Utjecaj nelinearne povratne krutosti na odziv pritegnutih pučinskih konstrukcija

Tomić, Marko

Doctoral thesis / Disertacija

2013

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:627464

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

MARKO TOMIĆ

UTJECAJ NELINEARNE POVRATNE KRUTOSTI NA ODZIV PRITEGNUTIH PUČINSKIH KONSTRUKCIJA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2013.



University of Zagreb

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

MARKO TOMIĆ

INFLUENCE OF NONLINEAR RESTORING STIFFNESS ON RESPONSE OF TETHERED FLOATING STRUCTURES

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2013



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

MARKO TOMIĆ

UTJECAJ NELINEARNE POVRATNE KRUTOSTI NA ODZIV PRITEGNUTIH PUČINSKIH KONSTRUKCIJA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Akademik Ivo Senjanović, professor emeritus

Zagreb, 2013.



University of Zagreb

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
AND NAVAL ARCHITECTURE

MARKO TOMIĆ

INFLUENCE OF NONLINEAR RESTORING STIFFNESS ON RESPONSE OF TETHERED FLOATING STRUCTURES

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Professor Emeritus Ivo Senjanović

Zagreb, 2013

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 629.563.24

Ključne riječi: pritegnuta pučinska platforma (TLP), linearna povratna krutost, nelinearna povratna krutost, spregnuta gibanja, sjedanje platforme, potencijalno strujanje, vremenska domena, Cumminsove jednadžbe

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Brodogradnja

Institucija u kojoj je rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

Mentor rada: Akademik Ivo Senjanović, profesor emeritus

Broj stranica: 168

Broj slika: 90

Broj tablica: 9

Broj bibliografskih jedinica: 63

Datum obrane: 29.05.2013.

Povjerenstvo: Dr. sc. Većeslav Čorić, redoviti profesor, predsjednik

Akademik Ivo Senjanović, professor emeritus, mentor

Dr. sc. Zdravko Virag, redoviti profesor

Dr. sc. Šime Malenica, Bureau Veritas, Pariz

Dr. sc. Željan Lozina, redoviti profesor Sveučilišta u Splitu, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAHVALA

Hvala mentoru doktorskog rada akademiku Ivi Senjanoviću na vremenu i trudu uloženom u mentorstvo i ovog rada i svih znanstvenih problema koje smo istraživali tijekom godina zajedničkog rada na Fakultetu. Rad s Profesorom dojmljivo je iskustvo i velika obveza u budućem istraživačkom radu. Hvala Profesore na znanju i ljudskosti. Ma, na svemu.

Hvala članovima Povjerenstva na vremenu utrošenom u proučavanje doktorskog rada i na mnogim korisnim primjedbama koje su pridonijele njegovoj kvaliteti.

Hvala klasifikacijskom društvu Bureau Veritas iz Pariza koje je omogućilo upotrebu računalnog programa HYDROSTAR pri izradi ovog rada.

Hvala dr. sc. Smiljku Rudanu na numeričkom proračunu primjenom računalnog programa LS_DYNA u poglavlju 6.6.

Hvala dr. sc. Ivanu Ćatipoviću na proračunu odziva potpuno spregnutim dinamičkim modelom u poglavlju 6.7.

Hvala dr. sc. Nevenu Hadžiću na trudu uloženom u izradu slika.

Hvala prijatelju Chyzmi na mnogočemu. Toliko toga sam od tebe naučio.

Hvala Jadranki, Ivanu, Mati, Nikoli i Nevenu na prijateljstvu i pomoći kad god je to bilo potrebno. Hvala vam i na znanju i na kavama. Ljudine.

Hvala znalcima Sanji i Vedranu.

Hvala mojoj Dunji, Sari i Matiji na svom tom vremenu kad nisam bio kod kuće. Više vrijedi jedna minuta vremena provedenog s vama nego svi ti papiri. Sigurno.

U Zagrebu, ožujak 2013.

Marko Tomić

S A D R Ž A J

PREDGOVOR v
SAŽETAK vi
SUMMARY vii
KLJUČNE RIJEČI: viii
POPIS VAŽNIJIH OZNAKA ix
POPIS SLIKA xiii
POPIS TABLICA xvi
1. UVOD 1
1.1. Motivacija i opis problema 1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja 12
1.3. Cilj i hipoteza doktorskog rada 13
1.4. Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada 13
2. LINEARNA POVRATNA KRUTOST 16
2.1. Definicija linearne povratne krutosti 16
2.2. Aksijalna krutost pripona 17
2.3. Hidrostatska krutost (s uključenim utjecajem pripona) 18
2.4. Geometrijska krutost 20
2.5. Matrica linearne povratne krutosti 22
2.6. Matrica masa i transformacija krutosti 22
2.7. Utjecaj rubnih uvjeta na krajevima pripona na geometrijsku krutost 24
3. NELINEARNA POVRATNA KRUTOST 28
3.1. Formulacija krutosti temeljena na ravnoteži sila 28
3.1.1. Gibanja u horizontalnoj ravnini 28
3.1.2. Poniranje 34
3.1.3. Ljuljanje i posrtanje 41
3.1.4. Proizvoljno zaošijanje 42
3.2. Formulacija krutosti temeljena na jednakosti potencijalne energije 47
3.2.1. Proizvoljno zaošijanje 47
3.2.2. Malo zaošijanje 49
3.2.3. Potencijalna energija temeljena na ravnoteži sila 49
4. SPREGA HORIZONTALNIH I VERTIKALNIH STUPNJEVA SLOBODE GIBANJA 52
4.1. Sekantna matrica krutosti 52
4.2. Tangencijalna matrica krutosti 55
5. USPOREDBA IZVEDENE FORMULACIJE NELINEARNE POVRATNE KRUTOSTI S POZNATIM FORMULACIJAMA 57
5.1. Usporedba s tradicionalnom krutošću prema Jainu 57
5.2. Usporedba s krutošću prema Lowu 59
6. NUMERIČKI PRIMJERI 62
6.1. Linearni odziv TLP SPAR plovka plutajuće vjetroturbine 62
6.2. Linearni odziv ISSC TLP-a 65
6.3. Nelinearno zalijetanje ISSC TLP-a 68
6.4. Nelinearno zalijetanje i poniranje ISSC TLP-a 69

6.5. Usporedba nelinearnog odziva ISSC TLP-a određenog korištenjem tradicionalne krutosti i nove formulacije krutosti 73
6.6. Nelinearno zalijetanje i zaošijanje ISSC TLP-a 77
6.7. Usporedba nespregnutog i potpuno spregnutog odziva ISSC TLP-a 83
6.8. Odziv ISSC TLP-a na simulirano okolišno opterećenje 93
6.8.1. Model okolišnog opterećenja 93
6.8.2. Verifikacija memorijskih funkcija 98
6.8.3. Verifikacija linearnog proračuna u vremenskoj domeni 104
6.8.4. Nelinearni proračun u vremenskoj domeni 107
7. ZAKLJUČAK DOKTORSKOG RADA 118
7.1. Zaključna razmatranja i izvorni znanstveni doprinos doktorskog rada 118
7.2. Smjernice za daljnja istraživanja 120
8. LITERATURA 122
ŽIVOTOPIS 126
BIOGRAPHY 127
PRILOG A - Utjecaj elastičnog istezanja pripona na krutost u smjeru zalijetanja A1
PRILOG B - Preslikavanje (linearnih) hidrodinamičkih sila iz frekvencijske u vremensku domenu (Cumminsov pristup) B1
PRILOG C - Sjedanje pritegnute platforme opisano kutovima rotacije C1

PREDGOVOR

Od samih početaka rudarenja ispod morskog dna inženjeri su nastojali osmisliti objekte morske tehnike minimalnog odziva na okolišno opterećenje. Važan projektni uvjet oduvijek je bila i cijena izgradnje, transporta, iskorištavanja i održavanja takvih objekata. S obzirom da se značajna neiskorištena ležišta nafte i zemnog plina nalaze u velikim dubinama mora (>1000 m), objekti koji se strukturalno protežu sve do morskog dna ekonomski su neisplativi te su vrlo rano osnivani plutajući pučinski objekti:

i. poluuronjive platforme (eng. Semi-submersible platforms),
ii. pritegnute pučinske platforme (eng. Tension Leg Platforms),
iii. cilindrične pučinske platforme (eng. SPAR platforms),
iv. pučinski plutajući proizvodni brodovi (eng. Floating Production Storage and Off-loading Ships).

Nedostatak plutajućih pučinskih objekata značajnija su gibanja uslijed primarno valnog i vjetrovnog opterećenja. Objekt na površini mora spojen je s podmorskom bušotinom sustavom proizvodnih podmorskih podizača (eng. marine risers). Uvjeti na spoju proizvodnog podizača s ušćem bušotine nužno zahtijevaju ograničavanje gibanja objekta na površini mora primjenom odgovarajućeg sidrenog sustava.

U novije vrijeme pučinski objekti morske tehnike koriste se i u pretvorbi mehaničke energije vjetra u električnu energiju (plutajuće vjetroturbine) te u proizvodnji hrane uzgojem riba (plutajući kavezi). Značajke tih objekata vrlo su slične onima korištenim u naftnoj tehnologiji te ih treba smatrati dijelom istog skupa.

Pritegnute pučinske platforme objekti su morske tehnike koji svoju primjenu pronalaze u vrlo velikim dubinama mora u podmorskom rudarenju, proizvodnji električne energije pretvorbom energije vjetra te u marikulturi. Osnovne značajke tih objekata gotovo su zanemariva gibanja u vertikalnoj ravnini, odnosno stabilna horizontalna radna površina. Takve objekte nije pouzdano osnivati na temelju prethodnog inženjerskog iskustva, već su potrebni racionalni proračunski modeli kojima se izravno analizira odzive pučinskih objekata na uzbudu valova, vjetra i morskih struja. Pritegnuta pučinska platforma giba se poput obrnutog njihala u vodi, pri čemu se sprega između gibanja u horizontalnoj i vertikalnoj ravnini ostvaruje sidrenim sustavom. Povratna krutost, kao posljedica sidrenog sustava, važan je dio dinamičkog modela i jedan je od uzroka nelinearnosti odziva. U preliminarnoj fazi osnivanja pritegnutih pučinskih platformi važno je na fizikalno dosljedan način uključiti povratnu krutost u jednadžbe dinamičke ravnoteže te je ovaj doktorski rad rezultat nastojanja da se unaprijedi taj dio racionalnog modela dinamike gibanja.

SAŽETAK

Jedan od uzroka nelinearnog dinamičkog odziva pritegnutih pučinskih platformi (eng. TLP - Tension Leg Platforms) je analizirana nelinearna povratna krutost, ovisna o sidrenom sustavu. Uočeni nedostaci tradicionalne formulacije nelinearne povratne krutosti (npr. nefizikalna vrijednost koeficijenata krutosti i izostanak sprege za gibanja u horizontalnoj ravnini) razlog su izvoda nove, fizikalno konzistentne, formulacije. Kao poseban slučaj hidroelastične analize plutajućih tijela prvo je izvedena konzistentna formulacija linearne povratne krutosti sastavljena od konvencionalne (aksijalne) i geometrijske krutosti pripona (element sidrenog sustava) i hidrostatske krutosti tijela. Na temelju linearne povratne krutosti, razmatranjem spregnutog proizvoljnog pomaka TLP-a u horizontalnoj ravnini, konstruirana je nelinearna sekantna povratna krutost. Nelinearna povratna krutost izvedena je na temelju ravnoteže vanjskih i unutrašnjih sila, ali i energijski, na temelju jednakosti potencijalne energije, kako bi se analizirao i takav pristup. Iz sekantne povratne krutosti izvedena je nelinearna tangencijalna povratna krutosti. S obzirom da gibanja u horizontalnoj ravnini uzrokuju sjedanje TLP-a (kao pojavu 2. reda) predloženo je rješenje dvojbe promatrati sjedanje kao dodatni stupanj slobode gibanja ili kao dio poniranja. Takvim pristupom objašnjena je sprega gibanja u vertikalnoj ravnini (poniranje, ljuljanje i posrtanje) s gibanjima u horizontalnoj ravnini (zalijetanje, zanošenje i zaošijanje). Poniranje je analizirano u lokalnom prirodnom koordinatnom sustavu, uvođenjem dodatnog stupnja slobode gibanja, kako bi analiza bila moguća u smjeru glavnih osi krutosti. Takav dinamički sustav reduciran je na uobičajenih šest stupnjeva slobode gibanja bez značajnije numeričke greške. Primjena teorijskih rezultata ilustrirana je jednostavnim numeričkim primjerima (TLP SPAR plutajuća vjetroturbina, ISSC TLP) opisanim sustavima običnih diferencijalnih i integro-diferencijalnih jednadžbi, integriranim u vremenskoj domeni u kojoj su nelinearnosti uključene u jednadžbe dinamičke ravnoteže bez pojednostavljenja.

SUMMARY

Major source of nonlinearities in the dynamic response of Tension Leg Platforms (TLP's) is the nonlinear restoring stiffness, which depends on the applied mooring system. Traditional formulations of nonlinear restoring stiffness exhibit physical inconsistencies (wrongful physical mechanisms of some restoring stiffness components, incorrect or lack of coupling between various DOF's) that constitute a basis for the new formulation. As a first step, linear restoring stiffness is derived from the general theory of hydroelastic response of floating bodies. It consists of conventional and geometric stiffness of tendons (tethers; vertical pretensioned mooring lines) and hydrostatic stiffness of floating body. Nonlinear secant restoring stiffness is than constructed by considering arbitrary coupled displacement of a TLP in the horizontal plane. Two complementary approaches are employed, one based on the equilibrium of internal and external forces, and the second one based on the potential energy balance. Nonlinear tangent restoring stiffness is derived based on the formulated secant restoring stiffness. Different nonlinear restoring mechanisms are consistently modelled. In order to facilitate analysis in the direction of primary stiffness axes heave is analysed in local natural coordinate system by introducing an additional DOF and that dynamic system is than reduced to ordinary 6 DOF. Nature of coupling between the motions in the vertical plane (heave, roll and pitch) and the motions in the horizontal plane (surge, sway and yaw) is further investigated and as a result, problem of incorporating setdown (as a second order effect) in the equations of motion is resolved. Influence of formulated nonlinear restoring stiffness on dynamic response of TLP's is illustrated by relatively simple numerical examples (floating TLP SPAR wind turbine floater, ISSC TLP) integrating the respective equations of motion (systems of ordinary differential and integro-differential equations) in the time domain.

KLJUČNE RIJEČI:

- pritegnuta pučinska platforma (TLP)
- linearna povratna krutost
- nelinearna povratna krutost
- spregnuta gibanja
- sjedanje platforme
- potencijalno strujanje
- vremenska domena
- Cumminsove jednadžbe

KEY WORDS:

- tension leg platform (TLP)
- linear restoring stiffness
- nonlinear restoring stiffness
- coupled motions
- set down
- potential flow
- time domain
- Cummins equations

POPIS VAŽNIJIH OZNAKA

A	- površina poprečnog presjeka
$A_{ij}(\omega)$	- komponenta tenzora dodane (hidrodinamičke) mase
A_k	- projicirana površina *k*-tog elementa
A_p	- površina poprečnog presjeka pripone
A_{jk}^{∞}	- komponenta tenzora dodane (hidrodinamičke) mase za beskonačnu frekvenciju njihanja
A_{WL}^{0}	- površina vodne linije
$B_{ij}(\omega)$	- komponenta tenzora potencijalnog (radijacijskog) prigušenja
C_a	- koeficijent dodane mase pripone
C_d	- koeficijent otpora pripone
C_{DK}	- koeficijent otpora *k*-tog projiciranog elementa
C_{ij}	- element matrice hidrostatske krutosti
C_{ij}^{m}	- element matrice hidrostatske krutosti uslijed gravitacije
C_{ij}^{nh}	- element matrice hidrostatske krutosti uslijed promjene vektora normale i moda
C_{ij}^{p}	- element matrice hidrostatske krutosti uslijed promjene tlaka
$[C]$	- hidrostatska krutost pučinske platforme (s utjecajem pripona)
D	- viskozno prigušenje trupa
D_p	- vanjski promjer pripone
D^{SL}	- ekvivalentno viskozno prigušenje sidrenih linija/podmorskih podizača
E	- modul elastičnosti materijala
f	- frekvencija u Hz
$\tilde{f}$	- normirana frekvencija
$f_i^{(1)}(\omega_k)$	- linearna prijenosna funkcija *i*-te komponente generalizirane sile valova 1. reda
$f_i^{(2)}(\omega_{k_i} - \omega_i)$	- kvadratna prijenosna funkcija *i*-te komponente generalizirane sile valova 2. reda (za razliku frekvencija)
F_I	- vektor uzbudne sile
$F_i(t)$	- komponenta uzbude okoliša

F_R - radijacijska sila (potencijalnog) prigušenja

F_{SL} - dinamička reakcija sidrenih linija/podmorskih podizača

${}^{MS}F_i(t)$ - komponenta sile morske struje

${}^{MV}F_i(t)$ - komponenta sile morskih valova 1. i 2. reda

${}^{MV}F_i^{(1)}(t)$ - komponenta sile valova 1. reda

${}^{MV}F_i^{(2)}(t)$ - komponenta sile valova 2. reda

${}^{VJ}F_i(t)$ - komponenta sile vjetra

h_k^i - k-ta komponenta prirodnog oblika vibriranja h^i

$h_{k,l}^i$ - l-ta derivacija k-te komponente prirodnog oblika vibriranja h^i

H - matrica kvadratičnog međudjelovanja između rotacijskih stupnjeva slobode gibanja

H_S - značajna valna visina

I_x - moment tromosti površine poprečnog presjeka oko x-osi

I_y - moment tromosti površine poprečnog presjeka oko y-osi

I_{WLX}^0 - moment tromosti površine vodne linije oko x-osi

I_{WLY}^0 - moment tromosti površine vodne linije oko y-osi

K - linearizirana povratna krutost

$K(\{x\})$ - nelinearna povratna krutost

K_{ij}^G - element matrice geometrijske krutosti pripona

$\tilde{K}_c$ - cirkularna krutost kod poniranja

$\tilde{K}_r$ - krutost u radijalnom smjeru

$\tilde{K}_t$ - tangencijalna krutost kod poniranja

$[K]_G$ - linearna matrica povratne krutosti s obzirom na težište sustava G

$[K]_P$ - linearna matrica povratne krutosti s obzirom na pol rotacije P

$[K]^C$ - konvencionalna aksijalna krutost pripona

$[K]^G$ - geometrijska krutost pripona (značajka sidrenog sustava)

$[\tilde{K}]$ - sekantna matrica nelinearne povratne krutosti

$[\tilde{K}]_G^*$ - sekantna matrica nelinearne povratne krutosti s obzirom na težište G (s uključenom spregom između vertikalnih i horizontalnih gibanja)

$[\tilde{K}]_G^t$ - tangencijalna matrica nelinearne povratne krutosti s obzirom na težište G

$\left[\widetilde{K}\right]_P^0$ - sekantna matrica nelinearne povratne krutosti s obzirom na pol *P* (bez uključene sprege između vertikalnih i horizontalnih gibanja)

$\left[\widetilde{K}\right]_P^t$ - tangencijalna matrica nelinearne povratne krutosti s obzirom na pol *P*

$\left[\widetilde{K}\right]_P^V$ - sekantna matrica nelinearne povratne krutosti s obzirom na pol *P* (s uključenom spregom između vertikalnih i horizontalnih gibanja)

$\left[\widetilde{K}^t\right]$ - tangencijalna matrica nelinearne povratne krutosti

L - duljina sidrene linije

L_z^n - vertikalna udaljenost zjevače *n*-te pripone od morskog dna

$\widehat{L}_z$ - vertikalna udaljenost sidrenog sustava od morskog dna kod poniranja

m_0 - spektralni moment 0. reda (varijanca)

m_2 - spektralni moment 2. reda

m_4 - spektralni moment 4. reda

M^{SL} - ekvivalentna masa sidrenih linija/podmorskih podizača

${}^{VJ}M_i(t)$ - komponenta momenta sile vjetra

$[M]_P$ - matrica masa s obzirom na pol rotacije *P*

$[M]_G$ - matrica masa s obzirom na težište sustava *G*

$\mathbf{n}'$ - vektor normale u koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo

n_k - komponenta vektora normale na oplakanu površinu

q_p - distribuirano hidrodinamičko opterećenje pripone

$R_{ij}(t)$ - memorijska (retardacijska) funkcija

$S(f)$ - funkcija spektralne gustoće energije turbulentne komponente brzine vjetra

$S_{PM}(\omega)$ - Pierson-Moskowitz funkcija spektralne gustoće energije izdizaja slobodne površine

T_n - sila natega u priponi

$[T]$ - matrica transformacije

U_0 - srednja brzina vjetra za period od 1 h na visini 10 m

V - potencijalna energija tijela

$\overline{V}$ - srednja brzina vjetra

V_t - turbulentna brzina vjetra, modelirana odabranim spektrom brzine vjetra

V^0 - volumen istisnine

${}^{MS}V$ - uzdužna brzina morske struje

${}^{VJ}V(t)$ - uzdužna brzina vjetra

$\dot{x}(t)$ - uzdužna brzina strukture

$\mathbf{x}'_p$ - vektor položaja u koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo

z_T - vertikalna koordinata zjevače

z_B^0 - vertikalna koordinata istisnine

z_G^0 - vertikalna koordinata težišta

$\boldsymbol{\delta}_1$ - vektor translacijskih pomaka 1. reda

$\boldsymbol{\delta}_2$ - vektor translacijskih pomaka 2. reda

δ_h - pomak tijela u horizontalnoj ravnini

δ_φ - sekantni pomak vrha pripone

δ^s - sjedanje pritegnutog tijela

δ^v - ukupan pomak tijela u vertikalnom smjeru

δ_1^{se} - sjedanje tijela s utjecajem istezanja pripona

δ_x^e - zalijetanje tijela s utjecajem istezanja pripona

ε_k - fazni pomak *k*-te komponente vala

$\tilde{\zeta}_k$ - kompleksna amplituda *k*-te komponente vala

$\tilde{\zeta}_i^*$ - konjugirano kompleksna amplituda *i*-te komponente vala

ν - bezdimenzijski koeficijent prigušenja

$\bar{\xi}_k^i$ - krak *k*-tog projiciranog elementa od x_i-te osi koordinatnog sustava

ρ - gustoća vode

ρ_S - gustoća materijala konstrukcije

ρ_z - gustoća zraka

σ_{kl} - komponenta tenzora naprezanja u priponi

$\boldsymbol{\varphi}_1$ - vektor rotacijskih pomaka 1. reda

$\boldsymbol{\varphi}_2$ - vektor rotacijskih pomaka 2. reda

Φ_1 - potencijal brzine strujanja tekućine 1. reda

Φ_2 - potencijal brzine strujanja tekućine 2. reda

ω_k - (kružna) frekvencija *k*-te komponente vala

$\tilde{\Omega}_r$ - promjenljiva "prirodna" frekvencija za gibanja u radijalnom smjeru

$\tilde{\Omega}_t$ - promjenljiva "prirodna" frekvencija za gibanja u tangencijalnom smjeru

$\|\cdot\|$ - euklidska norma vektora

POPIS SLIKA

Slika 1.1 - Ursa TLP, nadvodni dio ... 2
Slika 1.2 - PelaStar TPL, plutajuća vjetroturbina ... 3
Slika 1.3 - TLP kavez za uzgoj ribe ... 3
Slika 1.4 - Brutus TLP, podvodni dio ... 4
Slika 1.5 - SeaStar TLP ... 4
Slika 1.6 - Heidrun TLP (prva TLP s trupom izrađenim od betona) ... 5
Slika 1.7 - Položaji platforme i pripona za različite pomake u horizontalnoj ravnini [1] ... 6
Slika 1.8 - Ovisnost izračunate i izmjerene povratne sile o pomaku [6] ... 9
Slika 1.9 - Ovisnost izračunatog i izmjerenog sjedanja o pomaku [6] ... 9
Slika 1.10 - Ovisnost izračunate i izmjerene sile natega u podmorskom podizaču o pomaku [6] ... 10
Slika 1.11 - Ovisnost izračunate i izmjerene sile natega u sidrenoj priponi o pomaku [6] ... 10
Slika 2.1 - Odabrani koordinatni sustav s odgovarajućim stupnjevima slobode gibanja ... 16
Slika 2.2 - Pravokutna pritegnuta pučinska platforma ... 17
Slika 2.3 - Model krutosti pritegnute pučinske platforme ... 19
Slika 2.4 - Translacijski i rotacijski pomak pritegnute pučinske platforme ... 21
Slika 3.1 - Proizvoljna translacija pritegnute pučinske platforme ... 28
Slika 3.2 - Pomak pučinske platforme uslijed istodobne translacije i rotacije u horizontalnoj ravnini ... 29
Slika 3.3 - Spajanje horizontalnih pomaka vrha pripona u zajedničko ishodište ... 36
Slika 3.4 - Sjedanje pučinske platforme uslijed horizontalnog pomaka ... 37
Slika 3.5 - Horizontalna i cirkularna krutost ... 38
Slika 3.6 - Uzbuda i odziv poniranja ... 40
Slika 3.7 - Komponente sile poniranja s pripadajućim elastičnim osloncima ... 41
Slika 3.8 - Proizvoljna translacija i rotacija pritegnute pučinske platforme ... 43
Slika 3.9 - Konstrukcija sjedanja u ravnini pomaka ... 46
Slika 6.1 - Panelni model TLP SPAR plovka ... 62
Slika 6.2 - Prijenosna funkcija zalijetanja TLP SPAR plovka (HMPE pripone) ... 63
Slika 6.3 - Prijenosna funkcija poniranja TLP SPAR plovka (HMPE pripone) ... 63
Slika 6.4 - Prijenosna funkcija posrtanja TLP SPAR plovka (HMPE pripone) ... 64
Slika 6.5 - Prijenosna funkcija posrtanja TLP SPAR plovka (čelične pripone) ... 64
Slika 6.6 - Prijenosna funkcija zalijetanja ... 66
Slika 6.7 - Prijenosna funkcija poniranja ... 67
Slika 6.8 - Prijenosna funkcija posrtanja ... 67
Slika 6.9 - Povratna krutost zalijetanja ... 68
Slika 6.10 - Odzivne krivulje zalijetanja, $F_x^0 = 2200\,\text{kN}$ ... 69
Slika 6.11 - Radijalni pomak, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN ... 71
Slika 6.12 - Tangencijalni pomak, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN ... 72
Slika 6.13 - Poniranje, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN ... 72
Slika 6.14 - Vertikalni pomak, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN ... 73
Slika 6.15 - Zalijetanje ... 75

Slika 6.16 - Vertikalni pomak $\delta^v = \delta_z - \delta^s$ 75
Slika 6.17 - Sjedanje 76
Slika 6.18 - Poniranje 76
Slika 6.19 - Model KE pritegnute pučinske platforme 79
Slika 6.20 - Tlocrt pučinske platforme u pomaknutom položaju 80
Slika 6.21 - Bokocrt pučinske platforme u pomaknutom položaju 80
Slika 6.22 - Nacrt pučinske platforme u pomaknutom položaju 80
Slika 6.23 - Uzdužni pomak platforme 81
Slika 6.24 - Poprečni pomak platforme 81
Slika 6.25 - Sjedanje platforme 82
Slika 6.26 - Sjedanje kao funkcija prividnog horizontalnog pomaka 83
Slika 6.27 - Model KE pripona u potpuno spregnutom dinamičkom modelu 84
Slika 6.28 - Ovisnost horizontalne povratne sile o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 1) 86
Slika 6.29 - Ovisnost vertikalnog pomaka o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 1) 86
Slika 6.30 - Ovisnost horizontalne povratne sile o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 2) 87
Slika 6.31 - Ovisnost vertikalnog pomaka o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 2) 88
Slika 6.32 - Slobodno neprigušeno zalijetanje ISSC TLP-a 89
Slika 6.33 - Slobodno neprigušeno složeno poniranje (sjedanje + osciliranje) ISSC TLP-a 90
Slika 6.34 - Slobodno neprigušeno posrtanje ISSC TLP-a 90
Slika 6.35 - Slobodno prigušeno zalijetanje ISSC TLP-a 91
Slika 6.36 - Slobodno prigušeno složeno poniranje (sjedanje + osciliranje) ISSC TLP-a 92
Slika 6.37 - Slobodno prigušeno posrtanje ISSC TLP-a 92
Slika 6.38 - Panelni model ISSC TLP-a generiran programom HYDROSTAR 98
Slika 6.39 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za zalijetanje i zanošenje 99
Slika 6.40 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za spregnuto zalijetanje i posrtanje 99
Slika 6.41 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za poniranje 100
Slika 6.42 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za ljuljanje i posrtanje 100
Slika 6.43 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za zaošijanje 101
Slika 6.44 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za zalijetanje iz frekvencijske u vremensku domenu 101
Slika 6.45 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za spregnuto zalijetanje i posrtanje iz frekvencijske u vremensku domenu 102
Slika 6.46 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za poniranje iz frekvencijske u vremensku domenu 102
Slika 6.47 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za ljuljanje iz frekvencijske u vremensku domenu 103
Slika 6.48 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za zaošijanje iz frekvencijske u vremensku domenu 103
Slika 6.49 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu 104
Slika 6.50 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu 104
Slika 6.51 - Odziv poniranja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu 105
Slika 6.52 - Odziv poniranja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu 105
Slika 6.53 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu 106
Slika 6.54 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu 106

Slika 6.55 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m) 109
Slika 6.56 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m)..... 109
Slika 6.57 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m)..... 110
Slika 6.58 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m) 111
Slika 6.59 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m)..... 111
Slika 6.60 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m)..... 112
Slika 6.61 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje 113
Slika 6.62 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje..... 113
Slika 6.63 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje 114
Slika 6.64 - Procjena spektra zalijetanja ISSC TLP-a..... 115
Slika 6.65 - Procjena spektra poniranja ISSC TLP-a..... 116
Slika 6.66 - Procjena spektra posrtanja ISSC TLP-a 116

POPIS TABLICA

Tablica 6.1 - Osnovne značajke TLP SPAR plovka 62
Tablica 6.2 - Osnovne značajke ISSC TLP-a 65
Tablica 6.3 - Statički odziv ISSC TLP-a 78
Tablica 6.4 - Značajke pripona 84
Tablica 6.5 - Modeli pripona različite složenosti 85
Tablica 6.6 - Usporedba nespregnutog i spregnutog statičkog odziva ISSC TLP-a za model pripona 1 85
Tablica 6.7 - Usporedba nespregnutog i spregnutog statičkog odziva ISSC TLP-a za model pripona 2 87
Tablica 6.8 - Okolišno opterećenje na ISSC TLP 108
Tablica 6.9 - Usporedba pomaka ISSC TLP-a izračunatih korištenjem različitih formulacija povratne krutosti 115

1. UVOD

1.1. Motivacija i opis problema

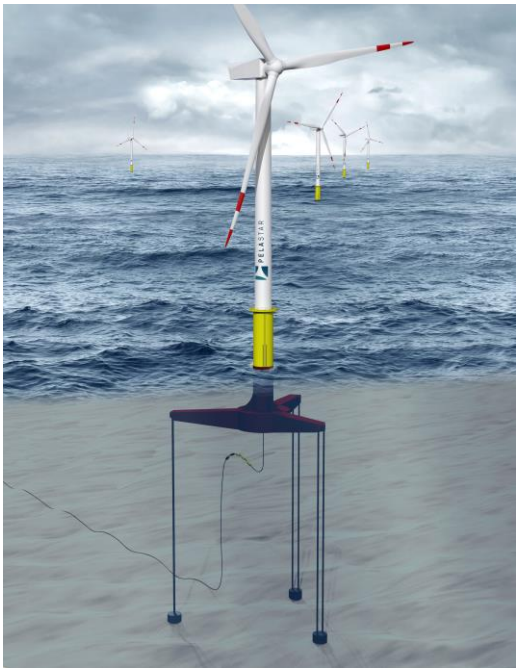
Inženjerske konstrukcije izložene djelovanju morskog okoliša (vjetar, valovi, morske struje, obraštanje, korozija, led) tvore nekoliko funkcionalnih podskupova, od kojih je svrsishodno navesti važnije poput podskupa objekata za proizvodnju nafte i zemnog plina, podskupa objekata za pretvorbu mehaničke energije vjetra i valova u električnu energiju (npr. plutajuće vjetroturbine) ili podskupa akvakulturnih objekata. Elementi prvog navedenog podskupa, koje nazivamo i "pučinskim platformama", mogu se podijeliti u dvije velike skupine, skupinu nepomičnih (eng. fixed) objekata i skupinu pomičnih (podatljivih, eng. compliant) objekata. Elementi navedenih skupina su konstrukcije za koje je presudan odnos između prirodnih perioda njihanja konstrukcije i perioda okolišnog opterećenja (ukoliko opterećenje pretpostavimo periodičnim). Nepomične pučinske platforme definiramo kao objekte koji se protežu sve do morskog dna i koji se djelovanju okolišnog opterećenja suprotstavljaju pretežito vlastitom težinom (eng. gravity platforms). Takve konstrukcije su vrlo krute, što znači da su im prirodni periodi jako kratki i relativno udaljeni od perioda okolišnog opterećenja. Pomične (podatljive) pučinske platforme definiramo kao *usidrene* objekte koji se strukturalno ne protežu do morskog dna i koji se (zbog činjenice da su njihovi prirodni periodi bliži periodima okolišnog opterećenja, te zbog rezonantnih pojava 2. reda) značajnije odzivaju gibanjem (inercijom) na okolišno opterećenje. Uslijed rezonantnih pojava 2. reda, kao posljedica odzivnosti takvih objekata, nužno je ograničiti njihove pomake u horizontalnoj ravnini primjenom odgovarajućeg sidrenog sustava. Sidreni sustavi koji se primjenjuju razlikuju se materijalom od kojeg su izrađene sidrene linije (čelični lanci, čelična užad, kombinacije lanaca i užadi, sintetička užad), razmještanjem sidrenih linija (npr. 6, 8, 12 i više simetrično raspoređenih linija), ali i geometrijom sidrenih linija (najčešće je korištena lančanica, ali se u pojedinim slučajevima koriste i uspravne, pritegnute (prednapregnute) sidrene linije). Odabir odgovarajućeg pučinskog objekta ovisi primarno o njegovoj namjeni. Ukoliko promatramo pučinske objekte za proizvodnju nafte i zemnog plina, tada je jedan od osnovnih kriterija odabira upravo dubina morskog dna, gdje se vrši određeni tehnološki postupak proizvodnje.

Pritegnuta pučinska platforma (eng. TLP - Tension Leg Platform), koja ne zadovoljava uvjet plovnosti, tj. sila hidrostatskog tlaka veća je od njene težine, vrlo je pogodna za rad na velikim dubinama, s obzirom da troškovi takvog objekta ne rastu ni približno tako brzo s

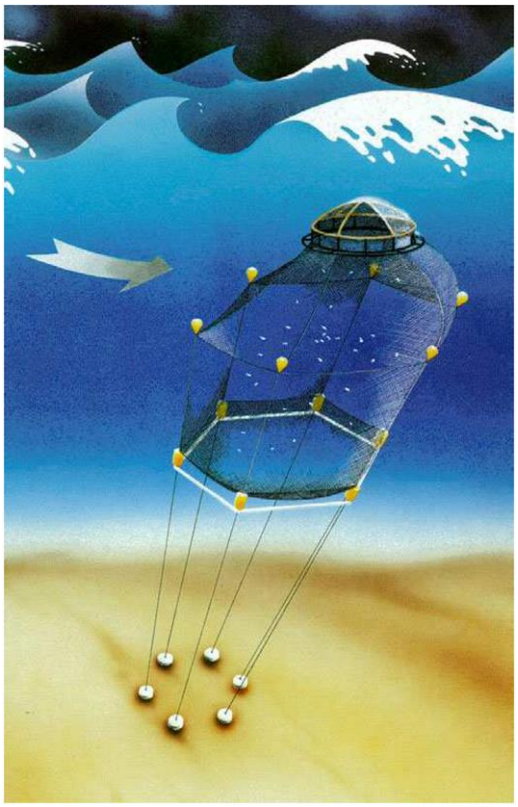
dubinom kao kod nepomičnih pučinskih objekata (*Magnolia* TLP postavljena je 2005. godine u moru dubine 1425 m). Za razliku od nekih drugih plutajućih objekata usidrenih lančanicama (primjerice poluuronjivih pučinskih platformi), pritegnuta platforma omogućava gotovo horizontalnu radnu površinu (morski valovi pobuđuju zanemariva vertikalna gibanja). S obzirom na takve pomorstvene značajke pritegnuta pučinska platforma prikladan je izbor ne samo za rad na velikim dubinama, nego općenito kada je potrebna stabilna horizontalna radna površina (i gdje relativno veliki horizontalni pomaci uslijed rezonancije 2. reda ne predstavljaju problem), te se stoga može naći ne samo u podskupu objekata za proizvodnju nafte i zemnog plina (što joj je bila prvotna namjena), slika 1.1, nego i u podskupu objekata za pretvorbu mehaničke u električnu energiju (plutajuće vjetroturbine), slika 1.2, ali i u podskupu akvakulturnih objekata (kavezi za uzgoj ribe), slika 1.3.



Slika 1.1 - Ursa TLP, nadvodni dio
(Izvor: http://www.fastcompany.com/41051/life-board-gulf-mexico-oil-drilling-platform)



Slika 1.2 - PelaStar TPL, plutajuća vjetroturbina
(Izvor: http://www.glosten.com)



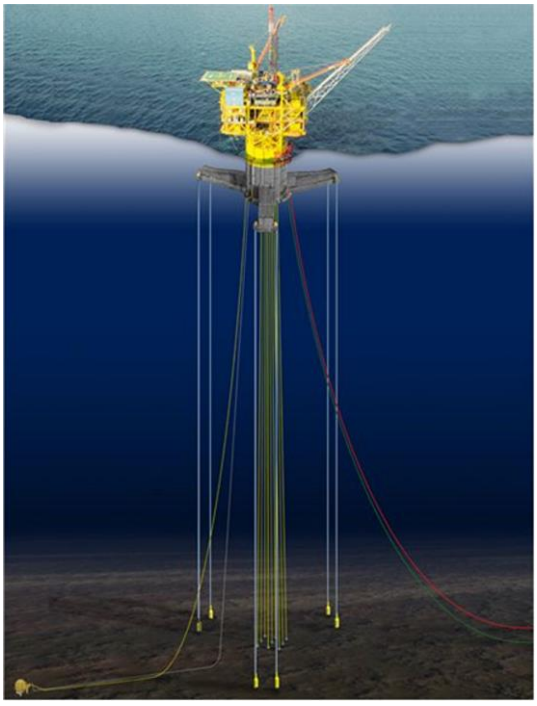
Slika 1.3 - TLP kavez za uzgoj ribe
(Izvor: http://www.refamed.com)

Pritegnuta pučinska platforma sastoji se od nekoliko važnih dijelova. Prvi dio je *trup*, vrlo sličan poluuronjivoj platformi (eng. semi-submersible platform), koji se u svom

uronjenom dijelu sastoji od vertikalnih cilindara i horizontalnih pontona (plovaka), slika 1.4. Drugi dio je *sidreni sustav*, kojeg čine pritegnute pripone (eng. tethers), tj. uspravne, pritegnute čelične cijevi, kojih u jednoj liniji (eng. tendon leg) može biti i do 12 (u pravilu idu 3 takve linije na jedan vertikalni cilindar u kutu uronjenog trupa, iako se danas često mogu vidjeti i dvije linije po cilindru), slika 1.5. Treći dio su *podmorski podizači* (eng. marine risers), koji su također vertikalno nategnuti i kojih je u pravilu velik broj, slika 1.5.

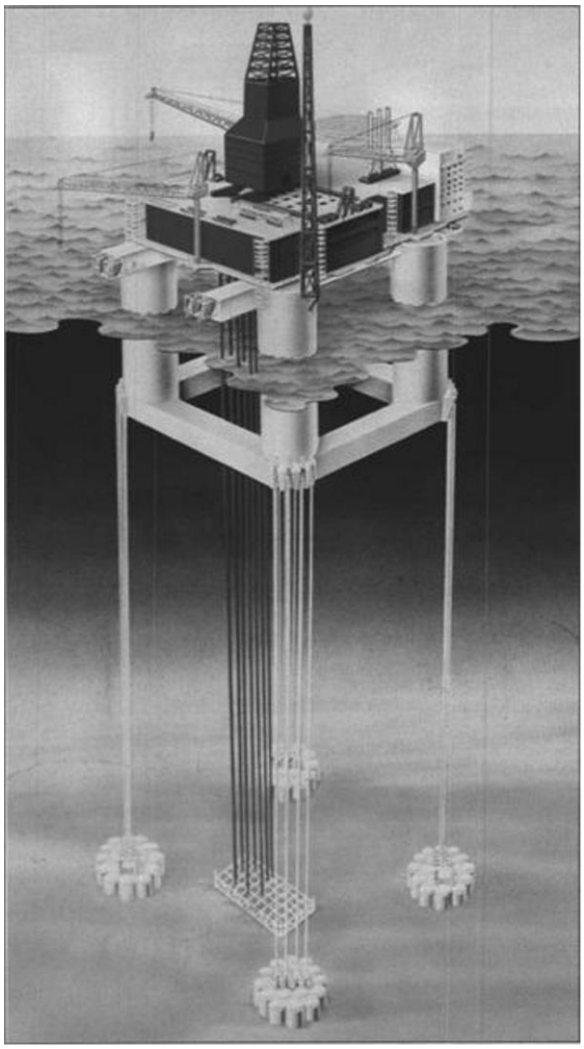


Slika 1.4 - Brutus TLP, podvodni dio
(Izvor: http://www.offshore-technology.com/projects/brutus/brutus6.html)



Slika 1.5 - SeaStar TLP
(Izvor: http://www.brighthubengineering.com/marine-engines-machinery/30775-different-types-of-offshore-production-platforms-for-oil-extraction/)

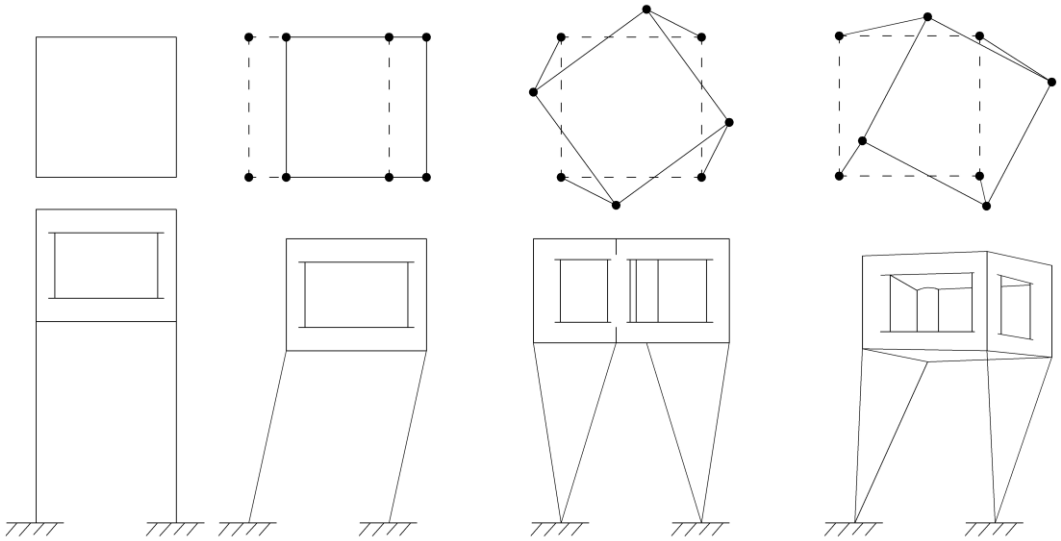
Pritegnuta platforma njiše se poput obrnutog njihala u vodi, što znači da je njihanje geometrijski ograničeno sidrenim sustavom, slika 1.6. Upravo je sidreni sustav ovog objekta važan uzrok nelinearne krutosti i posljedično nelinearne dinamike uslijed velikih horizontalnih pomaka.



Slika 1.6 - Heidrun TLP (prva TLP s trupom izrađenim od betona)
(Izvor: http://www.marinetechnology.mobi/scientific-deck-machinery/heidrun-breakthrough-concrete-technology-208878)

Veliki pomaci u horizontalnoj ravnini uzrokuju *sjedanje* pritegnute platforme, definirano kao dodatni niskofrekventni pomak u vertikalnom smjeru. Ta pojava 2. reda nije obuhvaćena analizom linearnih gibanja pritegnute pučinske platforme. Sjedanje uzrokuju i translacijski i rotacijski pomaci, kao i njihova sprega. Na slici 1.7, [1], prikazan je položaj pritegnute platforme i pripona za tri različita gibanja u horizontalnoj ravnini: isključiva translacija, isključiva rotacija i sprega translacije i rotacije. Važno je primijetiti kako se u

slučaju rotacije i sprege rotacije s translacijom pripone ne nalaze u paralelnim ravninama, što u slučaju istovremene translacije i rotacije uzrokuje spregu sa stupnjevima slobode gibanja platforme u vertikalnoj ravnini (platforma se dodatno nagiba). U slučaju uobičajenih pritegnutih platformi četverokutnog oblika podvodnog trupa, slika 1.6, ta dodatna sprega manje je značajna u usporedbi s pritegnutim platformama trokutnog oblika podvodnog trupa, slika 1.5, kod kojih su momenti zaošijanja relativno veći.



Slika 1.7 - Položaji platforme i pripona za različite pomake u horizontalnoj ravnini [1]

U radu skupine autora iz 1997. godine [2], istaknuto je da je "*naprezanje u priponama (statički, prednapregnuti dio naprezanja + dinamički dio naprezanja uslijed okolišnog opterećenja) osnovni faktor koji utječe na dimenzioniranje pritegnute pučinske platforme. Prednapregnutost pripona mora biti takva da se osigura donja granična vrijednost, kojom se sprječava da dođe do olabavljenja sidrenih linija i posljedičnog pucanja uslijed naglog zatezanja, ali ne smije biti ni prevelika da se ograniči najviše naprezanje do kojeg dolazi uslijed ekstremnih opterećenja. Povećanjem prednapregnutosti dolazi u pravilu do povećanja uronjenog dijela trupa, što za posljedicu ima i povećanje dinamičkog dijela naprezanja. S druge strane, niže vrijednosti prednaprezanja uzrok su većim horizontalnim pomacima i sjedanju (eng. set down), te je tada potrebno povisiti vertikalne cilindre kako bi se osigurala potrebna zračnost između palube i površine mora. To ima za posljedicu podizanje težišta i veća inercijska opterećenja koja pripone moraju uravnotežiti. Ta su dva ograničenja, smanjenje prednaprezanja i visine vertikalnih cilindara, međusobno suprotstavljena i imaju izravan utjecaj na veličinu pritegnute pučinske platforme*". Pouzdana analiza tog problema

nije moguća bez konzistentnog modela nelinearne krutosti koji uključuje primjereno međudjelovanje (spregu) između različitih stupnjeva slobode gibanja.

U analizi objekata morske tehnike u vremenskoj domeni općenito se razlikuju dva pristupa, nespregnuta i potpuno spregnuta dinamička analiza. Pod nespregnutom dinamičkom analizom, [3] i [4], podrazumijeva se definiranje pučinske platforme na slobodnoj površini vode *krutim* tijelom sa šest stupnjeva slobode gibanja, uz zanemarenje međudjelovanja dinamike tog krutog tijela i dinamike sidrenih linija/podmorskih podizača ispod površine vode. Sidrene linije/podmorski podizači vrlo često definiraju se elastičnim oprugama bez mase, koje na kruto tijelo djeluju isključivo (nelinearnom) povratnom silom ovisnom o trenutnom položaju tijela. Tako modelirani strukturni elementi ne pridonose ni opterećenju ni odzivu (kroz inerciju i prigušenje) čitavog dinamičkog sustava. Postoje i nešto složeniji modeli nespregnute dinamičke analize, gdje se taj utjecaj (sidrenog sustava/podmorskih podizača na inerciju i prigušenje sustava), uz odgovarajuća približenja, uzima u razmatranje, [5]. Nespregnuti dinamički modeli u pravilu imaju svega šest stupnjeva slobode gibanja i vrlo su jednostavni za računalnu primjenu u metodama preliminarnog projektiranja. Potpuno spregnuta dinamička analiza, [3] i [4], podrazumijeva definiranje pučinske platforme ili krutim tijelom ili elastičnim tijelom s proizvoljnim brojem stupnjeva slobode gibanja. Sidrene linije/podmorski podizači modeliraju se također elastičnim kontinuumom, te je uz zadovoljenje uvjeta kompatibilnosti pomaka i sila na spoju tih elemenata konstrukcije s pučinskom platformom, omogućeno potpuno dinamičko međudjelovanje, gdje sidrene linije/podmorski podizači djeluju na tijelo na slobodnoj površini silom koja je funkcija pomaka, brzine i ubrzanja (ta sila je integralna veličina po elastičnom kontinuumu), što znači da sustavu pridonose i opterećenjem i inercijom i prigušenjem i povratnom silom. Jasno, vrijedi i obrat. Takav pristup fizikalno je konzistentniji, ali i računalno skuplji zbog relativno velikog broja stupnjeva slobode. Nedostatak tog pristupa je što se rezultirajući sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (jednadžbe dinamičke ravnoteže) rješava numerički (najčešće metodom konačnih elemenata), gdje je vrlo teško zaključiti o fizikalnom utjecaju pojedinih članova u jednadžbi dinamičke ravnoteže. S druge strane, u analizi dinamike tijela u dubinama većim od 900 m (3000 ft), takav pristup je nužnost, [3], s obzirom na značajan udio mase sidrenih linija/podmorskih podizača na ukupnu masu sustava, na utjecaj viskoznog prigušenja tih elemenata na dinamiku čitavog sustava, kao i na moguće dinamičke utjecaje vibracija tih elastičnih tijela (s obzirom da povećanjem duljine padaju prirodne frekvencije tih elemenata u područje značajnije energije okolišne uzbude). Dinamika plutajućih tijela u vremenskoj domeni opisana je u inženjerskoj praksi sljedećim jednadžbama, [6] i [7]:

(i) nespregnuta analiza

$$\left[M + A^{\infty} + M^{SL}\right]\{\ddot{x}\} + \left[D + D^{SL}\right]\{\dot{x}\} + \left[K\right]\{x\} = F_I(t) + F_R(\dot{x}, t), \tag{1.1}$$

(ii) spregnuta analiza

$$\left[M + A^{\infty}\right]\{\ddot{x}\} + \left[D\right]\{\dot{x}\} + \left[K(\{x\})\right]\{x\} = F_I(t) + F_R(\dot{x}, t) + F_{SL}(x, \dot{x}, \ddot{x}, t), \tag{1.2}$$

gdje je:

$\{x\}$ - vektor pomaka

M^{SL} - ekvivalentna masa kojom se u obzir uzima utjecaj sidrenih linija/podmorskih podizača na masu sustava u nespregnutom modelu

D - ekvivalentno viskozno prigušenje trupa

D^{SL} - ekvivalentno viskozno prigušenje sidrenih linija/podmorskih podizača

F_I - vektor uzbudne sile

F_R - radijacijska sila prigušenja (konvolucijski integral)

K - linearizirana povratna krutost

$K(\{x\})$ - nelinearna povratna krutost

F_{SL} - vektor sila kojim se spreže dinamika sidrenih linija/podmorskih podizača s dinamikom plutajućeg tijela.

U jednadžbi (1.1) važno je primijetiti da se u nespregnutom modelu, pored ostalih fizikalnih nedosljednosti, primjenjuje *linearizirana* matrica povratne krutosti, što predstavlja nepotreban nedostatak, što će biti detaljno izneseno u doktorskom radu.

Primjer potrebe rješenja problema nelinearne povratne krutosti rad je Murraya et al., [6], u kojem autori zaključuju sljedeće:

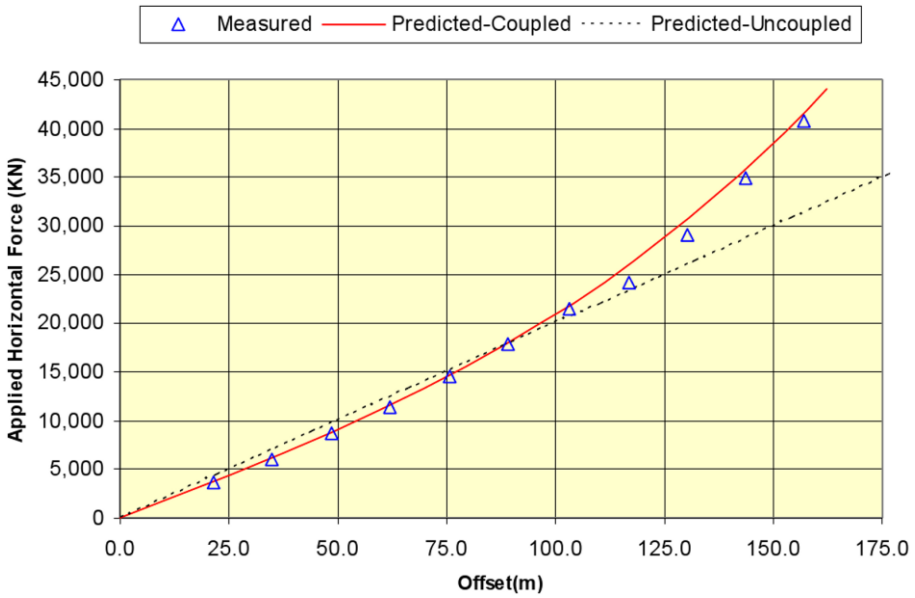
i. Vjerojatan uzrok lošem slaganju rezultata numeričkog proračuna nespregnutim dinamičkim modelom i rezultata modelskih ispitivanja neprikladan je matematički model djelovanja povratnih sila sidrenog sustava i podmorskih podizača u krajnjem pomaknutom položaju pritegnute pučinske platforme.

ii. Rezultati proračuna sjedanja, te posljedično poniranja i zračnosti između dna palube pučinske platforme i slobodne površine vode, vrlo slabo se slažu s rezultatima modelskih ispitivanja.

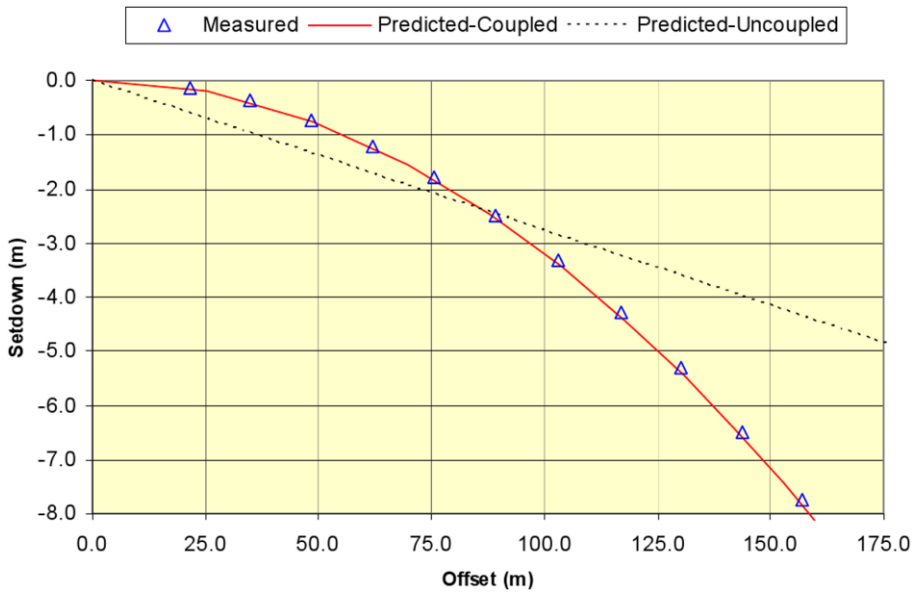
iii. Rezultati proračuna sile natega u priponama sidrenog sustava i podmorskim podizačima primjenom raspregnutog dinamičkog modela također se slabo

slažu s rezultatima modelskih ispitivanja. Vjerojatan uzrok tome pronalazi se u nedostatku sprege između komponenti povratne krutosti.

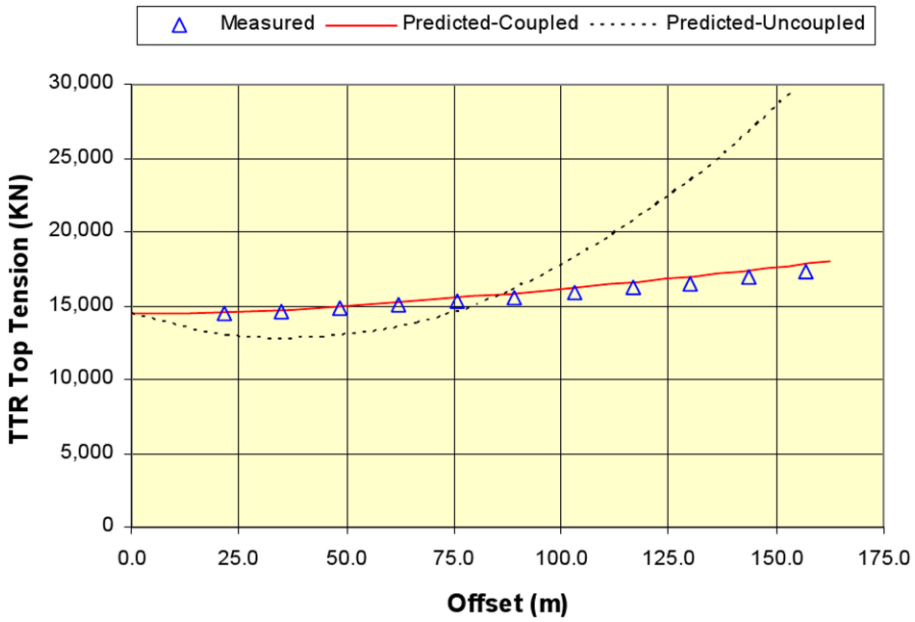
U svim navedenim primjerima rezultati numeričkog proračuna primjenom potpuno spregnutog dinamičkog modela (model konačnih elemenata s proizvoljnim pomacima) vrlo dobro se slažu s rezultatima modelskih ispitivanja. Navedene tvrdnje prikazane su slikama 1.8, do 1.11 za statički proračun, gdje su povratne sile i pomaci funkcija proizvoljnog pomaka tijela. U nespregnutom dinamičkom modelu korištena je linearna povratna krutost te se uslijed značajnih odstupanja nameće potreba za racionalnom formulacijom nelinearne povratne krutosti.



