Prilog modeliranju koeficijenta otpora trenja u nestacionarnom strujanju fluida u cijevima

Korbar, Radoslav

Doctoral thesis / Disertacija

2012

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:724763

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Radoslav Korbar

PRILOG MODELIRANJU KOEFICIJENTA OTPORA TRENJA U NESTACIONARNOM STRUJANJU FLUIDA U CIJEVIMA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2012.



University of Zagreb
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Radoslav Korbar

CONTRIBUTION TO MODELING OF FRICTION COEFFICIENT FOR TRANSIENT FLOW IN PIPES

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2012



Sveučilište u Zagrebu
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

RADOSLAV KORBAR

PRILOG MODELIRANJU KOEFICIJENTA OTPORA TRENJA U NESTACIONARNOM STRUJANJU FLUIDA U CIJEVIMA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
ZDRAVKO VIRAG

Zagreb, 2012



University of Zagreb
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Radoslav Korbar

CONTRIBUTION TO MODELING OF FRICTION COEFFICIENT FOR TRANSIENT FLOW IN PIPES

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Zdravko Virag

Zagreb, 2012

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU:

UDK: 532.51
Ključne riječi: Hidraulički udar; Nestacionarno strujanje; Strujanje u cijevi; Dvodimenzijski model; Trenje; Proračunske metode
Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje: Druge temeljne tehničke znanosti
Institucija u kojoj je rad izrađen: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
Mentor rada: Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.
Broj stranica: 140
Broj slika: 67
Broj tablica: 5
Broj korištenih bibliografskih jedinica: 58
Datum obrane: 18.07.2012.
Povjerenstvo:
1. Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.,
   Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
2. Prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing.,
   Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
3. Prof. dr. sc. Veljko Filipan, dipl. ing.,
   Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

Zahvaljujem mentoru, prof. dr. sc. Zdravku Viragu na mnoštvu korisnih savjeta, a posebno na nesebičnom trudu, požrtvovnosti i dobroj volji kojom je uvijek spremno priskakao u pomoć kad su se u radu pojavile poteškoće.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr. sc. Mariju Šavaru na zdušnoj pomoći i podršci, te naročito na potpori i optimizmu u trenucima kad bi se činilo da se s radom ušlo u slijepu ulicu.

SADRŽAJ

Sadržaj **1**

Predgovor **4**

Sažetak **5**

Summary **5**

Ključne riječi **6**

Keywords **6**

Popis oznaka **7**

Popis slika **11**

Popis tablica **14**

1. Uvod **15**

Cilj i hipoteza rada **17**

2. Pregled postojećih modela i metoda **18**

2.1 Modeli hidrauličkog udara – osnovne jednadžbe i pretpostavke 18

2.1.1. 2D i kvazi-2D modeli *19*

2.1.2. 1D modeli *23*

2.2 Modeli trenja za klasični 1D model hidrauličkog udara 25

2.2.1. Kvazi-stacionarni model *27*

2.2.2. Izrazi za korekciju kvazi-stacionarnog modela koji se baziraju na trenutnoj akceleraciji *28*

2.2.3. Analitički izrazi za korekciju kvazi-stacionarnog modela *30*

2.3 Modeli trenja za kvazi-2D model – modeli turbulencije 35

2.4 Stabilnost strujanja 36

2.5 Pretpostavka 'zamrznute' i kvazi-stacionarne turbulencije 37

2.6 Numeričko rješavanje 1D modela, numeričke sheme 38

2.7 Numeričko rješavanje kvazi-2D modela, numeričke sheme 40

3. Predloženi model i metoda rješavanja 42

3.1 Metoda karakteristika 42

3.1.1. Općenito 42

3.1.2. Primjena MK na aksijalno simetričan model strujanja 47

3.2 Postojeći kvazi-2D modeli 53

3.2.1. Matematički modeli 54

3.2.2. Diskretizacija 55

3.3 Predloženi matematički model i metoda rješavanja 58

3.3.1. Predloženi matematički model 58

3.3.2. Jednadžba za brzinu 60

3.3.3. Jednadžba za tlak 61

3.3.4. Usporedba s metodom Vardy i Hwang 62

3.3.5. Predložena diskretizacija i metoda rješavanja 68

3.4 Rubni i početni uvjeti 70

3.4.1. Rubni uvjeti 70

3.4.2. Početni uvjeti 73

3.5 Model turbulencije za hidraulički glatke cijevi 74

3.6 Rješavanje 3-dijagonalnog sustava jednadžbi 80

4. Rezultati 82

4.1 Simuliranje i održavanje stacionarnog strujanja 82

4.1.1. Laminarno strujanje 83

4.1.2. Turbulentno strujanje, glatke cijevi 84

4.2 Hidraulički udar 89

4.2.1. Hidraulički udar u laminarnom režimu 91

4.2.2. Hidraulički udar u turbulentnom režimu – hidraulički glatka cijev 105

5. Analiza rezultata 118

6. Zaključak 122

Literatura 123

Prilog 1: Jednadžbe kontinuiteta i količine gibanja 129

Životopis **133**

Curriculum vitae **134**

PREDGOVOR

Istraživanje nestacionarnog strujanja u cijevima i cijevnim mrežama već ima dužu tradiciju na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Iz tog područja napisano je niz znanstvenih radova, te veći broj magistarskih radova i doktorskih disertacija. U ovom trenutku u tijeku su projekti koji obuhvaćaju istraživanja nestacionarnog strujanja u krvnim žilama [1], [2] kao i model hidrauličkog tučka i s njim povezan hidraulički udar [3].

Potreba da se istraže i kvalitetnije riješe problemi trenja prilikom hidrauličkog udara prisutna je u svim institucijama koje istražuju hidraulički udar ili pulzirajuće strujanje, pa je tako već duže prisutna i na ovom Fakultetu.

Kvazi-2D modeli predstavljaju najtočnije modele koji se praktički koriste za simulaciju hidrauličkog udara. Zbog složenosti, najčešće se koriste za verifikaciju jednostavnijih (1D) modela. Kao početak istraživanja trenja, ovdje se predlaže novi kvazi-2D model. Predložena metoda rješavanja trebala bi spadati u red najtočnijih metoda. No istovremeno brzina rješavanja trebala bi biti toliko velika da metodu svrsta u jednu od najbržih.

Daljnja istraživanja mogla bi zatim ići u dva smjera. Prvi smjer vezan je uz potrebu za kvalitetnim jednostavnim (1D) modelom, pa bi predložena metoda mogla poslužiti u istraživanju koje bi konačno rezultiralo s takvim jednim modelom, kao i za njegovu verifikaciju.

Drugi smjer vezan je uz nestabilnost koja je uočena u nestacionarnom strujanju. Zbog te nestabilnosti modeli koji se danas koriste ne daju dovoljno točna rješenja u svim potrebnim režimima strujanja. Temeljito istraživanje uzroka tih pogrešaka tek predstoji. U cilju iznalaženja točnijih modela i temeljitog razumijevanja fizike pri hidrauličkom udaru, morat će se sve više čimbenika uzimati u obzir, a sve manje njih zanemarivati. U tom smislu će se u budućim istraživanjima možda čak morati odustati i od pretpostavke osne simetrije strujanja u cijevi.

SAŽETAK

U proračunima nestacionarnog strujanja u cijevi sve češće je potrebno precizno određivanje trenja fluida, što uvjetuje da se uz 1D modele strujanja koriste i točniji kvazi-2D modeli. Za proračun hidrauličkog udara najčešće se koriste 2D modeli Vardy i Hwang (koji je točniji i pouzdaniji) i Pezzinga (koji zahtijeva manje računanja). Ovdje je predložen novi kvazi-2D model koji posjeduje točnost metode Vardy i Hwang i brzinu računanja metode Pezzinga. Ujedno je ponuđena i originalna numerička metoda koja je u osnovi metoda karakteristika, ali ima i neke elemente metode konačnih volumena.

Najprije se daje pregled postojećih modela za proračun hidrauličkog udara od složenijih prema jednostavnijima uz postupno uvođenje pretpostavki. Zatim je sustavno izložena metoda karakteristika za višedimenzijske situacije. Koristeći se karakterističnim jednadžbama, detaljnom analitičkom usporedbom predložene metode i metode Vardy i Hwang pokazuje se da obje metode moraju davati iste rezultate pod uvjetom da se koristi potpuno implicitna shema interpolacije za radijalnu brzinu. Na kraju su rezultati predložene metode uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima za slučaj laminarnog i turbulentnog strujanja, kao i s rezultatima proračuna pomoću metode Vardy i Hwang za te iste strujne situacije. U svim tim usporedbama predložena metoda pokazuje izvrsno poklapanje rezultata.

SUMMARY

Pipe flow transient calculations demand increasingly precise friction models. Therefore, more accurate quasi-2D flow models are used in addition to simpler 1D models. The most commonly used quasi-2D models for water hammer calculations are those of Vardy and Hwang (more accurate and reliable) and Pezzinga (demands less calculation steps). Here a new quasi-2D model is proposed that combines the accuracy of Vardy and Hwang method and the calculation speed of Pezzinga's method. Furthermore, an original numerical method is offered. The method essentially relies on the method of characteristics, but it also comprises some finite volume method features.

First an overview of existing models is given, that goes from complex models towards simpler ones, and introduces assumptions progressively. Then a detailed description is given of the method of characteristics for multidimensional situations. Applying characteristic equations, a detailed analytical comparison of the proposed and the Vardy and Hwang method shows that both methods must give the same results, provided that a fully implicit interpolation scheme is used for radial velocities. Finally the proposed method results are compared to the experimental ones for situations of laminar and turbulent flow, as well as to the Vardy and Hwang method results for the same flow situations. Results of the proposed method show excellent agreement in all these comparisons.

KLJUČNE RIJEČI

Hidraulički udar; Nestacionarno strujanje; Strujanje u cijevi; Dvodimenzijski model; Trenje; Proračunske metode.

KEYWORDS

Water hammer; Transients; Pipe flow; Two-dimensional models; Friction; Computational methods.

POPIS OZNAKA

A	koeficijent težinske funkcije W, $s^{-0,5}$
a_j	komponenta vektora brzine kretanja vala u smjeru njegovog prostiranja; koeficijent 3-dijagonalnog sustava jednadžbi, m/s
a_{ijk}	koeficijenti PDJ
$\tilde{a}_{ijk}$	koeficijenti PDJ zapisanih za svojstvene varijable w_i
B	koeficijent težinske funkcije W, s^{-1}
b	debljina graničnog sloja dvoslojnog modela turbulencije, m
b_j	koeficijent 3-dijagonalnog sustava jednadžbi
C_A	koeficijent 5-zonskog modela turbulencije (C_A=0,19)
C_B	koeficijent 5-zonskog modela turbulencije (C_B=0,011)
C_C	koeficijent 5-zonskog modela turbulencije ($0,05 \leq C_C \leq 0,07$)
C_m	koeficijent 5-zonskog modela turbulencije (C_m=0,077)
c	brzina zvuka, m/s
c_j	koeficijent 3-dijagonalnog sustava jednadžbi
D	promjer cijevi, m
d_j	slobodni članovi 3-dijagonalnog sustava jednadžbi
E	istočni čvor ($i,j+1,n$) iz kojeg se pomoću MK računaju nove vrijednosti funkcija
E	Youngov modul elastičnosti cijevi, Pa
E_f	volumenski modul elastičnosti fluida, Pa
$e^{(j)}_i$	jedinični (bazni) vektor u smjeru koordinatne osi x_j
$\boldsymbol{f}$	specifična masena sila, N/kg
f	karakteristična frekvencija vala, Hz
g	konstanta gravitacije, m/s^2
H	piezometarska visina, m
i	imaginarna jedinica $\sqrt{-1}$
i	Cartesijev indeks; indeks radijalnog koraka
j	Cartesijev indeks; indeks aksijalnog koraka
K	matrica za određivanje svojstvenih vektora sustava PDJ u smjeru vektora κ_i
K	koeficijent 5-zonskog modela turbulencije (K=0,41)
k	Cartesijev indeks; koeficijent doprinosa trenja uslijed akceleracije fluida

k_r ekvivalentna visina hrapavosti, m

k_u broj PDJ

$\mathbf{L}^{-1}$ matrica komponenti svojstvenih vektora

L duljina cijevi, m

l_i komponenta svojstvenog vektora

Ma Machov broj

$N_{\Delta r}$ broj podjela po osi r

$N_{\Delta x}$ broj podjela po osi x

n indeks vremenskog koraka

n_i komponenta gradijenta na karakterističnu hiper površinu $S(\xi_i)$

P čvor $(i,j,n+1)$ u kojem se pomoću MK računaju nove vrijednosti funkcija

P tlak (1D polje tlaka $P = P(t,x)$), Pa

P_0 konstantni tlak u spremniku, Pa

p tlak (polje tlaka $p = p(t,x_i)$), Pa

p_j koeficijenti za izračunavanje 3-dijagonalnog sustava jednadžbi

Q volumenski protok fluida kroz cijev, m^3/s

q kvocijent geometrijskog niza

q_i izvorski članovi PDJ; protok kroz površinu $x=const$ i-tog elementa po r; koeficijenti za izračunavanje 3-dijagonalnog sustava jednadžbi

$\tilde{q}_i$ izvorski članovi PDJ zapisanih za svojstvene varijable w_i

R polumjer cijevi, m

Re Reynoldsov broj

$\mathbf{Re}_0$ Reynoldsov broj u stacionarnom strujanju

R_* bezdimenzijski polumjer cijevi ($R_* = Ru_*/\upsilon$)

r radijalna koordinata, m

S poprečni presjek cijevi, m^2

$S(x_i,t)=S(\xi_i)$ karakteristična hiper površina

s kompleksna varijabla

$s^{(j)}_i$ prošireni izvorski član prikladan za metodu karakteristika

T_d karakteristično vrijeme difuzije u radijalnom smjeru ($T_d = R^2/\upsilon$), s

t vrijeme, s

U srednja protočna brzina, m/s

U_0 srednja protočna brzina u stacionarnom strujanju, m/s

u aksijalna komponenta brzine, m/s

u_c brzina u jezgri dvoslojnog modela turbulencije, m/s

u_j nepoznate funkcije (rješenja) PDJ

$\hat{u}_j$ amplitude rješenja PDJ

u_* karakteristična brzina turbulentnog gr. sloja – brzina trenja, m/s

$\boldsymbol{v}$ brzina, m/s

v radijalna komponenta brzine, m/s

$v_i'v_j'$ dvojna korelacija turbulentnih pulsacija brzine, m^2/s^2

$\mathbf{W}$ matrica svojstvenih varijabli; zapadni čvor ($i,j–1,n$) iz kojeg se pomoću MK računaju nove vrijednosti funkcija

W težinska funkcija

W' Laplaceov transformat težinske funkcije

w cirkularna komponenta brzine, m/s

w_i svojstvene varijable

x aksijalna koordinata, m

x_i koordinata Cartesijevog sustava, m

y udaljenost od stjenke ($y = R–r$), m

y_* bezdimenzijska udaljenost od stjenke ($y_* = yu_*/\upsilon$)

z koordinata čija je os usmjerena vertikalno uvis (suprotno od gravitacije), m

α koeficijent dvoslojnog modela turbulencije, m^{-1}

Γ bezdimenzijska značajka utjecaja trenja u hidrauličkom udaru

ΔP gubitak tlaka pri strujanju u cijevi, Pa

Δr radijalni korak, m

ΔS površina jednog elementa pri $x = const$, m^2

Δt vremenski korak, s

Δx aksijalni korak, m

δ debljina stjenke cijevi, m

δ_{ij} Kroneckerov simbol

ε faktor za odabir eksplicitne odn. implicitne sheme za v ($0 \le \varepsilon \le 1$)

ζ bezdimenzijsko vrijeme simulacije ($ct_{simulacije}/L$)

η supstitucijska varijabla za analitičku integraciju profila brzine

ϑ polarna koordinata

θ faktor za odabir eksplicitne odn. implicitne sheme za u ($0 \leq \theta \leq 1$)

κ koeficijent težinske funkcije W

κ_i komponenta vektora valnog broja tj. gradijenta površine $S(x_i,t=const)$, m^{-1}

$\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti

λ Darcyjev koeficijent stacionarnog trenja pri strujanju u cijevi; svojstvena vrijednost

λ_{MT} vrijednost koeficijenta trenja λ proračunata korištenjem modela turbulencije

μ dinamički koeficijent viskoznosti fluida, Pas

μ_{ef} dinamički koeficijent efektivne viskoznosti ($\mu_{ef} = \mu + \mu_T$), Pas

μ_T dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti, Pas

μ_v koeficijent volumenske viskoznosti, Pas

μ_1, μ_2, μ_3 proizvoljne konstante svojstvenih vektora (odabrano $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$)

υ kinematički koeficijent viskoznosti fluida, m^2/s

υ_c υ_{ef} na rubu graničnog sloja dvoslojnog modela turbulencije, m^2/s

υ_{ef} kinematički koeficijent efektivne viskoznosti, m^2/s

υ_w υ_{ef} na stjenci u dvoslojnom modelu turbulencije, m^2/s

ξ_k nezavisne varijable PDJ

ρ gustoća fluida, kg/m^3

$\mathbf{\Sigma}$ dio tenzora naprezanja (blizak devijatorskom dijelu), Pa

$\boldsymbol{\sigma}$ tenzor naprezanja, Pa

σ koeficijent dvoslojnog modela turbulencije

τ tangencijalno naprezanje; bezdimenzijsko vrijeme za težinsku funkciju W, Pa

τ_c tangencijalno naprezanje na rubu graničnog sloja dvoslojnog modela turbulencije, Pa

τ_w tangencijalno naprezanje na stjenci, Pa

τ_w' Laplaceov transformat tangencijalnog naprezanja na stjenci

τ_{ws} tangencijalno naprezanje na stjenci u stacionarnom strujanju, Pa

τ_{wu} nestacionarni doprinos tangencijalnom naprezanju na stjenci, Pa

ω karakteristična kružna frekvencija, Hz

POPIS SLIKA

Sl. 2.1 Profili brzine pri hidrauličkom udaru [4] 28

Sl. 2.2 Tijek piezometarske visine pri hidrauličkom udaru, eksperiment i modeli [4] 29

Sl. 2.3 Stacionarni profil brzine i efektivne viskoznosti [17] 32

Sl. 3.1 Machov konus i svojstvena ravnina za 2D situaciju 45

Sl. 3.2 Machov konus i karakteristike za kvazi-2D model 53

Sl. 3.3 Rešetka diskretizacije za predloženu metodu i metodu Vardy i Hwang, uz *r=const* 56

Sl. 3.4 Prostorna rešetka za metodu Vardy i Hwang 63

Sl. 3.5 Rubni uvjeti i prostorne oznake čvorova za obje metode 65

Sl. 3.6 Prostorna rešetka za predloženu metodu 69

Sl. 3.7 Definiranje rubova područja i rubnih čvorova 71

Sl. 3.8 Aproksimacija koeficijenta *Cc* 76

Sl. 3.9 Kinematički koeficijent efektivne viskoznosti υ_{ef} odabranog modela turbulencije; provjera implementacije modela 77

Sl. 3.10 Kinematički koeficijent efektivne viskoznosti υ_{ef} odabranog modela turbulencije u blizini stjenke; provjera implementacije modela 78

Sl. 3.11 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=4000 79

Sl. 3.12 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=23000 79

Sl. 3.13 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=110000 80

Sl. 3.14 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=1100000 80

Sl. 4.1 Postizanje i održavanje laminarnog profila brzine 83

Sl. 4.2 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 30 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08) i 110000 (q=1,15) 85

Sl. 4.3 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 60 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08), 110000 (q=1,1) i 1100000 (q=1,15) 85

Sl. 4.4 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 100 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za

vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08), 110000 (q=1,1) i 1100000 (q=1,1) 86
Sl. 4.5 Usporedba profila brzine pri Re=4.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30, 60 i 100 elemenata u radijalnom smjeru (q=1,05 za sve tri mreže) s eksperimentalno dobivenim profilom [57] 87
Sl. 4.6 Usporedba profila brzine pri Re=23.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30, 60 i 100 elemenata u radijalnom smjeru (q=1,08 za sve tri mreže) s eksperimentalno dobivenim profilom [57] 87
Sl. 4.7 Usporedba profila brzine pri Re=110.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30 (q=1,15), 60 (q=1,1) i 100 (q=1,1) elemenata u radijalnom smjeru s eksperimentalno dobivenim profilom [57] 88
Sl. 4.8 Usporedba profila brzine pri Re=1.100.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 60 (q=1,15), 100 (q=1,1) i 150 (q=1,1) elemenata u radijalnom smjeru s eksperimentalno dobivenim profilom [57] 88
Sl. 4.9 Shema uređaja za ispitivanje hidrauličkog udara [58] 89
Sl. 4.10 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću dvije mreže 92
Sl. 4.11 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka kod ventila 92
Sl. 4.12 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 93
Sl. 4.13 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi 93
Sl. 4.14 Tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 94
Sl. 4.15 Tijek srednje brzine kod spremnika proračunat pomoću predložene metode 95
Sl. 4.16 Tijek srednje brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode 95
Sl. 4.17 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću dvije mreže 96
Sl. 4.18 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 97
Sl. 4.19 Tijek koeficijenta trenja, nestacionarnog (određen iz smičnog naprezanja τ_w) i kvazi-stacionarnog (određen prema vrijednosti **Re**) 98
Sl. 4.20 Profil brzine na sredini duljine cijevi u trenutku tc/L = 4 proračunat pomoću četiri različite mreže 99
Sl. 4.21 Profili brzine na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prva dva poremećaja, proračunati prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9] 100
Sl. 4.22 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja 101

Sl. 4.23 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska drugog i trećeg poremećaja 101
Sl. 4.24 Profili brzine na sredini duljine cijevi neposredno nakon prolaska (prva četiri) poremećaja 102
Sl. 4.25 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom četvrtom vremenskom koraku 103
Sl. 4.26 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku 103
Sl. 4.27 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) u zavisnosti od pozicije x i vremena t 104
Sl. 4.28 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom četvrtom vremenskom koraku 104
Sl. 4.29 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku 105
Sl. 4.30 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću dvije mreže 106
Sl. 4.31 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka kod ventila 106
Sl. 4.32 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 107
Sl. 4.33 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi 107
Sl. 4.34 Tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 108
Sl. 4.35 Tijek srednje brzine kod spremnika proračunat pomoću predložene metode 108
Sl. 4.36 Tijek srednje brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode 109
Sl. 4.37 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću dvije mreže 109
Sl. 4.38 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9] 110
Sl. 4.39 Tijek koeficijenta trenja, nestacionarnog (određen iz smičnog naprezanja τ_w) i kvazi-stacionarnog (određen prema vrijednosti **Re**) 111
Sl. 4.40 Jedan profil brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću tri različite mreže 111
Sl. 4.41 Profili brzine na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prva dva poremećaja, proračunati prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9] 112
Sl. 4.42 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja 113
Sl. 4.43 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja – detalj A sa prethodne slike 113

Sl. 4.44 Profili brzine na sredini duljine cijevi neposredno nakon prolaska (prva četiri) poremećaja 114
Sl. 4.45 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom drugom vremenskom koraku 114
Sl. 4.46 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) u zavisnosti od udaljenosti x i vremena t 115
Sl. 4.47 Raspored tlaka u blizini stjenke duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku 115
Sl. 4.48 Raspored tlaka u blizini stjenke duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) proračunat pomoću mreže sa 100 elemenata u aksijalnom smjeru 116
Sl. 4.49 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom drugom vremenskom koraku 117
Sl. 4.50 Raspored srednje brzine u blizini simetrale duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku 117

POPIS TABLICA

Tablica 3.1 Broj jednadžbi predložene metode 66
Tablica 3.2 Broj nepoznanica predložene metode 66
Tablica 3.3 Broj jednadžbi metode Vardy i Hwang (mogućih i *iskorištenih) 67
Tablica 3.4 Broj nepoznanica metode Vardy i Hwang 68
Tablica 4.1 Podaci o eksperimentima hidrauličkog udara [58] 90

1. UVOD

Potreba da se razumije nestacionarno strujanje fluida javila se u pradavno vrijeme s pojavom prvih sustava za navodnjavanje i opskrbu vodom. Međutim, ozbiljan napredak sustavnog razumijevanja zakonitosti strujanja fluida dogodio se tek u dvadesetom stoljeću, kao posljedica snažnog razvoja matematičkog aparata, a kasnije razvoja digitalnih računala. Prva ozbiljnija istraživanja nestacionarnog strujanja vezana su uz probleme koji su se pojavili u cjevovodima i vodnim turbinama hidroelektrana, a koristio se model neviskoznog fluida.

