debljini ni za teorijski tanku ploču gdje je taj odnos

1000, što se rijetko susreće u praksi. Na dijagramima sa slika 79 i 82 je vidljivo da formulacija s *B-spline* aproksimacijskom funkcijom za manji broj stupnjeva slobode ima veću točnost, što je u skladu s rezultatima prikazanim za dvodimenzijske probleme u poglavlju 3. U dijagramima na slikama 80 i 81 vidi se loša uvjetovanost matrice krutosti za *B-spline* aproksimaciju za relativno mali broj parova čvorova. Bitno je za napomenuti da je formulacija s *B-spline* aproksimacijom izkonvergirala. Daljnjim povećanjem broja čvorova zbog loše uvjetovanosti je rješenje sve lošije.

Od formulacije opisane u odjeljku 4.3.3 se očekuje postojanje debljinskog *lockinga* koji nije vezan za odnos debljine prema duljini ploče. Drugi numerički primjer kojim će biti ispitano postojanje debljinskog *lockinga* je tanka kvadratna ploča, odnosa duljine stranice prema debljini $l/h = 100$ što spada u područje tankih ploča. Vrijednost Poissonovog fakora je odabrana $\nu = 0,3$. Za slučaj uklještene ploče na svim stranicama optrećene jednolikim raspodjeljenim opterećenjem dostupno je analitičko rješenje [48]. Takva ploča, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, je prikazana na slici 84. Za tu ploču debljina je jednaka u svim analiziranim primjerima i iznosi jedan. Materijalne konstante su: $E = 200\,000$, $\nu = 0,3$ a opterećenje $p = 0,001$.

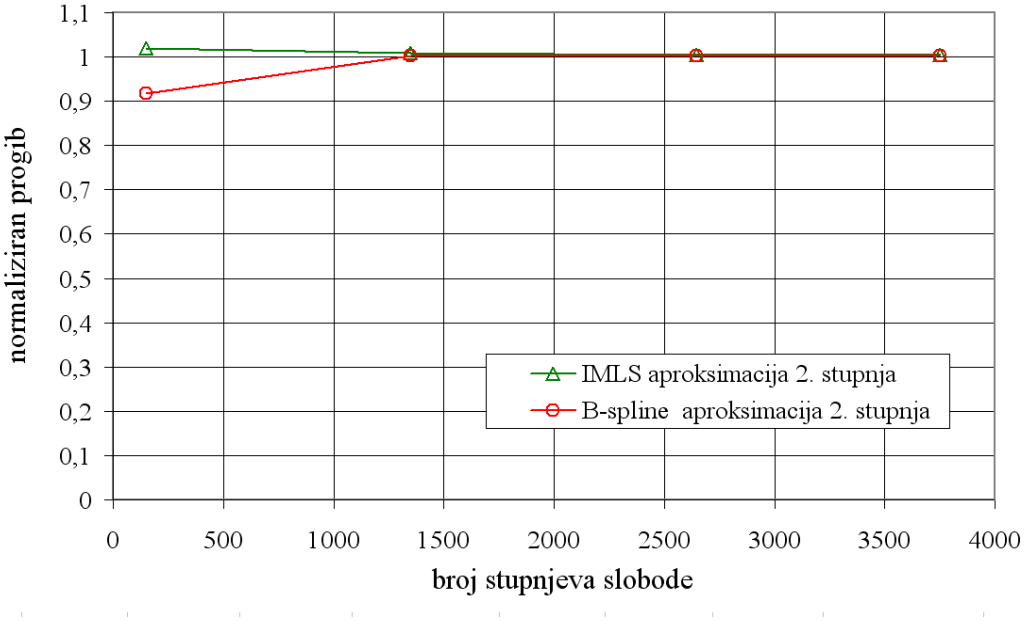


Slika 83. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploče uklještene po svim stranicama

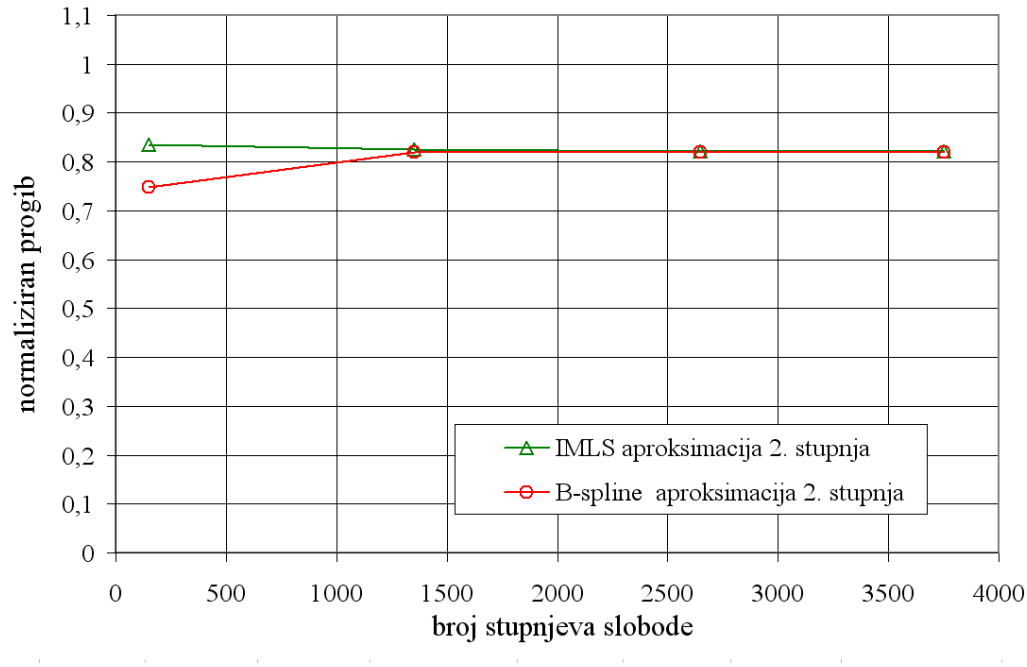


Slika 84. Pogled u ravnini O*xy* kvadratne ploče sa slike 83

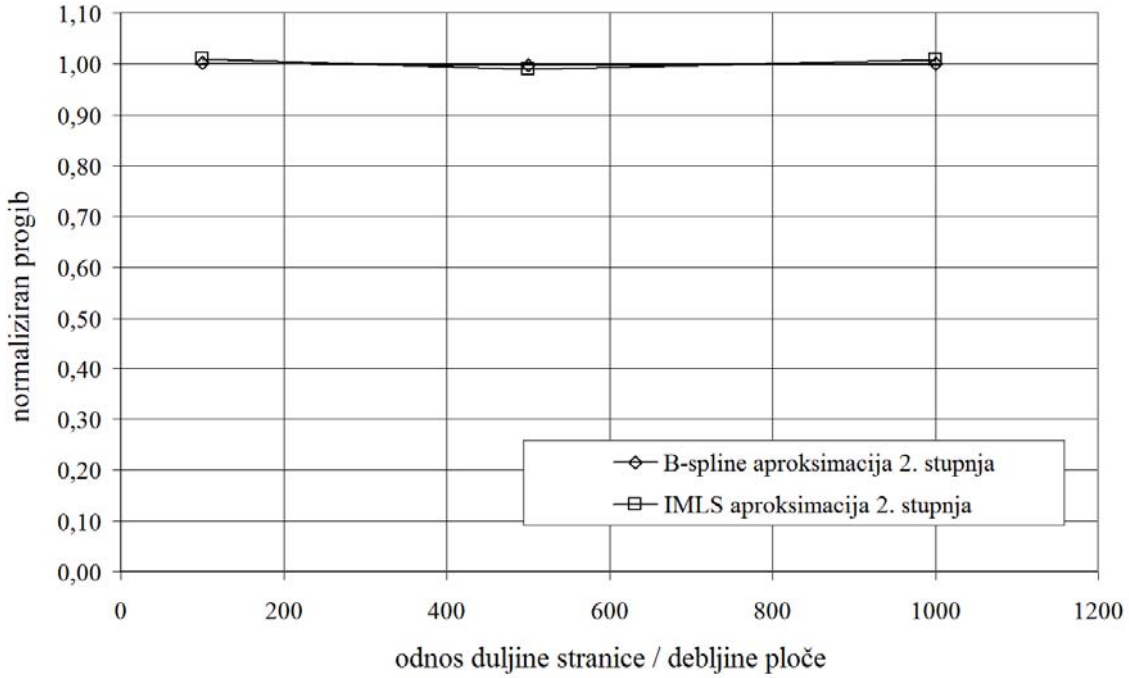
Ploča prema slici 84 analizirana je prema formulaciji prikazanoj u odjeljku 4.3.3. Primjenjene su *IMLS* (2.40) i *B-spline* (2.65) aproksimacijske funkcije. Ovdje se ne primjenjuje *PPIM* apoksimacijka funkcija jer je u poglavlju 3 pokazano da daje slične rezultate kao i *IMLS* aproksimacijska funkcija. Rezultati analiza prikazani su u obliku dijagrama u kojima je prikazan normaliziran progib u sredini ploče, izračunat uprosječavanjem vrijednosti progiba za gornji i donji čvor te podijeljen s analitičkom vrijednošću.