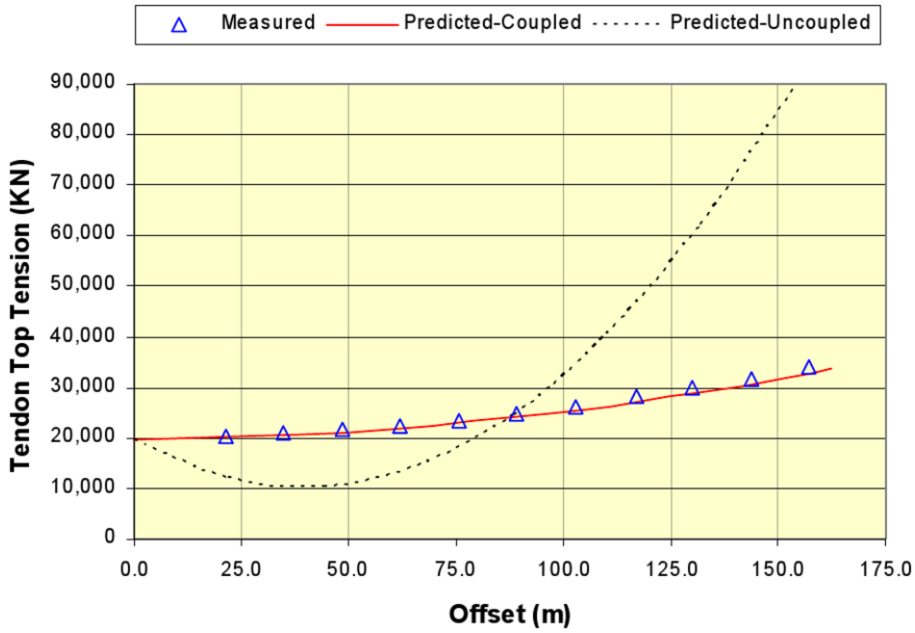
Slika 1.8 - Ovisnost izračunate i izmjerene povratne sile o pomaku [6]



Slika 1.9 - Ovisnost izračunatog i izmjerenog sjedanja o pomaku [6]



Slika 1.10 - Ovisnost izračunate i izmjerene sile natega u podmorskom podizaču o pomaku [6]



Slika 1.11 - Ovisnost izračunate i izmjerene sile natega u sidrenoj priponi o pomaku [6]

U jednadžbi dinamičke ravnoteže (1.2) sprega sidrenog sustava/podmorskih podizača s gibanjem pritegnute pučinske platforme ostvaruje se isključivo dinamičkom reakcijom iskazanom silom $F_{SL}(x,\dot{x},\ddot{x},t)$. Osim toga dinamičkog ("strukturnog") međudjelovanja postoji i *hidrodinamička* sprega koja u jednadžbi (1.2) nije izravno uočljiva, a ostvaruje se preko sila valova 2. reda (potencijalno strujanje, Stokesov perturbacijski razvoj). Prema [8],

rubni uvjet na tijelu u radijacijsko-difrakcijskom hidrodinamičkom problemu rubnih vrijednosti 1. i 2. reda glasi:

$$\mathbf{n}'\cdot\nabla\Phi_1 = \mathbf{n}'\cdot(\dot{\boldsymbol{\delta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1\times\mathbf{x}'_p)\,, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}'\cdot\nabla\Phi_2 = \mathbf{n}'\cdot\Big\{&(\dot{\boldsymbol{\delta}}_2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2\times\mathbf{x}'_p) + \dot{H}\mathbf{x}'_p - \Big[(\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\varphi}_1\times\mathbf{x}'_p)\cdot\nabla\Big]\nabla\Phi_1\Big\} + \\ &(\boldsymbol{\varphi}_1\times\mathbf{n}')\cdot\Big[(\dot{\boldsymbol{\delta}}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1\times\mathbf{x}'_p) - \nabla\Phi_1\Big],\end{aligned} \tag{1.4}$$

gdje je:

- $\mathbf{n}'$ - vektor normale u koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo,
- Φ_1 - potencijal brzine strujanja tekućine 1. reda,
- Φ_2 - potencijal brzine strujanja tekućine 2. reda,
- $\boldsymbol{\delta}_1$ - vektor translacijskih pomaka 1. reda,
- $\boldsymbol{\delta}_2$ - vektor translacijskih pomaka 2. reda,
- $\boldsymbol{\varphi}_1$ - vektor rotacijskih pomaka 1. reda,
- $\boldsymbol{\varphi}_2$ - vektor rotacijskih pomaka 2. reda,
- $\mathbf{x}'_p$ - vektor položaja u koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo,
- H - matrica kvadratičnog međudjelovanja između rotacijskih stupnjeva slobode gibanja.

U izrazu (1.4) uočljiv je utjecaj gibanja 1. reda na formulaciju problema rubnih vrijednosti za potencijal Φ_2. Drugim riječima, konzistentna hidrodinamička sprega značila bi da je u svakom vremenskom trenutku prvo potrebno riješiti gibanje 1. reda (s utjecajem nelinearne povratne krutosti), a zatim odrediti potencijal Φ_2, sile (i momente) te gibanja 2. reda. Takvim pristupom nažalost nije moguće predračunati sile 2. reda (kako se to uobičajeno radi kvadratičnim prijenosnim funkcijama), već je potrebno sile integrirati u vremenu. Analitička nelinearna povratna krutost u tom smislu predstavlja prikladnu aproksimaciju za konzistentni izračun hidrodinamičke sprege.

Uvodno poglavlje prikladno je zaključiti objašnjenjem pojma koji se u stručnoj literaturi često netočno definira. U ovom doktorskom radu razlikuju se *sekantna* i *tangencijalna* matrica (nelinearne) povratne krutosti. S obzirom da fizikalno postoji isključivo (nelinearna) generalizirana povratna sila nužno je precizno definirati značenje tih dviju matrica. U izravnoj numeričkoj integraciji jednadžbi gibanja u vremenskoj domeni razlikuju se dvije velike skupine metoda, *eksplicitne* i *implicitne* metode numeričke integracije. Prema [9], u strukturnoj dinamici u slučaju eksplicitnih metoda jednadžbe ravnoteže postavljene su za prethodni vremenski trenutak *t* te se numerički sustav rješava koračajući

unaprijed u vremenu za Δt. U tom slučaju u numeričkom algoritmu koristi se sekantna matrica povratne krutosti, koja zapravo predstavlja povratnu silu iz koje je izdvojen vektor pomaka. Takav način razmatranja povratne sile nije matematički nužan, ali je fizikalno praktičan. U slučaju implicitnih metoda numeričke integracije jednadžbe ravnoteže postavljene su za trenutak $t + \Delta t$ i u tom slučaju potrebno je provesti "unutarnju" Newton-Raphsonovu iteraciju, s obzirom da je rješenje linearizirano oko prethodnog koraka iteracije. U tom slučaju koristi se tangencijalna matrica povratne krutosti.

1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

Jedan od prvih dinamičkih modela pritegnutih pučinskih platformi je rad Paullinga i Hortona [10] (1970), u kojem autori koriste linearnu aksijalnu krutost pripona. U ranom razdoblju razvoja ovih pučinskih objekata krajem 60-ih i najvećim dijelom 70-ih godina prošlog stoljeća koriste se linearizirani dinamički modeli u frekvencijskom području, gdje su moguće nelinearnosti posljedica hidrodinamičke uzbude Burke [11] (1969), Garrison [12] (1974). Zanimljiv i opsežan prikaz, ali samo linearnog odziva ISSC TLP-a (generičkog modela koji je posebno osmišljen u tu svrhu), različitim strukturalnim i hidrodinamičkim modelima 17 sudionika (istraživanje je provedeno u okviru ISSC-a, Odbora 1.2), objavljen je nešto kasnije, 1986. godine [13] i tu se zorno vidi koje su razlike u odzivu kao posljedica uglavnom različitih hidrodinamičkih modela i njihove računalne implementacije. Zanimljiv izvod linearne povratne krutosti pritegnute pučinske platforme prikazan je u radu Malenice [14] (2003).

Nelinearna dinamička analiza pritegnute pučinske platforme na harmonijskim valovima, a posebno na uzburkanom moru, predstavlja zahtjevnu zadaću [15]. Rani radovi koji postavljaju nelinearne formulacije krutosti različitog stupnja složenosti su radovi Burkea i Tighea [16] (1971), Kirka i Jaina [17] (1976), Natviga i Pendereda [18] (1977) te Denisea i Heafa [19] (1979). Omekšavajuća krutost pripona pretpostavlja se često u obliku $(EA/L) \cdot \cos^2 \alpha$, gdje α predstavlja kut otklona pripone. S obzirom da je u pravilu dopuštena relativno mala vrijednost tog kuta ta promjena se često i zanemaruje [20]. Blago očvršćujuća krutost horizontalnih stupnjeva slobode u pravilu se uzima kao funkcija isključivo vlastitog pomaka, npr. Morgan i Malaeb [21] (1983), Jain [22] (1997), Chandrasekaran i Jain [23] (2002), tj. pretpostavlja se da npr. krutost zalijetanja ovisi samo i isključivo o iznosu zalijetanja (a ne i drugim horizontalnim stupnjevima slobode gibanja). Zeng et al. [24] (2007) uočavaju višestruke nelinearnosti u dinamičkoj analizi pritegnutih pučinskih platformi.

Posljednji rad s ovom tematikom je Low [25] (2009), u kojem autor daje kritički osvrt na dosadašnje radove i koji predstavlja fizikalno najkonzistentniji pristup problemu nelinearne krutosti. U radu su izvedeni i sekantna i tangencijalna nelinearna krutost za svih 6 stupnjeva slobode gibanja, a u obzir je uzeto i sjedanje objekta s gotovo kružnom putanjom uslijed horizontalnih pomaka. Autor je pokazao da postoje značajne nelinearne sprege između različitih stupnjeva slobode gibanja (u izvodu jednadžbi koristio je energijski pristup, tj. Lagrangeove jednadžbe).

1.3. Cilj i hipoteza doktorskog rada

Cilj istraživanja je unaprjeđenje postojećih matematičkih modela i metoda nespregnutog proračuna (bez dinamičkog utjecaja pripona) dinamičkog odziva pritegnutih pučinskih objekata u preliminarnoj fazi projektiranja.

Hipoteza istraživanja:

U svrhu pouzdane analize dinamičkog odziva pritegnutih pučinskih objekata moguće je razlučiti učinke nelinearnosti od učinka međudjelovanja (između različitih stupnjeva slobode gibanja) na hidroelastični odziv. U tu svrhu moguće je postojeće nelinearne matematičke modele povratne krutosti unaprijediti razvojem obuhvatnijeg (fizikalno konzistentnog) nelinearnog matematičkog modela kojim će se obuhvatiti međudjelovanja između različitih stupnjeva slobode gibanja.

1.4. Metodologija istraživanja i struktura doktorskog rada

Istraživanje opisanog problema provedeno je kroz nekoliko faza. U prvoj fazi istraživanja analizirane su u stručnoj literaturi objavljene formulacije (linearne i nelinearne) povratne krutosti. Razmatrane su fizikalne pretpostavke, metodologija izvoda (odabrani pol rotacije), struktura matrice povratne krutosti (s naglaskom na različite sprege između stupnjeva slobode gibanja) i fizikalna konzistentnost pojedinih članova u matrici. Uočeni nedostaci i prikladna pojednostavljenja postali su temeljem novih formulacija povratne krutosti.

Druga faza istraživanja obuhvatila je izvod linearne povratne krutosti na primjeru pravokutne pritegnute pučinske platforme. Geometrijska krutost pripona izvedena je iz opće formulacije geometrijske krutosti, [26]. Članovi u matrici linearne povratne krutosti uspoređeni su s postojećim formulacijama, te je numerički izračunat utjecaj linearne povratne

krutosti na odziv TLP SPAR plovka plutajuće vjetroturbine. Jednadžbe gibanja riješene su u frekvencijskoj domeni.

U trećoj fazi istraživanja nelinearna povratna krutost, za proizvoljne pomake tijela u horizontalnoj ravnini (zalijetanje, zanošenje i zaošijanje), konstruirana je na temelju linearne povratne krutosti principom ravnoteže sila u pomaknutom položaju tijela. Sjedanje, kao geometrijsko ograničenje gibanja tijela uslijed sidrenog sustava, uzeto je u razmatranje, kao i činjenica da su raspregnuta visokofrekventna (lokalna) gibanja s vertikalnim stupnjevima slobode i niskofrekventna (globalna) gibanja s horizontalnim stupnjevima slobode. Izvedena formulacija uspoređena je s postojećim formulacijama nelinearne povratne krutosti. Na temelju sekantne matrice povratne krutosti, primjenjive u eksplicitnim metodama numeričke integracije jednadžbi gibanja, izvedena je tangencijalna matrica povratne krutosti, primjenjiva u implicitnim metodama numeričke integracije. Numerički je istražen utjecaj nelinearne povratne krutosti na odziv ISSC TLP-a s tri stupnja slobode gibanja u vertikalnoj ravnini. Hidrodinamička reakcija i uzbuda određeni su računalnim programom WAMIT, [27]. Analizirane su pojednostavljene jednadžbe gibanja, s obzirom da je dinamika tijela opisana sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda (konzistentan pristup bio bi sustav integro-diferencijalnih jednadžbi 2. reda Volterrinog tipa). Jednadžbe gibanja integrirane su u vremenskoj domeni eksplicitnom Runge-Kutta metodom 5. reda s uključenim rješenjem 4. reda (u svrhu korekcije duljine koraka prema zahtijevanoj točnosti), [28].

Četvrta faza istraživanja usmjerena je na izvod nelinearne povratne krutosti na drugačiji način, principom jednakosti potencijalne energije. Energijski pristup omogućio je drugačiji uvid u strukturu nelinearne povratne krutosti. Energijska formulacija uspoređena je s formulacijom izvedenom ravnotežom sila i s formulacijama dostupnim u literaturi na primjeru statičke analize proizvoljnog pomaka ISSC TLP-a uslijed narinute sile i momenta u horizontalnoj ravnini. Isti primjer analiziran je i metodom konačnih elemenata (LS-DYNA, [29]).

U petoj fazi istraživanja analiziran je utjecaj nelinearne povratne krutosti na dinamički odziv ISSC TLP-a sa svih šest stupnjeva slobode gibanja primjenom fizikalno konzistentnijeg okolišnog opterećenja. Linearno hidrodinamičko radijacijsko rješenje preslikano je iz frekvencijske domene (potencijalno strujanje; kolokacijska metoda rubnih elemenata; HYDROSTAR, [30]) u vremensku domenu upotrebom konvolucijskog integrala (Cummins, [7]). Narinuta je uzbuda morskih valova (sile 1. i 2. reda), vjetra i morske struje. Rezultirajuće jednadžbe gibanja predstavljaju sustav običnih Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi 2. reda koje su integrirane u vremenskoj domeni eksplicitnom

Runge-Kutta metodom 4. reda (računalni kod razvijen je u FORTRANU). Spektralnom analizom dinamičkog odziva procijenjen je utjecaj nelinearne povratne krutosti.

Doktorski rad izložen je kroz sedam poglavlja i tri priloga. U prvom poglavlju opisan je problem i postavljena je hipoteza doktorskog rada. Pregledom stručne literature iznesene su dosadašnje spoznaje te je ukratko opisana metodologija istraživanja.

U drugom poglavlju izvedena je formulacija linearne povratne krutosti. Geometrijska krutost pripona izvedena je iz opće formulacije geometrijske krutosti elastičnih tijela. Prikazana je transformacija matrice masa i krutosti ovisno o odabranom koordinatnom sustavu te utjecaj rubnih uvjeta na krajevima pripona na geometrijsku krutost.

Treće poglavlje obuhvaća formulaciju nelinearne povratne krutosti primjenom dvaju različitih principa, ravnoteže sila i jednakosti potencijalne energije. Povratna krutost izvedena je za proizvoljnu translaciju u horizontalnoj ravnini te posebno za veliki i za mali kut zaošijanja.

Četvrtim poglavljem prikazana je sprega između horizontalnih i vertikalnih stupnjeva slobode gibanja. Predloženo je utjecaj sjedanja, kao posljedicu horizontalnih gibanja, uključiti u jednadžbu gibanja kroz matricu krutosti (koja tom transformacijom postaje nesimetrična).

U petom poglavlju kritički je uspoređena izvedena formulacij nelinearne povratne krutosti s formulacijama poznatim u literaturi. Zaključeno je da je izvedena povratna krutost korak prema fizikalnoj konzistentnosti jednadžbe gibanja pritegnutih pučinskih platformi.

U šestom poglavlju prikazan je utjecaj povratne krutosti na statički i dinamički odziv pritegnutih pučinskih platformi. Analizirana su dva numerička primjera (TLP SPAR plovak i ISSC TLP), modelima opterećenja različite složenosti kako bi se naglasili različiti utjecaji povratne krutosti.

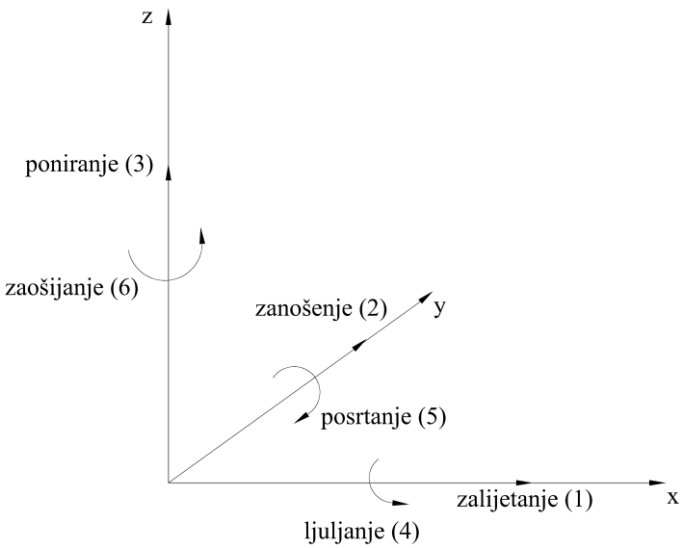
U sedmom poglavlju iznesena su zaključna razmatranja doktorskog rada te su predložene smjernice za daljnja istraživanja.

Prilog A prikazuje utjecaj elastičnog istezanja pripona na krutost u smjeru zalijetanja. U prilogu B iznesene su teorijske osnove preslikavanja linearnih hidrodinamičkih sila iz frekvencijske u vremensku domenu (tzv. Cumminsov pristup). U prilogu C prikazana je mogućnost primjene kutova rotacije kao generaliziranih koordinata.

2. LINEARNA POVRATNA KRUTOST

2.1. Definicija linearne povratne krutosti

Pretpostavljen je desni Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u ravnini neporemećene slobodne površine, slika 2.1. Formulacija linearne krutosti [31] izvedena je na primjeru pravokutne pritegnute pučinske platforme s *N* pripona, slika 2.2.



Slika 2.1 - Odabrani koordinatni sustav s odgovarajućim stupnjevima slobode gibanja

S obzirom da je krutost (konstrukcije) pučinske platforme značajno veća od krutosti (sidrenih) pripona, u daljnjem razmatranju pučinska platforma pretpostavit će se krutom. Linearna povratna krutost sastoji se iz 3 različita dijela,

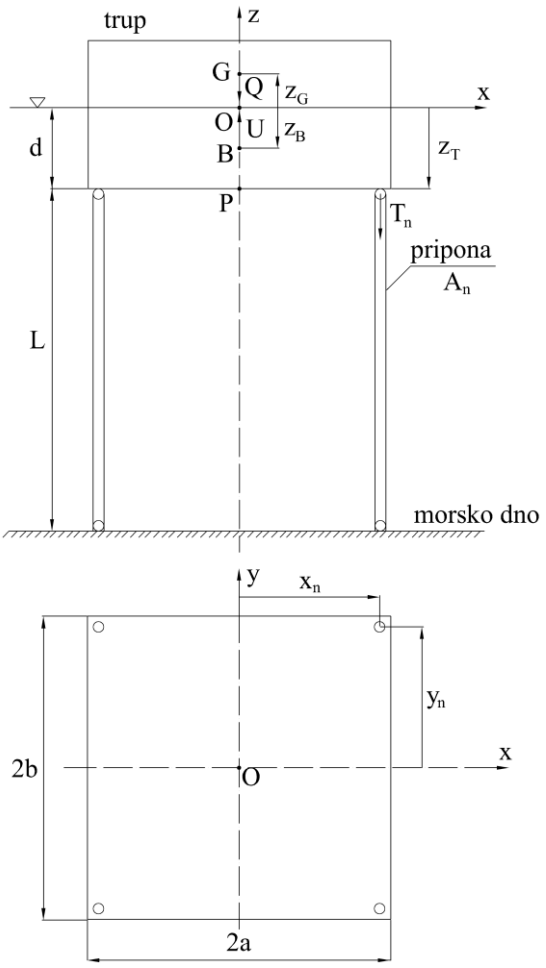
$$[K]_p := [K]^C + [C] + [K]^G \tag{2.1}$$

gdje je:

$[K]^C$ - konvencionalna aksijalna krutost pripona,

$[C]$ - hidrostatska krutost pučinske platforme (s uključenim utjecajem pripona),

$[K]^G$ - geometrijska krutost pripona (značajka sidrenog sustava).



Slika 2.2 - Pravokutna pritegnuta pučinska platforma

2.2. Aksijalna krutost pripona

Neka su pripone tankostjene čelične cijevi zanemarive krutosti na savijanje. Gibanja pritegnute pučinske konstrukcije u vertikalnoj ravnini (poniranje, ljuljanje i posrtanje) mijenjaju silu natega u priponama. Kako je krutost klasično definirana kao odnos između generalizirane sile i generaliziranog pomaka, za krutost u vertikalnom smjeru vrijedi:

$$K_{33}^{C} = \frac{EA}{L}, \quad A = \sum_{n=1}^{N} A_n \,, \tag{2.2}$$

gdje je A ukupna površina poprečnog presjeka pripona, a E modul elastičnosti materijala iz kojeg su pripone izrađene.

Moment u smjeru ljuljanja (posrtanja) određen je izrazom:

$$M_x = \sum_{n=1}^{N} F_z^n y_n, \quad F_z^n = \frac{EA_n}{L}\delta_z^n, \quad \delta_z^n = y_n \varphi_x \,. \tag{2.3}$$

Za krutost u smjeru ljuljanja, odnosno posrtanja vrijedi:

$$K_{44}^{C} = \frac{EI_x}{L}, \quad I_x = \sum_{n=1}^{N} A_n y_n^2 , \tag{2.4}$$

$$K_{55}^{C} = \frac{EI_y}{L}, \quad I_y = \sum_{n=1}^{N} A_n x_n^2 \tag{2.5}$$

gdje su I_x i I_y momenti tromosti površine poprečnog presjeka pripona oko x-osi, odnosno y-osi.

Promotrimo li izraze za krutost u smjeru ljuljanja, odnosno posrtanja, svrsishodno je primijetiti izraze za momente tromosti površine poprečnog presjeka pripona. U tom smislu sidreni sustav pritegnute pučinske konstrukcije moguće je promatrati i kao složenu gredu s razmaknutim vlaknima.

2.3. Hidrostatska krutost (s uključenim utjecajem pripona)

U hidroelastičnoj analizi elastičnog plutajućeg tijela prikladno je koristiti metodu superpozicije prirodnih oblika vibriranja tijela. Uobičajena hidrostatska krutost sastoji se od varijacije hidrostatskog tlaka, varijacije vektora normale i prirodnog oblika vibriranja te gravitacijskog dijela, [26]:

$$C_{ij} = C_{ij}^{p} + C_{ij}^{nh} + C_{ij}^{m} , \tag{2.6}$$

$$C_{ij}^{p} = \rho g \int_S h_k^i \, h_3^j \, n_k \, \mathrm{d}S , \tag{2.7}$$

$$C_{ij}^{nh} = \rho g \int_S Z \, h_k^i \, h_{l,l}^j \, n_k \, \mathrm{d}S , \tag{2.8}$$

$$C_{ij}^{m} = g \int_V \rho_S \, h_k^i \, h_{3,k}^j \, \mathrm{d}V , \tag{2.9}$$

gdje je:

$h_{k,l}^i$ - l-ta derivacija k-te komponente prirodnog oblika vibriranja h^i,

S - oplakana površina,

n_k - komponenta vektora normale na oplakanu površinu,

V - volumen strukture,

ρ - gustoća vode,

ρ_S - gustoća materijala konstrukcije.

U prethodnim izrazima pretpostavljeno je zbrajanje po ponovljenom indeksu. Za pritegnutu pučinsku konstrukciju značajni su kruti prirodni oblici vibriranja i u tom se slučaju opća hidrostatska krutost reducira na izraze poznate u analizi stabilnosti plutajućeg tijela, [32].

Za slučaj razmatrane pravokutne pritegnute pučinske konstrukcije težište površine vodne linije nalazi se na vertikalnoj osi koja prolazi težištem mase i težištem istisnine te je matrica hidrostatske krutosti *dijagonalna*, sa sljedećim koeficijentima za poniranje, ljuljanje i posrtanje:

$$C_{33}^0 = \rho\, g\, A_{WL}^0\,, \tag{2.10}$$

$$C_{44}^0 = \rho\, g\left[I_{WLX}^0 + V^0(z_B^0 - z_G^0)\right], \tag{2.11}$$

$$C_{55}^0 = \rho\, g\left[I_{WLY}^0 + V^0(z_B^0 - z_G^0)\right], \tag{2.12}$$

gdje su:

A_{WL}^0 - površina vodne linije,

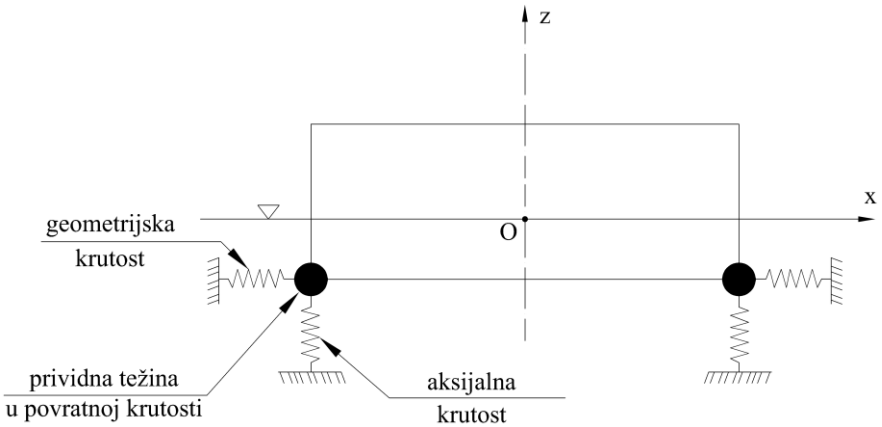
I_{WLX}^0, I_{WLY}^0 - moment tromosti površine vodne linije oko *x*-osi, odnosno *y*-osi,

V^0 - volumen istisnine,

z_B^0 - vertikalna koordinata istisnine,

z_G^0 - vertikalna koordinata težišta.

Važno je primijetiti da pritegnuta pučinska konstrukcija ne zadovoljava klasičan uvjet plovnosti, tj. uzgon *U veći* je od težine konstrukcije *Q*. Ta razlika uravnotežena je silama natega u priponama (sidreni sustav), koje je kod formulacije hidrostatske krutosti prikladno promatrati kao koncentrirane težine smještene na mjestu spoja pripone s trupom (položaj zjevače), slika 2.3:



Slika 2.3 - Model krutosti pritegnute pučinske platforme

$$\sum_{n=1}^{N} T_n = U - Q\,. \tag{2.13}$$

Koeficijenti hidrostatske krutosti, s uključenim utjecajem pripona, imaju sljedeći oblik:

$$C_{33} = \rho\, g\, A_{WL}\,, \tag{2.14}$$

$$C_{44} = \rho\, g\, I_{WLX} + U\, z_B - Q\, z_G - \sum_{n=1}^{N} T_n z_T\,, \tag{2.15}$$

$$C_{55} = \rho\, g\, I_{WLY} + U\, z_B - Q\, z_G - \sum_{n=1}^{N} T_n z_T\,, \tag{2.16}$$

gdje je z_T vertikalna koordinata spoja pripone s trupom (položaj zjevače). Sve veličine u izrazima (2.14), (2.15) i (2.16) odnose se na povećani uron platforme uslijed djelovanja sile natega u priponama.

2.4. Geometrijska krutost

Vanjske sile koje djeluju na pritegnutu pučinsku konstrukciju uravnotežene su djelovanjem unutarnjih sila koje ovise o geometrijskoj krutosti pripona. Geometrijsku krutost moguće je odrediti iz opće formulacije geometrijske krutosti, [26]:

$$K_{ij}^{G} = \int_{V} \sigma_{kl}\, h_{m,k}^{i}\, h_{m,l}^{j}\, \mathrm{d}V\,, \tag{2.17}$$

gdje je σ_{kl} tenzor naprezanja. U prethodnom izrazu pretpostavljeno je zbrajanje po ponovljenom indeksu.

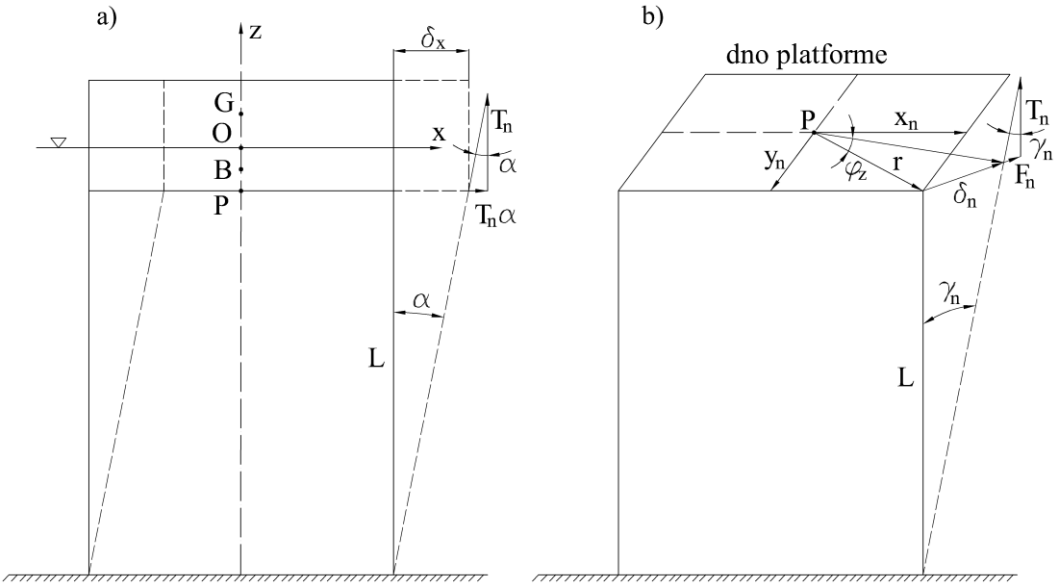
Ukoliko priponu promatramo kao štap tada vrijedi:

$$\sigma_{z\,z} = \frac{\sum_{n=1}^{N} T_n}{\sum_{n=1}^{N} A_n}, \quad \mathrm{d}V = \sum_{n=1}^{N} A_n\, \mathrm{d}\,z\,. \tag{2.18}$$

Za pomak pripone kao krutog tijela u smjeru zalijetanja vrijedi:

$$h_x^1 = \frac{L + d + z}{L}\,, \tag{2.19}$$

pri čemu je $-(L+d) \le z \le -d$, slika 2.4. Derivacija narinutog prirodnog oblika vibriranja je $h^1_{x,z} = \frac{1}{L}$.



Slika 2.4 - Translacijski i rotacijski pomak pritegnute pučinske platforme

Koeficijent geometrijske krutosti za zalijetanje i zanašanje iznosi:

$$K^G_{11} = K^G_{22} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{L}. \tag{2.20}$$

Za prirodni oblik zaošijanja *n*-te pripone prema slici 2.4, vrijedi:

$$h^6_r = \frac{(L+d+z)r_n}{L}, \tag{2.21}$$

odnosno po komponentama:

$$h^6_x = \frac{(L+d+z)\,y_n}{L}, \tag{2.22}$$

$$h^6_y = \frac{(L+d+z)\,x_n}{L}. \tag{2.23}$$

Koeficijent geometrijske krutosti za zanašanje iznosi:

$$K^G_{66} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n(x_n^2 + y_n^2)}{L}. \tag{2.24}$$

2.5. Matrica linearne povratne krutosti

Zbrajajući odgovarajuće elemente konvencionalne, hidrostatske i geometrijske krutosti dobije se ukupna linearna povratna krutost:

$$K_{11} = K_{22} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{L}, \tag{2.25}$$

$$K_{33} = \rho\, g\, A_{WL} + \frac{EA}{L}, \tag{2.26}$$

$$K_{44} = \rho\, g\, I_{WLX} + U\, z_B - Q\, z_G - \sum_{n=1}^{N} T_n\, z_T + \frac{EI_x}{L}, \tag{2.27}$$

$$K_{55} = \rho\, g\, I_{WLY} + U\, z_B - Q\, z_G - \sum_{n=1}^{N} T_n\, z_T + \frac{EI_y}{L}, \tag{2.28}$$

$$K_{66} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{L}(x_n^2 + y_n^2)\,. \tag{2.29}$$

Svi ostali elementi matrice linearne povratne krutosti jednaki su 0,

$$[K]_P = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & & \\ & K_{22} & & & & & \\ & & K_{33} & & & & \\ & & & K_{44} & & & \\ & & & & K_{55} & & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Matrica $[K]_P$ je dijagonalna zbog činjenice da je dno pritegnute pučinske platforme odabrano kao pol rotacije P, slika 2.4. Samo u tom slučaju stupnjevi slobode gibanja *neće* biti spregnuti preko krutosti.

2.6. Matrica masa i transformacija krutosti

S obzirom da je u prethodnom poglavlju naznačeno kako ne postoji sprega između stupnjeva slobode gibanja preko matrice krutosti, pokazat će se da se ta sprega ostvaruje preko matrice masa.

Sljedeće inercijske sile ovise i o pomacima i o zakretima, što nužno za posljedicu ima vandijagonalne elemente u matrici mase:

$$F_x^i = m\ddot{\delta}_x + m(z_G - z_T)\ddot{\varphi}_y, \tag{2.31}$$

$$F_y^i = m\ddot{\delta}_y - m(z_G - z_T)\ddot{\varphi}_x, \tag{2.32}$$

$$M_x^i = -m(z_G - z_T)\ddot{\delta}_y + J_x^P \ddot{\varphi}_x, \tag{2.33}$$

$$M_y^i = m(z_G - z_T)\ddot{\delta}_x + J_y^P \ddot{\varphi}_y, \tag{2.34}$$

gdje su momenti tromosti mase:

$$J_x^P = J_x^G + m(z_G - z_T)^2, \tag{2.35}$$

$$J_y^P = J_y^G + m(z_G - z_T)^2. \tag{2.36}$$

Ukupna matrica masa (s obzirom na pol rotacije *P*) glasi:

$$[M]_P = \begin{bmatrix} m & & & & mz_{GT} & \\ & m & & -mz_{GT} & & \\ & & m & & & \\ & -mz_{GT} & & J_x^P & & \\ mz_{GT} & & & & J_y^P & \\ & & & & & J_z \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

gdje je $z_{GT} = z_G - z_T$.

Iz izraza (2.37) očigledna je spregnutost vibracija preko matrice masa $[M]_P$. Ukoliko se težište sustava *G* odabere kao pol rotacije, što je uobičajeno kod rješenja jednadžbe gibanja plutajućih tijela (i pomalo neprikladno kod formulacije elemenata matrice krutosti zbog implicirane sprege između različitih stupnjeva slobode gibanja), između pomaka vrijede slijedeći odnosi:

$$\delta_x^P = \delta_x^G - (z_G - z_T)\varphi_y, \tag{2.38}$$

$$\delta_y^P = \delta_y^G + (z_G - z_T)\varphi_x. \tag{2.39}$$

Na temelju izraza (2.38) i (2.39) formulirana je matrica transformacije pomaka:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & & & & -z_{GT} & \\ & 1 & & z_{GT} & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.40}$$

Korištenjem matrice transformacije [*T*] moguće je transformirati matricu masa i krutosti na točku *G* kao pol rotacije,

$$[K]_G = [T]^T [K]_P [T], \tag{2.41}$$

$$[M]_G = [T]^T [M]_P [T]. \tag{2.42}$$

Transformirana matrica krutosti glasi:

$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & -z_{GT}K_{11} & \\ & K_{22} & & z_{GT}K_{22} & & \\ & & K_{33} & & & \\ & z_{GT}K_{22} & & K_{44}+z_{GT}^2K_{22} & & \\ -z_{GT}K_{11} & & & & K_{55}+z_{GT}^2K_{11} & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}. \tag{2.43}$$

Transformirana matrica masa glasi:

$$[M]_G = \begin{bmatrix} m & & & & & \\ & m & & & & \\ & & m & & & \\ & & & J_x^G & & \\ & & & & J_y^G & \\ & & & & & J_z \end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

Nakon transformacije na pol u točki *G*, matrica masa postala je dijagonalna, dok se sprega između stupnjeva slobode gibanja iskazuje u matrici krutosti. Ukoliko je koordinatni sustav smješten u ishodište neporemećene slobodne površine, što je uobičajeno u brodskoj hidrodinamici, vandijagonalni elementi pojavit će se i u matrici masa i u matrici krutosti.

2.7. Utjecaj rubnih uvjeta na krajevima pripona na geometrijsku krutost

Neka se pritegnuta pučinska konstrukcija translatira *jediničnim* pomakom u smjeru zalijetanja. Deformaciju pripone (sidrene linije) pretpostavimo u obliku polinoma,

$$h_x(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 . \tag{2.45}$$

Zbog jednostavnosti izvoda pretpostavljeno je da se koordinatni sustav nalazi u točki *P*, slika 2.4.

Razmotrene su 3 kombinacije rubnih uvjeta na priponama (veza sa zjevačom na plutajućem tijelu / veza s morskim dnom) te su (statički) određeni odgovarajući oblici vibriranja pripona:

(1) zglob / zglob

$$\text{(i) } h_x(0)=1, \tag{2.46}$$

$$\text{(ii) } h_{x,z}(0)=\frac{-1}{L}, \tag{2.47}$$

$$\text{(iii) } h_x(-L)=0, \tag{2.48}$$

$$\text{(iv) } h_{x,z}(-L)=-\frac{1}{L}. \tag{2.49}$$

Za zadane rubne uvjete moguće je odrediti koeficijente pretpostavljenog polinoma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -L^3 & L^2 & -L & 1 \\ 3L^2 & -2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/L \\ 0 \\ -1/L \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow h_x(z)=1+\frac{z}{L}. \tag{2.51}$$

(2) upeto / upeto

$$\text{(i) } h_x(0)=1, \tag{2.52}$$

$$\text{(ii) } h_{x,z}(0)=0, \tag{2.53}$$

$$\text{(iii) } h_x(-L)=0, \tag{2.54}$$

$$\text{(iv) } h_{x,z}(-L)=0. \tag{2.55}$$

U izrazu (2.50) uvršten je novi vektor rubnih uvjeta na desnoj strani te se rješenjem linearnog sustava dobije:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/L^3 \\ -3/L^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow h_x(z)=1-3\left(\frac{z}{L}\right)^2-2\left(\frac{z}{L}\right)^3. \tag{2.56}$$

(3) upeto / zglob

$$\text{(i)}\ h_x(0)=1, \tag{2.57}$$

$$\text{(ii)}\ h_{x,z}(0)=0, \tag{2.58}$$

$$\text{(iii)}\ h_x(-L)=0, \tag{2.59}$$

$$\text{(iv)}\ h_{x,z}(-L)=\frac{1}{L}. \tag{2.60}$$

Rješenjem linearnog sustava (2.50) dobije se:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/L^3 \\ -2/L^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow h_x(z)=1-2\left(\frac{z}{L}\right)^2-\left(\frac{z}{L}\right)^3 \tag{2.61}$$

Poznavajući oblike vibriranja pripona za odgovarajuće rubne uvjete, upotrebom izraza za geometrijsku krutost, (2.17), moguće je odrediti koeficijente geometrijske krutosti za zalijetanje za sva tri razmatrana slučaja:

(1) zglob / zglob

$$h_{x,z}=\frac{1}{L}, \tag{2.62}$$

$$\sigma_{zz}=\frac{T_n}{A_n}, \tag{2.63}$$

$$K_{11}^G=\int_{-L}^{0}\frac{T_n}{A_n}\frac{1}{L^2}A_n\,\mathrm{d}z=\frac{T_n}{L}. \tag{2.64}$$

(2) upeto / upeto

$$h_{x,z}=\frac{6}{L}\left[\left(\frac{z}{L}\right)^2-\frac{z}{L}\right], \tag{2.65}$$

$$K_{11}^G=\frac{G^2T_n}{L^2}\int_{-L}^{0}\left[\left(\frac{z}{L}\right)^2-\frac{z}{L}\right]\mathrm{d}z=\frac{36}{30}\frac{T_n}{L}=1.2\frac{T_n}{L}. \tag{2.66}$$

(3) upeto / zglob

$$h_{x,z} = \frac{1}{L}\left[3\left(\frac{z}{L}\right)^2 - 4\frac{z}{L}\right], \tag{2.67}$$

$$K_{11}^G = \frac{T_n}{L^2}\int_{-L}^{0}\left[3\left(\frac{z}{L}\right)^2 - 4\frac{z}{L}\right]\mathrm{d}\,z = \frac{17}{15}T_n \cong 1.13\frac{T_n}{L}\,. \tag{2.68}$$

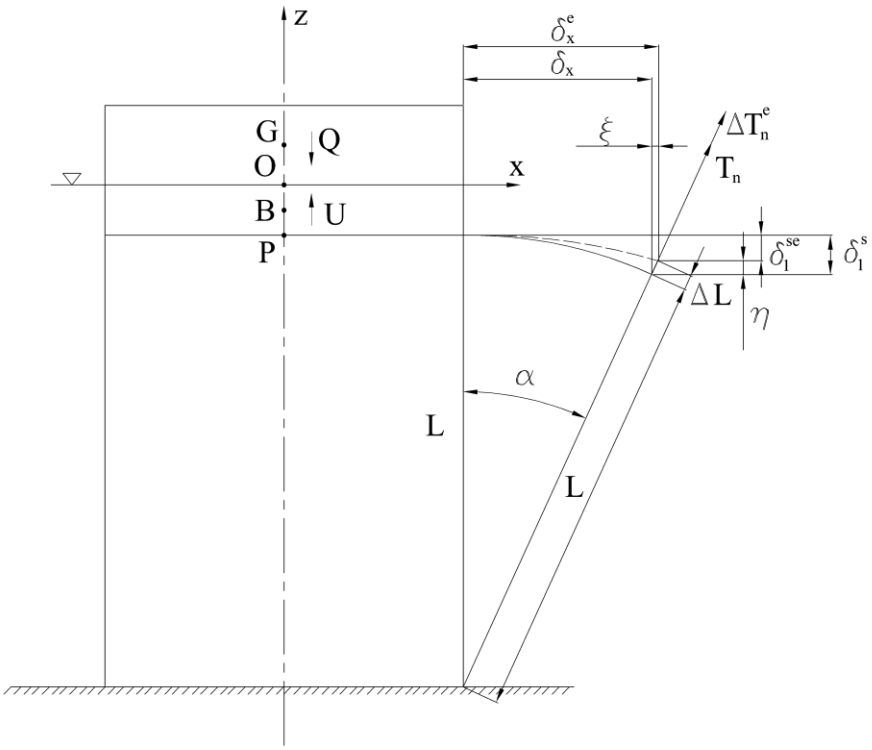
Razmatrajući izraze (2.64), (2.66) i (2.68) može se uočiti utjecaj deformacije pripone (u ovisnosti o narinutim rubnim uvjetima) na geometrijsku krutost.

3. NELINEARNA POVRATNA KRUTOST

3.1. Formulacija krutosti temeljena na ravnoteži sila

3.1.1. Gibanja u horizontalnoj ravnini

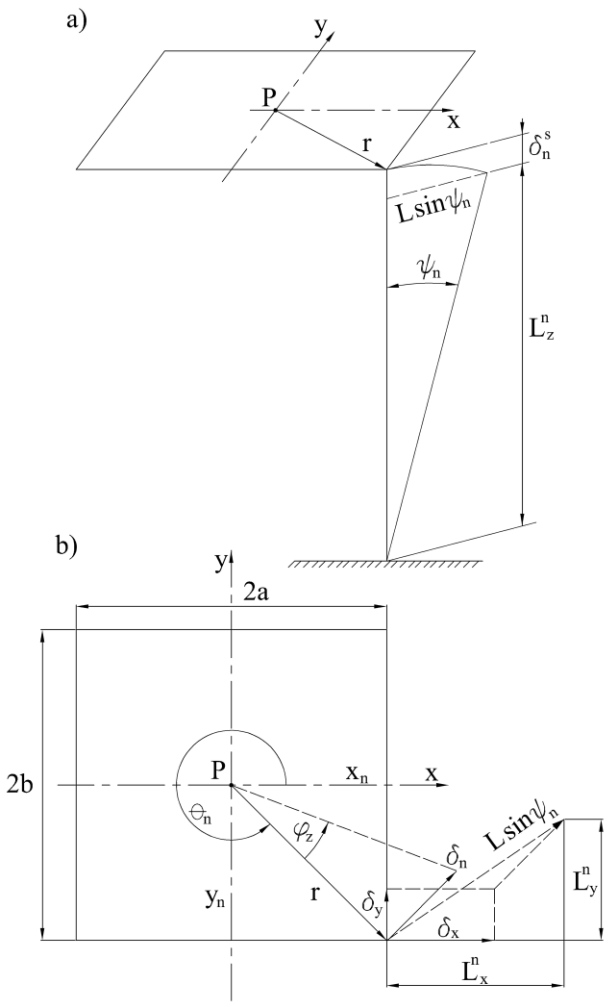
Pritegnuta pučinska konstrukcija giba se kao kruto tijelo na elastičnoj podlozi. Ta gibanja moguće je razdvojiti u dva skupa. Prvom skupu pripadaju zalijetanje, zanošenje i zaošijanje. Njihova značajka je gibanje s relativno velikom amplitudom pomaka i dugačkim periodom (niskom frekvencijom) kao posljedica male geometrijske krutosti pripona i rezonantnih pojava uslijed djelovanja uzbudnih sila valova 2. reda. Drugom skupu pripadaju poniranje, ljuljanje i posrtanje. Značajka ovih gibanja je relativno mala amplituda pomaka i kratki periodi (visoke frekvencije) kao posljedica velike konvencionalne krutosti i uzbudnih sila valova 1. reda. Sile natega u priponama (i hidrostatske sile) *nelinearna* su funkcija pomaka, što za posljedicu ima promjenljive koeficijente povratne krutosti. Gibanja u horizontalnoj ravnini (gibanja s velikom amplitudom pomaka) utječu na gibanja u vertikalnoj ravnini (gibanja s malom amplitudom pomaka). Obrat ne vrijedi. Posljedica navedenog je nužnost određivanja niskofrekventnih gibanja u horizontalnoj ravnini *prije* određivanja visokofrekventnih gibanja u vertikalnoj ravnini.



Slika 3.1 - Proizvoljna translacija pritegnute pučinske platforme

U analizi odziva sidrenog sustava postavlja se pitanje utjecaja istezanja pripona. U tu svrhu analizirano je zalijetanje pravokutne pritegnute pučinske platforme, prilog A. Pomak u smjeru zalijetanja δ_x^e uzrok je sjedanju δ_1^{se}, dodatnoj sili uzgona i sili natega u priponama. Zbog elastičnosti pripona dolazi do njihova istezanja, koje se prema analizi provedenoj u prilogu A može zanemariti. U daljnjem radu pretpostavljene su krute pripone te se umjesto pomaka δ_x^e i δ_1^{se} koriste pomaci δ_x i δ_1^s, slika 3.1.

Između *velikih* pomaka u horizontalnoj ravnini postoji međusobna sprega koju je dosljedno moguće uključiti u matematički model jedino ukoliko se svi pomaci u horizontalnoj ravnini narinu istodobno na pučinsku platformu, [33], tj. razmatra se ravnoteža sila u položaju uzrokovanom istodobnim pomacima u svim stupnjevima slobode gibanja u horizontalnoj ravnini, slika 3.2



Slika 3.2 - Pomak pučinske platforme uslijed istodobne translacije i rotacije u horizontalnoj ravnini

U daljnjem izvodu jednadžbi sve veličine koje se odnose na pojedinu priponu označene su indeksom *n*. Također, ukoliko nije drugačije naznačeno, pretpostavlja se mali kut zaošijanja.

Za koordinate vrha pripone (spoj sa zjevačom) vrijedi:

$$L_x^n = \delta_x - \delta_n \sin\theta_n, \tag{3.1}$$

$$L_y^n = \delta_y + \delta_n \cos\theta_n, \tag{3.2}$$

$$L_z^n = \sqrt{L^2 - (L_x^n)^2 - (L_y^n)^2} = \left[L^2 - (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_n^2) + 2\delta_n(\delta_x \sin\theta_n - \delta_y \cos\theta_n)\right]^{1/2}. \tag{3.3}$$

U daljnjem izvodu važni su i sljedeći odnosi:

$$\delta_n = r\varphi_z, \quad r\sin\theta_n = y_n, \quad r\cos\theta_n = x_n. \tag{3.4}$$

Komponente sile natega T^n u priponi u *pomaknutom* položaju proporcionalne su (uslijed pretpostavke o krutim priponama) koordinatama vrha pripone, (3.1), (3.2) i (3.3):

$$T_x^n = \frac{T^n}{L}(\delta_x - y_n\varphi_z), \tag{3.5}$$

$$T_y^n = \frac{T^n}{L}(\delta_y + x_n\varphi_z), \tag{3.6}$$

$$T_z^n = \frac{T^n}{L}L_z^n. \tag{3.7}$$

Komponente rezultirajuće sile sidrenog sustava koja djeluje na pučinsku platformu su:

$$T_x = \sum_{n=1}^{N} T_x^n = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N} T^n\delta_x = \frac{T}{L}\delta_x, \tag{3.8}$$

$$T_y = \sum_{n=1}^{N} T_y^n = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N} T^n\delta_y = \frac{T}{L}\delta_y, \tag{3.9}$$

$$T_z = \sum_{n=1}^{N} T_z^n = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N} T^n L_z^n = \frac{T}{L}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_z^n. \tag{3.10}$$

Zbog *simetrije* razmatrane pravokutne pritegnute pučinske konstrukcije koordinate pojedinih pripona x_n i y_n, jednadžba (3.4), poništavaju se tijekom zbrajanja u jednadžbama (3.8) i (3.9).

Prethodna tvrdnja ne vrijedi u slučaju jednadžbe (3.10). Ukoliko postoji zaošijanje konstrukcije, vrijednosti vertikalne koordinate pojedinih pripona L_z^n međusobno se razlikuju.

Predložen pristup rješenju tog problema je upotreba algebarske srednje vrijednosti vertikalnih koordinata pripona i razvoj te srednje vrijednosti u red potencija:

$$L_z = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_z^n = L\left\{1 - \frac{1}{2L^2}\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2\right] - \frac{1}{8L^4}\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2L^4}\left(b^2\delta_x^2 + a^2\delta_y^2\right)\varphi_z^2 - \ldots\right\}, \tag{3.11}$$

gdje su 2*a* i 2*b* udaljenosti između pripona, slika 3.2.

Trigonometrijske funkcije $\sin\theta_n$ i $\sin\theta_n$ i njihovi umnošci poništavaju se tijekom zbrajanja u jednadžbi (3.11). Korištenjem izraza (3.4) za preostale trigonometrijske funkcije koje se pojavljuju u jednadžbi (3.11) vrijedi:

$$r^2\sum_{n=1}^{N}\sin^2\theta_n = 4b^2, \quad r^2\sum_{n=1}^{N}\cos^2\theta_n = 4a^2. \tag{3.12}$$

Korištenjem jednadžbe (3.12) kutovi θ_n nestaju iz izraza za L_z, jednadžba (3.11). Razlike $L_z^n - L_z$ uzrokuju zanemarivi nagib i pretegu/zategu pučinske platforme.

Gibanje vrha pripone uzrok je dodatnoj sili natega ΔT_n, koja se određuje iz uvjeta ravnoteže sila u vertikalnom smjeru:

$$U + \Delta U = Q + \sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n)\frac{L_z}{L}, \tag{3.13}$$

gdje je *Q* sila težine platforme.

Dodatna sila uzgona ΔU uzrokovana je sjedanjem pučinske platforme, $\delta^s = L - L_z$, i iznosi:

$$\Delta U = \rho\, g\, A_{WL}\delta^s, \tag{3.14}$$

gdje je A_{WL} površina vodne linije.

Upotrebom jednadžbi (3.13), (3.14) i klasičnog uvjeta plovnosti vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta T^n = \left(\sum_{n=1}^{N}T^n + \rho\, g\, A_{WL}L\right)\frac{\delta^s}{L_z} = \left(T + \rho\, g\, A_{WL}L\right)\frac{\delta^s}{L_z}. \tag{3.15}$$

Horizontalna komponenta ukupne sile sidrenog sustava, jednadžba (3.8), iznosi:

$$F_x = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n)\,\delta_x = \frac{1}{L}(T + \Delta T)\delta_x. \tag{3.16}$$

Jednadžbu (3.16) prikladno je napisati u obliku

$$F_x = \tilde{K}_0 \cdot \delta_x, \tag{3.17}$$

gdje je:

$$\tilde{K}_0 = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{T^n}{L_z} + \rho\, g\, A_{WL}\,\frac{\delta^s}{L_z} = \\ = \frac{T}{L_z} + \rho\, g\, A_{WL}\,\frac{\delta^s}{L_z} \tag{3.18}$$

povratna krutost tijekom zalijetanja.

Na identičan način moguće je upotrebom jednadžbe (3.9) pokazati da u smjeru zanošenja vrijedi

$$F_y = \tilde{K}_0 \cdot \delta_y, \tag{3.19}$$

odnosno da je krutost tijekom zanošenja *jednaka* krutosti tijekom zalijetanja.

Sila koja uzrokuje rotaciju pučinske platforme, slika 3.2, iznosi:

$$F_\varphi = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n)\,(-\delta_x \sin\theta_n + \delta_y \cos\theta_n + \delta_n). \tag{3.20}$$

Na temelju jednadžbe (3.20), uzevši u obzir jednadžbu (3.4), za moment sidrenog sustava pučinske platforme vrijedi:

$$M_z = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n)\,(-y_n\delta_x + x_n\delta_y + r^2\varphi_z). \tag{3.21}$$

Izraz (3.21) prikladno je zapisati kao

$$M_z = r^2\tilde{K}_0\,\varphi_z, \tag{3.22}$$

pri čemu su se članovi povezani s translacijskim pomacima δ_x i δ_y poništili kao posljedica simetrije razmatrane pravokutne pritegnute pučinske konstrukcije.

Koeficijenti povratne krutosti koji se pojavljuju u jednadžbama (3.17), (3.19) i (3.22) elementi su *sekantne* matrice krutosti:

$$\tilde{K}_{11} = \tilde{K}_{22} = \tilde{K}_0, \tag{3.23}$$

$$\tilde{K}_{66} = r^2\,\tilde{K}_0. \tag{3.24}$$

U jednadžbama (3.23) i (3.24) važno je primijetiti da je povratna krutost nelinearna funkcija *svih* stupnjeva slobode gibanja u horizontalnoj ravnini i da je *jednaka* za bilo koji horizontalni smjer.