U današnje vrijeme, zbog razvitka tehnologije problemi nestacionarnog strujanja fluida postaju sve značajniji u širokom području primjene, od cjevovoda za transport i opskrbu fluida do ubrizgavanja goriva u automobilske motore [4]. Pri tome je najčešće potrebno obračunati i gubitke energije, tj. uzeti u obzir trenje. Osim trenja, uzima se prema potrebi u obzir i elastičnost materijala cijevi i/ili pojava kavitacije (koja naročito utječe pri zagađivanju pitke vode [5], [6]), a posebnu kategoriju problema donosi simulacija dinamičkog ponašanja cijevnih mreža (npr. za detekciju puknuća cijevi [7]). Iako se naglo zatvaranje ventila izbjegava, a hidraulički udar koji time nastaje se ne dopušta i događa se iznimno, ipak proučavanje prigušenja oscilacija pri takvom udaru ima praktični značaj. Naime, saznanja o takvom prigušenju mogu biti od koristi i u drugim oscilatornim strujanjima. Utjecaj trenja bitan je npr. prilikom simulacije cijevnih mreža, kavitacije, dugotrajnijih simulacija, zatim ako su bitni amplituda i oblik valova (kao u željezničkim tunelima [8]), ili kad je potrebno odrediti maksimalno smično naprezanje (kao u analizi kvalitete pitke vode).

Donedavno nestacionarno trenje nije bilo dovoljno istraženo, pa se nije uzimalo u obzir ili se koristio kvazi-stacionarni model (Darcy-Weisbachov obrazac). Danas se za simulaciju pojava izazvanih hidrauličkim udarom pretežno koriste 1D ili kvazi-2D modeli nestacionarnog strujanja. U okviru 1D modela koriste se modeli trenja na bazi trenutne brzine i akceleracije ili složeniji modeli s integralom konvolucije (s težinskom funkcijom). U kvazi-2D modelima pretpostavlja se 1D polje tlaka i 2D polje brzine. Promjena brzine u poprečnom smjeru računa se prvenstveno za određivanje trenja. Za turbulentno strujanje koriste se uglavnom algebarski kvazi-stacionarni modeli turbulencije.

Pri odabiru modela hidrauličkog udara značajnu ulogu ima kriterij ekonomičnosti proračuna, odn. nastojanje da se proračun obavi u što kraćem vremenu i uz korištenje što manje

računalnih resursa, pa se modele u pravilu nastoji maksimalno pojednostaviti. Točniji (2D) modeli često se koriste za verifikaciju novih 1D modela ili za bolje razumijevanje fizikalne pozadine pojave, a rjeđe za komercijalnu simulaciju. Od potreba zadatka, ali i od parametara ispitivane pojave zavisi da li će rezultati dobiveni pomoću ovih modela biti zadovoljavajući ili ne.

U ovom radu se za hidraulički udar primjenjuje originalni kvazi-2D model koji se rješava pomoću također originalne varijante numeričke metode karakteristika. Numerička metoda nastala je integracijom karakterističnih jednadžbi po poprečnoj površini elementa, pa ima i neka svojstva metode konačnih volumena. Korak mreže u uzdužnom smjeru odabire se tako da se egzaktno zadovoljava kriterij Lewy-Couranta, što znači da je metoda na samoj granici stabilnosti. Zbog stabilnosti se za interpolaciju brzine koristi čista implicitna shema. U praktičnom smislu proračun je jednostavan i vrlo brz; zasebno se uvijek rješava samo sustav jednadžbi za jedan poprečni presjek. Sustav tih jednadžbi je 3-dijagonalni, što omogućava primjenu brzog Thomasovog algoritma (TDMA).

Predloženi model analitički je uspoređen s jednim od najtočnijih suvremenih modela, modelom Vardy i Hwang [9]. Pokazuje se da se predloženi model dobiva analitičkom manipulacijom modela Vardy i Hwang, a također i algebarskom manipulacijom tog modela zapisanog u diskretiziranoj formi, ali uz uvjet da se koristi potpuno implicitna shema za radijalnu brzinu. Međutim u okviru predloženog modela nije potrebno rješavati jednadžbe za radijalnu brzinu, čime se potreban broj računskih operacija prepolavlja.

U okviru rada izrađen je kompjuterski program za rješavanje ovako definiranog modela. Točnost metode testirana je usporedbom rezultata predložene metode s eksperimentalnim rezultatima za laminarni i turbulentni slučaj strujanja. Također je izvršena usporedba s rezultatima metode Vardy i Hwang. Zbog ove posljednje usporedbe, korišten je u okviru ovog istraživanja isti algebarski model turbulencije s pet zona kakav se primjenjuje u toj metodi. Poklapanje rezultata predložene metode s eksperimentalnim i proračunskim rezultatima pokazalo se izuzetno dobro u svim situacijama.

CILJ I HIPOTEZA RADA

CILJ RADA

Cilj rada je stvaranje novog kvazi-dvodimenzijskog modela i metode za proračun nestacionarnog strujanja u cijevi. Model će imati dvodimenzijsku jednadžbu za aksijalnu brzinu i integralnu (jednodimenzijsku) jednadžbu za tlak, zbog čega se gubi potreba za određivanjem radijalne komponente brzine. Metoda će se bazirati na metodi karakteristika uz uvođenje elemenata metode konačnih volumena.

HIPOTEZA RADA

Novopredloženi model i numerička metoda, koji će se temeljiti na metodi karakteristika, će davati točnije rezultate i/ili imati kraće vrijeme proračuna nestacionarnog strujanja od postojećih dvodimenzijskih modela. Predložena metoda će biti dovoljno brza da se može koristiti u praktičnoj primjeni umjesto jednostavnijih i netočnijih jednodimenzijskih modela.

2. PREGLED POSTOJEĆIH MODELA I METODA

Ovdje su rezimirani aktualni modeli i metode za računanje hidrauličkog udara slabo stlačivog fluida. Pri tome je posebna pozornost posvećena načinu uzimanja u obzir utjecaja trenja u fluidu. Nisu uzeti u obzir kavitacija i odvajanja stupca fluida, niti račvanja i složenije cijevne geometrije (cijevnih mreža). Oni modeli koji su stekli veću popularnost i zastupljenost detaljno su objašnjeni.

Modeli i njihove osnovne matematičke jednadžbe najprije su po kategorijama navedeni redoslijedom od složenijih prema jednostavnijima, kako bi se mogao pratiti i sagledati redoslijed uvođenja pretpostavki i ograničenja. U nastavku, redoslijedom od jednostavnijih prema složenijima, ti modeli su razrađeni detaljnije. Prihvaćena je sljedeća osnovna podjela aktualnih modela

a) Jednodimenzijski (1D) modeli

   - idealni modeli (bez trenja)
   - kvazi-stacionarni model trenja
   - modeli s korekcijom na bazi trenutne akceleracije
   - modeli s analitičkom korekcijom

b) Dvodimenzijski (2D) i kvazi dvodimenzijski modeli

2.1 Modeli hidrauličkog udara – osnovne jednadžbe i pretpostavke

Osnovne jednadžbe strujanja Newtonovskog fluida su

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.1}$$

– jednadžba količine gibanja

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Sigma_{ji}}{\partial x_j} \ , \tag{2.2}$$

$$\Sigma_{ji} = \left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v \right) \delta_{ji} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \rho \overline{v_j' v_i'} \right] . \tag{2.3}$$

Tenzor turbulentnih naprezanja često se modelira pomoću turbulentne viskoznosti μ_T, (v. odjeljak o modelima turbulencije) tj. putem izraza

$$\rho \overline{v_j' v_i'} = \mu_T \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) , \tag{2.4}$$

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_T \tag{2.5}$$

2.1.1. 2D i kvazi-2D modeli

Prijelazom na cilindarski koordinatni sustav (koordinatne osi x, r, ϑ, komponente brzine u, v, w) i zanemarujući članove čiji utjecaj nije značajan odn. uvođenjem sljedećih pretpostavki:

- μ_v=0;
- $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} \mu \delta_{ji} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = 0$;
- aksijalna simetrija obzirom na os x ($\frac{\partial \cdot}{\partial \vartheta} = 0$);
- v_ϑ=w=0;

osnovne jednadžbe poprimaju sljedeću formu:

– jednadžba kontinuiteta

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \ , \tag{2.6}$$

– x-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r\rho} \frac{\partial (r \Sigma_{rx})}{\partial r} , \tag{2.7}$$

– *r*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}=f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Sigma_{xr}}{\partial x}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial (r\Sigma_{rr})}{\partial r}-\frac{\Sigma_{\vartheta\vartheta}}{r}, \tag{2.8}$$

pri čemu

$$\Sigma_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\overline{u'u'}, \tag{2.9}$$

$$\Sigma_{rx}=\Sigma_{xr}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'v'}, \tag{2.10}$$

$$\Sigma_{rr}=2\mu\frac{\partial v}{\partial r}-\rho\overline{v'v'}, \tag{2.11}$$

$$\Sigma_{\vartheta\vartheta}=2\mu\frac{v}{r}-\rho\overline{w'w'}, \tag{2.12}$$

odn. ukoliko se koristi model turbulentne viskoznosti

$$\Sigma_{xx}=2\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.13}$$

$$\Sigma_{rx}=\Sigma_{xr}=\mu_{ef}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{2.14}$$

$$\Sigma_{rr}=2\mu_{ef}\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{2.15}$$

$$\Sigma_{\vartheta\vartheta}=2\mu_{ef}\frac{v}{r}. \tag{2.16}$$

Uvode se daljnje relacije i pretpostavke odn. pojednostavljenja:

- $\Sigma_{xx}=\Sigma_{rr}=\Sigma_{xr}=0$, $\Sigma_{rx}=\sigma_{rx}$ (tangencijalno naprezanje – komponenta tenzora naprezanja);
- $\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0$;
- 1D model tlaka – tlak P nije funkcija od r-koordinate, tj. $P=P(t,x)$, pa više nije potrebno rješavati r-komponentu jednadžbe količine gibanja, ovom pretpostavkom 2D model postaje kvazi-2D model;

- brzina napredovanja tlačnog poremećaja (brzina zvuka)

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}, \tag{2.17}$$

dakle $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2}\frac{DP}{Dt}$ (napomena: u 1D modelima koristi se općenitiji izraz za brzinu napredovanja tlačnog poremećaja, v. niže);

- $f_i = -g\frac{\partial z}{\partial x}$, tj. masena gravitacijska sila se tretira jednodimenzijski, $z=x_3$ je geodetska visina;

- piezometarska visina

$$H = \frac{P}{\rho_0 g} + z, \tag{2.18}$$

gdje je $\rho_0=const$ početna gustoća fluida; nadalje
$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho_0 g}{\rho c^2}\left(\frac{DH}{Dt} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{g}{c^2}\frac{DH}{Dt} - \frac{g}{c^2}u\frac{\partial z}{\partial x};$

$u\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, tj. ovdje se unutar jednadžbe kontinuiteta zanemaruje dio (v. [10]) konvektivne promjene gustoće; inače se obično u toj jednadžbi zanemaruje kompletna konvektivna promjena gustoće, odn. uzima se $\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$;

i dobivaju se sljedeće jednadžbe koje se često koriste kao polazne jednadžbe za kvazi-2D modele

– jednadžba kontinuiteta

$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0, \tag{2.19}$$

– x-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{r\rho}\frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r}, \tag{2.20}$$

pri čemu

$$\sigma_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'} \ , \tag{2.21}$$

ili uz korištenje modela turbulentne viskoznosti

$$\sigma_{rx} = \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \ . \tag{2.22}$$

Ghidaoui et al. [4] pokazali su usporedbom reda veličine pojedinih članova da je u slučaju **Ma**<<1 opravdano zanemariti konvektivne članove ovih jednadžbi, tj.:

- $u \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \, , \; u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \, , \; v \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \, ;$

kvazi-2D model se tada pojednostavljuje i dobiva se poznati model Vardy i Hwang [9]:

– jednadžba kontinuiteta

$$\frac{g}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \ , \tag{2.23}$$

– *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r} \ . \tag{2.24}$$

Manipulacijom i/ili pojednostavljivanjem ovih jednadžbi moguće je izvesti daljnje popularne modele hidrauličkog udara.

Integracijom jednadžbe kontinuiteta po površini poprečnog presjeka cijevi *S*:

- protok kroz cijev $Q(x,t) = \int_S u \, dS \, ;$

- $\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} dS = 0$ zbog osne simetrije;

dobiva se pojednostavljeni kvazi-2D model koji je uveo Pezzinga [11]:

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{c^2}{gS}\frac{\partial Q}{\partial x}=0\,, \tag{2.25}$$

- *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{r\rho}\frac{\partial(r\sigma_{rx})}{\partial r}\ . \tag{2.26}$$

Ovakvo uklanjanje radijalnih brzina iz modela u nekim situacijama uzrokuje nefizikalne oscilacije.

Silva-Araya i Chaudry [12] Ohmi et al. [13] također su integrirali kvazi-2D jednadžbu količine gibanja, ali samo za određivanje korekcije nestacionarnog smičnog naprezanja τ_{wu} u okviru modela koji se dalje svodi na 1D model.

Wood i Funk [14] također su numerički integrirali kvazi-2D jednadžbu količine gibanja i na taj način određivali profile brzina.

2.1.2. 1D modeli

Za laminarno strujanje vrijedi:

- $\sigma_{rx}=\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}$, μ=*const*;

pa se u tom slučaju *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja može zapisati u formi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}f(t)\ . \tag{2.27}$$

Ovdje su prisutne derivacije brzine *u* samo po koordinati *r* i vremenu *t*, pa je integraciju ove jednadžbe moguće provesti u svakom presjeku nezavisno od koordinate *x*. Zielke [15] je izvršio takvu analitičku integraciju, čime je dobiven popularni 1D analitički model.

Vardy et al. [16] su na analogni način sačinili model prikladan za nestacionarno turbulentno strujanje u glatkim cijevima pri niskim Reynoldsovim brojevima. Vardy i Brown [17] su

kasnije taj model proširili i na slučajeve turbulentnog strujanja u glatkim cijevima pri visokim Reynoldsovim brojevima, te [18] na turbulentno strujanje u potpuno hrapavim cijevima.

Čisti 1D model dobiva se uvođenjem srednje brzine:

- $U(x,t) = \frac{1}{S}\int_S u\, dS$.

Uzimajući osim toga u obzir da vrijedi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rx})}{\partial r} = -\frac{\tau_w}{\frac{D}{2}} - \frac{\partial\sigma_{rx}}{\partial r} = -\frac{4\tau_w}{D} \ , \tag{2.28}$$

gdje τ_w označava smično naprezanje na stjenci cijevi, dobivaju se „klasične“ jednadžbe hidrauličkog udara:

– jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \ , \tag{2.29}$$

– x-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4\tau_w}{\rho D} = 0 \ . \tag{2.30}$$

Isti izrazi mogu se dobiti odn. vrijede i kad se dopusti promjena presjeka cijevi S uslijed elastične deformacije cijevi (v. npr. [10]). Međutim, tada se brzina napredovanja tlačnog poremećaja definira sljedećim općenitijim izrazom:

- $$\frac{1}{c^2} = \frac{d\rho}{dP} + \frac{\rho}{S}\frac{dS}{dP} = \frac{\rho}{E_f} + \frac{\rho}{E\frac{\delta}{D}} , \tag{2.31}$$

pri čemu su E Youngov modul elastičnosti cijevi, E_f volumenski modul elastičnosti fluida, a δ je debljina stjenke cijevi.

Kad se u gornjem modelu zanemari trenje, dobiva se tradicionalni Allievijev model hidrauličkog udara:

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial U}{\partial x}=0\ , \tag{2.32}$$

- *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial U}{\partial t}+g\frac{\partial H}{\partial x}=0\ . \tag{2.33}$$

Integracijom Allijevijevih jednadžbi po pomičnom kontrolnom volumenu, koji obuhvaća frontu hidrauličkog udara po cijelom poprečnom presjeku cijevi i uz korištenje Leibnizovog pravila može se dobiti izraz Žukovskog za visinu prvog tlačnog udara

$$\Delta H=-\frac{c\Delta U}{g}\ . \tag{2.34}$$

2.2 Modeli trenja za klasični 1D model hidrauličkog udara

Početkom dvadesetog stoljeća Žukovski je postavio najpoznatiju jednadžbu nestacionarnog strujanja koja se ponekad naziva osnovnom jednadžbom hidrauličkog udara.

$$\Delta H=-\frac{c\Delta U}{g}\ . \tag{2.35}$$

Dobivena je uz pretpostavku neviskoznog fluida i zanemarivo male brzine strujanja u odnosu na brzinu zvuka.

Otprilike u isto vrijeme Allievi je pokazao da je opravdano zanemariti konvektivne članove u jednadžbama i postavio opću teoriju hidrauličkog udara. Allievijev idealni model obuhvaća

- jednadžbu kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial U}{\partial x}=0\ , \tag{2.36}$$

– *x*-komponentu jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \ . \tag{2.37}$$

Nakon što je još uzeto u obzir i trenje na stjenci cijevi, polovicom dvadesetog stoljeća općenito su prihvaćene sljedeće klasične jednadžbe jednodimenzijskog (1D) modela hidrauličkog udara:

– jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \ , \tag{2.38}$$

– *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4\tau_w}{\rho D} = 0 \ . \tag{2.39}$$

Te jednadžbe vrijede za jednodimenzijsko strujanje (aksijalno simetrično strujanje uz dominantnu komponentu brzine u smjeru osi) stlačivog fluida u elastičnoj cijevi uz relativno malu vrijednost Machovog broja.

Prema [4] utjecaj smičnog naprezanja na stjenci cijevi τ_w povećava se s povećanjem vrijednosti bezdimenzijske značajke

$$\Gamma = \zeta \mathbf{Ma} \lambda \frac{L}{2D} + \zeta \frac{T_d}{L/c} \ , \tag{2.40}$$

gdje je sa ζ označeno bezdimenzijsko vrijeme simulacije (omjer vremena simulacije i vremena L/c četvrtine ciklusa), λ je koeficijent stacionarnog viskoznog trenja u cijevi, a $T_d = R^2/\upsilon$ je karakteristično vrijeme difuzije u radijalnom smjeru. Prema tome utjecaj trenja značajan je u slučajevima kad vrijeme simulacije znatno premašuje periodu ciklusa (velik ζ), ili je cijev relativno velike duljine L odn. malog promjera D, ili je koeficijent trenja λ relativno velik, ili kad je karakteristično vrijeme radijalne difuzije T_d veće od vremena L/c putovanja poremećaja u jednom smjeru. Poznato je da se kod relativno kratkog vremena simulacije (mali ζ) zadovoljavajući rezultat dobiva uz korištenje bilo kojeg modela trenja. Praktični zadaci kod kojih je modeliranje trenja od bitnog značaja uključuju analizu i sintezu cjevovodnih mreža i regulacije nestacionarnog strujanja; simulaciju opskrbe pitke vode s ciljem izbjegavanja zagađenja; izradu programa za obradu mjernih podataka u svrhu

kalibracije parametara, dijagnostike i otkrivanje propuštanja; modeliranje kavitacije i odvajanja stupca kapljevine.

2.2.1. Kvazi-stacionarni model

U stacionarnom strujanju pad tlaka uslijed trenja u cijevi računa se prema Darcy-Weisbachovom obrascu

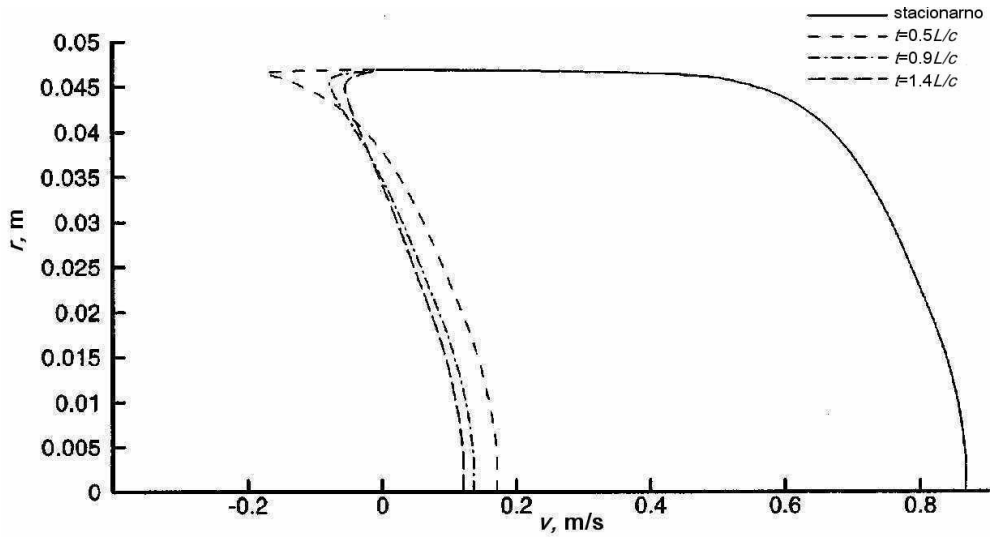
$$\Delta P = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{U^2}{2} \ . \tag{2.41}$$

Iz uvjeta ravnoteže sila na element fluida u stacionarnom strujanja slijedi izraz za smično naprezanje na stjenci cijevi

$$\tau_w = \frac{\Delta P \dfrac{\pi D^2}{4}}{\pi D L} = \lambda \rho \frac{U|U|}{8} \ . \tag{2.42}$$

U kvazi-stacionarnom modelu pretpostavlja se da gornji izraz u svakom času vrijedi i za slučaj nestacionarnog strujanja, pri čemu je U trenutna srednja brzina strujanja. Ta pretpostavka daje zadovoljavajuće rezultate jedino u slučaju vrlo sporih nestacionarnosti.

Kod hidrauličkog udara vremenske promjene su brze, a srednja brzina strujanja nakon npr. trenutnog zatvaranja ventila jednaka je nuli. Međutim, potpuno suprotno rezultatu koji daje stacionarni model trenja, smično naprezanje je maksimalno upravo odmah nakon prolaska fronte vala. Naime pri prolasku tlačne fronte brzina fluida smanjuje se u svim točkama presjeka otprilike za isti iznos. Zato se upravo u blizini stjenke javljaju najveće brzine (u tom području mijenja se i smjer brzine), što zajedno s uvjetom lijepljenja rezultira maksimalnim gradijentom brzine u blizini stjenke.



Sl. 2.1 Profili brzine pri hidrauličkom udaru [4]

Zato se izraz za smično naprezanje na stjenci cijevi zapisuje kao zbroj kvazi-stacionarnog naprezanja τ_{ws} i nestacionarnog doprinosa naprezanju τ_{wu}

$$\tau_w(t) = \tau_{ws}(t) + \tau_{wu}(t) \,. \tag{2.43}$$

Za razliku od ovog modela, preostali 1D modeli trenja uzimaju u obzir ovu korekciju τ_{wu}, a razlikuju se upravo po modelu tog doprinosa.

2.2.2. Izrazi za korekciju kvazi-stacionarnog modela koji se baziraju na trenutnoj akceleraciji

Eksperiment [19] pokazao je da τ_{wu} poprima pozitivnu vrijednost pri ubrzanju strujanja, a negativnu vrijednost pri usporenju strujanja. Daily et al. [19] predložili su relaciju

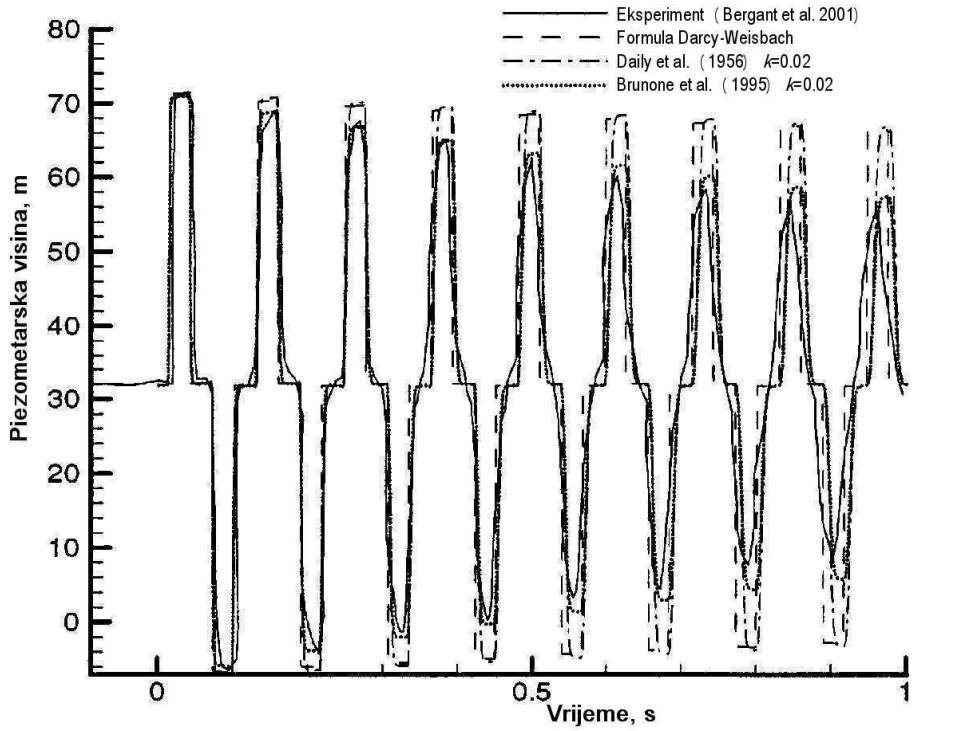
$$\tau_{wu} = \frac{k\rho D}{4}\frac{\partial U}{\partial t} \,. \tag{2.44}$$

Koeficijent k općenito zavisi od pozicije x i vremena t, pa se prigušivanje oscilacija koje daje ovaj model relativno loše poklapa s eksperimentom (v. Sl. 2.2).