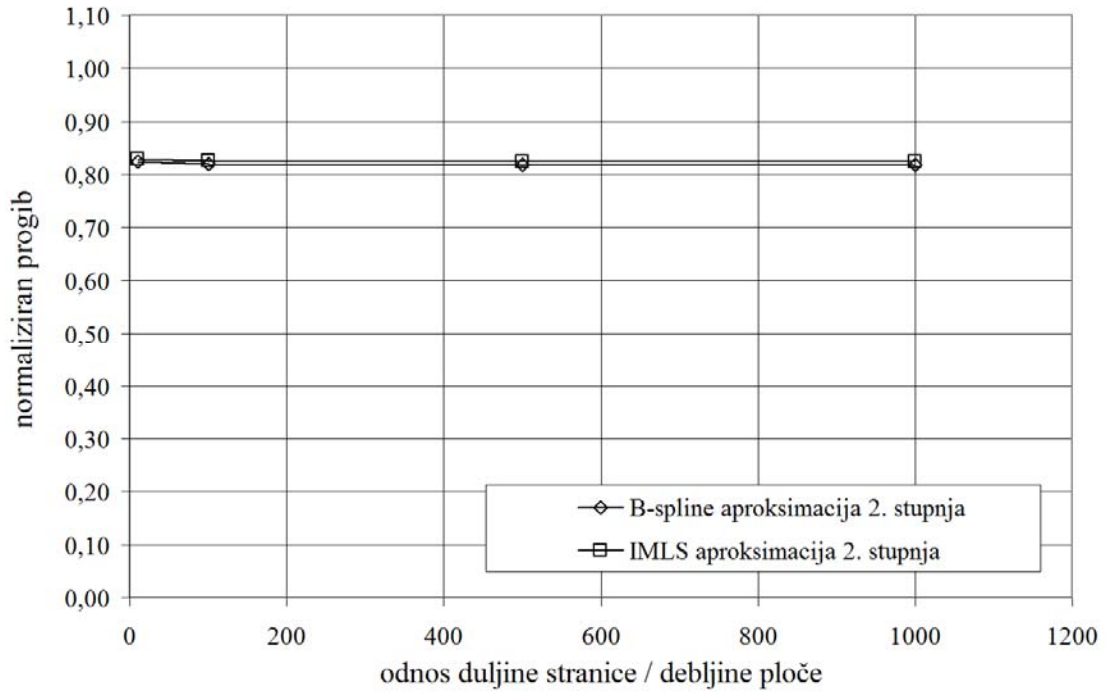
Slika 85. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0,\ z = 0$ sa $\nu = 0$ za ploču sa slike 84



Slika 86. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0,\ z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 84



Slika 87. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0$ za ploču sa slike 84



Slika 88. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču prema slici 84

Na slici 85 prikazana je konvergencija progiba na sredini ploče sa slike 84 za vrijednost Poissonovog faktora $\nu = 0$. Na slici 87 prikazan je utjecaj odnosa duljine stranice prema debljini ploče na progib za vrijednost Poissonovog faktora $\nu = 0$ da bi se pokazalo

nepostojanje poprečnog posmičnog *lockinga*. Na slici 86 prikazana je konvergencija progiba na sredini ploče sa slike 84 za vrijednost Poissonovog faktora $\nu = 0,3$. Na slici 88 prikazan je utjecaj odnosa duljine stranice prema debljini ploče na progib za vrijednost Poissonovog faktora $\nu = 0,3$ da bi se pokazalo postojanje debljinskog *lockinga.* Na slikama 85 i 86 prikazani su rezultati za ploču sa slike 84 kojoj je odnos duljine stranica prema debljini 100. Rezultati prikazani na slikama 87 i 88 dobiveni su analizom modela s $N = 21 \times 21$ čvorova.

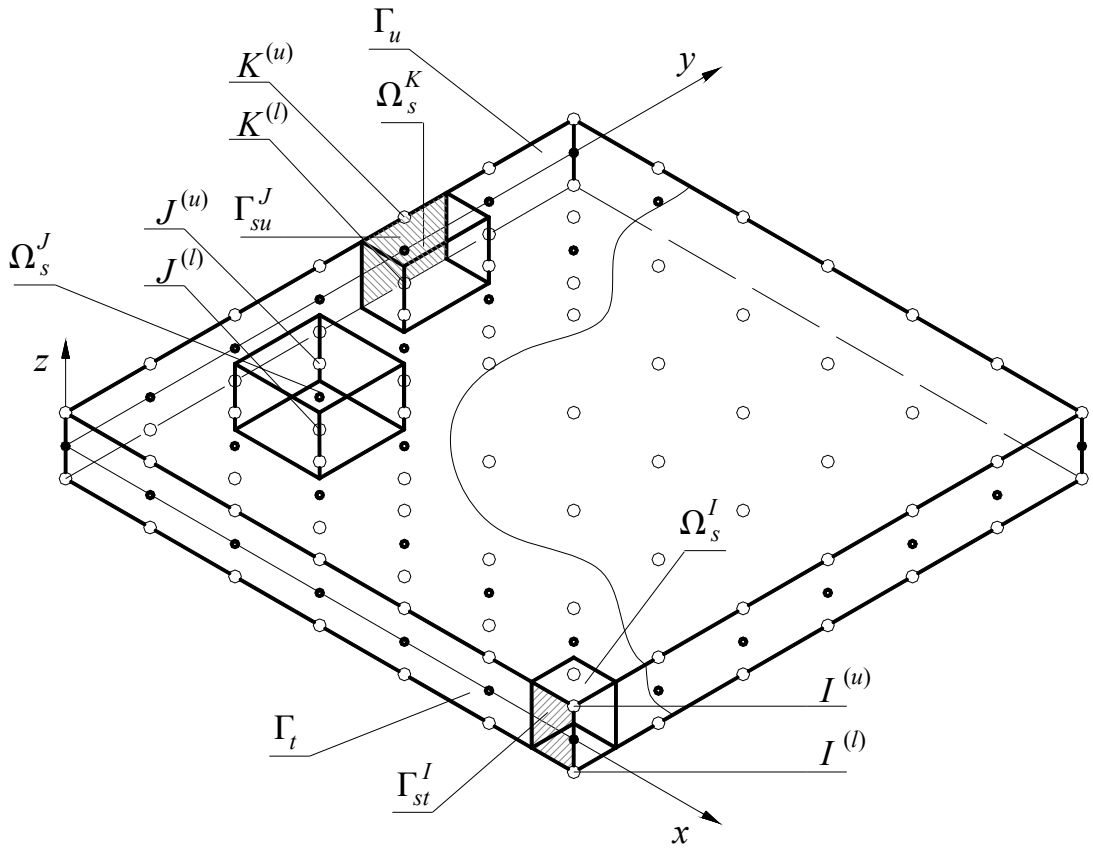
4.3.4. Formulacija s kvadratičnom raspodjelom pomaka po debljini

Kako je u prethodnom odjeljku pokazano na numeričkim primjerima, poprečni posmični *locking* je uspješno izbjegnut primjenom aproksimacije naprezanja. Ostaje postojanje debljinskog *lockinga*. Taj se problem može uspješno riješiti aproksimacijom kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka *w* po debljini ploče koja dalje daje mogućnost opisivanja linearne raspodjele poprečne duljinske komponente deformacije ε_z što je nužan uvjet za izbjegavanje debljinskog *lockinga*. U ovom radu su primijenjena dva načina opisivanja kvadratične raspodjele poprečne komponente pomaka, tzv. hijerarhijska kvadratična raspodjela [49], [50] i „klasična“ kvadratična raspodjela. U hijerarhijskoj kvadratičnoj raspodjeli postoji sklarani koeficijent koji je raspodijeljen po zakonu parabole po debljini ploče i nema utjecaja na raspodjelu poprečne komponente pomaka na vanjskim plohama. Čvorne vrijednosti na vanjskim plohama raspodjeljene su linearno po debljini. U „klasičnoj“ kvadratičnoj raspodjeli sve tri čvorne vrijednosti imaju funkcije oblika istog stupnja.

Postojanje tri podatka za opisivanje parabole podrazumijeva treći čvor po debljini kojemu je pridružen treći podatak samo za poprečnu komponentu pomaka po debljini. Stoga je potrebno uvesti i dodatnu jednadžbu za izračunavanje toga dodatnog podatka. Dodatna jednadžba je odabrana kolokacijska jednadžba ravnoteže u pravcu osi z.

Ploča je diskretizirana čvorovima na gornjoj, donjoj i srednjoj plohi, kako je prikazano na slici 89. Čvorovi na gornjoj plohi dobivaju gornji indeks *u* (*upper*) a čvorovi na donjoj plohi *l* (*lower*). Dodatni čvor na srednjoj plohi ima oznaku (0). Tri čvora koji imaju iste koordinate u srednjoj ravnini čine skup čvorova. Svakom skupu čvorova je pridruženo lokalno područje integracije, *local subdomain*, po kojem se vrši integriranje slabog oblika uvjeta ravnoteže. Ta su područja jednostavnog oblika, u ovom radu su odabrani

paralelopipedi, pravokutne baze u srednjoj ravnini. Svaki čvor odnosno par čvorova može imati drugačije lokalno područje integracije. Lokalna područja su prikazana na slici 89.



Slika 89. Diskretizacija ploče s 3 čvora po debljini

Čvorovi na gornjoj i donjoj plohi imaju po tri stupnja slobode, translacijske komponente u smjeru Kartezijevih koordinatnih osi x, y i z, a označene su u, v i w,

$$\begin{aligned} u &= u\left(x, y, z\right), \\ v &= v\left(x, y, z\right), \\ w &= w\left(x, y, z\right). \end{aligned} \tag{4.92}$$

Čvor na srednjoj plohi ima samo jedan parametar i to za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu je to skalarni parametar λ a za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu je to komponenta pomaka na pravcu osi z, $w^{(0)I}$. Svaki skup čvorova ima sedam komponenata pomaka i to su za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu

$$\hat{\mathbf{v}}^I = \left[u^{(l)I} \quad v^{(l)I} \quad w^{(l)I} \quad u^{(u)I} \quad v^{(u)I} \quad w^{(u)I} \quad \lambda^I \right]^T \tag{4.93}$$

a za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu

$$\hat{\mathbf{v}}^I = \left[u^{(l)I} \quad v^{(l)I} \quad w^{(l)I} \quad w^{(0)I} \quad u^{(u)I} \quad v^{(u)I} \quad w^{(u)I} \right]^T. \tag{4.94}$$

Poprečne posmične komponente tenzora naprezanja su pretpostavljene konstantne dok su ostale linearno raspodijeljene po debljini prema

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x\left(x,y,z\right); \\ \sigma_y &= \sigma_y\left(x,y,z\right); \\ \sigma_z &= \sigma_z\left(x,y,z\right); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}\left(x,y,z\right); \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}\left(x,y\right); \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}\left(x,y\right). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Svaki skup čvorova ima deset komponenata naprezanja, opisanih prema

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \left[\sigma_x^{(l)I} \quad \sigma_y^{(l)I} \quad \sigma_z^{(l)I} \quad \tau_{xy}^{(l)I} \quad \tau_{yz}^{(0)I} \quad \tau_{zx}^{(0)I} \quad \sigma_x^{(u)I} \quad \sigma_y^{(u)I} \quad \sigma_z^{(u)I} \quad \tau_{xy}^{(u)I} \right]^T. \tag{4.96}$$

U ovoj metodi koristi se ista testna funkcija kao i u prethodnoj, opisanoj u odjeljku 4.3.3. U srednjoj ravnini koristi se Heaviside funkcija dok se po debljini koriste dvije funkcije prema (4.9), tj.(4.10). Jednadžbe ravnoteže su u simboličkom obliku izvedene u odjeljku 4.2, opisane u (4.18).