Numerička integracija nelinearnih jednadžbi gibanja uobičajeno se izvodi koračnim algoritmima. U tu svrhu potrebno je formulirati *tangentnu* matricu krutosti. Jednadžba ravnoteže sila/momenata u jednom koraku numeričke metode glasi:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_z \end{Bmatrix} = \left[\tilde{K}^t\right] \begin{Bmatrix} \Delta\delta_x \\ \Delta\delta_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\varphi_z \end{Bmatrix}, \tag{3.25}$$

gdje je

$$\left[\tilde{K}^t\right] = \frac{\partial\langle F\rangle}{\partial\{\delta\}} \tag{3.26}$$

tangentna matrica krutosti,

$$\{\delta\}^T = \langle \delta_x, \delta_y, 0, 0, 0, \varphi_z \rangle \tag{3.27}$$

je vektor pomaka, a

$$\langle F\rangle = \langle \tilde{K}_0\,\delta_x, \tilde{K}_0\,\delta_y, 0, 0, 0, r^2\tilde{K}_0\,\varphi_z \rangle \tag{3.28}$$

je vektor sile određen na temelju koeficijenata sekantne krutosti, jednadžbe (3.23) i (3.24). Koristeći izraz za sjedanje, $\delta^s = L - L_z$, te jednadžbu (3.11) za L_z i jednadžbu (3.18) za $\tilde{K}_0$, moguće je izvesti izraze za elemente tangentne matrice krutosti (uz zanemarivanje malih veličina višeg reda):

$$\tilde{K}^t_{11} = \frac{C}{L_z}\left[1 + \frac{\delta_x^2}{L\,L_z}\right] - \rho\,g\,A_{WL}, \tag{3.29}$$

$$\tilde{K}^t_{22} = \frac{C}{L_z}\left[1 + \frac{\delta_y^2}{L\,L_z}\right] - \rho\,g\,A_{WL}, \tag{3.30}$$

$$\tilde{K}^t_{66} = \frac{C\,r^2}{L_z}\left[1 + \frac{(r\,\varphi_z)^2}{L\,L_z}\right] - \rho\,g\,A_{WL}\,r^2, \tag{3.31}$$

$$\tilde{K}^t_{12} = \tilde{K}^t_{21} = \frac{C}{L}\frac{\delta_x\,\delta_y}{L_z^2}, \tag{3.32}$$

$$\tilde{K}^t_{16} = \tilde{K}^t_{61} = \frac{C\,r^2}{L}\frac{\delta_x\,\varphi_z}{L_z^2}, \tag{3.33}$$

$$\tilde{K}^t_{26} = \tilde{K}^t_{62} = \frac{C\,r^2}{L}\frac{\delta_y\,\varphi_z}{L_z^2}, \tag{3.34}$$

gdje je

$$C = \sum_{n=1}^{N} T^n + \rho\, g\, A_{WL}\, L\,. \tag{3.35}$$

Važno je primijetiti da je tangentna matrica krutosti *simetrična*,

$$\left[\tilde{K}^t\right] = \begin{bmatrix} \tilde{K}^t_{11} & \tilde{K}^t_{12} & & \tilde{K}^t_{16} \\ \tilde{K}^t_{21} & \tilde{K}^t_{22} & & \tilde{K}^t_{26} \\ & & & \\ & & & \\ \tilde{K}^t_{61} & \tilde{K}^t_{62} & & \tilde{K}^t_{66} \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Upotrebom jednadžbe (3.11) za L_z, uz zanemarivanje malih veličina višeg reda, izraze (3.29)-(3.34) moguće je zapisati u eksplicitnom obliku:

$$\tilde{K}^t_{11} \approx \frac{T}{L} + \frac{C}{2L^3}\left[3\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\,\varphi_z)^2\right], \tag{3.37}$$

$$\tilde{K}^t_{22} \approx \frac{T}{L} + \frac{C}{2L^3}\left[\delta_x^2 + 3\delta_y^2 + (r\,\varphi_z)^2\right], \tag{3.38}$$

$$\tilde{K}^t_{66} \approx \frac{r^2\,T}{L} + \frac{C\,r^2}{2L^3}\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + 3(r\,\varphi_z)^2\right], \tag{3.39}$$

$$\tilde{K}^t_{12} = \tilde{K}^t_{21} = \frac{C}{L^3}\,\delta_x\,\delta_y\,, \tag{3.40}$$

$$\tilde{K}^t_{16} = \tilde{K}^t_{61} = \frac{C\,r^2}{L^3}\,\delta_x\,\varphi_z\,, \tag{3.41}$$

$$\tilde{K}^t_{26} = \tilde{K}^t_{62} = \frac{C\,r^2}{L^3}\,\delta_y\,\varphi_z\,. \tag{3.42}$$

3.1.2. Poniranje

U analizi krutosti pritegnute pučinske konstrukcije u horizontalnim stupnjevima slobode gibanja (zalijetanje, zanošenje i zaošijanje) vertikalna koordinata (mjerena od morskog dna) sidrenog sustava L_z definirana je kao algebarska srednja vrijednost koordinata pojedinih pripona, jednadžba (3.11). Navedena definicija nije prikladna za analizu krutosti u vertikalnom smjeru tijekom poniranja. Vertikalnu koordinatu L_z moguće je definirati

razmatranjem jednakosti *potencijalne energije* pučinske platforme i sidrenog sustava (pripona):

$$T_z\,\delta^s = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{N} T^n\,L_z^n\,\delta_n^s\,. \tag{3.43}$$

S obzirom da za sjedanje vrijede sljedeći izrazi:

$$\delta^s = L - L_z, \quad \delta_n^s = L - L_z^n, \tag{3.44}$$

uvrštavanjem jednadžbe (3.10) i jednadžbe (3.44) u jednadžbu (3.43) moguće je odrediti *energijsku* srednju vrijednost vertikalne koordinate sidrenog sustava:

$$L_z^E = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(L_z^n)^2}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}L_z^n} = \frac{\widehat{L}_z^2}{L_z}\,. \tag{3.45}$$

Na desnoj strani izraza (3.45) u brojniku se nalazi srednja vrijednost kvadrata vertikalnih koordinata pripona, dok je u nazivniku *algebarska* srednja vrijednost istih veličina.

S obzirom da vrijedi:

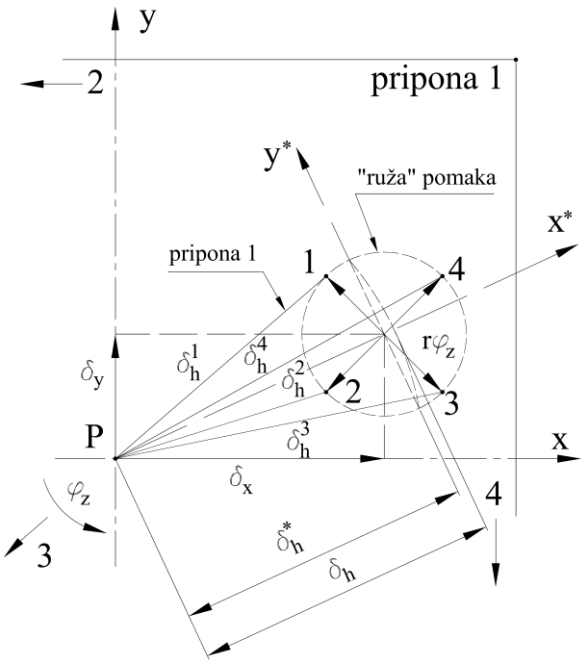
$$L_z < \widehat{L}_z < L_z^E\,, \tag{3.46}$$

gdje je prema jednadžbi (3.45) $\widehat{L}_z = \sqrt{L_z\,L_z^E}$, korištenjem jednadžbe (3.3) dobije se vrlo jednostavan izraz primjenjiv u analizi krutosti tijekom poniranja:

$$\widehat{L}_z = \sqrt{L^2 \;-\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\,\varphi_z)^2\right]}. \tag{3.47}$$

Poniranje pritegnute pučinske konstrukcije rezultat je lokalnih oscilacija pučinske platforme *tangencijalno* na sferičnu ovojnicu koju gibanjem opisuje pol *P* (zjevača) i *aksijalnih* vibracija pripona u normalnom smjeru. Stoga je potrebno prvo odrediti krutost u tangencijalnom smjeru tijekom gibanja u horizontalnoj ravnini. Problem je nešto složeniji ukoliko kod gibanja pučinske platforme dolazi istodobno do zalijetanja, zanošenja i zaošijanja. Rezultat dinamičke analize gibanja pritegnute pučinske platforme u horizontalnoj ravnini translacijski su pomaci δ_x i δ_y, te kut rotacije φ_z. Uslijed translacije sve pripone gibaju se u istom smjeru. Smjer pomaka uslijed rotacije, $\delta_n = r\,\varphi_z$, razlikuje se ovisno o određenoj priponi, slika 3.2. Za lakše razumijevanje složenih gibanja prikladno je *spojiti* nagnute pripone u jedno zajedničko ishodište u vertikalnoj osi koordinatnog sustava, slika 3.3.

"Ruža" pomaka pripona pokazuje da se pojedine pripone nalaze u različitim vertikalnim ravninama uslijed rotacije $r\varphi_z$, slika 3.2.



Slika 3.3 - Spajanje horizontalnih pomaka vrha pripona u zajedničko ishodište

Vertikalnu koordinatu sidrenog sustava, jednadžba (3.47), prikladno je zapisati na sljedeći način:

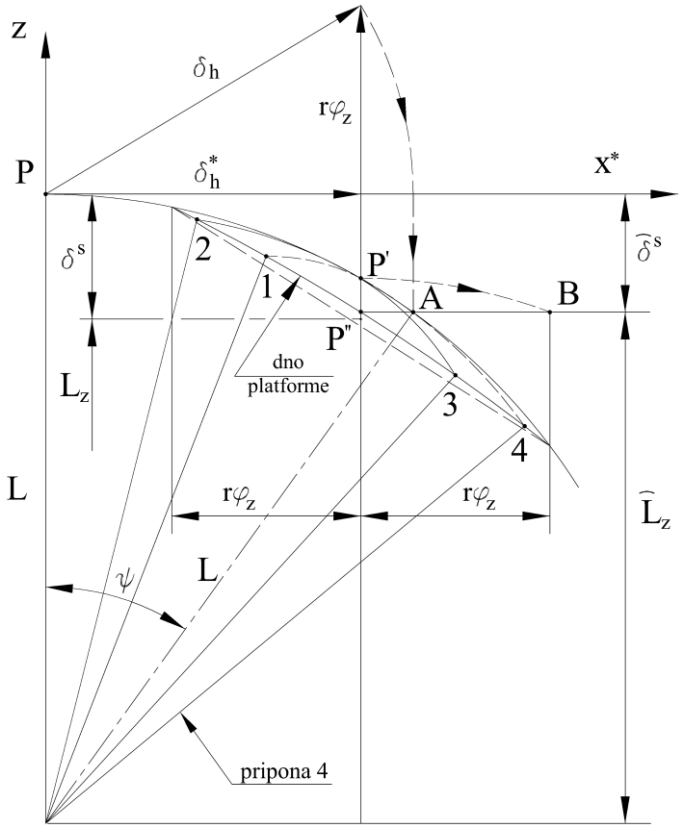
$$\widehat{L}_z = \sqrt{L^2 - \delta_h^2}\,, \tag{3.48}$$

gdje je

$$\delta_h^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2 \tag{3.49}$$

horizontalni pomak pučinske platforme određen kao uprosječena vrijednost pomaka pojedinih pripona δ_h^n. Navedeni horizontalni pomak moguće je konstruirati kao što prikazuje slika 3.3.

Prikaz navedenih veličina, uključujući i sjedanje pučinske platforme $\widehat{\delta}^s$, te njihov međusobni odnos prikazani su u $x^* - z$ ravnini slika 3.4. Pomaci pripona uslijed rotacije, $r\varphi_z$, prikazani su zajedničkim vertikalnim vektorom koji zadovoljava jednadžbu (3.47).



Slika 3.4 - Sjedanje pučinske platforme uslijed horizontalnog pomaka

Rotirajući δ_h oko pola *P* moguće je geometrijski odrediti presjecište s putanjom pučinske platforme uslijed translacijskih pomaka δ_x i δ_y, točku *A*, i na taj način odrediti sjedanje platforme $\widehat{\delta}^s$ i vertikalnu koordinatu sidrenog sustava $\widehat{L}_z$. Putanjama pojedinih pripona zbog kuta zaošijanja φ_z konstruirana je prividna "kupola" u sferičnoj ovojnici koju gibanjem uslijed translacijskih pomaka opisuje pol *P*, slika 3.4.

Zbog različitih vrijednosti vertikalnih koordinata pojedinih pripona, L_z^n, može se primijetiti određeno posrtanje pučinske platforme u *x** – *z* ravnini. Također, primjetna je i mala deformacija dna, koja je uslijed vrlo krute konstrukcije platforme kompenzirana elastičnom deformacijom pripona. Točka *P''* označava stvarni položaj dna pučinske platforme.

S obzirom na važnost određivanja tangencijalne ravnine na putanju pučinske platforme u analizi gibanja u vertikalnom smjeru, točka *A* predstavlja prikladnu referentnu točku.

Sjedanje pučinske platforme $\widehat{\delta}^s$ moguće je odrediti i na drugačiji način, u dva koraka. Prvo se odredi sjedanje uzrokovano translacijskim pomacima δ_x i δ_y, točka *P'*, slika 3.4.

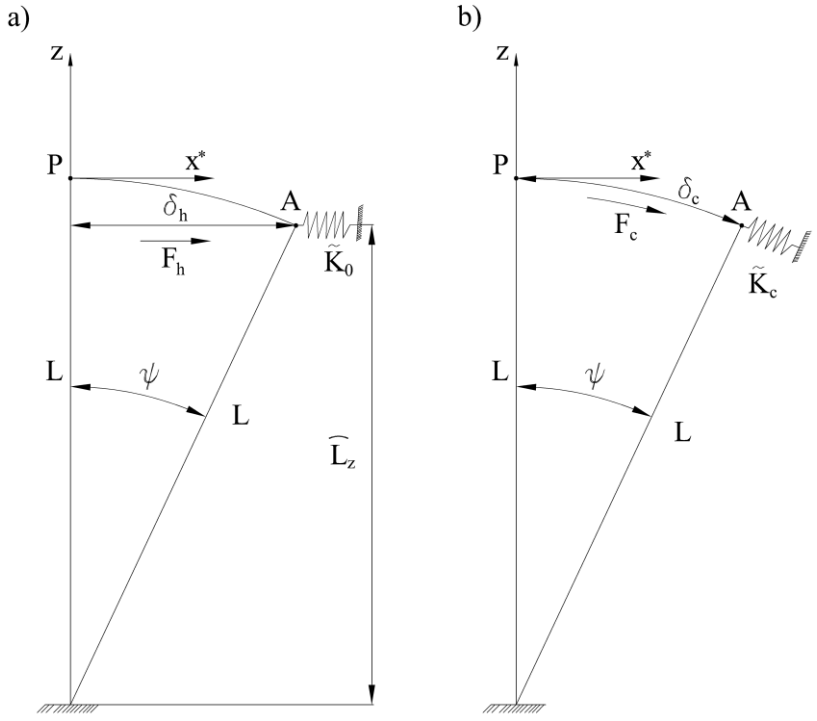
Drugi korak je određivanje dodatnog sjedanja kao posljedice pomaka uslijed rotacije, $r\varphi_z$, točka *B*. Za uprosječen kut nagiba pripona, temeljen na poznatom horizontalnom pomaku δ_h, izražen jednadžbom (3.49), vrijedi:

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\delta_h}{L}\right). \tag{3.50}$$

U svrhu uočavanja odnosa između pojedinih veličina, na geometrijskim konstrukcijama prikazanim na slikama 3.3 i 3.4, svi pomaci prikazani su značajno uvećani. Posebno bi odnos $r\varphi_z / \delta_h^*$ trebao biti značajno manji, tako da je "ruža" pomaka pripona zapravo "pupoljak". U slučaju isključivo translacijskog pomaka pučinske platforme u horizontalnoj ravnini $(\varphi_z = 0)$, uprosječen kut nagiba pripona poprima pravu vrijednost u $x^* - z$ ravnini (zajedničku za sve pripone). Prikazana teorija vrijedi i u slučaju isključive rotacije u horizontalnoj ravnini $(\delta_x = \delta_y = 0)$. U tom slučaju vrijedi:

$$\delta_h = r\varphi_z, \quad \psi = \arcsin\left(\frac{r\varphi_z}{L}\right). \tag{3.51}$$

Sekantna horizontalna krutost $\tilde{K}_0$ izražena je jednadžbom (3.18). U svrhu analize krutosti tijekom poniranja potrebno je odrediti *cirkularnu* krutost $\tilde{K}_c$, slika 3.5.



Slika 3.5 - Horizontalna i cirkularna krutost

Cirkularna krutost određuje se iz jednakosti momenta horizontalne i cirkularne sile, $F_h = \tilde{K}_0 \, \delta_h$ i $F_c = \tilde{K}_c \, \delta_c$, oko oslonca pripone na morskom dnu, slika 3.5:

$$\tilde{K}_c = \tilde{K}_0 \frac{\hat{L}_z}{L} \frac{\delta_h}{\delta_c} . \tag{3.52}$$

S obzirom da vrijedi:

$$\delta_h = L \sin\psi , \tag{3.53}$$

$$\delta_c = L \psi , \tag{3.54}$$

primjenom jednadžbe (3.18) za $\tilde{K}_0$ u jednadžbi (3.52) dobije se:

$$\tilde{K}_c = \left(\frac{T}{L} + \rho g \frac{\delta^s}{L} \right) \frac{\sin\psi}{\psi} . \tag{3.55}$$

Ukoliko, prema slici 3.4, za sjedanje vrijedi $\delta^s \approx \hat{\delta}^s = L(1-\cos\psi)$, za cirkularnu silu vrijedi:

$$F_c = \left[T + \rho g \, A_{WL} L (1-\cos\psi) \right] \sin\psi . \tag{3.56}$$

Tek nakon što je određena cirkularna sila moguće je odrediti tangencijalnu krutost

$$\tilde{K}_t = \frac{\mathrm{d}F_c}{L \, \mathrm{d}\psi} = \frac{T}{L} \cos\psi + 2\rho g \, A_{WL} \sin^2\psi . \tag{3.57}$$

Prema slici 3.6, za krutost u radijalnom smjeru vrijedi:

$$\tilde{K}_r = \frac{EA}{L} + \rho g \, A_{WL} \cos\psi . \tag{3.58}$$

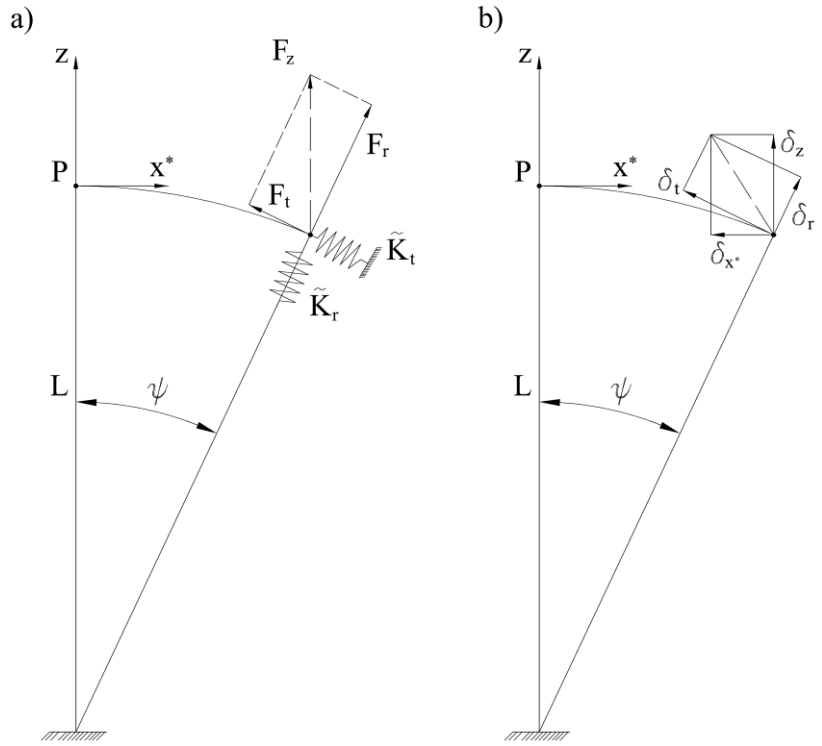
Važno je primijetiti da su jednadžbama (3.57) i (3.58) opisane glavne krutosti u smjeru prirodnih koordinata pripone.

Uzbudnu silu u vertikalnom smjeru potrebno je rastaviti na radijalnu i na tangencijalnu komponentu:

$$F_r = F_z \cos\psi , \tag{3.59}$$

$$F_t = F_z \sin\psi , \tag{3.60}$$

te ih narinuti na odgovarajuće *raspregnute* dinamičke sustave, slika 3.6.



Slika 3.6 - Uzbuda i odziv poniranja

Rješenjem diferencijalnih jednadžbi gibanja određeni su radijalni i tangencijalni pomaci. Njihovom projekcijom na vertikalnu i horizontalnu os dobiju se vertikalni i horizontalni pomaci, slika 3.6.

$$\delta_z = \delta_r \cos\psi + \delta_t \sin\psi , \tag{3.61}$$

$$\delta_{x^*} = \delta_r \sin\psi - \delta_t \cos\psi . \tag{3.62}$$

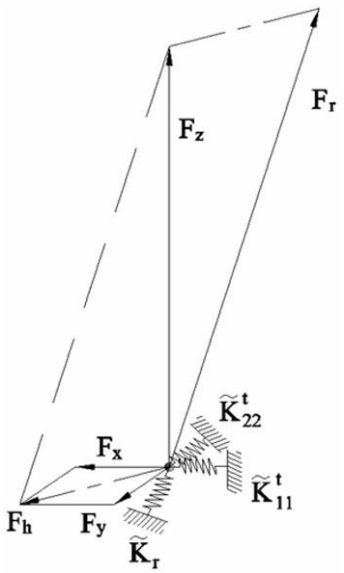
Jednadžba (3.61) predstavlja rezultirajuće poniranje, dok je jednadžba (3.62) doprinos niskofrekventnom gibanju u horizontalnoj ravnini. Pomak izražen jednadžbom (3.62) moguće je rastaviti u komponente proporcionalne δ_x, δ_y i $r\varphi_z$.

Analiza poniranja u prirodnom koordinatnom sustavu nije prikladna za praktičnu upotrebu u dinamičkoj analizi plutajućih tijela, s obzirom da se dinamički sustav sa šest stupnjeva slobode gibanja mora *proširiti* s jednim dodatnim stupnjem slobode.

U svrhu pojednostavljenja proračuna vertikalnu uzbudnu silu moguće je rastaviti u komponentu u smjeru krutosti pripone te komponente u smjeru zalijetanja i zaošijanja, slika 3.7. Radijalna sila $F_r = F_z / \cos\psi$ uzrok je radijalnom pomaku $\delta_r = F_r / \tilde{K}_r$. Vertikalna projekcija tog radijalnog pomaka, $\delta_z = \delta_r \cos\psi$, određuje pojednostavljenu krutost u smjeru poniranja:

$$\tilde{K}_{33} = \tilde{K}_r, \tag{3.63}$$

gdje je $\tilde{K}_r$ određen jednadžbom (3.58).



Slika 3.7 - Komponente sile poniranja s pripadajućim elastičnim osloncima

3.1.3. Ljuljanje i posrtanje

Nelinearnu krutost tijekom ljuljanja i posrtanja moguće je *konstruirati* proširenjem odgovarajuće linearne krutosti, jednadžbe (2.27) i (2.28). Primjenom uvjeta plovnosti određenog jednadžbom (2.13), za linearni koeficijent krutosti tijekom ljuljanja vrijedi:

$$K_{44} = \rho g I_{WLX} + U(z_B - z_T) - Q(z_G - z_T) + \frac{EI_x}{L}. \tag{3.64}$$

Sjedanjem pučinske platforme povećava se sila uzgona te je jednadžbi (3.64) potrebno dodati član kojim je to opisano:

$$\tilde{\kappa} = \rho g A_{WL}(z_B - z_T)\hat{\delta}^s. \tag{3.65}$$

Veličine z_B, z_G i z_T u jednadžbama (3.64) i (3.65) sjedanjem pučinske platforme se mijenjaju, ali za istu veličinu, $\hat{\delta}^s$, zbog čega njihove razlike ostaju nepromijenjene. Zbog povećanja istisnine postoji i dodatna promjena veličine z_B, međutim ona ovisi o odnosu $\Delta U/U$ te je zanemarena.

Površina vodne linije stupova mijenja se u ovisnosti o kutu ljuljanja φ_x i o udaljenosti tih stupova od osi rotacije,

$$\tilde{I}_{WLX} = \frac{I_{WLX}}{\cos^3 \varphi_x}. \tag{3.66}$$

U prethodnom poglavlju 3.1.2 prikazano je kako moment zaošijanja u sprezi sa zalijetanjem i/ili zanošenjem uzrokuje male vrijednosti kuta ljuljanja i/ili posrtanja. Posljedica toga je da momenti ljuljanja i/ili posrtanja mogu uzrokovati male kutove zaošijanja, koji se mogu zanemariti.

Kao posljedica ljuljanja na pripone na suprotnim stranama narinuto je sjedanje u pozitivnom, odnosno negativnom, smjeru, te je njihova međusobna horizontalna udaljenost smanjena u ovisnosti o kutu ljuljanja. Posljedica prethodnog razmatranja je promjena momenta tromosti:

$$\tilde{I}_x = I_x \cos^2 \varphi_x. \tag{3.67}$$

Uzevši u obzir sve navedene nelinearnosti tijekom ljuljanja/posrtanja moguće je za krutost u tim vertikalnim stupnjevima slobode zapisati:

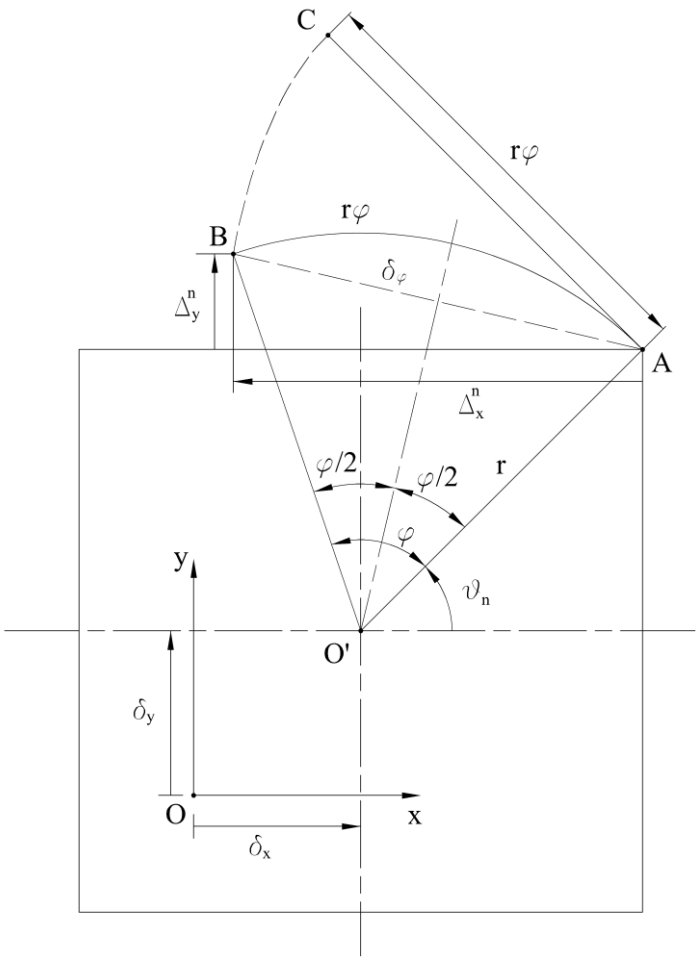
$$\tilde{K}_{44} = \frac{\rho g I_{WLX}}{\cos^3 \varphi_x} + U(z_B - z_T) - Q(z_G - z_T) + \tilde{\kappa} + \frac{EI_x}{L}\cos^2 \varphi_x, \tag{3.68}$$

$$\tilde{K}_{55} = \frac{\rho g I_{WLY}}{\cos^3 \varphi_y} + U(z_B - z_T) - Q(z_G - z_T) + \tilde{\kappa} + \frac{EI_y}{L}\cos^2 \varphi_y. \tag{3.69}$$

U jednadžbama (3.68) i (3.69) dominira zadnji član koji predstavlja moment tromosti poprečnog presjeka pripona. Ukoliko se kod formulacije tangencijalne krutosti zadrže samo članovi prvog reda, elementi tangencijalne krutosti kod ljuljanja/posrtanja bit će jednaki elementima *sekantne* krutosti, izraženim jednadžbama (3.68) i (3.69)

3.1.4. Proizvoljno zaošijanje

Pritegnuta pučinska platforma giba se s proizvoljnim zalijetanjem, zanašanjem i zaošijanjem, slika 3.8. Putanja vrha pripona (zjevača) uslijed zaošijanja kružni je luk, $r\varphi_z$, gdje je *r* radijalna udaljenost od težišta pučinske platforme. Konačni položaj pripone određen je sekantnim pomakom, slika 3.8.



Slika 3.8 - Proizvoljna translacija i rotacija pritegnute pučinske platforme

$$\delta_\varphi = 2\,r \sin\frac{\varphi_z}{2}. \tag{3.70}$$

Prema slika 3.8, za koordinate vrha pripone (spoj sa zjevačom) u lokalnom koordinatnom sustavu vrijedi:

$$L_x^n = \delta_x - \Delta_x^n = \delta_x + \delta_\varphi \sin\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right), \tag{3.71}$$

$$L_y^n = \delta_y - \Delta_y^n = \delta_y - \delta_\varphi \cos\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right), \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} L_z^n &= \sqrt{L^2 - (L_x^n)^2 - (L_y^n)^2} = \\ &= L\left\{1 - \frac{1}{L^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_\varphi^2) + \frac{2\delta_\varphi}{L^2}\left[\delta_x \sin\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right) - \delta_y \cos\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right)\right]\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

gdje je L duljina pripone, a θ_n (n = 1, ..., 4) kut koji vrh pripone zatvara s horizontalnom osi.

Komponente sile natega T^n u priponi u *pomaknutom* položaju proporcionalne su koordinatama vrha pripone, jednadžbe (3.71), (3.72) i (3.73):

$$T_x^n = \frac{T^n}{L}\left[\delta_x - \delta_\varphi \sin\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right)\right], \tag{3.74}$$

$$T_y^n = \frac{T^n}{L}\left[\delta_y + \delta_\varphi \cos\left(\theta_n + \frac{\varphi_z}{2}\right)\right], \tag{3.75}$$

$$T_z^n = \frac{T^n}{L} L_z^n. \tag{3.76}$$

Ukupna sila prednatega u priponama (sila natega u uspravnom položaju pučinske platforme) koja djeluje na pučinsku platformu iznosi:

$$T = \sum_{n=1}^{N} T^n . \tag{3.77}$$

Komponente rezultirajuće sile sidrenog sustava, prema jednadžbama (3.74), (3.75) i (3.76), određene su jednadžbama (3.8), (3.9) i (3.10).

Na jednak način kao i u slučaju malog kuta zaošijanja horizontalne komponente sile sidrenog sustava ovise samo o pripadajućim horizontalnim pomacima, što je posljedica *simetrije* pravokutne pučinske platforme. Za rotaciju pučinske platforme to ne vrijedi, jer se razlikuju vrijednosti vertikalne koordinate pojedine pripone, L_z^n.

Problem sprege između horizontalnih stupnjeva slobode gibanja riješit će se na jednak način kao za slučaj malog kuta zaošijanja, jednadžba (3.11).

S obzirom da vrijedi:

$$\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2\cdot 4}\varepsilon^2 - ... \tag{3.78}$$

moguće je zapisati:

$$L_z = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_z^n = L(1 - f_1 - f_2), \tag{3.79}$$

gdje je:

$$f_1 = \frac{1}{2L^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_\varphi^2), \tag{3.80}$$

$$f_2 = \frac{1}{2} f_1^{\,2} + f_3, \tag{3.81}$$

$$f_3 = \frac{1}{2L^4}\Bigg[\delta_x^2\left(b^2\cos^2\frac{\varphi_z}{2}+a^2\sin^2\frac{\varphi_z}{2}\right)+\delta_y^2\left(a^2\cos^2\frac{\varphi_z}{2}+b^2\sin^2\frac{\varphi_z}{2}\right)+ \\ +\delta_x\delta_y(b^2-a^2)\sin\varphi_z\Bigg]\sin^2\frac{\varphi_z}{2}. \tag{3.82}$$

Funkcija f_1 veličina je prvog, a funkcija f_2 drugog reda.

Važno je primijetiti da se tijekom zbrajanja u jednadžbi (3.79) poništavaju trigonometrijske funkcije (s argumentom θ_n) s neparnim eksponentom, na jednak način kao i u slučaju malog kuta zaošijanja, jednadžba (3.11). U izvodu jednadžbe (3.82) iskorištena je jednadžba (3.70) za δ_φ te izrazi

$$\cos^2\theta_n = \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \sin^2\theta_n = \left(\frac{b}{r}\right)^2. \tag{3.83}$$

Razlike $L_z^n - L_z$ očekivano uzrokuju zanemarivi nagib i pretegu/zategu pučinske platforme. Pomak pučinske platforme iz uspravnog položaja uzrokuje sjedanje δ^s, određeno jednadžbom (3.44), dodatnu silu uzgona ΔU, određenu jednadžbom (3.14), i dodatnu silu natega u priponama ΔT^n, određenu jednadžbom (3.15). Horizontalna komponenta ukupne sile u priponama određena je jednadžbom (3.16), dok za nelinearnu sekantnu krutost vrijedi jednadžba (3.18).

Za moment sidrenog sustava pučinske platforme vrijedi:

$$M_z = -\sum_{n=1}^{N}(T_x^n + \Delta T_x^n)y_n + \sum_{n=1}^{N}(T_y^n + \Delta T_y^n)x_n\,, \tag{3.84}$$

gdje su $x_n = r\cos\theta_n$ i $y_n = \sin\theta_n$ koordinate vrha pripona, slika 2.2. Primjenom jednadžbi (3.74) i (3.75) vrijedi:

$$M_z = \frac{r}{L}\sum_{n=1}^{N}(T^n + \Delta T^n)\left(-\delta_x\sin\theta_n + \delta_y\cos\theta_n + \delta_\varphi\cos\frac{\varphi_z}{2}\right). \tag{3.85}$$

Tijekom zbrajanja u izrazu (3.85) poništavaju se trigonometrijske funkcije s argumentom θ_n te vrijedi:

$$M_z = \frac{r^2}{L}(T^n + \Delta T^n)\sin\varphi_z\,. \tag{3.86}$$

S obzirom na jednadžbu (3.17) vrijedi $(T+\Delta T)/L = \tilde{K}_0$, odnosno za krutost tijekom proizvoljnog zaošijanja možemo pisati:

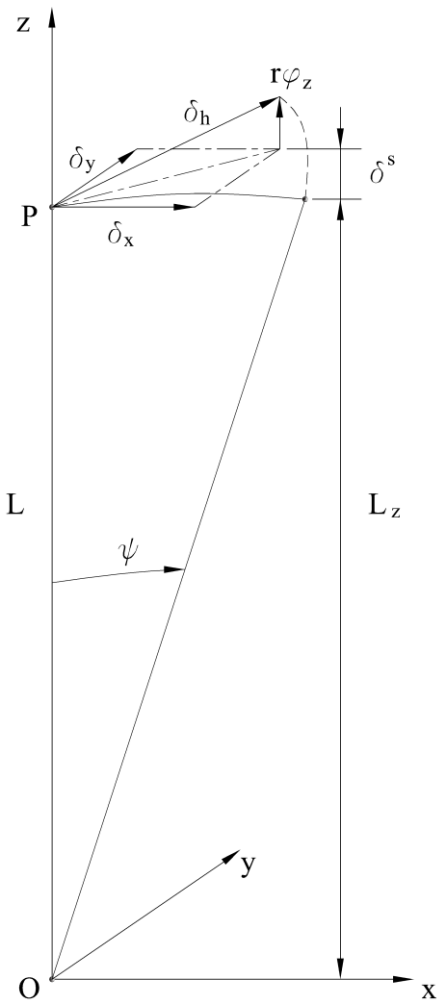
$$\tilde{K}_{66} = r^2 \tilde{K}_0 \frac{\sin \varphi_z}{\varphi_z}. \tag{3.87}$$

Funkcija $\frac{\sin \varphi_z}{\varphi_z}$ u jednadžbi (3.87) predstavlja smanjenje kraka horizontalnih sila u priponama. Zanimljivo je primijetiti da je za $\varphi_z = \pi$ taj krak jednak nuli.

Formulacija krutosti za proizvoljno zaošijanje trebala bi, kao poseban slučaj, sadržavati i formulaciju za mali kut zaošijanja, što je prikladna provjera točnosti prethodno izvedenih izraza. Pretpostavimo mali kut zaošijanja. S obzirom na tu pretpostavku, u razvoju L_z u red potencija, jednadžba (3.79), uzimaju se samo prva dva člana razvoja. U tom slučaju za sjedanje vrijedi:

$$\delta^s = L - L_z = L\, f_1 = \frac{1}{2L}\left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_\varphi^2\right), \tag{3.88}$$

Izraz (3.88) moguće je konstruirati prema slici 3.9, gdje je δ_h prividni horizontalni pomak, a ψ kut zakreta.



Slika 3.9 - Konstrukcija sjedanja u ravnini pomaka

Za mali kut zaošijanja vrijedi:

$$\delta_{\varphi} = r\,\varphi_z\,, \tag{3.89}$$

$$\delta^s = \frac{1}{2L}\left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + r^2\varphi_z^2\right). \tag{3.90}$$

Nelinearna sekantna krutost tijekom zaošijanja, jednadžba (3.87), pojednostavljuje se i vrijedi:

$$\tilde{K}_{66} = r^2\tilde{K}_0\,, \tag{3.91}$$

što je jednako izrazu (3.24).

3.2. Formulacija krutosti temeljena na jednakosti potencijalne energije

3.2.1. Proizvoljno zaošijanje

Na pritegnutu pučinsku platformu djeluju različite sile: sila uzgona U, dodatna sila uzgona ΔU, sila težine Q, sila prednatega u priponama T i dodatna sila natega u priponama ΔT. Produljenje pripona ΔL_n zbog djelovanja sile natega $T^n + \Delta T^n$ zanemarivo je u usporedbi sa sjedanjem pučinske platforme. Vertikalne uzbudne sile $U - Q = T$ vrše rad na putu sjedanja platforme δ^s. Promjena uzgona ΔU unutrašnja je sila koja se povećava proporcionalno sa sjedanjem.

Potencijalna energija pučinske platforme određena je izrazom:

$$V = T\delta^s + \frac{1}{2}\rho\, g\, A_{WL}\,(\delta^s)^2\,. \tag{3.92}$$

Vertikalna koordinata sidrenog sustava L_z određena je izrazom (3.79) te za sjedanje platforme $\delta^s = L - L_z$ vrijedi:

$$\delta^s = L(f_1 + f_2)\,, \tag{3.93}$$

gdje su f_1 i f_2 određeni jednadžbama (3.80) i (3.81).

Kvadrat veličine L_z prikladno je odrediti kao srednju vrijednost kvadrata vertikalnih koordinata pripona i u tom slučaju vrijedi:

$$\widehat{L_z^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(L_z^n)^2\,. \tag{3.94}$$

S obzirom da se trigonometrijske funkcije s argumentom θ_n poništavaju tijekom zbrajanja u jednadžbi (3.94) vrijedi:

$$\widehat{L}_z^2 = L^2(1-2f_1)\,. \tag{3.95}$$

Promotrimo kvadrat sjedanja platforme u jednadžbi (3.92):

$$(\delta^s)^2 = L^2 - 2L\,L_z + L_z^2\,. \tag{3.96}$$

Primjenom jednadžbe (3.79) i jednadžbe (3.95) u jednadžbi (3.96) dobije se:

$$(\delta^s)^2 = 2L^2 f_2\,. \tag{3.97}$$

Upotrebom jednadžbi (3.93) i (3.97) jednadžba (3.92) za potencijalnu energiju pučinske platforme glasi:

$$V = TL\,f_1 + CL\,f_2\,, \tag{3.98}$$

gdje je

$$C = T + \rho\,g\,A_{WL}L\,. \tag{3.99}$$

Uzevši u obzir da se funkcija f_2 sastoji od dva člana, jednadžba (3.81), jednadžba (3.98) glasi:

$$V = TL\,f_1 + \frac{1}{2}CL\,f_1^{\,2} + CL\,f_3\,. \tag{3.100}$$

Nakon što je formulirana potencijalna energija pučinske platforme povratne sile određuju se derivacijom potencijalne energije po odgovarajućem pomaku. Za koeficijente sekantne krutosti tijekom zalijetanja, zanošenja i zaošijanja vrijedi:

$$\tilde{K}_{11} = \frac{L}{\delta_x}\left(T\frac{\partial f_1}{\partial \delta_x} + C\frac{\partial f_2}{\partial \delta_x}\right), \tag{3.101}$$

$$\tilde{K}_{22} = \frac{L}{\delta_y}\left(T\frac{\partial f_1}{\partial \delta_y} + C\frac{\partial f_2}{\partial \delta_y}\right), \tag{3.102}$$

$$\tilde{K}_{66} = \frac{L}{\varphi_z}\left(T\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_z} + C\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_z}\right). \tag{3.103}$$

Za derivacije funkcija f_1 i f_2 koje se pojavljuju u prethodnim jednadžbama vrijedi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta_x} = \frac{\delta_x}{L^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \delta_y} = \frac{\delta_y}{L^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_z} = \frac{r^2}{L^2}\sin\varphi_z\,, \tag{3.104}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_x} = \frac{1}{L^2}\,f_1\,\delta_x + \frac{4}{L^4}\,f_3\,\delta_x \sin^2\frac{\varphi_z}{2}\,, \tag{3.105}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_y} = \frac{1}{L^2} f_1 \delta_y + \frac{4}{L^4} f_4 \delta_y \sin^2 \frac{\varphi_z}{2}, \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_z} = \frac{r^2}{L^2} f_1 \sin\varphi_z + \frac{1}{L^4}\left[f_4 \delta_x^2 + f_5 \delta_y^2 - (b^2 - a^2)\delta_x \delta_y \sin\varphi_z\right]\sin\varphi_z + \\ + \frac{b^2 - a^2}{L^4}\left[(\delta_y^2 - \delta_x^2)\sin\varphi_z + 2\delta_x \delta_y \cos\varphi_z\right]\sin^2 \frac{\varphi_z}{2}, \end{aligned} \tag{3.107}$$

gdje je funkcija f_1 zadana jednadžbom (3.80), dok za funkcije f_4 i f_5 vrijedi:

$$f_4 = b^2 \cos^2 \frac{\varphi_z}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\varphi_z}{2}, \tag{3.108}$$

$$f_5 = a^2 \cos^2 \frac{\varphi_z}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\varphi_z}{2}. \tag{3.109}$$

3.2.2. Malo zaošijanje

Za mali kut zaošijanja vrijedi $\sin\varphi_z \approx \varphi_z$, $\cos^2 \frac{\varphi_z}{2} \approx 1$, $\sin^2 \frac{\varphi_z}{2} \approx 0$. Elementi matrice krutosti, jednadžbe (3.101), (3.102) i (3.103), za slučaj malog kuta zaošijanja glase

$$\tilde{K}_{11} = \tilde{K}_0 + \frac{C}{L^3} b^2 \varphi_z^2, \tag{3.110}$$

$$\tilde{K}_{22} = \tilde{K}_0 + \frac{C}{L^2} a^2 \varphi_z^2, \tag{3.111}$$

$$\tilde{K}_{66} = r^2 \tilde{K}_0 + \frac{C}{L^3}\left[b^2 \delta_x^2 + a^2 \delta_y^2 + (b^2 - a^2)\delta_x \delta_y\right], \tag{3.112}$$

gdje je $\tilde{K}_0$ određen jednadžbom (3.18). Član u uglatoj zagradi jednadžbe (3.112) nestaje za slučaj kvadratne platforme, dok za pravokutnu platformu njegova vrijednost ovisi o omjeru duljine stranica. Ukoliko se taj član zanemari kao veličina malog reda, elementi krutosti $\tilde{K}_{11}$, i = 1, 2, 6 jednaki su onima u [25].

3.2.3. Potencijalna energija temeljena na ravnoteži sila

U poglavlju 3.2.1 pri računanju potencijalne energije pučinske platforme, jednadžba (3.92), upotrijebljena je kvadratična srednja vrijednost vertikalnih koordinata pripona, jednadžba (3.94). U ovom poglavlju prikazat će se utjecaj primjene algebarske srednje vrijednosti vertikalnih koordinata pripona na potencijalnu energiju.

Na pučinsku platformu djeluju vanjske sile:

$$F_x = \tilde{K}_0\,\delta_x, \quad F_y = \tilde{K}_0\,\delta_y, \quad M_z = r^2\tilde{K}_0\,\varphi_z, \tag{3.113}$$

gdje je $\tilde{K}_0$ određen jednadžbom (3.18). S obzirom da vrijedi jednadžba $L_z = L - \delta^s$, navedenu krutost $\tilde{K}_0$ moguće je izraziti kao funkciju sjedanja platforme:

$$\tilde{K}_0 = \frac{C}{L-\delta^s} - \rho\, g\, A_{WL}, \tag{3.114}$$

gdje je *C* određen izrazom (3.99).

Rad generaliziranih sila, koje djeluju u horizontalnoj ravnini, iznosi:

$$V = \int F_x\,\mathrm{d}\,\delta_x + \int F_y\,\mathrm{d}\,\delta_y + \int M_z\,\mathrm{d}\,\varphi_z, \tag{3.115}$$

odnosno uzevši u obzir izraz (3.113)

$$V = \int \tilde{K}_0\left(\delta_x\,\mathrm{d}\,\delta_x + \delta_y\,\mathrm{d}\,\delta_y + r^2\varphi_z\,\mathrm{d}\,\varphi_z\right). \tag{3.116}$$

Prema jednadžbi (3.90) vrijedi:

$$\delta_x\,\mathrm{d}\,\delta_x + \delta_y\,\mathrm{d}\,\delta_y + r^2\varphi_z\,\mathrm{d}\,\varphi_z = L\,\mathrm{d}\,\delta^s, \tag{3.117}$$

pri čemu jednadžba (3.117) predstavlja totalni diferencijal sjedanja.

Primjenom jednadžbe (3.113) u jednadžbi (3.115) dobije se

$$V = L\int\left(\frac{C}{L-\delta^s} - \rho\, g\, A_{WL}\right)\mathrm{d}\,(\delta^s) = -LC\ln\left(1-\frac{\delta^s}{L}\right) - \rho\, g\, A_{WL}\, L\,\delta^s. \tag{3.118}$$

Logaritamsku funkciju u jednadžbi (3.118) moguće je razviti u red potencija:

$$\ln\left(1-\frac{\delta^s}{L}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\delta^s}{L}\right)^k, \tag{3.119}$$

Za potencijalnu energiju, jednadžba (3.116), vrijedi:

$$V = T\delta^s + \frac{C}{2L}(\delta^s)^2 + LC\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\delta^s}{L}\right)^k, \tag{3.120}$$

pri čemu su prva dva člana razvoja u red napisana eksplicitno.

Prema jednadžbi (3.80) vrijedi $\delta^s = L\,f_1$, te je potencijalnu energiju moguće zapisati na sljedeći način:

$$V = TL\,f_1 + \frac{1}{2}CL\,f_1^2 + LC\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\,f_1^k. \tag{3.121}$$

Usporedbom prethodne jednadžbe s jednadžbom (3.100) uočljivo je da su prva dva člana identična. Treći član u jednadžbi (3.100) istog je reda veličine kao i drugi član i nije ga moguće zamijeniti s trećim članom u jednadžbi (3.121), s obzirom da je taj član manjeg reda veličine.

Na temelju potencijalne energije u jednadžbi (3.121) moguće je odrediti krutost:

$$\tilde{K}_0 \approx \frac{T}{L} + \frac{C}{L^2}\delta^s, \tag{3.122}$$

koja je jednaka i za zalijetanje i za zanošenje. Prvi i drugi član u jednadžbi (3.122) predstavljaju linearnu i nelinearnu krutost.

4. SPREGA HORIZONTALNIH I VERTIKALNIH STUPNJEVA SLOBODE GIBANJA

4.1. Sekantna matrica krutosti

U poglavljima 3.1.1, 3.1.2 i 3.1.3 izvedeni su nelinearni koeficijenti sekantne krutosti za horizontalne i vertikalne stupnjeve slobode gibanja. Rezultirajuća nelinearna matrica sekantne povratne krutosti formulirana je za pol *P*. Posljedica takvog pristupa su raspregnuta gibanja, odnosno dijagonalni oblik matrice krutosti:

$$\left[\tilde{K}\right]_p^0 = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & & & & & & \\ & \tilde{K}_{22} & & & & & \\ & & \tilde{K}_{33} & & & & \\ & & & \tilde{K}_{44} & & & \\ & & & & \tilde{K}_{55} & & \\ & & & & & \tilde{K}_{66} & \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Za pripadajući vektor pomaka vrijedi:

$$\langle \delta \rangle_p = \langle \delta_x, \delta_y, \delta_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z \rangle. \tag{4.2}$$

Važno je primijetiti da su generalizirane inercijske sile i sile prigušenja posljedica *ukupnog* vertikalnog ubrzanja i brzine, odnosno vertikalnog pomaka koji se sastoji i od poniranja i od sjedanja pučinske platforme,

$$\delta^v = \delta_z - \delta^s. \tag{4.3}$$

Negativni predznak u jednadžbi (4.3) rezultat je dogovora: pozitivno poniranje je poniranje u pozitivnom smjeru *z*-osi, dok je sjedanje pozitivno u negativnom smjeru *z*-osi. Razmatrani problem analogan je oscilacijama dinamičkog sustava s jednim stupnjem slobode gibanja, pobuđenim na osciliranje uzbudom podloge [34].

Moguće je više različitih pristupa rješenju navedenog problema:

1) Na sve elemente matrične jednadžbe gibanja (matrica masa, prigušenja i povratne krutosti) djeluje jednak vektor pomaka. Ukoliko je vektor pomaka $\langle \delta \rangle_p$ definiran s poniranjem kao vertikalnim stupnjem slobode gibanja, jednadžba (4.2), za rezultirajuću inercijsku silu i silu prigušenja uslijed poniranja vrijedi:

$$F_{3mn} = -n_{33}\dot{\delta}^s - m_{33}\ddot{\delta}^s, \tag{4.4}$$

gdje je n_{33} prigušenje, a m_{33} masa. Navedene sile moguće je uključiti u vektor opterećenja na desnoj strani jednadžbe gibanja. S obzirom da je sjedanje definirano izrazom $\delta^s = L - L_z$ i ako se uzmu samo prva dva člana razvoja u red veličine L_z, jednadžba (3.11), za pomak, brzinu i ubrzanje sjedanja platforme vrijedi:

$$\delta^s = \frac{1}{2L}\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\,\varphi_z)^2\right], \tag{4.5}$$

$$\dot{\delta}^s = \frac{1}{L}\left[\delta_x\,\dot{\delta}_x + \delta_y\,\dot{\delta}_y + r^2\,\varphi_z\,\dot{\varphi}_z\right], \tag{4.6}$$

$$\ddot{\delta}^s = \frac{1}{L}\left[\dot{\delta}_x^2 + \dot{\delta}_y^2 + (r\,\dot{\varphi}_z)^2\right] + \frac{1}{L}\left[\delta_x\,\ddot{\delta}_x + \delta_y\,\ddot{\delta}_y + r^2\,\varphi_z\,\ddot{\varphi}_z\right]. \tag{4.7}$$

Zamjenom jednadžbi (4.6) i (4.7) u jednadžbu (4.4) važno je uočiti da sila poniranja F_{3mn} uzrokuje spregu vertikalnih s horizontalnim gibanjima.

2) Silu uslijed poniranja F_{3mn} moguće je zapisati na drugačiji način:

$$F_{3mn} = -\left(\frac{n_{33}}{L}\left\langle \delta_x, \delta_y, r^2\varphi_z\right\rangle + \frac{m_{33}}{L}\left\langle \dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y, r^2\dot{\varphi}_z\right\rangle\right)\begin{Bmatrix}\dot{\delta}_x\\ \dot{\delta}_y\\ \dot{\varphi}_z\end{Bmatrix} - \frac{m_{33}}{L}\left\langle \delta_x, \delta_y, r^2\varphi_z\right\rangle\begin{Bmatrix}\ddot{\delta}_x\\ \ddot{\delta}_y\\ \ddot{\varphi}_z\end{Bmatrix}. \tag{4.8}$$

Silu napisanu izrazom (4.8) moguće je lako uključiti u matricu prigušenja i matricu masa.

3) Umjesto vektora pomaka $\langle\delta\rangle_p$ moguće je koristiti vektor pomaka koji u vertikalnom smjeru uključuje ukupni pomak $\delta^v = \delta_z - \delta^s$,

$$\langle\delta\rangle^v = \left\langle \delta_x, \delta_y, \delta^v, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\right\rangle. \tag{4.9}$$

S definiranim vektorom pomaka nužno je dosljedno djelovati na matricu prigušenja i matricu masa. S obzirom da silu u smjeru poniranja uzrokuje samo poniranje (ne i sjedanje), $F_z = \tilde{K}_{33}\,\delta_z$, potrebno je navedenu silu proširiti dodavanjem i oduzimanjem elastične sile u priponama:

$$F_z = \tilde{K}_{33}\,\delta^v + \frac{EA}{L}\,\delta^s, \tag{4.10}$$

gdje je prividnu silu $F_T = \frac{EA}{L}\delta^s$, koja prema jednadžbi (4.5) ovisi o svim pomacima u horizontalnoj ravnini, potrebno promatrati kao uzbudu poniranja na desnoj strani jednadžbe gibanja.

4) Pomak uslijed sjedanja platforme, jednadžba (4.5), moguće je zamijeniti u izrazu za prividnu silu F_T:

$$F_T = \frac{EA}{2L^2}\left\langle \delta_x, \delta_y, r^2\varphi_z \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}. \tag{4.11}$$

Jednadžbu (4.11) jednostavno je uključiti u matricu povratne krutosti, jednadžba (4.1):

$$\left[\tilde{K}\right]_p^V = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & & & & & \\ & \tilde{K}_{22} & & & & \\ \tilde{K}_{31} & \tilde{K}_{32} & \tilde{K}_{33} & & & \tilde{K}_{36} \\ & & & \tilde{K}_{44} & & \\ & & & & \tilde{K}_{55} & \\ & & & & & \tilde{K}_{66} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

gdje su

$$\tilde{K}_{31} = \frac{EA}{2L^2}\delta_x, \quad \tilde{K}_{32} = \frac{EA}{2L^2}\delta_y, \quad \tilde{K}_{36} = \frac{EAr^2}{2L^2}\varphi_z \tag{4.13}$$

koeficijenti krutosti koji sprežu vertikalna i horizontalna gibanja.

S obzirom na iznesene različite metode rješenja potrebno je uočiti kako transformacije 1) i 3) nisu praktične s obzirom da dodatni vektor opterećenja koji se uvodi na desnu stranu jednadžbe gibanja smanjuje uočljivost valnog i vjetrenog opterećenja. Transformacija 2) nije preporučljiva zbog svoje složenosti i činjenice da utječe na linearnost i simetriju matrice masa, [25]. Posljednja transformacija vjerojatno je najprikladnija s obzirom da se nelinearnost uvodi u već nelinearnu matricu povratne krutosti. Transformacija utječe na simetriju matrice krutosti, međutim treba imati na umu prikladnost ove transformacije u metodi *statističke linearizacije*, s obzirom da je potrebno linearizirati samo tu jednu matricu krutosti.

Razmatrani nelinearni dinamički problem moguće je riješiti u *lokalnom* koordinatnom sustavu s obzirom na pol *P*, što je prikladno zbog raspregnutosti prirodnih oblika vibriranja, ili u *globalnom* koordinatnom sustavu s obzirom na težište sustava *G*, slika 2.2. U slučaju

analize u lokalnom koordinatnom sustavu koriste se matrice $[M]_p$, jednadžba (2.37), i $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_P^V$, jednadžba (4.12). U slučaju analize u globalnom koordinatnom sustavu matricu $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_P^V$, potrebno je transformirati djelovanjem matrice $[T]$, jednadžba (2.40):

$$\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_G^* = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{K}}_{11} & & & & \tilde{\tilde{K}}_{15}^* & \\ & \tilde{\tilde{K}}_{22} & & \tilde{\tilde{K}}_{24}^* & & \\ \tilde{\tilde{K}}_{31} & \tilde{\tilde{K}}_{32} & \tilde{\tilde{K}}_{33} & \tilde{\tilde{K}}_{34}^* & \tilde{\tilde{K}}_{35}^* & \tilde{\tilde{K}}_{36} \\ & \tilde{\tilde{K}}_{42}^* & & \tilde{\tilde{K}}_{44}^* & & \\ \tilde{\tilde{K}}_{51}^* & & & & \tilde{\tilde{K}}_{55}^* & \\ & & & & & \tilde{\tilde{K}}_{66} \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

gdje su novi elementi u matrici:

$$\tilde{\tilde{K}}_{15}^* = \tilde{\tilde{K}}_{51}^* = -z_{GT}\tilde{\tilde{K}}_{11}, \tag{4.15}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{24}^* = \tilde{\tilde{K}}_{42}^* = z_{GT}\tilde{\tilde{K}}_{22}, \tag{4.16}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{34}^* = z_{GT}\tilde{\tilde{K}}_{32}, \tag{4.17}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{35}^* = -z_{GT}\tilde{\tilde{K}}_{31}, \tag{4.18}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{44}^* = \tilde{\tilde{K}}_{44} + z_{GT}^2\tilde{\tilde{K}}_{22}, \tag{4.19}$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{55}^* = \tilde{\tilde{K}}_{55} + z_{GT}^2\tilde{\tilde{K}}_{11}. \tag{4.20}$$

Važno je naglasiti da je matricu $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_p^0$ potrebno prvo transformirati u $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_P^V$, a zatim u $\left[\tilde{\tilde{K}}\right]_G^*$, s obzirom da postupak *nije* komutativan. Matrica masa vraća se transformacijom u dijagonalni oblik, $[M]_G$, jednadžba (2.44)

4.2. Tangencijalna matrica krutosti

Tangencijalna matrica krutosti određena je derivacijom povratnih sila po odgovarajućim pomacima, jednadžba (3.26). Elementi matrice za gibanje u horizontalnoj ravnini određeni su jednadžbama (3.29)-(3.35). Uslijed vrlo male promjene sekantne krutosti za vertikalna gibanja, tangencijalna matrica krutosti ne razlikuje se značajnije od sekantne matrice krutosti za te stupnjeve slobode te je u svrhu jednostavnosti prikladno uzeti elemente sekantne matrice krutosti za vertikalna gibanja.