Brunone et al. [20] predlažu sljedeću modifikaciju

$$\tau_{wu} = \frac{k\rho D}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial t} - c\frac{\partial U}{\partial x}\right) \,. \tag{2.45}$$

Ovaj poznati model jednostavan je za korištenje, a dobiva se zadovoljavajuće prigušenje oscilacija nakon hidrauličkog udara (v. Sl. 2.2). Zato se od svih modela trenja na bazi akceleracije ovaj model najčešće koristi. Potrebno je odabrati adekvatnu vrijednost samo jednog parametra – koeficijenta *k*. Bergant et al. [21] dobili su najbolje rezultate pri vrijednostima *k* između 0,033 i 0,085. Brunone et al. [20] koristili su vrijednost *k*=0,04.



Sl. 2.2 Tijek piezometarske visine pri hidrauličkom udaru, eksperiment i modeli [4]

Također su sugerirali da se *k* odabere prema izrazu

$$H_i - H_{i-1} = \frac{1}{1+k^2} \ , \tag{2.46}$$

pri čemu su H_i i H_{i-1} maksimalne vrijednosti piezometarske visine u dva konsekutivna titraja. Nekoliko autora predložilo je manje modifikacije ovog modela, kao npr. Pezzinga [22]

$$\tau_{wu} = \frac{k\rho D}{4}\left[\frac{\partial U}{\partial t} - \text{sign}\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)c\frac{\partial U}{\partial x}\right] , \tag{2.47}$$

i Bergant et al. [21]

$$\tau_{wu} = \frac{k\rho D}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \text{sign}(U)c\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|\right) . \tag{2.48}$$

Osim spomenute modifikacije, Pezzinga [22] je odredio vrijednost koeficijenta *k* za vlastiti model i za model Brunone et al. [20] na bazi rezultata složenijeg kvazi-2D modela Pezzinga [11]. Dimenzijskom analizom dobio je i varirao sljedeće tri bezdimenzijske značajke o kojima ovisi vrijednost koeficijenta *k*: početni Reynoldsov broj ($\mathbf{Re}_0=U_0D/\upsilon$), relativnu ekvivalentnu hrapavost k_r/D i karakteristični parametar cjevovoda y_0

$$y_0 = \frac{gH_f}{cU_0} = \lambda\frac{L}{D}\frac{U_0}{2c} = \frac{4L\tau_{ws}}{\rho DcU_0} , \tag{2.49}$$

pri čemu H_f označava linijski gubitak, a τ_{ws} smično naprezanje na stjenci; oboje u početnom stacionarnom strujanju. Pokazalo se da se vrijednosti *k* za oba modela ne razlikuju. Međutim, 1D model rješavao se pomoću dvije numeričke metode, metodom karakteristika (MK) i metodom konačnih diferencija (MKD), a rezultat (dobiveni *k*) je zavisio od primijenjene numeričke metode. Rezultat je također zavisio i od vremena simulacije (broja oscilatornih ciklusa). Prema tome, moguće je da koeficijent *k* zavisi od odabranog vremena promatranja pojave, ali s druge strane potrebna je temeljitija eksperimentalna verifikacija kako 1D tako i kvazi-2D modela.

Vardy i Brown [23] ponudili su teorijski izraz za određivanje koeficijenta *k*. Pri tome se pretpostavlja da se koeficijent turbulentne viskoznosti ne mijenja s vremenom i da ima raspodjelu istu kao kod stacionarnog strujanja. Zato je pouzdanost takvog modela upitna.

2.2.3. Analitički izrazi za korekciju kvazi-stacionarnog modela

Ovi modeli često se nazivaju modelima s težinskom funkcijom. Korištenje te funkcije (integral konvolucije), zahtijeva da se uzmu u obzir podaci od početka pojave pa sve do danog trenutka.

Modeli iz ove kategorije baziraju se na analitičkom rješenju Zielke [15] paralelnog osno-simetričnog strujanja. Integrirajući uzdužnu (*x*) komponentnu jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}f(t) , \tag{2.50}$$

po području poprečnog presjeka cijevi pomoću Laplaceove transformacije, dobije se za slučaj laminarnog strujanja u cijevi (λ=64/**Re**=64υ/DU) sljedeći izraz za korekciju smičnog naprezanja na stjenci cijevi koji sadrži integral konvolucije

$$\tau_{wu}(t) = \frac{4\nu\rho}{D} \int_0^t W(t-\vartheta)\frac{\partial U}{\partial \vartheta}(\vartheta)\, d\vartheta \ . \tag{2.51}$$

Težinska funkcija W(t) za slučaj τ≥0,02 glasi

$$W(t) = e^{-5,13562^2\tau} + e^{-8,41724^2\tau} + e^{-11,61984^2\tau} + e^{-14,79595^2\tau} + e^{-17,95982^2\tau} \ , \tag{2.52}$$

dok za slučaj τ<0,02 ta funkcija glasi

$$\begin{aligned} W(t) = \Big(& 0,282095\,\tau^{-1/2} - 1,250000 + 1,057855\,\tau^{1/2} + \\ & + 0,937500\,\tau + 0,396696\,\tau^{3/2} - 0,351563\,\tau^2 \Big) \ , \end{aligned} \tag{2.53}$$

pri čemu τ predstavlja bezdimenzijski vremenski koeficijent definiran izrazom

$$\tau = \frac{4\nu}{D^2}t \ . \tag{2.54}$$

Numeričko izračunavanje integrala konvolucije zahtijeva memoriranje brzine u svim točkama i u svim vremenskim trenucima (u svim točkama prostorno-vremenske mreže). Trikha [24] je pojednostavio ovaj numerički postupak tako da je težinsku funkciju aproksimirao pomoću tri eksponencijalne funkcije. Eksponencijalne funkcije omogućavaju jednostavno korištenje rekurzivnih formula, pa je dovoljno memorirati prošla stanja u obliku skupnih parametara samo iz prethodnog koraka.

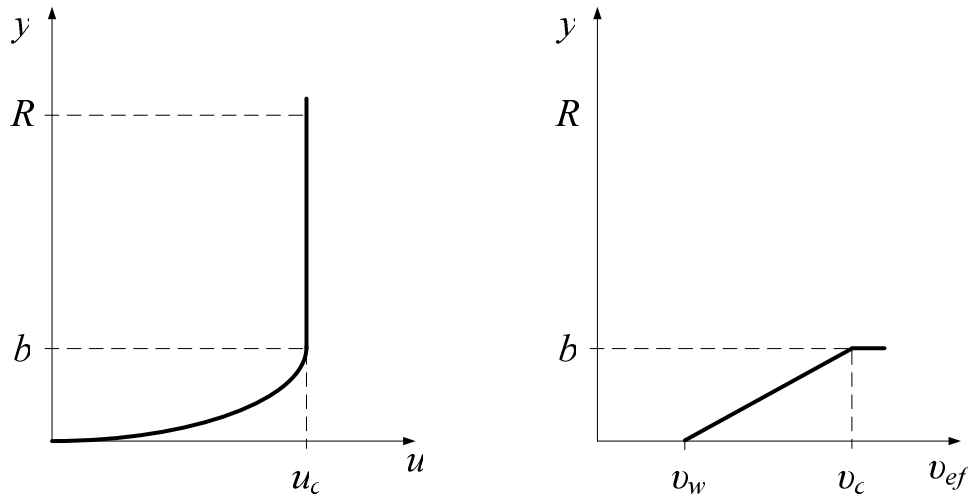
Suzuki et al. [25] za vrijeme τ<0,02 težinsku funkciju računaju prema originalnom Zielkeovom izrazu, a u vremenu τ≥0,02 rekurzivno poput Trikhe [24], jer svi članovi težinske funkcije u tom razdoblju ionako imaju oblik eksponencijalnih funkcija.

Trikha [24], Bergant et al. [21], Bergant i Simpson [26], Vardy et al. [16] ustanovili su da model Zielke [15] daje prihvatljive rezultate i za turbulentno strujanje pri niskom Reynoldsovom broju, makar je model izveden za laminarno strujanje.

Vardy et al. [16] su na analogni način kao što je za laminarno strujanje načinio Zielke [15], izveli model prikladan za nestacionarno turbulentno strujanje u glatkim cijevima pri niskim Reynoldsovim brojevima. Vardy i Brown [17] su kasnije taj model proširili i na slučajeve

turbulentnog strujanja u glatkim cijevima pri visokim Reynoldsovim brojevima, te [18] na turbulentno strujanje u potpuno hrapavim cijevima. Radi se dakle o modelima koji pokrivaju sve slučajeve strujanja u glatkim cijevima – od laminarnog do razvijenog turbulentnog.

Model Vardy i Brown [17] dobiva se integracijom dvoslojnog (jezgra i granični sloj) modela paralelnog osno-simetričnog turbulentnog strujanja po području poprečnog presjeka cijevi. Primijenjeni dvoslojni model (Sl. 2.3) primjeren je i prilagođen stacionarnom strujanju u cijevi. Pretpostavlja se da je u jezgri cijevi brzina stacionarnog strujanja konstantna $u=u_c$, a efektivna viskoznost υ_{ef} beskonačno velika.



Sl. 2.3 Stacionarni profil brzine i efektivne viskoznosti [17]

Uz pretpostavku da je srednja brzina u graničnom sloju jednaka $u_c/2$, pomoću jednadžbe kontinuiteta za stacionarno strujanje dobiva se sljedeći izraz za srednju brzinu strujanja U_0

$$\frac{U_0}{u_c} \cong 1 - \frac{b}{R} + \frac{b^2}{2R^2} \ , \tag{2.55}$$

gdje b označava debljinu graničnog sloja, a R polumjer cijevi ($R=D/2$). U slučaju relativno velikih Reynoldsovih brojeva (npr. $\lambda\mathbf{Re}_0>400$) može se staviti $U\approx u_c$.

Primjereno stacionarnom strujanju, u graničnom sloju pretpostavlja se linearni profil efektivne viskoznosti

$$\upsilon_{ef} = \upsilon_w(1+\alpha y), \tag{2.56}$$

pri čemu su υ_w viskoznost na stjenci ($\upsilon_w=\upsilon$), a y je poprečna koordinata (granični sloj se tretira kao ravninski uz korištenje Cartesijevog koordinatnog sustava). Da se izbjegne korištenje koeficijenta smjera α, uvodi se oznaka

$$\sigma \equiv \frac{\upsilon_w}{\upsilon_c} = (1+\alpha b) \ , \tag{2.57}$$

pri čemu je υ_c efektivna viskoznost na rubu graničnog sloja ($\upsilon_c=\upsilon_{ef}$ pri $y=b$).

Uzdužna komponentna jednadžba količine gibanja za granični sloj glasi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial x} = f(t) \ , \tag{2.58}$$

a za jezgru cijevi

$$-\frac{\partial u_c}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2\tau_c}{\rho(R-b)} \ , \tag{2.59}$$

gdje τ_c označava tangencijalno naprezanje na rubu jezgre cijevi.

Integracijom ovih jednadžbi za slučaj stacionarnog strujanja i uz pretpostavku da za stacionarno strujanje vrijede sljedeći izrazi za efektivnu viskoznost υ_c na rubu graničnog sloja [27]:

$$\frac{\upsilon_c}{u_\tau R} = 0{,}07 \ ; \ u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{ws}}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{8}\lambda U_0^2} \ , \tag{2.60}$$

i za koeficijent trenja u glatkim cijevima (Nikuradse)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log(\mathbf{Re}_0\sqrt{\lambda}) - 0{,}8 \ , \tag{2.61}$$

dobiju se za stacionarno strujanje sljedeći izrazi za određivanje σ i b

$$\sigma = 0{,}0124(\lambda\mathbf{Re}_0)(2\log\sigma + 3{,}02) \approx 0{,}0366(\lambda\mathbf{Re}_0)^{1{,}12} \ , \tag{2.62}$$

$$\frac{b}{R} = \frac{16}{\lambda\mathbf{Re}_0}\frac{u_c}{U_0}\frac{\sigma-1}{\ln\sigma} \ , \tag{2.63}$$

koji se koriste kao važeći za slučaj nestacionarnog strujanja, a također se dobije i sljedeći izraz za stacionarni dio smičnog naprezanja na stjenci cijevi

$$\tau_{ws} = \rho \upsilon_w u_c \frac{\sigma - 1}{\ln \sigma} \left[\frac{2\left(\frac{1}{\ln \sigma} - \frac{1}{\sigma - 1} \right)}{R + b\left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \frac{2}{\ln \sigma} \right)} + \frac{1}{b} \right] . \tag{2.64}$$

Jednadžbe količine gibanja za nestacionarno strujanje u graničnom sloju i jezgri se nakon toga podvrgavaju Laplaceovoj transformaciji. Jednadžba za granični sloj se pomoću supstitucije

$$\eta = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{s}{\upsilon_w} (1 + \alpha y)} \ , \tag{2.65}$$

(s je kompleksna varijabla) prevodi u Besselovu jednadžbu nultog reda kakvu je dobio i Zielke [15], pa se zatim integrira. Uzevši u obzir i transformat jednadžbe za jezgru, kao konačni rezultat dobije se Laplaceov transformat smičnog naprezanja uz stjenku cijevi τ_w' od kojeg se zatim oduzima transformat stacionarnog dijela τ_{ws}', pa na taj način preostaje transformat nestacionarnog doprinosa smičnog naprezanja uz stjenku τ_{wu}'. Inverznom transformacijom dobiva se izraz

$$\tau_{wu}(t) = \frac{4\upsilon\rho}{D} \int_0^t W(t - \vartheta) \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(\vartheta) \, d\vartheta \ , \tag{2.66}$$

koji sadrži težinsku funkciju $W(t)$, a po obliku je identičan s Zielkeovim [15] izrazom. Radi pojednostavljenja, transformat težinske funkcije $W'(s)$ se najprije zamjenjuje približnim izrazom $W_a'(s)$, čijom inverznom transformacijom se dobije težinska funkcija u sljedećem obliku

$$W(t) = A \exp(-Bt) / \sqrt{\pi t} \ , \tag{2.67}$$

$$A = \frac{D}{4\sqrt{\upsilon}} \ , \tag{2.68}$$

$$B = 0{,}54 \frac{\upsilon \mathbf{Re}_0^{\ \kappa}}{D^2} \ , \tag{2.69}$$

$$\kappa = \log\left(\frac{14{,}3}{\mathbf{Re}_0^{0{,}05}} \right) . \tag{2.70}$$

Slično kao što je Trikha [24] uveo aproksimaciju težinske funkcije za model Zielke [15] i time izbjegao potrebu da se memoriraju sve vrijednosti brzine od početnog časa, tako su i Ghidaoui i Mansour [28] predložili aproksimativni izraz za težinsku funkciju modela Vardy i Brown [17]. Ako se koristi taj izraz, potrebno je memorirati samo vrijednosti brzina iz prethodnog vremenskog koraka.

Pokazuje se da za slučaj konstantne akceleracije u modelu Vardy i Brown [17] nestacionarni dio smičnog naprezanja τ_{wu} dolazi u zasićenje (maksimum), ako konstantna akceleracija traje dulje od minimalnog vremena t_{min}=3,323β. Tada τ_{wu} zavisi uglavnom od vrijednosti te akceleracije, tako da tada ovaj model i izrazi koji se baziraju na trenutnoj akceleraciji npr. [20] daju podjednake vrijednosti τ_{wu}. Vrijeme t_{min} skraćuje se povećanjem Reynoldsovog broja (težinska funkcija W tada ima znatne vrijednosti samo u blizini vremena t=0), pa izrazi koji se baziraju na trenutnoj akceleraciji daju najbolje rezultate kada se pri visokim Reynoldsovim brojevima akceleracija mijenja polako (neko vrijeme je približno konstantna).

2.3 Modeli trenja za kvazi-2D model – modeli turbulencije

U kvazi-2D modelima trenje u laminarnom strujanju uzima se u obzir pomoću odgovarajućeg člana Navier-Stokesove jednadžbe (odn. koristeći Newtonov zakon viskoznosti). Za turbulentno strujanje koristi se nekoliko modela turbulencije.

Iskustvo pokazuje da se već pomoću vrlo jednostavnih profila brzine turbulentnog strujanja dobivaju zadovoljavajući rezultati u pogledu osnovnih karakteristika nestacionarnog strujanja. S druge strane profili brzine ne nalikuju profilima stacionarnog strujanja, a razlikovanje laminarnog i turbulentnog režima otežano je činjenicom da se turbulencija javlja samo u fazi usporavanja strujanja, dok prilikom ubrzavanja dolazi do relaminarizacije.

Za Reynoldsova naprezanja uglavnom su se koristili algebarski modeli, npr. Vardy i Hwang [9], Pezzinga [11], Silva-Araya i Chaudry [12], Silva-Araya i Chaudry [29], Ohmi et al. [13] dok su se sofisticiraniji modeli poput κ-ε modela koristili rjeđe. Rezultati dobiveni κ-ε modelom i algebarskim modelima nisu se bitnije razlikovali.

Metoda koju su razvili Vardy i Hwang [9] koristi se 5-zonskim algebarskim modelom turbulencije koji su za nestacionarno strujanje razvili Kita et al. [30]. Zone su sljedeće: laminarni podsloj, dvije prijelazne zone, zona logaritamskog zakona i jezgra. Upotreba ovog modela za slučaj nestacionarnog strujanja ponekad stvara poteškoće jer u nestacionarnom strujanju turbulencija ne zavisi samo od smičnog naprezanja na stjenci cijevi τ_w, kao što predviđa ovaj model turbulencije.

Metoda koju je razvio Pezzinga [11] koristi algebarski model turbulencije s dvije zone To su laminarni podsloj i turbulentna zona u kojoj se koristi Prandtlova hipoteza puta miješanja.

Iako ta hipoteza uzima u obzir i profil brzine, koeficijenti i izraz za put miješanja baziraju se na stacionarnom strujanju.

Ghidaoui et al. [31] ustanovili su da ova dva modela daju približno jednake rezultate za slučaj nestacionarnog strujanja u cijevi, kao i da piezometarska visina H ne zavisi od raspodjele turbulentne viskoznosti u jezgri cijevi.

Valjanost Reynoldsovih jednadžbi za slučaj nestacionarnog strujanja je upitna jer, za pouzdano vremensko osrednjavanje, karakteristično vrijeme za turbulenciju mora biti znatno kraće od karakterističnog vremena nestacionarne pojave, a to nije uvijek moguće. Možda će se zato u budućnosti u većoj mjeri koristiti metoda simulacije velikih vrtloga.

2.4 Stabilnost strujanja

Suprotno tadašnjim očekivanjima, eksperimenti koje je izvršio Shuy [32] pokazali su da se smično naprezanje uz stjenku povećava pri usporavanju strujanja i smanjuje pri ubrzavanju. Shuy pretpostavlja da pri ubrzavanju turbulentnog strujanja dolazi do relaminarizacije.

Eksperimenti koje su proveli Das i Arakeri [33] pokazali su da nestacionarno strujanje postaje nestabilno kad se prijeđe kritična vrijednost Reynoldsovog broja i karakterističnog vremena. Nestabilnosti u eksperimentu pokušali su objasniti koristeći kvazi-stacionarnu analizu stabilnosti linearnih sustava. Sa smanjenjem protoka točka infleksije u profilima brzine koji imaju recirkulaciju udaljava se od stjenke, čime se smanjuje stabilnost strujanja. Istovremeno Reynoldsov broj se smanjuje, povećavajući time stabilnost strujanja. Pojava nestabilnosti zavisit će o tome koji od ova dva suprotna utjecaja prevlada. Nestabilnost se očituje u nastanku spiralnih vrtloga koji se naglo raspadaju u turbulenciju.

Brunone et al. [34] snimali su profile brzine u nestacionarnom turbulentnom strujanju u cijevi i ustanovili da se nakon prolaska fronte tlačnog udara natražno strujanja javlja naizmjenično odn. periodički u gornjem i u donjem dijelu cijevi, čime se znatno narušava aksijalna simetrija.

Kvazi-stacionarna linearna analiza koju su načinili Ghidaoui i Kolyshkin [35], tako da su nestacionarne profile brzina s recirkulacijom podvrgli trodimenzionalnim perturbacijama, pokazuje da, zavisno od Reynoldsovog broja i bezdimenzijskog vremena, nestacionarno

strujanje u cijevi može biti unutar stabilne ili nestabilne domene. Dobili su krivulje neutralne ravnoteže na granici tih dviju domena. To su krivulje na kojima se poremećaji ne povećavaju niti smanjuju. Krivulje neutralne ravnoteže predstavljaju parove kritičnih vrijednosti Reynoldsovog broja i vremena. Također se pokazalo da je najnestabilniji asimetrični modus uz azimutni valni broj jednak jedinici. Eksperimenti koje je izvršio Shuy [32] bili su prvi eksperimenti izvršeni unutar nestabilne domene. Strujanje se stabilizira ako se u okolici točke infleksije profila brzine gradijent brzine s vremenom smanjuje. Taj gradijent povećava se npr. znatnim smanjivanjem protoka. Također, destabilizirajuće djeluje i udaljavanje točke infleksije od stjenke cijevi. Nestabilnost se pojavljuje relativno brzo, a između ostalog narušava aksijalnu simetriju profila brzine, mijenja strukturu i intenzitet turbulencije. Suvremeni 2D modeli nestacionarnog strujanja nisu u stanju simulirati takvu nestabilnost strujanja.

Ghidaoui et al. [31] provjeravali su rezultate dva poznata kvazi-2D modela. Pokazalo se da se u području u kojem se očekuje nestabilnost i spiralni vrtlozi rezultati dobiveni tim modelima do 100% razlikuju od eksperimentalnih rezultata.

2.5 Pretpostavka 'zamrznute' i kvazi-stacionarne turbulencije

U modelima smičnog naprezanja koji se baziraju na analitičkom rješenju pomoću integrala konvolucije, Vardy et al. [16], Vardy i Brown [17] pretpostavili su da raspodjela turbulentne viskoznosti stacionarnog strujanja ostaje ista, vremenski nepromjenljiva ('zamrznuta'), za vrijeme nestacionarnog strujanja. U svojim 2D modelima Vardy i Hwang [9], Pezzinga [11], Silva-Araya i Chaudry [12] pretpostavljaju da u nestacionarnom strujanju vrijede izrazi za turbulentnu viskoznost stacionarnog strujanja (pretpostavka kvazi-stacionarne turbulentne viskoznosti). Predložena metoda koristi kvazi-stacionarni model turbulencije po uzoru na metodu Vardy i Hwang.

Ghidaoui et al. [31], Greenblatt i Moss [36], He i Jackson [37] izvještavaju da nakon prolaska fronte vala dolazi do kašnjenja promjene turbulencije izazvane tim valom. Jednoliki pomak cijelog profila brzine prilikom prolaska vala ima za posljedicu nepromjenljivost gradijenta brzine neposredno nakon prolaska vala. Tada se jedino mijenja gradijent uz stjenku cijevi što dovodi do nastanka vrtložne površine u tom području. S vremenom, nakon prolaska fronte, ti vrtlozi se difuzijom prenose prema jezgri cijevi, pa u sve većoj mjeri utječu na gradijent

brzine, intenzitet i strukturu turbulencije u prijelaznoj zoni graničnog sloja. He i Jackson [37] predložili su način za procjenu ovog kašnjenja.

Ghidaoui et al. [31] kao kriterij opravdanosti pretpostavke kvazi-stacionarne turbulentnosti predlažu omjere karakterističnih vremena radijalne difuzije i vremena propagacije vala. Prihvatljivim su označili situacije u kojima je jedno od vremena znatno veće od drugog, dok je pretpostavka upitna u situacijama gdje su ta vremena istog reda veličine.

U ovom radu primjenjuje se pretpostavka 'zamrznute' turbulencije.

2.6 Numeričko rješavanje 1D modela, numeričke sheme

Metoda karakteristika (MK) najprikladnija je i najčešće korištena numerička metoda za rješavanje 1D modela nestacionarnog strujanja u cijevima. Osim ove metode, u manjoj mjeri još su se koristile metoda konačnih diferencija (MKD), metoda konačnih volumena (MKV) i valna metoda. Metoda konačnih elemenata za sada nije korištena u komercijalnim programima.