Dodatna kolokacijska jednadžba ravnoteže u smjeru osi z u srednjem čvoru je oblika

$$\sigma_{3j,j}\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right) + f_3\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right) = 0, \tag{4.97}$$

odnosno raspisana uz uvođenje inženjerskih oznaka komponenata naprezanja, ta je jednadžba u obliku

$$\tau_{xz,x}\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right) + \tau_{yz,y}\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right) + \sigma_{z,z}\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right) = -f_z\left(\mathbf{x}^{(0)I}\right). \tag{4.98}$$

4.3.4.1. Diskretizacija

U ovoj mješovitoj formulaciji aproksimirane su zasebno komponente pomaka $\mathbf{u} = \left[u \quad v \quad w\right]^T$ i komponente naprezanja $\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\right]^T$ istim aproksimacijskim funkcijama koje su umnožak funkcija u srednjoj ravnini opisanih u odjeljku 2.4 i polinoma po koordinatnoj osi *z*. Komponente pomaka su aproksimirane na način

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(u^{(l)I} N^{(l)}(z) + u^{(u)I} N^{(u)}(z)\right), \\
v(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(v^{(l)I} N^{(l)}(z) + v^{(u)I} N^{(u)}(z)\right), \\
w(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\, w(z),
\end{aligned}
\tag{4.99}
$$

gdje je progib $w(\mathbf{x})$ aproksimiran po debljini na dva načina: u hijerarhijskoj kvadratičnoj raspodjeli je

$$
w(\mathbf{x}) = w^{(l)I} N^{(l)}(z) + w^{(u)I} N^{(u)}(z) + \lambda^I N^{(0)}(z), \tag{4.100}
$$

gdje su funkcije oblika po debljini

$$
\begin{aligned}
N^{(l)}(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{h}, \\
N^{(u)}(z) &= \frac{1}{2} + \frac{z}{h}, \\
N^{(0)}(z) &= \frac{1}{2} - 2\left(\frac{z}{h}\right)^2
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

i u „klasičnoj“ kvadratičnoj raspodjeli

$$
w(\mathbf{x}) = w^{(l)I} N^{(l)}(z) + w^{(0)I} N^{(0)}(z) + w^{(u)I} N^{(u)}(z), \tag{4.102}
$$

gdje su funkcije oblika po debljini

$$
\begin{aligned}
N^{(l)}(z) &= 2\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{z}{h}, \\
N^{(0)}(z) &= -4\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 1, \\
N^{(u)}(z) &= 2\left(\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{z}{h}.
\end{aligned}
\tag{4.103}
$$

Komponente naprezanja su aproksimirane na sljedeći način

$$\begin{aligned}
\sigma_x(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_x^{(l)I} N^{\sigma(l)}(z) + \sigma_x^{(u)I} N^{\sigma(u)}(z)\right),\\
\sigma_y(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_y^{(l)I} N^{\sigma(l)}(z) + \sigma_y^{(u)I} N^{\sigma(u)}(z)\right),\\
\sigma_z(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\sigma_z^{(l)I} N^{\sigma(l)}(z) + \sigma_z^{(u)I} N^{\sigma(u)}(z)\right),\\
\tau_{xy}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{xy}^{(l)I} N^{\sigma(l)}(z) + \tau_{xy}^{(u)I} N^{\sigma(u)}(z)\right),\\
\tau_{yz}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{yz}^{(0)I}\right),\\
\tau_{zx}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{n} \phi_I(x,y)\left(\tau_{zx}^{(0)I}\right).
\end{aligned} \tag{4.104}$$

gdje su funkcije oblika po debljini

$$\begin{aligned}
N^{\sigma(l)}(z) &= \frac{1}{2} - \frac{z}{h},\\
N^{\sigma(u)}(z) &= \frac{1}{2} + \frac{z}{h}.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Matrično se aproksimacija pomaka (4.61) prikazuje

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x})\,\hat{\mathbf{v}}^I \tag{4.106}$$

s matricom funkcija oblika $\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x})$ za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu

$$\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y)\begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 & 0\\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & N^{(0)}(z) \end{bmatrix} \tag{4.107}$$

i za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu

$$\boldsymbol{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y)\begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0\\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0\\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & N^{(0)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) \end{bmatrix}. \tag{4.108}$$

Aproksimacija pomaka za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu se može zapisati koristeći (4.106) i (4.107) kao

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_u} \phi_I(x,y) \begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & N^{(0)}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(l)I} \\ v^{(l)I} \\ w^{(l)I} \\ u^{(u)I} \\ v^{(u)I} \\ w^{(u)I} \\ \lambda^I \end{bmatrix}$$

. (4.109)

a u slučaju „klasične“ kvadratične raspodjele je koristeći (4.106) i (4.108) u obliku

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{n_u} \phi_I(x,y) \begin{bmatrix} N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}(z) & N^{(0)}(z) & 0 & 0 & N^{(u)}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(l)I} \\ v^{(l)I} \\ w^{(l)I} \\ w^{(0)I} \\ u^{(u)I} \\ v^{(u)I} \\ w^{(u)I} \end{bmatrix}$$

(4.110)

U relaciji (4.106) $\hat{\mathbf{v}}^I$ je vektor čvornih pomaka definiran za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu u (4.93) a za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu u (4.94). Analogno aproksimacija naprezanja je simbolički zapisana

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}^I . \tag{4.111}$$

s matricom funkcija oblika za naprezanja $\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I$ definiranu u obliku

$$\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I(\mathbf{x}) = \phi_I(x,y)$$

$$\begin{bmatrix} N^{\sigma(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{\sigma(u)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^{\sigma(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{\sigma(u)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{\sigma(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{\sigma(u)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^{\sigma(l)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N^{\sigma(u)}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. (4.112)

i $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I$ je čvorni vektor nepoznanica određen prema (4.96).

Jednadžbe koje slijede iz integracije slabog oblika uvjeta ravnoteže po lokalnom području integracije su u simboličkom zapisu formalno iste kao i one u formulaciji s linearnom raspodjelom poprečne komponente pomaka po debljini opisanoj u odjeljku 4.3.3

$$\begin{aligned}
&\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(1)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(1)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma,\\
&\sum_{I=1}^{n}\left[\int_{L_s}\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}\nabla\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{su}}\mathbf{v}^{(2)}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I\,\mathbf{N}\,\mathrm{d}\Gamma\right]\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=-\int_{\Gamma_{st}}\mathbf{v}^{(2)}\overline{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma.
\end{aligned}\tag{4.113}$$

Diskretizirana kolokacijska jednadžba za srednji čvor uz zanemarivanje volumenske sile f_z je simbolički zapisana

$$\sum_{I=1}^{n}\mathbf{D}_k{}^{cI}\left(\mathbf{x}^J\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I=\mathbf{0}.\tag{4.114}$$

U relaciji (4.114) $\mathbf{D}_k{}^{cJ}\left(\mathbf{x}^I\right)$ je matrica diferencijalnog operatora

$$\mathbf{D}_k{}^{cJ}\left(\mathbf{x}^I\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \phi_J\left(x^I,y^I\right)N_{,z}{}^{\sigma(l)} & 0 & \phi_{J,y}\left(x^I,y^I\right) & \phi_{J,x}\left(x^I,y^I\right) & 0 & 0 & \phi_J\left(x^I,y^I\right)N_{,z}{}^{\sigma(u)} & 0\end{bmatrix}\tag{4.115}$$

U sklapanju jednadžbi, tj. smještanju članova u matricu $\mathbf{K}_1{}^I$ analogno (4.75), ovisno o raspodjeli poprečne komponente pomaka dodaje se diskretizirana kolokacijska jednadžba ravnoteže (4.114) u sedmi redak $\mathbf{K}_1{}^I$ u hijerarhijskoj kvadratičnoj raspodjeli a u „klasičnoj“ kvadratičnoj raspodjeli u četvrti redak $\mathbf{K}_1{}^I$.

Da bi se sustav jednadžbi zatvorio potrebno je uvesti dodatne jednadžbe analogno onima od (4.77) do (4.86). Za slučaj hijerarhijske kvadratične raspodjele čvorne komponente deformacija su

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I=\begin{bmatrix}\varepsilon_x{}^{(l)I} & \varepsilon_y{}^{(l)I} & \varepsilon_z{}^{(l)I} & \gamma_{xy}{}^{(l)I} & \gamma_{yz}{}^{(0)I} & \gamma_{zx}{}^{(0)I} & \varepsilon_x{}^{(u)I} & \varepsilon_y{}^{(u)I} & \varepsilon_z{}^{(u)I} & \gamma_{xy}{}^{(l)I}\end{bmatrix}^T.\tag{4.116}$$

Simblički zapisane, deformacije u čvorovima (4.116) se opisuju čvornim komponentama pomaka na sljedeći način

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I=\sum_{J=1}^{n}\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)\hat{\mathbf{v}}^J,\tag{4.117}$$

gdje je $\mathbf{D}_k{}^{(\varepsilon)}$ matrica kinematičkog diferencijalnog operatora

$$\mathbf{D}_k^{(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2}\partial_y & 0 & \frac{1}{2}\partial_z & \frac{1}{2}\partial_y \\ \frac{1}{2}\partial_z & 0 & \frac{1}{2}\partial_x & \frac{1}{2}\partial_z & 0 & \frac{1}{2}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.118}$$

Matrica funkcija oblika $\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right)$ je za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right) = \phi_J\left(x^I, y^I\right)$$

$$\begin{bmatrix} N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & N^{(0)}\left(z^{(l)I}\right) \\ N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & N^{(0)}\left(z^{(u)I}\right) \end{bmatrix}, \tag{4.119}$$

gdje su funkcije oblika po debljini ploče $N^{(l)}$, $N^{(u)}$ i $N^{(0)}$ opisane u (4.101). Za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu je matrica funkcija

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_J\left(\mathbf{x}^I\right) = \phi_J\left(x^I, y^I\right)$$

$$\begin{bmatrix} N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(l)I}\right) & N^{(0)}\left(z^{(l)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(l)I}\right) \\ N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 \\ 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 \\ 0 & 0 & N^{(l)}\left(z^{(u)I}\right) & N^{(0)}\left(z^{(u)I}\right) & 0 & 0 & N^{(u)}\left(z^{(u)I}\right) \end{bmatrix} \tag{4.120}$$

gdje su funkcije oblika po debljini ploče $N^{(l)}$, $N^{(0)}$ i $N^{(u)}$ opisane u (4.103).