Totalnim diferencijalom virtualne sile F_T, izražene jednadžbom (4.11), odredit će se tangencijalna krutost koeficijenata koji opisuju spregu između vertikalnih i horizontalnih gibanja:

$$\mathrm{d}\,F_T = \left\langle \frac{\partial F_T}{\partial \delta_x}, \frac{\partial F_T}{\partial \delta_y}, \frac{\partial F_T}{\partial \varphi_z} \right\rangle \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\,\delta_x \\ \mathrm{d}\,\delta_y \\ \mathrm{d}\,\varphi_z \end{Bmatrix}, \tag{4.21}$$

gdje su parcijalne derivacije elementi matrice krutosti:

$$\tilde{K}^t_{31} = \frac{EA}{L^2}\delta_x, \quad \tilde{K}^t_{32} = \frac{EA}{L^2}\delta_y, \quad \tilde{K}^t_{36} = \frac{EA\,r^2}{L^2}\varphi_z\,. \tag{4.22}$$

Za tangencijalnu matricu krutosti vrijedi:

$$\left[\tilde{K}\right]^t_p = \begin{bmatrix} \tilde{K}^t_{11} & \tilde{K}^t_{12} & & & & \tilde{K}^t_{16} \\ \tilde{K}^t_{21} & \tilde{K}^t_{22} & & & & \tilde{K}^t_{26} \\ \tilde{K}^t_{31} & \tilde{K}^t_{32} & \tilde{K}_{33} & & & \tilde{K}^t_{36} \\ & & & \tilde{K}_{44} & & \\ & & & & \tilde{K}_{55} & \\ \tilde{K}^t_{61} & \tilde{K}^t_{62} & & & & \tilde{K}^t_{66} \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

gdje je pripadni vektor konačnog pomaka:

$$\left\langle \Delta\delta \right\rangle^V = \left\langle \Delta\delta_x, \Delta\delta_y, \Delta\delta^v, \Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z, \right\rangle. \tag{4.24}$$

Ukoliko se problem rješava u globalnom koordinatnom sustavu s obzirom na težište, matricu povratne krutosti potrebno je transformirati prema jednadžbi (2.41)

$$\left[\tilde{K}\right]^t_G = \begin{bmatrix} \tilde{K}^t_{11} & \tilde{K}^t_{12} & & z_{GT}\tilde{K}^t_{12} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{11} & \tilde{K}^t_{16} \\ \tilde{K}^t_{21} & \tilde{K}^t_{22} & & z_{GT}\tilde{K}^t_{22} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{21} & \tilde{K}^t_{26} \\ \tilde{K}^t_{31} & \tilde{K}^t_{32} & \tilde{K}_{33} & z_{GT}\tilde{K}^t_{32} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{31} & \tilde{K}^t_{36} \\ z_{GT}\tilde{K}^t_{21} & z_{GT}\tilde{K}^t_{22} & & \tilde{K}_{44} + z^2_{GT}\tilde{K}^t_{22} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{21} & z_{GT}\tilde{K}^t_{26} \\ -z_{GT}\tilde{K}^t_{11} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{12} & & -z^2_{GT}\tilde{K}^t_{12} & \tilde{K}_{55} + z^2_{GT}\tilde{K}^t_{11} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{16} \\ \tilde{K}^t_{61} & \tilde{K}^t_{62} & & z_{GT}\tilde{K}^t_{62} & -z_{GT}\tilde{K}^t_{61} & \tilde{K}^t_{66} \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

Pripadajuća matrica masa $\left[M\right]_G$ u tom slučaju je dijagonalna, jednadžba (2.44).

5. USPOREDBA IZVEDENE FORMULACIJE NELINEARNE POVRATNE KRUTOSTI S POZNATIM FORMULACIJAMA

5.1. Usporedba s tradicionalnom krutošću prema Jainu

Primjena nelinearne povratne krutosti u nespregnutoj dinamičkoj analizi pritegnutih pučinskih platformi još uvijek nije uobičajena u inženjerskim proračunima. Formulacija izvedena u [21] i unaprijeđena u određenoj mjeri u [22] i [23] smatra se *tradicionalnom* povratnom krutošću i najčešće se primjenjuje. Tradicionalna povratna krutost izvedena je razmatranjem ravnoteže sila i momenata uslijed proizvoljnog pomaka pučinske platforme u samo jednom stupnju slobode gibanja, dok su pomaci u svim preostalim stupnjevima slobode gibanja spriječeni. Rezultat takve analize je *nesimetrična* matrica povratne krutosti:

$$[K]_G^E = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ & K_{22} & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & K_{42} & & K_{44} & & \\ K_{51} & & & & K_{55} & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Prikladno je promotriti izvod elemenata matrice krutosti za zalijetanje. Neka je narinut proizvoljan pomak zalijetanja δ_x. Svi ostali stupnjevi slobode gibanja su spriječeni. Razmatranjem ravnoteže sila u horizontalnom smjeru dobije se:

$$K_{11} = \sum_{n=1}^{N} (T_n + \Delta T_n) \frac{\sin\alpha}{\delta_x}, \tag{5.2}$$

gdje je

$$\sin\alpha = \frac{\delta_x}{\sqrt{L^2 + \delta_x^2}}. \tag{5.3}$$

S obzirom da je sjedanje uslijed horizontalnog pomaka δ_x zanemareno, dodatna sila u priponi uslijed nelinearne krutosti ΔT_n posljedica je *produljenja* pripone:

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta T_n = \frac{EA}{L}\left(\sqrt{L^2 + \delta_x^2} - L\right). \tag{5.4}$$

Zamjenom izraza (5.4) u jednadžbu (5.2) vrijedi:

$$K_{11} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{\sqrt{L^2 + \delta_x^2}} + \frac{EA}{L}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta_x^2}}\right). \tag{5.5}$$

Matricu povratne krutosti $\left[K\right]_G^E$ potrebno je usporediti s matricom krutosti $\left[\tilde{K}\right]_G^*$ izraženom s jednadžbom (4.14). Usporedit će se samo prvi članovi matrica krutosti za zalijetanje.

S obzirom na jednadžbe (3.23) i (3.18) potrebno je odrediti recipročnu vrijednost prva dva člana razvoja u red, jednadžba (3.11). Budući da za malu vrijednost ε vrijedi $(1-\varepsilon)^{-1} \approx 1+\varepsilon$ moguće je zapisati:

$$\frac{1}{L_z} = \frac{1}{L}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_y}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r\varphi_z}{L}\right)^2\right]. \tag{5.6}$$

Ukoliko se u obzir uzme izraz $\delta^s = L - L_z$, za prvi element matrice $\left[\tilde{K}\right]_G^*$ vrijedi:

$$\tilde{K}_{11} = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{L} + \frac{1}{2L^2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{L} + \rho\, g\, A_{WL}\right)\left(\delta_x^2 + \delta_y^2 + r^2\varphi_z^2\right). \tag{5.7}$$

Usporedbom jednadžbi (5.5) i (5.7) uočavaju se dvije značajne razlike. U elementu krutosti K_{11} pojavljuje se konvencionalna krutost pripona $\frac{EA}{L}$ umjesto promjene uzgona kao hidrostatske "opruge", što je uočljivo u elementu $\tilde{K}_{11}$. Pretpostavku o isključivo horizontalnoj translaciji tijela bez pojave sjedanja moguće je usvojiti samo u slučaju vrlo elastičnih sidrenih linija, što u pravilu nije slučaj za uobičajene pritegnute pučinske platforme kod kojih uslijed narinutog horizontalnog opterećenja dolazi do rotacije tijela uz minimalno elastično istezanje pripona.

Jednostavno je pokazati da prethodni zaključci vrijede i za elemente matrice krutosti K_{22} i K_{66}. Važno je uočiti da je element K_{11} funkcija isključivo horizontalnog pomaka δ_x, dok je $\tilde{K}_{11}$ funkcija *svih* pomaka tijela u horizontalnoj ravnini. Povratna krutost izvedena na način da je narinut proizvoljan pomak samo u jednom stupnju slobode gibanja ne sadrži odgovarajuću nelinearnu spregu između različitih stupnjeva slobode gibanja te stoga ne opisuje fizikalnu realnost na vjerodostojan način.

Promatrajući matricu krutosti u jednadžbi (5.1) uočljivo je nedostajanje, uslijed transformacije koordinatnog sustava, elemenata K_{15} i K_{24}. Doprinos konvencionalne krutosti

pripona elementima krutosti K_{44} i K_{55} mijenja se s kosinusom kuta nagiba pripone. Ukoliko se linearni dio elementa krutosti K_{44} prema Jainu rastavi na sastavne dijelove:

$$K_{44}^{L} = \rho\, g\, I_{WLX} + U\, z_G - Q\, z_G - \sum_{n=1}^{N} T_n\, z_T + \frac{EI_x}{L}, \tag{5.8}$$

uočava se vertikalna koordinata težišta tijela z_G koja se nalazi uz uzgon U, umjesto vertikalne koordinate težišta istisnine z_B.

Na taj način nije zadovoljen uvjet stabiliteta, [32]. Prethodni zaključak vrijedi na jednak način i za element krutosti K_{55}^{L}.

5.2. Usporedba s krutošću prema Lowu

Relativno novu i fizikalno obuhvatniju formulaciju povratne krutosti postavio je Low, [25], koji navodi niz nedostataka u tradicionalnoj formulaciji povratne krutosti prema Jainu, [22]. Matrica krutosti izvedena je energijskim pristupom uz primjenu Lagrangeovih jednadžbi. Za ishodišnu ravninu odabrano je dno pučinske platforme, s tim da je kao generalizirana koordinata u vertikalnom smjeru odabrano poniranje δ_z (bez sjedanja). U samom početku izvoda kosinusna funkcija kuta nagiba pripona razvijena je u red potencija, s tim da su uzeta u obzir samo prva tri člana razvoja. S obzirom da se u slučaju zaošijanja sjedanje pojedinih pripona međusobno razlikuje, pučinska platforma promatra se kao tijelo sastavljeno iz četiri nezavisna dijela, koji svaki za sebe slijede putanju vrha pripadajuće pripone. Na temelju navedene pretpostavke formulirana je potencijalna energija sustava. Prva derivacija potencijalne energije po pomaku određuje povratne sile, dok je drugom derivacijom po pomaku određena tangencijalna matrica povratne krutosti, u kojoj je moguće razdvojiti linearni i nelinearni dio. Usporedit će se sekantne matrice povratne krutosti, te je potrebno takvu matricu formulirati iz izraza za povratne sile u [25].

Za linearni dio sekantne matrice povratne krutosti vrijedi:

$$[K]^{L} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & & \\ & k_1 & & & & & \\ & & k_0 & & & & \\ & & & k_0 b^2 & & & \\ & & & & k_0 a^2 & & \\ & & & & & k_1 r^2 & \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

gdje je $k_0 = \dfrac{EA}{L}$ i $k_1 = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{T_n}{L}$.

Nelinearni dio sekantne matrice povratne krutosti moguće je zapisati prema:

$$[K]^N = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & & \\ & k_{22} & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

gdje su:

$$k_{11} = k_3\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2 + 2b^2\varphi_z^2\right], \tag{5.11}$$

$$k_{22} = k_3\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2 + 2a^2\varphi_z^2\right], \tag{5.12}$$

$$k_{66} = k_3\left\{r^2\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2\right] + 2b^2\delta_x^2 + 2a^2\delta_y^2\right\}, \tag{5.13}$$

$$k_3 = \frac{1}{2L^2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{T_n}{L} + \rho\, g\, A_{WL}\right). \tag{5.14}$$

Odmah je uočljivo da su ovom formulacijom obuhvaćene nelinearne sprege između stupnjeva slobode gibanja uslijed velikih horizontalnih pomaka. Nelinearni dijelovi poniranja, ljuljanja i posrtanja nisu uzeti u obzir. Koeficijent k_1 u $[K]^L$ jednak je koeficijentu u jednadžbi (2.25), dok je u koeficijentu k_0 uzeta u obzir samo konvencionalna krutost pripona (hidrostatska krutost zanemarena je kao veličina manjeg reda). Ista pretpostavka uvedena je i za ljuljanje i posrtanje. Elementi krutosti za zaošijanje jednaki su u obje formulacije.

U svrhu usporedbe nelinearnog dijela sekantne matrice povratne krutosti s matricom krutosti prema novoj formulaciji, jednadžba (4.1), potrebno je izdvojiti nelinearne članove iz izraza za K_0, prema jednadžbi (3.18).

Prema jednadžbi (5.7) vrijedi:

$$k_{11}^N = k_{22}^N = k_3\left[\delta_x^2 + \delta_y^2 + (r\varphi_z)^2\right], \tag{5.15}$$

$$k_{66}^N = r^2 k_{11}^N. \tag{5.16}$$

Usporedbom jednadžbi (5.11) - (5.13) s jednadžbama (5.15) i (5.16) uočljivo je da formulacija prema Lowu sadrži neke dodatne članove sprege, koji utječu na razliku u

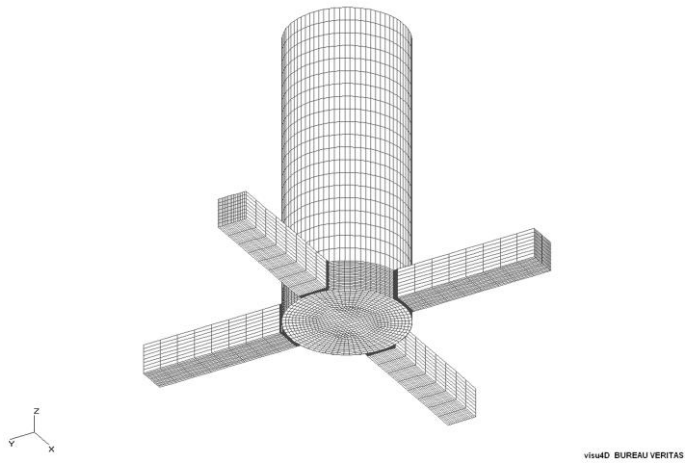
zalijetanju, zanošenju i zaošijanju. Utjecaj zaošijanja na krutost zalijetanja i zanošenja, i obratno, je otprilike udvostručen. Razlika utječe i na tangencijalnu matricu krutosti. Važno je naglasiti da pristup Lowa rezultira značajno složenijom matricom masa [25] (matrica masa postaje funkcija pomaka u horizontalnoj ravnini).

Uočene razlike posljedica su približne formulacije potencijalne energije, koja nije implicitno izvedena iz ravnoteže vanjskih i unutrašnjih sila i momenata, na temelju jednadžbe (3.13).

6. NUMERIČKI PRIMJERI

6.1. Linearni odziv TLP SPAR plovka plutajuće vjetroturbine

Usporedba izvedene formulacije linearne povratne krutosti s formulacijama poznatim u stručnoj literaturi prikazana je na primjeru TLP SPAR plovka plutajuće vjetroturbine, [35]. Analiziran je odziv plovka vjetroturbine na uzbudu valova 1. reda, bez instaliranog stupa, gondole i rotora vjetroturbine, slika 6.1.



Slika 6.1 - Panelni model TLP SPAR plovka

Značajke odabranog primjera navedene su u tablici 6.1

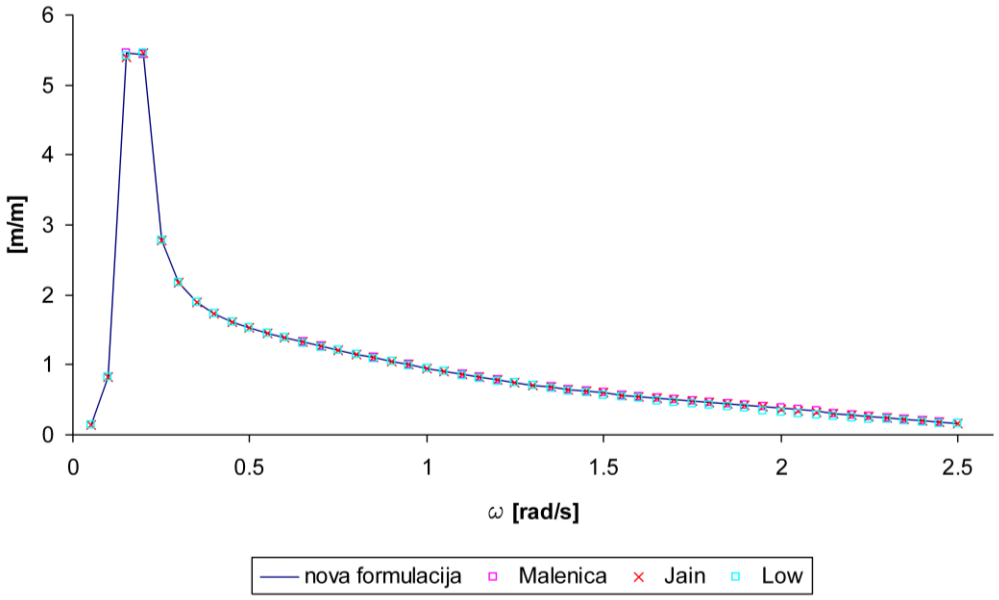
Tablica 6.1 - Osnovne značajke TLP SPAR plovka

Promjer cilindra	4 m	Dubina vode	200 m
Gaz cilindra	10 m	Masa sustava	49002 kg
Debljina cilindra	25.3 mm	Masa istisnine	149887 kg
Duljina izdanka	5 m	Težište sustava	-6.698 m
Širina izdanka	1 m	Težište istisnine	-5.687 m
Promjer pripone	50 mm	J_{xx}	1140080 kg m^2
Broj pripona	1 po izdanku	J_{yy}	1140080 kg m^2
Duljina pripone	190 m	J_{zz}	451478 kg m^2

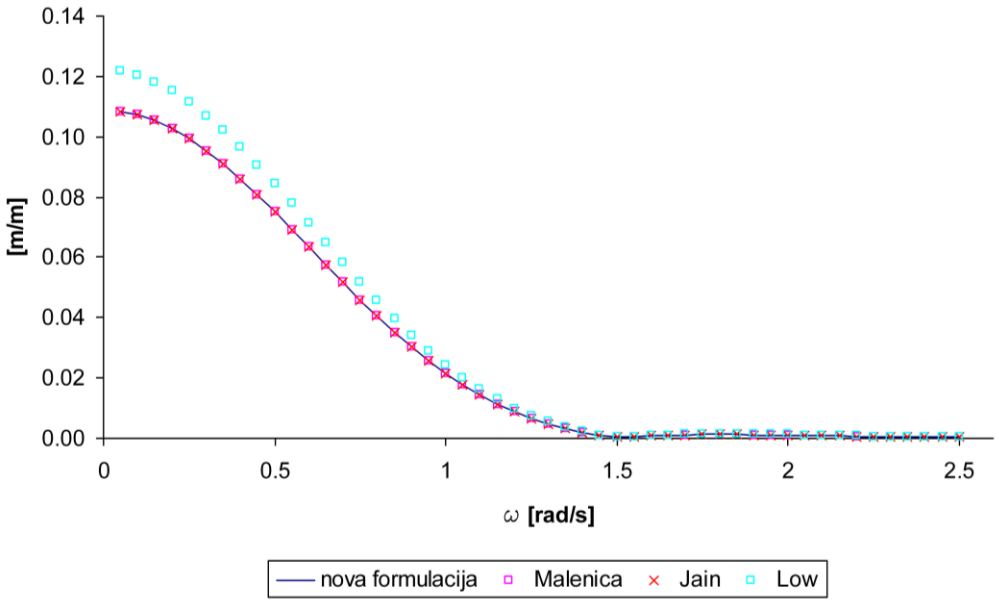
Hidrodinamička uzbuda i reakcija određeni su numerički računalnim programom HYDROSTAR, [30].Oplakana površina TLP SPAR plovka diskretizirana je s 2272 panela. Linearne jednadžbe gibanja riješene su u frekvencijskoj domeni. Analizirana su 2 slučaja s različitim materijalom pripona. U prvom slučaju odabrane su uobičajene čelične pripone ($E = 2.06 \cdot 10^{11}$ N/m^2), dok je u drugom slučaju za materijal pripona odabran poliester

visokog modula elastičnosti HMPE ($E = 2.5 \cdot 10^{10}$ N/m^2). Razlog odabira poliesterskih pripona je namjera da se odabirom materijala nižeg modula elastičnosti naglasi utjecaj elemenata različitih od konvencionalne krutosti u matrici linearne povratne krutosti, kako bi se objektivno usporedile različite formulacije. Odabir HMPE pripona uzrok je problemu istezanja linija sidrenog sustava, posebno kod većih dubina sidrenja, međutim taj problem ovdje nije razmatran, [36].

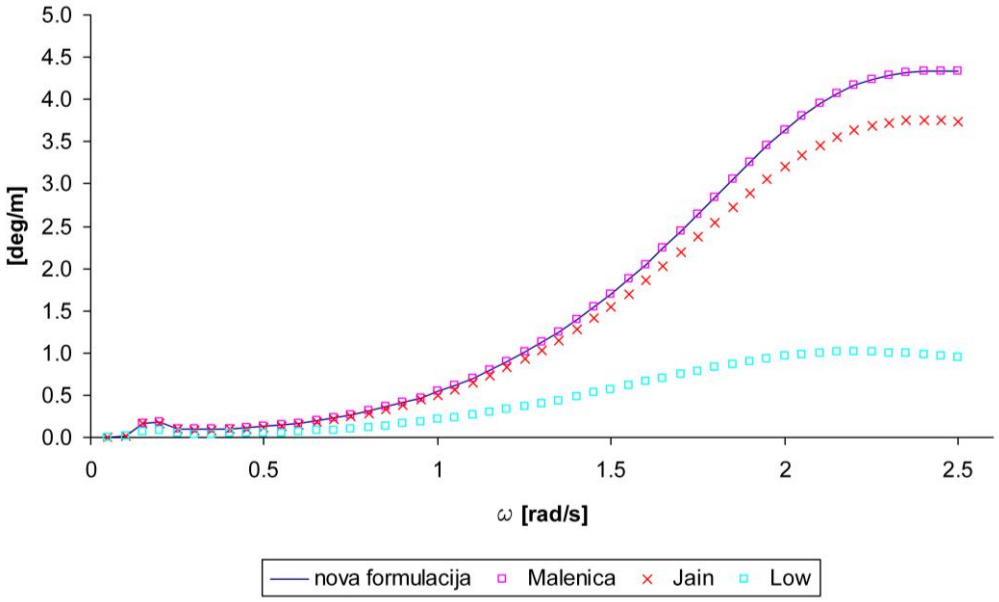
Rješenjem jednadžbe gibanja određene su prijenosne funkcije prikazane na slikama 6.2-6.5.



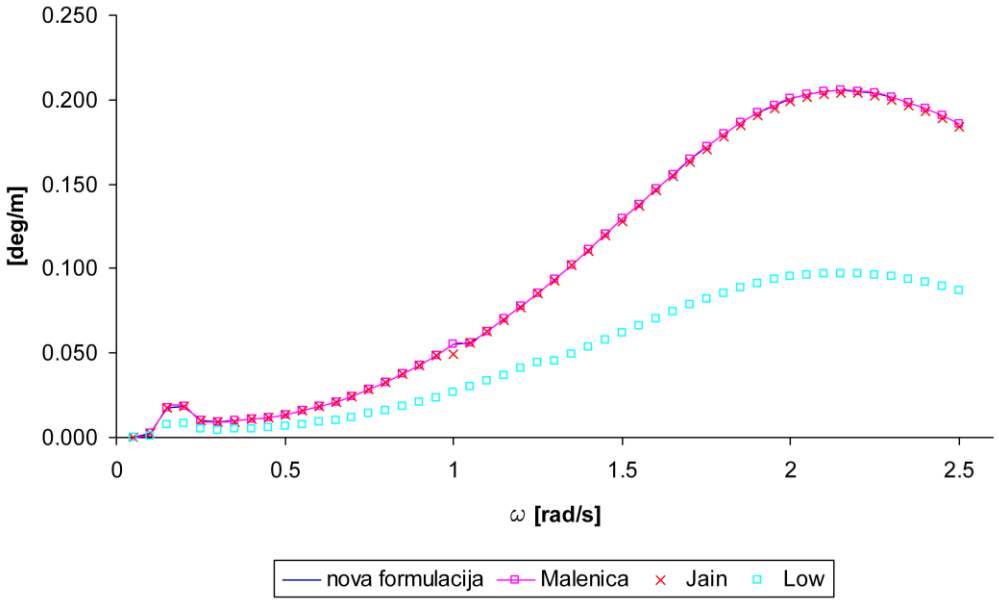
Slika 6.2 - Prijenosna funkcija zalijetanja TLP SPAR plovka (HMPE pripone)



Slika 6.3 - Prijenosna funkcija poniranja TLP SPAR plovka (HMPE pripone)



Slika 6.4 - Prijenosna funkcija posrtanja TLP SPAR plovka (HMPE pripone)



Slika 6.5 - Prijenosna funkcija posrtanja TLP SPAR plovka (čelične pripone)

Na slici 6.2, na kojoj je prikazan najznačajniji odziv TLP SPAR plovka, uočljivo je da praktično nema razlike između različitih formulacija linearne povratne krutosti. Na slici 6.3 formulacija Low-a uzrok je nešto višim vrijednostima poniranja, međutim te razlike nisu značajne. Nešto veće razlike primjećuju se za rotacijski stupanj slobode gibanja, slika 6.4. Na

slici 6.5 prikazan je isti rotacijski stupanj slobode, ali za slučaj čeličnih pripona. Razlike između formulacija značajno su manje, s tim da u oba slučaja formulacija prema Low-u nešto značajnije odstupa.

6.2. Linearni odziv ISSC TLP-a

Za numeričku analizu odabrana je ISSC TLP pritegnuta pučinska platforma, koja je kao primjer temeljito hidrodinamički istražena, [13]. Osnovne značajke ISSC TLP-a navedene su u Tablici 6.2. Elementi povratne krutosti i mase, navedeni u Tablici 6.2, odnose se na težište tijela.

Tablica 6.2 - Osnovne značajke ISSC TLP-a

Varijabla	**Simbol**	**Vrijednost**
Razmak između stupova	$2a=2b$	86.25 m
Promjer stupova	D_C	16.87 m
Širina pontona	w	7.50 m
Visina pontona	d	10.50 m
Gaz	$-z_T$	35.00 m
Površina vodne linije	A_{wl}	894 m^2
Istisnina	U	$5.346 \cdot 10^5$ kN
Težina	Q	$3.973 \cdot 10^5$ kN
Ukupna sila prednatega pripona	T	$1.373 \cdot 10^5$ kN
Uzdužna metacentarska visina	$\overline{M_L G}$	6.0 m
Poprečna metacentarska visina	$\overline{M_T G}$	6.0 m
Masa platforme	m	$40.5 \cdot 10^3$ t
Moment tromosti mase - ljuljanje	J_x^G	$82.37 \cdot 10^6$ t m^2
Moment tromosti mase - posrtanje	J_y^G	$82.37 \cdot 10^6$ t m^2
Moment tromosti mase - zaošijanje	J_z^G	$98.07 \cdot 10^6$ t m^2
Vertikalni položaj težišta sustava iznad osnovke	$\overline{PG}$	38.0 m
Vertikalni položaj težišta istisnine iznad osnovke	$\overline{PB}$	22.3 m
Duljina sidrene linije (pripone)	L	415.0 m
Površina poprečnog presjeka pripona	A	1.6 m^2
Ukupna vertikalna krutost pripona	$\frac{EA}{L}$	$0.813 \cdot 10^6$ kN/m
Efektivna krutost pripona za ljuljanje i posrtanje	$\frac{E I_x}{L}, \frac{E I_y}{L}$	$1.501 \cdot 10^9$ kNm/rad

Elementi konzistentne matrice linearne povratne krutosti određeni su jednadžbama (2.25) - (2.29) i iznose:

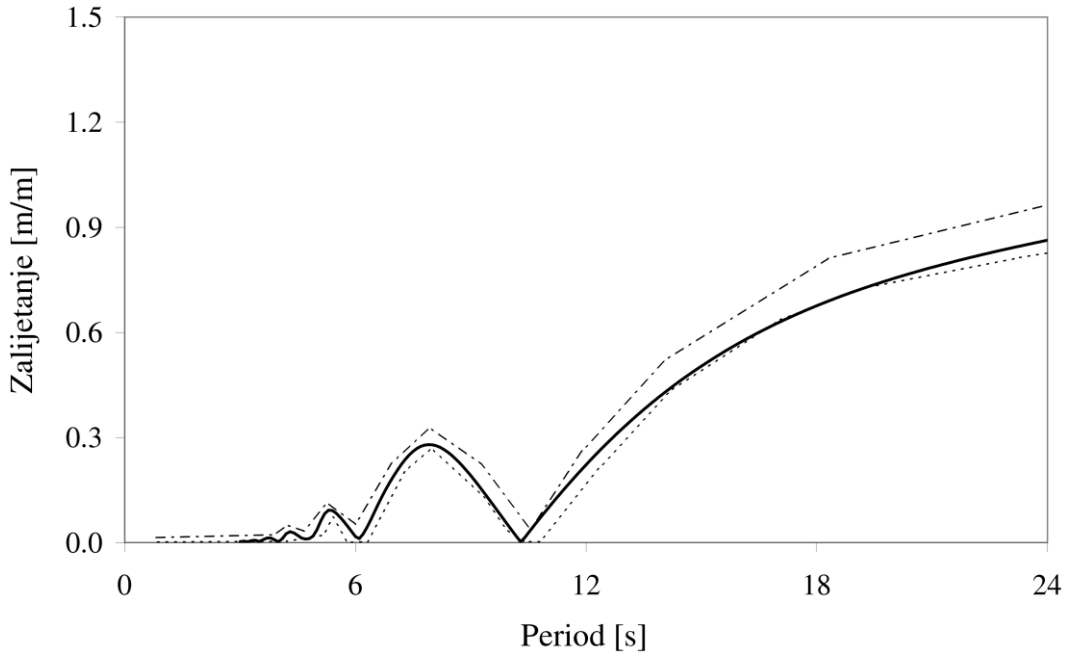
$K_{11} = K_{22} = 331$ kN/m,

$K_{33} = 0.822 \cdot 10^6$ kN/m,

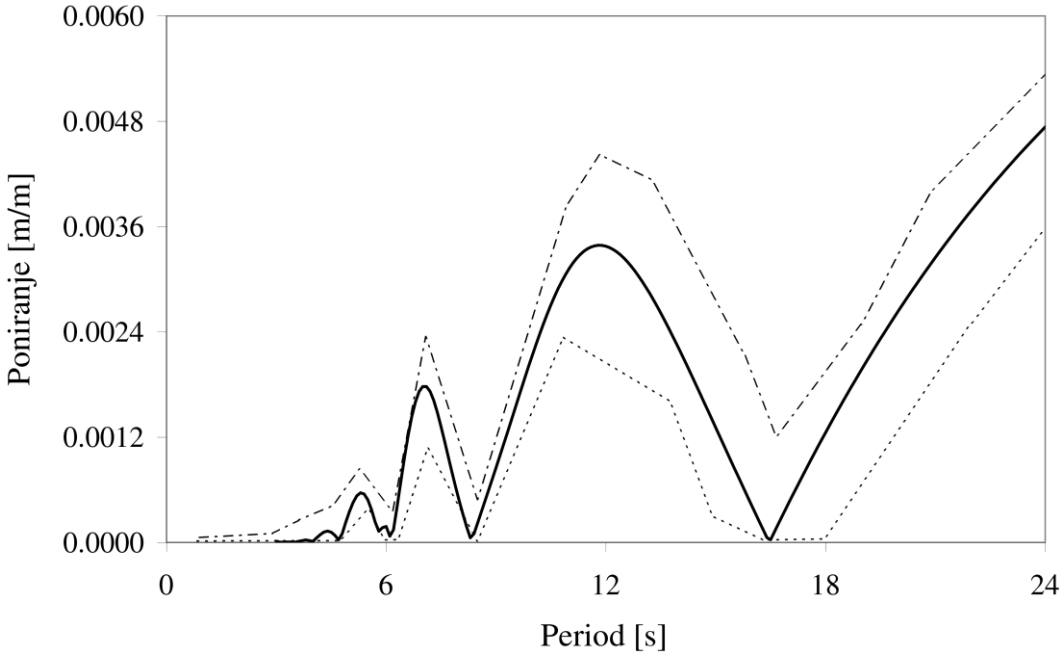
$K_{44} = K_{55} = 1520 \cdot 10^6$ kNm,

$K_{66} = 1.255 \cdot 10^6$ kNm.

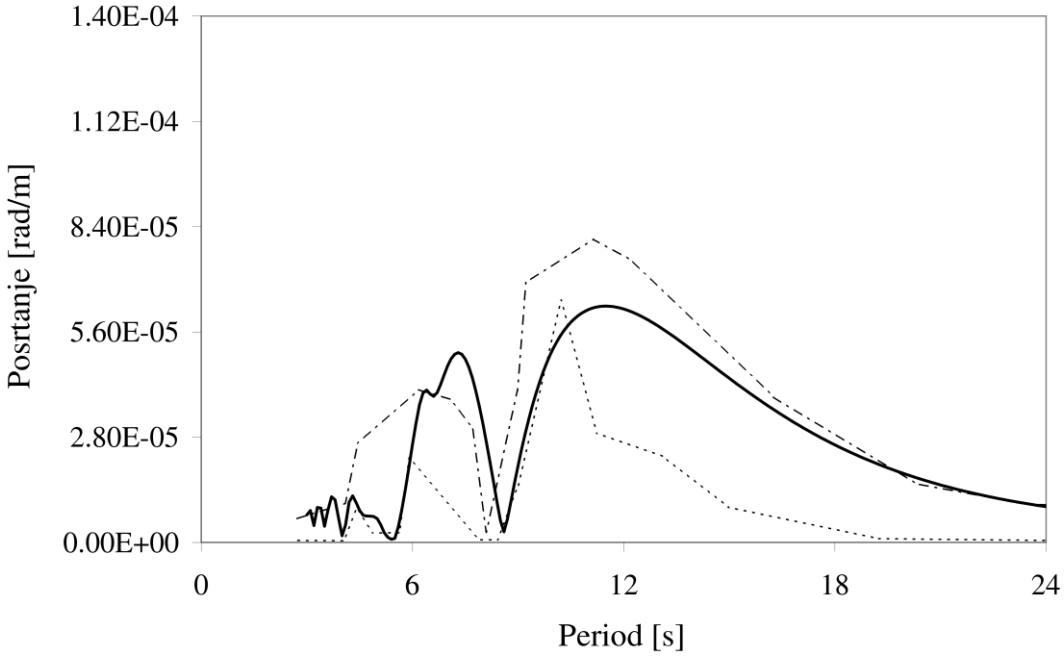
Matrica masa i matrica povratne krutosti transformirane su u hidrodinamički koordinatni sustav s ishodištem na neporemećenoj slobodnoj površini. Hidrodinamička analiza ISSC TLP-a provedena je računalnim programom WAMIT, [27]. Linearne jednadžbe gibanja riješene su u frekvencijskoj domeni. Prijenosne funkcije zalijetanja, poniranja i posrtanja (za valove koji nailaze u pramac) prikazane su punim linijama, slika 6.6 - slika 6.8 te su uspoređene s prijenosnim funkcijama određenim u [13]. S obzirom da je u [13] prikazan velik broj krivulja (hidrodinamička analiza provedena je različitim modelima i različitim metodama), na slikama 6.6 - 6.8 prikazana je samo ovojnica tih rezultata.



Slika 6.6 - Prijenosna funkcija zalijetanja



Slika 6.7 - Prijenosna funkcija poniranja

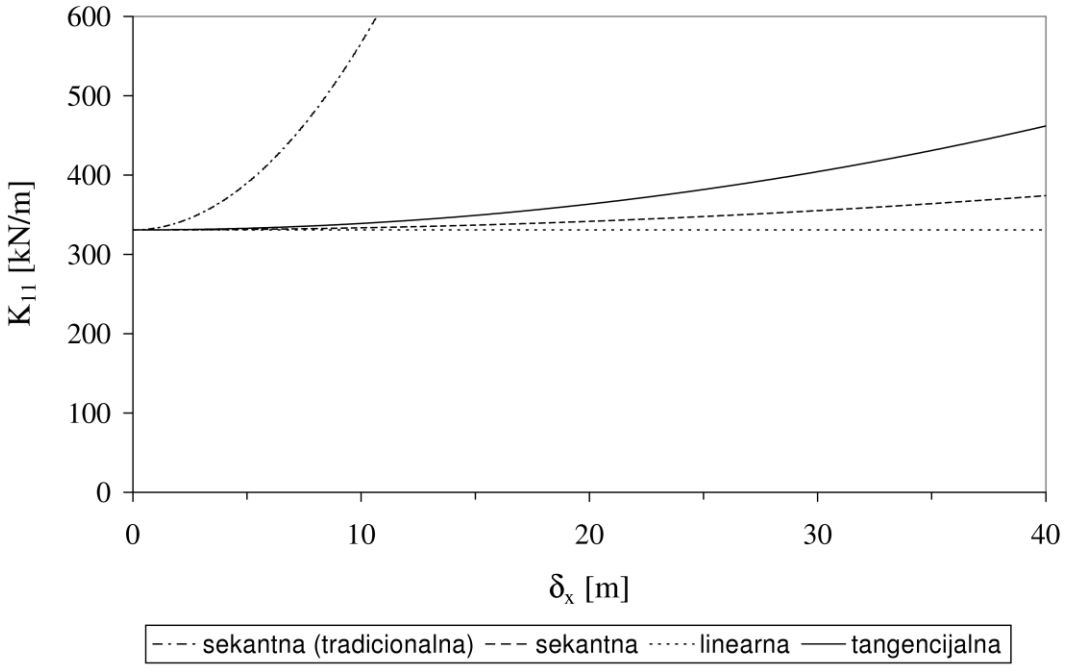


Slika 6.8 - Prijenosna funkcija posrtanja

Rezultati određeni korištenjem nove formulacije povratne krutosti nalaze se unutar ovojnica određenih iz [13]. U svrhu analize doprinosa hidrostatske krutosti na točnost rješenja jednadžbe gibanja proveden je proračun s povratnom krutosti koja uključuje samo konvencionalnu i geometrijsku krutost. Razlika između prijenosnih funkcija vrlo je mala te se ne može uočiti na slikama.

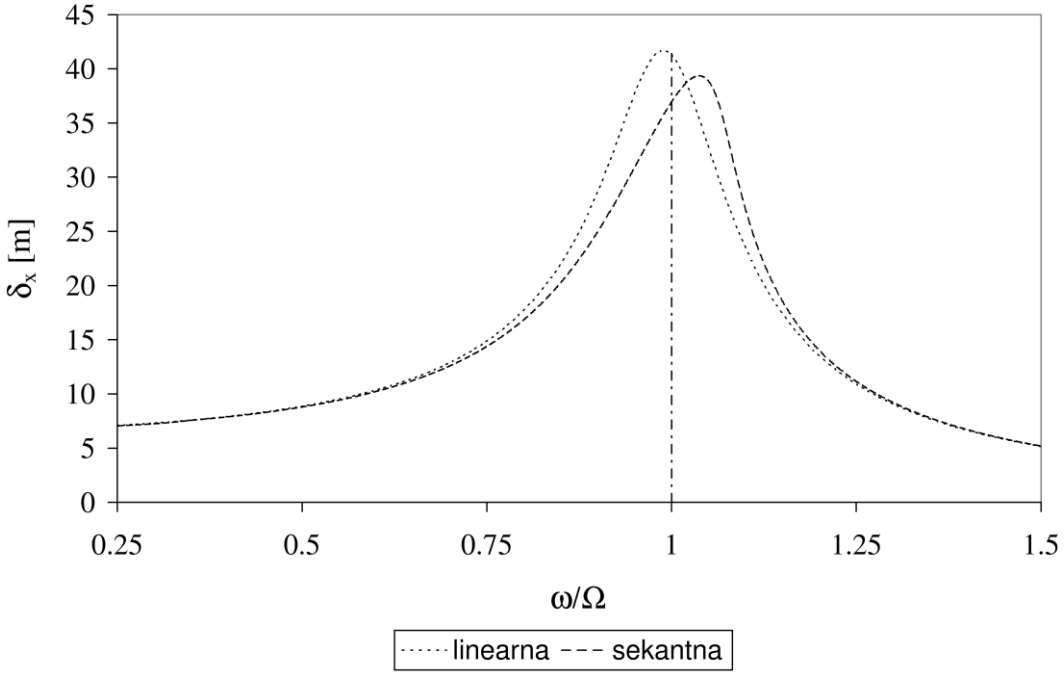
6.3. Nelinearno zalijetanje ISSC TLP-a

Gibanja pritegnute pučinske platforme u horizontalnoj ravnini posljedica su značajnim dijelom različitih nelinearnosti u strujanjima sa slobodnom površinom (drugi izvori uzbude su vjetreno opterećenje i viskozni učinci u nastrujavanju morske struje). Te nelinearnosti dobro su opisane modelom sila valova 2. reda (s obzirom na perturbacijski faktor u razvoju u red). Sile valova 2. reda posljedica su međudjelovanja u bikromatskoj valnoj grupi i sastoje se od konstantnog dijela te dijela koji je promjenljiv s razlikom frekvencija, sa zbrojem frekvencija i s dvostrukom vrijednosti frekvencija. U ovom numeričkom primjeru na ISSC TLP bit će narinuto valno opterećenje 2. reda samo s razlikom frekvencija (sporo promjenjiva komponenta opterećenja). Sporo promjenjiva sila valova sastoji se od realnog i imaginarnog dijela koje je moguće procijeniti na temelju radova Newmana [37] i Raineya [38]. Za amplitudu harmonijske sile valova drugog reda kod zalijetanja pretpostavljena je vrijednost $F_x^0 = 2200\,\mathrm{kN}$. Dodana masa kod zalijetanja određena je računalnim programom WAMIT, [27], dok je za bezdimenzijsko prigušenje cilindara i pontona pretpostavljena vrijednost od 8% od kritične vrijednosti prigušenja. Slika 6.9 prikazuje vrijednosti linearne krutosti K_{11}, tangencijalne krutosti $\tilde{K}_{11}^t$ i sekantne krutosti određene prema jednadžbama (2.25), (3.29) i (5.7). Zanimljivo je primijetiti da je tangencijalnu krutost moguće aproksimirati polinomom drugog reda, rezultat čega je Duffingova jednadžba kao model jednadžbe gibanja.



Slika 6.9 - Povratna krutost zalijetanja

Nelinearno zalijetanje pučinske platforme određeno je integracijom u vremenskoj domeni, s konstantnom amplitudom sile i promjenljivom frekvencijom uzbude. Izračunate linearne i nelinearne amplitude zalijetanja prikazane su na slici 6.10, gdje je s ω označena frekvencija uzbude, a s Ω prirodna frekvencija pripadajućeg linearnog sustava.



Slika 6.10 - Odzivne krivulje zalijetanja, $F_x^0 = 2200\,\text{kN}$

Za veće amplitude uzbude za očekivati je pojavu skoka na slici 6.10. Rezultirajuću jednadžbu gibanja moguće je riješiti i metodom uravnoteženja harmonika, [39].

6.4. Nelinearno zalijetanje i poniranje ISSC TLP-a

Numerički će se istražiti za ukupan odziv vrlo važna sprega zalijetanja i poniranja pritegnute pučinske platforme. Prema slici 3.6 i jednadžbi (3.57) za krutost u tangencijalnom smjeru vrijedi:

$$\tilde{K}_t = \frac{T}{L}\sqrt{1-\left(\frac{\delta_x}{L}\right)^2} + 2\,\rho\,g\,A_{WL}\left(\frac{\delta_x}{L}\right)^2, \tag{6.1}$$

pri čemu je $\psi = \alpha$ i $\sin\alpha = \frac{\delta_x}{L}$.

Prema slici 3.6 jednadžba gibanja u tangencijalnom smjeru glasi:

$$m\ddot{\delta}_t + D\dot{\delta}_t + \tilde{K}_t\,\delta_t = F_z(t)\sin\alpha\,, \tag{6.2}$$

gdje je *m* zbroj mase platforme i dodane (hidrodinamičke) mase, *D* je koeficijent prigušenja, a $F_z(t)$ je uzbudna sila valova. S obzirom na male numeričke vrijednosti zanemarene su tangencijalne komponente sile inercije i prigušenja uslijed sjedanja δ^s. Jednadžbu (6.2) prikladno je zapisati u obliku uobičajenom u analizi vibracija sustava s jednim stupnjem slobode gibanja, [34]:

$$\ddot{\delta}_t + 2\nu\tilde{\Omega}_t\,\dot{\delta}_t + \tilde{\Omega}_t^2\,\delta_t = f_t(t)\,, \tag{6.3}$$

gdje je ν bezdimenzijski koeficijent prigušenja,

$$\tilde{\Omega}_t = \sqrt{\frac{\tilde{K}_t}{m}} \tag{6.4}$$

je promjenljiva "prirodna" frekvencija,

$$f_t(t) = \frac{F_z(t)}{m}\frac{\delta_x}{L}\,. \tag{6.5}$$

U analizi poniranja, prikladno je zbog jednostavnosti pretpostaviti harmonijski pomak zalijetanja, $\delta_x = \delta_0 \sin\omega_s t$, gdje je ω_s frekvencija uzbudne sile 2. reda. Navedena pretpostavka nema kvalitativnih posljedica na odziv poniranja.

Za uzbudnu funkciju iz (6.5), za harmonijski val $h = \frac{H}{2}\cos(\omega_w t - k\,\delta_x)$, gdje je $k = \omega_w^2/g$ valni broj, vrijedi:

$$f_t(t) = \frac{F_z^0}{L\,m}\delta_0 \sin\omega_s t\cdot\cos\left(\omega_w t - \frac{\omega_w^2}{g}\delta_0\sin\omega_s t\right). \tag{6.6}$$

Diferencijalna jednadžba aksijalnih vibracija pripona, prema slici 3.6, glasi:

$$\ddot{\delta}_r + 2\nu\tilde{\Omega}_r\,\dot{\delta}_r + \tilde{\Omega}_r^2\,\delta_r = f_r(t) + \left(\ddot{\delta}^s + 2\nu\tilde{\Omega}_r\,\dot{\delta}^s\right)\cos\alpha\,, \tag{6.7}$$

gdje je

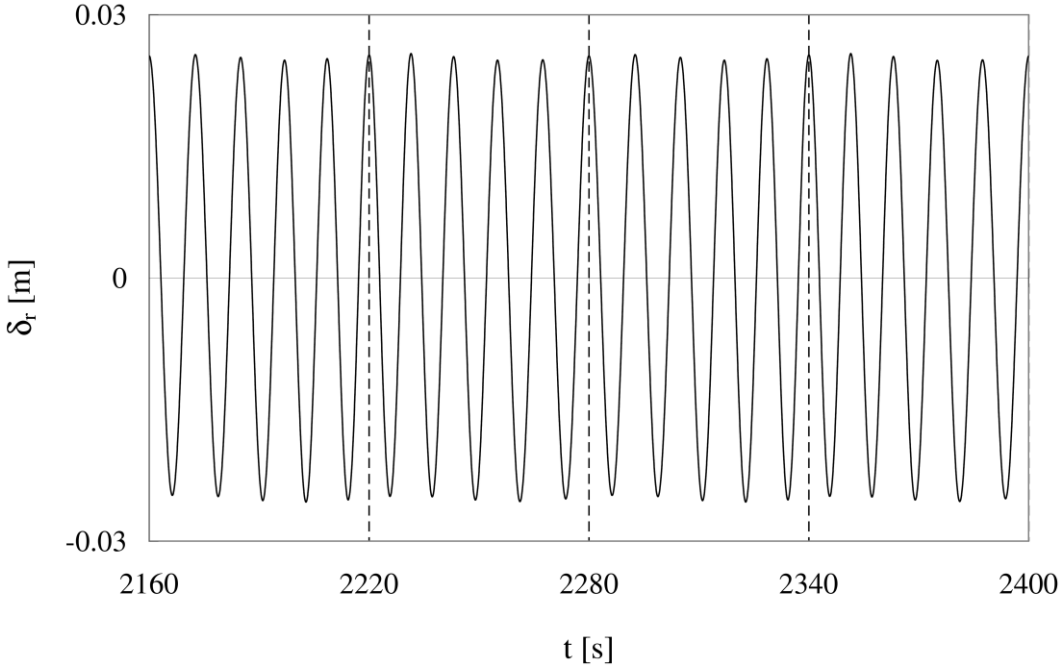
$$\tilde{\Omega}_r = \sqrt{\frac{\tilde{K}_r}{m}}\,, \tag{6.8}$$

$$f_r(t) = \frac{F_z^0}{m}\sqrt{1-\left(\frac{\delta_0}{L}\right)^2\sin^2\omega_s t}\cdot\cos\left(\omega_w t - \frac{\omega_w^2}{g}\delta_0\sin\omega_s t\right). \tag{6.9}$$

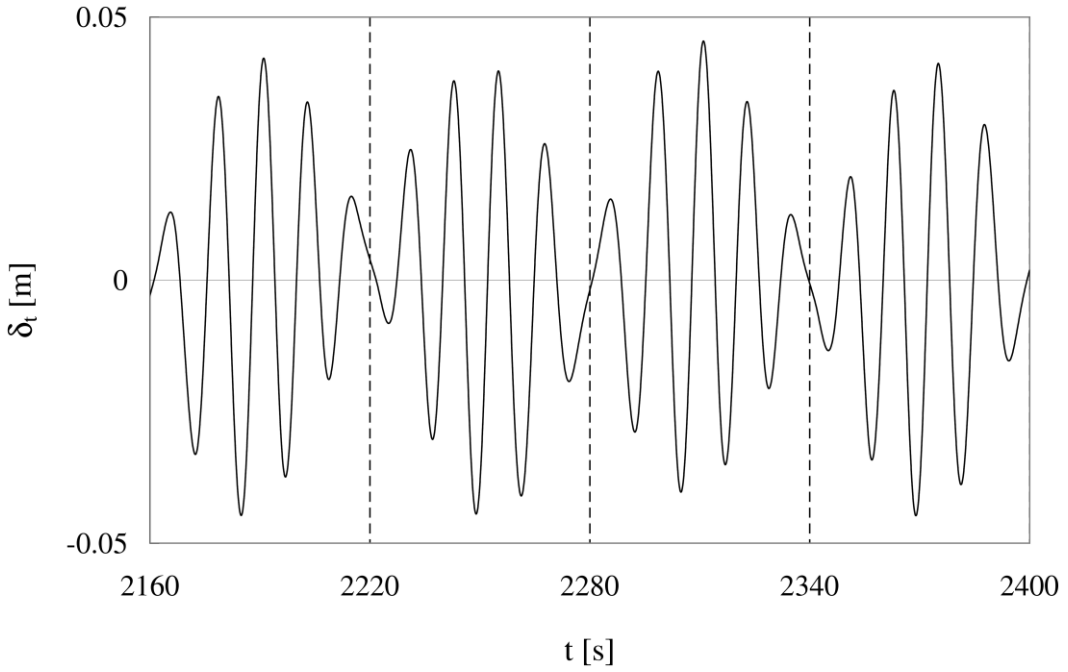
Zanimljivo je uočiti posljednji član na desnoj strani jednadžbe (6.7). Taj član predstavlja uzbudu uslijed sjedanja platforme. Ukoliko uvedemo supstituciju $\delta^s = L/2\,(\delta_x/L)^2$, vrijedi:

$$\left(\ddot{\delta}^s + 2\nu\tilde{\Omega}_r\,\dot{\delta}^s\right)\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\delta_0}{L}\right)^2 \sin^2\omega_s t}\cdot\frac{\delta_0^2\,\omega_s}{L}\left[\omega_s\cos(2\omega_s t) + \nu\tilde{\Omega}_r\sin(2\omega_s t)\right] \quad (6.10)$$

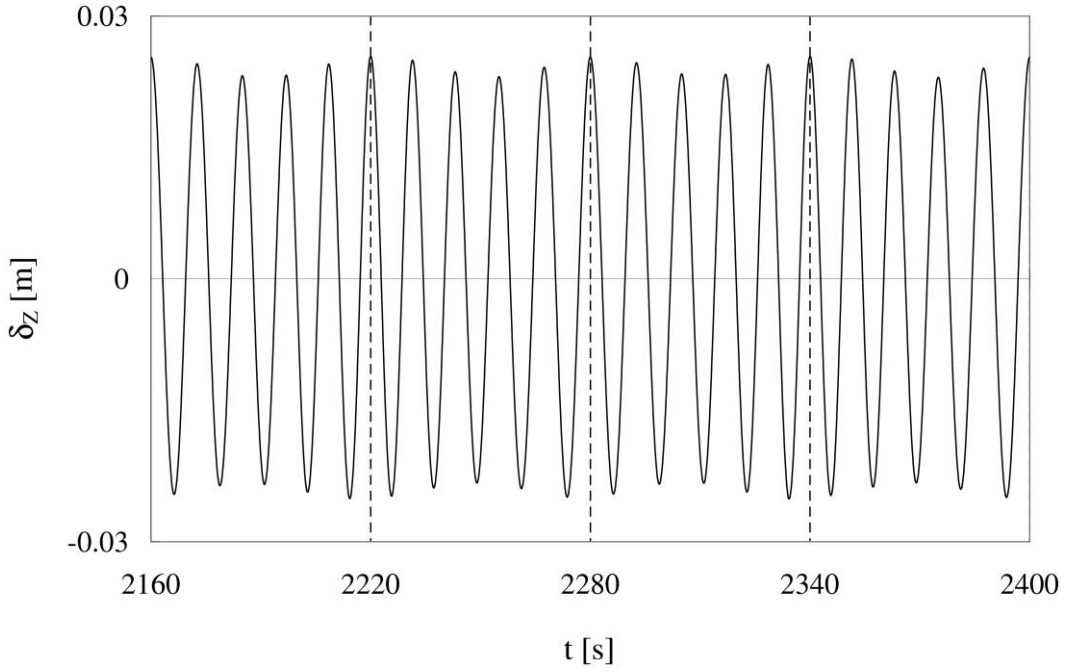
Pretpostavljena je amplituda zalijetanja $\delta_x = 18.5$ m i prirodni period zalijetanja $T_s = 120$ s (prirodna frekvencija je $\omega = 0.0523$ rad/s). Odabrana vrijednost odgovara vrijednosti amplitude za $\omega_s/\Omega = 0.815$, slika 6.10. Odabrani valni period $T_w = 12$ s, odnosno frekvencija $\omega_w = 0.5233$ rad/s, odgovara vršnoj frekvenciji pretpostavljenog spektra valova. Amplituda vertikalne sile ($F_z^0 = 20210$ kN za visinu vala od 15 m) i dodana (hidrodinamička) masa za poniranje za $\omega = \infty$ ($A_{33} = 27257$ t ≈ 0.7 mase TLP-a) određeni su korištenjem računalnog programa WAMIT, [27]. Za bezdimenzijsku vrijednost prigušenja pretpostavljena je vrijednost 2.5% od kritičnog prigušenja. Diferencijalne jednadžbe gibanja, iskazane jednadžbama (6.3) i (6.7), integrirane su u vremenskoj domeni korištenjem eksplicitne Runge-Kutta metode 5. reda s uključenim rješenjem 4. reda (kako bi se kontrolirao vremenski korak) prema Dormand i Prince, [28] i [40]. Izračunati odzivi u radijalnom, tangencijalnom i vertikalnom smjeru prikazani su na slikama 6.11-6.13 (za 2 perioda zalijetanja). S obzirom da je omjer $T_s/T_w = 10$, unutar jednog perioda zalijetanja nalazi se 10 perioda poniranja.



Slika 6.11 - Radijalni pomak, $\omega_w = 0.5233$ rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN



Slika 6.12 - Tangencijalni pomak, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN

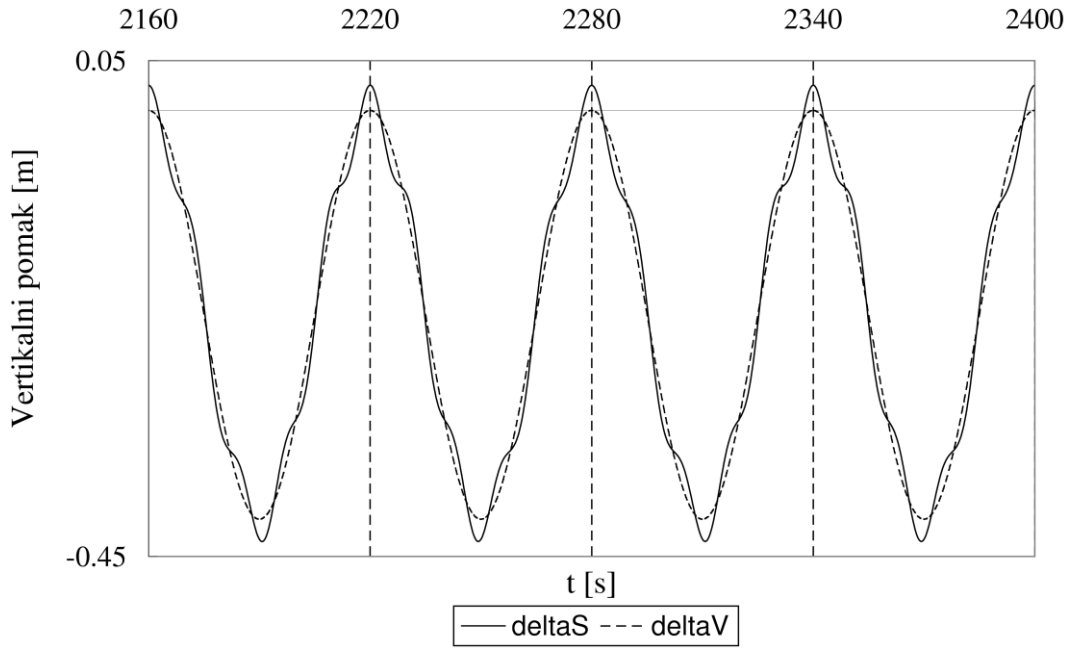


Slika 6.13 - Poniranje, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN

Za razliku od amplitude radijalnog pomaka δ_r, amplituda tangencijalnog pomaka δ_t pokazuje izrazito "udaranje" (eng. beating), što je očito posljedica promjenljivog kuta nagiba α, slika 3.1. Pomak δ_t istog je reda veličine kao i δ_r. Tangencijalni pomak ima najveću vrijednost u trenutku najveće vrijednosti zalijetanja δ_x $(t = T_s/4)$. Važno je

primijetiti da su tangencijalna i radijalna gibanja međusobno u protufazi, s obzirom da je tangencijalno gibanje podrezonantno, a radijalno gibanje je nadrezonantno. S obzirom da je vertikalna projekcija tangencijalnog pomaka znatno manja od vertikalne projekcije radijalnog pomaka, gibanje u vertikalnom smjeru tj. poniranje δ_z pokazuje neznatno "udaranje", s najvećom vrijednosti odziva u uspravnom položaju platforme i najmanjom vrijednosti odziva kada je platforma najviše otklonjena od uspravnog položaja.

Da bi se odredio ukupan vertikalni pomak potrebno je zbrojiti poniranje δ_z sa sjedanjem δ^s. Rezultat prikazuje slika 6.14. Uočljivo je da je vrijednost sjedanja znatno veća od vrijednosti poniranja.