U MK najčešće se koristi fiksna rešetka. U cjevovodnim sustavima ona zahtijeva istovjetan vremenski korak za sve dionice. Obzirom da dionice cjevovoda imaju različite duljine, a neki puta i različite brzine zvuka, uz istovjetan vremenski korak u principu nije moguće potpuno zadovoljiti Courantov kriterij. Ovaj problem rješava se interpolacijom, pri čemu se koristi niz interpolacijskih tehnika odn. shema.

Wiggert i Sundquist [38] koristili su interpolacijsku shemu u kojoj kombiniraju prostornu linearnu interpolaciju i implicitnu shemu. Goldberg i Wylie [39] razvili su shemu eksplicitnog diferenciranja u kojoj su koristili rješenja iz većeg broja ranijih vremenskih koraka. Lai [40] je u svojoj više-modusnoj shemi kombinirao eksplicitnu shemu i interpolaciju ili ekstrapolaciju po prostoru s klasičnom linearnom interpolacijom u prostoru i vremenu. Zavisno od veličine vremenskog i prostornog koraka, kao i od broja korištenih prethodnih vremenskih koraka, ova shema može funkcionirati kao jedna ili druga ili proizvoljna kombinacija obje sheme. Time se korisniku pruža potpuna fleksibilnost. Yang i Hsu [41] također koriste eksplicitnu shemu u kojoj koriste podatke iz većeg broja ranijih vremenskih koraka. Zatim koriste metodu Holly-Preissmann za interpolaciju u prostoru ili u vremenu. Sibertheros et al. [42] uspješno su primijenili spline metodu u jednostavnim problemima i cjevovodima, dok se u složenijim

situacijama javlja problem definiranja rubnih uvjeta za spline. Radi ubrzanja proračuna i smanjenja korištenja računala Karney i Ghidaoui [43] razvili su složeni algoritam koji se može koristiti za inicijalni proračun. Njihov "hibridni" pristup koristi interpolaciju duž karakteristike, interpolaciju iz najbliže točke i "metodu prilagodbe putanje vala".

Valna metoda koju su primijenili Wood et al. [44] nalikuje MK, ali poremećajne funkcije moraju po odsječcima biti konstantne. To povlači da se radi o shemi prvog reda točnosti u prostoru i vremenu. Također i trenje se mora aproksimirati funkcijama konstantnim po odsječcima. To u rješenju izaziva nefizikalne oscilacije male amplitude. Problem predstavlja i činjenica da nije riješen način na koji bi se u shemu uključio integral konvolucije (težinska funkcija).

Pokušaj da se pomoću MKD i implicitne sheme centralnih diferencija na račun stabilnosti implicitnih shema omoguće veći vremenski koraci često ne daje zadovoljavajuće rezultate, jer implicitne sheme iskrivljuju propagaciju vala i nisu posebno pogodne za računanje propagacije valova. Također, implicitna metoda zahtijeva rješavanje relativno velikih sustava jednadžbi. Zato se za numeričko rješavanje hiperboličkih jednadžbi pretežno koriste eksplicitne sheme. Chaudhry i Hussaini [45] primijenili su tri eksplicitne MKD-sheme drugog reda točnosti po prostoru i vremenu (sheme MacCormak, Lambda i Gabutti) za jednadžbe hidrauličkog udara. Pokazalo se da ove metode daju bolje rezultate nego MK sa shemom prvog reda točnosti, ali se u profilu vala pojavljuju sumnjive oscilacije.

MKV se nije često koristila za rješavanje problema hidrauličkog udara. Guinot [46], Hwang i Chung [47] rješavali su model hidrauličkog udara bez difuzije (bez trenja). Oni rješavaju Riemannov problem i koriste Godunove sheme. Guinot [46] koristeći Godunovu shemu prvog reda točnosti dobiva metodu nalik MK s prostornom linearnom interpolacijom. Hwang i Chung [47] koriste metodu drugog reda točnosti. Pri tome su kao nepoznanicu umjesto piezometarske visine odabrali gustoću, što zahtjeva da se definira veza piezometarske visine i gustoće, te izaziva probleme pri definiranju rubnih uvjeta.

2.7 Numeričko rješavanje kvazi-2D modela, numeričke sheme

Osnovne jednadžbe kvazi-2D modela

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0\ , \tag{2.71}$$

- *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{r\rho}\frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r}\ , \tag{2.72}$$

predstavljaju sustav hiperboličkih-paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Uz zanemarivanje konvektivnih članova, Vardy i Hwang [9] ovaj model rješavaju na hibridni način – hiperbolični dio pomoću MK, a parabolični dio pomoću MKD. Taj način je u suglasju s fizikalnom pozadinom hidrauličkog udara, jer se MK koristi za proračun valnog dijela jednadžbi, a centralne diferencije za difuzijski dio. Također, iako su radijalni maseni protoci relativno mali, njihovo uključenje u jednadžbu kontinuiteta ima opravdanje u točnosti, stabilnosti i fizikalnoj korektnosti. Korištenje MK općenito omogućava istraživačima da koriste analize, metode, interpolacijske sheme i iskustva različitih 1D MK modela.

Karakteristični oblik ovih jednadžbi je

$$\frac{dH}{dt}\pm\frac{c}{g}\frac{du}{dt}=-\frac{c^2}{g}\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\pm\frac{c}{g}\frac{1}{r\rho}\frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r}\ , \tag{2.73}$$

duž karakteristika

$$\frac{dx}{dt}=\pm c\ . \tag{2.74}$$

Diskretizacijom ovog sustava Vardy i Hwang [9] dobili su 5-dijagonalni sustav $2N_{\Delta r}\times 2N_{\Delta r}$ jednadžbi, gdje je $N_{\Delta r}$ broj podjela u radijalnom smjeru. Za rješavanje tog sustava potrebno je vrijeme centralnog procesora reda veličine $N_{\Delta r}^3$. Zhao i Ghidaoui [48] taj sustav su sveli na dva 3-dijagonalna sustava $N_{\Delta r}\times N_{\Delta r}$ jednadžbi čime se vrijeme centralnog procesora svelo na red veličine $N_{\Delta r}$.

Pezzinga [11] određuje tlak rješavanjem jednadžbe kontinuiteta koristeći eksplicitnu MKD shemu. Nakon toga određuje profile brzine rješavanjem jednadžbe količine gibanja, pri čemu koristi implicitnu MKD shemu. Na kraju se ukupni protok računa integracijom brzine po površini presjeka cijevi. Proračun je brz jer su jednadžbe kontinuiteta i količine gibanja razdvojene pa se rješavaju zasebno, a radijalna diskretizacija jednadžbe količine gibanja dovodi do 3-dijagonalne matrice. Nažalost računanje protoka integracijom brzine neki puta uzrokuje nefizikalne oscilacije proračunatog tlaka. Da bi se oscilacije izbjegle, potrebna je fina diskretizacija u radijalnom smjeru.

Ohmi et al. [13] rješavanjem 1D modela određuje tlak i srednju brzinu. U nastavku, dobiveni gradijent tlaka koristi se u kvazi-2D jednadžbi količine gibanja za određivanje profila brzine. Profil brzine se nakon toga koristi za računanje tangencijalnog naprezanja na stjenci cijevi potrebnog u 1D modelu.

Slična je i metoda koju koriste Silva-Araya i Chaudhry [12], [29]. Nakon što se izračuna profil brzine, on se koristi za računanje protoka i disipacije energije. Iz te disipacije dobije se omjer disipacija, na temelju kojeg se određuje korekcija člana s trenjem u 1D jednadžbi. Korigirani 1D model rješava se za tlak i protok. Zatim se korigira gradijent tlaka i proračun se ponavlja sve dok se dovoljno ne smanji razlika protoka dobivenog integracijom profila brzine i onog dobivenog 1D modelom.

3. PREDLOŽENI MODEL I METODA RJEŠAVANJA

3.1 Metoda karakteristika

Primjena metode karakteristika za situacije 2D i 3D strujanja fluida opisana je u Hirsch [49], [50], a primjer uspješne realizacije na katedri za Mehaniku fluida FSB-a Zagreb dan je u Šavar [51], Šavar et al. [52], [53], [54]. Metoda karakteristika primjenjuje se za parcijalne diferencijalne jednadžbe (PDJ) kojima se opisuju pojave dominantno konvektivnog odn. valnog karaktera, tj. za PDJ prvog reda hiperboličkog tipa. Za primjenu metode karakteristika, fizikalni model treba prikazati u obliku sustava PDJ prvog reda (više derivacije u principu se obračunavaju putem izvorskog člana).

U odlomku 3.1 daje se opći prikaz metode karakteristika prikladan za 2D i 3D modele (tj. prikladan i za daljnji rad). Metoda će se primijeniti na primjer potpunog 2D modela, tj. na slučaj aksijalne simetrije strujanja slabo stlačivog fluida. Kasnije će se potpuni 2D model reducirati na kvazi-2D model kakav se razmatra u ovom radu.

3.1.1. Općenito

Sustav PDJ zapisuje se kao sustav k_u jednadžbi ($i = 1,k_u$) oblika

$$a_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} = q_i\,, \tag{3.1}$$

u k_u nepoznatih funkcija u_j (dakle $j = 1,k_u$). ξ_k označava nezavisnu varijablu ($k = 1,k_x+1$, k_x je broj prostornih koordinata x_k), a_{ijk} je koeficijent, a q_i je izvorski član.

Homogeni dio gornjeg sustava ima valno rješenje oblika

$$u_j = \hat{u}_j e^{\mathbf{i}(n_l\xi_l)}\,, \tag{3.2}$$

pri čemu $\hat{u}_j$ označava amplitudu, $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$, n_l je komponenta vektora. Očito je da je rješenje u_j konstantno kada je skalarni produkt $n_l\xi_l$ konstantan.

Za nestacionarne sustave uobičajeno je posebno izraziti vremensku koordinatu t i vremenske promjene. Tada je $\xi_i=x_i$, (i = 1,k_x; k_x je broj prostornih koordinata x_k); $\xi_{k_x+1}=t$, pa se sustav (3.1) zapisuje u obliku

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=q_i,\ (i,j=1,k_u;\ k=1,k_x), \tag{3.3}$$

gdje je koeficijent a_{ijk} element Jacobijeve matrice.

Rješenje homogenog sustava (3.2) obično se zapisuje u obliku

$$u_j=\hat{u}_j e^{\mathbf{i}(\kappa_i x_i-\omega t)}, \tag{3.4}$$

pri čemu je ω karakteristična kružna frekvencija vala ($\omega=2\pi f$, f je karakteristična frekvencija vala), a κ_i je vektor valnog broja čija apsolutna vrijednost je

$$\kappa=\frac{2\pi}{\lambda}, \tag{3.5}$$

gdje je λ valna duljina. Također vrijedi relacija

$$a_i\kappa_i=\omega, \tag{3.6}$$

pri čemu a_i označava vektor brzine kretanja vala u smjeru njegovog prostiranja, pa u slučaju kolinearnosti vektora a_i i κ_i vrijedi

$$a=\frac{\omega}{\kappa}, \tag{3.7}$$

i

$$a_i=\frac{\omega\kappa_i}{\kappa^2}. \tag{3.8}$$

Nadalje, ako $S(\xi_i)=S(x_i,t)=const$ označava svojstvenu hiper površinu odn. površinu fronte vala, tada za hiper prostor (koji uključuje vrijeme t kao jednu od dimenzija ξ_i) vrijedi

$$grad_{(\xi)}\ S(\xi_i)=\frac{\partial S(\xi_i)}{\partial \xi_j}\vec{e}_{(\xi)j}=\vec{n}, \tag{3.9}$$

tj. gradijent-vektor n_i normalan je na hiper površinu $S(\xi_i)$, dok za fizički prostor vrijedi

$$grad_{(x)}\ S(x_i,t)=\frac{\partial S(x_i,t)}{\partial x_j}\vec{e}_{(x)j}=\vec{\kappa},\ (t=const) \tag{3.10}$$

tj. gradijent-vektor κ_i normalan je na pod-površinu koja nastaje presijecanjem $S(x_i,t)$ ravninom $t=const$. Očito je da vrijedi relacija

$$\frac{\partial S(x_i,t)}{\partial t} = n_t = -\omega, \tag{3.11}$$

pri čemu n_t označava komponentu vektora n_i u smjeru koordinatne osi t, kao i da se rješenje (3.2) alternativno može zapisati u obliku

$$u_j = \hat{u}_j e^{\mathbf{i} n_k \xi_k} = \hat{u}_j e^{\mathbf{i}(\kappa_k x_k - \omega t)} = \hat{u}_j e^{\mathbf{i}(\frac{\partial S}{\partial x_k} x_k + \frac{\partial S}{\partial t} t)}. \tag{3.12}$$

Pri tome će vrijednost u_j biti konstantna u smjeru okomitom na n_j (tj. kad je unutrašnji produkt $n_k\xi_k$=0), a to znači tangencijalno na površinu $S(\xi_i)=const$ orijentiranu gradijentom n_j. Gornji izraz je rješenje homogenog sustava PDJ

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0\,, \ (i,j = 1,k_u;\ k = 1,k_x), \tag{3.13}$$

pa se njegovim uvrštenjem u taj sustav, nakon dijeljenja s $\mathbf{i} e^{\mathbf{i}(\kappa_k x_k - \omega t)}$ dobiva

$$(-\omega\delta_{ij} + \kappa_k a_{ijk})\hat{u}_j = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\delta_{ij} + \frac{\partial S}{\partial x_k} a_{ijk} \right)\hat{u}_j = 0\,. \tag{3.14}$$

Ovaj sustav jednadžbi može imati rješenja različita od trivijalnog rješenja ($\hat{u}_j = 0$) jedino u slučaju kad je determinanta sustava jednaka nuli

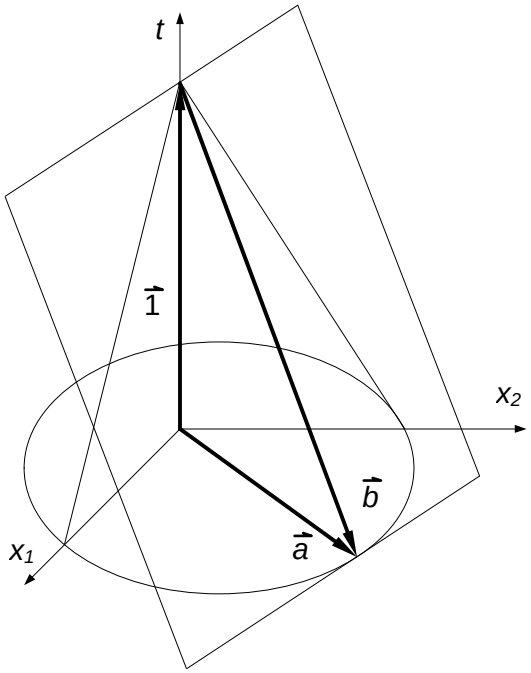
$$\det\left| -\omega\delta_{ij} + \kappa_k a_{ijk} \right| = \det\left| \frac{\partial S}{\partial t}\delta_{ij} + \frac{\partial S}{\partial x_k} a_{ijk} \right| = 0\,. \tag{3.15}$$

Iz tog uvjeta određuje se karakteristična kružna frekvencija ω. Za svaki odabrani smjer κ_i, jednadžba će imati k_x ne-trivijalnih rješenja $\omega^{(i)}$, ($\omega^{(i)}$, i=1,k_x). Vidljivo je da ona zapravo predstavljaju svojstvene (eigen) vrijednosti matrice $\kappa_k a_{ijk}$. Ako se jednadžba podijeli s κ, dobiva se jednadžba za određivanje karakteristične brzine prostiranja vala a u smjeru normale na svojstvenu površinu $S(x_i, t)=const$. odn. u smjeru gradijenta na tu površinu.

$$\det\left| -\frac{\omega}{\kappa}\delta_{ij} + \frac{\kappa_k}{\kappa} a_{ijk} \right| = \det\left| -a\delta_{ij} + \frac{\kappa_k}{\kappa} a_{ijk} \right| = 0\,. \tag{3.16}$$

Za proizvoljni smjer $\kappa_i^0 = \kappa_i/\kappa$ svojstvene površine postoji k_x svojstvenih vrijednosti $\lambda^{(i)} = a^{(i)} = \omega^{(i)}/\kappa$ ($a^{(i)}$, i=1,k_x).

Anvelopa svih svojstvenim površina (orijentiranih svim smjerovima κ_i) tvori Machov konus. Obzirom na točku vrha konusa, Machov konus u prošlosti omeđuje zonu ovisnosti, a u budućnosti zonu utjecaja te točke. Svojstvena površina dodiruje Machov konus po liniji koja se naziva karakteristika (bikarakteristika – u smjeru vektora b_i). Machov konus, te svojstvena površina i karakteristika za odabrani smjer κ_i^0 prikazani su na sl. 3.1 Ako se u jednadžbu svojstvene površine $\kappa_i x_i - \omega t = 0$ odabere t=1, usporedbom s definicijom brzine a_i dobiva se $x_i = a_i$.



Sl. 3.1 Machov konus i svojstvena ravnina za 2D situaciju

Izrazom

$$l_j^{(m)} a_{ijk} \frac{\kappa_k}{\kappa} = \lambda^{(m)} l_i^{(m)}, \tag{3.17}$$

(ne sumira se po indeksu u zagradi, tj. u ovom slučaju po m) definiran je lijevi svojstveni (eigen) vektor $l^{(m)}{}_i$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda^{(m)}$.

Ako se sve svojstvene vrijednosti zapišu u obliku dijagonalne matrice

$$\mathbf{\Lambda} = [\Lambda_{mn}] = \left[\lambda^{(m)} \delta_{mn}\right], \tag{3.18}$$

i uvede oznaka za matricu

$$\mathbf{K} = \left[K_{ij}\right] = \left[a_{ijk} \frac{\kappa_k}{\kappa} \right], \tag{3.19}$$

moguće je izraz za jedan svojstveni vektor (3.17) matrično zapisati za sve svojstvene vektore

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^{-1}, \tag{3.20}$$

gdje $l_i^{(m)}$ svojstveni vektor predstavlja *m*-ti redak matrice $\mathbf{L}^{-1}$. Dijagonalizacija matrice **K** provodi se tako da se gornja jednadžba pomnoži matricom **L** s lijeve strane, pa se dobije

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{L}^{-1} \ . \tag{3.21}$$

Ako se osnovni sustav PDJ pomnoži svojstvenim vektorom s lijeve strane

$$l_i^{(m)} \frac{\partial u_i}{\partial t} + l_i^{(m)} a_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = l_i^{(m)} q_i \,, \tag{3.22}$$

dobiva se jednadžba kompatibilnosti. Zapisom ove jednadžbe za sve svojstvene vektore

$$\left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{im} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{im} a_{mnk} \left[\mathbf{L}\right]_{nj} \left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{jp} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} = \left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{im} q_m \,, \tag{3.23}$$

omogućava se prijelaz na svojstvene varijable w_i

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \tilde{a}_{ijk} \frac{\partial w_j}{\partial x_k} = \tilde{q}_i \,, \tag{3.24}$$

pri čemu su uvedene oznake

$$\tilde{a}_{ijk} = \left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{im} a_{mnk} \left[\mathbf{L}\right]_{nj} \,, \tag{3.25}$$

$$\tilde{q}_i = \left[\mathbf{L}^{-1}\right]_{im} q_m \,, \tag{3.26}$$

$$\delta w_i = l_k^{(i)} \delta u_k \,, \tag{3.27}$$

a simbol δ označava odgovarajuću (vremensku ili prostornu) promjenu. Treba naglasiti da dobivene karakteristične varijable w_i zavise od odabranog smjera propagacije κ_i.

Ukoliko se odabere vektor κ_i u smjeru koordinatne osi x_j,

$$\kappa_i = e^{(j)}{}_i, \tag{3.28}$$

pri čemu je $e^{(j)}{}_i$ jedinični (bazni) vektor u smjeru koordinatne osi x_j, jednadžba svojstvene površine kroz ishodište $\kappa_i x_i - \omega t = 0$ daje jednadžbu karakteristike za taj smjer

$$x_{(j)} = \omega^{(m)} t = a^{(m)} t, \tag{3.29}$$

pri čemu indeks *m* označava razne svojstvene vrijednosti za taj smjer. Deriviranjem ove jednadžbe po vremenu t dobiva se uobičajeni zapis dane karakteristike

$$\frac{dx_{(j)}}{dt} = a^{(m)} \ . \tag{3.30}$$

Duž ove karakteristike može se jednadžba (3.24) izražena pomoću svojstvenih varijabli zapisati u obliku

$$\frac{dw_i^{(m)}}{dt} = \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial x_{(j)}} \frac{dx_{(j)}}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial t} + a^{(m)} \frac{\partial w_i}{\partial x_{(j)}} = s_i^{(m)} \ , \tag{3.31}$$

pri čemu su preostali članovi jednadžbe prebačeni u novi izvorski član $s^{(j)}_i$.

3.1.2. Primjena MK na aksijalno simetričan model strujanja

Osnovne jednadžbe aksijalno simetričnog modela za slabo stlačivi fluid

Brzina napredovanja tlačnog poremećaja (brzina zvuka)

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \ , \tag{3.32}$$

dakle $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt}$;

Pretpostavlja se da vrijedi Boussinesqova hipoteza, tj. Reynoldsova naprezanja izražavaju se pomoću koeficijenta turbulentne viskoznosti μ_T, a ukupna naprezanja modeliraju se pomoću koeficijenta efektivne (ukupne) viskoznosti $\mu_{ef} = \mu + \mu_T$.