Jednadžbe koje povezuju komponente pomaka i naprezanja se analogno (4.86) zapisuju simbolički

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^I = \tilde{\mathbf{D}} \sum_{J=1}^{n} \mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right) \hat{\mathbf{v}}^J \,. \tag{4.121}$$

Matrica $\mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right)$ u (4.121) predstavlja umnožak matrice kinematičkog diferencijalnog operatora (4.118) i matrice funkcija oblika koja je za hijerarhijsku kvadratičnu raspodjelu određena u (4.119) a za „klasičnu“ kvadratičnu raspodjelu u (4.120). U relacijama (4.121) matrica $\tilde{\mathbf{D}}$ je jednaka

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} . \tag{4.122}$$

Uvrštavanjem komponenata naprezanja opisanih komponentama pomaka prikaznih u (4.121) u jednadžbe (4.113), dobiva se sustav jednadžbi s čvornim pomacima kao nepoznanicama

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^{n} \left[\int_{L_s} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathbf{N} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} \nabla \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathbf{N} \, \mathrm{d}\Gamma \right] \tilde{\mathbf{D}} \sum_{J=1}^{n} \mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right) \hat{\mathbf{v}}^J = -\int_{\Gamma_{st}} \mathbf{v}^{(1)} \overline{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma, \\ &\sum_{I=1}^{n} \left[\int_{L_s} \mathbf{v}^{(2)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathbf{N} \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega_s} \nabla \mathbf{v}^{(2)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{v}^{(2)} \boldsymbol{\Psi}^{\sigma}{}_I \, \mathbf{N} \, \mathrm{d}\Gamma \right] \tilde{\mathbf{D}} \sum_{J=1}^{n} \mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right) \hat{\mathbf{v}}^J = -\int_{\Gamma_{st}} \mathbf{v}^{(2)} \overline{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Komponente naprezanja se u diskretiziranim kolokacijskim jednadžbama ravnoteže na isti način opisuju čvornim pomacima prema

$$\sum_{I=1}^{n} \mathbf{D}_k{}^{cI}\left(\mathbf{x}^J\right) \tilde{\mathbf{D}} \sum_{J=1}^{n} \mathbf{B}_{kJ}^{(\varepsilon)}\left(\mathbf{x}^I\right) \hat{\mathbf{v}}^J = \mathbf{0} \,. \tag{4.124}$$

Uvrštavanjem kolokacijskih jednadžbi (4.124) u sustav (4.123), dobiva se konačni sustav jednadžbi u obliku

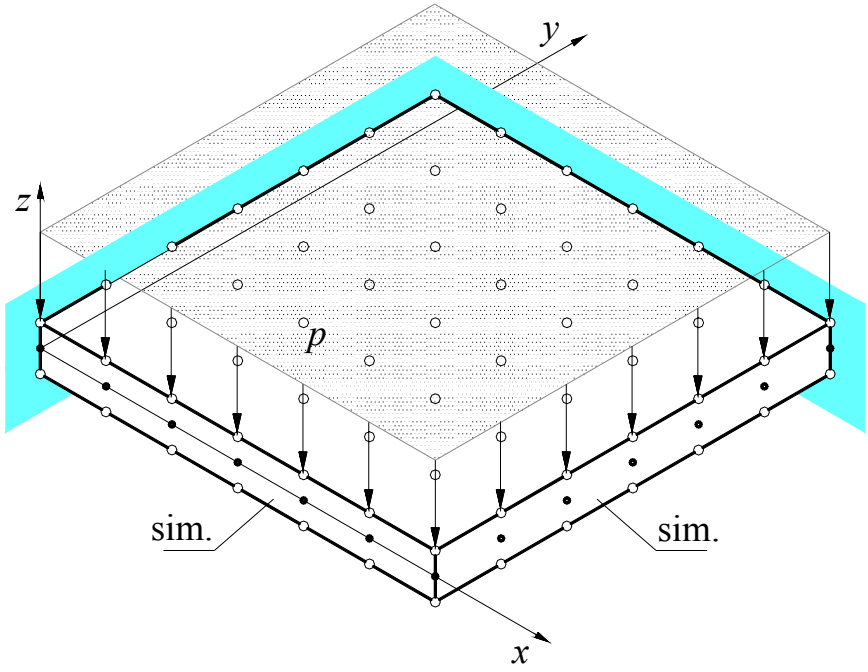
$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}\,. \tag{4.125}$$

U sustav jedandžbi se konačno uvode rubni uvjeti pomaka analogno postupku opisanom u jednadžbama (3.38) do (3.41). Rubni uvjeti sila su zadovoljeni u integralnom smislu.

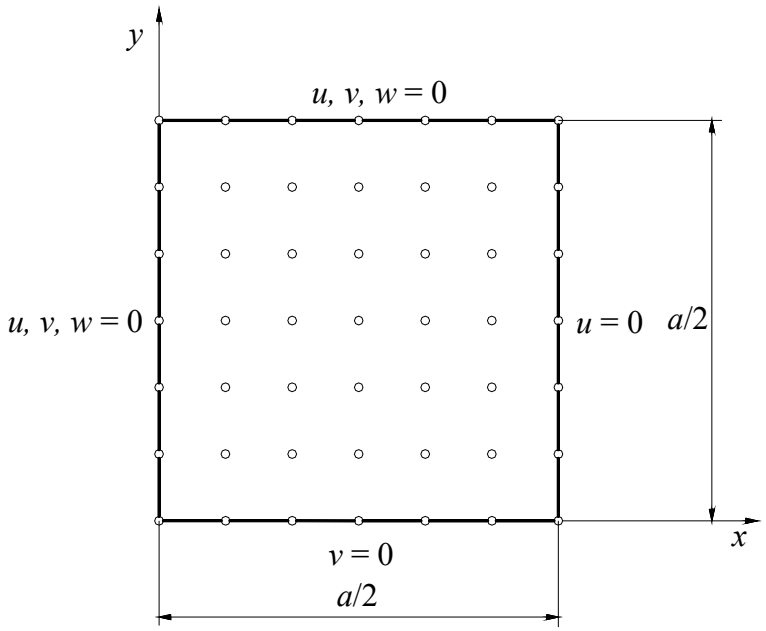
4.3.4.2. Numerički primjeri

Na sljedećim numeričkim primjerima provjerene su pretpostavke o uklanjanju debljinskog i poprečnog posmičnog *lockinga* u formulaciji prikazanoj u ovom odjeljku. U tu svrhu su analizirani numerički primjeri s analitičkim rješenjem [48]. Za analizirane primjere izračunata je konvergencija poprečne komponente pomaka čvora na sredini ploče i za neke primjere diskretna L_2 norma greške progiba. Analizirane su kvadratne ploče uklještene po svim stranicama te kvadratne ploče jednostavno oslonjene po svim stranicama. Osjetljivost na poprečni posmični *locking* provjerena je na pločama odnosa duljine stranica i debljine ploče do vrijednosti $l/h = 1000$. Uklanjanje debljinskog *lockinga* provjereno je analizom savijanja ploča s Poissonovim faktorom $\nu = 0,3$.

Prvi primjer je ploča s uklještenim svim stranicama, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, prikazana na slikama 90 i 91. Debljina ploče je u svim primjerima jednaka jedinici. Opterećena je jednolikim raspodjeljenim opterećenjem $p = a^4 \cdot 10^{-11}$. Materijalne konstante su: $E = 200\,000$, $\nu = 0,3$.

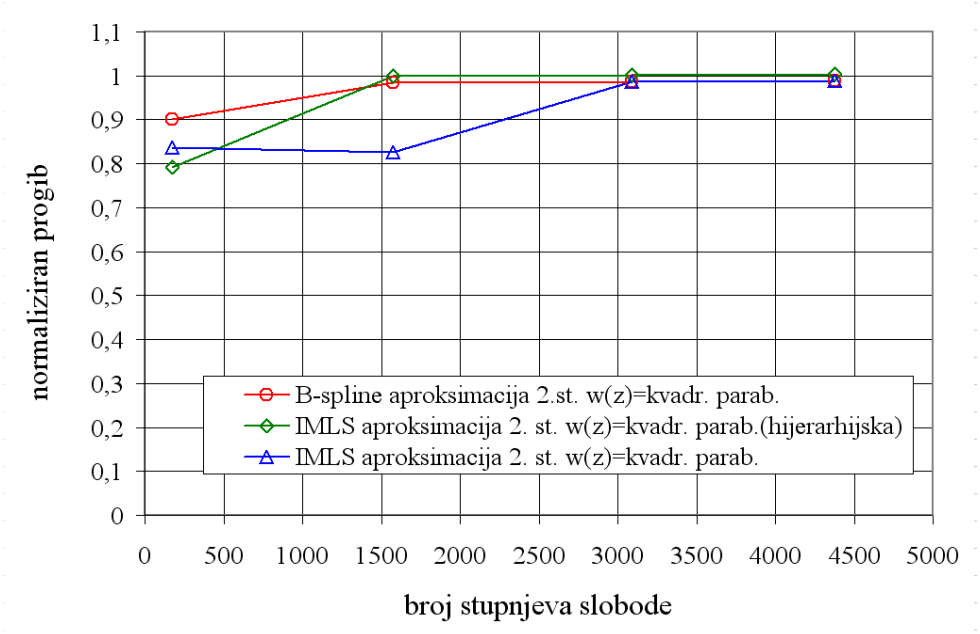


Slika 90. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploča uklještene po svim stranicama



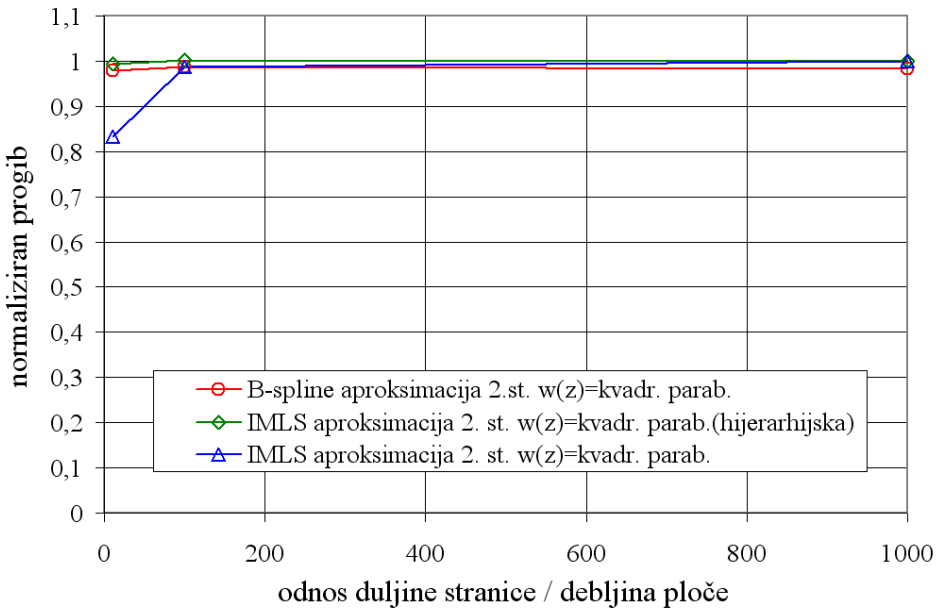
Slika 91. Pogled u ravnini Oxy ploče sa slike 90

Ploča sa slobodno oslonjenim svim stranicama, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, opterećena jednoliko raspodijeljenim opterećenjem, prikazana je na slikama 95 i 96.