Slika 6.14 - Vertikalni pomak, ω_w = 0.5233 rad/s, $F_z^0 = 20210$ kN

6.5. Usporedba nelinearnog odziva ISSC TLP-a određenog korištenjem tradicionalne krutosti i nove formulacije krutosti

Analiziran je utjecaj tradicionalne i nove formulacije povratne krutosti na uzbudu zalijetanja i poniranja. S obzirom da se promatra gibanje tijela u vertikalnoj ravnini, jednadžbe gibanja reduciraju se na tri spregnute diferencijalne jednadžbe za zalijetanje, poniranje i posrtanje. Pripadajući vektor pomaka glasi $\langle \delta_x, \delta^v, \varphi_y \rangle$, pri čemu treba primijetiti da δ^v predstavlja ukupni vertikalni pomak, tj. zbroj poniranja i sjedanja.

Za tradicionalnu sekantnu matricu povratne krutosti, određenu za težište tijela, vrijedi:

$$[K]_G^E = \begin{bmatrix} K_{11} & & \\ K_{31} & K_{33} & K_{35} \\ K_{51} & & K_{55} \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Prvi element matrice u jednadžbi (6.11) određen je izrazom (5.5), dok su preostali elementi matrice određeni na temelju [22], [23]:

$$K_{31} = \frac{1}{\delta_x}\left[\sum_{n=1}^{N} T_n \left(\frac{1}{\sqrt{L^2+\delta_x^2}} - 1\right) + \frac{EA}{L}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{L^2+\delta_x^2}}\right)\right], \tag{6.12}$$

$$K_{33} = \rho\, g\, A_{WL} + \frac{EA}{L}, \tag{6.13}$$

$$K_{35} = 0, \tag{6.14}$$

$$K_{51} = -K_{11}(z_G - z_T), \tag{6.15}$$

$$K_{55} = -\rho\, g\, A_{WL}\, z_T (z_G - z_T)\frac{\sin\varphi_y}{\varphi_y}. \tag{6.16}$$

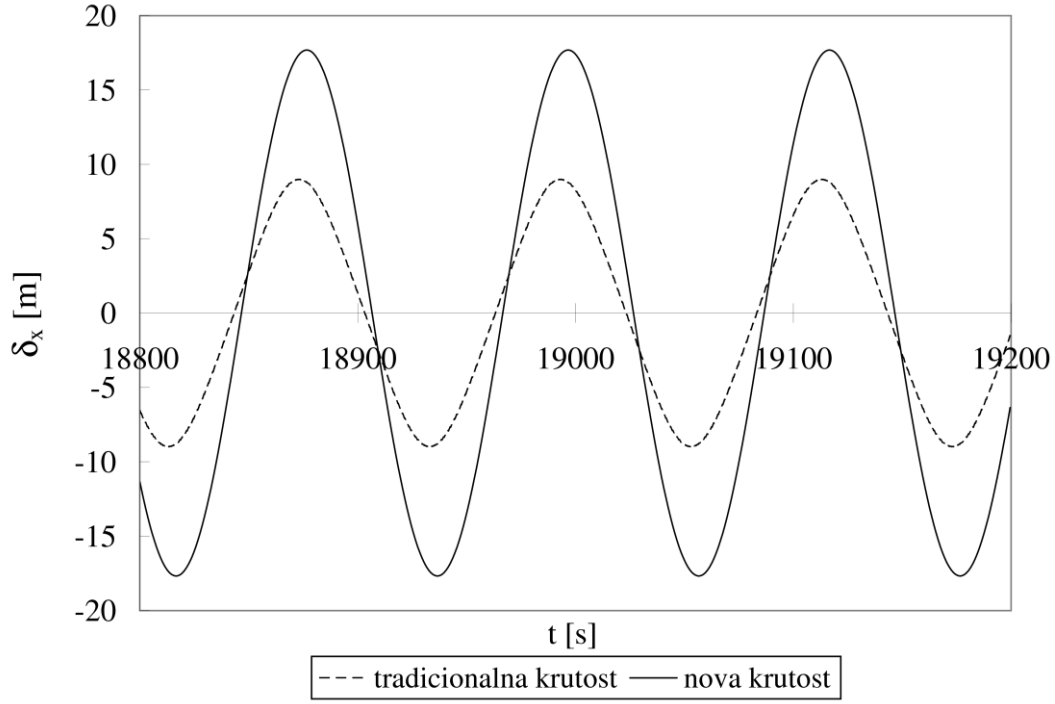
Odgovarajuća sekantna matrica povratne krutosti, temeljena na novoj formulaciji, glasi:

$$[\tilde{K}]_G^* = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & & \tilde{K}_{15}^* \\ \tilde{K}_{31} & K_{33} & \tilde{K}_{35}^* \\ \tilde{K}_{51}^* & & \tilde{K}_{55}^* \end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Elementi matrice u jednadžbi (6.17) određeni su u poglavlju 4.1.

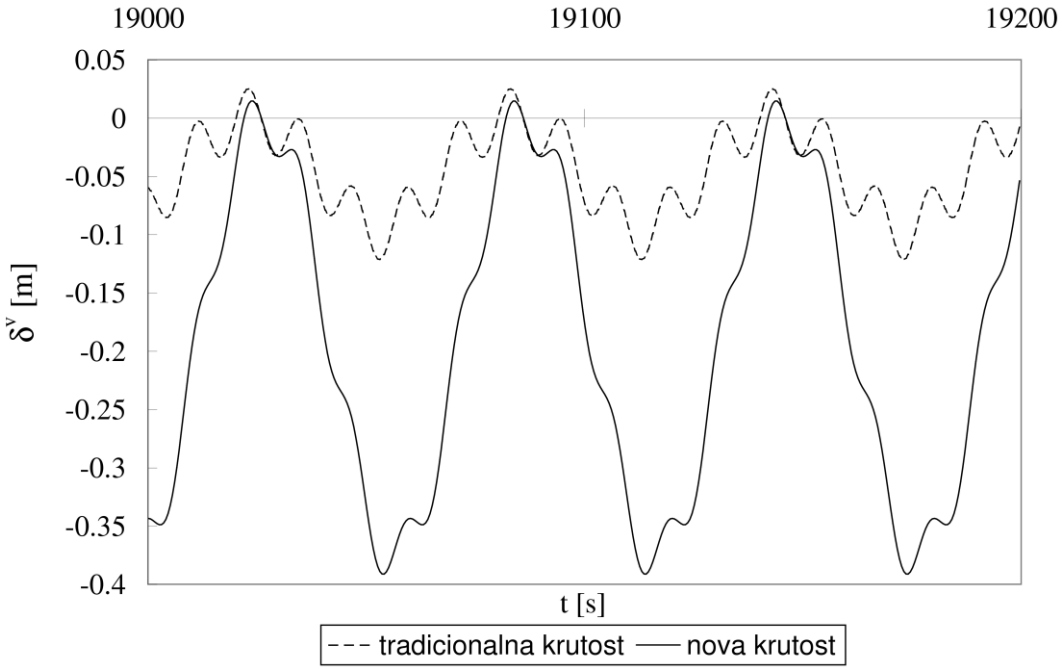
Za zalijetanje je narinuta uzbuda sile 2. reda s amplitudom $F_x^0 = 2200$ kN i periodom $T_S = 120$ s. Za poniranje narinuta je uzbuda sile 1. reda s amplitudom $F_z^0 = 20210$ kN i periodom $T_w = 12$ s. Dodana masa za $\omega = \infty$ određena je korištenjem računalnog programa WAMIT, [27]. U analizi je zbog jednostavnosti uzeto u obzir samo potencijalno prigušenje uslijed generiranja valova kod zalijetanja s velikim periodom (eng. wave drift damping), koje je procijenjeno na temelju [41]. Rezultat navedenog proračuna je dijagonalna matrica prigušenja s vrijednosti od 8% od kritične vrijednosti za zalijetanje i 2.5% za poniranje i posrtanje.

Diferencijalne jednadžbe gibanja riješene su u vremenskoj domeni, [40]. Zalijetanje δ_x, određeno primjenom dviju različitih formulacija krutosti, prikazuje slika 6.15.



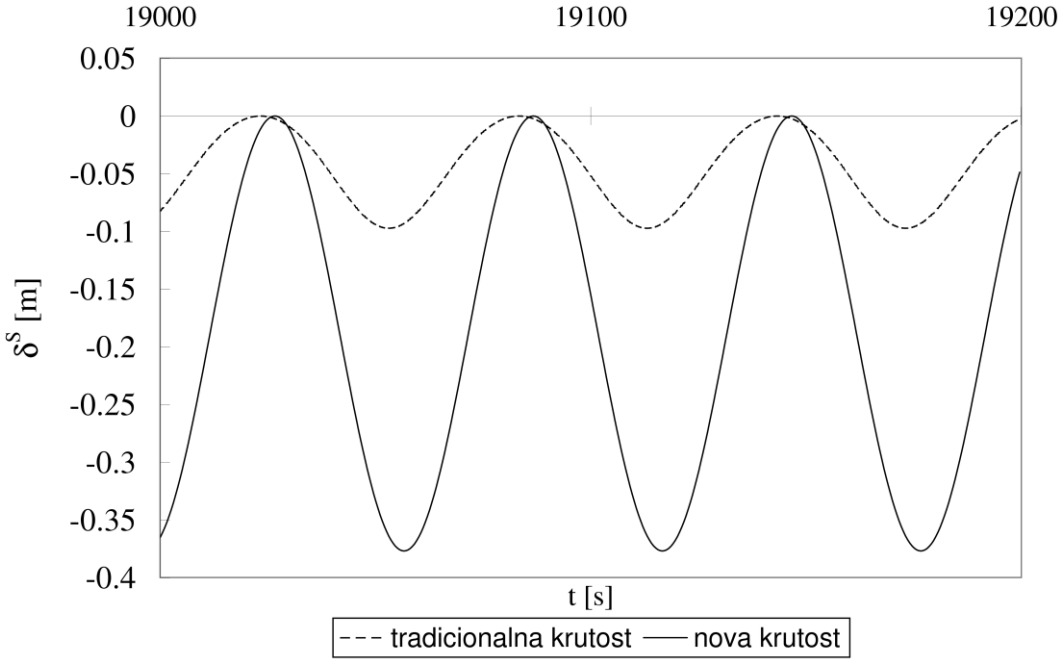
Slika 6.15 - Zalijetanje

Ono što se može uočiti je da tradicionalna krutost daje značajno niži odziv zalijetanja, što je posljedica nefizikalne formulacije krutosti, slika 6.9. Ukupan vertikalni pomak δ^v prikazuje slika 6.16.

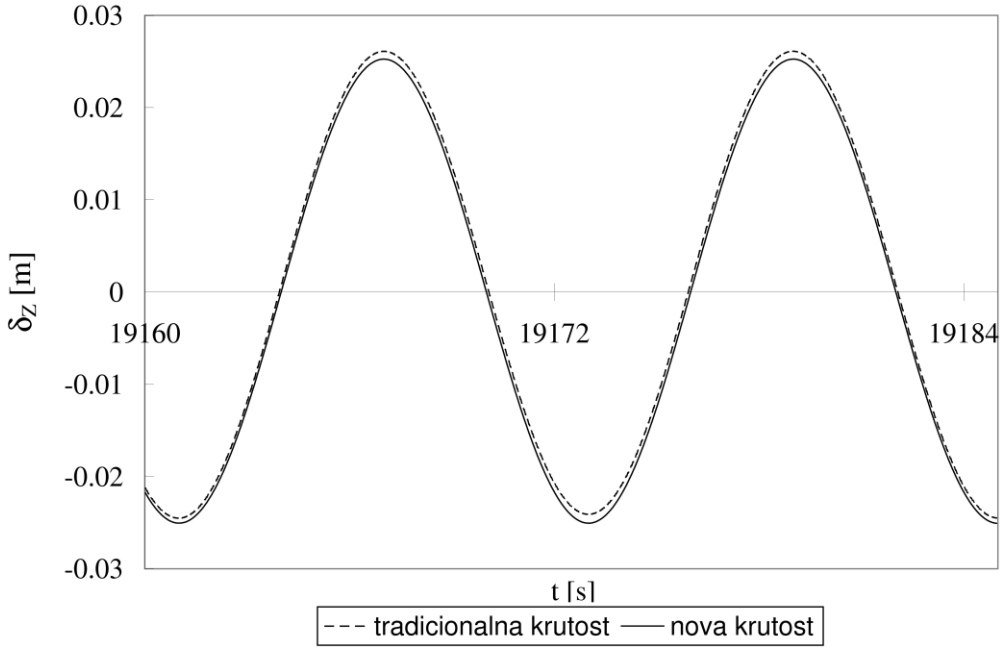


Slika 6.16 - Vertikalni pomak $\delta^v = \delta_z - \delta^s$

Uočljivo je da je vertikalni pomak δ^v biharmonijski. Ukoliko odvojeno prikažemo pojedine komponente uočavamo da se prva harmonijska komponenta s većom amplitudom i dužim periodom odnosi na sjedanje, slika 6.17, dok se druga harmonijska komponenta s malom amplitudom i kraćim periodom odnosi na poniranje, slika 6.18. Sjedanje je kod tradicionalne formulacije krutosti značajno manje nego prema novoj formulaciji krutosti. Zanimljivo je primijetiti da je poniranje u oba slučaja gotovo jednako, slika 6.18.



Slika 6.17 - Sjedanje



Slika 6.18 - Poniranje

Poniranje određeno tangencijalnom krutošću, slika 6.13, nešto je točnije nego poniranje određeno sekantnom krutošću, slika 6.18. U prvom slučaju pojavljuje se neznatno "udaranje" (eng. beating) kao posljedica sprege sa sporo promjenljivim zalijetanjem. U drugom slučaju odziv je periodičan.

6.6. Nelinearno zalijetanje i zaošijanje ISSC TLP-a

Analiziran je utjecaj šest različitih formulacija krutosti izvedenih u poglavljima 3.1 i 3.2 (formulacije krutosti temeljene na ravnoteži sila i momenata i na jednakosti potencijalne energije, za male i velike kutove zaošijanja) na statički odziv ISSC TLP-a.

Kako bi se naglasila sprega između zalijetanja i zaošijanja na pritegnutu pučinsku platformu narinuti su relativno veliki translacijski pomak u zalijetanju, δ_x = 0.1 L = 41.5 m, i vrlo veliki kut zaošijanja, φ_z=45° = 0.078537 rad. Sila kod zalijetanja, $F_x = \tilde{K}_0 \, \delta_x$, i moment zaošijanja, $M_z = r^2 \tilde{K}_0 \, \varphi_z$, izračunati su primjenom jednadžbe (3.101) za $\tilde{K}_0$. Sjedanje pučinske platforme uslijed zalijetanja i uslijed zaošijanja određeno je primjenom izraza (3.90):

$$\delta_F^s = \frac{1}{2L} \delta_x^2 = 2.075 \text{ m},$$

$$\delta_M^s = \frac{r^2}{2L} \varphi_z^2 = 2.748 \text{ m}.$$

Vrlo velikim kutom zaošijanja postignuto je sjedanje približno jednakog iznosa kao kod zalijetanja. Sile koje je potrebno narinuti iznose $F_x = 1.563 \cdot 10^4$ kN i $M_z = 1.136 \cdot 10^6$ kNm.

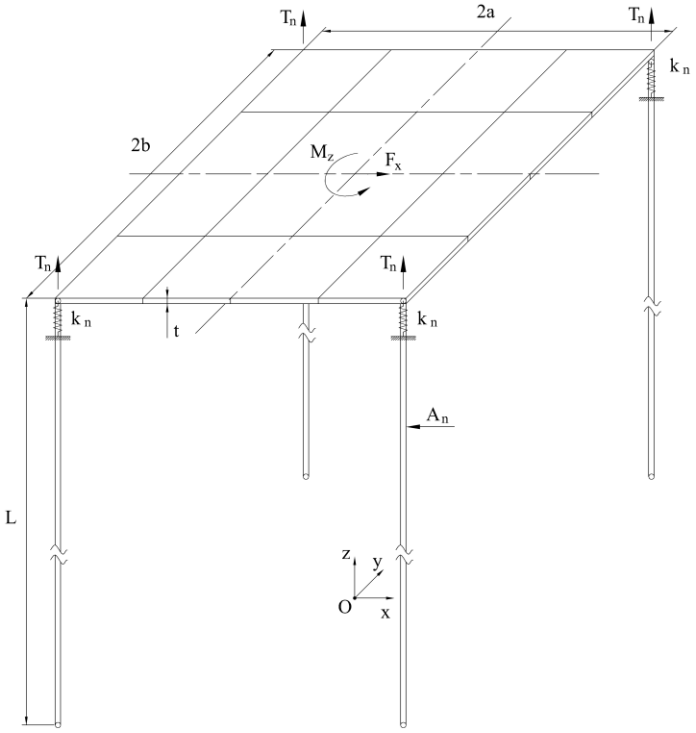
Numerički proračun proveden je u 3 koraka. Prvo je na pučinsku platformu narinuta sila zalijetanja F_z. Zatim je narinut samo moment zaošijanja M_z. Na kraju su u svrhu analize sprege zalijetanja i zaošijanja na pučinsku platformu narinuti istovremeno i sila zalijetanja i moment zaošijanja. Iterativno određene vrijednosti za svih šest formulacija povratne krutosti, za nespregnuto i spregnuto djelovanje opterećenja, prikazane su u Tablici 6.3.

Tablica 6.3 - Statički odziv ISSC TLP-a

				$F_x = 1.563 \cdot 10^4$ kN		$M_z = 1.136 \cdot 10^6$ kNm		F_x & M_z		
Pri-stup br.	Formulacija	Uprosječava-nje sila u priponama	Formulacija zaošijanja	δ_x (m)	δ^s (m)	φ_z (°)	δ^s (m)	δ_x (m)	φ_z (°)	δ^s (m)
1	Ravnoteža sila	Aritmetičko	Malo	41.5	2.075	45	2.748	37.174	41.87	4.044
2	Ravnoteža sila	Aritmetičko	Veliko	41.5	2.075	50	3.392	36.604	46.01	4.336
3	Ravnoteža sila	RMS	Malo	41.5	2.075	45	2.748	36.110	40.67	3.815
4	Ravnoteža sila	RMS	Veliko	41.5	2.075	50	3.392	35.596	44.40	4.071
5	Jednakost energije	Kvadratično	Malo	41.5	2.075	45	2.748	34.204	39.98	3.579
6	Jednakost energije	Kvadratično	Veliko	41.5	2.075	50	3.182	33.330	43.79	3.817
7	FEM			41.25	2.055	49.1	3.088	33.343	42.95	3.746

U slučaju djelovanja sile zalijetanja F_x primjenom svih formulacija povratne krutosti određene su jednake vrijednosti za zalijetanje δ_x i za sjedanje δ^s. U slučaju djelovanja momenta M_z kut φ_z i sjedanje δ^s ne razlikuju se značajno između formulacija temeljenih na ravnoteži sila i formulacija temeljenih na jednakosti potencijalne energije. Značajnije razlike pojavljuju se u ovisnosti o tome kako je u formulaciji krutosti razmatran kut zaošijanja, kao mala ili kao velika veličina. Očekivano, istovremenim djelovanjem sile F_x i momenta M_z pojavljuju se razlike u svim pomacima ($\delta_x, \varphi_z, \delta^s$) između svih šest formulacija krutosti.

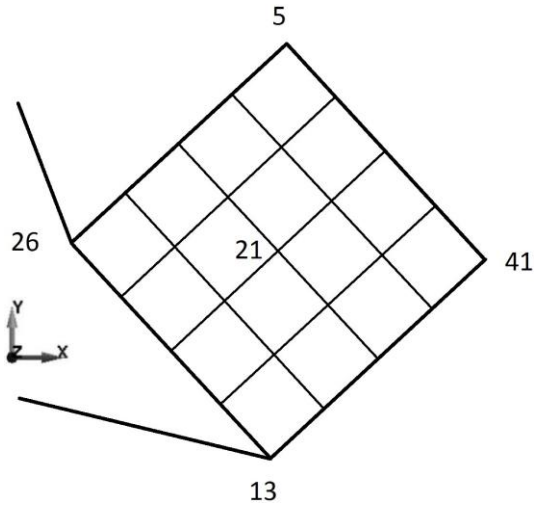
S obzirom da je izvedene formulacije krutosti potrebno poredati s obzirom na realnu fizikalnu vrijednost, isti nelinearan problem riješen je nelinearnom metodom konačnih elemenata s velikim pomacima primjenom računalnog programa LS-DYNA, [29]. Konstruiran je vrlo jednostavan model konačnih elemenata prikazan na slici 6.19.



Slika 6.19 - Model KE pritegnute pučinske platforme

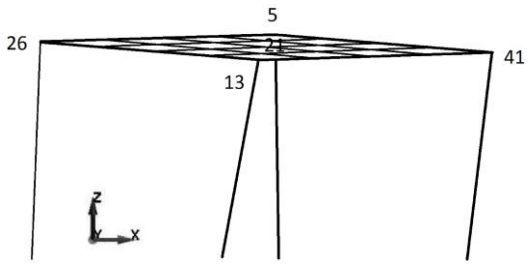
Pučinska platforma modelirana je kao debela ploča debljine $t = 1$ m. Svaka pripona modelirana je s jednim konačnim elementom. Sila F_x koncentrirana je u krajevima ploče, dok je moment M_z distribuiran u svih 25 čvorova. U krajevima ploče modelirane su hidrostatske opruge s krutošću $k_n = \frac{1}{4}\rho g A_{WL} = 2192\,\text{kN/m}$. Vrijednost Youngovog modula elastičnosti značajno je povećana ($E^* = 10^3 E$) kako bi se ograničila početna deformacija pripona uslijed narinutih sila prednatega T_n, slika 6.19.

Numerički proračun metodom konačnih elemenata proveden je kao i prije u 3 koraka. Prvo su odvojeno na model narinuti F_x i M_z, a zatim je njihovo djelovanje spregnuto. Zbog geometrijske nelinearnosti uslijed velikih pomaka modela statički problem riješen je kao dinamički integracijom u vremenskoj domeni uz postupno povećavanje narinutih opterećenja kako bi se izbjegao utjecaj tromosti. Na model je prvo narinuta sila F_x, a zatim moment M_z kako bi se mogao uočiti njihov pojedinačni utjecaj na odziv. Na slici 6.20 prikazan je pogled u tlocrtu na model u uravnoteženom (translatiranom i rotiranom) položaju.

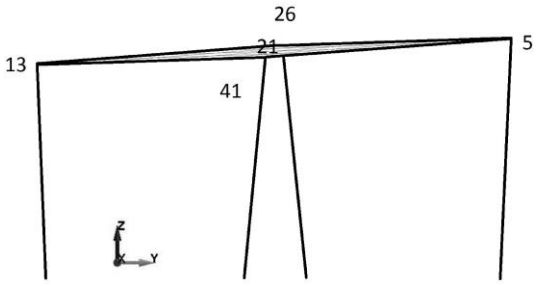


Slika 6.20 - Tlocrt pučinske platforme u pomaknutom položaju

Na slikama 6.21 i 6.22 prikazan je uvećan bokocrt i nacrt platforme, pri čemu je uočljivo određeno posrtanje i ljuljanje pučinske platforme.

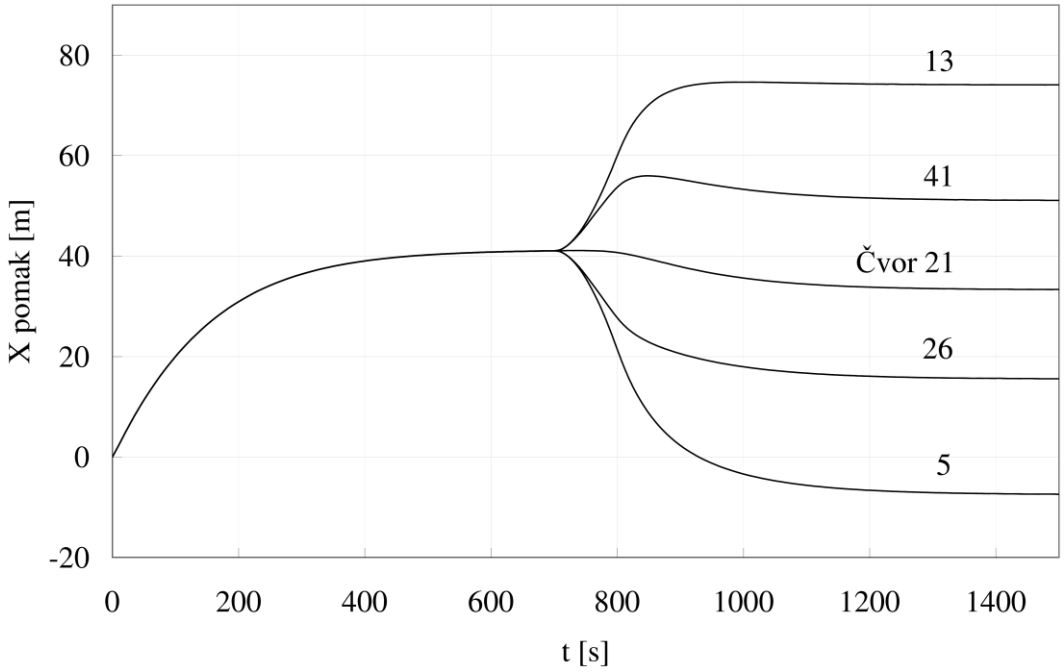


Slika 6.21 - Bokocrt pučinske platforme u pomaknutom položaju

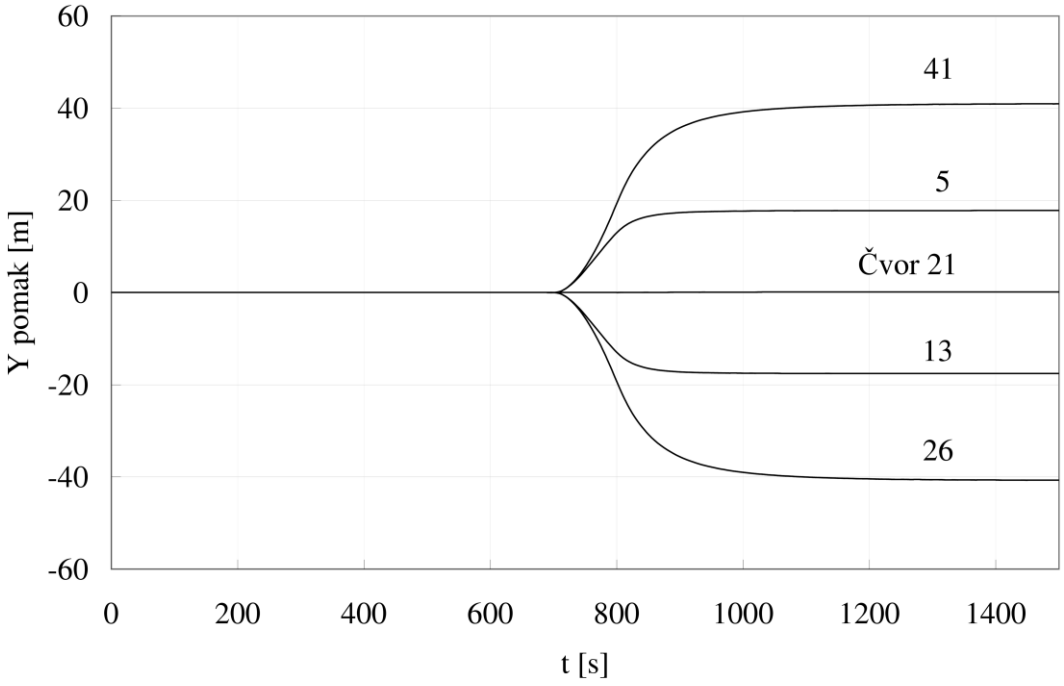


Slika 6.22 - Nacrt pučinske platforme u pomaknutom položaju

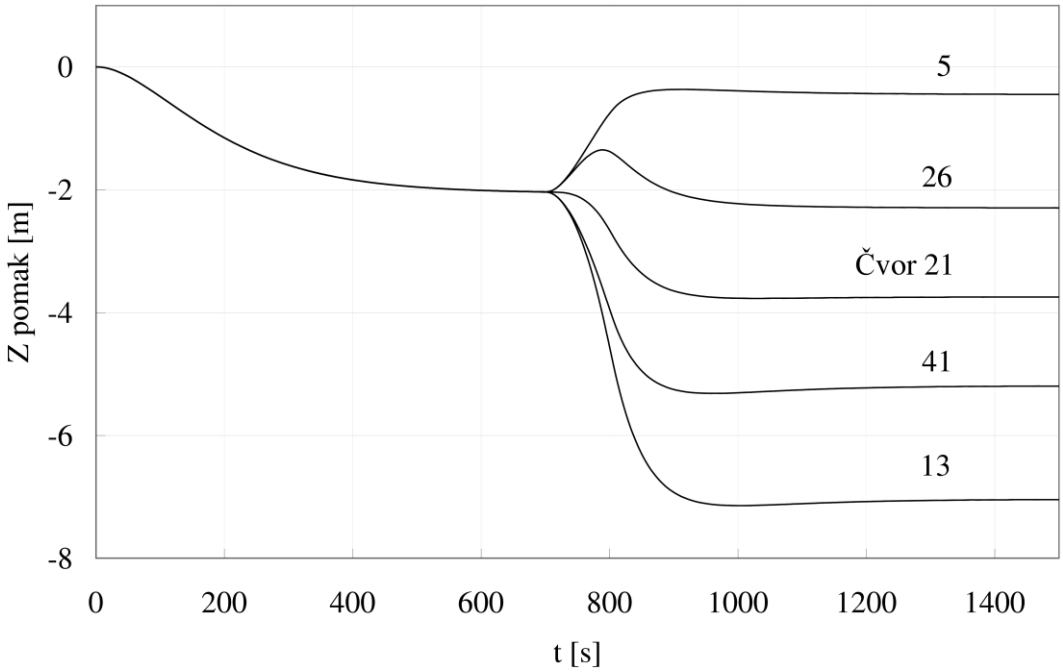
Vremenski zapis uzdužnog, poprečnog i vertikalnog pomaka prikazan je na slikama 6.23 - 6.24



Slika 6.23 - Uzdužni pomak platforme



Slika 6.24 - Poprečni pomak platforme



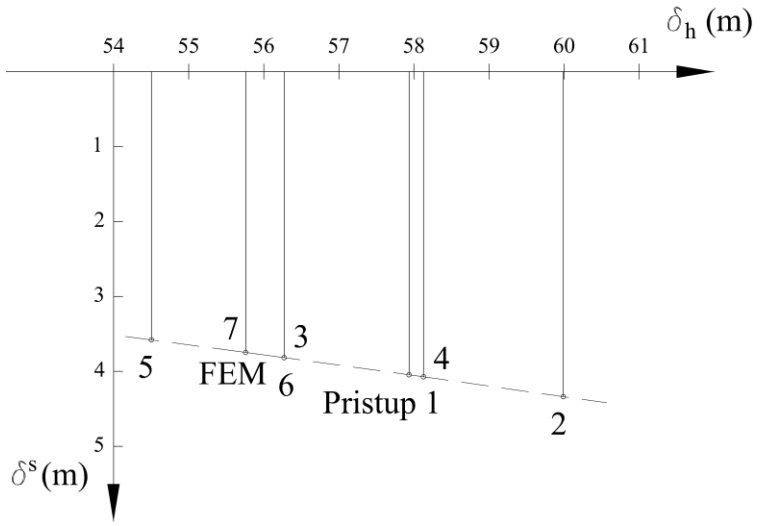
Slika 6.25 - Sjedanje platforme

Tijekom djelovanja sile F_x jednak je pomak točaka u kutovima platforme. Djelovanjem momenta M_z dolazi do razdvajanja pomaka uslijed rotacije platforme. Može se uočiti neznatno smanjenje uzdužnog pomaka δ_x i značajno povećanje sjedanja δ^s.

Rezultati proračuna metodom konačnih elemenata za sva tri slučaja opterećenja prikazani su u tablici 6.3. Odziv uslijed djelovanja sile F_x nešto je manji od analitičkih vrijednosti. Odziv uslijed djelovanja momenta M_z manji je od analitičkih vrijednosti za formulacije krutosti temeljene na jednakosti potencijalne energije i proizvoljnom kutu zaošijanja. Zanimljivo je primijetiti da su analitička rješenja za narinuta opterećenja konzistentna i da ih je kao takve moguće primijeniti za provjeru rješenja nelinearnom metodom konačnih elemenata.

Za spregnuto djelovanje sile F_x i momenta M_z analitička rješenja gotovo su jednaka numeričkim. S obzirom da su numerička rješenja nešto točnija prikladno ih je uzeti kao osnovu za usporedbu različitih formulacija krutosti. Vrijednosti sjedanja za formulacije 3 i 6 u tablici 6.3. nešto su bliže vrijednostima metode konačnih elemenata od preostale četiri formulacije. U slučaju formulacije pod 6. bolje je slaganje za vrijednosti zalijetanja i zaošijanja s metodom konačnih elemenata nego za formulaciju pod 3.

Ukoliko sjedanje δ^s izrazimo kao funkciju prividnog horizontalnog pomaka $\delta_h = \sqrt{2L\delta^s}$, koji se sastoji i od zalijetanja δ_x i od zaošijanja δ_φ, prema izrazu (3.88), vrlo lako je moguće uočiti razlike između pojedinih formulacija, slika 6.26.



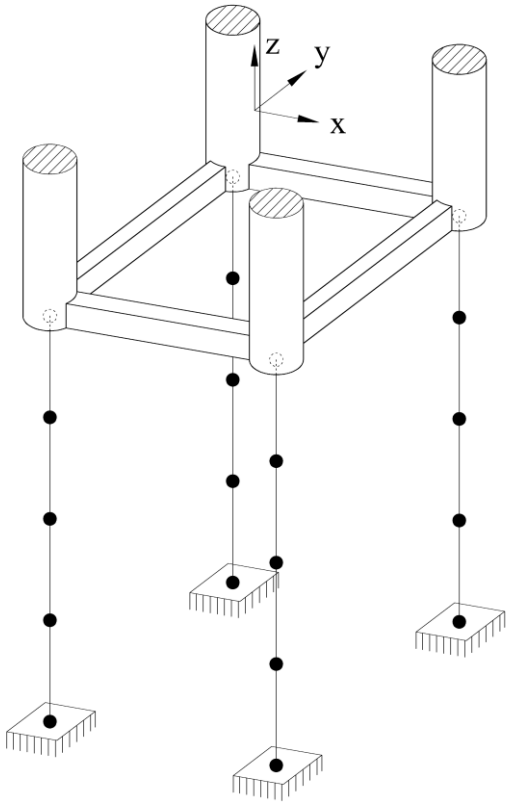
Slika 6.26 - Sjedanje kao funkcija prividnog horizontalnog pomaka

Na prethodnoj slici prikazan je uvećani dio dijagrama konstruiranog na temelju slike 3.9.

6.7. Usporedba nespregnutog i potpuno spregnutog odziva ISSC TLP-a

Utjecaj dinamičkog djelovanja pripona na odziv plutajuće platforme analiziran je usporedbom odziva:

i. izračunatog *nespregnutim* dinamičkom modelom s novom formulacijom nelinearne povratne krutosti,
ii. izračunatog *potpuno spregnutim* dinamičkom modelom, gdje su pripone modelirane kao elastični kontinuum s 4 konačna elementa prema [36] po priponi.



Slika 6.27 - Model KE pripona u potpuno spregnutom dinamičkom modelu

Tablica 6.4 - Značajke pripona

Vanjski promjer	1.0 m
Unutarnji promjer	0.686 m
Površina poprečnog presjeka	0.415 m^2
Modul elastičnosti	$2.1 \cdot 10^{11}$ N/m^2
Početna duljina	415 m
Razmak između pripona	86.25 m

Značajke analizirane ISSC TLP navedene su u tablici 6.2. Značajke pripona navedene su u tablici 6.4. Model konačnih elemenata kojim su u potpuno spregnutom dinamičkom modelu modelirane pripone prikazan je na slici 6.27. U stručnoj literaturi dubina mora od 300 m smatra se granicom značajnijeg dinamičkog utjecaja pripona na odziv čitave konstrukcije te je u tom smislu dubina sidrenja od 450 m prikladno ishodište ocjene utjecaja tog međudjelovanja.

Utjecaj pripona u jednadžbi dinamičke ravnoteže, jednadžba (1.2), modeliran je dvama modelima različite složenosti u nespregnutoj i spregnutoj analizi, tablica 6.5.

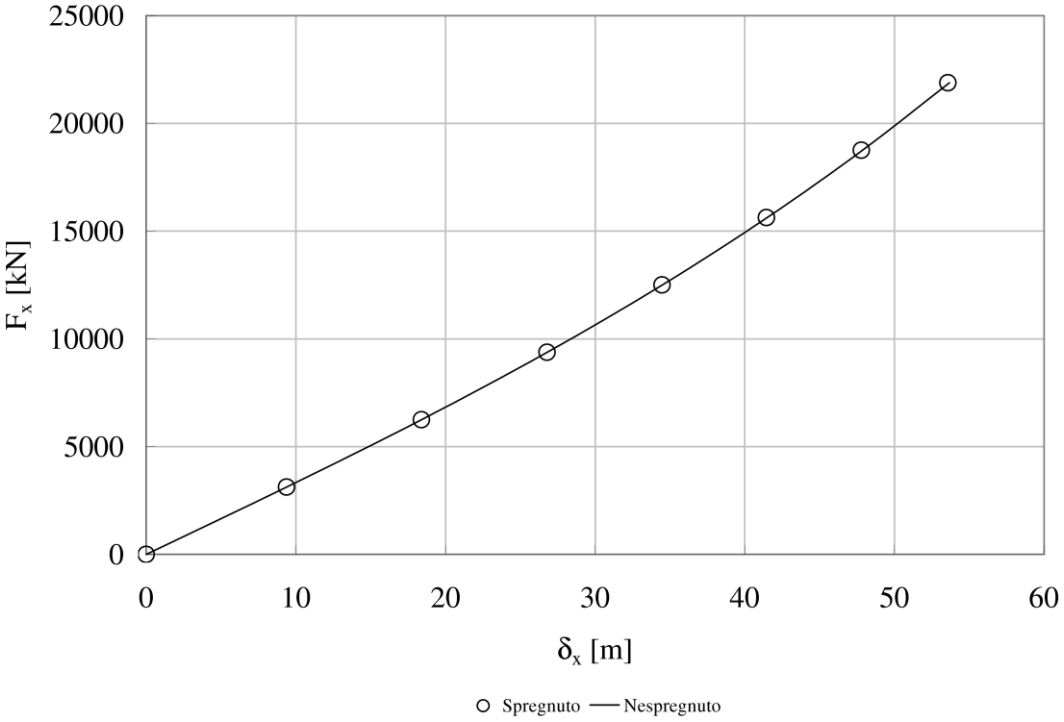
Tablica 6.5 - Modeli pripona različite složenosti

	Složenost modela pripona		
	Masa pripona	Elastičnost pripona	Uzgon pripona
Model 1		+	
Model 2	+	+	+

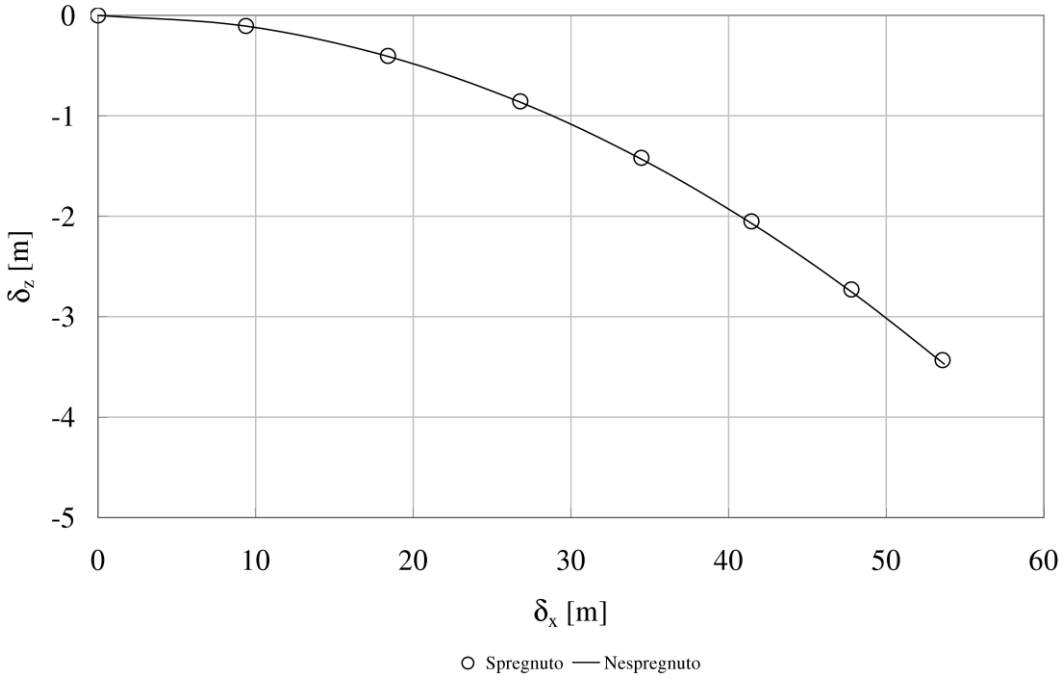
Rezultati statičkog proračuna prikazani su tablicama 6.6 i 6.7 te slikama 6.28-6.31. Tablica 6.6 te slike 6.28 i 6.29 odnose se na model pripona bez vlastite mase i uzgona, s realnom elastičnošću (model 1). Tablica 6.7 te slike 6.30 i 6.31 odnose se na model pripona s vlastitom masom i uzgonom te realnom elastičnošću (model 2). Polovica efektivne mase pripona u vodi koncentrirana je na krajeve pripona za spregnuti model.

Tablica 6.6 - Usporedba nespregnutog i spregnutog statičkog odziva ISSC TLP-a za model pripona 1

	Nespregnuto		Spregnuto	
F_h	δ_x	δ_z	δ_x	δ_z
kN	m	m	m	m
0	0.000	0.000	0.000	0.000
3126	9.382	-0.105	9.382	-0.105
6252	18.392	-0.403	18.394	-0.403
9378	26.785	-0.855	26.789	-0.856
12504	34.468	-1.416	34.472	-1.418
15630	41.456	-2.048	41.452	-2.052
18756	47.814	-2.724	47.794	-2.730
21882	53.620	-3.426	53.576	-3.433



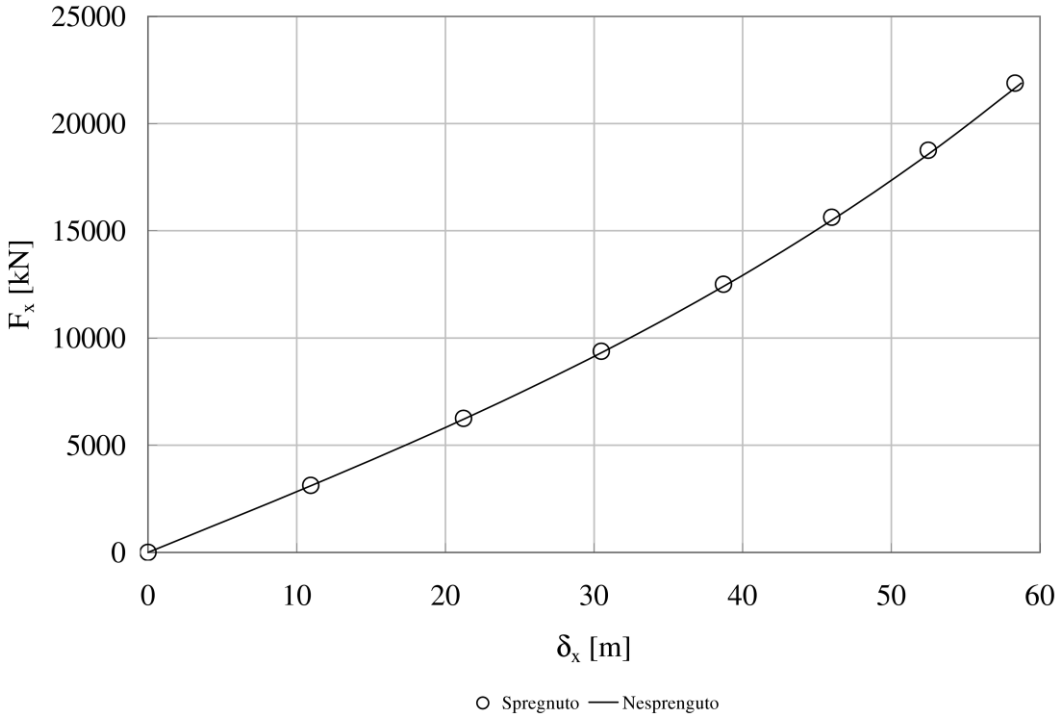
Slika 6.28 - Ovisnost horizontalne povratne sile o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 1)



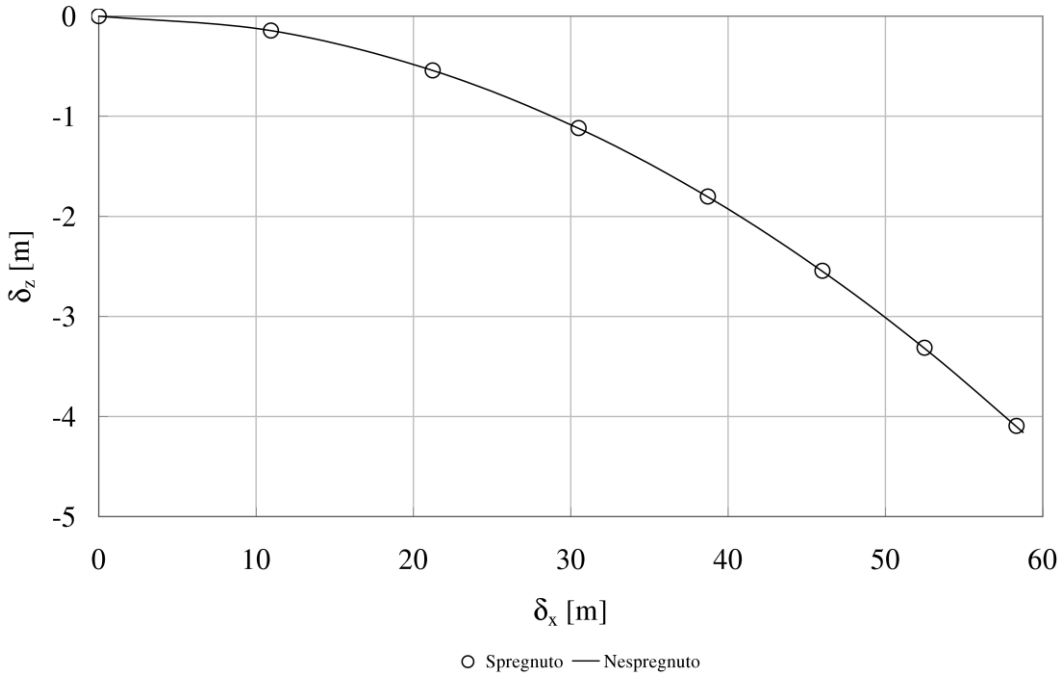
Slika 6.29 - Ovisnost vertikalnog pomaka o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 1)

Tablica 6.7 - Usporedba nespregnutog i spregnutog statičkog odziva ISSC TLP-a za model pripona 2

	Nespregnuto		Spregnuto	
F_h	δ_x	δ_z	δ_x	δ_z
kN	m	m	m	m
0	0.000	0.000	0.000	0.000
3126	11.004	-0.144	10.948	-0.144
6252	21.337	-0.543	21.230	-0.542
9378	30.652	-1.120	30.498	-1.118
12504	38.915	-1.805	38.717	-1.802
15630	46.243	-2.548	45.999	-2.544
18756	52.787	-3.321	52.492	-3.313
21882	58.684	-4.104	58.334	-4.094



Slika 6.30 - Ovisnost horizontalne povratne sile o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 2)



Slika 6.31 - Ovisnost vertikalnog pomaka o uzdužnom pomaku ISSC TLP-a (model pripona 2)

Slike 6.28 i 6.30 predstavljaju zalijetanje kao funkciju narinute horizontalne sile. To su karakteristike sidrenog sustava, gdje je horizontalna krutost kut koji tangenta na krivulju zatvara s horizontalnom osi. Na slikama se lako može uočiti nelinearnost horizontalne povratne krutosti. Slike 6.29 i 6.31 prikazuju vertikalni pomak kao funkciju pomaka u horizontalnom smjeru. Sjedanje je karakteristika pritegnutih pučinskih konstrukcija te se uočava da je novom formulacijom ta pojava vrlo dobro modelirana. Općenito se može zaključiti da su razlike između analitičkih rezultata i rezultata numeričkog proračuna metodom konačnih elemenata vrlo male (kod proračuna metodom konačnih elemenata osim čistog sjedanja dolazi i do određenog elastičnog popuštanja pripone) te se statička analiza može pouzdano provesti predloženom analitičkom formulacijom.

Slikama 6.32-6.34 prikazano je slobodno *neprigušeno* osciliranje pritegnute pučinske platforme (konzervativni sustav) u stupnjevima slobode u vertikalnoj ravnini. U jednadžbi dinamičke ravnoteže osim vlastite mase uzeta je u obzir i dodana (hidrodinamička) masa plutajuće platforme za beskonačnu frekvenciju njihanja. Pripone su modelirane prema modelu 2, uz dodatni inercijski utjecaj koji je određen na temelju pretpostavke linearne raspodjele pomaka, brzine i ubrzanja, odnosno ravnoteže momenata za točku hvatišta pripone za morsko dno. Dodana masa pripona također je uzeta u obzir primjenom Morisonove jednadžbe, [42], za slučaj slobodnog osciliranja:

$$q_p = -C_a \rho A_p \ddot{\delta}_x - \frac{1}{2} C_d \rho D_p \dot{\delta}_x \left\| \dot{\delta}_x \right\|, \tag{6.18}$$

gdje je:

q_p - distribuirano hidrodinamičko opterećenje pripone,

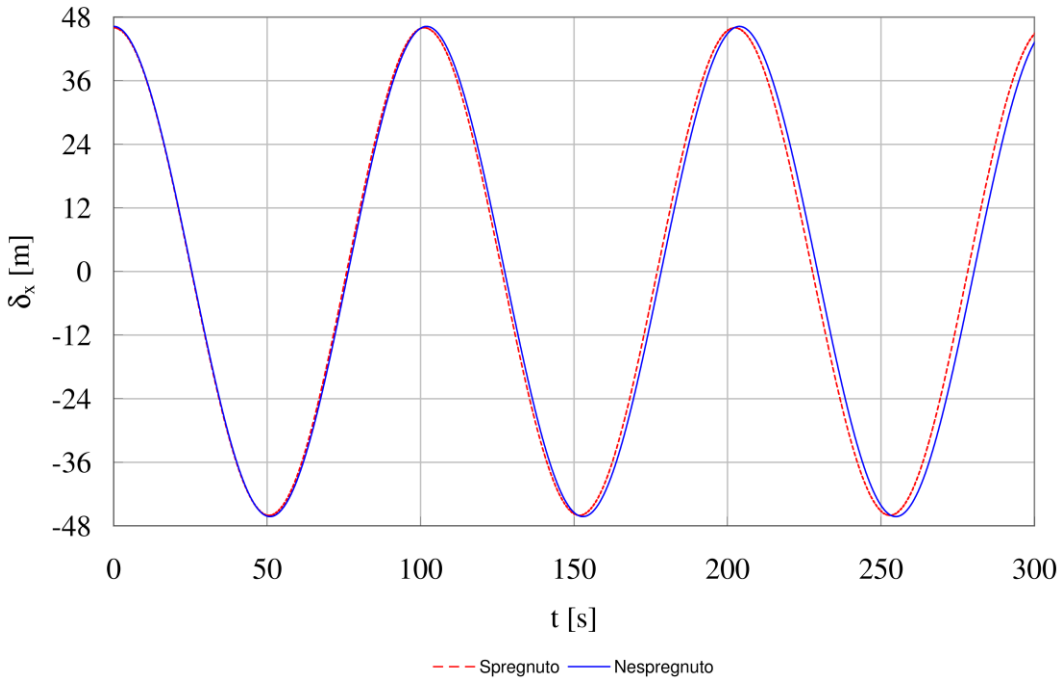
C_a - koeficijent dodane mase pripone,

A_p - površina poprečnog presjeka pripone,

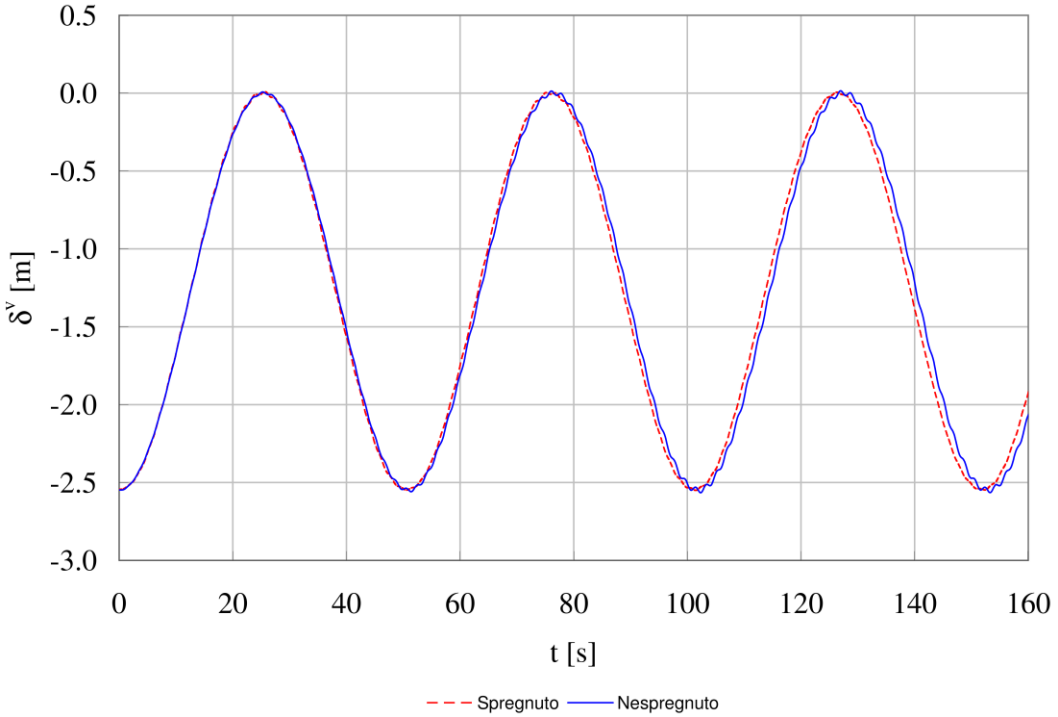
C_d - koeficijent otpora pripone,

D_p - vanjski promjer pripone,

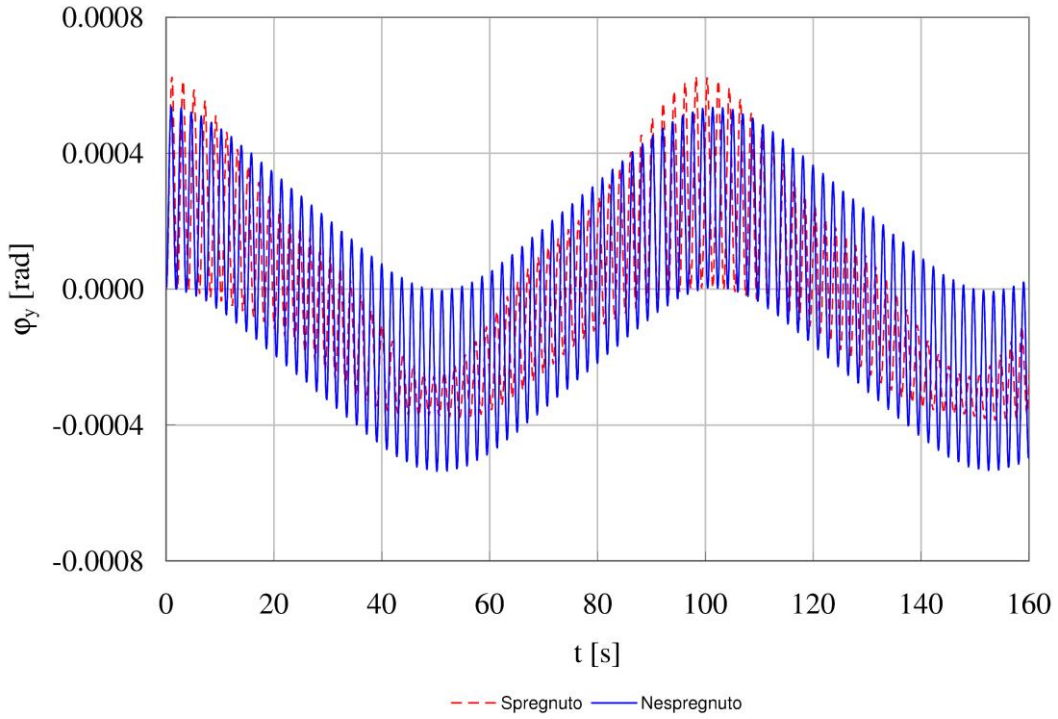
$\left\| \cdot \right\|$ - euklidska norma vektora.