Osnovne jednadžbe strujanja za aksijalno simetričnu situaciju zapisane u cilindarskom koordinatnom sustavu (koordinatne osi *x*, *r* komponente brzine *u*, *v*):

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \ , \tag{3.33}$$

– *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\upsilon_{ef}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \tag{3.34}$$

– *r*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}=f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\upsilon_{ef}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\upsilon_{ef}r\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{2\upsilon_{ef}v}{r^2}, \tag{3.35}$$

Model zapisan u karakterističnom obliku

Za dvodimenzijski (k_x=2) model definiran jednadžbama (3.33)–(3.35) vektor nezavisnih varijabli glasi

$$[x_k]=\begin{bmatrix}x\\r\end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

pa se model sukladno jednadžbi (3.3) može zapisati u obliku

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_{ij1}\frac{\partial u_j}{\partial x}+a_{ij2}\frac{\partial u_j}{\partial r}=q_i, \tag{3.37}$$

pri čemu su (uz i,j = 1,k_u; k_u=3)

$$[u_j]=\begin{bmatrix}p\\u\\v\end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

$$[a_{ij1}]=\begin{bmatrix}u & \rho c^2 & 0\\ 1/\rho & u & 0\\ 0 & 0 & u\end{bmatrix}, \tag{3.39}$$

$$[a_{ij2}]=\begin{bmatrix}v & 0 & \rho c^2\\ 0 & v & 0\\ 1/\rho & 0 & v\end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$[q_i]=\begin{bmatrix} -\dfrac{\rho c^2 v}{r} \\ f_x+2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon_{ef}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\upsilon_{ef} r\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\ f_r+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\upsilon_{ef}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right]+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\upsilon_{ef} r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)-\dfrac{2\upsilon_{ef} v}{r^2} \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Kad se uvede oznaka $\kappa^0_i=\kappa_i/\kappa$ za jedinični vektor normale, svojstvene vrijednosti računaju se iz uvjeta

$$\det(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I})=\det\left(a_{ijk}\kappa^0_k-\lambda\delta_{ij}\right)=0\ , \tag{3.42}$$

pri čemu

$$\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix} u\kappa^0_x+v\kappa^0_r-\lambda^{(m)} & \rho c^2\kappa^0_x & \rho c^2\kappa^0_r \\ \kappa^0_x/\rho & u\kappa^0_x+v\kappa^0_r-\lambda^{(m)} & 0 \\ \kappa^0_r/\rho & 0 & u\kappa^0_x+v\kappa^0_r-\lambda^{(m)} \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

gdje su uvaženi smjerovi koordinatnih osi $\kappa_1=\kappa_x$; $\kappa_2=\kappa_r$. Odabire se normala $\kappa_i=\kappa^0_i$ (tj. κ=1) u smjeru koordinatne osi u smjeru osi cijevi κ_i=(1,0) tj. κ_x=1; κ_r=0, tako da gornji izraz postaje

$$\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix} u-\lambda^{(m)} & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & u-\lambda^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & u-\lambda^{(m)} \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

pa svojstvene vrijednosti $\lambda(m)$ moraju zadovoljavati uvjet

$$\det(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I})=(u-\lambda^{(m)})\left[(u-\lambda^{(m)})^2-c^2\right]=0\,, \tag{3.45}$$

koji ima sljedeća 3 rješenja

$$\lambda(1)=u+c, \tag{3.46}$$

$$\lambda(2)=u-c, \tag{3.47}$$

$$\lambda(3)=u. \tag{3.48}$$

Linije karakteristika (bikarakteristike) dobivaju se iz uvjeta

$$\kappa 0_i x_i-\lambda(^m)t=0, \tag{3.49}$$

pa se uvrštenjem gornjih svojstvenih vrijednosti $\lambda^{(m)}$ dobiva

$$x(1)=(u+c)t\ , \tag{3.50}$$

$$x(2)=(u-c)t\ , \tag{3.51}$$

$$x(3)=ut\ . \tag{3.52}$$

Svojstveni vektori $l^{(m)}{}_i$ određuju se rješavanjem singularnog sustava jednadžbi

$$l_j^{(m)}\left[\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I}\right]_{ji} = l_j^{(m)}\left(a_{jik}\kappa_k^0 - \lambda^{(m)}\delta_{ji}\right) = 0\,, \tag{3.53}$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(m)} & l_2^{(m)} & l_3^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u-\lambda^{(m)} & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & u-\lambda^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & u-\lambda^{(m)} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{3.54}$$

Uvrštavanjem svake od 3 svojstvene vrijednosti $\lambda^{(m)}$ (m=1,3) dobivaju se odgovarajuća 3 svojstvena vektora

$$l(1)_i = \mu_1(1,\ \rho c,\ 0), \tag{3.55}$$

$$l(2)_i = \mu_2(1,\ -\rho c,\ 0), \tag{3.56}$$

$$l(3)_i = \mu_3(0,\ 0,\ 1), \tag{3.57}$$

gdje μ_1, μ_2, μ_3, označavaju proizvoljne konstante za koje se odabire vrijednost $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$. Ovi vektori tvore matricu

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho c & 0 \\ 1 & -\rho c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.58}$$

s determinantom

$$\det(\text{L-1}) = -2\rho c, \tag{3.59}$$

i inverznom matricom

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\rho c} & -\frac{1}{2\rho c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

Odgovarajuće svojstvene varijable određuju se prema izrazu

$$\delta\mathbf{W} = \mathbf{L}^{-1}\delta\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \rho c & 0 \\ 1 & -\rho c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

i glase

$$\delta\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \delta p + \rho c \delta u \\ \delta p - \rho c \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Transformirane Jacobijeve matrice su

$$\tilde{a}_{ij1} = \mathbf{L}^{-1}\left[a_{mn1}\right]\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \rho c & 0 \\ 1 & -\rho c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & \rho c^2 & 0 \\ 1/\rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\rho c} & -\frac{1}{2\rho c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.63}$$

$$\tilde{a}_{ij1} = \begin{bmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

$$\tilde{a}_{ij2} = \mathbf{L}^{-1}\left[a_{mn2}\right]\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \rho c & 0 \\ 1 & -\rho c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v & 0 & \rho c^2 \\ 0 & v & 0 \\ 1/\rho & 0 & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\rho c} & -\frac{1}{2\rho c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

$$\tilde{a}_{ij2} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho c^2 \\ 0 & v & \rho c^2 \\ \frac{1}{2\rho} & \frac{1}{2\rho} & v \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

Transformirani izvorski članovi glase

$$\left[\tilde{q}_i\right] = \mathbf{L}^{-1}\left[q_j\right] = \begin{bmatrix} 1 & \rho c & 0 \\ 1 & -\rho c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \tag{3.67}$$

$$\left[\tilde{q}_i\right] = \begin{bmatrix} q_1 + \rho c q_2 \\ q_1 - \rho c q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \tag{3.68}$$

Zapis modela pomoću karakterističnih varijabli

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \tilde{a}_{ijk}\frac{\partial w_j}{\partial x_k} = \tilde{q}_i, \tag{3.69}$$

u raspisanom obliku glasi

- duž karakteristike C^+: $x^{(1)} = ct$ vrijedi

$$\frac{dw_{1x}}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial p}{\partial x} + (u+c)\rho c \frac{\partial u}{\partial x} = -v\frac{\partial p}{\partial r} - v\rho c \frac{\partial u}{\partial r} - \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial r} + q_1 + \rho c q_2 , \quad (3.70)$$

- duž karakteristike C^-: $x^{(2)} = -ct$ vrijedi

$$\frac{dw_{2x}}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial p}{\partial x} - (u-c)\rho c \frac{\partial u}{\partial x} = -v\frac{\partial p}{\partial r} + v\rho c \frac{\partial u}{\partial r} - \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial r} + q_1 - \rho c q_2 , \quad (3.71)$$

- duž karakteristike $x^{(3)} = ut$ vrijedi

$$\frac{dw_{3x}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - v\frac{\partial v}{\partial r} + q_3 . \quad (3.72)$$

Posljednja jednadžba identična je *r*-komponenti jednadžbe količine gibanja.

Zapis kvazi-2D modela u karakterističnom obliku

Kao što je učinjeno u prethodnom poglavlju, na traženi kvazi-2D model prelazi se tako da se u potpunom 2D modelu zanemare svi konvektivni članovi, članovi dijela tenzora deformacije (članovi transponiranog tenzora gradijenta brzine), članovi masenih sila. Na kraju uvodi se i pretpostavka $p=P(x,t)$ kojom se prelazi na kvazi-2D model i gubi potreba za rješavanjem *r*-komponente jednadžbe količine gibanja. Jednadžbe kvazi-2D modela (kakvog koriste npr. Vardy i Hwang [9]) glase

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} , \quad (3.73)$$

- *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (3.74)$$

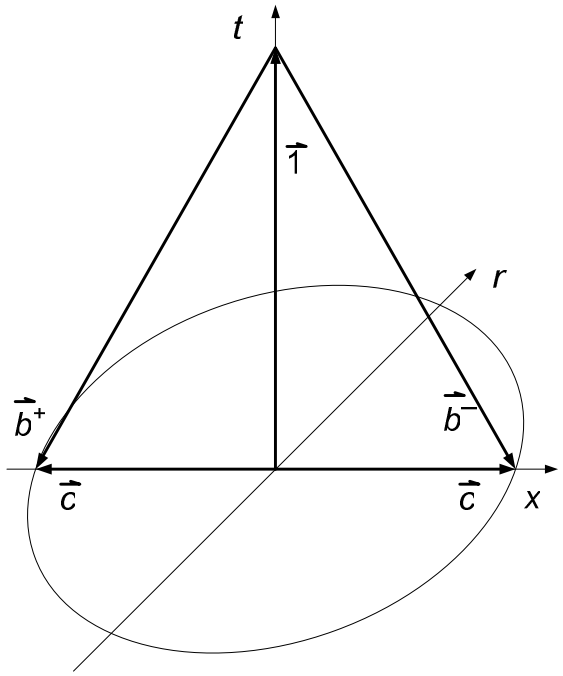
Od punog aksijalno simetričnog modela u karakterističnoj formi zanemarivanjem odgovarajućih članova, zapis kvazi-2D modela u karakterističnom obliku postaje

- duž karakteristike C^+: $x^{(1)} = ct$ vrijedi

$$\frac{dw_{1x}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\rho c^2 v}{r} + \frac{\rho c}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \upsilon_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{3.75}$$

- duž karakteristike C^-: $x^{(2)} = -ct$ vrijedi

$$\frac{dw_{2x}}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial x} - \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\rho c^2 v}{r} - \frac{\rho c}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \upsilon_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \tag{3.76}$$



Sl. 3.2 Machov konus i karakteristike za kvazi-2D model

3.2 Postojeći kvazi-2D modeli

Predloženi kvazi-2D model i metoda rješavanja hidrauličkog udara ima sličnosti s dva najpopularnija postojeća kvazi-2D modela (Vardy i Hwang [9] i Pezzinga [11]). Za metodu Vardy i Hwang često se ističe da je najtočnija i najpouzdanija. Za metodu Pezzinga je rečeno da je znatno brža jer zahtijeva manje računanja, ali zaostaje kako u pogledu točnosti, tako i u stabilnosti i robustnosti. Predložena metoda trebala bi imati jednaku točnost i pouzdanost kao

metoda Vardy i Hwang, a u količini računanja i brzini trebala bi biti podjednaka s Pezzinginom metodom.

Nije teško ustanoviti da predložena metoda i metoda Pezzinga zaista zahtijevaju podjednaku količinu računanja. Za usporedbu rezultata koje daju predložena metoda i metoda Vardy i Hwang najprije će se obje metode temeljito opisati, kako bi se sličnosti i razlike sagledale s analitičkog stanovišta. Nakon toga će se u sljedećem poglavlju usporediti rezultati dobiveni pomoću obje metode.

3.2.1. Matematički modeli

Ovdje se ponovo navode jednadžbe kvazi-2D modela Vardy i Hwang [9] i Pezzinga [11] radi kasnije usporedbe s predloženim modelom. Nakon toga detaljno će se izložiti metoda Vardy i Hwang. Jednadžbe modela Vardy i Hwang su

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}, \tag{3.77}$$

- x-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{3.78}$$

Numeričko rješenje ovog sustava [9] svodi se u svakom presjeku (u svakom koraku po osi x) na rješavanje 5-dijagonalnog sustava $2N_{\Delta r}\times 2\ N_{\Delta r}$ jednadžbi, gdje je $N_{\Delta r}$ broj podjela u radijalnom smjeru. Za rješavanje tog sustava potrebno je vrijeme centralnog procesora reda veličine $N_{\Delta r}{}^3$. Algebarskom manipulacijom Zhao i Ghidaoui [48] su taj sustav sveli na dva 3-dijagonalna sustava $N_{\Delta r}\times N_{\Delta r}$ jednadžbi, čime se vrijeme centralnog procesora svelo na red veličine $N_{\Delta r}$.

Integrirajući navedenu jednadžbu kontinuiteta po presjeku cijevi, Pezzinga [11] je gornji model sveo na sljedeće dvije jednadžbe

- jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{3.79}$$

- *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{3.80}$$

Na taj način u jednadžbama se izgubila radijalna brzina *v*, pa se gubi i potreba za njenim računanjem. Jednadžba kontinuiteta je dana u integralnom obliku, pa sad samo jednadžbu količine gibanja (njenu *x*-komponentu) treba diskretizirati po presjeku cijevi. Pezzinga [11] određuje tlak rješavanjem jednadžbe kontinuiteta pomoću metode konačnih diferencija (MKD) i koristeći eksplicitnu shemu. Nakon toga određuje profile brzine rješavanjem jednadžbe količine gibanja, također pomoću MKD, ali pri tome koristi implicitnu shemu. Na kraju se ukupni protok računa integracijom brzine po površini presjeka cijevi. Proračun je brz jer su jednadžbe kontinuiteta i količine gibanja razdvojene pa se rješavaju zasebno, a radijalna diskretizacija jednadžbe količine gibanja dovodi do 3-dijagonalnog sustava jednadžbi. Računanje protoka numeričkom integracijom brzine po presjeku neki puta uzrokuje nefizikalne oscilacije proračunatog tlaka.

Vardy i Hwang [9] koristili su metodu karakteristika (MK) za rješavanje svog modela. Budući da model sadrži samo dvije jednadžbe, karakteristične jednadžbe mogu se oformiti na uobičajeni jednostavni način. Ako se uvedu oznake $\delta w_1 = \delta P+\rho c\delta u$, $\delta w_2 = \delta P-\rho c\delta u$ za karakteristične varijable w_1 i w_2, množenjem jednadžbe količine gibanja s brzinom zvuka *c* i njenim pribrajanjem jednadžbi kontinuiteta dobiva se karakteristična jednadžba koja vrijedi duž karakteristike C^+: $x=ct$

$$\frac{dw_1}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+c\frac{\partial P}{\partial x}+\rho c\frac{\partial u}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}. \tag{3.81}$$

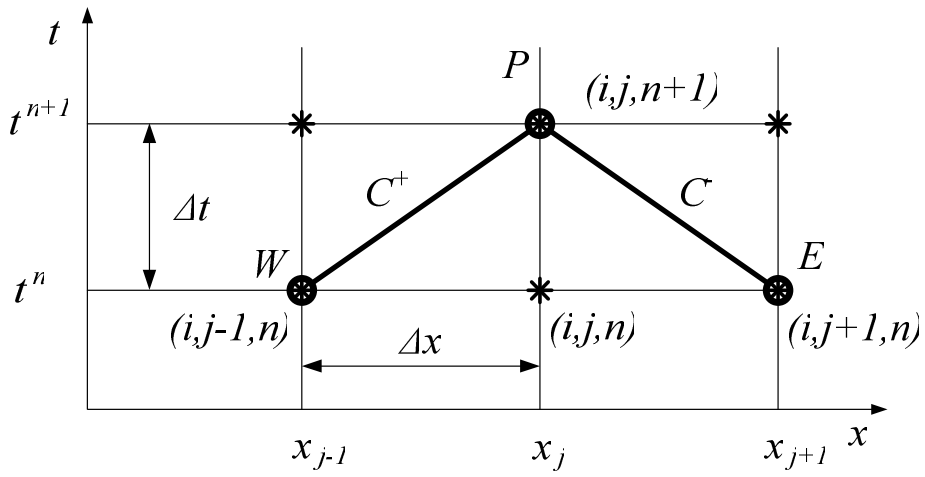
Njenim oduzimanjem od jednadžbe kontinuiteta dobiva se karakteristična jednadžba koja vrijedi duž karakteristike C^-: $x=-ct$

$$\frac{dw_2}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}-c\frac{\partial P}{\partial x}-\rho c\frac{\partial u}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}. \tag{3.82}$$

3.2.2. Diskretizacija

Dobiveni model u karakterističnom obliku diskretizira se prelaskom na konačne razlike u smjeru karakteristika. Jednadžbe se množe odgovarajućim vremenskim korakom Δt. Vrijednosti nepoznatih funkcija (*P*, *u*) u novom vremenskom trenutku računaju se u točki **P**

(Sl. 3.3), a računaju se iz njihovih vrijednosti u prethodnom vremenskom trenutku, ali u točkama koje leže na karakteristikama koje prolaze kroz točku **P** (na obje karakteristike). Te dvije točke su **W** (West, na karakteristici C^+) i **E** (East, na karakteristici C^-). Na ovaj način dobivaju se dvije diskretizirane jednadžbe modela u karakterističnom obliku.



Sl. 3.3 Rešetka diskretizacije za predloženu metodu i metodu Vardy i Hwang, uz *r=const*

Ovdje će se prikazati diskretizacija modela Vardy i Hwang [9] unaprijeđena modifikacijom Zhao i Ghidaoui [48]. Točka **P** je u novom (n+1) vremenskom koraku, pa njena mrežna oznaka glasi (i,j,n+1), gdje i označava korak po r-osi, a j korak po x-osi. U aksijalnom smjeru područje integracije (cijev) je podijeljeno na jednake korake Δx. Obzirom da se zanemario utjecaj konvekcije pa je brzina širenja poremećaja upravo jednaka brzini zvuka c, vremenski korak je odabran tako da se egzaktno zadovoljava kriterij Lewy-Couranta, tj.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c}, \tag{3.83}$$

pa se točka **W** poklapa s točkom mreže (i,j–1,n), a točka **E** s točkom mreže (i,j+1,n). Ovakva interpolacijska shema je najtočnija, ali se nalazi na samoj granici stabilnosti. Zbog stabilnosti je zato sigurnije birati (u što većoj mjeri) implicitnu shemu diskretizacije derivacija.

Prelaskom na konačne razlike, karakteristične jednadžbe poprimaju sljedeću formu

$$P_P - P_W + \rho c(u_P - u_W) = \left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^+ - \left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]^+, \tag{3.84}$$

$$P_P - P_E - \rho c(u_P - u_E) = -\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^- - \left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]^-, \tag{3.85}$$

pri čemu (gornji) indeksi + i – izvorskih članova označavaju da izvorski član treba uzeti duž odgovarajuće C^+ odn. C^- karakteristike. Izvorski članovi računaju se prema sljedećim izrazima

$$\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^+ = \theta\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P + (1-\theta)\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_W, \tag{3.86}$$

$$\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^- = \theta\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P + (1-\theta)\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_E, \tag{3.87}$$

$$\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]^+ = \varepsilon\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]_P + (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]_W, \tag{3.88}$$

$$\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]^- = \varepsilon\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]_P + (1-\varepsilon)\left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]_E, \tag{3.89}$$

u kojima se pojavljuju faktori θ i ε ($0 \le \theta \le 1$, $0 \le \varepsilon \le 1$). Vrijednosti za te faktore mogu se odabrati od 0 (potpuno eksplicitna shema) do 1 (potpuno implicitna shema). Oduzimanjem diskretiziranih karakterističnih jednadžbi dobiva se sljedeći sustav jednadžbi za brzinu u

$$\begin{aligned} u_P - \theta\left[\frac{\Delta t}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P &= \frac{1}{2}\left[u_W + u_E + \frac{P_W - P_E}{\rho c}\right] + \\ &+ (1-\theta)\frac{\Delta t}{2\rho}\left[\frac{1}{r_W}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_W + \frac{1}{r_E}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_E\right] - \\ &- \frac{1}{2}c\Delta t(1-\varepsilon)\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)_W - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)_E\right]. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Sukladno modifikaciji Zhao i Ghidaoui [48], ovdje je definiran nezavisni 3-dijagonalni sustav jednadžbi za brzinu u. Zbrajanjem diskretiziranih karakterističnih jednadžbi dobiva se sljedeći sustav jednadžbi za određivanje tlaka P i polja brzine v

$$\begin{aligned} P_P + \varepsilon\rho c^2 \Delta t\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)_P &= \frac{1}{2}\left[P_W + P_E + \rho c(u_W - u_E)\right] + \\ &+ (1-\theta)\frac{c\Delta t}{2}\left[\frac{1}{r_W}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_W - \frac{1}{r_E}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_E\right] - \\ &- (1-\varepsilon)\frac{\rho c^2 \Delta t}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)_W + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right)_E\right]. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Ovaj sustav jednadžbi (pri *x=const, t=const*) modificira se prema Zhao i Ghidaoui [48] tako da se prva jednadžba ne mijenja, druga se formira tako da se od nje oduzme prva jednadžba od treće se oduzima druga itd. Na taj način tlak se kao nepoznanica pojavljuje samo u jednoj jednadžbi i sustav diskretizacijskih jednadžbi (nakon diskretizacije derivacije brzine *v*) postaje 3-dijagonalan. Za zapis tako definiranog sustava jednadžbi potrebno je prijeći na mrežne oznake (*i, j, n*) čvorova (npr. $u_P = u_{i,j}^{n+1}$, $u_W = u_{i,j-1}^{n}$), kako slijedi

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\rho c^2\Delta t\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i,j}^{n+1}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i-1,j}^{n+1}\right]=\frac{\rho c}{2}\left[(u_{i,j-1}^{n}-u_{i-1,j-1}^{n})-(u_{i,j+1}^{n}-u_{i-1,j+1}^{n})\right]+\\
&+(1-\theta)\frac{c\Delta t}{2}\left[\frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j-1}^{n}-\frac{1}{r_{i-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i-1,j-1}^{n}\right]-\\
&-(1-\theta)\frac{c\Delta t}{2}\left[\frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j+1}^{n}-\frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i-1,j+1}^{n}\right]\\
&-(1-\varepsilon)\frac{\rho c^2\Delta t}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i,j-1}^{n}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i-1,j-1}^{n}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i,j+1}^{n}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r}\right)_{i-1,j+1}^{n}\right].
\end{aligned}\tag{3.92}$$

Pomicanjem po *r*-osi čvorova za brzinu *u* u sredinu elementa postignut je uz korištenje sheme centralne diferencije drugi red točnosti pri diskretizaciji derivacije brzine *v* i druge derivacije brzine *u*. Tim pomicanjem ujedno je izbjegnuto razdvajanje sustava jednadžbi za brzinu *v* u dva naizmjenična i međusobno slabo povezana sustava, jer se prva derivacija računa pomoću vrijednosti u dva susjedna čvora. Sukladno metodi karakteristika, sve gornje jednadžbe zapisane su za mrežu čvorova brzine *u* bez obzira da li su ti čvorovi nekamo pomaknuti ili nisu, a definicija elemenata i čvorova brzine *v* utječe jedino na shemu diferencije.

3.3 Predloženi matematički model i metoda rješavanja

3.3.1. Predloženi matematički model

Predloženi matematički model vrlo je blizak modelu Pezzinga [11]. Međutim, nakon diskretizacije postaje ekvivalentan modelu Vardy i Hwang [9] uz uvjet ε=1 (potpuno implicitna shema za brzinu *v*), tako da mora davati identične rezultate. Ograničenje da shema mora biti potpuno implicitna je od malog utjecaja. Naime, Vardy i Hwang [9] napominju da treba koristiti upravo potpuno implicitnu shemu kako njihova metoda ne bi postala nestabilna, pa su i oni u radu koristili tu shemu.

Model Pezzinga [11] koristi 2D jednadžbu količine gibanja za određivanje polja brzine *u* i 1D jednadžbu kontinuiteta za računanje tlaka *P*, a te jednadžbe rješava pomoću metode konačnih diferencija (MKD). Predložena metoda koristi metodu karakteristika (MK), pa su zbog svojstava te metode potrebni kompletni 2D i 1D modeli, kako slijedi.

- 2D jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}, \tag{3.93}$$

- 2D *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{3.94}$$

Integracijom ovih jednadžbi po površini presjeka i dijeljenjem s tom površinom dobivaju se izrazi

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\frac{\partial P}{\partial t}2\pi r dr+\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\rho c^2\frac{\partial u}{\partial x}2\pi r dr=-\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi\rho c^2 d(rv), \tag{3.95}$$

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\rho\frac{\partial u}{\partial t}2\pi r dr+\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\frac{\partial P}{\partial x}2\pi r dr=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R d\left(2\pi r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{3.96}$$

pa nakon zamjene redoslijeda integracije po *r* i derivacije po *t* odn. *x*, i vodeći računa da je srednja protočna brzina $U=Q/S$, te da je $v=0$ na osi simetrije ($r=0$) i na stjenci cijevi ($r=R$), kao i da je $\partial u/\partial r=0$ u osi simetrije, a tangencijalno naprezanje na stjenci cijevi $\tau_w=\mu_{ef}\partial u/\partial r$, dobiva se traženi odgovarajući 1D model u obliku

- 1D jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\rho c^2\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{3.97}$$

- 1D *x*-komponenta jednadžbe količine gibanja

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2\tau_w}{R}. \tag{3.98}$$

Jednadžbe predloženog modela u ovoj formi nisu nezavisne i ima ih dva puta previše (potrebna je kao u modelu Pezzinga [11] jedna 2-D jednadžba za brzinu i jedna 1D jednadžba za tlak). U ovoj fazi nije se još mogao napisati model u čistoj formi. Od gornje 4 jednadžbe dobit će se 4 karakteristične jednadžbe koje će se tek u diskretiziranoj formi međusobno

zbrojiti/oduzeti i na taj način svesti na potrebne dvije jednadžbe. Za određivanje polja brzine *u*, od 2D jednadžbe količine gibanja će se najprije oduzeti, a kasnije dodati 2D jednadžba kontinuiteta. Zato se može kazati da se polje brzine određuje okvirno iz 2D jednadžbe količine gibanja, slično kao i u modelu Pezzinga [11]. Za određivanje tlaka *P* će se od 1D jednadžbe kontinuiteta najprije oduzeti, a kasnije dodati 1D jednadžba količine gibanja. Zato se može kazati da se tlak određuje okvirno iz 1D jednadžbe kontinuiteta, slično kao i u modelu Pezzinga [11].

Jednako kao i u modelu Pezzinga [11], integracija po presjeku donosi bitno pojednostavljenje time što se u jednadžbi kontinuiteta gubi član s radijalnom brzinom *v*.