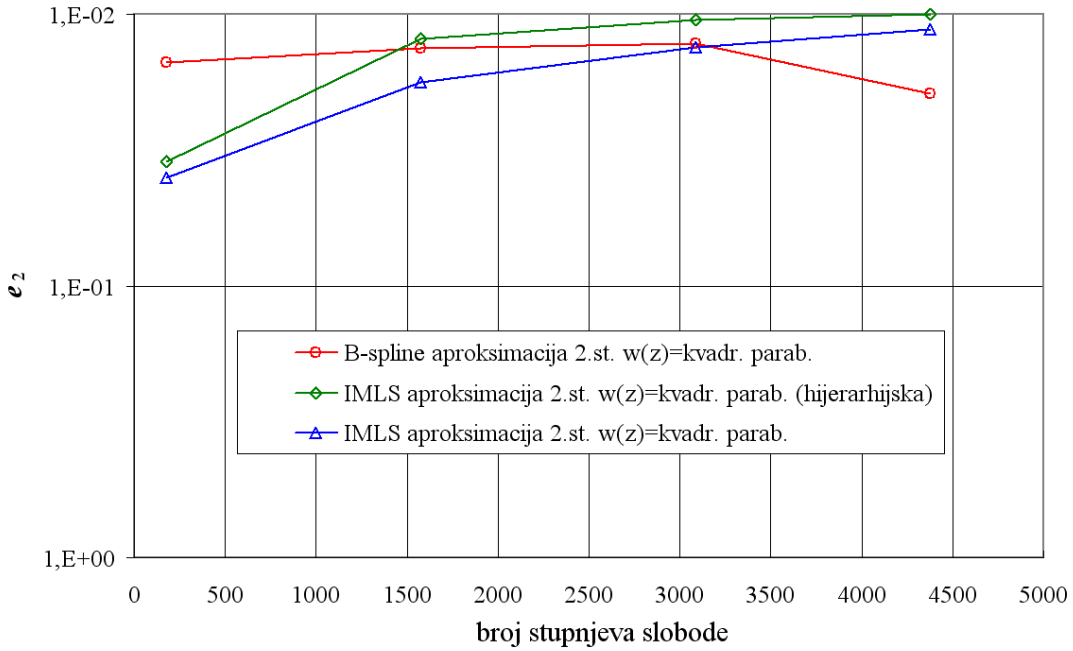


Slika 92. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 91

Na slici 92 prikazana je konvergencija pomaka na sredini ploče sa slike 91, tj. na koordinati $x = a/2, y = 0$ za ploču odnosa duljine stranice i debljine $l/h = 100$.



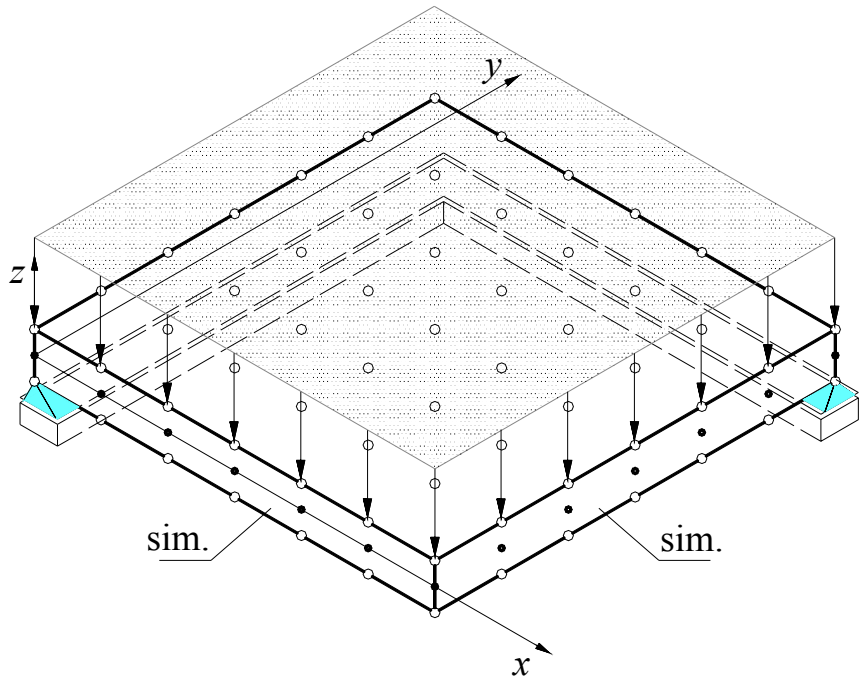
Slika 93. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 91



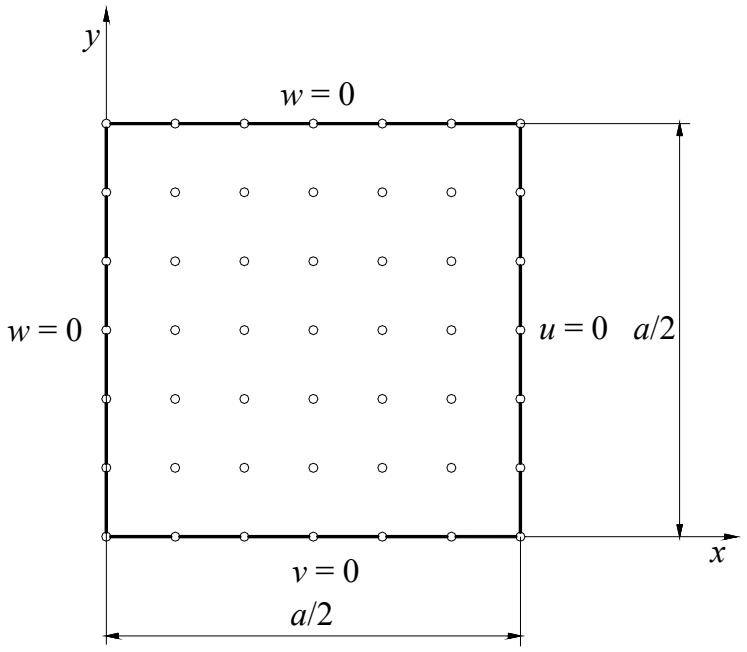
Slika 94. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 91

U dijagramu na slici 93 vidi se da je izbjegnut poprečni posmični *locking* a ujedno i debljinski *locking*. Rezultati u tom dijagramu su dobiveni za model s $N = 21 \times 21$ čvorova.

Drugi primjer je ploča sa slobodno oslonjenim svim stranicama, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, prikazana na slikama 95 i 96. Materijalne konstante su: $E = 200\,000,\ \nu = 0,3$.

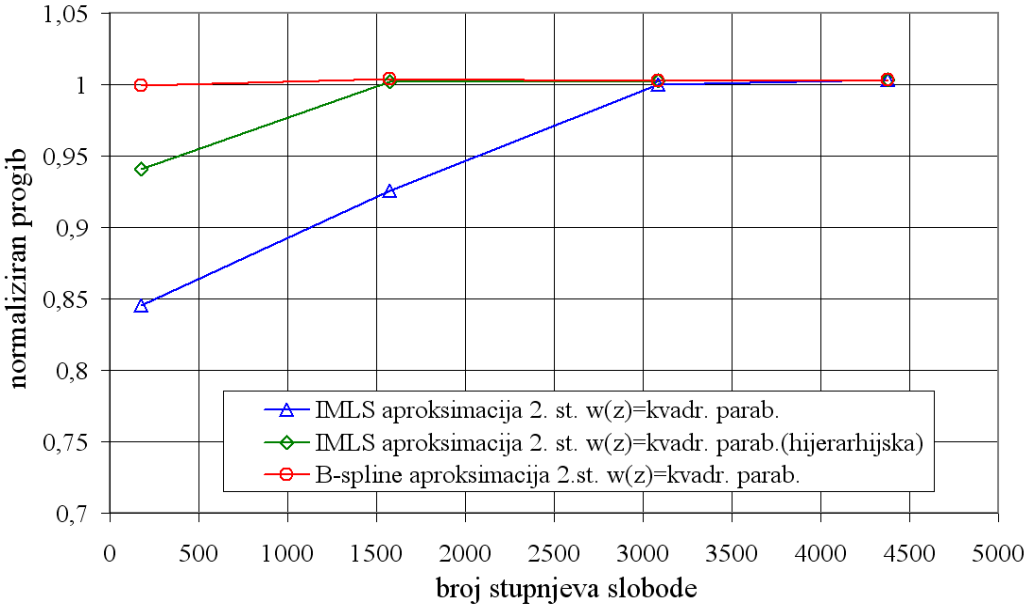


Slika 95. Izometrijski prikaz četvrtine kvadratne ploče slobodno oslonjene po svim stranicama