Slika 6.32 - Slobodno neprigušeno zalijetanje ISSC TLP-a



Slika 6.33 - Slobodno neprigušeno složeno poniranje (sjedanje + osciliranje) ISSC TLP-a

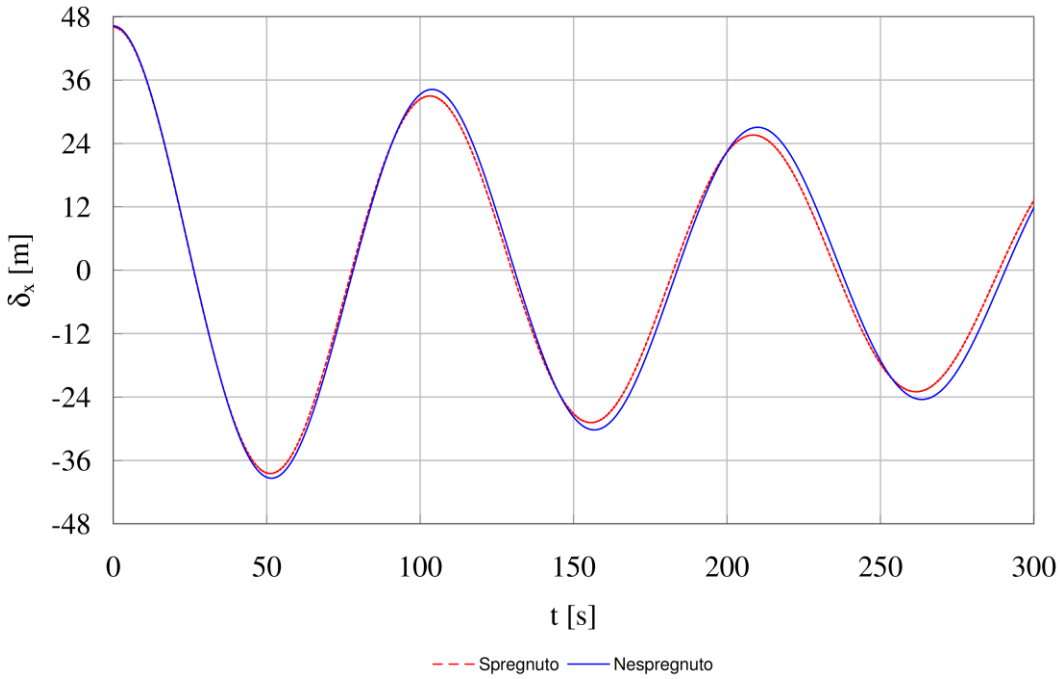


Slika 6.34 - Slobodno neprigušeno posrtanje ISSC TLP-a

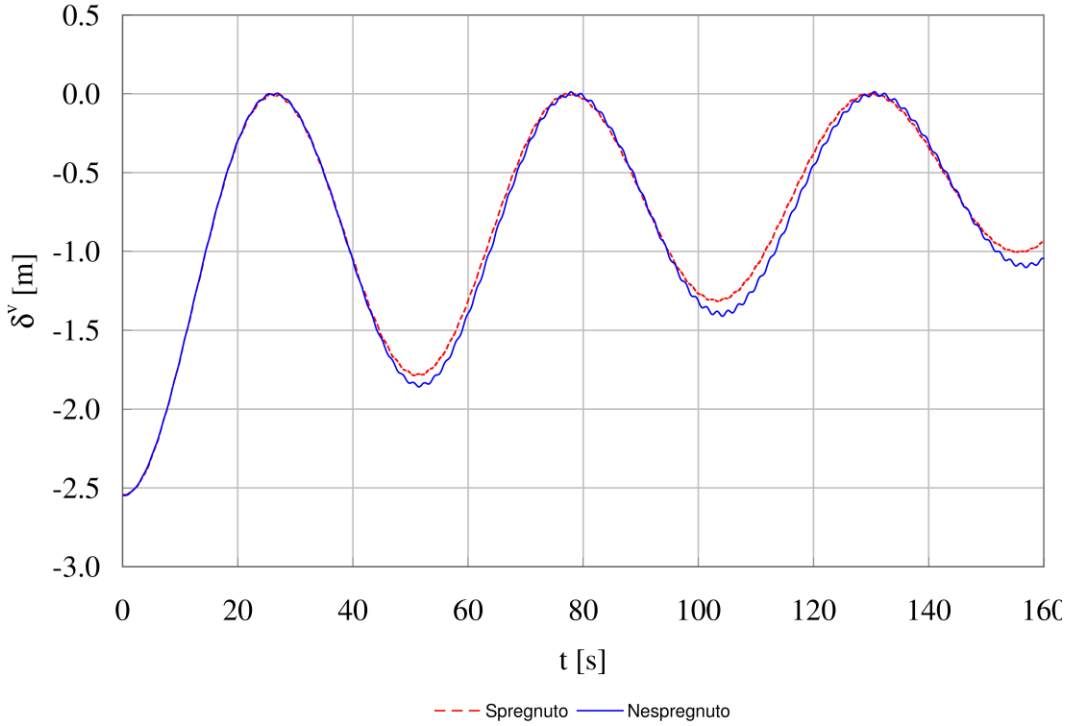
Usporedba rješenja analitičkom formulacijom i metodom konačnih elemenata pokazuje vrlo dobro slaganje, uz neznatnu razliku u duljini perioda odziva između dvaju metoda. Odziv u vertikalnom smjeru sadrži veću energiju visokofrekventnog osciliranja za

slučaj nespregnutog modela, s obzirom da taj model ima krući sidreni sustav. Odziv u rotacijskom stupnju slobode gibanja također se razlikuje u iznosu amplituda komponenti, premda je frekventni sadržaj jednak. Obje navedene razlike potrebno je dodatno istražiti.

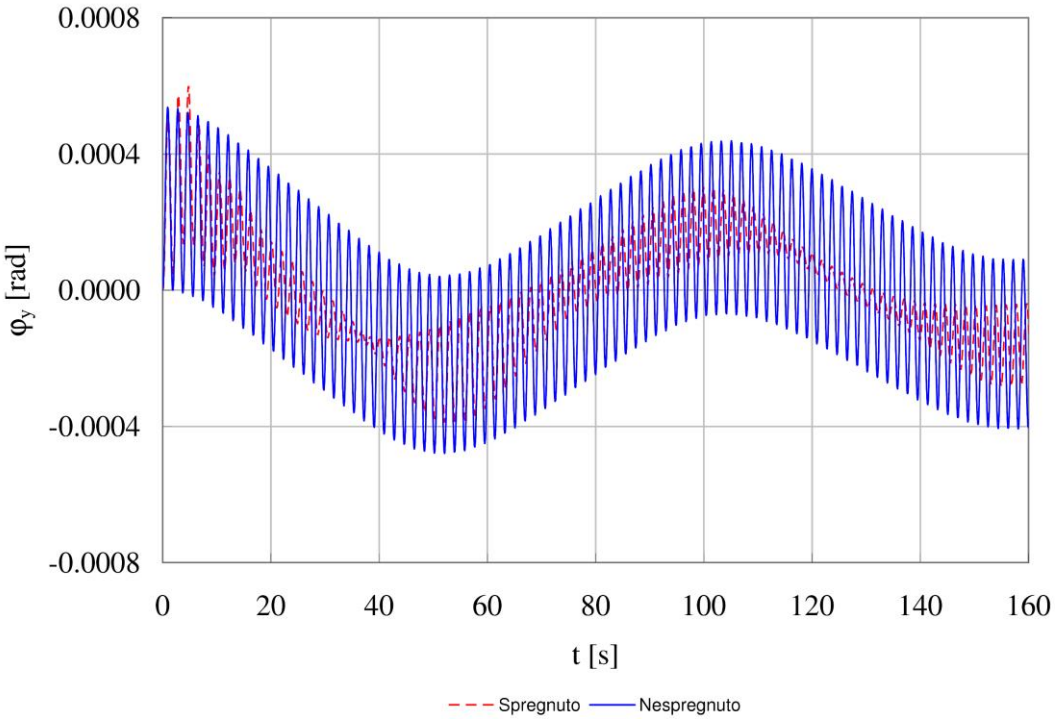
Slikama 6.35-6.37 prikazano je slobodno *prigušeno* osciliranje pritegnute pučinske platforme u stupnjevima slobode gibanja u vertikalnoj ravnini. Jednadžba dinamičke ravnoteže razlikuje se od one u prethodnom primjeru samo dodatnim članom viskoznog prigušenja pripona prema jednadžbi (6.18). Pripone su modelirane na isti način.



Slika 6.35 - Slobodno prigušeno zalijetanje ISSC TLP-a



Slika 6.36 - Slobodno prigušeno složeno poniranje (sjedanje + osciliranje) ISSC TLP-a



Slika 6.37 - Slobodno prigušeno posrtanje ISSC TLP-a

Odziv u horizontalnom smjeru pokazuje vrlo dobro slaganje, uz nešto višu amplitudu odziva određenu nespregnutom formulacijom. Odziv u vertikalnom smjeru pokazuje slične značajke kao i u primjeru neprigušenog osciliranja. Ista tvrdnja vrijedi i za slučaj odziva u

rotacijskom stupnju slobode gibanja. Zaključak je da je nespregnuta (analitička) formulacija dovoljno pouzdana u preliminarnoj fazi projektiranja.

6.8. Odziv ISSC TLP-a na simulirano okolišno opterećenje

6.8.1. Model okolišnog opterećenja

Na ISSC TLP narinuto je opterećenje okoliša djelovanjem morskih valova, vjetra i morske struje, te diferencijalna jednadžba gibanja glasi:

$$(M_{ij} + A_{ij}^{\infty})\,\ddot{x}_{ij} + D_{ij}\dot{x}_j + \int_0^t R_{ij}(t-\tau)\,\dot{x}_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_{ij}(\mathbf{x})x_j = F_i(t), \quad i, j = 1,...,6, \quad (6.19)$$

gdje je:

$R_{ij}(t)$ - memorijska funkcija (dio hidrodinamičke reakcije ovisan o frekvenciji modeliran je konvolucijskim integralom),

$F_i(t) = {}^{MV}F_i(t) + {}^{VJ}F_i(t) + {}^{MS}F_i(t)$ - uzbuda okoliša,

${}^{MV}F_i(t)$ - generalizirana sila morskih valova 1. i 2. reda,

${}^{VJ}F_i(t)$ - generalizirana sila vjetra,

${}^{MS}F_i(t)$ - generalizirana sila morske struje.

U izravnoj numeričkoj integraciji u vremenskoj domeni (princip superpozicije nije moguće primijeniti zbog nelinearnosti odziva) potrebno je kao uzbudu narinuti vremenske nizove sila i momenata morskih valova i vjetra (morska struja pretpostavljena je konstantnom u vremenu). Prije određivanja uzbudnih sila i momenata potrebno je diskretizacijom pripadajućeg spektra energije konstruirati vremenske nizove podizaja slobodne površine i uzdužne turbulentne brzine vjetra (pri određivanju sile vjetra u razmatranje se uzima samo uzdužna komponenta brzine vjetra). Spektrima energije modelirana je raspodjela energije po frekvencijskim komponentama stohastičkog procesa. Temeljni princip koji se koristi pri konstrukciji vremenskih nizova je povezanost energije i varijance stohastičkog procesa.

Osnovni problem pri konstrukciji vremenskih nizova (koji opisuju stohastičke procese) diskretizacijom pripadajućeg spektra energije je ponavljanje niza s povratnim periodom $2\pi/\Delta\omega$, kao posljedica uzorkovanja spektra s konstantnom frekvencijom $\Delta\omega$, [43].

Jedan pristup rješenju tog problema je podijeliti frekvencijski raspon ispod krivulje spektra energije u *N* jednakih dijelova, frekvencijskih razreda širine $\Delta\omega = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/N$. Amplituda *k*-te komponente određena je s $A_k(\omega_k) = \sqrt{2S(\omega_k)\Delta\omega_k}$, gdje je frekvencija ω_k određena kao slučajna varijabla (s jednolikom funkcijom gustoće vjerojatnosti) oko sredine odgovarajućeg frekvencijskog razreda (nakon što su određene frekvencije ω_k potrebno je odrediti (nejednolike) širine razreda $\Delta\omega_k$). Vremenski niz konstruira se s *N* komponenti prema izrazu $A(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(\omega_k)\cos(\omega_k t + \varepsilon_k)$, gdje je fazni pomak *k*-te komponente ε_k određen kao slučajna varijabla u rasponu vrijednosti od 0 do 2π (s jednolikom funkcijom gustoće vjerojatnosti).

Drugi pristup konstruiranju stohastičkog vremenskog niza je podijeliti površinu ispod spektra energije u *N* jednakih dijelova ΔA. Širina pojedinog frekvencijskog razreda određuje se rješenjem jednadžbe $\Delta A - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} S(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 0$, gdje je ω_{i+1} nepoznanica (za prvi frekvencijski razred $\omega_i = \omega_{\min}$). Amplituda svih komponenata je jednaka i određena je izrazom $A_0 = \sqrt{2\Delta A}$. Frekvencija *k*-te komponente ω_k određuje se u težištu pripadajuće elementarne površine ΔA. Vremenski niz konstruira se s *N* komponenti prema izrazu $A(t) = A_0 \sum_{k=1}^{N} \cos(\omega_k t + \varepsilon_k)$, gdje je fazni pomak *k*-te komponente ε_k određen na jednak način kao u prvom pristupu konstruiranjem vremenskog niza.

Uzbudne sile morskih valova određene su primjenom Volterrinog kvadratnog modela [44], [45]:

$$ {}^{MV}F_i(t) = {}^{MV}F_i^{(1)}(t) + {}^{MV}F_i^{(2)}(t), \quad i = 1,...,6, \tag{6.20} $$

gdje je:

${}^{MV}F_i^{(1)}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{N} \tilde{\zeta}_k f_i^{(1)}(\omega_k)\,\mathrm{e}^{-i\omega_k t} \right\}$ - sila valova 1. reda,

${}^{MV}F_i^{(2)}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\zeta}_k\, \tilde{\zeta}_i^{*} f_i^{(2)}(\omega_{k_i} - \omega_i)\,\mathrm{e}^{-i(\omega_k - \omega_i)t} \right\}$ - sila valova 2. reda,

$\tilde{\zeta}_k = \zeta_k\,\mathrm{e}^{i\varepsilon_k}$ - kompleksna amplituda *k*-te komponente vala,

$\tilde{\zeta}_i^{*} = \zeta_i\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon_i}$ - konjugirano kompleksna amplituda *i*-te komponente vala,

ω_k - (kružna) frekvencija *k*-te komponente vala,

ε_k - fazni pomak *k*-te komponente vala (slučajna varijabla jednolike funkcije gustoće vjerojatnosti),

$f_i^{(1)}(\omega_k)$ - linearna prijenosna funkcija *i*-te komponente generalizirane sile valova 1. reda,

$f_i^{(2)}(\omega_{k_i} - \omega_i)$ - kvadratna prijenosna funkcija *i*-te komponente generalizirane sile valova 2. reda (za razliku frekvencija),

N - ukupan broj valnih komponenti.

Linearne i kvadratne prijenosne funkcije sila valova 1. i 2. reda određene su računalnim programom HYDROSTAR [30].

Spektar podizaja slobodne površine modeliran je Pierson-Moskowitz valnim spektrom, [46]:

$$S_{PM}(\omega) = \frac{5}{16} H_s^2 \, \omega_p^4 \, \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \right), \tag{6.21}$$

gdje je:

H_S - značajna valna visina,

$\omega_p = \dfrac{2\pi}{T_p}$ - (kružna) frekvencija kod koje $S_{PM}(\omega)$ ima najvišu vrijednost.

Uzbuda morskih valova određena je modelom potencijalnog strujanja fluida u prisustvu slobodne površine. Uzbude vjetra i morske struje određene su modelom viskoznog strujanja fluida (pojava odvajanja strujanja) bez prisustva slobodne površine. Te dvije *sile otpora* određene su primjenom principa poprečnog nastrujavanja fluida, [47], i metode odsječaka (eng. strip theory). Osim statičke sile morske struje i vjetra u dinamički model pritegnute pučinske platforme nužno je uključiti niskofrekventne komponente turbulencije, zbog činjenice da se nalaze u području prirodnih frekvencija usidrenog tijela za gibanja u horizontalnoj ravnini.

Aerodinamička sila i moment kojima vjetar djeluje na nadvodni dio pritegnute pučinske platforme određeni su izrazima, [48]:

$${}^{VJ}F(t) = \frac{1}{2} \rho_z \sum_{k=1}^{N} C_{D_k} A_k \left| {}^{VJ}V(t) - \dot{x} \right| \left({}^{VJ}V(t) - \dot{x} \right), \tag{6.22}$$

$$ {}^{VJ}M_i(t) = \frac{1}{2}\rho_z \sum_{k=1}^{N} C_{D_k} A_k \, \bar{\xi}_k^{\,i} \left| {}^{VJ}V(t) - \dot{x} \right| \left({}^{VJ}V(t) - \dot{x} \right), \tag{6.23} $$

gdje je:

${}^{VJ}F_i(t)$ - sila u smjeru nastrujavanja vjetra,

${}^{VJ}M_i(t)$ - moment sile vjetra (i = 1 posrtanje, i = 2 ljuljanje, i = 3 zaošijanje),

ρ_z - gustoća zraka,

C_{DK} - koeficijent otpora k-tog projiciranog elementa,

A_k - projicirana površina k-tog elementa,

$\bar{\xi}_k^{\,i}$ - krak k-tog projiciranog elementa od x_i-te osi koordinatnog sustava,

${}^{VJ}V(t)$ - uzdužna brzina vjetra,

$\dot{x}(t)$ - uzdužna brzina strukture,

N - ukupan broj ovjetrenih elemenata.

Uzdužna brzina vjetra sastoji se od nepromjenjive komponente i od turbulentne komponente:

$$ {}^{VJ}V(t) = \bar{V} + V_t(t), \tag{6.24} $$

gdje je:

$\bar{V}$ - srednja brzina vjetra,

V_t - turbulentna brzina vjetra, modelirana odabranim spektrom brzine vjetra.

Raspodjela energije po frekvencijama u turbulentnoj komponenti brzine vjetra modelirana je spektrom brzine prema [49], [50]:

$$ S(f) = 320 \frac{\left(\frac{U_0}{10}\right)^2 \left(\frac{z}{10}\right)^{0.45}}{(1+\tilde{f}^{\,n})^{\frac{5}{3n}}}, \tag{6.25} $$

gdje je:

n = 0.468,

f - frekvencija u Hz,

$\tilde{f} = 172 f \left(\frac{z}{10}\right)^{2/3} \left(\frac{U_0}{10}\right)^{-0.75}$ - normirana frekvencija,

z - visina iznad površine vode,

U_0 - srednja brzina vjetra za period od 1 h na visini 10 m.

Kontinuirani spektar turbulentne brzine vjetra diskretiziran je na isti način kao u slučaju spektra podizaja površine mora. Važno je primijetiti nedostatak proračuna opterećenja vjetra prema izrazima (6.22) i (6.23) u smislu dosljednog modeliranja međudjelovanja ovjetrenih elemenata, zbog čega je nužno provesti modelsko ispitivanje nadvođa u zračnom tunelu. U numeričkom primjeru iskoristit će se relativna sličnost s jednim takvim modelskim ispitivanjem opisanim u [51] i sa zaključcima iznesenim u [52]. Prema Norsok N-003 [49], ukoliko ne postoji mjerenje i analiza brzine vjetra na zemljopisnom položaju, gdje će se pučinski objekt nalaziti, može se u numeričkom proračunu uzeti brzina od 38 m/s (brzina vjetra usrednjena za 1 sat na 10 m visine iznad površine mora).

Sila uslijed djelovanja morske struje na podvodni dio pritegnute pučinske platforme određena je na sličan način kao u izrazu (6.22) [4]:

$$ {}^{MS}F(t) = \frac{1}{2}\rho \sum_{k=1}^{N} \int_{L_k} C_{DK} D_k \left| {}^{MS}V - \dot{x} \right| \left({}^{MS}V - \dot{x} \right) \mathrm{d}L , \tag{6.26} $$

gdje je:

${}^{MS}F(t)$ - sila u smjeru djelovanja morske struje,

ρ - gustoća morske vode,

C_{DK} - koeficijent otpora *k*-tog elementa,

D_k - karakteristična linearna dimenzija *k*-tog elementa,

L_k - ukupna duljina *k*-tog elementa,

${}^{MS}V$ - uzdužna brzina morske struje,

$\dot{x}(t)$ - uzdužna brzina strukture,

N - ukupan broj oplakanih elemenata.

Utjecaj morske struje na pritegnutu pučinsku platformu određen je uz pretpostavku zanemarenja međudjelovanja morske struje i valova. Profil morske struje po dubini definiran je preporukom BV-a, [4]:

(i) ${}^{MS}V$ =0.5 m/s na morskom dnu,

(ii) ${}^{MS}V$ =0.5 +0.02 V_{10} na slobodnoj površini.

gdje je V_{10} brzina vjetra 10 m iznad površine mora.

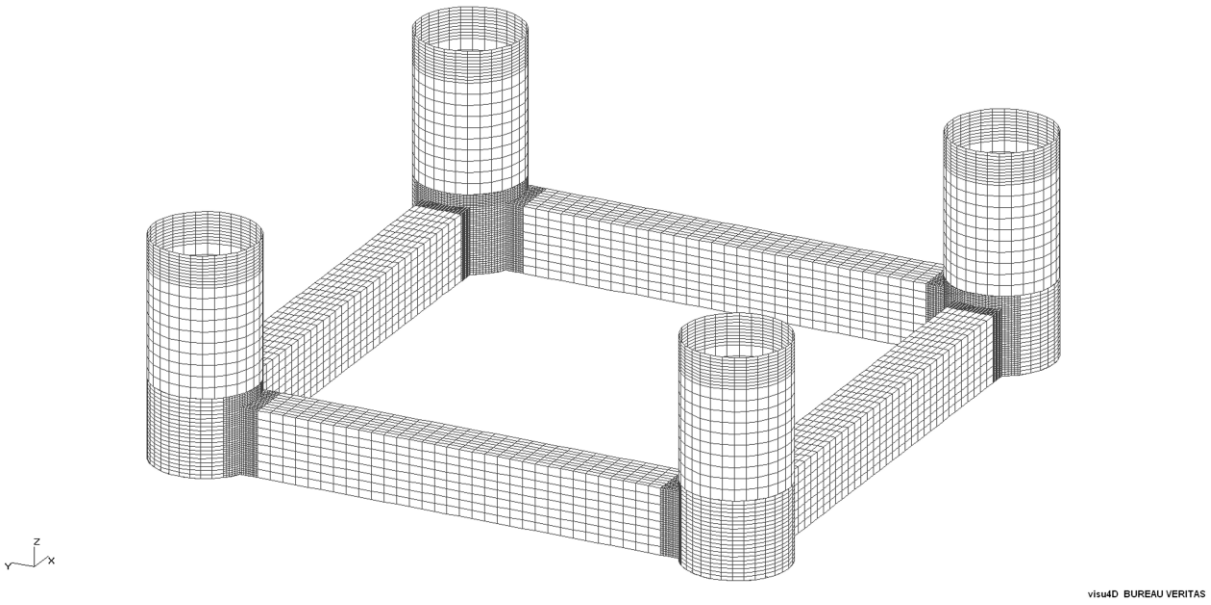
6.8.2. Verifikacija memorijskih funkcija

Provjera točnosti izračuna memorijskih funkcija, slike 6.39-6.43, temelji se na činjenici da dodana masa $A_{ij}(\omega)$ i radijacijsko prigušenje $B_{ij}(\omega)$, preko memorijske funkcije $R_{ij}(t)$, predstavljaju Fourierov transformacijski par:

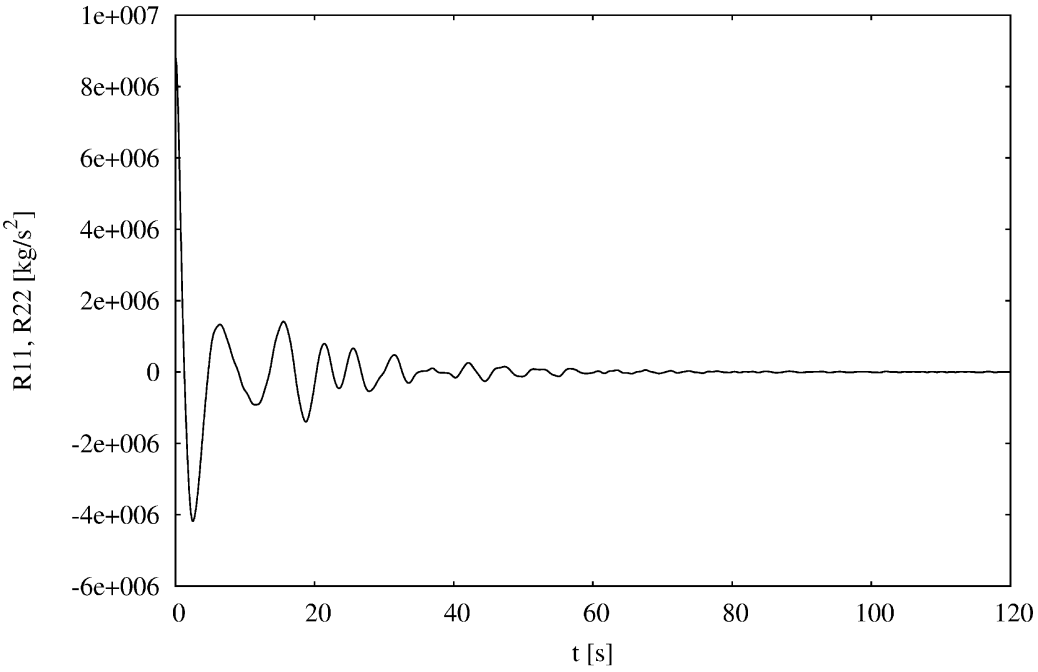
$$B_{ij}(\omega) = \int_0^\infty R_{ij}(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\,, \tag{6.27}$$

$$A_{ij}(\omega) = A_{ij}^\infty - \frac{1}{\omega}\int_0^\infty R_{ij}(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.28}$$

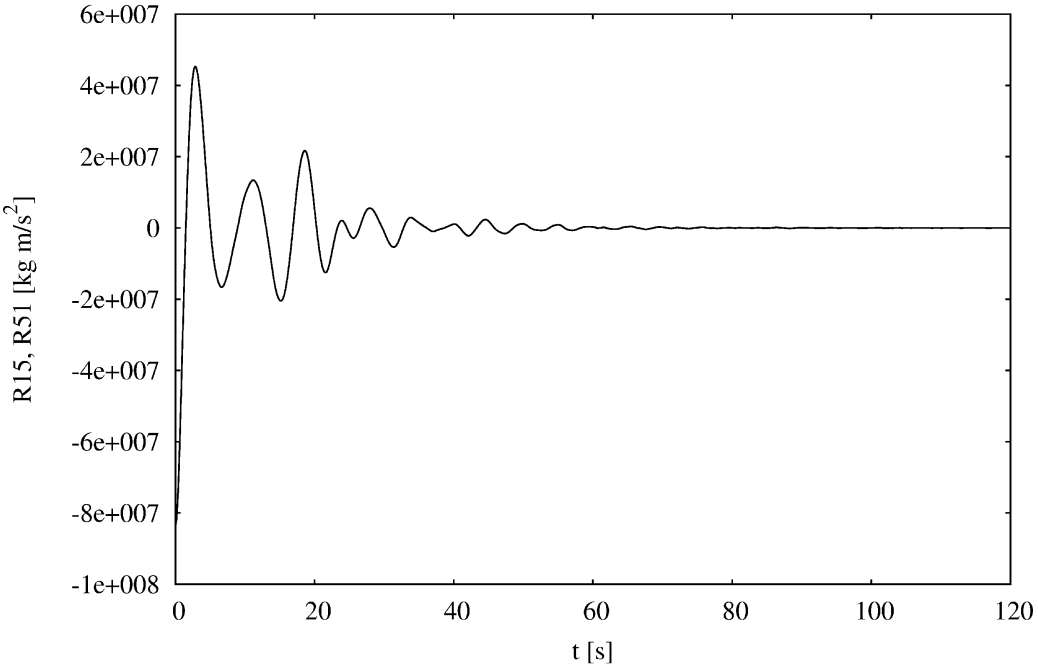
Usporedba vrijednosti određenih Fourierovom transformacijom memorijske funkcije $R_{ij}(t)$ i vrijednosti određenih izravno računalnim programom HYDROSTAR [30] prikazana je na slikama 6.44-6.48 i to samo za one memorijske funkcije kojima je, s obzirom na simetriju pravokutne ISSC TLP, u potpunosti određeno potencijalno prigušenje u vremenskoj domeni.



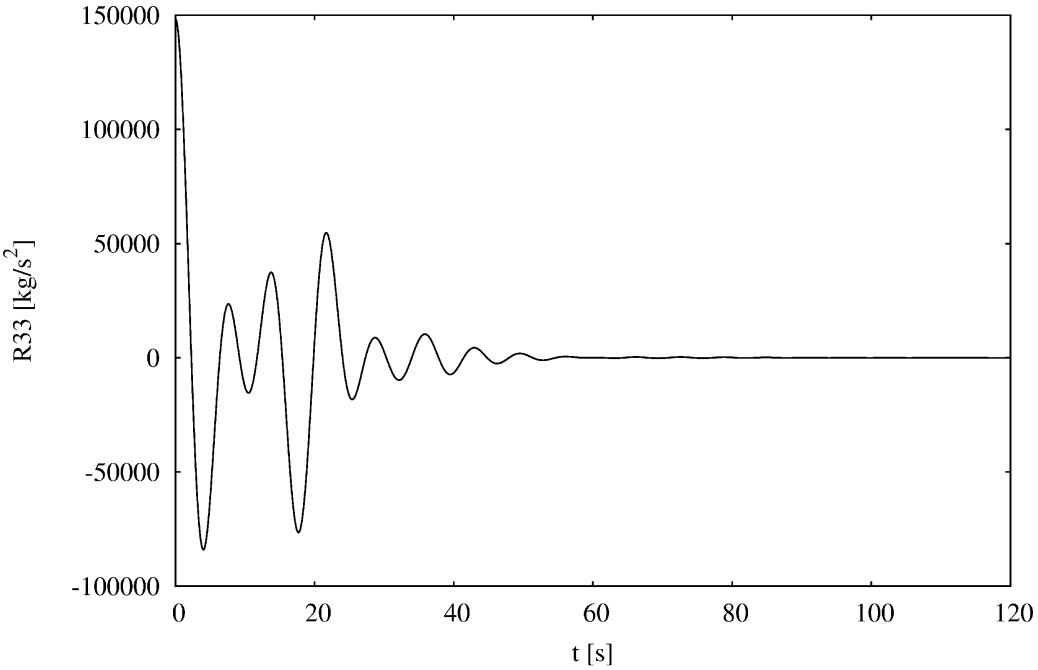
Slika 6.38 - Panelni model ISSC TLP-a generiran programom HYDROSTAR



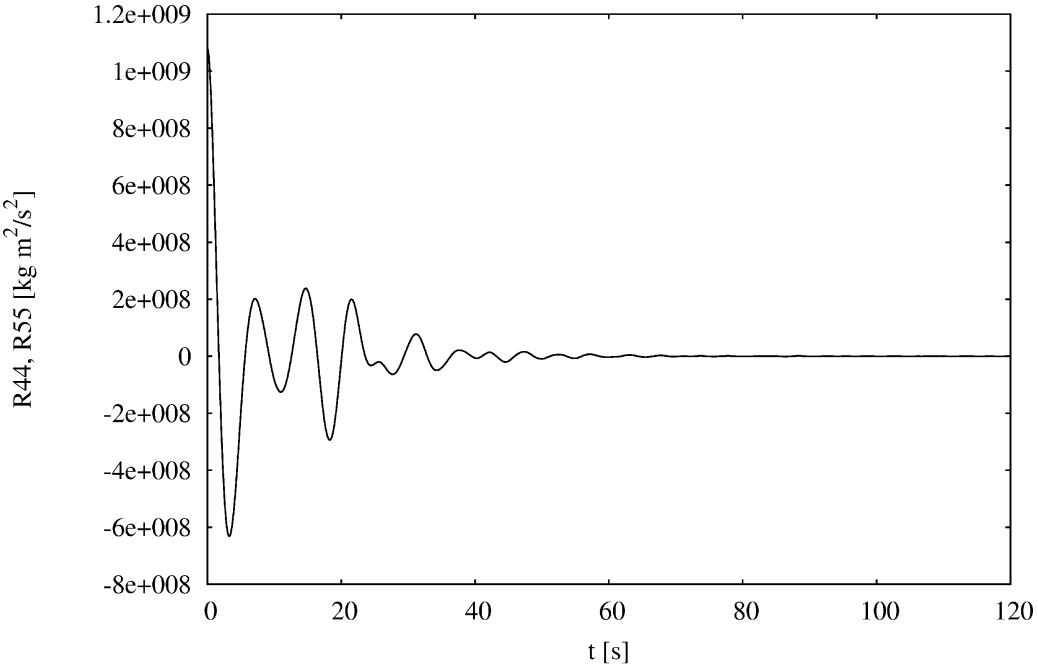
Slika 6.39 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za zalijetanje i zanošenje



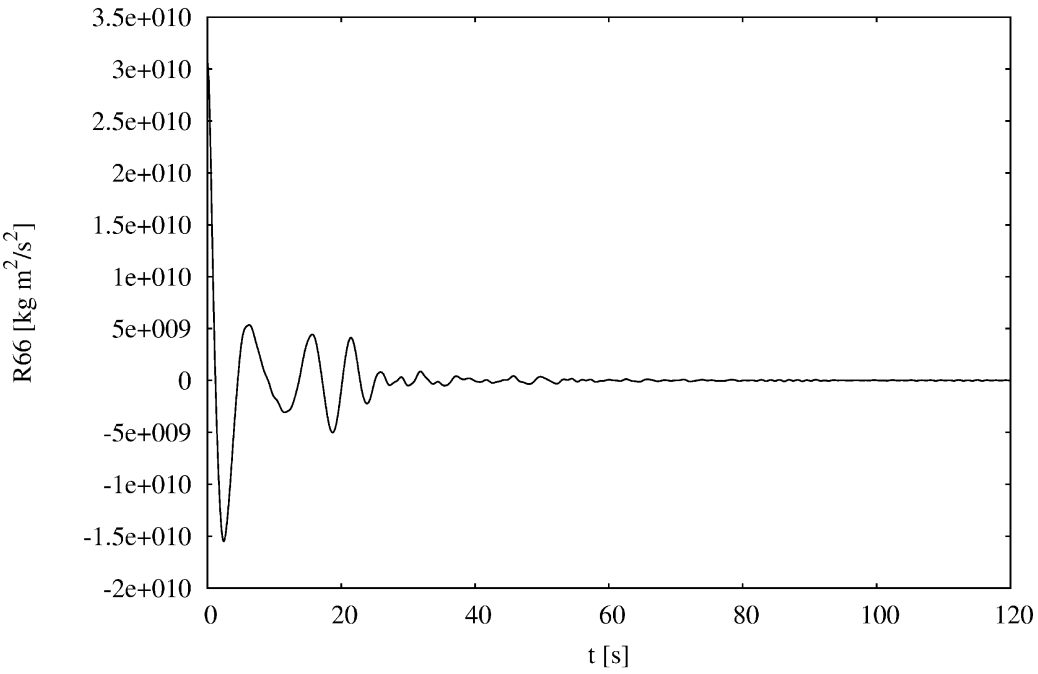
Slika 6.40 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za spregnuto zalijetanje i posrtanje



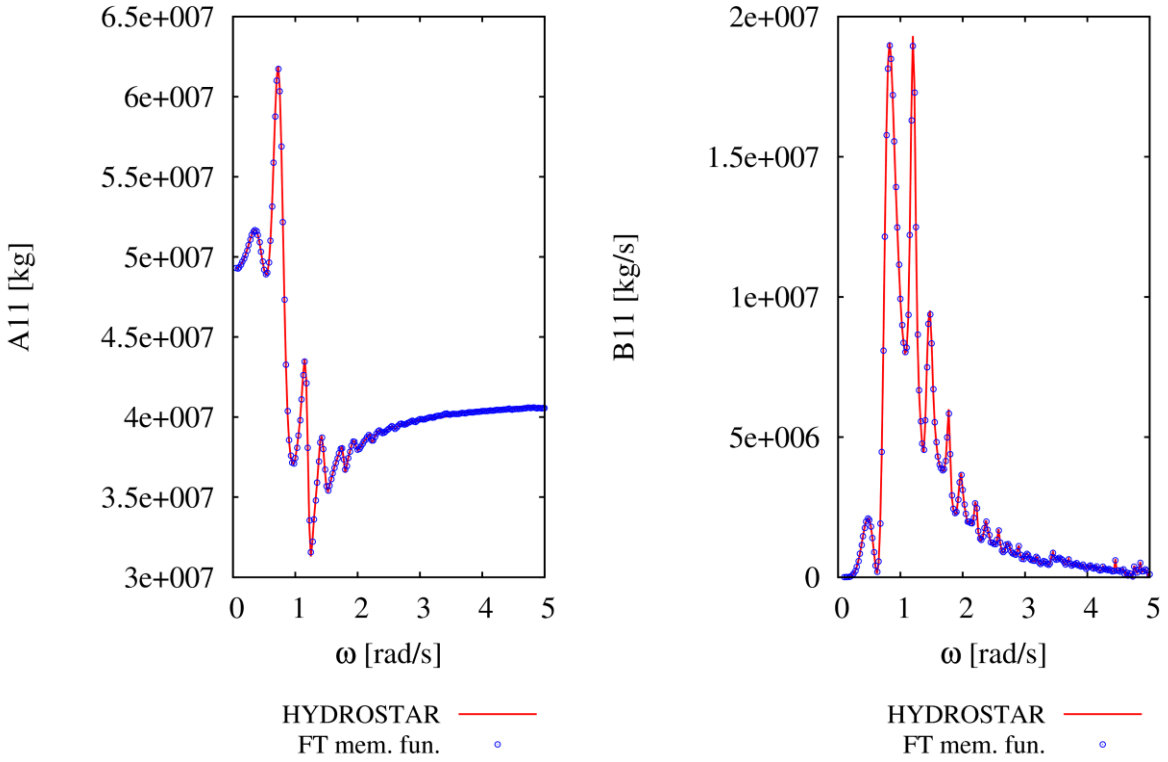
Slika 6.41 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za poniranje



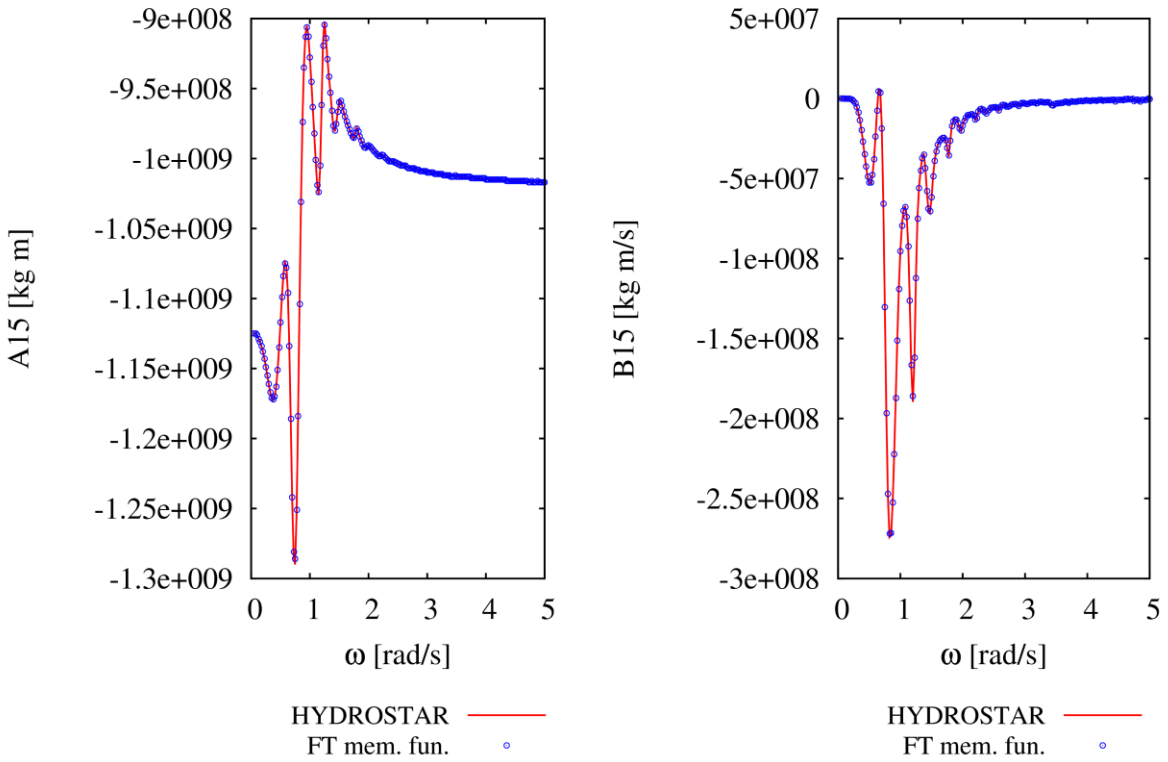
Slika 6.42 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za ljuljanje i posrtanje



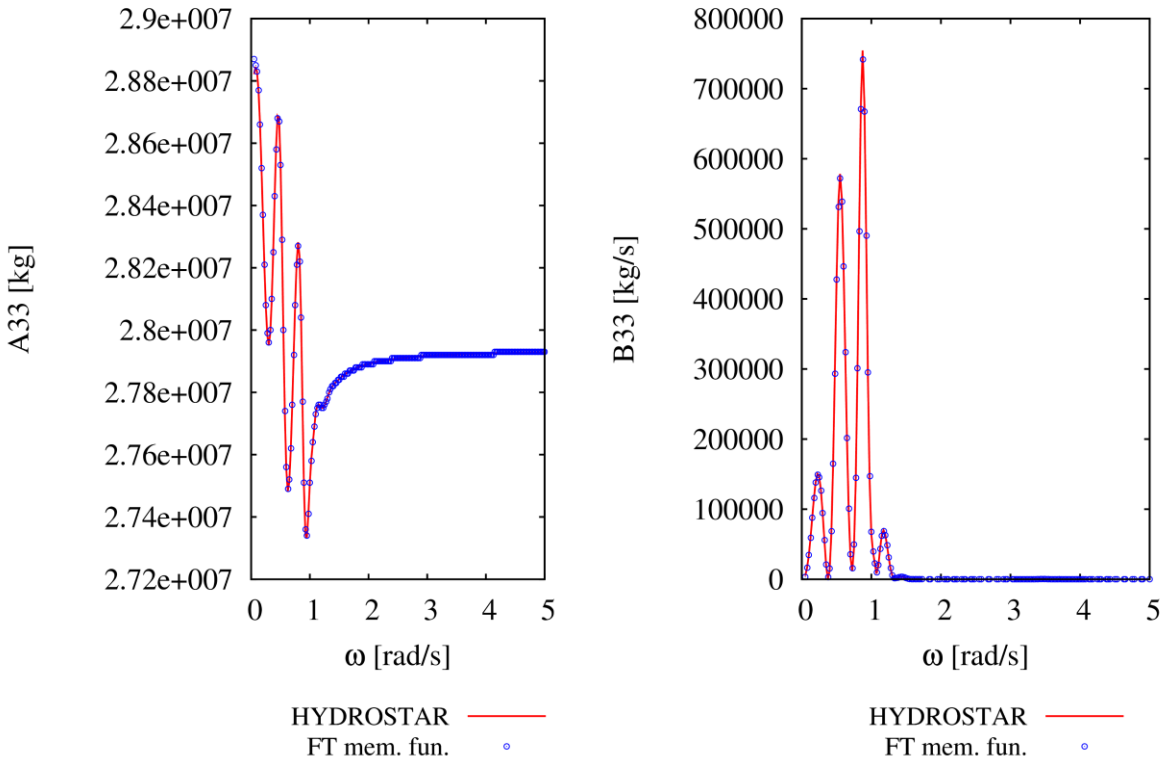
Slika 6.43 - Memorijska funkcija ISSC TLP-a za zaošijanje



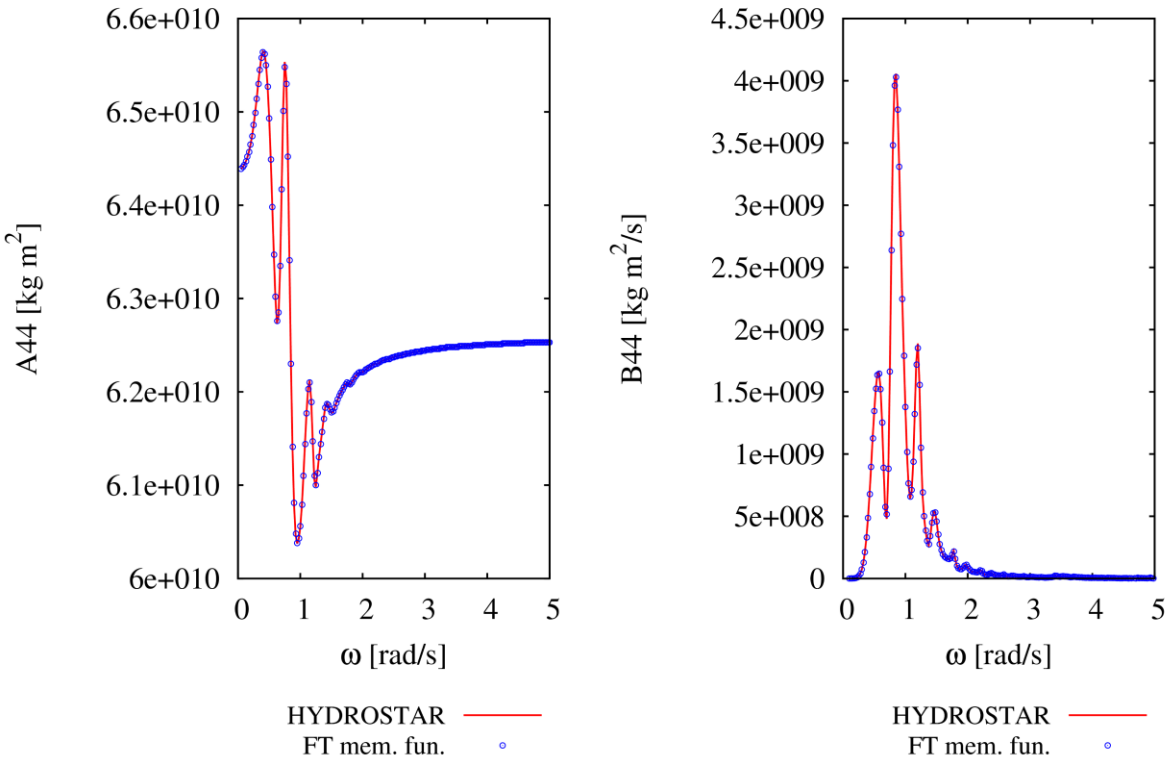
Slika 6.44 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za zalijetanje iz frekvencijske u vremensku domenu



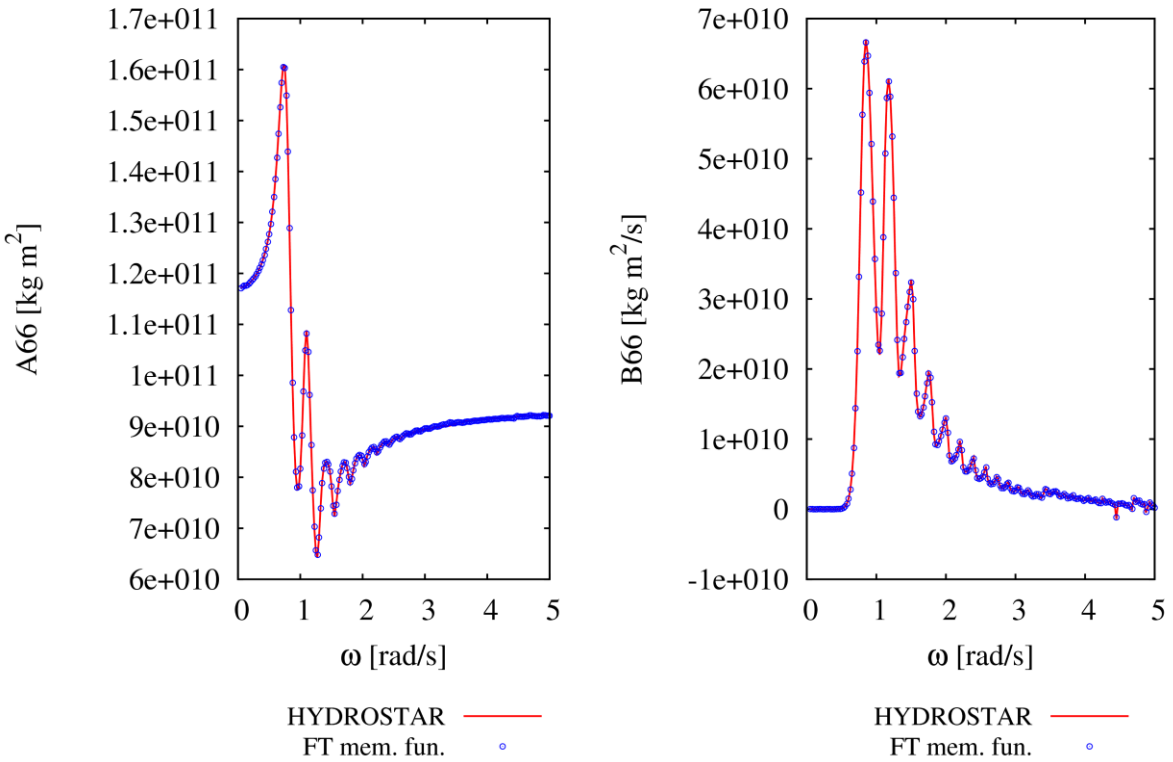
Slika 6.45 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za spregnuto zalijetanje i posrtanje iz frekvencijske u vremensku domenu



Slika 6.46 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za poniranje iz frekvencijske u vremensku domenu



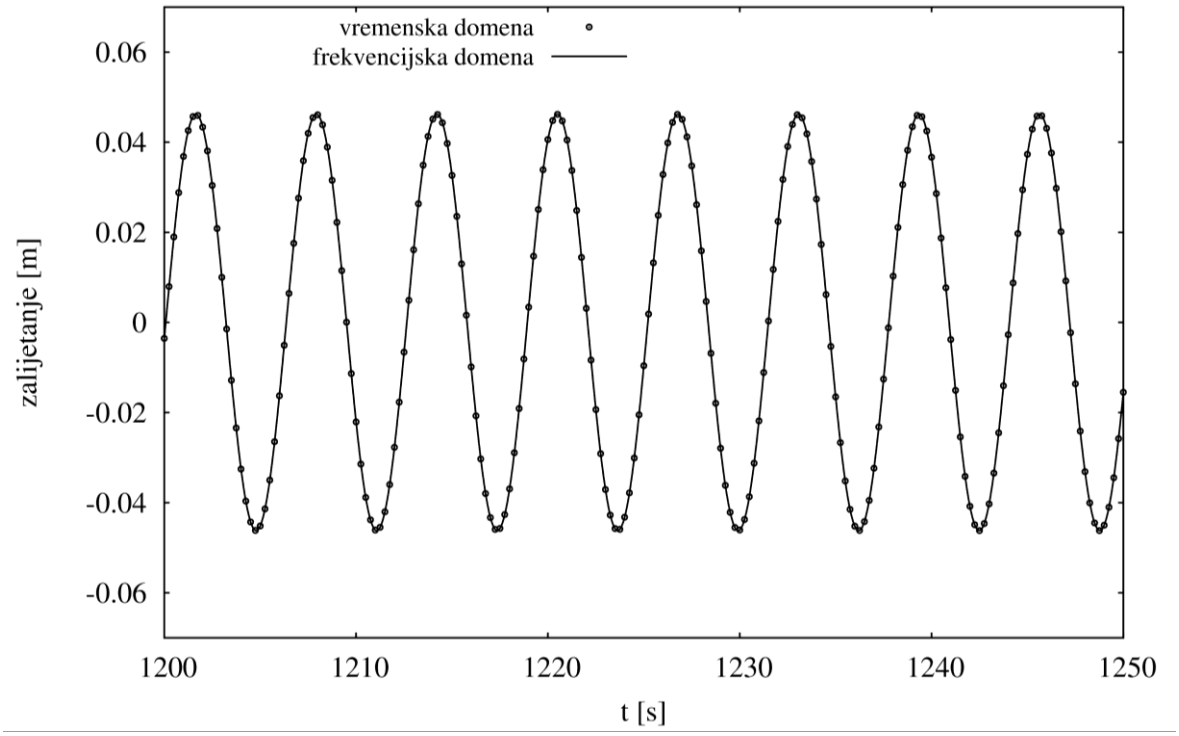
Slika 6.47 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za ljuljanje iz frekvencijske u vremensku domenu



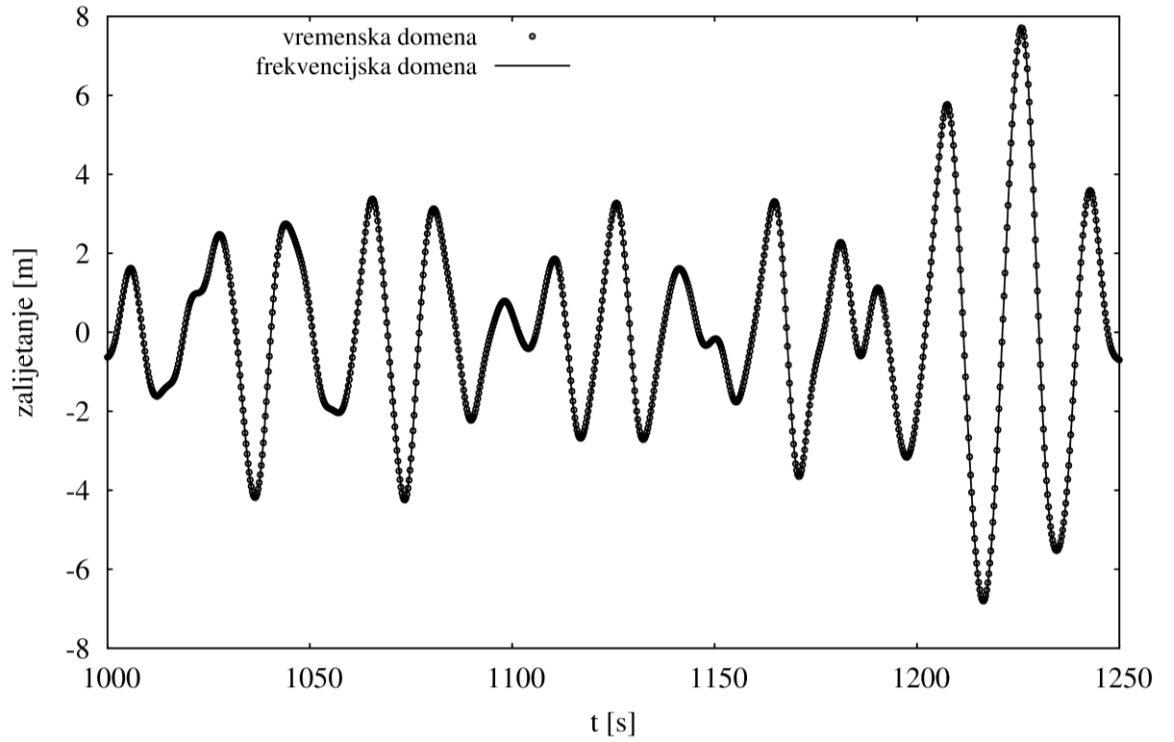
Slika 6.48 - Verifikacija preslikavanja radijacijskog hidrodinamičkog rješenja za zaošijanje iz frekvencijske u vremensku domenu

6.8.3. Verifikacija linearnog proračuna u vremenskoj domeni

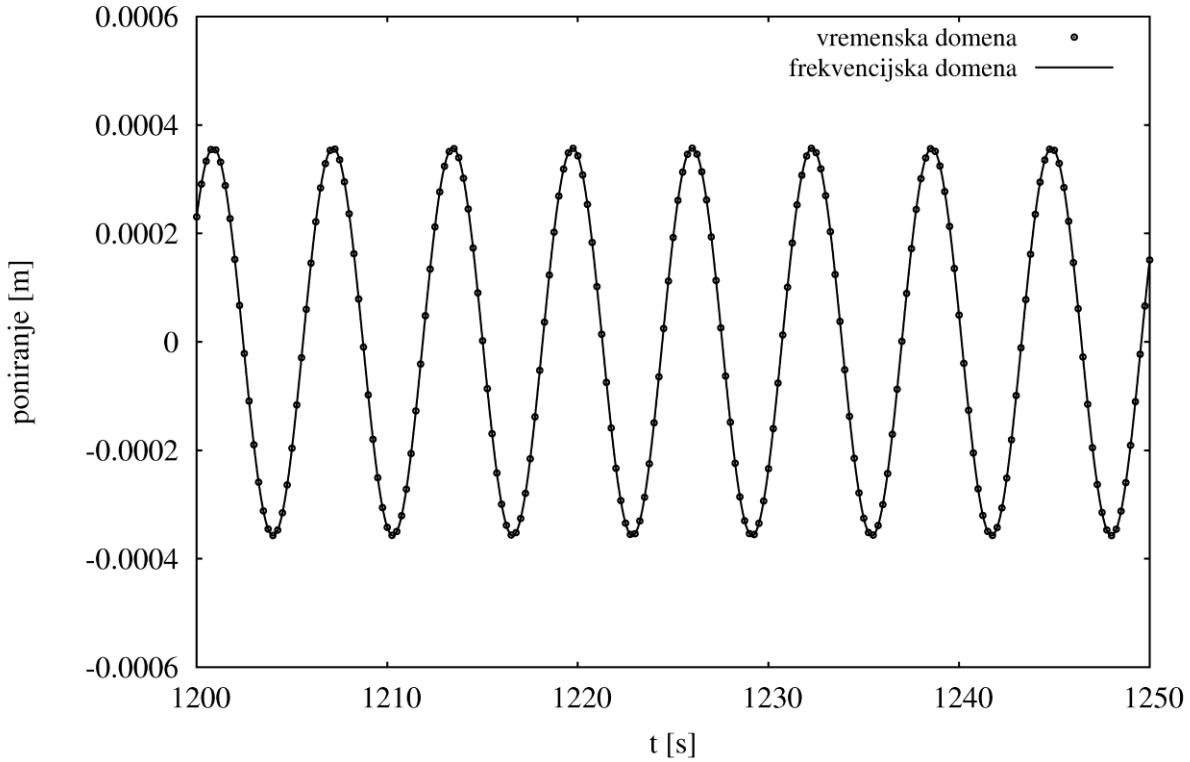
Metodu numeričke integracije jednadžbi gibanja u vremenskoj domeni potrebno je provjeriti za linearan slučaj usporedbom s rezultatima određenim rekonstrukcijom iz frekvencijske domene, [53], slike 6.49-6.54.