3.3.2. Jednadžba za brzinu

Nakon uvođenja oznaka za karakteristične varijable w_1 i w_2 koje su definirane izrazima $\delta w_1 = \delta P + \rho c \delta u$, $\delta w_2 = \delta P - \rho c \delta u$, karakteristične jednadžbe dobivaju se jednako kao i za metodu Vardy i Hwang [9]. 2D jednadžba količine gibanja pomnoži se s brzinom zvuka *c*, pa se doda i oduzme 2D jednadžbi kontinuiteta. Tako se dobiva karakteristična jednadžba koja vrijedi duž karakteristike C^+: $x=ct$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + c\frac{\partial P}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}, \tag{3.99}$$

i ona koja vrijedi duž karakteristike C^-: $x=-ct$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} - c\frac{\partial P}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\rho c^2}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}. \tag{3.100}$$

Diskretizacija jednadžbe za brzinu

Diskretizacija se provodi na istoj mreži (Sl. 3.3) i na isti način (egzaktno zadovoljavanje kriterija Lewy-Courant) kao za metodu Vardy i Hwang. Dobivene diskretizirane jednadžbe glase

$$P_P - P_W + \rho c (u_P - u_W) = \left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^+ - \left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} \right]_P, \tag{3.101}$$

$$P_P - P_E - \rho c(u_P - u_E) = -\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^- - \left[\frac{\rho c^2 \Delta t}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right]_P . \tag{3.102}$$

$$\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^+ = \theta\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P + (1-\theta)\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_W , \tag{3.103}$$

$$\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^- = \theta\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P + (1-\theta)\left[\frac{c\Delta t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_E , \tag{3.104}$$

Za sada jedina razlika u odnosu na metodu Vardy i Hwang [9] leži u tome što je član s radijalnim brzinama uzet u točki P, dakle implicitno. Međutim, sada će se ove dvije karakteristične jednadžbe samo oduzeti kako bi se dobila jednadžba za brzinu *u*. Neće se izvršiti njihovo zbrajanje u jednadžbu za određivanje tlaka *P* i brzine *v*. Na taj način će se od dvije jednadžbe oformiti jedna, a izgubit će se jedna prekobrojna jednadžba.

$$\begin{aligned} u_P - \theta\frac{\Delta t}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P &= \frac{1}{2}\left[u_W + u_E + \frac{P_W - P_E}{\rho c}\right] + \\ + (1-\theta)\frac{\Delta t}{2\rho}&\left[\frac{1}{r_W}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_W + \frac{1}{r_E}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_E\right] \end{aligned} \tag{3.105}$$

Ova jednadžba očito je identična jednadžbi modela Vardy i Hwang [9] za određivanje brzine *u*, uz uvjet ε=1. Ovaj uvjet zaslužan je za naredno bitno pojednostavljenje – naime sada se više ni u ovoj jednadžbi ne pojavljuje radijalna brzina *v*. Dakle odgovarajućim matematičkim manipulacijama uspjelo se u potpunosti odvojiti sustav jednadžbi za određivanje brzine *v* od sustava za određivanje tlaka *P* i brzine *u*. Zbog toga je brzina *v* kao nepotrebna mogla biti uklonjena iz modela.

3.3.3. Jednadžba za tlak

Nakon uvođenja oznaka za karakteristične varijable W_1 i W_2 koje su definirane izrazima $\delta W_1 = \delta P + \rho c \delta U$, $\delta W_2 = \delta P - \rho c \delta U$, karakteristične jednadžbe dobivaju se tako da se 1D jednadžba količine gibanja pomnoži s brzinom zvuka *c*, pa se doda i oduzme 1D jednadžbi kontinuiteta. Tako se dobiva karakteristična jednadžba koja vrijedi duž karakteristike C^+: $x=ct$

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + c\frac{\partial P}{\partial x} + \rho c\frac{\partial U}{\partial t} + \rho c^2\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2c\tau_w}{R} , \tag{3.106}$$

i ona koja vrijedi duž karakteristike C^-: $x=-ct$

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} - c\frac{\partial P}{\partial x} - \rho c\frac{\partial U}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2c\tau_w}{R}. \tag{3.107}$$

Diskretizacija jednadžbe za tlak

Diskretizacija se provodi na istoj mreži i na isti način kao za jednadžbu za brzinu. Dobivene diskretizirane jednadžbe glase

$$P_P - P_W + \rho c(U_P - U_W) = \frac{2c\Delta t}{R}\left[\theta\tau_{wP} + (1-\theta)\tau_{wW}\right], \tag{3.108}$$

$$P_P - P_E - \rho c(U_P - U_E) = -\frac{2c\Delta t}{R}\left[\theta\tau_{wP} + (1-\theta)\tau_{wE}\right]. \tag{3.109}$$

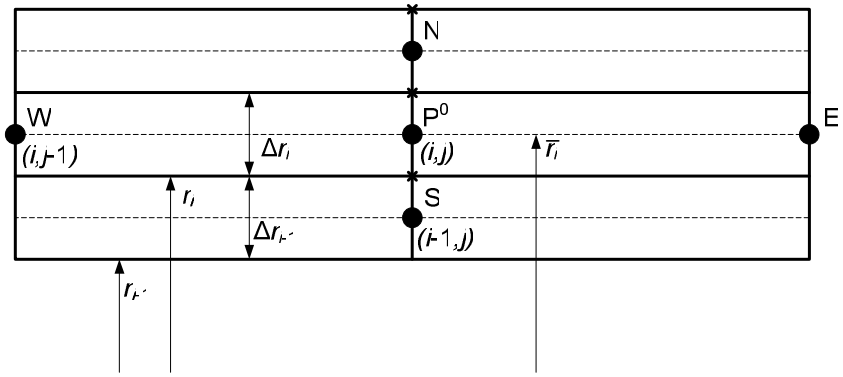
Zbrajanjem ove dvije jednadžbe dobiva se sljedeća jednadžba za tlak. Koristi se dakle samo jedna 1D jednadžba, pa se tako gubi jedina preostala prekobrojna jednadžba.

$$P_P = \frac{1}{2}\left[P_W + P_E + \rho c(U_W - U_E)\right] + \frac{c\Delta t}{R}(1-\theta)(\tau_{wW} - \tau_{wE}). \tag{3.110}$$

3.3.4. Usporedba s metodom Vardy i Hwang

Pokazat će se da je predložena metoda i u diskretiziranoj formi ekvivalentna metodi Vardy i Hwang [9] uz uvjet $\varepsilon=1$, te da prema tome rezultati obje metode moraju biti identični. To se već pokazalo za jednadžbu za određivanje brzine *u*, pa preostaje da se još pokaže i za jednadžbu za tlak *P*.

Prostorna rešetka s čvorovima brzine *u* smještenima u sredinu elementa, koja se koristi u metodi Vardy i Hwang definirana je na Sl. 3.4.



Sl. 3.4 Prostorna rešetka za metodu Vardy i Hwang

Jednadžba za tlak P i radijalnu brzinu v uz pretpostavku ε=1 (tj. potpuno implicitna shema za brzinu v) u metodi Vardy i Hwang glasi

$$P_P + \rho c^2 \Delta t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right)_P = \frac{1}{2} \left[P_W + P_E + \rho c (u_W - u_E) \right] + \\ + (1-\theta) \frac{c \Delta t}{2} \left[\frac{1}{r_W} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_W - \frac{1}{r_E} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_E \right]. \tag{3.111}$$

Svaka od jednadžbi ovog sustava najprije se množi s odgovarajućom površinom poprečnog presjeka

$$\Delta S_i = 2\pi \bar{r}_i \Delta r_i , \tag{3.112}$$

kao ponderom. Pri tome je

$$\bar{r}_i = \frac{r_{i+1} + r_i}{2} . \tag{3.113}$$

Zatim se sumiraju sve jednadžbe od i=1 do $i=N_{\Delta r}$. Tlak je u svakom presjeku konstantan, tako da u svakom presjeku vrijedi

$$\sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} P \Delta S_i = P \sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} \Delta S_i = PS . \tag{3.114}$$

Takvo ponderirano sumiranje brzine daje volumenski protok Q odn. srednju brzinu U na bazi protoka

$$\sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} u_i \Delta S_i = Q = US . \tag{3.115}$$

Prilikom sumacije sljedećih izraza za derivacije brzina *v* (1) odn. *u* (2) iskoristit će se shema diferencije koju koriste Vardy i Hwang.

1) Kad se pri sumaciji derivacija radijalnih brzina *v* uzme u obzir činjenica da se zbog sheme diferencije isti članovi unutar mreže sumiranjem međusobno poništavaju, preostaju samo rubni članovi. Za te rubne članove vrijedi *v*=0 u osi simetrije i na stjenci cijevi, pa slijedi

$$\rho c^2 \Delta t \sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right)_i 2\pi \bar{r}_i \Delta r = \rho c^2 \Delta t \sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} 2\pi \left[(rv)_{i+1} - (rv)_i \right] = 2\pi \rho c^2 \Delta t \left[(rv)_{r=R} - (rv)_{r=0} \right] = 0 \,. \quad (3.116)$$

2) Pri sumaciji derivacija aksijalnih brzina *u* dolazi do sličnog poništavanja članova, pa uz uvođenje oznake τ_w za smično naprezanje na stjenci cijevi i uvažavši činjenicu da u osi cijevi vrijedi $\partial u/\partial r=0$, slijedi

$$\begin{aligned} &(1-\theta) \frac{c\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_i 2\pi \bar{r}_i \Delta r = (1-\theta) \frac{c\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} 2\pi \left[\left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i+1} - \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_i \right] = \\ &= (1-\theta) \pi c \Delta t \left[\left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} - \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0} \right] = (1-\theta) \pi R c \tau_w \Delta t \end{aligned} \,. \quad (3.117)$$

Uzevši sve ovo u obzir, jednadžba za tlak nakon provedene sumacije i nakon dijeljenja s površinom $S=\pi R^2$ postaje

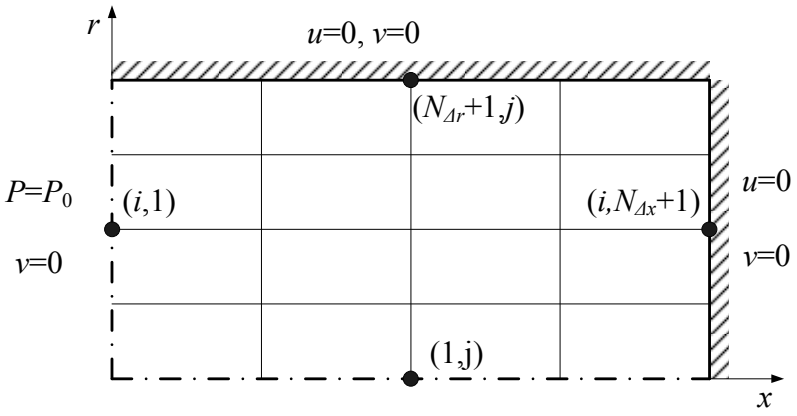
$$P_P = \frac{1}{2} \left[P_W + P_E + \rho c (U_W - U_E) \right] + (1-\theta) \frac{c\Delta t}{R} (\tau_{wW} - \tau_{wE}) \,, \quad (3.118)$$

i identična je s predloženom jednadžbom za tlak. Dakle predložena jednadžba za tlak dobivena je linearnom kombinacijom sustava jednadžbi za tlak i brzinu *v* iz modela Vardy i Hwang [9]. Time se pokazalo da je predložena jednadžba za tlak zapravo jedna od važećih diskretiziranih jednadžbi modela Vardy i Hwang [9].

Ovime se pokazalo da su predložena metoda i metoda Vardy i Hwang [9] (uz uvjet ε=1) u potpunosti ekvivalentni i moraju dati identična rješenja. Međutim, metoda Vardy i Hwang [9] minimalno zahtijeva rješavanje dva 3-dijagonalna sustava jednadžbi, dok je predloženom metodom potrebno riješiti samo jedan 3-dijagonalni sustav jednadžbi za brzinu *u* i jednu nezavisnu jednadžbu za tlak *P*, jednako kao u metodi Pezzinga [11] koja je popularna upravo zbog jednostavnosti i brzine rješavanja.

Analiza broja jednadžbi i broja nepoznanica

Na Sl. 3.5 vidljiv je raspored i broj kontrolnih volumena za predloženu metodu i metodu Vardy i Hwang, a broj raspoloživih jednadžbi bilanci mora biti jednak broju kontrolnih volumena. Prema tome, za predloženu metodu na raspolaganju su $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$ jednadžbi za brzinu u i $N_{\Delta x}$ jednadžbi za tlak P. Isti broj jednadžbi potreban je i za metodu Pezzinga [11].



Sl. 3.5 Rubni uvjeti i prostorne oznake čvorova za obje metode

Tablica 3.1 daje rezime broja raspoloživih jednadžbi za predloženu metodu. Duž osi r (po presjeku cijevi) postoji jednadžba za brzinu u za svih $N_{\Delta r}$ kontrolnih volumena. Duž osi x obje jednadžbe (za u i za P) zahtijevaju poznavanje vrijednosti lijevo (W) i desno (E) od danog čvora, tako da tu postoji $N_{\Delta x}$–1 regularnih jednadžbi za u i za P, dok se vrijednosti na rubovima (krajevi cijevi) moraju računati iz krnjih jednadžbi za samo jednu karakteristiku (v. odlomak 3.4.1). Uz spremnik je zadan tlak P_0, pa se za određivanje brzine na rubu koristi $N_{\Delta r}$ krnjih jednadžbi. Uz ventil brzina je jednaka nuli, pa se za određivanje tlaka uz ventil koristi jedna krnja jednadžba.

Tablica 3.1 Broj jednadžbi predložene metode

Broj jednadžbi					
Unutrašnjost i *r*-rubovi		*x*-rubovi (dodatno)		Ukupno	
u	P	u	P	u	P
$N_{\Delta r}\times(N_{\Delta x}-1)$	$N_{\Delta x}-1$	$N_{\Delta r}$	1	$N_{\Delta r}\times[(N_{\Delta x}-1)+1]$ $= N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$	$(N_{\Delta x}-1)+1$ $= N_{\Delta x}$

Tablica 3.2 daje rezime broja nepoznanica za predloženu metodu. Broj poznatih vrijednosti (na rubovima) odbija se od ukupnog broja nepoznanica (koji je jednak ukupnom broju čvorova). Poznato je da je vrijednost brzine jednaka nuli u $(N_{\Delta x}+1)+N_{\Delta r}$ čvorova na rubovima (stjenka cijevi i ventil). Također poznata je vrijednost tlaka u jednom *x*-čvoru (tj. čvoru x_1 kod spremnika). Vidljivo je da je broj jednadžbi i nepoznanica očito usklađen, te da je ujedno i jednak broju mogućih jednadžbi bilance.

Tablica 3.2 Broj nepoznanica predložene metode

Broj nepoznanica					
Svi čvorovi		Rubovi (poznato)		Ukupno	
u	P	u	P	u	P
$(N_{\Delta r}+1)\times(N_{\Delta x}+1)$	$N_{\Delta x}+1$	$(N_{\Delta x}+1)+N_{\Delta r}$	1	$(N_{\Delta r}+1)\times(N_{\Delta x}+1)-$ $(N_{\Delta x}+1)-N_{\Delta r}$ $= N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$	$(N_{\Delta x}+1)-1$ $= N_{\Delta x}$

Za metodu Vardy i Hwang na raspolaganju su po dvije jednadžbe za svaki kontrolni volumen, dakle ukupno $2\times N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$ jednadžbi. Tablica 3.3 daje rezime broja raspoloživih jednadžbi za

metodu Vardy i Hwang. Za obje jednadžbe (za *u*-jednadžbu i za *P*-*v* jednadžbu) broj jednadžbi duž osi *r* je $N_{\Delta r}$, dok duž osi *x* broj regularnih jednadžbi iznosi $N_{\Delta x}-1$. Vrijednosti na rubovima (krajevi cijevi) moraju se računati iz krnjih jednadžbi za samo jednu karakteristiku. Za tlak i brzinu *v* na raspolaganju je $N_{\Delta r}$ takvih jednadžbi, pa bi se (uz zadavanje tlaka P_0 kod spremnika i brzine $v=0$ kod ventila) iz njih mogao izračunati tlak kod ventila i profil brzine *v* kod spremnika. Međutim, korišten je rubni uvjet $v=0$ kod spremnika, tako da se ne koristi $(N_{\Delta r}-1)$ krnjih jednadžbi, što je u tablici označeno zvjezdicom (*).

Tablica 3.3 Broj jednadžbi metode Vardy i Hwang (mogućih i *iskorištenih)

Broj jednadžbi					
Unutrašnjost i *r*-rubovi		*x*-rub (dodatno)		Ukupno	
u	*P*, *v*	*u*	*P*, *v*	*u*	*P*, *v*
$N_{\Delta r}\times(N_{\Delta x}-1)$	$N_{\Delta r}\times(N_{\Delta x}-1)$	$N_{\Delta r}$	$N_{\Delta r}$ * 1	$N_{\Delta r}\times[(N_{\Delta x}-1)+1]$ $= N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$	$N_{\Delta r}\times[(N_{\Delta x}-1)+1]$ $= N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$ $*=N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}-(N_{\Delta r}-1)$

Tablica 3.4 daje rezime broja nepoznanica za metodu Vardy i Hwang. Broj poznatih vrijednosti (na rubovima) odbija se od ukupnog broja nepoznanica (odn. ukupnog broja čvorova). Poznato je da je vrijednost brzine *u* jednaka nuli u $(N_{\Delta x}+1)+N_{\Delta r}$ čvorova na rubovima (stjenka cijevi i ventil). Poznato ili propisano je da je vrijednost brzine $v=0$ u svim rubnim čvorovima. Također poznata je vrijednost tlaka u jednom *x*-čvoru (tj. čvoru x_1 kod spremnika). Zbirno broj nepoznatih vrijednosti tlaka i brzine *v* očito iznosi $N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}-(N_{\Delta r}-1)$. Vidljivo je da je broj jednadžbi i nepoznanica usklađen na način da se nije iskoristilo $N_{\Delta r}-1$ krnjih jednadžbi na kraju cijevi.

Tablica 3.4 Broj nepoznanica metode Vardy i Hwang

Broj jednadžbi								
Unutrašnjost i *r*-rubovi			x-rubovi (dodatno)			Ukupno		
u	P	v	u	P	v	u	P	v
$(N_{\Delta r}+1)$ $\times(N_{\Delta x}+1)$	$N_{\Delta x}+1$	$(N_{\Delta r}+1)$ $\times(N_{\Delta x}+1)$	$(N_{\Delta x}+1)$ $+N_{\Delta r}$	1	$2(N_{\Delta x}+1)$ $+2(N_{\Delta r}-1)$	$N_{\Delta r}\times(N_{\Delta x}+1)$ $-N_{\Delta r}$ $=N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$	$N_{\Delta x}+1$ -1 $=N_{\Delta x}$	$(N_{\Delta r}-1)\times(N_{\Delta x}+1)$ $-2(N_{\Delta r}-1)$ $=N_{\Delta r}\times N_{\Delta x}$ $-(N_{\Delta r}-1)-N_{\Delta x}$

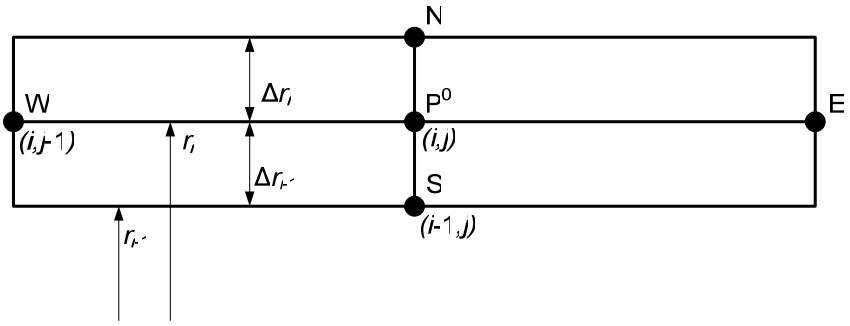
Dakle ukupno se u predloženoj metodi u jednom vremenskom koraku rješava $(N_{\Delta r}+1)\times N_{\Delta x}$ jednadžbi. U svakom (regularnom) *x*-koraku rješava se jedan 3-dijagonalni sustav od $N_{\Delta r}$ jednadžbi i jedna jednadžba za tlak (ukupno $N_{\Delta r}$ + 1 jednadžbi). Na rubovima postoje još dva 'polovična' *x*-koraka u kojima se ukupno gledano rješava jedan 3-dijagonalni sustav od $N_{\Delta r}$ jednadžbi i jedna jednadžba za tlak (ukupno $N_{\Delta r}$ + 1 jednadžbi).

U metodi Vardy i Hwang rješava se u svakom vremenskom koraku $2\times N_{\Delta r}\times N_{\Delta x} - (N_{\Delta r}-1)$ jednadžbi. U svakom (regularnom) *x*-koraku rješavaju se dva 3-dijagonalna sustava od $N_{\Delta r}$ jednadžbi. Na rubu uz spremnik rješava se još jedan 3-dijagonalni sustav od $N_{\Delta r}$ jednadžbi za brzinu *u* i jedna jednadžba za tlak na rubu kod ventila (ukupno $N_{\Delta r}$ + 1 jednadžbi).

3.3.5. Predložena diskretizacija i metoda rješavanja

Primijenjena je originalna metoda diskretizacije i rješavanja jednadžbe za brzinu *u*. Metoda se dijelom bazira na metodi konačnih volumena. Ona omogućava jednostavnu ugradnju rubnih uvjeta.

Zbog jednostavnosti, primijenjena je diskretizacijska mreža bez pomicanja čvorova (Sl. 3.6), što uvjetuje da shema centralnih diferencija dovodi do razdvajanja sustava jednadžbi u dva naizmjenična slabo povezana sustava. Da se to izbjegne, primijenjena je uzvodna (upwind) shema diferencije prvog reda točnosti.



Sl. 3.6 Prostorna rešetka za predloženu metodu

Jednadžba za brzinu

$$u_P - \theta\left[\frac{\Delta t}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P = \frac{1}{2}\left[u_W + u_E + \frac{P_W - P_E}{\rho c}\right] + \\ + (1-\theta)\frac{\Delta t}{2\rho}\left[\frac{1}{r_W}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_W + \frac{1}{r_E}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_E\right], \tag{3.119}$$

integrira se po poprečnoj površini

$$\Delta S_i = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2), \tag{3.120}$$

između dva susjedna čvora P i N. Pri tome je potrebno prijeći na mrežno označavanje čvorova (npr. $r_P=r_i$, $u_P=u_{i,j}^{n+1}$). Tlak je konstantan po toj radijalnoj površini, tako da za silu tlaka vrijedi

$$\int_{r=r_i}^{r=r_{i+1}} P \cdot 2\pi r dr = P\Delta S_i. \tag{3.121}$$

Integracijom brzine dobiva se protok q_i, pri čemu se srednja brzina sukladno trapeznom pravilu aproksimira aritmetičkom sredinom brzina u čvorovima (npr. za presjek j i trenutak n)

$$\int_{r=r_i}^{r=r_{i+1}} u_j^n \cdot 2\pi r dr = q_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2}\Delta S_i. \tag{3.122}$$

Integracijom člana trenja dobivaju se sile trenja na gornjoj i donjoj aksijalnoj površini

$$\int_{r=r_i}^{r=r_{i+1}} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j^n \cdot 2\pi r dr = \int_{r=r_i}^{r=r_{i+1}} d\left(2\pi r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j^n = \left(2\pi r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j}^n - \left(2\pi r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j}^n. \tag{3.123}$$

Uzimajući sve ovo u obzir, nakon dijeljenja s površinom ΔS_i jednadžba za brzinu postaje

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j}^{n+1}}{2}-\frac{2\pi\theta\Delta t}{\Delta S_i}\left[\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j}^{n+1}-\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j}^{n+1}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j-1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{2}+\frac{u_{i+1,j+1}^{n}+u_{i,j+1}^{n}}{2}+\frac{P_{j-1}^{n}-P_{j+1}^{n}}{\rho c}\right]+\\
&\quad+(1-\theta)\frac{\pi\Delta t}{\Delta S_i}\left[\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j-1}^{n}-\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j-1}^{n}+\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j+1}^{n}-\left(r\upsilon_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i,j+1}^{n}\right].
\end{aligned}\tag{3.124}$$

Primjenom uzvodne sheme diferencije

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{i+1,j}^{n}=\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}{\Delta r_i}.\tag{3.125}$$

i uzimajući radi pojednostavljenja vrijednost efektivne viskoznosti υ_{ef} eksplicitno tj. uvijek iz prethodnog vremenskog koraka (n), sustav jednadžbi za brzinu zapisuje se u formi

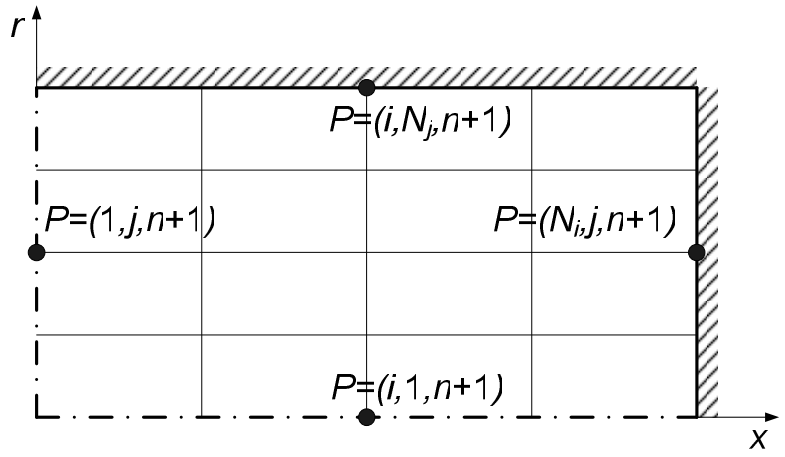
$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i+1,j}^{n+1}+u_{i,j}^{n+1}}{2}-\frac{2\pi\theta\Delta t}{\Delta S_i}\left[r_{i+1}\upsilon_{ef\,i+1,j}^{n}\frac{u_{i+1,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{\Delta r_i}-r_i\upsilon_{ef\,i,j}^{n}\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r_{i-1}}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j-1}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{2}+\frac{u_{i+1,j+1}^{n}+u_{i,j+1}^{n}}{2}+\frac{P_{j-1}^{n}-P_{j+1}^{n}}{\rho c}\right]+\\
&\quad+(1-\theta)\frac{\pi\Delta t}{\Delta S_i}\left[r_{i+1}\upsilon_{ef\,i+1,j-1}^{n}\frac{u_{i+1,j-1}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{\Delta r_i}-r_i\upsilon_{ef\,i,j-1}^{n}\frac{u_{i,j-1}^{n}-u_{i-1,j-1}^{n}}{\Delta r_{i-1}}\right]+\\
&\quad+(1-\theta)\frac{\pi\Delta t}{\Delta S_i}\left[r_{i+1}\upsilon_{ef\,i+1,j+1}^{n}\frac{u_{i+1,j+1}^{n}-u_{i,j+1}^{n}}{\Delta r_i}-r_i\upsilon_{ef\,i,j-1}^{n}\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{i-1,j+1}^{n}}{\Delta r_{i-1}}\right],
\end{aligned}\tag{3.126}$$

koja je očito 3-dijagonalna.