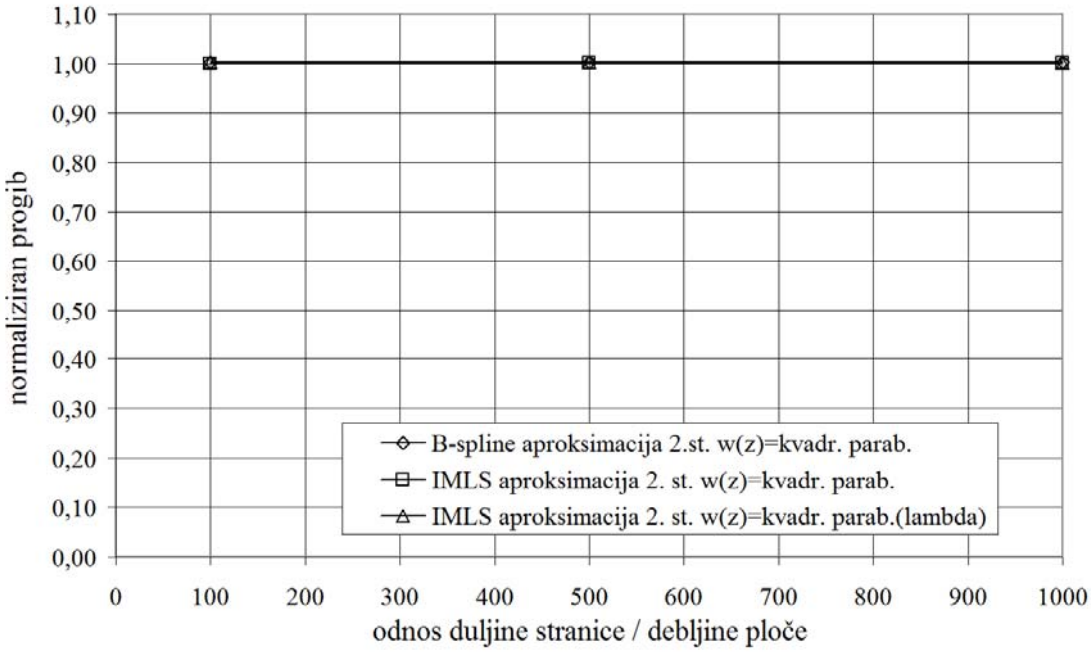


Slika 96. Pogled u ravnini O*xy* ploče sa slike 95

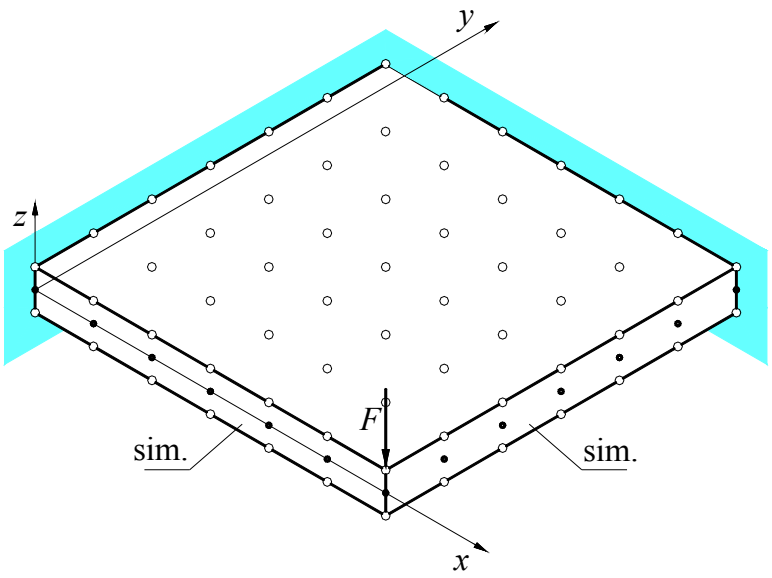
Ploča sa uklještenim svim stranicama, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, opterećena koncentrirnim opterećenjem u sredini, prikazana je na slici 99.



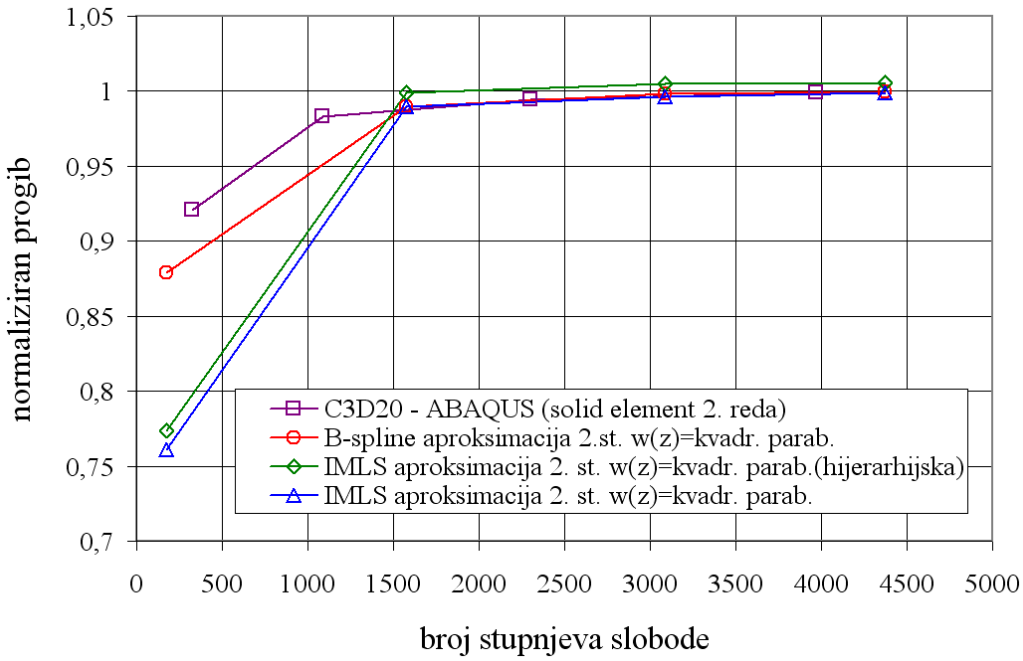
Slika 97. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 96



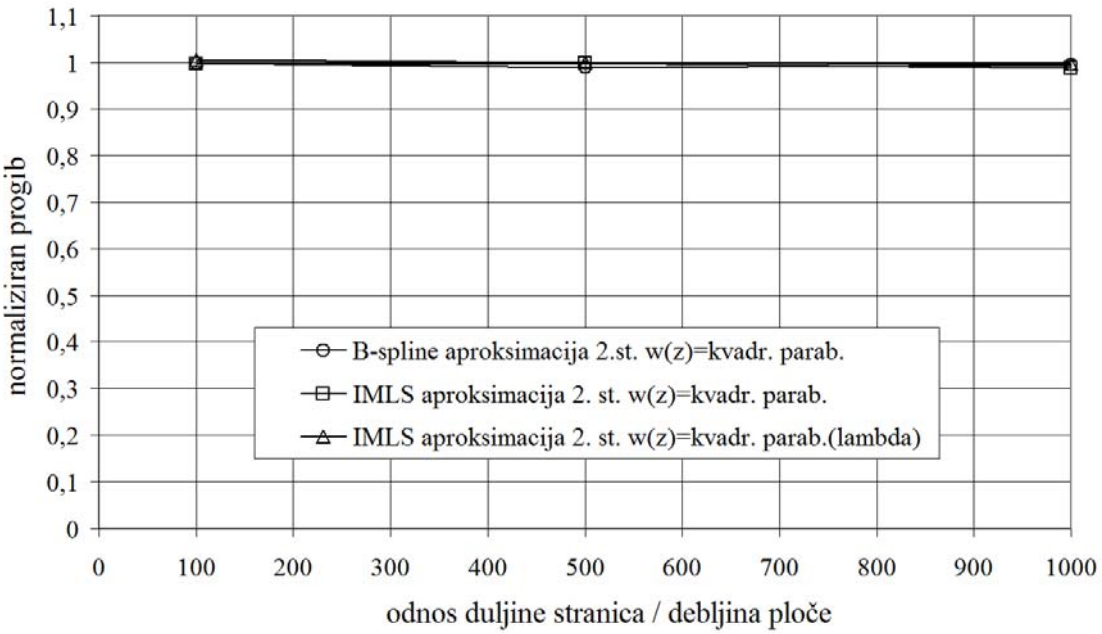
Slika 98. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 96



Slika 99. Četvrtina kvadratne ploče uklještene na svim stranicama silom

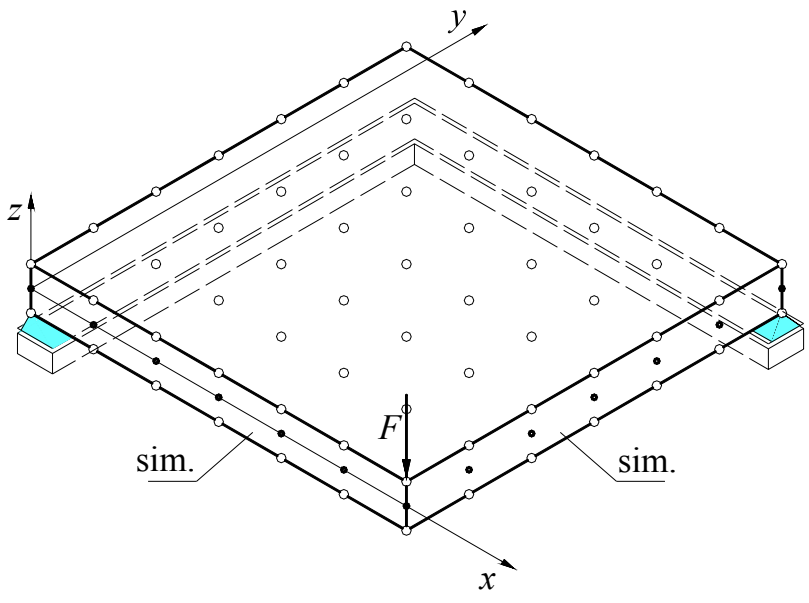


Slika 100. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ **sa** $\nu = 0,3$ **za ploču sa slike 99**