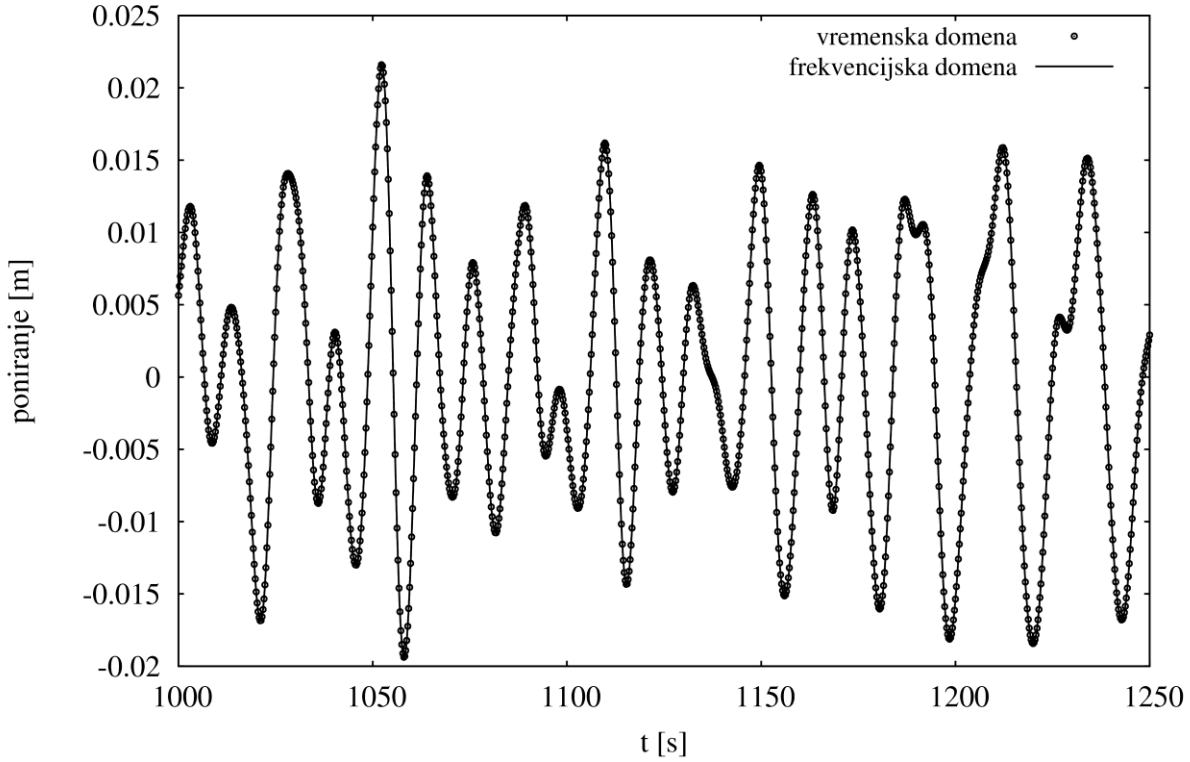
Slika 6.49 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu



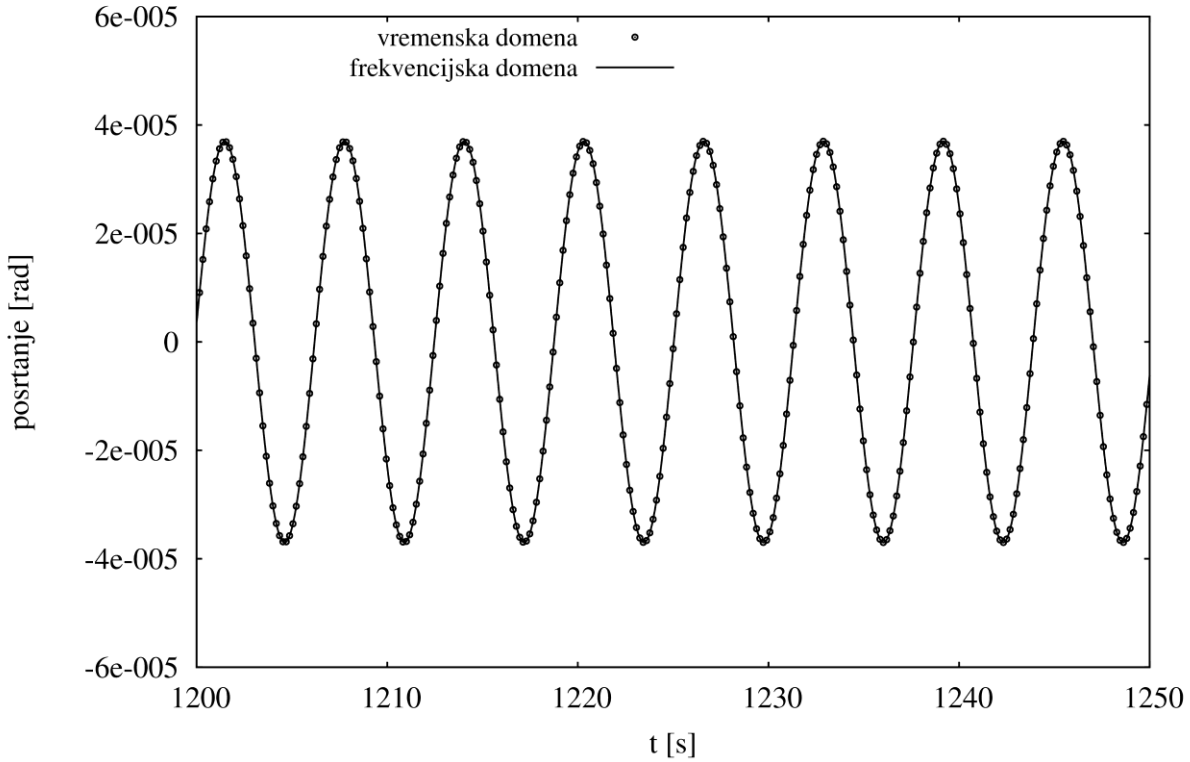
Slika 6.50 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu



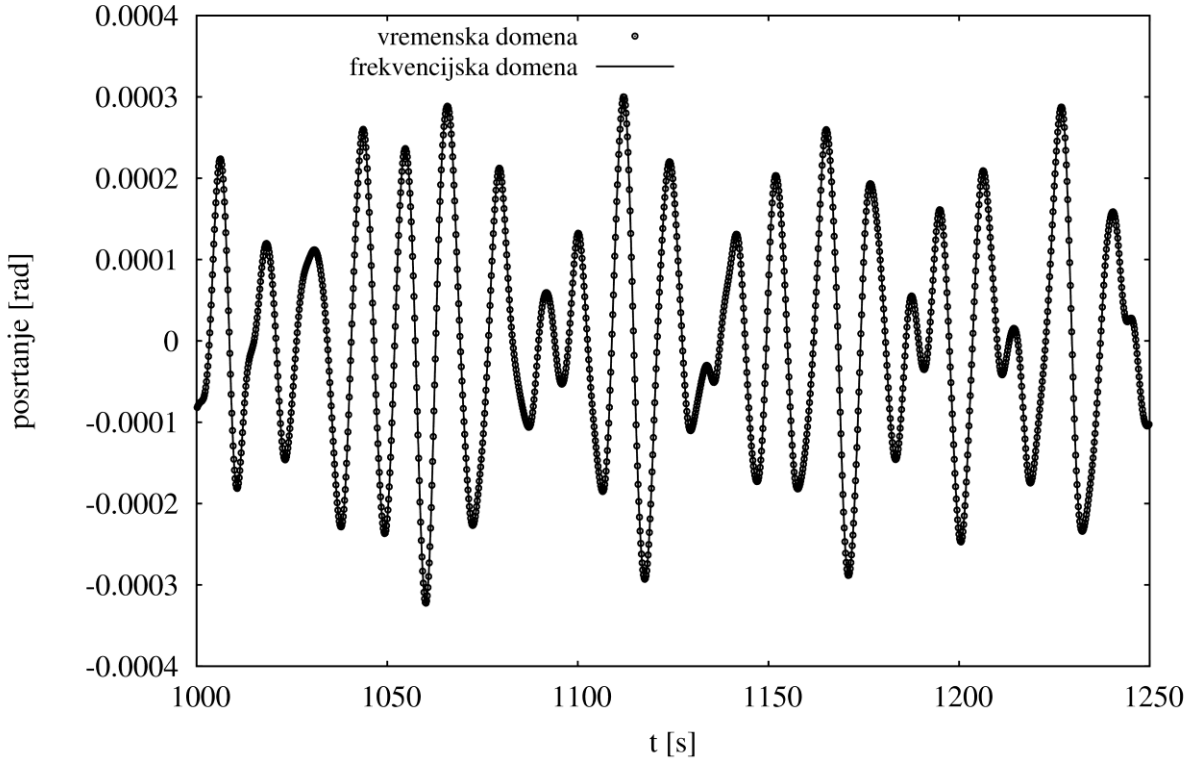
Slika 6.51 - Odziv poniranja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu



Slika 6.52 - Odziv poniranja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu



Slika 6.53 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na harmonijsku uzbudu



Slika 6.54 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na stohastičku uzbudu

6.8.4. Nelinearni proračun u vremenskoj domeni

Utjecaj formulacije povratne krutosti na odziv ISSC TLP-a uslijed djelovanja modeliranog okolišnog opterećenja, tablica 6.8, određen je izravnom numeričkom integracijom u vremenskoj domeni jednadžbi gibanja postavljenih za težište sustava, jednadžba (6.19). Razmatran je utjecaj triju formulacija povratne krutosti:

(i) linearna povratna krutost,

$$K^{L}=\begin{bmatrix} K_{11}^{L} & & & & K_{15}^{L} & \\ & K_{22}^{L} & & K_{24}^{L} & & \\ & & K_{33}^{L} & & & \\ & K_{42}^{L} & & K_{44}^{L} & & \\ K_{51}^{L} & & & & K_{55}^{L} & \\ & & & & & K_{66}^{L} \end{bmatrix}, \tag{6.29}$$

(ii) tradicionalna nelinearna (sekantna) povratna krutost,

$$K^{NT}=\begin{bmatrix} K_{11}^{NT} & & & & & \\ & K_{22}^{NT} & & & & \\ K_{31}^{NT} & K_{32}^{NT} & K_{33}^{NT} & K_{34}^{NT} & K_{35}^{NT} & K_{36}^{NT} \\ & K_{42}^{NT} & & K_{44}^{NT} & & \\ K_{51}^{NT} & & & & K_{55}^{NT} & \\ & & & & & K_{66}^{NT} \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

(iii) novoizvedena nelinearna (sekantna) povratna krutost,

$$K^{NN}=\begin{bmatrix} K_{11}^{NN} & & & & K_{15}^{NN} & \\ & K_{22}^{NN} & & K_{24}^{NN} & & \\ K_{31}^{NN} & K_{32}^{NN} & K_{33}^{NN} & K_{34}^{NN} & K_{35}^{NN} & K_{36}^{NN} \\ & K_{42}^{NN} & & K_{44}^{NN} & & \\ K_{51}^{NN} & & & & K_{55}^{NN} & \\ & & & & & K_{66}^{NN} \end{bmatrix}. \tag{6.31}$$

Kako je već navedeno u poglavlju 5, matrice povratne krutosti razlikuju se ne samo svojom strukturom, nego i formulacijom pojedinih članova u matrici.

Tijekom preliminarnog projektiranja pritegnutih pučinskih konstrukcija uobičajeno je dinamički problem pojednostaviti razmatranjem odziva uslijed kolinearnog djelovanja vjetra, valova i morske struje, [3]. Takav pristup svoju praktičnu primjenu pronalazi u dimenzioniranju sidrenog sustava te će se i ISSC TLP analizirati pretpostavljajući jednak smjer nailaska svih komponenti okolišnog opterećenja.

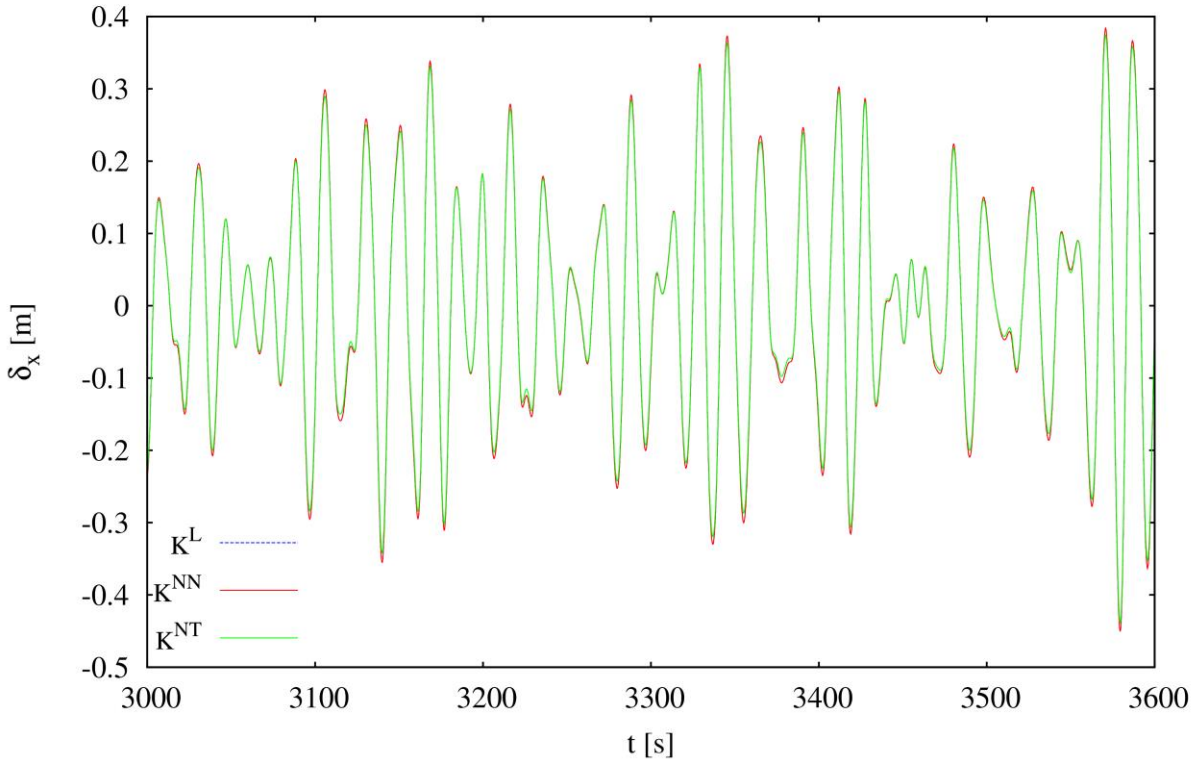
S obzirom da se razmatra utjecaj različitih formulacija povratne krutosti na odziv pritegnute pučinske platforme, u jednadžbi dinamičke ravnoteže *izostavit* će se dio utjecaja pripona, tj. neće se uključiti masa i inercija pripona, dodatna masa pripona i viskozno prigušenje pripona (utjecaj tih efekata na odziv pritegnute pučinske platforme analiziran je u poglavlju 6.7).

Tablica 6.8 - Okolišno opterećenje na ISSC TLP

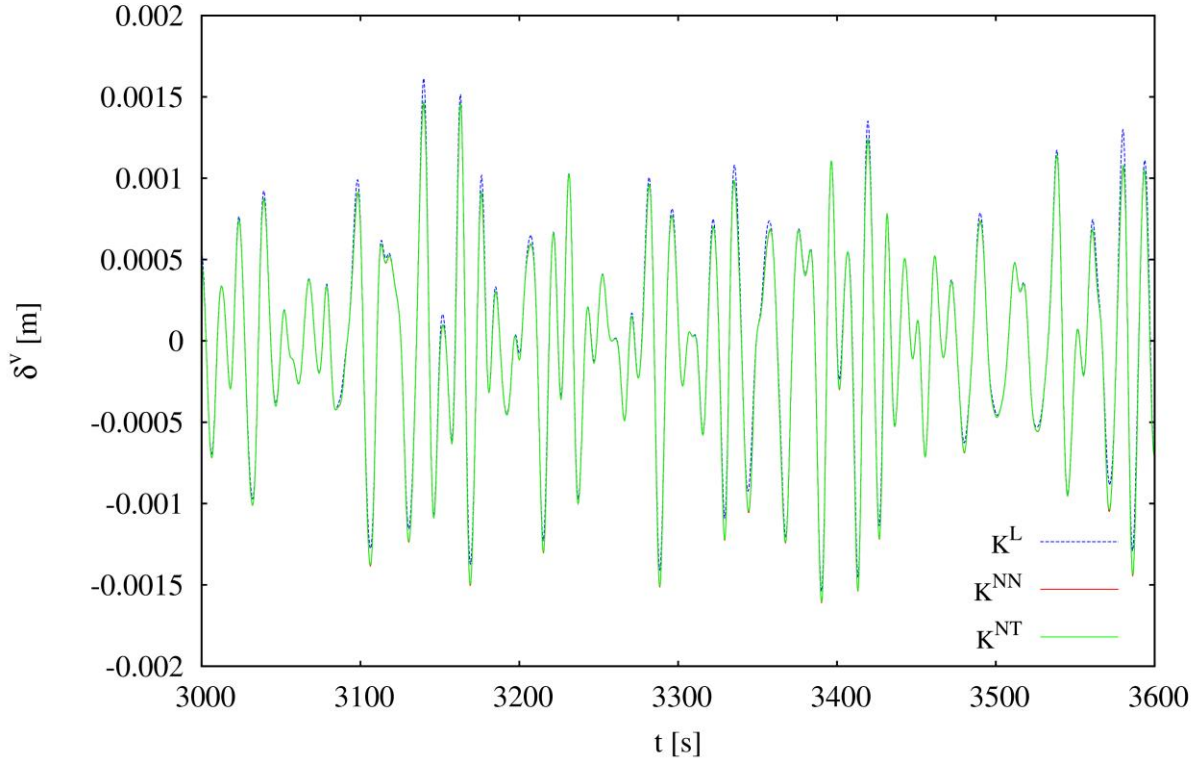
MORSKI VALOVI	
H_s:	15.5 m
T_p:	17.8 s
Spektar valova:	PM
Smjer nailaska:	180°
VJETAR	
Brzina vjetra (prosjek za 1 h):	38 m/s @ 10 m
Spektar vjetra:	Norsok Standard N-003
Smjer nailaska:	180°
koeficijent sile za zalijetanje:	3185 N/(m/s)^2
PROFIL MORSKE STRUJE	
Profil:	linearan
Dubina [m]	Brzina [m/s]
0	1.26
450 (morsko dno)	0.5
Smjer nailaska:	180°

Karakteristike ISSC TLP-a navedene su u tablici 6.2. Opterećenje i odziv pritegnute pučinske platforme numerički su simulirani u trajanju od tri sata.

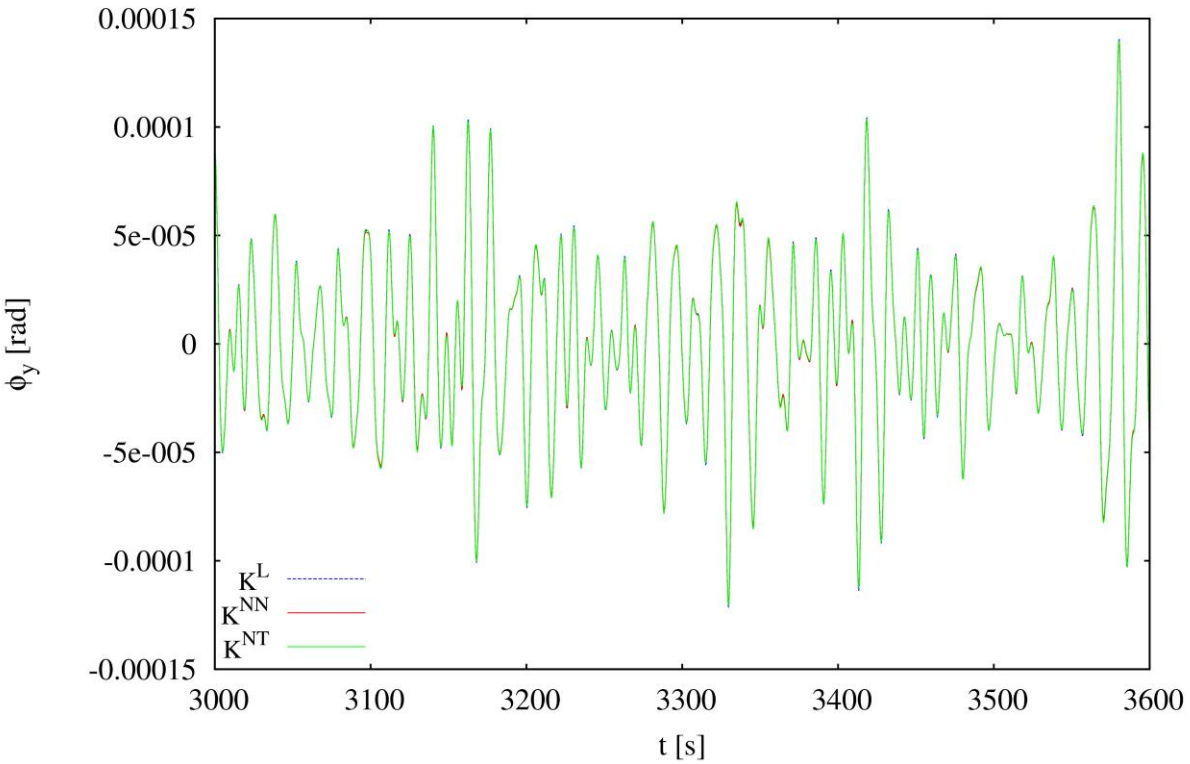
Slikama 6.55-6.57 prikazan je odziv ISSC TLP-a za stupnjeve slobode gibanja u vertikalnoj ravnini za uzbudu uslijed djelovanja isključivo sile valova 2. reda, određenu spektrom valova prema tablici 6.8, uz H_s = 1 m. Svrha odabira te relativno male značajne visine valova je verifikacija numeričkog proračuna usporedbom odziva određenog primjenom triju različitih formulacija povratne krutosti.



Slika 6.55 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m)



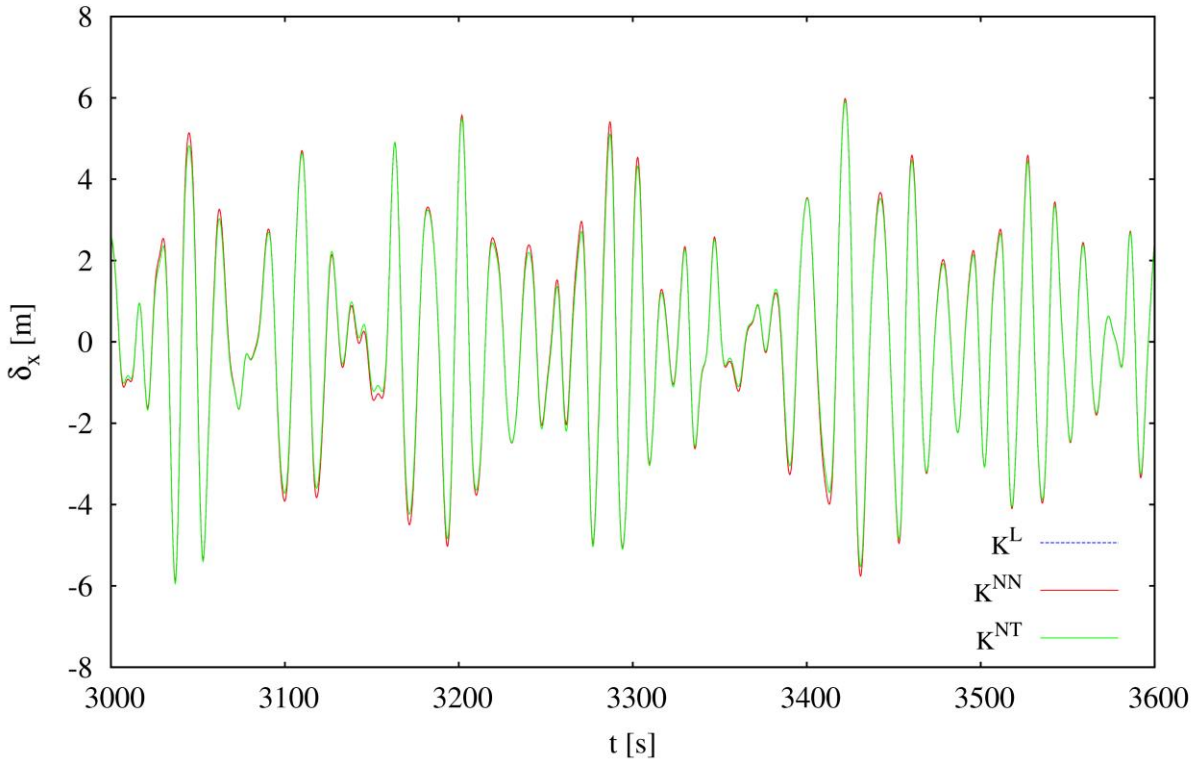
Slika 6.56 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m)



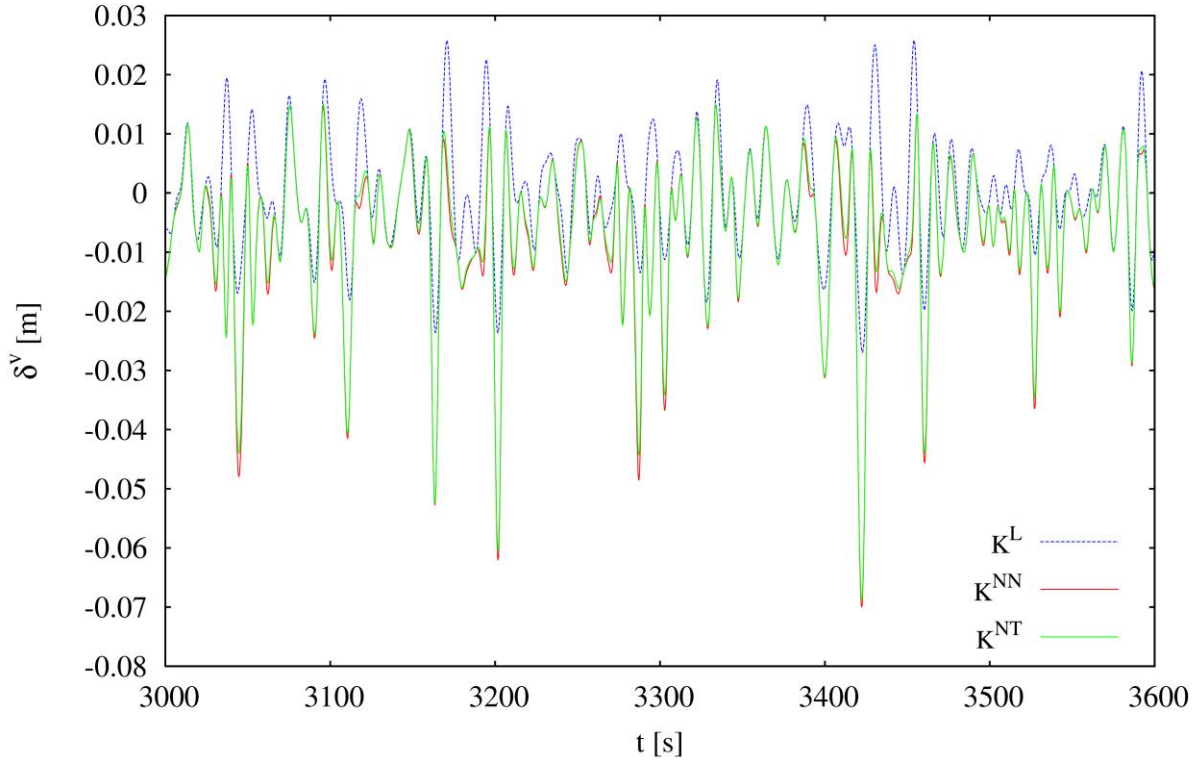
Slika 6.57 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 1 m)

Općenito se može uočiti vrlo dobro slaganje odziva za sve formulacije, što je očekivano s obzirom da je odziv TLP-a vrlo blizu linearnom. Za odziv u horizontalnom smjeru novoizvedena formulacija krutosti daje vrijednosti koje su gotovo jednake linearnom odzivu, dok je u slučaju odziva u vertikalnom smjeru primjetno slaganje novoizvedene formulacije krutosti s tradicionalnom nelinearnom formulacijom krutosti.

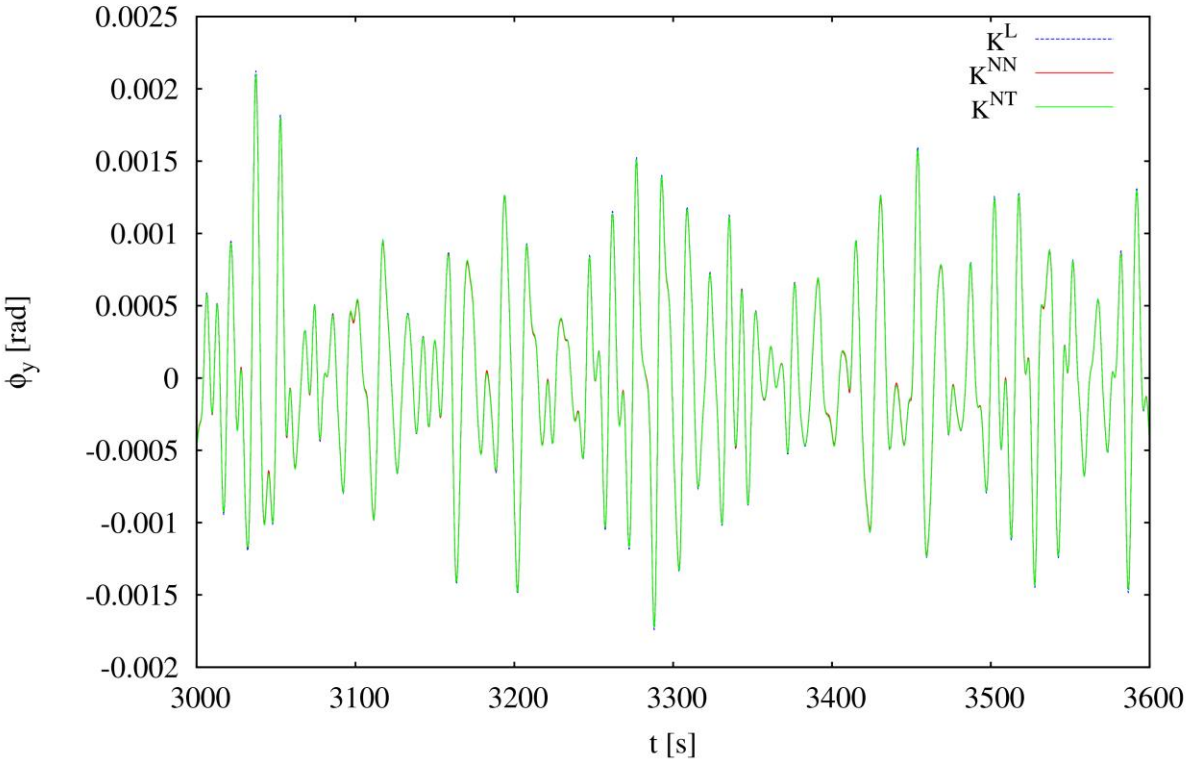
Slikama 6.58-6.60 prikazan je odziv ISSC TLP-a za stupnjeve slobode gibanja u vertikalnoj ravnini za uzbudu uslijed djelovanja isključivo sile valova 1. reda, određenu spektrom valova prema tablici 6.8. Namjera je usporediti odzive prema različitim formulacijama povratne krutosti za slučaj realnog *simetričnog* odziva pritegnute pučinske platforme.



Slika 6.58 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m)



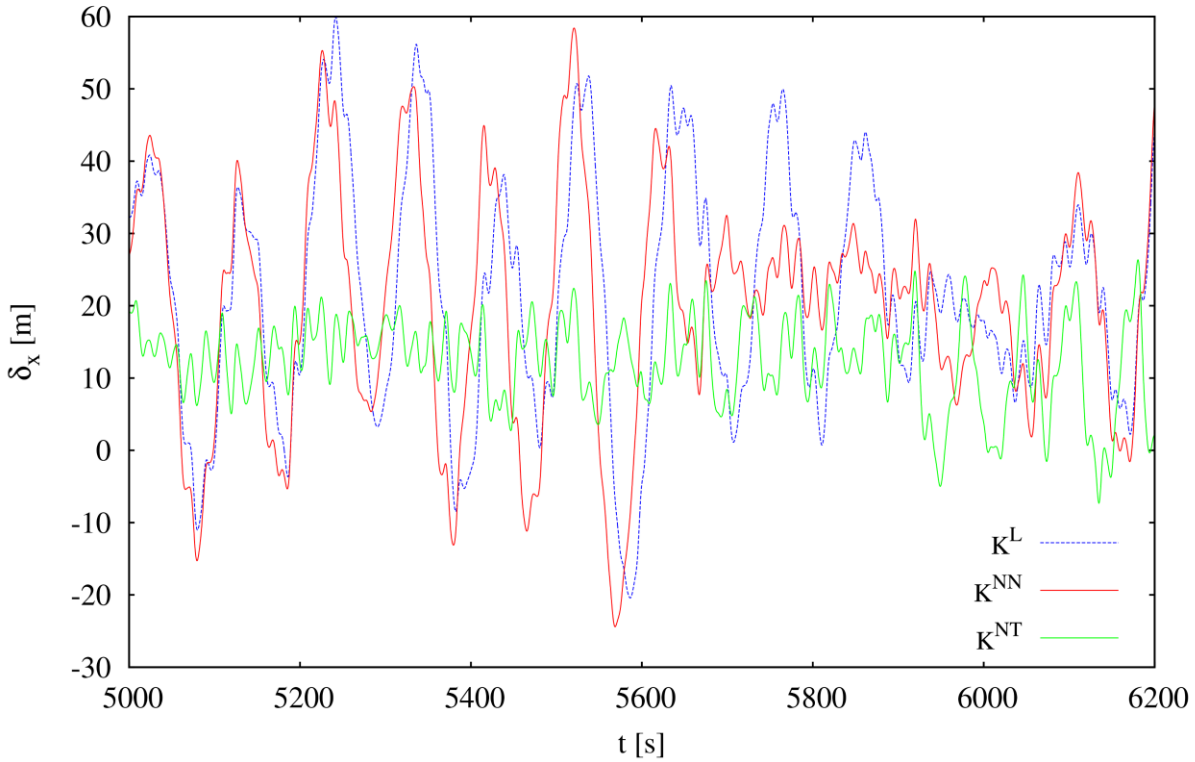
Slika 6.59 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m)



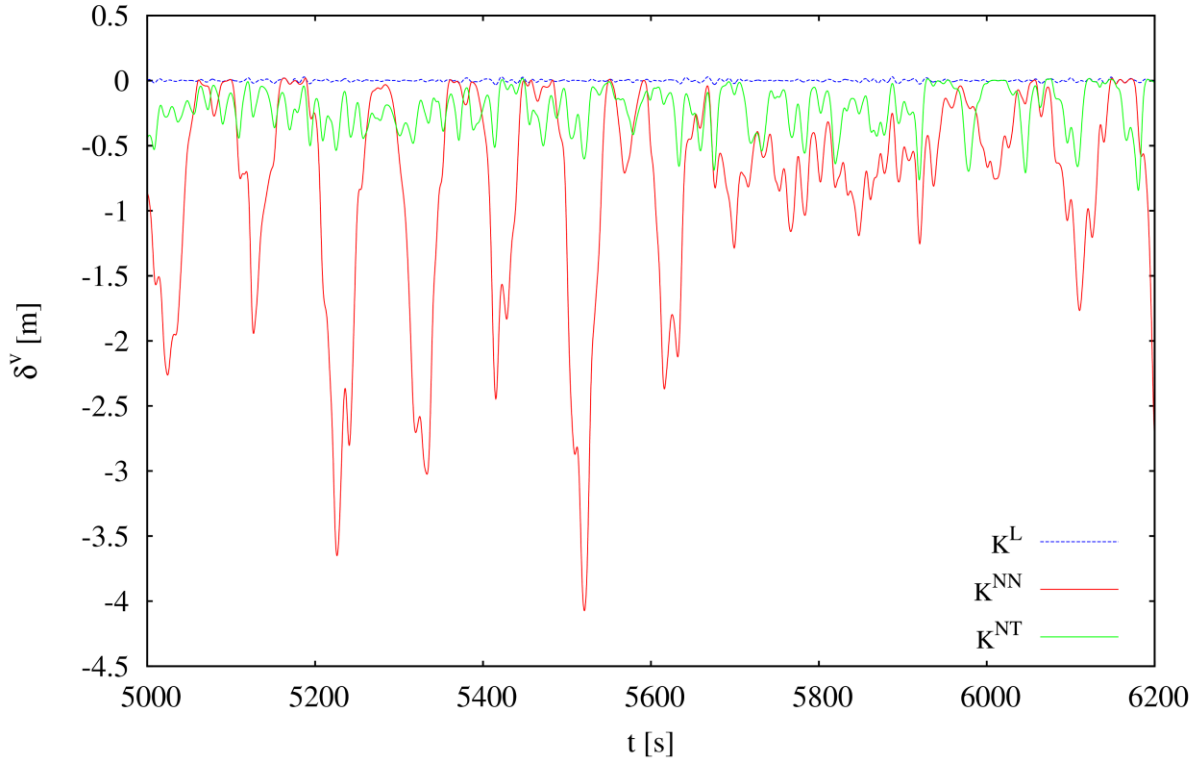
Slika 6.60 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na uzbudu valova 1. reda (H_s = 15.5 m)

Za gibanja u horizontalnom smjeru i kod posrtanja nema uočljivijih razlika. Za gibanja u vertikalnom smjeru razlike su značajnije, s tim da je odziv prema novoizvedenoj formulaciji nelinearne povratne krutosti vrlo sličan odzivu prema tradicionalnoj nelinearnoj povratnoj krutosti.

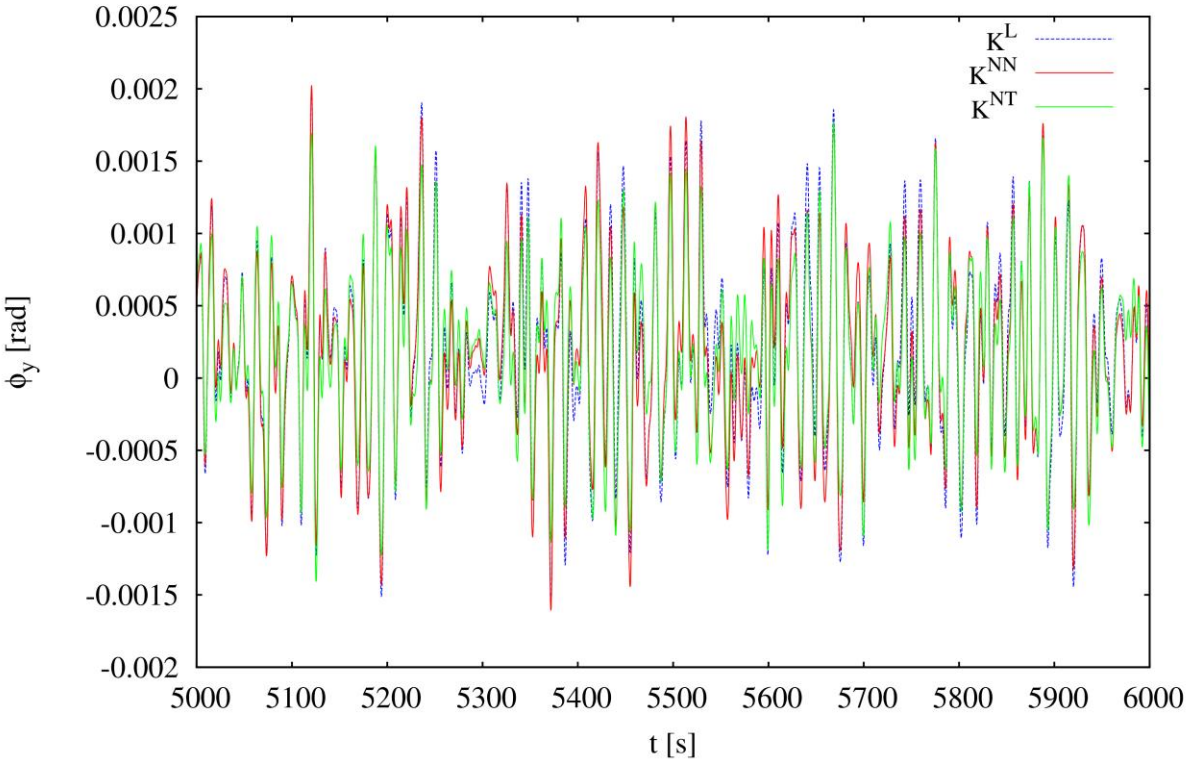
Slikama 6.61-6.63 prikazan je odziv ISSC TLP-a za stupnjeve slobode gibanja u vertikalnoj ravnini za uzbudu uslijed djelovanja isključivo sile valova 1. i 2. reda, vjetra i morske struje, odnosno za *nesimetrični* odziva pritegnute pučinske platforme. Uočljive su značajne razlike u svim stupnjevima slobode gibanja. Za gibanje u rotacijskom stupnju slobode razlike su (što je dosljedno s prethodnim razmatranjima) najmanje. U horizontalnom stupnju slobode odziv prema novoizvedenoj formulaciji povratne krutosti bliži je odzivu prema linearnoj formulaciji. Za gibanja u vertikalnom smjeru, gdje su razlike i najuočljivije može se primijetiti da odziv prema tradicionalnoj nelinearnoj povratnoj krutosti sadržava dio fizikalnog odziva, ali ni približno koliko odziv prema fizikalno dosljednoj novoizvedenoj nelinearnoj povratnoj krutosti.



Slika 6.61 - Odziv zalijetanja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje



Slika 6.62 - Odziv složenog poniranja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje

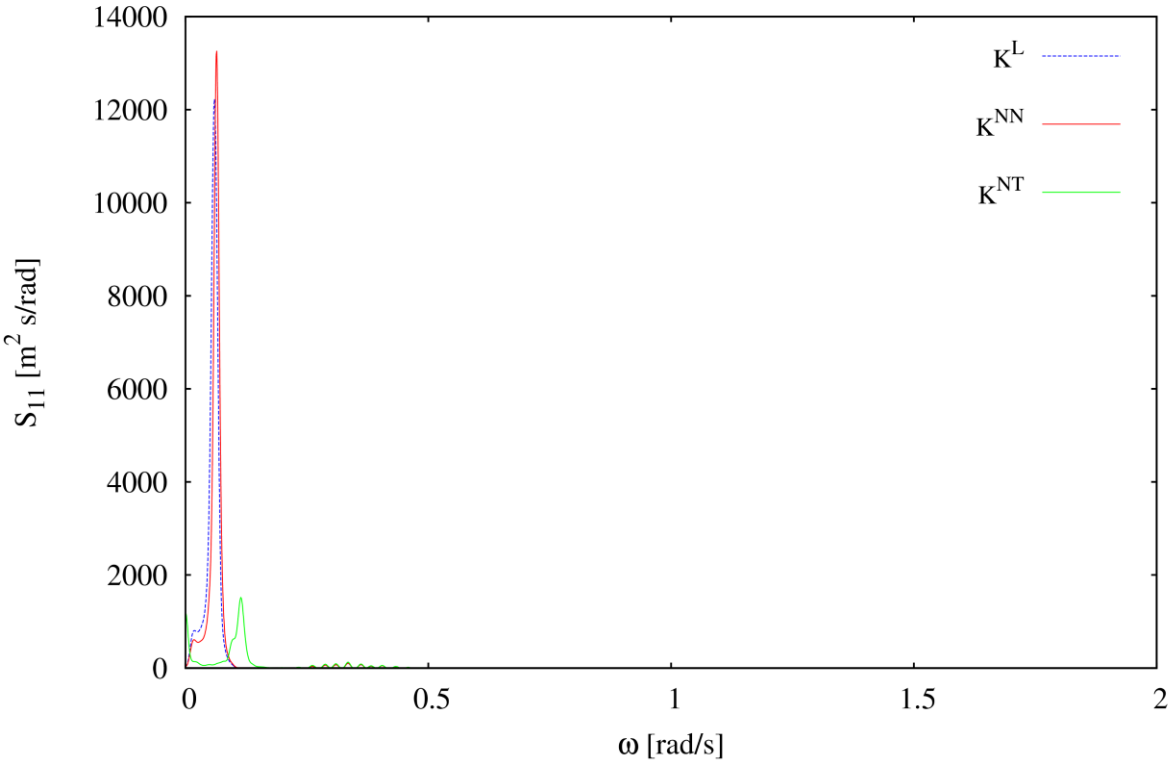


Slika 6.63 - Odziv posrtanja ISSC TLP-a na okolišno opterećenje

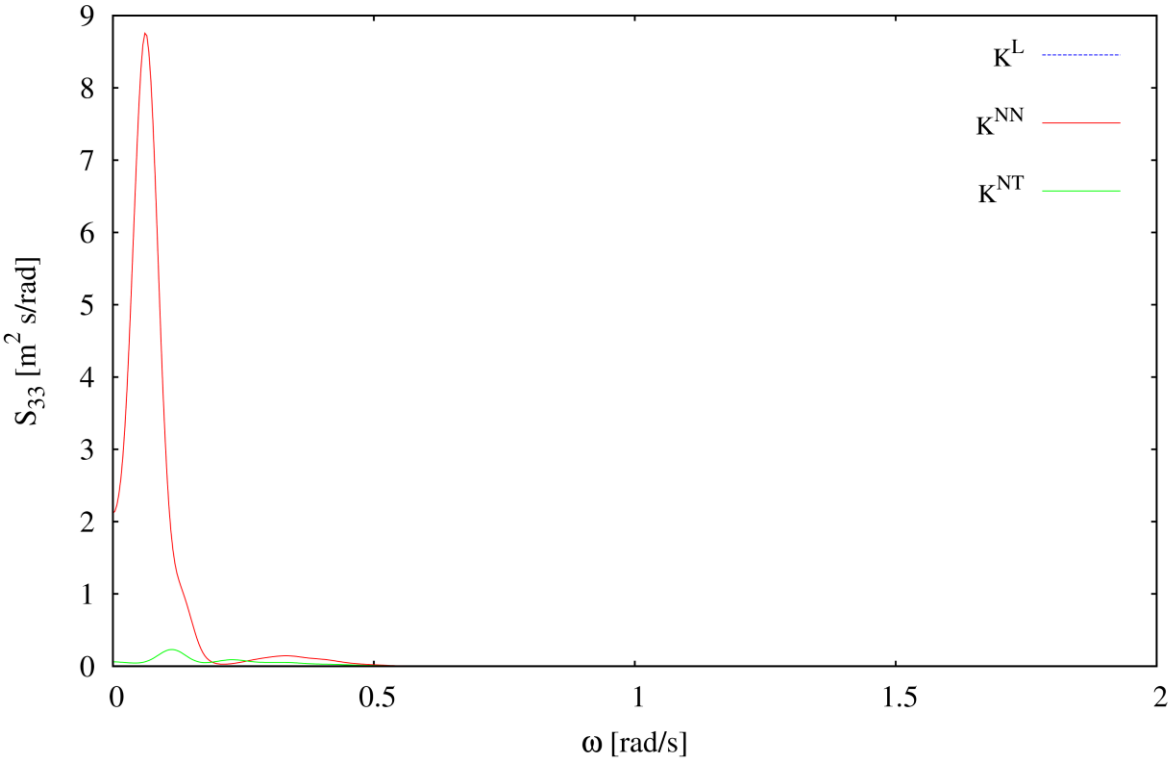
Vremenski nizovi korisni su u smislu kvalitativne analize odziva. Za kvantifikaciju fizikalnih zaključaka prikladno je odziv u vremenskoj domeni analizirati metodama koje omogućuju kvantifikaciju sličnu onoj analizi odziva u frekvencijskoj domeni. U tu svrhu izravno su statistički analizirani vektori odziva te su različite statističke mjere prikazane tablicom 6.9. Kao dodatna mjera usporedbe odziva Welchovom metodom, [54], procijenjene su funkcije spektralne gustoće, slike 6.64-6.66.

Tablica 6.9 - Usporedba pomaka ISSC TLP-a izračunatih korištenjem različitih formulacija povratne krutosti

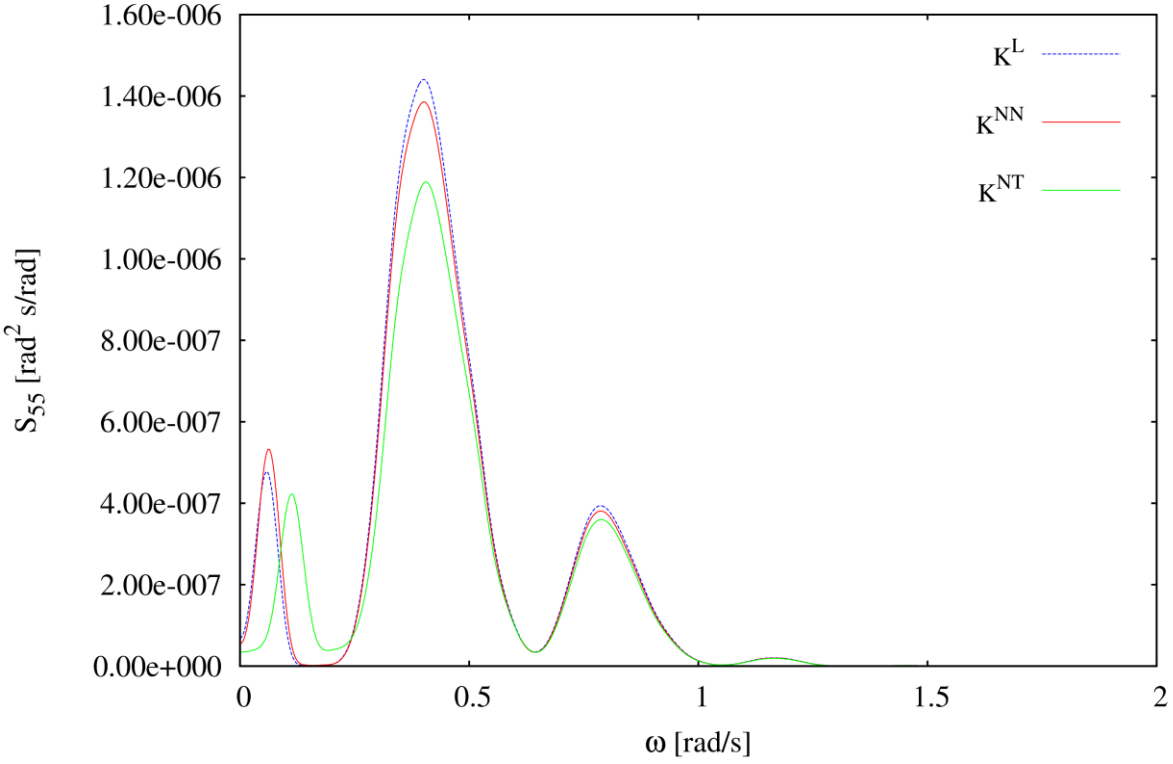
		K^L	K^{NT}	K^{NN}
Zalijetanje	Sred. vrij. [m]	22.173	11.684	20.304
	Stand. dev. [m]	15.86	7.7013	15.338
	Min. [m]	-24.83	-25.26	-24.404
	Max. [m]	75.045	32.367	65.752
	m_0 [m^2]	251.54	59.31	235.27
	m_2 [rad^2 m^2/s^2]	1.8981	1.5617	3.4626
	m_4 [rad^4 m^2/s^4]	1478.8	814.5	11939
Poniranje	Sred. vrij. [m]	$4.9985 \cdot 10^{-6}$	-0.23302	-0.77138
	Stand. dev. [m]	0.0091849	0.18656	0.8126
	Min. [m]	-0.032475	-1.2608	-5.154
	Max. [m]	0.029807	0.027971	0.025441
	m_0 [m^2]	$8.4363 \cdot 10^{-5}$	0.034803	0.66032
	m_2 [rad^2 m^2/s^2]	$1.6036 \cdot 10^{-5}$	0.0018967	0.01119
	m_4 [rad^4 m^2/s^4]	0.0010667	0.24502	29.945
Posrtanje	Sred. vrij. [rad]	$1.870 \cdot 10^{-4}$	$1.8261 \cdot 10^{-4}$	$1.8398 \cdot 10^{-4}$
	Stand. dev. [rad]	$6.2273 \cdot 10^{-4}$	$5.7677 \cdot 10^{-4}$	$6.1476 \cdot 10^{-4}$
	Min. [rad]	$-1.9723 \cdot 10^{-3}$	$-1.8788 \cdot 10^{-3}$	$-1.8789 \cdot 10^{-3}$
	Max. [rad]	$2.4649 \cdot 10^{-3}$	$2.5425 \cdot 10^{-3}$	$2.5201 \cdot 10^{-3}$
	m_0 [rad^2]	$3.8779 \cdot 10^{-7}$	$3.3267 \cdot 10^{-7}$	$3.7793 \cdot 10^{-7}$
	m_2 [rad^4/s^2]	$1.0013 \cdot 10^{-7}$	$8.8261 \cdot 10^{-8}$	$9.7392 \cdot 10^{-8}$
	m_4 [rad^6/s^4]	$2.1104 \cdot 10^{-6}$	$2.0384 \cdot 10^{-6}$	$6.67 \cdot 10^{-6}$



Slika 6.64 - Procjena spektra zalijetanja ISSC TLP-a



Slika 6.65 - Procjena spektra poniranja ISSC TLP-a



Slika 6.66 - Procjena spektra posrtanja ISSC TLP-a

Zaključak je da je u slučaju realnog fizikalnog odziva pritegnute pučinske platforme, koji karakterizira nesimetričnost, odnosno njihanje oko pomaknutog statičkog ravnotežnog položaja (zanašanje uslijed djelovanja konstante sile vjetra, morske struje i valova), odziv određen novoformuliranom nelinearnom povratnom krutošću fizikalno dosljedan te je racionalno i pouzdano koristiti upravo tu formulaciju povratne krutosti u jednadžbama dinamičke ravnoteže kod primjene nespregnute metode proračuna odziva TLP-a u preliminarnoj fazi projektiranja tog pučinskog objekta.

7. ZAKLJUČAK DOKTORSKOG RADA

7.1. Zaključna razmatranja i izvorni znanstveni doprinos doktorskog rada

Linearna povratna krutost pritegnutih pučinskih platformi izvedena je na fizikalno konzistentan način kao poseban slučaj hidroelastične analize plutajućih tijela, za kinematički pol rotacije koji se nalazi na dnu pučinske platforme (u ravnini spoja pripona s trupom), što je omogućilo rasprezanje pojedinih stupnjeva slobode gibanja. Pokazano je da se linearna krutost sastoji od geometrijske i konvencionalne krutosti pripona te hidrostatske krutosti trupa, pri čemu je geometrijski dio krutosti značajan za gibanja u horizontalnoj ravnini, a konvencionalna i hidrostatska krutost za gibanja u vertikalnoj ravnini. Usporedba izvedene formulacije linearne krutosti s formulacijama poznatim u stručnoj literaturi pokazala je vrlo dobro poklapanje, posebno u slučaju sidrenja čeličnim priponama.

Detaljno je analizirana tradicionalna nelinearna povratna krutost te su uočene neke nedosljednosti (slična zapažanja mogu se naći u [24] i [25]) poput nefizikalne pretpostavke o značajnom istezanju pripona pri proizvoljnom pomaku pritegnute pučinske platforme u horizontalnoj ravnini, što za posljedicu ima nefizikalan mehanizam povratne krutosti za gibanja u horizontalnoj ravnini, gdje u tom slučaju dominira konvencionalna aksijalna krutost pripona umjesto značajno manje hidrostatske krutosti. Važan nedostatak tradicionalne povratne krutosti izostanak je sprege između gibanja u horizontalnoj ravnini (zalijetanje, zanošenje i zaošijanje). Svi koeficijenti krutosti u horizontalnom smjeru funkcija su samo vlastitog pomaka.

Na temelju uočenih nedostataka tradicionalne nelinearne povratne krutosti, primjenom izvedene linearne povratne krutosti i principa ravnoteže unutrašnjih i vanjskih sila, sistematično je konstruirana fizikalno dosljedna nelinearna povratna krutost za proizvoljni spregnuti pomak pritegnute pučinske platforme u horizontalnoj ravnini. Pokazano je da se pritegnuta pučinska platforma u horizontalnoj ravnini ponaša poput mehanizma s očvršćujućom povratnom krutošću, gdje dominiraju geometrijski i hidrostatski članovi. Izvedeni koeficijenti povratne krutosti koji se odnose na gibanja u horizontalnoj ravnini funkcija su svih horizontalnih pomaka što upućuje na to da je sprega dosljedno modelirana. Na temelju tako formulirane sekantne povratne krutosti, primjenjive u eksplicitnim metodama numeričke integracije jednadžbi gibanja, izvedena je tangencijalna nelinearna povratna krutost, primjenjiva u implicitnim metodama.

Poniranje, kao lokalno gibanje u vertikalnoj ravnini, analizirano je u prirodnom koordinatnom sustavu kao posljedica aksijalnih vibracija pripona i kružnog osciliranja trupa. Na taj način uveden je dodatni stupanj slobode gibanja, koji je prikladan u istraživačkom radu u smislu analize gibanja po glavnim smjerovima krutosti. U dinamičkoj analizi plutajućih tijela sustav sa 7 stupnjeva slobode gibanja nije uobičajen te je provedena redukcija bez gubitka točnosti.

U stručnoj literaturi postoji i formulacija nelinearne krutosti izvedena energijskim pristupom, [25], u kojoj su uočene neke nedosljednosti (npr. povratna krutost razlikuje se za zalijetanje i zanošenje), što je motiviralo izvod nelinearne povratne krutosti primjenom principa jednakosti potencijalne energije. Različiti pristupi analizirani su na posebnom numeričkom primjeru te su uspoređeni s rezultatima proračuna metodom konačnih elemenata s velikim pomacima.