3.4 Rubni i početni uvjeti

3.4.1. Rubni uvjeti

Na sjevernoj i istočnoj granici područja integracije nalaze se krute stjenke. Južna granica je os simetrije, a zapadna je protočna ulazno-izlazna granica. Rubni čvorovi smješteni su na graničnim plohama.



Sl. 3.7 Definiranje rubova područja i rubnih čvorova

Krute stjenke

Na krutim stjenkama obje komponente brzine jednake su nuli. Jednadžbe za brzinu *u* u čvorovima do stjenke se ne mijenjaju, samo su vrijednosti brzine *u* u čvorovima na stjenci uvijek jednake nuli, a jednadžbe za brzinu *u* za čvorove na stjenci se naravno ne rješavaju.

Tlak u točki P na istočnoj stjenci (na ventilu) određuje se koristeći diskretiziranu krnju karakterističnu jednadžbu samo za karakteristiku C^+ (zbog stjenke otpada istočna karakteristika C^-).

$$P_P = P_W + \rho c U_W + (1-\theta)\frac{2c\Delta t}{R}\tau_{wW}\,, \tag{3.127}$$

U metodi Vardy i Hwang [9] članovi s radijalnom brzinom *v* pojavljuju se na ovom rubu u svim jednadžbama (slično kao i u svim unutrašnjim čvorovima). Na rubu se koristi samo jedna karakteristična jednadžba, pa se zato, u predloženoj metodi, radijalna brzina *v* ne poništava (ne krati) u jednadžbi za brzinu *u*, kao što je to slučaj u unutrašnjim čvorovima. Budući da se u predloženoj metodi za radijalnu brzinu *v* koristi potpuno implicitna shema (ε=1), u rubnim jednadžbama pojavljuje se brzina *v* u točki P na stjenci ventila. Međutim, kako su na stjenci sve brzine ionako jednake nuli, brzina *v* se ipak opravdano ne pojavljuje u jednadžbi za *u*, a to znači da je i na ovom rubu predložena metoda ekvivalentna metodi Vardy i Hwang [9].

Os simetrije

Na osi simetrije derivacija aksijalne brzine $\partial u/\partial r$ jednaka je nuli. U jednadžbi za brzinu *u* u osi cijevi (*i*=1) zato izostaje sila trenja u osi simetrije (ona mora izostati i zato što je tu površina jednaka nuli), pa jednadžba postaje

$$\frac{u_{2,j}^{n+1}+u_{1,j}^{n+1}}{2}-\frac{2\pi\theta\Delta t}{\Delta S_1}r_2\upsilon_{ef\,2,j}^{n}\frac{u_{2,j}^{n+1}-u_{1,j}^{n+1}}{\Delta r_1}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{u_{2,j-1}^{n}+u_{1,j-1}^{n}}{2}+\frac{u_{2,j+1}^{n}+u_{1,j+1}^{n}}{2}+\frac{P_{j-1}^{n}-P_{j+1}^{n}}{\rho c}\right]+ \tag{3.128}$$
$$+(1-\theta)\frac{\pi\Delta t}{\Delta S_1}\left[r_2\upsilon_{ef\,2,j-1}^{n}\frac{u_{2,j-1}^{n}-u_{1,j-1}^{n}}{\Delta r_1}+r_2\upsilon_{ef\,2,j+1}^{n}\frac{u_{2,j+1}^{n}-u_{1,j+1}^{n}}{\Delta r_1}\right].$$

Ulazno-izlazna granica

Na ulazno izlaznoj granici pretpostavlja se da je tlak konstantan ($P=P_0$). Kao i u predloženoj metodi, tako i Vardy i Hwang [9] na ovoj granici pretpostavljaju da je radijalna brzina v jednaka nuli i to za sve vrijednosti ε (tj. od eksplicitne do implicitne sheme za v).

Brzina u točki P na ulazno-izlaznoj granici (zapadna granica) određuje se koristeći diskretiziranu karakterističnu jednadžbu samo za karakteristiku C^- (zbog ruba otpada zapadna karakteristika C^+)

$$u_P=u_E+\frac{P_0-P_E}{\rho c}+\left[\frac{\Delta t}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]^{-}, \tag{3.129}$$

$$u_P-\left[\frac{\theta\Delta t}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_P=u_E+\frac{P_0-P_E}{\rho c}+\left[(1-\theta)\frac{\Delta t}{\rho r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{ef}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_E. \tag{3.130}$$

Nakon integracije po površini ΔS_i, dijeljenja s tom površinom i aproksimacije derivacije brzine u, dobiva se sljedeća jednadžba za brzinu u na zapadnom rubu

$$\frac{u_{i+1,1}^{n+1}+u_{i,1}^{n+1}}{2}-\frac{2\pi\theta\Delta t}{\Delta S_i}\left[r_{i+1}\upsilon_{ef\,i+1,1}^{n}\frac{u_{i+1,1}^{n+1}-u_{i,1}^{n+1}}{\Delta r_i}-r_i\upsilon_{ef\,i,1}^{n}\frac{u_{i,1}^{n+1}-u_{i-1,1}^{n+1}}{\Delta r_{i-1}}\right]=\frac{u_{i+1,2}^{n}+u_{i,2}^{n}}{2}+$$
$$+\frac{P_0-P_2^n}{\rho c}+(1-\theta)\frac{2\pi\Delta t}{\Delta S_i}\left[r_{i+1}\upsilon_{ef\,i+1,2}^{n}\frac{u_{i+1,2}^{n}-u_{i,2}^{n}}{\Delta r_i}-r_i\upsilon_{ef\,i,2}^{n}\frac{u_{i,2}^{n}-u_{i-1,2}^{n}}{\Delta r_{i-1}}\right], \tag{3.131}$$

dok jednadžba za tlak P otpada ($P_P=P_0$).

Kad se pomoću predložene metode želi računati stacionarno strujanje (prije zatvaranja ventila) mora se i istočna granica tretirati kao ulazno-izlazna granica i propisati konstantna vrijednost tlaka P_{Ni} na izlazu. Brzina u točki P na toj granici (istočna granica) određuje se koristeći diskretiziranu karakterističnu jednadžbu samo za karakteristiku C^+ (zbog ruba otpada istočna karakteristika C^-). Analogno kao za zapadnu granicu dobivaju se izrazi

$$u_P = u_W - \frac{P_{Ni} - P_W}{\rho c} + \left[\frac{\Delta t}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]^+ , \tag{3.132}$$

$$u_P - \left[\frac{\theta \Delta t}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_P = u_W - \frac{P_{Ni} - P_W}{\rho c} + \left[(1-\theta) \frac{\Delta t}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_W , \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i+1,Ni}^{n+1} + u_{i,Ni}^{n+1}}{2} - \frac{2\pi\theta\Delta t}{\Delta S_i} \left[r_{i+1} \upsilon_{ef\, i+1,Ni}^{n} \frac{u_{i+1,Ni}^{n+1} - u_{i,Ni}^{n+1}}{\Delta r_i} - r_i \upsilon_{ef\, i,Ni}^{n} \frac{u_{i,Ni}^{n+1} - u_{i-1,Ni}^{n+1}}{\Delta r_{i-1}} \right] = \\ &= \frac{u_{i+1,Ni-1}^{n} + u_{i,Ni-1}^{n}}{2} - \frac{P_{Ni} - P_{Ni-1}^{n}}{\rho c} + \\ &\quad + (1-\theta) \frac{2\pi\Delta t}{\Delta S_i} \left[r_{i+1} \upsilon_{ef\, i+1,Ni-1}^{n} \frac{u_{i+1,Ni-1}^{n} - u_{i,Ni-1}^{n}}{\Delta r_i} - r_i \upsilon_{ef\, i,2}^{n} \frac{u_{i,Ni-1}^{n} - u_{i-1,Ni-1}^{n}}{\Delta r_{i-1}} \right]. \end{aligned} \tag{3.134}$$

3.4.2. Početni uvjeti

Profil brzine početnog stacionarnog strujanja dobiva se zasebnom metodom, pri čemu se zadaje Reynoldsov broj za to stacionarno strujanje. Proračun profila brzine je iterativan. Za pretpostavljeni pad tlaka *dP/dx* (koji je konstantan po presjeku cijevi) računa se tangencijalno naprezanje τ na površinama svakog *r*-elementa tako da se zadovolji ravnoteža sila u *x*-smjeru

$$\frac{dP}{dx} \Delta S_i = 2\pi (r_{i+1} \tau_{i+1} - r_i \tau_i) . \tag{3.135}$$

Kreće se od elementa uz simetralu cijevi, zatim slijedi element do njega, i tako sve do stjenke cijevi. Budući da je tangencijalno naprezanje u osi cijevi jednako nuli, u jednadžbi ravnoteže svakog (sljedećeg) elementa pojavljuje se samo jedno nepoznato naprezanje τ_{i+1}, pa je proračun eksplicitan. Kad se na taj način odredi naprezanje τ u svim *r*-čvorovima, određuje se prema Newtonovom zakonu viskoznosti

$$\tau = \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} , \tag{3.136}$$

vrijednost derivacija brzine *u*. Dobivena derivacija integrira se počevši od čvora na stjenci cijevi u kojem je brzina jednaka nuli, pa prema osi cijevi, koristeći izraz

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r_i} . \tag{3.137}$$

U svakoj jednadžbi pojavljuje se samo jedna nepoznata brzina u_i, pa je i ovaj proračun eksplicitan. Naposljetku se određuje srednja protočna brzina *U* pomoću trapezne formule za integraciju

$$U = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N_{\Delta r}} \frac{u_i + u_{i+1}}{2}\Delta S_i \,. \tag{3.138}$$

Proračun se iteracijski ponavlja dok se ne postigne zadani Reynoldsov broj.

Dobiveni profil brzine zatim se održava pomoću programa za nestacionarno strujanje sve do časa zatvaranja ventila. Prijelaz u nestacionarni režim strujanja postiže se samo promjenom istočnog rubnog uvjeta (zatvaranjem ventila).

3.5 Model turbulencije za hidraulički glatke cijevi

Kao u modelu hidrauličkog udara Vardy i Hwang [9], i ovdje se odabire isti 5-zonski algebarski model Kita et al. [30]. Ovaj model sačinjen je i ispitan za oscilatorno strujanje u cijevi. U njemu se pretpostavlja kvazi-stacionarni iznos koeficijenta efektivne viskoznosti μ_{ef} (tj. efektivna viskoznost zavisi od trenutne brzine strujanja, a ne zavisi od lokalnih derivacija).

Ghidaoui et al. [31] pokazali su da se ovim 5-zonskim modelom i 2-zonskim modelom turbulencije koji se koristi u okviru drugog popularnog kvazi-2D modela (Pezzinga [11]) dobivaju praktički iste vrijednosti disipacije kinetičke energije pri hidrauličkom udaru. Ghidaoui et al. [31] zato pretpostavljaju da prilikom hidrauličkog udara iznos efektivne viskoznosti u jezgri cijevi relativno malo utječe na tlak i njegove promjene.

Izrazi za računanje kinematičkog koeficijenta efektivne viskoznosti $\upsilon_{ef} = \mu_{ef}/\rho$ po zonama i granice spomenutih pet radijalnih zona su

Viskozni podsloj

$$\frac{\upsilon_{ef}}{\upsilon} = 1; \quad 0 \le y_* \le \frac{1}{C_A}\,, \tag{3.139}$$

Prijelazni sloj I

$$\frac{\upsilon_{ef}}{\upsilon} = C_A y_*; \quad \frac{1}{C_A} < y_* \le \frac{C_A}{C_B}\,, \tag{3.140}$$

Prijelazni sloj II

$$\frac{\upsilon_{ef}}{\upsilon} = C_B y_*^2; \quad \frac{C_A}{C_B} < y_* \le \frac{K}{C_B + \frac{K^2}{4C_m R_*}}, \tag{3.141}$$

Inercijalni logaritmički sloj

$$\frac{\upsilon_{ef}}{\upsilon} = K y_* \left(1 - \frac{K}{4C_m}\frac{y_*}{R_*}\right); \quad \frac{K}{C_B + \frac{K^2}{4C_m R_*}} < y_* \le \frac{2C_m R_*}{K}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_C}{C_m}}\right), \tag{3.142}$$

Jezgra

$$\frac{\upsilon_{ef}}{\upsilon} = C_C R_*; \quad \frac{2C_m R_*}{K}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{C_C}{C_m}}\right) < y_* \le R_*, \tag{3.143}$$

pri čemu su bezdimenzijske udaljenosti (Reynoldsovi brojevi) y_* i R_* definirane izrazima

$$y = R - r, \tag{3.144}$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}, \tag{3.145}$$

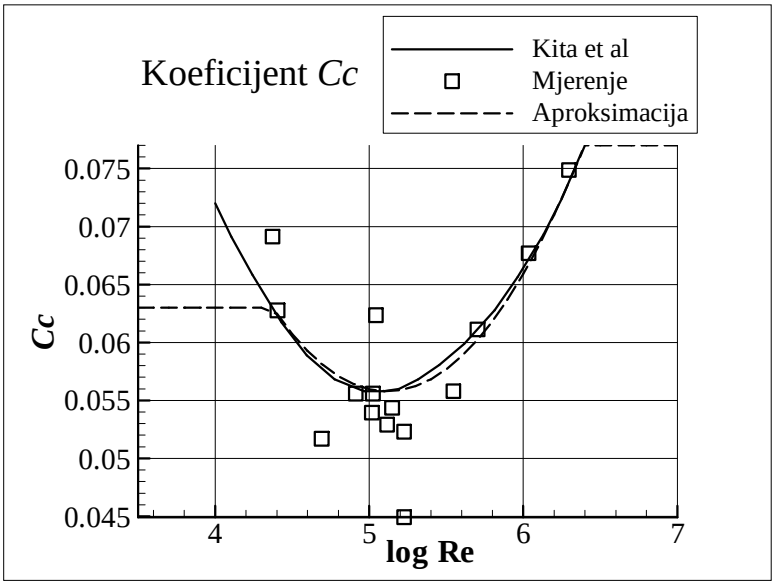
$$y_* = \frac{u_* y}{\upsilon}, \tag{3.146}$$

$$R_* = \frac{u_* R}{\upsilon}, \tag{3.147}$$

R je unutrašnji polumjer cijevi, τ_W je smično naprezanje na stjenci cijevi. Vrijednosti koeficijenata su C_A=0,19; C_B=0,011; K=0,41; C_m=0,077; C_C je funkcija Reynoldsovog broja. Obično se uzima C_C=0,06 (0,05≤ C_C≤0,07). U ovom radu koristi se približna formula

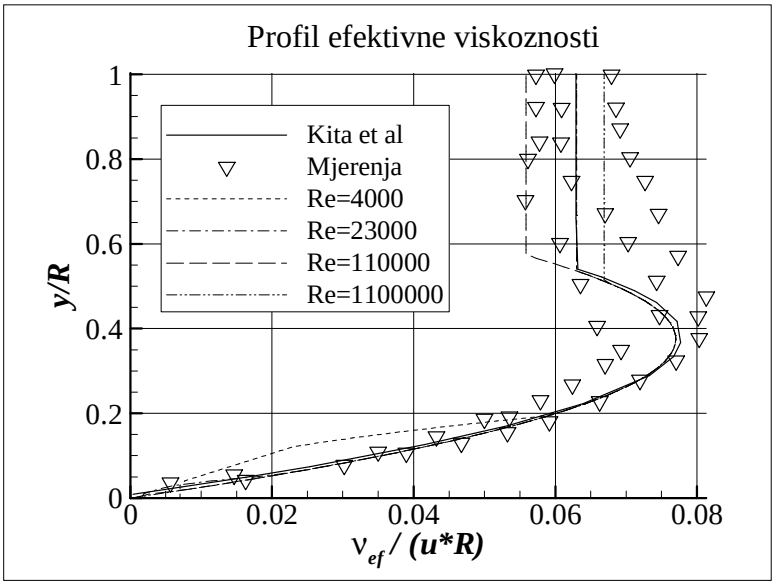
$$C_C = 0{,}01299 \cdot \log(\mathrm{Re})^2 - 0{,}1329 \cdot \log(\mathrm{Re}) + 0{,}3959, \tag{3.148}$$

dobivena aproksimacijom krivulje zavisnosti koeficijenta C_C od Reynoldsovog broja [30] pomoću parabole drugog reda, kako je prikazano na Sl. 4.1



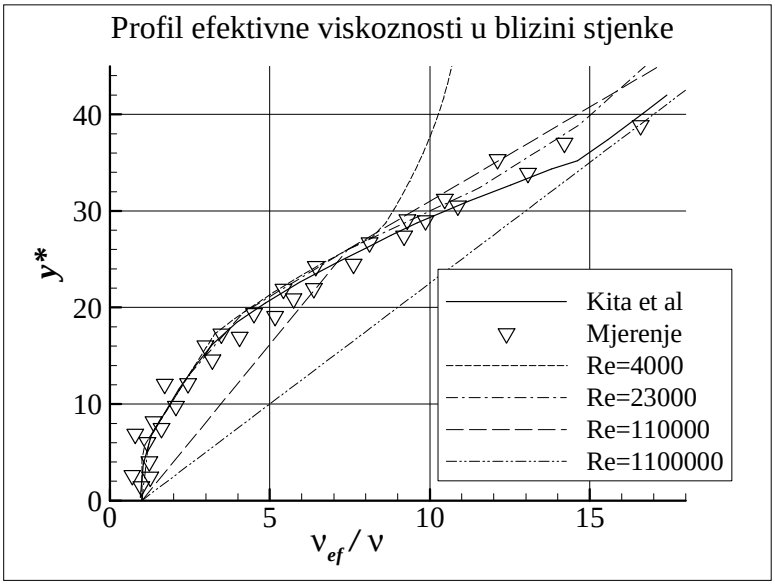
Sl. 3.8 Aproksimacija koeficijenta *Cc*

Pri tome je vrijednost koeficijenta *Cc* za visoke Reynoldsove brojeve ograničena na maksimalno *Cc* = *Cm* = 0,077, da se izbjegne negativna vrijednost ispod kvadratnog korijena u izrazima (3.18) i (3.19). Za niske Reynoldsove brojeve ograničena je vrijednost koeficijenta *Cc* na maksimalno *Cc* = 0,063, čime se namjestilo da koeficijent efektivne viskoznosti υ_{ef} za niske Reynoldsove brojeve u zoni turbulentne jezgre (zona br. 5) poprimi vrijednost prema izrazu $\upsilon_{ef} / u_* R = 0{,}063$, a što je u suglasju s rezultatima koje su objavili Kita et al. [30]. Njihovi rezultati prikazani su na Sl. 3.9, zajedno s rezultatima dobivenim korištenjem aproksimacije prema Sl. 4.1 (tj. pomoću modela prihvaćenog u ovom radu) za četiri razna Reynoldsova broja.



Sl. 3.9 Kinematički koeficijent efektivne viskoznosti υ_{ef} odabranog modela turbulencije; provjera implementacije modela

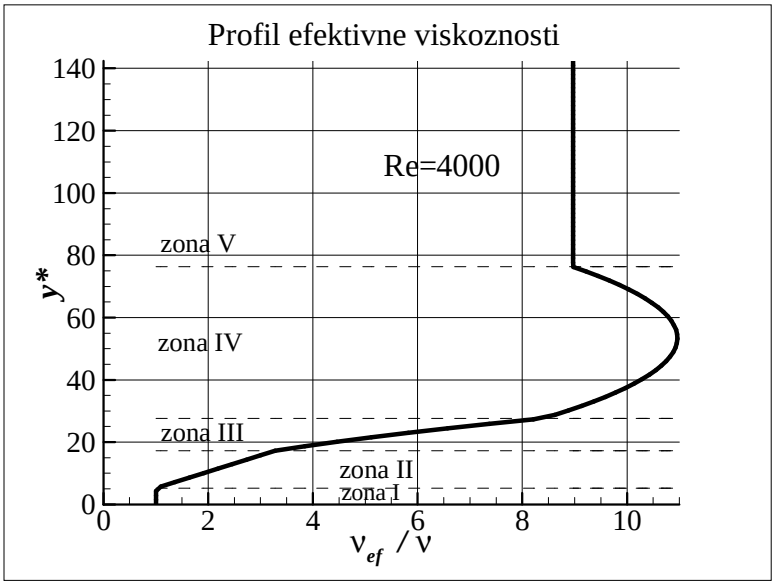
Sl. 3.10 prikazuje izmjerene i proračunate vrijednosti kinematičkog koeficijenta efektivne viskoznosti u blizini stjenke [30]. Na slici su također prikazane i vrijednosti za četiri razna Reynoldsova broja dobivene modelom korištenim u ovom radu. U ovom prikazu dolazi do vrlo velikog odstupanja krivulje Re=4000 od preostalih krivulja. Odstupanje započinje u području u kojem ta krivulja ulazi u inercijalni logaritmički sloj (zona br. 4). To odstupanje pobuđuje izvjesnu sumnju u opravdanost korištenja ovog modela za situacije s niskim Reynoldsovim brojevima. Tim više što su praktički svi dostupni eksperimentalni rezultati hidrauličkog udara dobiveni upravo u takvim situacijama. Međutim, taj se model u literaturi navodi kao primjeren upravo za tranzijentna strujanja u cijevima.



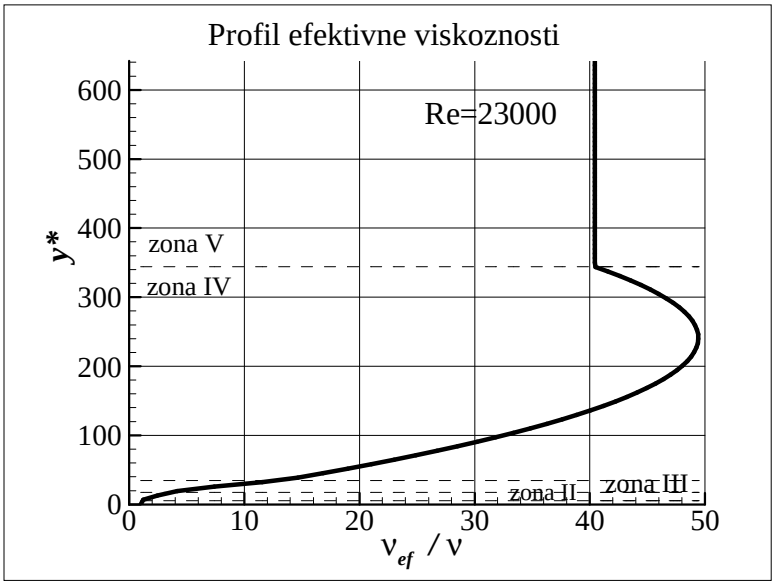
Sl. 3.10 Kinematički koeficijent efektivne viskoznosti υ_{ef} odabranog modela turbulencije u blizini stjenke; provjera implementacije modela

Za odabir tog modela turbulencije u ovom radu presudno je što su isti model u okviru svoje kvazi-2D metode koristili Vardy i Hwang [9]. Budući da bi novopredložena metoda trebala davati rezultate identične metodi Vardy i Hwang (dakle dobiveni rezultati se moraju usporediti upravo s rezultatima dobivenim metodom Vardy i Hwang), ne bi imalo smisla odabrati model turbulencije različit od onog koje su koristili Vardy i Hwang [9].