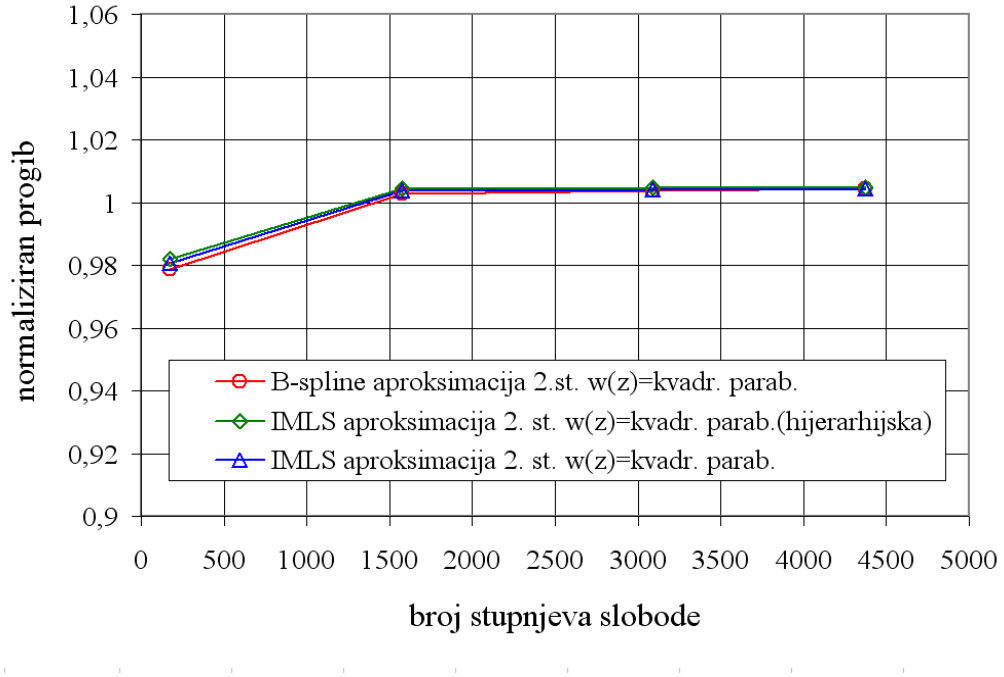


Slika 101. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 99

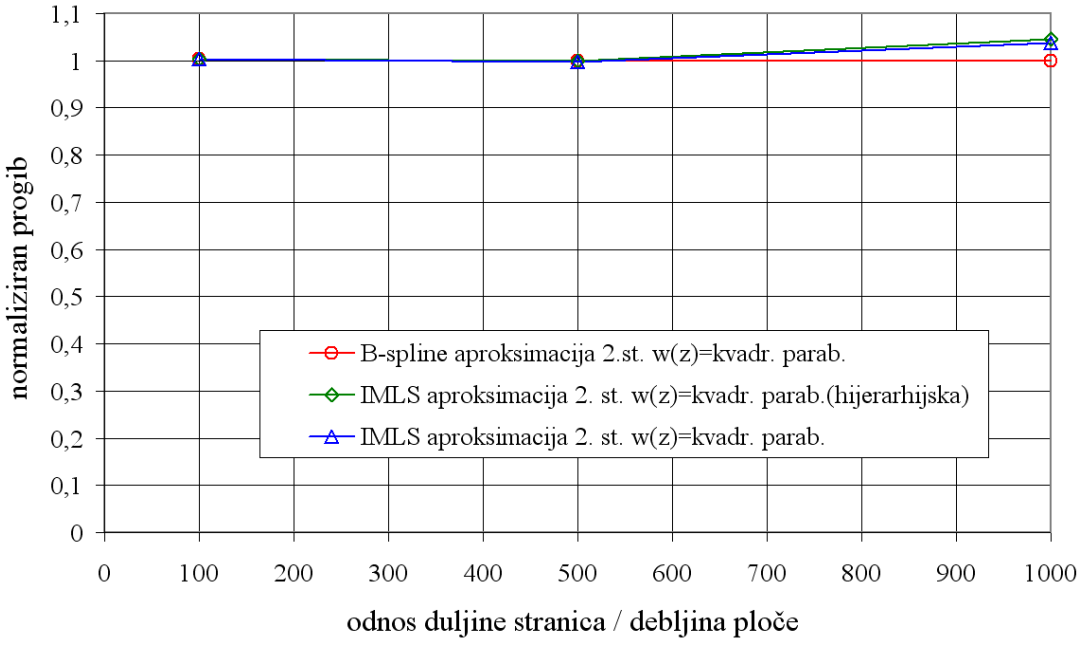
Ploča sa slobodno oslonjenim svim stranicama, koja je modelirana kao jedna četvrtina zbog dvostruke simetrije, opterećena koncentrirnim opterećenjem u sredini, prikazana je na slici 102.



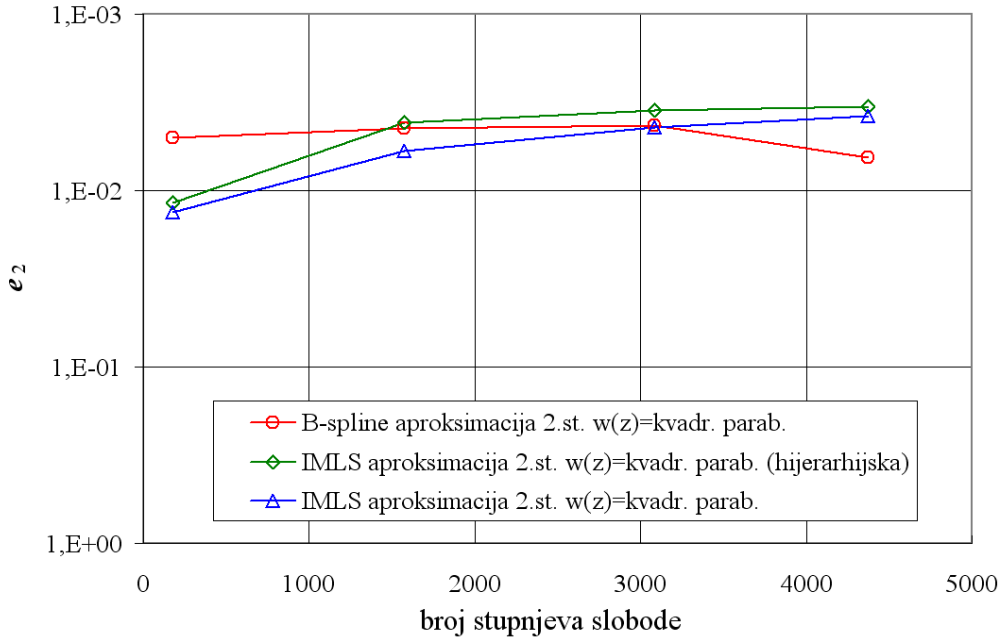
Slika 102. Četvrtina kvadratne ploče slobodno oslonjene na svim stranicama opterećene silom



Slika 103. Konvergencija progiba u točki $x = a/2, y = 0, z = 0$ sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 102



Slika 104. Utjecaj odnosa duljine stranica prema debljini sa $\nu = 0,3$ za ploču sa slike 102



Slika 105. Diskretna e_2 norma za ploču sa slike 102

Na dijagramima konvergencije prikazane na slikama 92, 97, 100 i 103 vidljivo je da je metoda izkonvergirala za sve ploče koje su analizirane. Isto tako je vidljivo na dijagramima ovisnosti normaliziranog progiba za različite odnose duljina stranica prema debljini prikazanim na slikama 93, 98, 101 i 104 da ne postoji poprečni posmični *locking*. Za dostupna analitička rješenja za progib u svim točkama ploče izračunata je diskretna e_2 norma greške pomaka i prikazana na slikama 94 i 105. Na svim primjerima u ovom odjeljku vidljivo je da za manji broj stupnjeva slobode *B-spline* aproksimacija daje bolja rješenja od *IMLS* aproksimacije. U dijagramu na slici 100 vidljivo je da su rješenja dobivena metodom konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS bolja od rješenja prikazanom bezmrežnom metodom. Odabrani elementi su elementi za analizu trodimenzijskih problema 2. reda koji imaju sve tri komponente pomaka aproksimirane po zakonu kvadratne parabole što daje kompliciraniju raspodjelu naprezanja po debljini.

5. ZAKLJUČAK

U radu su prikazane nove bezmrežne mješovite formulacije za analizu problema savijanja ploča i za analizu dvodimenzijskih problema ravninskog stanja naprezanja. Formulacije se temelje na bezmrežnoj metodi lokalnog težinskog ostatka (reziduala) (*Meshless Local Petrov-Galerkin – MLPG*). U toj metodi izbor težinske funkcije u integralu težinskog ostatka je slobodan u odnosu na funkciju pretpostavljenog rješenja. Težinska funkcija je definirana na lokalnom području po kojem se provodi integriranje slabog oblika uvjeta ravnoteže. Težinska funkcija korištena u ovom radu odabrana je kao umnožak Heavisideove funkcije u srednjoj ravnini i po debljini linearnih polinoma. Za svako lokalno područje integracije koriste se dvije težinske funkcije što rezultira s dva skupa jednadžbi, u svakom skupu po tri jednadžbe.

Za funkcije pretpostavljenog rješenja korištene su aproksimacijske funkcije koje se temelje na prikazu funkcije kao linearne kombinacije koeficijenata i baznih funkcija. Korištene su aproksimaciskje funkcije interpolacijskih pomičnih najmanjih kvadarata (*Interpolating Moving Least Squares – IMLS*), *B-spline*, *Point Interpolation Method* (*PIM*) s polinomnom (*PPIM*) i radijalnom (*RPIM*) bazom. Sve primjenjene aproksimacijske funkcije su izvedene s interpolacijskim svojstvom u svim čvorovima diskretizacije. U *IMLS* aproksimacijskoj funkciji to je postignuto na dva načina; množenjem „klasične“ težinske funkcije regulariziranom težinskom funkcijom i kinematičkom transformacijom, tj. nametanjem uvjeta interpolacije. Za ostale aproksimacijske funkcije provedeno je nametanje uvjeta interpolacije u svim točkama diskretizacije pa su izvedene funkcije egzaktno interpolacijske. U *IMLS*-u s regulariziranom težinskom funkcijom postignuto je praktično interpolacijsko svojstvo (uz relativnu grešku interpolacije od oko 10^{-5}).

U formulacijama su aproksimirane zasebno komponente pomaka i naprezanja istim funkcijama. U formulacijama temeljenim na slabom obliku uvjeta ravnoteže prvi sustav jednadžbi dobiven je integriranjem uvjeta ravnoteže. U slučaju formulacija temeljenim na jakom obliku uvjeta ravnoteže jednadžbe ravnoteže se rješavaju egzaktno u čvorovima diskretizacije. Diskretizacija jednadžbi ravnoteže provedena je čvornim komponentama naprezanja. U tom sustavu u slučaju slabog oblika uvedeni su rubni uvjeti sila u integralnom smislu, dok su u slučaju jakog oblika zadovoljeni egzaktno. Taj je sustav pododređen jer je više komponenata naprezanja od jednadžbi ravnoteže. Da bi se zatvorio sustav jednadžbi

uvode se kolokacijske jednadžbe koje povezuju komponente pomaka i komponente naprezanja. To povezivanje je temeljeno na diskretizaciji čvornim komponentama pomaka konstitutivnih relacija u kombinaciji s kinematičkim relacijama. Uvrštavanjem komponenata naprezanja opisanih komponentama pomaka u prvi sustav jednadžbi dobiva se zatvoreni sustav u koji se uvode rubni uvjeti pomaka. Ovi se rubni uvjeti uvode izravno analogno metodi konačnih elemenata jer su aproksimacijske funkcije interpolacijske.

U poglavlju 3 prikazana je mješovita formulacija za probleme ravninskog stanja naprezanja. Opisane su tri različite mješovite formulacije temeljene na slabom obliku uvjeta ravnoteže, jakom obliku (kolokacija) i tzv. slabom-jakom obliku uvjeta ravnoteže. Zadovoljavanje rubnih uvjeta sila provodi se u ovom radu u kolokacijskim metodama pomoću kaznene metode. Veličina kaznenog parametra značajno utječe na točnost rješenja.

Razvijene formulacije za probleme savijanja ploča nemaju debljinski (*thickenss*) i poprečni posmični (*shear*) *locking*. Na primjeru savijanja tanke ploče provjereno je postojanje debljniskog *lockinga.* Utvrđeno je da je debljinski *locking* uklonjen ako je u mješovitoj formulaciji pretpostavljena kvadratična raspodjela poprečne komponente pomaka. Na primjerima savijanja tankih ploča potvrđeno je ispravnost pretpostavki o uklanjanju ovog problema. Poprečni posmični *locking* uklonjen je aproksimacijom komponenata naprezanja. Aproksimiranjem naprezanja smanjen je zahtjev na kontinuitet funkcije i implicitno su uključeni rubni uvjeti sila. Iz rezultata dobivenih predloženom metodom za analizu ploča vidljivo je da je primjenom *B-spline* aproksimacijske funkcije postignuta veća točnost za relativno mali broj čvorova nego primjenom *IMLS* aproksimacijske funkcije. Metoda s *B-spline* funkcijom konvergira za sve analizirane primjere.