Pokazano je da gibanja u horizontalnoj ravnini uzrokuju sjedanje pritegnute pučinske platforme (pojava 2. reda) te da među njima postoji "master-slave" odnos kojim je razriješena dvojba o sjedanju kao dodatnom stupnju slobode gibanja ili kao dijelu poniranja. Sprega horizontalnih gibanja s vertikalnima je zanemariva, dok obrat ne vrijedi. Sprega između gibanja u vertikalnoj i horizontalnoj ravnini ostvaruje se djelovanjem sile inercije uslijed sjedanja. Pokazane su različite mogućnosti transformacije sjedanja u jednadžbi gibanja te se predlaže uključiti sjedanje u ukupan vertikalni pomak. Na taj način nelinearnost uvjetovana tom spregom pojavljuje se samo u već nelinearnoj matrici povratne krutosti, uzrokujući njenu nesimetričnost.

Utjecaj izvedenih matrica linearne i nelinearne povratne krutosti prikazan je kroz numeričke primjere (TLP SPAR plovak, ISSC TLP) koji su većinom integrirani u vremenskoj domeni. Linearna hidrodinamika preslikana je iz frekvencijske u vremensku domenu Cumminsovim pristupom, Prilog B. Rezultirajuće nelinearne integro-diferencijalne jednadžbe riješene su prilagođenom Runge-Kutta metodom 5(4) reda prema Dormandu i Princeu, [28].

Provedena je sveobuhvatna složena stohastička dinamička analiza za kombinirano opterećnje: struja, vjetar, valovi, kakvu bi trebalo koristiti u projektiranju TLP-a.

Znanstveni doprinos istraživanja u okviru doktorskog rada sastoji se u unaprjeđenju nespregnute metode analize dinamičkog odziva pritegnute pučinske platforme postavljanjem fizikalno konzistentnog matematičkog modela nelinearne povratne krutosti za jednostavni model objekta u preliminarnoj fazi projektiranja (u odnosu na značajno složeniji model konačnih elemenata koji se primjenjuje za konačnu provjeru konstrukcije i dugotrajni

proračun). Unaprjeđenu povratnu krutost relativno je lako spregnuti s postojećim metodama za hidrodinamičku analizu konstrukcija i ugraditi u postojeće računalne kodove.

7.2. Smjernice za daljnja istraživanja

Formuliranu matricu nelinearne povratne krutosti i njen utjecaj na odziv pritegnute pučinske platforme potrebno je provjeriti korelacijskom analizom rezultata numeričkih proračuna i odziva izmjerenog na prikladno osmišljenom modelskom ispitivanju. Analizom izmjerenog statičkog odziva ocijenila bi se formulacija povratne krutosti. Modelska ispitivanja u tom slučaju ne moraju biti provedena u bazenu, zapravo ni u vodi. Potrebno je samo na prikladan način osmisliti dosljedan model hidrostatskih opruga. Analizom izmjerenog dinamičkog odziva ocijenio bi se stvaran utjecaj povratne krutosti na odziv pritegnutog tijela. Zanimljivo bi bilo iskoristiti već postojeća modelska ispitivanja pritegnutih pučinskih platformi u bazenu, pod uvjetom da je narinuta nelinearna uzbuda. Osim analize globalnog odziva važno je analizirati i sile natega u sidrenim linijama/podmorskim podizačima te zračnost između dna tijela i slobodne površine vode.

Ukoliko je nelinearnost povratne krutosti *slaba*, moguće je relativno jednostavno primijeniti metodu statističke linearizacije, [25]. Linearizacijom jednadžbi gibanja omogućeno je rješenje u frekvencijskoj domeni. Takav pristup prikladan je u preliminarnoj fazi projektiranja u okviru optimizacijskih metoda. Zanimljivo bi bilo umjeriti nespregnuti model dinamičkog proračuna sa spregnutim modelom, kako bi se točnije odredio utjecaj dinamike sidrenih linija/podmorskih podizača na inerciju i prigušenje čitavog sustava.

Nelinearna povratna krutost izvedena je na temelju razmatranja pritegnutih pučinskih platformi pravokutnog oblika. Isti pristup potrebno je primijeniti u analizi pritegnutih pučinskih platformi *trokutnog* oblika, kod kojih je izraženiji utjecaj zaošijanja i njegove sprege s ostalim stupnjevima slobode gibanja. Zanimljivo bi bilo ocijeniti utjecaj povratne krutosti na zamor sidrenih linija.

Jednadžbe gibanja proizvoljnih plutajućih tijela opisane su u vremenskoj domeni sustavom Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi 2. reda koje se u inženjerskoj praksi integriraju eksplicitnim (Runge-Kutta) metodama. Korisno bi bilo primijeniti neku implicitnu metodu integracije, primjerice [55], koja je bezuvjetno stabilna te kao takva prikladna za potpuno spregnutu analizu pritegnutih tijela. Ukoliko je potrebno izravno odrediti spektar nelinearnog odziva može se primijeniti metoda uravnoteženja harmonika, [56].

Složena kinematika pritegnute pučinske platforme, koja se u vodi giba poput obrnutog njihala, uzrok je tranzijentnom nelinearnom hidrodinamičkom problemu rubnih vrijednosti s brzinom napredovanja, koji nije moguće analizirati u inercijskom koordinatnom sustavu vezanom uz tijelo. Njihanje pritegnute platforme gibanjima s dugačkim periodom uzrok je nastanku vlastitog valnog sustava koji je u međudjelovanju sam sa sobom (zbog kinematike njihanja). Taj valni sustav spregnut je s nailaznim valnim sustavom i valovima nastalim gibanjem u lokalnim stupnjevima slobode (s relativno kratkim periodima). Navedeni hidrodinamički problem potrebno je riješiti primjenom prikladnih aproksimacija, kako bi se dinamika pritegnutih pučinskih platformi mogla ocijeniti sa što većom točnošću.

8. LITERATURA

[1] T. J. Flylling, C. M. Larsen, TLP Tendon Analysis, in: Z. Demirbilek (Ed.), Tension leg platform: a state-of-the-art review, ASCE, USA, 1989, 139-191.

[2] R. S. Mercier, W. E. Schott, C. T. Howell, E. B. Denison, R. Gopalkrishnan, A. G. C. Ekvall, Mars Tension Leg Platform - Use of Scale Model Testing in the Global Design, Proceedings of the 1997 Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1997, 11-24.

[3] API RP 2T: Planning, Designing, and Constructing Tension Leg Platforms, 3rd Edition, American Petroleum Institute, July 2010.

[4] Rules for the Classification of Tension Leg Platforms (TLP), Bureau Veritas, July 2012.

[5] C. Oran, Overall Dynamic Characteristics of Tension Leg Platforms, Proceedings of the 15th Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1983, 507-516.

[6] J. Murray, C. K. Yang, W. Yang, P. Krishnaswamy, J. Zou, An Extended Tension Leg Platform Design for Post-Katrina Gulf of Mexico, Proceedings of the 19th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE), Osaka, Japan, 2009, 120-126.

[7] W. E. Cummins, The Impulse Response Function and Ship Motions, Schiffstechnik (1962), 9(47), 101-109.

[8] T. F. Ogilvie, Second-Order Hydrodynamic Effects on Ocean Platforms, Proceedings of International workshop on ship and Platform Motions, Berkeley, USA, 1983, 205-265.

[9] K. J. Bathe: Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., USA, 1996.

[10] J. R. Paulling, E. E. Horton, Analysis of the Tension Leg Stable Platform, Proceedings of 2nd Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1970, 379-390.

[11] B. G. Burke, The Analysis of Motions of Semi-submersible Drilling Vessels in Waves, Proceedings of 1st Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1969.

[12] C. J. Garrison, Dynamic Response of Floating Bodies, Proceedings of 6th Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1974, 365-377.

[13] R. E. Taylor, E. R. Jefferys, Variability of Hydrodynamic Load Predictions for a Tension Leg Platform", Ocean Engineering (1986), 13(5), 449-490.

[14] Š. Malenica, Some Aspects of Hydrostatic Calculations in Linear Seakeeping, Proceedings of the NAV 2003: International Conference on Ship and Shipping Research, Palermo, Italy, 2003.

[15] R. Adrezin, P. Bar-Avi, H. Benaroya, Dynamic Response of Compliant Offshore Structures - Review, Journal of Aerospace Engineering (1996), 9(4), 114-131.

[16] B. G. Burke, J. T. Tighe, A Time Series Model for Dynamic Behaviour of Offshore Structures, Proceedings of 3rd Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1971.

[17] C. L. Kirk, R. K. Jain, Wave Induced Oscillations of Tension-Leg Single Buoy Mooring System, Proceedings of 8th Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1976, 711-722.

[18] B. J. Natvig, J. W. Pendered, Nonlinear Motion Response of Floating Structures to Wave Excitation, Proceedings of 9th Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1977, 525-536.

[19] J-P. F. Denise, N. J. Heaf, A Comparison Between Linear and Non-Linear Response of a Proposed Tension-Leg Production Platform, Proceedings of 11th Offshore Technology Conference (OTC), Houston, USA, 1979, 1743-1754.
[20] N. D. P. Baltrop, Floating Structures: A Guide for Design and Analysis, Vols. 1 and 2, Oilfield Publications Ltd., 1998.
[21] J. Morgan, D. Malaeb, Dynamic Analysis of Tension Leg Platforms, Proceedings of the 2nd International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium, Houston, USA, 1983, 31-37.
[22] A. K. Jain, Nonlinear Coupled Response of Offshore Tension Leg Platform to Regular Wave Forces, Ocean Engineering (1997), 24(7), 577-593.
[23] S. Chandrasekaran, A. K. Jain, Dynamic Behaviour of Square and Triangular Offshore Tension Leg Platforms under Regular Wave Loads, Ocean Engineering (2002), 29(3), 279-313.
[24] X. Zeng, X. Shen, Y. Wu, Governing Equations and Numerical Solutions of Tension Leg Platform with Finite Amplitude Motion, Applied Mathematics and Mechanics (2007), 28(1), 37-49.
[25] M. Y. Low, Frequency Domain Analysis of a Tension Leg Platform with Statistical Linearization of the Tendon Restoring Forces, Marine Structures (2009), 22(3), 480-503.
[26] L. L. Huang, H. R. Riggs, The Hydrostatic Stiffness of Flexible Floating Structures for Linear Hydroelasticity, Marine Structures (2000), 13(2), 91-106.
[27] WAMIT ver. 6.4, User's manual, Wamit, Inc., 2012.
[28] J. R. Dormand, P. J. Prince, A family of Embedded Runge-Kutta Formulae, Journal of Computational Applied Mathematics (1980), 6(1), 19-26.
[29] LS-DYNA, Theory Manual, LSTC, 2006.
[30] HYDROSTAR FOR EXPERTS, ver. 7.01, User's manual, Bureau Veritas, Paris, 2012.
[31] I. Senjanović, N. Hadžić, M. Tomić, On the Linear Stiffness of Tension Leg Platforms, In: E. Rizzuto, Guedes-Soares (Eds.), Sustainable Maritime Transportation and Exploration of Sea Resources, Taylor & Francis Group, London, 2012, 1081-1088.
[32] Principles of Naval Architecture, SNAME, 1988.
[33] I. Senjanović, M. Tomić, N. Hadžić, Formulation of Consistent Nonlinear Restoring Stiffness for Dynamic Analysis of Tension Leg Platform and its Influence on Response, Marine Structures, 30(1), 2013, 1-32.
[34] W. T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, George Allen & Unwin, London, 1981.
[35] J. E. Withee, Fully Coupled Dynamic Analysis of a Floating Wind Turbine System, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA, 2004.
[36] I. Ćatipović, Integralni model dinamičkog odziva pučinskog plutajućeg proizvodnog objekta, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2009.
[37] N. Newman, Second Order Slowly Varying Forces on Vessels in Irregular Waves, Proceedings of International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London, UK, 1974, 182-186.
[38] R. C. T. Rainey, A New Equation for Calculating Wave Loads on Offshore Structures, Journal of Fluid Mechanics (1989), 204, 295-324.
[39] I. Senjanović, Y. Fan, Nonlinear Oscillations of Quadratic Dynamical System and its Application to Mooring Analysis, International Shipbuilding Progress, 41(426), 1994, 149-177.

[40] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
[41] A. N. Wiliams, K. B. Davies, Estimation of Wave Drift Damping for a TLP, International Journal of Offshore and Polar Engineering, 4(1), 1994, 18-22.
[42] J. R. Morison, M. P. O'Brien, J. W. Johnson, S. A. Schaaf, The Force Exerted by Surface Waves on Piles, Petroleum Transactions (1950), 189, 149-154.
[43] A. D. Papanikolaou, D. A. Spanos, G. Zaraphonitis, Simulation of Large Amplitude Ship Motions and of Capsizing in High Seas, in: D. Vassalos, M. Hamamoto, A. Papanikolaou, D. Molyneux (Eds.), Contemporary Ideas on Ship Stability, Elsevier Science, Amsterdam, 2000, 279-290.
[44] C. H. Kim, Nonlinear Waves and Offshore Structures, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2008.
[45] X. B. Chen, F. Rezende, Computations of Low-frequency Wave Loading, Proceedings of 23rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies (IWWWFB), Jeju, Korea, 2008.
[46] DNV-RP-C205 Environmental Conditions and Environmental Loads, Det Norske Veritas, October 2010, Norway.
[47] C. J. Garrison, Comments on Cross-Flow Principle and Morison's Equation, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering (1985), 111(6), 1075-1078.
[48] A. Kareem, Nonlinear Dynamic Analysis of Compliant Offshore Platforms Subjected to Fluctuating Wind, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics (1983), 14(1-3), 345-356.
[49] Norsok Standard N-003, Actions and Action Effects, Edition 2, September 2007.
[50] O. J. Andersen, J. Løvseth, The Maritime Turbulent Wind Field. Measurements and Models, Final Report for Task 4 of the Statoil JIP, ALLFORSK, Norwegian University of Science and Technology, 1992.
[51] M. H. Kim, A. Tahar, Y. B. Kim, Variability of TLP Motion Analysis Against Various Design Methodologies/Parameters, Proceedings of the 11th International Offshore and Polar Engineering Conference, Stavanger, Norway, 2001, Vol. III, 467-473.
[52] A. K. Jain, Offshore Tension Leg Platform Behaviour Under Wave and Wind Forces, Proceedings of the 6th International Offshore and Polar Engineering Conference, Los Angeles, USA, Vol. I, 220-227.
[53] Š. Malenica, J. M. Orozco, Time Domain Hydrodynamic Simulations Using the Frequency Domain Data, 4th International Congress of Croatian Society of Mechanics, Bizovac, Croatia, 2003.
[54] P. D. Welch, The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics (1967), 15(2), 70-73.
[55] P. Linz, A Method for Solving Nonlinear Volterra Integral Equations of the Second Kind, Mathematics of Computation (1969), 23(107), 595-599.
[56] I. Senjanović, Y. Fan, Some Advances of the Harmonic Balance Method, Journal of Sound and Vibration (1996), 191(2), 295-307.
[57] H. B. Bingham, Simulating Ship Motions in the Time Domain, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1994.
[58] T. Ogilvie (1964), Recent Progress toward the Understanding and Prediction of Ship Motions, Proceedings of the 5th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, Washington, USA, 3-128, 1964.
[59] O. M. Faltinsen, A. N. Timokha, Sloshing, Cambridge University Press, New York, 2009.

[60] C. C. Mei, M. Stiassnie, D. K-P. Yue, Theory and Applications of Ocean Surface Waves, Part 1: Linear Aspects, World Scientific Publishing Co. Singapore, 2005.
[61] L. N. G. Filon (1928), On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals, Proc. Roy. Soc. Edinburgh (1929), 49, 38-47.
[62] C. Lubich, Runge-Kutta Theory for Volterra Integrodifferential Equations, Numerische Mathematik (1982), 40, 119-135.
[63] F. C. Hoppensteadt, Z. Jackiewicz, B. Zubik-Kowal, Numerical Solution of Volterra Integral and Integro-Differential Equations with Rapidly Vanishing Convolution Kernels, BIT Numerical Mathematics (2007), 47, 325-350.

ŽIVOTOPIS

Marko Tomić rođen je 10. studenog 1979. godine u Splitu, gdje je završio osnovnu školu i klasičnu gimnaziju. Studij brodogradnje na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu upisao je 1999. godine. Nakon odslušana četiri semestra 2001. godine prelazi na Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, gdje diplomira na studiju brodogradnje 2006. godine. Od 1. srpnja 2007. godine zaposlen je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku, u zvanju znanstvenog novaka na katedri za konstrukciju plovnih objekata. U akademskoj godini 2007./2008. upisao je poslijediplomski doktorski studij Brodogradnja i pomorska tehnika. Sudjelovao je u istraživačkom radu pod vodstvom akademika Ive Senjanovića u okviru projekta "Opterećenje i odziv brodskih konstrukcija", financiranog od MZOŠ Republike Hrvatske, te EU FP7 projekta "TULCS - Tools for Ultra Large Container Ships".

Autor je većeg broja znanstvenih radova s područja hidroelastičnosti brodskih konstrukcija i dinamike pritegnutih pučinskih konstrukcija

Oženjen je i otac dvoje djece.

BIOGRAPHY

Marko Tomić was born on November 10th 1979 in Split, Croatia, where he finished primary and secondary school. He enrolled in 1999 in the Naval Architecture course at the University of Split, Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture. In 2001 he continues education at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and naval Architecture, graduating in Naval Architecture in 2006. Since July 1st 2007 he is employed as a research assistant at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, Chair for Ship Structure Design. In 2007 he enrolled in the PhD programme on naval architecture and offshore engineering at the University of Zagreb.

Marko Tomić is involved in the research work under the project "Load and Response of Ship Structures", financed by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia, and the EU FP7 project "TULCS - Tools for Ultra Large Container Ships". He is an author of several scientific papers in the field of container ship hydroelasticity and the dynamics of tension leg platforms.

He is married and a proud father of two children.

PRILOG A - Utjecaj elastičnog istezanja pripona na krutost u smjeru zalijetanja

U slučaju proizvoljnog zalijetanja (dodatna) sila ΔT_n^e uzrokovat će produljenje pripone:

$$\Delta L = \frac{\Delta T_n^e}{\frac{EA_n}{L}}, \tag{A 1}$$

gdje $\frac{EA_n}{L}$ predstavlja aksijalnu krutost pripone.

Iz ravnoteže sila u vertikalnom smjeru

$$U + \Delta U^e = Q + \sum_{n=1}^{N} (T_n + \Delta T_n^e) \cos\alpha \tag{A 2}$$

slijedi

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta T_n^e = \sum_{n=1}^{N} T_n \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\Delta U^e}{\cos\alpha}, \tag{A 3}$$

gdje vrijedi:

$$\Delta U^e = \rho g A_{WL} \delta_1^{se}, \tag{A 4}$$

$$\delta_1^{se} = L - (L + \Delta L)\cos\alpha . \tag{A 5}$$

Koristeći izraze (A 1), (A 2), (A 3), (A 4) i (A 5) moguće je izraziti deformaciju (relativno produljenje) pripone:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_0 \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}, \tag{A 6}$$

gdje je

$$\varepsilon_0 = \frac{\sum_{n=1}^{N} T_n + \rho g A_{WL} L}{EA + \rho g A_{WL} L}. \tag{A 7}$$

Produljenje pripone $\Delta L = L\varepsilon$ ima uzdužnu komponentu $\xi = L\varepsilon \sin\alpha$, koju je potrebno dodati zalijetanju δ_x:

$$\delta_x^e = \delta_x + L\varepsilon \sin\alpha . \tag{A 8}$$

Uslijed pomaka u smjeru zalijetanja smanjuje se pripadna krutost,

$$\tilde{K}_{11}^{e} = \frac{\tilde{K}_{11}}{1 + \dfrac{L\varepsilon \sin\alpha}{\delta_x}}. \qquad \text{(A 9)}$$

S obzirom da vrijedi $\sin\alpha = \dfrac{\delta_x}{L}$ vrijedi i

$$\tilde{K}_{11}^{e} = \frac{\tilde{K}_{11}}{1+\varepsilon}. \qquad \text{(A 10)}$$

Vrijednost ε_0, definirana jednadžbom (A 7), relativno je mala za uobičajene pritegnute pučinske konstrukcije (reda veličine 0.03) te se može zanemariti u jednadžbi (A 10).

Jednadžba (A 6) izvedena je samo za slučaj zalijetanja. U općem slučaju proizvoljnog pomaka pripone uslijed svih horizontalnih komponenti gibanja (zalijetanja, zanošenja i zaošijanja) može se pokazati da je ukupna deformacija

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\delta^S}{L_Z}. \qquad \text{(A 11)}$$

PRILOG B - Preslikavanje (linearnih) hidrodinamičkih sila iz frekvencijske u vremensku domenu (Cumminsov pristup)

Prikazana je metoda proračuna jednadžbe gibanja u vremenskoj domeni, gdje su hidrodinamičke sile preslikane iz frekvencijske domene (gdje su predračunate) metodom konvolucijskog integrala (tzv. Cumminsov pristup). Preslikavanjem (linearne) hidrodinamike u vremensku domenu moguće je na relativno jednostavan način uključiti razne nelinearnosti u matematički model. U području analize dinamike objekata morske tehnike te nelinearnosti najčešće su posljedica nelinearne reakcije sidrenog sustava. Analiza u vremenskoj domeni omogućava i proučavanje prolaznog odziva, primjerice podrhtavanje brodskog trupa uslijed udara o slobodnu površinu.

U različitim problemima dinamike objekata morske tehnike potrebno je odrediti *prolazni odziv* (eng. transient response) tijela na odgovarajuću uzbudu, a vrlo često, ukoliko to zahtijeva fizika problema, potrebno je u model (na konzistentan način) uključiti i sve značajne *nelinearnosti*. Neki primjeri gdje je nužan proračun *prolaznog* odziva su:

i. podrhtavanje (elastičnog) brodskog trupa (eng. whipping) uzrokovano udaranjem tijela o valove (eng. slamming),
ii. podrhtavanje brodskog trupa uzrokovano impulsnim opterećenjem nastalim eksplozijom podvodne mine,
iii. odziv usidrenog tijela (npr. u marini, luci,...) na izoliran valni niz nastao prolaskom drugog tijela u neposrednoj blizini,
iv. podrhtavanje fiksnog objekta morske tehnike uslijed potresnog opterećenja u seizmički aktivnim dijelovima podmorja,
v. podrhtavanje vertikalnih cilindara pritegnute pučinske platforme (eng. ringing) uslijed udara valova.

Neki primjeri *nelinearnosti* koje je potrebno uključiti u jednadžbu gibanja, kako bi se dobio vjerodostojan dinamički odziv su:

i. sile i momenti valova 2. reda (slabo nelinearni hidrodinamički problemi)
ii. nelinearne reakcije sidrenog sustava,
iii. viskozno prigušenje (posebno značajno kod ljuljanja broda),
iv. sile i momenti uzrokovani jaružanjem morskog dna.

U slučaju potrebe za analizom prolaznog odziva jednadžba gibanja može biti (i vrlo često i jest) linearna. Analiza u vremenskoj domeni potrebna je s obzirom da je u frekvencijskoj domeni moguće izračunati samo ustaljeni odziv (nema tranzijenata).

Ukoliko je potrebno uključiti različite nelinearnosti u jednadžbu gibanja, tada je analiza u vremenskoj domeni nužnost, s obzirom da različite metode *linearizacije* (u svrhu analize u frekvencijskoj domeni) vrlo često ne obuhvaćaju sve fenomene.

Jednadžba gibanja plutajućeg tijela u vremenskoj domeni

Odziv plutajućeg tijela na valnu uzbudu u pravilu se analizira u frekvencijskoj domeni uz pretpostavku potencijalne teorije (vrlo često samo 1. reda), malih valnih strmina i odziva proporcionalnog amplitudi vala (linearni odziv). Hidrodinamička analiza utemeljena na strujanju fluida s potencijalom i numeričkoj metodi rubnih elemenata teorijski je dobro istražena (i eksperimentalno potvrđena), a napisano je nekoliko vrlo točnih i računalno efikasnih (fortranskih) programskih kodova (WAMIT, HYDROSTAR). Važna značajka rješenja jednadžbi gibanja u frekvencijskoj domeni je da se za svaku pojedinu frekvenciju njihanja odziv određuje jednostavnim rješenjem sustava spregnutih linearnih jednadžbi s *konstantnim* koeficijentima. Nažalost, u slučaju potrebe za analizom prolaznog odziva ili uključivanjem nelinearnosti u jednadžbu gibanja, analiza u vremenskoj domeni postaje nužnost. Problemu hidrodinamike u vremenskoj domeni (i rješenju jednadžbi gibanja) moguće je pristupiti na 2 načina:

i. *izravni pristup*, gdje se hidrodinamički problem rubnih vrijednosti rješava numeričkim rješenjem integralnih jednadžbi u vremenskoj domeni (računalno skupo [57]), a zatim se jednadžbe gibanja integriraju (također u vremenskoj domeni). Prednost ovog pristupa je mogućnost proračuna *proizvoljno nelinearne* hidrodinamike.

ii. *neizravni (posredan) pristup*, gdje se hidrodinamički problem rubnih vrijednosti rješava najprije u frekvencijskoj domeni, a zatim se (linearno) hidrodinamičko rješenje (dodana masa i radijacijsko prigušenje) *preslikava* u vremensku domenu (upotrebom konvolucijskog integrala). Ovaj pristup je računalno efikasniji, ali značajan nedostatak predstavlja činjenica da se u vremensku domenu preslikava smo linearni dio hidrodinamičkog rješenja. Taj nedostatak moguće je donekle ukloniti činjenicom da je kod brodova dominantan nelinearan učinak hidrostatske i Froude-Krilovljeve sile, koju je relativno jednostavno uključiti u rezultirajuću jednadžbu gibanja. Kao i u

izravnom pristupu jednadžba gibanja rješava se u vremenskoj domeni. Posrednu metodu odziva razvili su Cummins [7] i Ogilvie [58].

Ograničimo se sada na neizravan (tzv. Cumminsov) pristup rješenju hidrodinamičkog problema u vremenskom području. Linearno rješenje u frekvencijskoj domeni *preslikava* se upotrebom *konvolucijskih* integrala, kojima je opisana frekvencijska ovisnost dodane mase i radijacijskog prigušenja u strujanjima sa slobodnom površinom, iz frekvencijskog područja u vremensko područje. Rezultat preslikavanja je sustav običnih spregnutih integro-diferencijalnih jednadžbi 2. reda (taj sustav često se naziva i Cumminsovim sustavom):

$$\sum_{k=1}^{6}\left[\left(M_{jk}+A_{jk}^{\infty}\right)\ddot{\eta}_k(t)+B_{jk}^{\infty}\dot{\eta}_k(t)+\int_0^t R_{jk}(\tau)\dot{\eta}_k(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau+K_{jk}\,\eta_k(t)\right]= \\ =F_j^{L}(t)+F_j^{NL}(t;\eta_k,\dot{\eta}_k),\ j=1,2,...,6. \tag{B 1}$$

M_{jk} predstavlja generaliziranu matricu masa. A_{jk}^{∞} i B_{jk}^{∞} su dodana masa i radijacijsko prigušenje za $\omega=\infty$. K_{jk} je matrica krutosti (osim hidrostatske krutosti tom matricom vrlo često se opisuje i krutost sidrenog sustava). Integral u sustavu integro-diferencijalnih jednadžbi konvolucijskog je tipa i njime se matematički modelira utjecaj prethodnog gibanja na raspodjelu tlaka u sadašnjem trenutku, tzv. "memorijski učinci". $R_{jk}(t)$ naziva se *memorijskom* funkcijom, *retardacijskom* funkcijom ili funkcijom *impulsnog odziva* (eng. impulse response function).

Memorijsku funkciju moguće je odrediti na sljedeći način:

$$R_{jk}(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\left(A_{jk}(\omega)-A_{jk}(\infty)\right)\sin\omega\,t\,\mathrm{d}\,\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\left(B_{jk}(\omega)-B_{jk}(\infty)\right)\cos\omega\,t\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{B 2}$$

Promatrajući izraz (B 2) očigledan problem predstavljaju nepravi integrali kojima je određena memorijska funkcija. Da bi odredili $R_{jk}(t)$ potrebno je izračunati A_{jk} ili B_{jk} za čitav raspon frekvencija ($0 \le \omega < \infty$). Metodama numeričke hidrodinamike (vrlo često metode raspodjele *singulariteta*) jednostavno je odrediti A_{jk} i B_{jk} za $\omega=\infty$. Određivanje A_{jk} i B_{jk} za područje valnih frekvencija (koje uobičajeno susrećemo u proračunima pomorstvenosti) također je relativno jednostavno. Problem predstavljaju jako kratki valovi ($\omega \to \infty$). Nažalost, pokazat će se da taj dio frekvencijskog područja značajno utječe na točnost proračuna (te će biti potrebno A_{jk} i B_{jk} na neki način modelirati kada $\omega \to \infty$).

Prema jednadžbi (B 2) $R_{jk}(t)$ moguće je odrediti upotrebom dodane mase A_{jk} ili radijacijskog prigušenja B_{jk}.

Točnost izračunate memorijske funkcije moguće je provjeriti prema [58]. Razlike između izračunatih i izvornih vrijednosti (u smislu transformacija naprijed/unazad) daju mjeru točnosti izračuna. Uz pretpostavku $B_{ij}^{\infty} = 0$ vrijedi:

$$A_{ij}(\omega) = A_{ij}^{\infty} - \frac{1}{\omega}\int_0^{\infty} R_{ij}(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$B_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{ij}(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(B 3)}$$

Prema Faltinsenu [59], ukoliko se za proračun memorijske funkcije koristi A_{jk}, koeficijent prigušenja B_{jk} (dobiven transformacijom unazad) ima grešku koja je najizraženija u području niskih frekvencija. Nefizikalna, negativna, vrijednost pojavljuje se oko $\omega = 0$. To je osnovni razlog što se za proračun memorijske funkcije u pravilu koriste koeficijenti radijacijskog prigušenja B_{jk}.

S obzirom na točnost postupka izračuna memorijske funkcije $R_{jk}(t)$ Faltinsen [59] zaključuje sljedeće:

iii. točnost izračuna hidrodinamičkih koeficijenata A_{jk} i B_{jk} nije značajan faktor (u smislu da većina hidrodinamičkih kodova gotovo podjednako točno računa te koeficijente),

iv. pri numeričkom izračunu nije potrebno koristiti više od 25 vrijednosti koeficijenata (kod diskretizacije integrala (B 2)),

v. odabir frekvencije ω^* na kojoj će se zaustaviti izračun nepravog integrala (B 2) (i na kojoj će se rješenje spojiti s nekakvom ekstrapolacijom) značajno utječe na točnost.

Izvod Cumminsove jednadžbe

Izvod Cumminsove jednadžbe prikazan je prema [60] i zbog potpunosti prikaza bit će izveden u cijelosti. Neka je u trenutku $t = \tau$ (τ nadalje u radu označava vremenski trenutak djelovanja nekog impulsa) na tijelo narinut generalizirani pomak η. Pretpostavljen je idealan fluid konstantne gustoće te je zanemarena površinska napetost. Ishodište pravokutnog koordinatnog sustava nalazi se na linearizirano slobodnoj površini ($z = 0$). Os z koordinatnog sustava usmjerena je prema gore.

Narinuti *impulsni* pomak δ uzrok je (bezvrtložnom) strujanju tekućine s potencijalom brzine strujanja Φ^{δ} koji zadovoljava navedeni problem rubnih vrijednosti

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \nabla^2\Phi^\delta = 0,\ x \in \Omega \\
&\text{(ii)}\ \frac{\partial^2\Phi^\delta}{\partial t^2} + \frac{\partial\Phi^\delta}{\partial z} = 0,\ x \in \partial\Omega_F \\
&\text{(iii)}\ \frac{\partial\Phi^\delta}{\partial n} = 0,\ z = -h \\
&\text{(iv)}\ \frac{\partial\Phi^\delta}{\partial n} = V_\eta n_\eta\, \delta(t-\tau),\ x \in \partial\Omega_B \\
&\text{(v)}\ \left\|\nabla\Phi^\delta\right\| \to 0 \ \text{kad}\ \|x\| \to \infty,\ t < \infty \\
&\text{(vi)}\ \Phi^\delta = 0,\ t < \tau,\ \forall x \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{B 4}
$$

Jednadžbe u iskazu (hidrodinamičkog) problema rubnih vrijednosti u (B 4) predstavljaju:

i. Laplaceova jednadžba u fluidu,
ii. linearizirani kinematičko-dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini,
iii. kinematički rubni uvjeti na dnu (u slučaju ograničene dubine),
iv. kinematički uvjet na tijelu,
v. uvjet ograničenosti brzine kada $x \to \infty$,
vi. uvjet uzročnosti (prije $t = \tau$ nema poremećaja).

Navedeni sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi predstavlja *linearizirani* hidrodinamički problem rubnih vrijednosti. Pretpostavljamo *linearnost* tijela koje se odziva te impulse razmatramo po komponentama gibanja. Cummins [7] rastavlja Φ^δ na dva dijela:

i. *impulsni* dio, koji ne ovisi o prethodnoj kinematici tijela,
ii. *memorijski* (radijacijski) dio, koji ovisi o prethodnoj kinematici tijela,

$$
\Phi^\delta(x,t) = V_\eta(\tau)\left[I_\eta(x)\delta(t-\tau) + M_\eta(x,t-\tau)\,H(t-\tau)\right]. \tag{B 5}
$$

$I_\eta(x)$ je impulsni dio potencijala, $M_\eta(x,t-\tau)$ je memorijski dio potencijala, $\delta(t)$ je Diracova delta distribucija, a $H(t)$ je Heavisideova funkcija jediničnog skoka.

Promotrimo kako pretpostavljeni oblik potencijala zadovoljava rubni uvjet na tijelu

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi^\delta}{\partial n} = V_\eta n_\eta\, \delta(t-\tau),\ x \in \partial\Omega_B, \\
&\text{(i)}\ \frac{\partial I_\eta}{\partial n} = n_\eta, \\
&\text{(ii)}\ \frac{\partial M_\eta}{\partial n} = 0.
\end{aligned}
\tag{B 6}
$$

Jednadžbe (B 6) naslućuju *različit karakter* tih dvaju komponentnih problema rubnih vrijednosti (jednadžba (B 6 i) ukazuje na radijacijski problem, a jednadžba (B 6 ii) naizgled na difrakcijski problem).

Promotrimo nadalje linearizirani kinematičko-dinamički rubni uvjet na slobodnoj površini:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi^\delta}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial z} = 0,\ z = 0 \\
&\frac{\partial \Phi^\delta}{\partial z} = \left(\frac{\partial I_\eta}{\partial z}\delta(t-\tau) + \frac{\partial M_\eta}{\partial z} H(t-\tau) \right) V_\eta \\
&\frac{\partial^2 \Phi^\delta}{\partial t^2} = \left(I_\eta \ddot{\delta}(t-\tau) + M_\eta \dot{\delta}(t-\tau) + \frac{\partial^2 M_\eta}{\partial t^2} H(t-\tau) + \frac{\partial M_\eta}{\partial t}\delta(t-\tau) \right) V_\eta .
\end{aligned} \tag{B 7}$$

C. C. Mei et al. [60] koriste činjenicu da su $H, \delta, \dot{\delta}$ i $\ddot{\delta}$ različitog reda veličine (zato su koeficijenti uz njih izjednačeni s 0),

$$V_\eta \left[I_\eta \ddot{\delta} + M_\eta \dot{\delta} + \left(\frac{\partial M_\eta}{\partial t} + g\frac{\partial I_\eta}{\partial z} \right)\delta + \left(\frac{\partial^2 M_\eta}{\partial t^2} + g\frac{\partial M_\eta}{\partial z} \right) H \right] = 0. \tag{B 8}$$

Koristeći izraze (B 4), (B 6) i (B 8) problem rubnih vrijednosti moguće je *razdvojiti* na dva odvojena (iako *spregnuta*) problema rubnih vrijednosti (na to je ukazivao i rubni uvjet na tijelu):

$$\begin{aligned}
&\text{(a.1)}\ \nabla^2 I_\eta = 0,\ x \in \Omega && \text{(b.1)}\ \nabla^2 M_\eta = 0,\ x \in \Omega \\
&\text{(a.2)}\ I_\eta = 0,\ z = 0 && \text{(b.2)}\ M_\eta = 0,\ z = 0,\ t = \tau \\
&\text{(a.3)}\ \frac{\partial I_\eta}{\partial n} = 0,\ z = -h && \text{(b.3)}\ \frac{\partial M_\eta}{\partial t} + g\frac{\partial I_\eta}{\partial z} = 0,\ z = 0,\ t = \tau \\
&\text{(a.4)}\ \frac{\partial I_\eta}{\partial n} = n_\eta,\ x \in \partial\Omega_B && \text{(b.4)}\ \frac{\partial^2 M_\eta}{\partial t^2} + g\frac{\partial M_\eta}{\partial z} = 0,\ z = 0,\ t > \tau \\
&\text{(a.5)}\ \left\| I_\eta \right\| \to 0 \text{ kad } \|x\| \to \infty && \text{(b.5)}\ \frac{\partial M_\eta}{\partial n} = 0,\ z = -h \\
& && \text{(b.6)}\ \frac{\partial M_\eta}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega_B
\end{aligned} \tag{B 9}$$

Promotrimo ta dva *komponentna* problema rubnih vrijednosti. Sustav jednadžbi s indeksom (a) predstavlja problem rubnih vrijednosti za *impulsni* (nememorijski) potencijal *I*, dok sustav jednadžbi s indeksom (b) predstavlja problem rubnih vrijednosti za *memorijski* potencijal *M*. U problemu impulsnog potencijala *I* prema (a. 2) nema valova na slobodnoj površini, a s obzirom na (a. 4) zaključujemo da to mora biti *radijacijski* problem za $\omega \to \infty$.

Promotrimo sada problem za memorijski potencijal *M*. Uvjet (b. 4) uzrok je stvaranju valova na slobodnoj površini, za $t > \tau$. Slučaj $t = \tau$, tj. trajanje impulsa, zahtijeva dodatnu pažnju:

$$\begin{aligned} & t = \tau, \ z = 0 \\ \text{(i)} \quad & M_\eta = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial M_\eta}{\partial t} = -g \frac{\partial I_\eta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{B 10}$$

Iz izraza (B 10) zaključujemo da je to *Cauchy-Poissonov* problem u prisutnosti *fiksnog* tijela.

Cummins [7] pretpostavlja sustav koji se odziva linearno te razmatra impulse po komponentama gibanja. Rezultat takva pristupa je problem rubnih vrijednosti za koji možemo reći da se razdvaja u dva dijela, jedan koji vrijedi tijekom trajanja impulsa i drugi koji vrijedi nakon djelovanja impulsa. *Integrirajući* tlak izražen tim potencijalima (po oplakanoj površini tijela) dobit ćemo Cumminsovu jednadžbu.

Pretpostavimo da je potencijal u proizvoljnom trenutku *t* dobiven zbrajanjem niza impulsnih potencijala:

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= \int_0^\infty \Phi^\delta(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty V_\eta(\tau)\left[I_\eta(x)\delta(t-\tau) + M_\eta(x,t-\tau)\,H(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\ &= V_\eta(t)\,I_\eta(x) + \int_0^\infty M_\eta(x,t-\tau)V_\eta(\tau)\,H(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \Phi(x,t) &= V_\eta(t)\,I_\eta(x) + \int_0^t M_\eta(x,t-\tau)V_\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{B 11}$$

Hidrodinamičku silu dobit ćemo integracijom (lineariziranog) dinamičkog tlaka $p = -\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \dot{V}_\eta\,I_\eta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t M_\eta(x,t-\tau)V_\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \dot{V}_\eta\,I_\eta + M_\eta(x,0)V_\eta(t) - M_\eta(x,t)V_\eta(0)\cdot 0 + \int_0^t \dot{M}_\eta(x,t-\tau)V_\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$F_j(t) = -\rho \int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial \Phi}{\partial t} n_j \, \mathrm{d}s$$

$$= -\rho \dot{V}_\eta \int_{\partial\Omega_B} I_\eta(x) n_j \, \mathrm{d}s - \rho \int_0^t \int_{\partial\Omega_B} \dot{M}_\eta(x, t-\tau) V_\eta(\tau) n_j \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\tau .$$

Definirajmo:

$$V_\eta := \dot{X}_\eta$$

$$\dot{V}_\eta := \ddot{X}_\eta$$

$$A_{j\eta}^{\infty} := -\rho \int_{\partial\Omega_B} I_\eta(x) n_j \, \mathrm{d}s \tag{B 12}$$

(tu se vidi smisao definiranja $A^{\infty} \rightarrow$ slijedi iz radijacijskog problema za određivanje I_η kada $\omega \rightarrow \infty$)

$$R_{j\eta}(t-\tau) := -\rho \int_{\partial\Omega_B} \dot{M}_\eta(x, t-\tau) n_j \, \mathrm{d}s . \tag{B 13}$$

Uvođenjem definicija u izraz za hidrodinamičku silu dobivamo:

$$F_j(t) = A_{j\eta}^{\infty} \ddot{X}_\eta + \int_0^t R_{j\eta}(t-\tau) \dot{X}_\eta(\tau) \, \mathrm{d}\tau , \quad (j, \eta = 1, 2, ..., 6) \tag{B 14}$$

Važno je primijetiti da je za određivanje $A_{j\eta}^{\infty}$ i $R_{j\eta}(t-\tau)$ nužno prethodno (na bilo koji mogući način) odrediti potencijale I_η i M_η. Nažalost, izravno određivanje tih potencijala relativno je složeno i računalno "skupo". Dosta efikasnije i jednostavnije bilo bi koristiti numeričke metode za određivanje potencijala u frekvencijskoj domeni (na temelju provjerenih hidrodinamičkih kodova), ukoliko bi bilo moguće uspostaviti neku vezu između $A_{j\eta}^{\infty}$ i $R_{j\eta}$ i tih "frekvencijskih" potencijala. Uskoro ćemo vidjeti da ta veza zaista i postoji [58].

Odnos između frekvencijske i vremenske domene

U ovom poglavlju nužno je *uspostaviti vezu* između dodane mase za $\omega = \infty$, $A_{j\eta}^{\infty}$, i memorijske funkcije $R_{j\eta}$, za čije je određivanje (prema jednadžbama (B 12) i (B 13) potrebno odrediti potencijale I_η i M_η (koji su promjenljivi u vremenu!), i potencijala koji su određeni proračunom u frekvencijskoj domeni (njihova vremenska promjena je eksplicitno zadana u obliku $\mathrm{e}^{i\omega t}$ ili $\mathrm{e}^{-i\omega t}$). Izvod je prikazan prema Ogilvie [58] (implicitno se pretpostavlja linearnost odziva tijela).

Pretpostavimo harmonijsko njihanje plutajućeg tijela s jediničnom amplitudom u nekom smjeru *j*:

$$x_j = 1 \cdot \cos \omega t \,.$$

Pretpostavljeno gibanje uvrstimo u Cumminsovu jednadžbu

$$-\omega^2 (M_{ij} + A_{ij}^{\infty}) \cos \omega t - \omega \int_0^t R_{ij}(t-\tau) \sin \omega\tau \, \mathrm{d}\tau + K_{ij} \cos \omega\tau = F_i(t)$$

Supstitucijom $t - \tau = u$, $\mathrm{d}\,\tau = -\,\mathrm{d}\,u$ vrijedi:

$$\left[K_{ij} - \omega^2 (M_{ij} + A_{ij}^{\infty})\right] \cos \omega t - \omega \left(\int_0^t R_{ij}(\tau) \cos \omega\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \sin \omega\tau +$$
$$+ \omega \left(\int_0^t R_{ij}(\tau) \sin \omega\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \cos \omega\tau = 0.$$

U gornjem izrazu moguće je gornju granicu integrala proširiti do + ∞ (jednostavno slijedi iz svojstva memorijske funkcije). To proširenje nam je potrebno da bi koristili Fourierovu transformaciju.

$$-\omega^2 M_{ij} \cos \omega t - \omega^2 \left(A_{ij}^{\infty} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} R_{ij}(\tau) \sin \omega\tau \, \mathrm{d}\tau \right) \cos \omega\tau -$$
$$- \omega \left(\int_0^{\infty} R_{ij}(\tau) \cos \omega\tau \, \mathrm{d}\tau \right) \sin \omega\tau + K_{ij} \cos \omega\tau = F_i(t). \qquad \text{(B 15)}$$

Ogilvie je prethodnu jednadžbu usporedio s jednadžbom gibanja koja vrijedi u frekvencijskoj domeni za harmonijsku uzbudu na desnoj strani:

$$\left(M_{ij} + A_{ij}(\omega)\right) \ddot{x}_j + B_{ij}(\omega) \dot{X}_j + K_{ij} X_j = F_i(t)$$
$$X_j = 1 - \cos \omega t$$

$$-\omega^2 M_{ij} \cos \omega t - \omega^2 A_{ij}(\omega) \cos \omega\tau - \omega B_{ij}(\omega) \sin \omega\tau + K_{ij} \cos \omega\tau = F_i(t) \,. \qquad \text{(B 16)}$$

Usporedbom jednadžbi (B 15) i (B 16) zaključujemo:

$$A_{ij}(\omega) = A_{ij}^{\infty} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} R_{ij}(\tau) \sin \omega\tau \, \mathrm{d}\tau$$
$$B_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{ij}(\tau) \cos \omega\tau \, \mathrm{d}\tau \qquad \text{(B 17)}$$
$$K_{ij} = K_{ij} \,.$$

Vrlo važno je ustanoviti da je veza između $A_{ij}(\omega)$ i $B_{ij}(\omega)$, i A_{ij}^{∞} i $R_{ij}(t)$ ostvarena u *Fourierovoj transformaciji*. Tako je $B_{ij}(\omega)$ Fourierova (kosinusna) transformacija memorijske funkcije $R_{ij}(t)$. Inverznom Fourierovom transformacijom dobivamo:

$$R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B_{ij}(\omega)\cos\omega t \,\mathrm{d}\omega \ . \qquad \text{(B 18)}$$

Jednadžba (B 18) temelj je numeričkom proračunu odziva korištenjem Cumminsove jednadžbe.

Filonova integracija

Proračun memorijske funkcije provodi se upotrebom izraza (B 18). Prednost ovog pristupa određivanju memorijske funkcije je mogućnost *predračunanja* radijacijskog prigušenja $B_{ij}(\omega)$ nekim od hidrodinamičkih kodova uz naknadnu, relativno jednostavnu, numeričku integraciju. Kažemo relativno jednostavna integracija, jer treba primijetiti da je riječ o nepravom integralu, a treba spoznati i činjenicu da postoji ograničenje na većinu hidrodinamičkih kodova (temeljenih na integralnim jednadžbama i kolokacijskoj panelnoj metodi) s obzirom na mogućnost računanja $B_{ij}(\omega)$ kada $\omega \to \infty$ (problem veličine mreže panela). Nadalje, ako dobro promotrimo podintegralnu funkciju vidimo da za $\omega \gg$ ona jako oscilira, te se javlja problem pri upotrebi klasičnih metoda numeričke integracije. Filon [61] predlaže da se, umjesto integracije na način da se aproksimira čitava podintegralna funkcija, aproksimira samo $B_{ij}(\omega)$ ($\cos(\omega t)$ izaziva probleme za $\omega \gg$). $B_{ij}(\omega)$ je moguće aproksimirati vrlo točno polinomima (i to linearnim). S obzirom da je moguće $\omega^n \cos(\omega t)$ *egzaktno* prointegrirati, te to prosumirati (prvo se aproksimira $B_{ij}(\omega)$ po dijelovima linearnim polinomom, a zatim se na pojedinim poddomenama egzaktno integrira) po čitavoj domeni integracije, numerička greška bit će, prema [61], vjerojatno manja nego primjenom neke uobičajene numeričke metode (koja u pravilu čitav $B_{ij}(\omega)\cos\omega t$ aproksimira s jednim polinomom, relativno niskog stupnja). Ono što je poželjno u smislu numeričke točnosti je odrediti $B_{ij}(\omega)$ za što je moguće višu frekvenciju, [59].

$$R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\tilde{\omega}} B_{ij}(\omega)\cos\omega t \,\mathrm{d}\omega \ . \qquad \text{(B 19)}$$

Greška zbog ograničavanja gornje granice integracije je:

$$\delta R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi}\int_{\tilde{\omega}}^{\infty} B_{ij}(\omega)\cos\omega t \,\mathrm{d}\omega \ . \qquad \text{(B 20)}$$

Vrlo često se za $\omega \gg$ uvode određene *ekstrapolacije* krivulje $B_{ij}(\omega)$, međutim analiza točnosti tih modela neće biti ovdje posebno provedena.

Uvedemo li aproksimaciju funkcije $B_{ij}(\omega)$ između točaka ω_n i ω_{n-1}, i to aproksimaciju pravcem, dobit ćemo:

$$R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_n \left[\int_{\omega_{n-1}}^{\omega_n} \frac{B_{ij}(\omega_n) - B_{ij}(\omega_{n-1})}{\omega_n - \omega_{n-1}} (\omega - \omega_{n-1}) + B_{ij}(\omega_{n-1}) \right] \cos \omega t \, \mathrm{d}\omega .$$

$$\begin{aligned} R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi} \Bigg\{ & \frac{1}{t^2} \sum_n \frac{B_{ij}^n - B_{ij}^{n-1}}{\omega_n - \omega_{n-1}} \left[\cos(\omega_n t) - \cos(\omega_{n-1} t) \right] + \\ & + \frac{1}{t} \sum_n \left[B_{ij}^n \sin(\omega_n t) - B_{ij}^{n-1} \sin(\omega_{n-1} t) \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{B 21}$$

Isti numerički postupak koristi se i kod ostalih transformacija, npr. za određivanje A_{ij}^{∞} (premda je tu vrijednost relativno lako odrediti izravno hidrodinamičkim proračunom).

Numeričko rješenje jednadžbe gibanja plutajućeg tijela u vremenskoj domeni

Sustav običnih nelinearnih Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi, kojim je u vremenskoj domeni opisano gibanje plutajućeg tijela, riješit će se numerički metodom konstruiranom na temelju Runge-Kutta metoda za rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, Lubich [62], Hoppensteadt et. al. [63]. Naime, prirodan pristup numeričkom rješenju integro-diferencijalnih jednadžbi bila bi neka od mnogobrojnih metoda za rješenje običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) uz neku prikladnu diskretizaciju (numeričku integraciju) integrala koji se javljaju u jednadžbi.

Generaliziranu Runge-Kutta metodu za numeričko rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi oblika

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

moguće je zapisati na sljedeći način

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_k + c_i h, \mathrm{X}_i^k)$$

$$\mathrm{X}_i^k = x_k + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_k + c_j h, \mathrm{X}_j^k).$$

Odgovarajuća metoda određena je odabirom koeficijenata a_{ij}, b_i te c_i ($i, j = 1, 2, ..., s$), koje je prikladno prikazati Butcherovom tablicom:

c	A
	b^T

Koeficijenti metode slobodni su parametri najčešće odabrani tako da zadovoljavaju Taylorov razvoj u red do nekog reda veličine.

Proizvoljan sustav običnih Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi oblika

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \int_{t_0}^{t} G(t, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

moguće je prema Lubichu [62] numerički riješiti na sljedeći način:

$$x_{k+1} = x_k + h\sum_{i=1}^{s} b_i\, f(t_k + c_i h,\ \mathrm{X}_i^k,\ \widetilde{F}^k(t_k + c_i h) + Z_i^k)$$

$$\mathrm{X}_i^k = x_k + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, f(t_k + c_j h,\ \mathrm{X}_j^k,\ \widetilde{F}^k(t_k + c_j h) + Z_j^k)$$

$$Z_i^k = h\sum_{j=1}^{s} \overline{a_{ij}}\, G(t_k + d_{ij} h, t_k + c_j h,\ \mathrm{X}_j^k).$$

Odgovarajuća metoda određena je:

i. odabirom koeficijenata $a_{ij}, \overline{a_{ij}}, b_i, c_i$ te d_{ij},

ii. načinom diskretizacije $F^k(t)$.

Metode kod kojih vrijedi $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ te $d_{ij} = c_i$ ($i, j = 1, 2, ..., s$) nazivaju se *Pouzetovim* metodama. Upravo jedna takva Pouzetova metoda korištena je u ovom radu. Prema Lubichu [62], Pouzetova metoda *istog* je reda točnosti kao i Runge-Kutta metoda na temelju koje je konstruirana. U radu se koristi *eksplicitna* Pouzetova metoda, kod koje vrijedi

$$a_{ij} = \overline{a_{ij}} = 0 \qquad (1 \le i \le j \le s),\ \text{tj.}$$

matrica koeficijenata A je strogo donje trokutasta. Posljedica eksplicitnosti jest i $c_1 = 0$.

$F^k(t) = \int_{t_0}^{t_k} G(t, \tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau$ diskretizirat će se na tzv. "produljeni" način, [62]:

$$\widetilde{F}^k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} h_j \sum_{i=1}^{s} b_i G(t, t_j + c_i h, \mathrm{X}_i^j).$$

Na temelju prethodnih odabira ovu metodu za rješenje sustava običnih Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi možemo nazvati "produljenom eksplicitnom Pouzetovom Runge-Kutta metodom". S obzirom da linearne višekoračne metode (eng. linear multistep

methods) u pravilu manji broj puta izvrednjavaju funkciju *f* po koraku metode od odabranih Runge-Kutta metoda, postavlja se pitanje efikasnosti odabrane metode. Ukoliko *ograničimo* veličinu koraka Runge-Kutta metoda sigurno će biti manje efikasna. Ukoliko konstruiramo metodu s *promjenljivim* korakom, na način da su mogući relativno veliki koraci, tada je moguće (a praksa to i pokazuje) da je Runge-Kutta metoda ponekad i značajno efikasnija od neke linearne višekoračne metode.

Uobičajen (i učinkovit) način kontrole veličine promjenljivog koraka je računanje dvjema metodama različitog reda točnosti (ukoliko je to moguće; misli se na metode koje koriste istu matricu koeficijenata A) vrijednosti funkcije u nekom vremenskom trenutku. Razlika vrijednosti izračunatih po tim dvjema metodama (norma greške) kriterij je odabira veličine promjenljivog koraka.

Hoppensteadt et al. [63] predlažu prilagođavanje "utisnutog" para Runge-Kutta metoda 5. i 4. reda točnosti, korištenih za rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (prema Dormand i Prince [28]), rješenju sustava Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi. Klasičnu metodu Dormanda i Princea [28] moguće je također prikazati Butcherovom tablicom:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline x_{k+1} & b^T \\ \hline \hat{x}_{k+1} & \hat{b}^T \end{array},$$

gdje je x_{k+1} aproksimacija 5. reda točnosti, a $\hat{x}_{k+1}$ aproksimacija 4. reda točnosti, rješenja *x* u $t = t_{k+1}$.

Metodu Dormanda i Princea [28] prilagođenu za rješenje Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi (uz pretpostavku produljene eksplicitne Pouzetove metode) moguće je zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + h_k \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_k + c_i h_k,\, \mathrm{X}_i^k, \tilde{F}^k(t_k + c_i h_k) + Z_i^k) \\
\hat{x}_{k+1} &= x_k + h_k \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i f(t_k + c_i h_k,\, \mathrm{X}_i^k, \tilde{F}^k(t_k + c_i h_k) + Z_i^k) \\
\mathrm{X}_i^k &= x_k + h_k \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_k + c_j h_k,\, \mathrm{X}_j^k,\, \tilde{F}^k(t_k + c_j h_k) + Z_j^k) \qquad \text{(B 22)} \\
Z_i^k &= h_k \sum_{j=1}^{j-1} a_{jl}\, G(t_k + c_j h_k, t_k + c_l h_k, \mathrm{X}_l^k) \\
\tilde{F}^k(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} h_j \sum_{i=1}^{s} b_i G(t, t_j + c_i h_j, \mathrm{X}_i^j).
\end{aligned}$$

Numeričku metodu (B 22) nazivamo produljenim eksplicitnim Pouzetovim (Dormand i Prince) parom reda 5. i 4. za numeričko rješenje sustava običnih nelinearnih Volterrinih integro-diferencijalnih jednadžbi.

S obzirom da u metodi koristimo koeficijente prema Dormand i Prince [28] prikladno ih je i navesti u obliku Butcherove tablice:

$$
\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline x_{k+1} & b^T \\ \hat{x}_{k+1} & \hat{b}^T \end{array} =
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & \\
\frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & -\frac{212}{729} & & & \\
1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & \\
1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & \\
\hline
x_{k+1} & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & 0 \\
\hat{x}_{k+1} & \frac{5179}{57600} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & -\frac{92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40}
\end{array}
.
$$

PRILOG C - Sjedanje pritegnute platforme opisano kutovima rotacije

U poglavlju 3. nelinearna povratna krutost izvedena je na temelju pomaka u horizontalnoj ravnini, δ_x, δ_y i φ_z. Položaj pritegnute platforme moguće je odrediti i na temelju kutova rotacije α, β i ϑ. Ukoliko je narinuto samo zalijetanje platforme sjedanje je moguće opisati s kutom α:

$$\delta_1^s = L\,(1-\cos\alpha)\,. \tag{C 1}$$

U slučaju proizvoljnog pomaka u horizontalnoj ravnini ukupno sjedanje jednako je sumi sjedanja za odgovarajuće rotacije:

$$\widehat{\delta}^s = L\,(3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\vartheta)\,. \tag{C 2}$$

Vertikalna koordinata pritegnute platforme (mjerena od morskog dna) glasi:

$$\widehat{L}_z = L-\widehat{\delta}^s = L\,(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\vartheta-2)\,. \tag{C 3}$$

Izraz (C 3)je približan i vrijedi samo za male kutove rotacije.

Za proizvoljne pomake jednadžbu (3.47) za $\widehat{L}_z$ moguće je transformirati upotrebom supstitucija

$$\delta_x = L\sin\alpha, \quad \delta_y = L\sin\beta, \quad r\varphi_z = L\sin\vartheta\,. \tag{C 4}$$

U tom slučaju vrijedi:

$$\widehat{L}_z = L\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\vartheta-2}\,, \tag{C 5}$$

$$\widehat{\delta}^s = L-\widehat{L}_z\,. \tag{C 6}$$

Važno je uočiti značajnu razliku između (C 3) i (C 5).