B-spline aproksimacijska funkcija korištena u srednjoj ravnini pokazuje neke povoljne karatkeristike. Baza je lokalnog karaktera, polinomna je što je povoljno u mnogim problemima mehanike čvrstih tijela, ima svojstvo reprodukcije i konzistentna je, jednostavna za izračun i posjeduje globalni kontinuitet stupnja C^{p-1} gdje je p stupanj funkcije. Rješenja dobivena ovom aproksimacijskom funckijom su za vrlo mali broj čvorova diskretizacije vrlo dobra. Zamijećena je i jedna nepovoljna karakteristika nametanja uvjeta interpolacije na *B-spline* aproksimacijsku funkciju. U matrici krutosti se javlja problem loše uvjetovanosti za relativno mali broj čvorova. Matrica uvjeta interpolacije nije loše uvjetovana. Vjerojatno loša uvjetovanost potječe od „pomicanja“ utjecaja baznih funkcija koje su definirane lokalno što proizlazi iz inverzne matrice uvjeta interpolacije. To pomicanje znači da u odrednicu funkcije

oblika nekog čvora ulaze bazne funkcije koje nisu definirne na području samog čvora pa time neki čvor ima „proširen“ utjecaj u odnosu onoga kako je definirana *B-spline* baza.

Daljnje smjernice istraživanja su u smjeru primjene *B-spline* aproksimacijske funkcije bez nametanja uvjeta interpolacije u cilju izbjegavanja loše uvjetovanosti matrice krutosti. To znači i drugačiji način zadovoljavanja rubnih uvjeta sila i pomaka jer aproksimacijska funkcija neće imati svojstvo interpolacije čvornih vrijednosti. Cilj je i proširiti primjenu ovih metoda s *B-spline* aproksimacijskom funkcijom na analizu ljuskastih konstrukcija. Jedna od značajnih prednosti bezmrežnih metoda pred metodom konačnih elemenata je u slučaju velikih deformacija, tj. velikih promjena u geometriji. Stoga je jedno od zanimljivih područja razvoja ovih metoda i geometrijska i materijalna nelinearnost, velike elasto-plastične deformacije, itd.

LITERATURA

[1] Lancaster, P., Salkauskas, K., Curve and surface fitting: an introduction, Academic Press Ltd, London, 1986.
[2] Liu, G. R., Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method, CRC Press, Boca Raton, 2003.
[3] Liu, W., Jun, S., Zhang, Y., Reproducing kernel particle method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20, 1081-1106, 1995.
[4] Babuska, I., Melenk, J.M., The Partition of Unity method, Int. J. Num. Meth. Engrg, 40, 727-758, 1997.
[5] Atluri, S. N., Zhu, T., A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, Computational Mechanics, 22, 117-127, 1998.
[6] Most, T., A natural neighbour-based moving least-squares approach for the element-free Galerkin method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71, 224-252, 2007.
[7] Atluri, S. N., The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretizations, Tech Sceince Press, Forsyth, 2004.
[8] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., A Finite Point Method in Computational Mechanics. Application to Convective Transport and Fluid Flow, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 3839-3866, 1996.
[9] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu,L., Element-Free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 229-256, 1994.
[10] Tiago, C., Leitao, M. A., Eliminating shear-locking in meshless methods: a critical overview and a new framework for structural theories, Advances in Meshfree Techniques, Springer, Dordrecht, 2007, 123-145.
[11] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R.L., The Finite Element Method, McGraw-Hill book company, London, 1991.
[12] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R.L., Too, J.M., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, 2, 275-290, 1971.
[13] Hughes, T. J. R., Tezduyar, T.E., Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four–node isoparametric element, Journal of Applied Mechanics, 48, 3, 587-596, 1981.
[14] Simo, J. C., Rifai, M.S., A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29, 8, 1595-1638, 1990.
[15] Prathap, G., The Finite Element Method in Structural Mechanics: Principles and Practice of Design of Field–Consistent Elements for Structural and Solid Mechanics, Solid Mechanics and Its Applications, Vol, 24, Kluwer Academic Publishers, 1993.
[16] Beissel, S., Belytschko, T., Nodal integration of the element–free Galerkin method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 1-4, 49-74, 1996.
[17] Donning, B. M., Liu, W.K., Meshless methods for shear–deformable beams and plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 152, 1-2, 47-71, 1998.
[18] Tiago, C., Leitao, V., On the procedures to eliminate shear locking in meshless methods, ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods 2005, Lisbon, 2005

[19] Cho, J. Y., Atluri, S.N., Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov–Galerking method, based on a locking–free formulation, Enginnering Computations, 18, 1-2, 215-240, 2001.
[20] Long, S., Atluri, S.N., A Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solving the Bending Problem of a Thin Plate, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 3, 1, 53-63, 2002.
[21] Qian, L. F., Batra, R.C., Chen, L.M., Elastostatic Deformations of a Thick Plate by using a Higher-Order Shear and Normal DeformableP late Theory and two Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Methods, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 4, 1, 161-175, 2003.
[22] Li, Q., Sorić, J., Jarak, T., Atluri, S.N., A locking-free meshless local Petrov-Galerkin formulation for thick and thin plates, Journal of Computational Physics, 208, 116-133, 2005.
[23] Sorić, J., Li, Q., Jarak, T., Atluri, S.N., Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation for Analysis of Thick Plates, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 6, 4, 349-357, 2004.
[24] Jarak, T., Sorić, J., Analysis of rectangular square plates by the mixed Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 38, 3, 231-261, 2008.
[25] Sorić, J., Jarak, T., Mixed meshless formulation for analysis of shell-like structures, Computional Methods in Applied Mechnical Engineering, 199, 1153-1164, 2010.
[26] Atluri, S. N., Liu,H. T., Han, Z. D., Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)Mixed CollocationMethod For Elasticity Problems, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 14, 3, 141-152, 2006.
[27] Piegl, L., Tiller, W., The NURBS book, Springer, Berlin, 1997.
[28] Rogers, D. F., An introduction to NURBS, With Historical Perspective, Elsevier, San Diego, 2001.
[29] Alfirević, I., Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, Zagreb, 2003.
[30] Liu, G. R., Gu, Y.T., *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. 2005, Springer.
[31] Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T., The Natural Element Method in Solid Mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43, 839-887, 1998.
[32] Liu, G. R., Gu, Y.T., Comparisons of two meshfree local point interpolation methods for structural analyses, Computational Mechanics, 29, 107-121, 2002.
[33] Liu, G. R., Zhang, G.Y., Gu, Y.T., Wang, Y.Y., A meshfree radial point interpolation method (RPIM) for three-dimensional solids, Computational Mechanics, 36, 421-430, 2005.
[34] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
[35] Most, T., Bucher, C., A Moving Least Squares weighting function for the Element-free Galerkin Method which almost fulfills essential boundary conditions, Structural Engineering and Mechanics, 21, 315-332, 2005.
[36] Kee, H. Y., Study of Radial Basis Functions (RBFs) in Mesh-Free Methods, 2004, Department of mechanical engineering National University of Singapore,
[37] Atluri, S. N., Shengping, S., The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 3, 1, 11-51, 2002.
[38] Jecić, S., Semenski, D., Jednadžbe teorije elastičnosti, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.

[39] Sorić, J., Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
[40] Timoshenko, S., Goodier, J.N., Theory of elasticity, McGraw-Hill book compnay, inc., New York, 1951.
[41] ABAQUS, Abaqus Software, 6.9, Dassault Systems Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2009.
[42] Liu, G. R., Gu, Y. T., A meshfree method: meshfree weak–strong (MWS) form method, for 2-D solids, Computational Mechanics, 33, 2-14, 2003.
[43] Alfirević, I., Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1999.
[44] Tonković, Z., Konačni elament za analizu debelih ploča, Magistarski rad, dipl.ing., Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.
[45] Xiao, J. R., Batra, R. C., Gilhooley, D. F., Gillespie Jr, J. W., McCarthy, M. A., Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 4-6, 979-987, 2007.
[46] Jarak, T., Meshless numerical formulation for analysis of shell-like structures, dr.sc., Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.
[47] Rekač, V. G., Manual of the Theory of elasticity, Mir publishers, Moscow, 1977.
[48] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., Theory of plates and shells, McGraw-Hill book company, inc., New York, 1959.
[49] Hauptmann, R., Schweizerhof, K., systematic development of solid-shell element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42, 49-69, 1998.
[50] Hauptmann, R., Structurangepasste geometrisch nichtlineare Finite Elemente fuer Flaechentragwerke, PhD, TH Karlsruhe, Karlsruhe.

ŽIVOTOPIS

Rođen 13. ožujka, 1979. godine u Kutini.

Školovanje

1986-1994,	osnovna škola "Vukomerec", Zagreb
1994-1998,	srednja tehnička škola "Faust Vrančić", Zagreb
1998-2003,	studij strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu
2003,	diplomirao na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, smjer: Konstrukcijski
od 2004,	poslijediplomski studij strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, smjer: Teorija konstrukcija

Zaposlenje

od 2004,	znanstveni novak - asistent na Zavodu za tehničku mehaniku na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

Znanstvena usavršavanja

2005	Mixed Finite Element Technologies, International Centre For Mechanical Sciences (CISM), Udine, Italija
2006	IUTAM School on Biomechanical Modeling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels, International Centre For Mechanical Sciences (CISM), Udine, Italija

Strani jezici

Engleski

Njemački

Članstvo u znanstvenim društvima

Hrvatsko društvo za mehaniku (HDM)

Nagrade i priznanja

2003 Medalja Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu za najbolje studente

Broj objavljenih znanstvenih radova

1	rada u međunarodnim časopisima indeksiranim u CC-u (Current Contents-u)
0	radova objavljeni u časopisima s međunarodnom recenzijom
2	radova u zbornicima radova s međunarodnih znanstvenih skupova
8	radova u zbornicima radova sa znanstvenih skupova

CURRICULUM VITAE

Born on 13 March, 1979 in Kutina.

Education

1986-1994,	primary school "Vukomerec", Zagreb
1994-1998,	grammar school "Faust Vrančić", Zagreb
1998-2003,	studies in Mechanical Engineering at the University of Zagreb
2003,	graduated in Mechanical Engineering at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb
since 2004,	doctoral study in Theory of Structures and Design at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb

Employment

since 2004,	Assistant at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb

Training

2005	Mixed Finite Element Technologies, International Centre For Mechanical Sciences (CISM), Udine, Italy
2006	IUTAM School on Biomechanical Modeling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels, International Centre For Mechanical Sciences (CISM), Udine, Italy

Foreign language

English

German

Memberships

Croatian Society of Mechanics (CSM)

Awards

2003 Medal of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture for the best students (student achievement award), University of Zagreb

Number of scientific publications

1	papers published in CC (Current Contents) journals
0	papers published in other international journals
2	papers published in proceedings of international conferences
8	papers published in proceedings of conferences