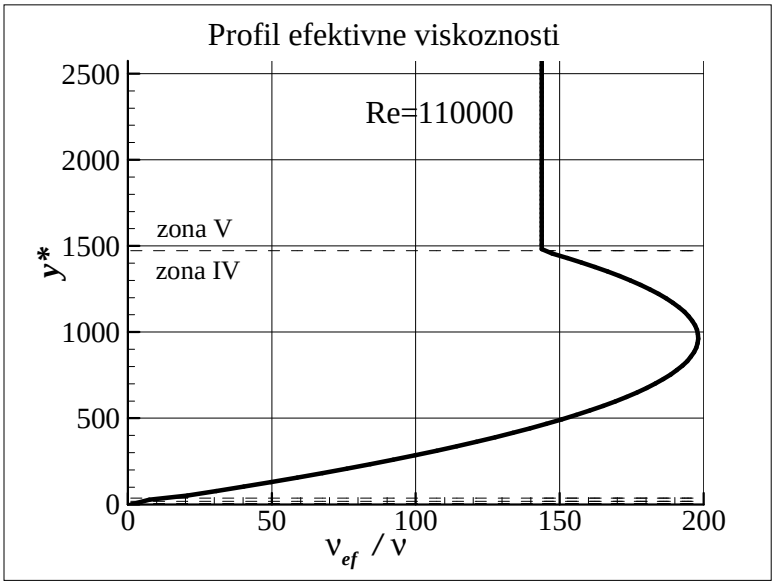
Proračunati profil kinematičkog koeficijenta efektivne viskoznosti υ_{ef} koji se dobiva primjenom prihvaćenog modela prikazan je na Sl. 3.11 do Sl. 3.14 za četiri vrijednosti Reynoldsovog broja i za područje od stjenke do simetrale cijevi. Na slikama su također prikazane i granice zona modela turbulencije.



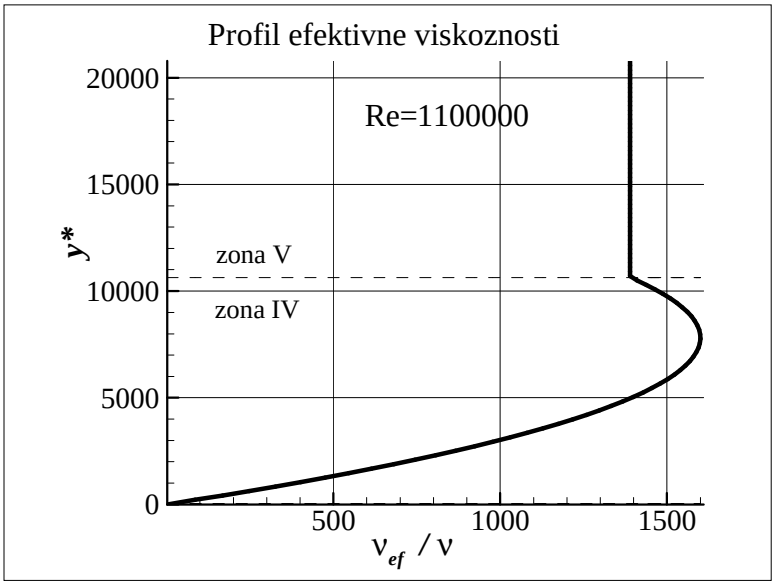
Sl. 3.11 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=4000



Sl. 3.12 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=23000



Sl. 3.13 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=110000



Sl. 3.14 Proračunate vrijednosti efektivne viskoznosti do simetrale cijevi za Re=1100000

3.6 Rješavanje 3-dijagonalnog sustava jednadžbi

Sustav jednadžbi za brzinu *u* koji treba riješiti je 3-dijagonalni. Za taj sustav jednadžbi koristi se Thomasov algoritam ili TDMA (Three-Diagonal Matrix Algorithm) prema Patankar [55] i Hoffman [56].

3-dijagonalni sustav N jednadžbi s N nepoznanica može se zapisati pomoću vektora $[a_j]$, $[b_j]$, $[c_j]$ i vektora slobodnih članova $[d_j]$, kako slijedi

$$-c_j u_{j-1} + a_j u_j - b_j u_{j+1} = d_j, \tag{3.149}$$

pri čemu j=1,N uz rubne uvjete $c_1 = b_N = 0$.

Nakon postupka eliminacije kojim se ukloni dijagonala c_j, rješavanje se završava određivanjem nepoznatih vrijednosti povratnim uvrštavanjem prema rekurzivnom izrazu

$$u_j = p_j u_{j+1} + q_j, \tag{3.150}$$

pri čemu se indeks j mijenja od od j=N–1 do j=1. Zbog $p_N = 0$ (v. niže), povratno uvrštavanje započinje korakom u_N=q_N. Prethodno se vektori $[p_j]$ i $[q_j]$ određuju postupkom eliminacije u kojem se indeks j mijenja od od j=2 do j= N, tako da određivanju vrijednosti p_j i q_j prethodi određivanje vrijednosti p_{j-1} i q_{j-1} koje moraju zadovoljavati relaciju

$$u_{j-1} = p_{j-1} u_j + q_{j-1}. \tag{3.151}$$

Uvrštenjem ove vrijednosti u osnovnu jednadžbu dobiva se relacija

$$-c_j (p_{j-1} u_j + q_{j-1}) + a_j u_j - b_j u_{j+1} = d_j, \tag{3.152}$$

koja se može zapisati u obliku

$$(a_j - c_j p_{j-1}) u_j = b_j u_{j+1} + d_j + c_j q_{j-1}, \tag{3.153}$$

iz kojeg se usporedbom s osnovnim izrazom za povratno uvrštavanje dobivaju sljedeće rekurzivne formule

$$p_j = \frac{b_j}{a_j - c_j p_{j-1}}, \tag{3.154}$$

$$q_j = \frac{d_j + c_j q_{j-1}}{a_j - c_j p_{j-1}}, \tag{3.155}$$

Vrijednosti p_j i q_j dobivene ovim rekurzivnim formulama mogu se prema potrebi u računarskoj memoriji pohranjivati u istim memorijskim ćelijama vektora $[a_j]$ i $[d_j]$. Zbog c_1=0, početni korak je $p_1 = b_1/a_1$, $q_1 = d_1/a_1$. Na kraju postupka eliminacije, zbog uvjeta b_N=0 dobiva se p_N=0. Kao što je ranije rečeno, povratno uvrštavanje započinje korakom u_N=q_N.

4. REZULTATI

U proračunima svih odabranih primjera koristila se potpuno implicitna shema za brzinu u (θ=1). Utjecaj parametra θ nije od velikog značaja, a poznato je da je potpuno implicitna shema najstabilnija

4.1 Simuliranje i održavanje stacionarnog strujanja

U pogledu simuliranja i održavanja stacionarnog stanja provjerava se točnost postizanja poznatog profila brzine kao početnog uvjeta, a nakon toga njegovo održavanje pomoću programa za simulaciju nestacionarnog strujanja uz nepromijenjene rubne uvjete.

U laminarnom strujanju poznat je analitički profil brzine, pa se provjerom postizanja tog profila provjerava isključivo točnost numeričke integracije programa za dobivanje početnih uvjeta. U turbulentnom strujanju, provjerom postizanja početnog profila brzine provjerava se, osim točnosti numeričke integracije, zapravo model turbulencije.

Provjerom održavanja stacionarnog profila pomoću programa za računanje nestacionarnog strujanja provjerava se (1) da prijelaz na nestacionarni način računanja (pomoću metode karakteristika) ne izaziva numerički generirani poremećaj u poljima brzine i tlaka, tj. da su stacionarni i nestacionarni dio proračuna numeričko-metodološki usklađeni, (2) da stacionarni profil brzine s vremenom ne konvergira nekim novim vrijednostima, tj. da integracija u stacionarnom i nestacionarnom programu daje iste vrijednosti s visokom točnošću.

U svim primjerima, održavanje stacionarnog stanja pomoću programa za nestacionarno strujanje pokazalo se besprijekornim. To je vidljivo na svim slikama proračunatih stacionarnih profila brzina u poglavlju 4. Naime svaki prikazani profil brzine zapravo je nacrtan kao niz linija, tj. sadrži početni profil brzine i niz profila brzine izračunatih tijekom prvih 20 vremenskih koraka. Ni na jednoj slici ne može se opaziti nikakvo 'klizanje' krivulje profila.

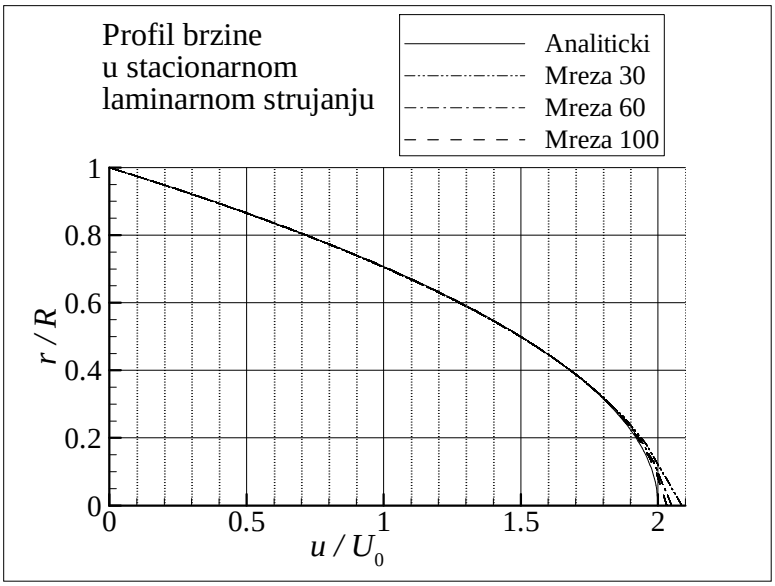
4.1.1. Laminarno strujanje

Na Sl. 4.1 prikazan je profil brzine dobiven analitičkim izrazom za stacionarno laminarno strujanje nestlačivog fluida u cijevi kružnog presjeka

$$\frac{u}{U_0} = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) . \tag{4.1}$$

Na slici su s tim profilom uspoređeni profili koji su proračunati numeričkom integracijom koristeći tri diskretizacijske mreže različite gustoće po radijalnoj *r*-koordinati ($N_{\Delta r}$=30, 60 i 100 koraka Δr_i po radijalnoj koordinati). Za svaku pojedinu mrežu koraci Δr_i odabrani su tako da su površine *x=const* (poprečni presjeci) međusobno jednake za svaki element mreže. Svi kasniji proračuni primjera nestacionarnog strujanja za validaciju provedeni su na mreži $N_{\Delta r}$=100.

Odstupanje proračunatih profila brzine od analitičkog najveće je u području maksimalnih brzina (u blizini osi cijevi). To odstupanje je manje ako se koristi jednolika mreža. Možda bi čak i rezultati proračuna nestacionarnog laminarnog strujanja bili bolji uz korištenje jednolike mreže. Mreža s jednolikim radijalnim površinama se odabrala jer su je koristili Vardy i Hwang u svom originalnom članku [9]. Tijekom razvoja predložene metode primijetilo da u turbulentnom strujanja mreža bazirana na geometrijskom nizu daje znatno bolje rezultate, pa se zato za turbulentno strujanje prešlo na takvu mrežu.



Sl. 4.1 Postizanje i održavanje laminarnog profila brzine

4.1.2. Turbulentno strujanje, glatke cijevi

Testiranje numeričkog proračuna stacionarnog turbulentnog profila brzina i njegovog održavanja izvršeno je (a) usporedbom proračunatog koeficijenta trenja λ s vrijednošću koja se dobiva prema Colebrookovom (ili Prandtlovom) izrazu i (b) usporedbom proračunatih profila brzine s izmjerenim profilima brzine prema [57]. Testiranje je provedeno za 4 vrijednosti Reynoldsovog broja (Re = 4000, 23000, 110000 i 1100000) i za 3 razne gustoće diskretizacijske mreže po radijalnoj koordinati.

Kvocijent geometrijskog niza bio je q=1,05 (prvi član niza je širina elementa uz stjenku cijevi), pa je, zavisno od situacije povećan sve do vrijednosti q=1,15, kako bi se postiglo da prvi čvor pored stjenke bude unutar viskoznog podsloja. U prihvaćenom modelu turbulencije granica viskoznog podsloja je pri vrijednosti bezdimenzijske koordinate $y_* = 5{,}26$, ali iskustvo u korištenju konkretnog računalnog programa je pokazalo da je povoljno da u nestacionarnom strujanju najbliži čvor za sve vrijednosti vremena t i dužinske koordinate x bude otprilike unutar područja $y_* < 2$. Koristile su se podjele na $N_{\Delta r} = 30$, 60 i 100 koraka Δr_i po radijalnoj koordinati za sve Reynoldsove brojeve osim za Re = 1.100.000 (kako bi i tu prvi čvor pored stjenke bio unutar viskoznog podsloja, povećane su vrijednosti podjele na $N_{\Delta r} = 60$, 100 i 150 koraka).

a) usporedba koeficijenta trenja λ

Za zadane vrijednosti Reynoldsovog broja Re, promjera D, gustoće ρ i početne srednja brzine U_0 određuje se vrijednost koeficijenta trenja $\lambda=\lambda(Re)$ prema Colebrookovom izrazu. Odgovarajuća proračunska vrijednost λ_{MT} određuje pomoću Darcy-Weisbachovog obrasca

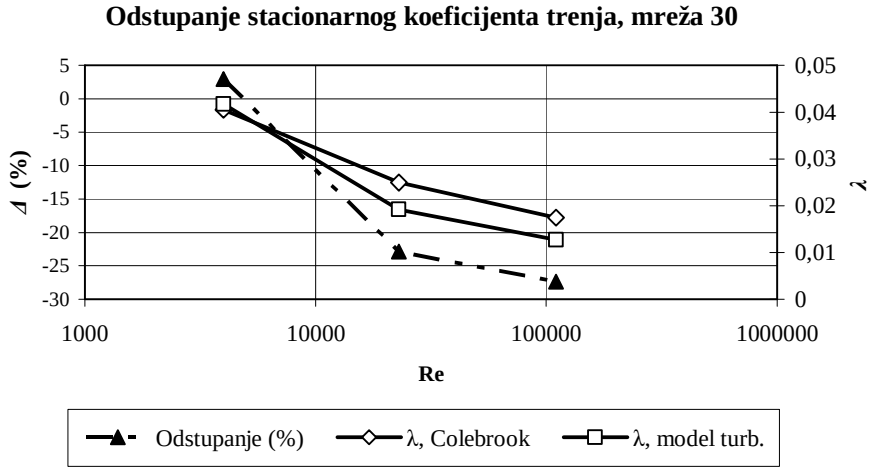
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda_{MT}}{D}\rho\frac{U_0^2}{2} \ , \tag{4.2}$$

iz gradijenta tlaka dp/dx dobivenog numeričkom integracijom modela turbulencije. Dobivene vrijednosti λ i λ_{MT} prikazane su za sve spomenute Reynoldsove brojeve i diskretizacijske mreže na Sl. 4.2 do Sl. 4.4, zajedno s vrijednostima odstupanja

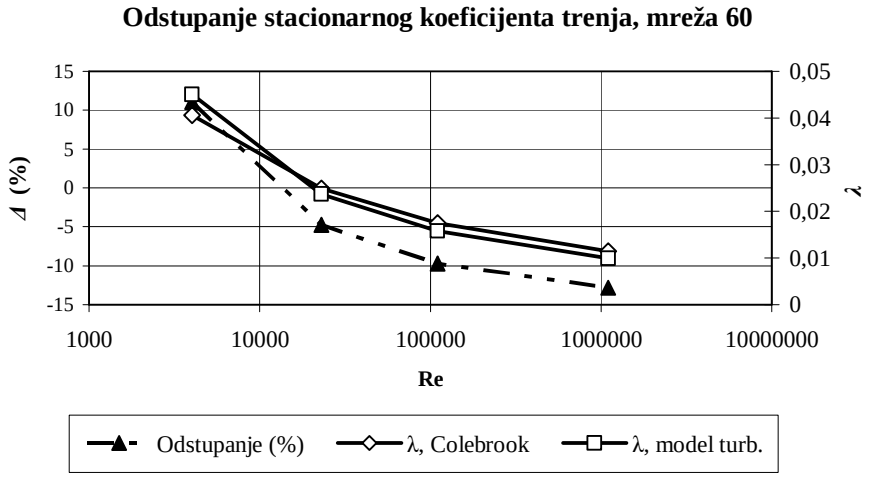
$$\Delta = \frac{\lambda_{MT}-\lambda}{\lambda}\times 100\% \ . \tag{4.3}$$

Iz Darcy-Weisbachovog obrasca slijedi da tako dobiveno odstupanje Δ (uz zadane vrijednosti Reynoldsovog broja Re, promjera D, gustoće ρ i početne srednja brzine U_0) ujedno predstavlja odstupanje izračunate vrijednosti gradijenta tlaka od očekivane vrijednosti.

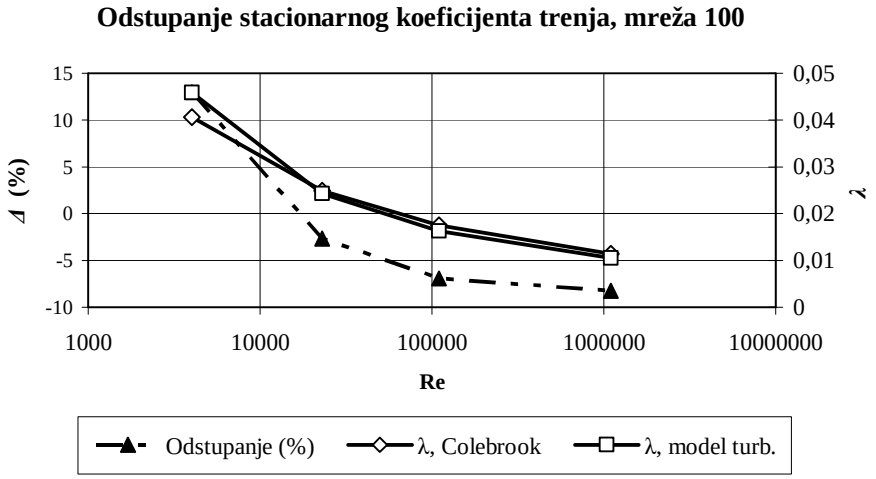
Zamjećuje se trend smanjenja odstupanja s povećanjem broja elemenata mreže pri svim Reynoldsovim brojevima osim najmanjeg Re=4000. Upitno je u kojoj mjeri je odabrani model turbulencije prikladan za prijelazno područje.



Sl. 4.2 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 30 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08) i 110000 (q=1,15)



Sl. 4.3 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 60 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08), 110000 (q=1,1) i 1100000 (q=1,15)

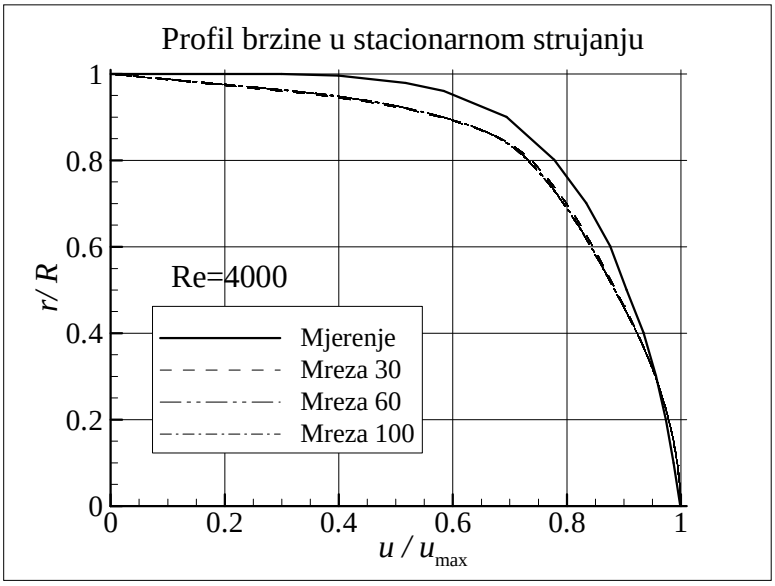


Sl. 4.4 Koeficijent trenja λ prema Colebrookovom izrazu i λ_{MT} dobiven integracijom modela turbulencije na mreži od 100 elemenata, te njegovo odstupanje (Δ) od λ, za vrijednosti Reynoldsovog br.: 4000 (q=1,05), 23000 (q=1,08), 110000 (q=1,1) i 1100000 (q=1,1)

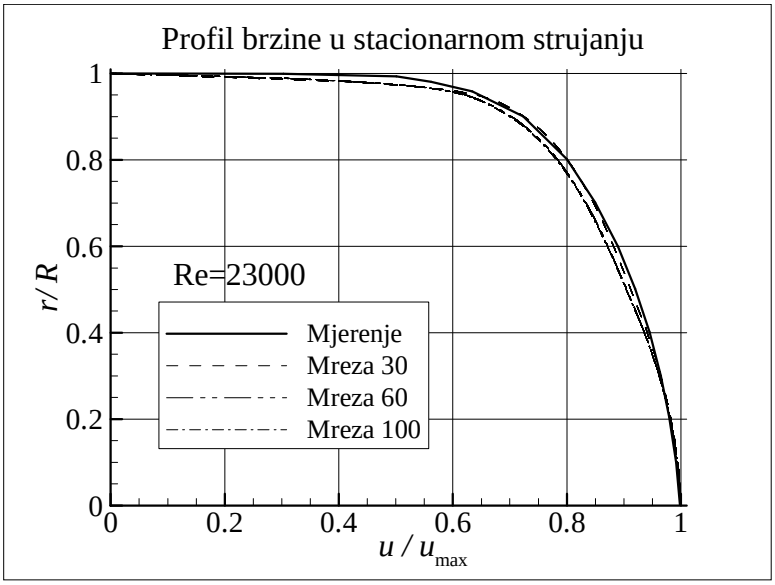
b) usporedba profila brzine

Profili brzine stacionarnog turbulentnog strujanja za 4 Reynoldsova broja (Re=4000, 23000, 110000 i 1100000), proračunati numeričkom integracijom prihvaćenog modela turbulencije na 3 mreže različite gustoće u radijalnom smjeru, uspoređeni su na Sl. 4.5 do Sl. 4.8 s odgovarajućim eksperimentalno dobivenim profilima brzine prema [57].

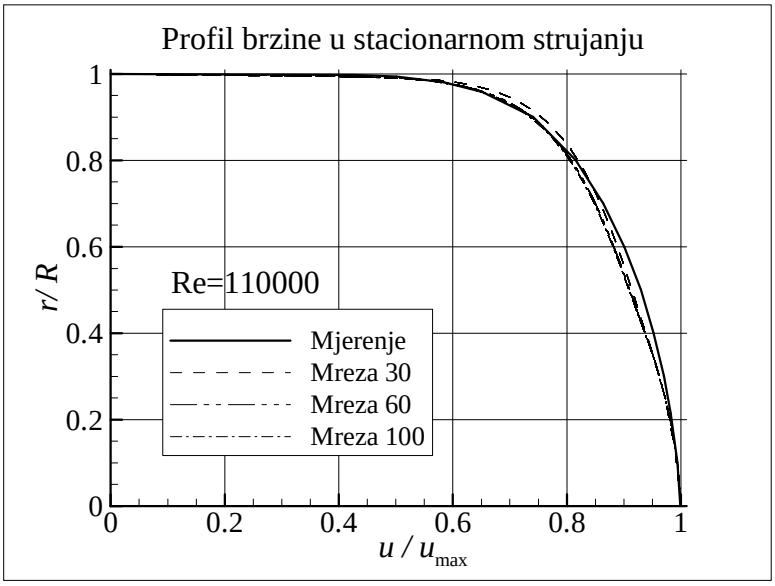
Kad se usporede rezultati proračuna pomoću raznih mreža, jedino se rezultati dobiveni pomoću mreže od 30 elemenata zamjetno razlikuju od ostalih. Međusobna razlika rezultata dobivenih pomoću preostale dvije mreže je jedva zamjetna. Poklapanje s eksperimentalnim rezultatima je zadovoljavajuće, jedino je odstupanje nešto veće za prijelazno područje (Re=4000).



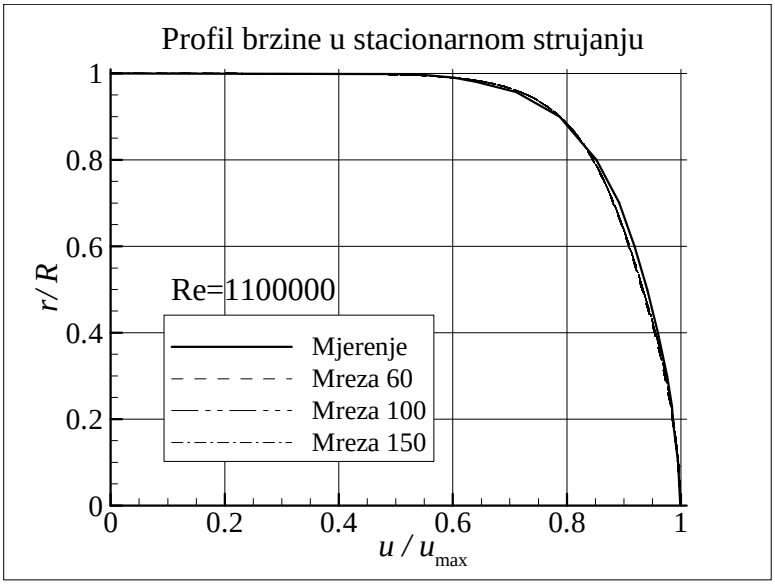
Sl. 4.5 Usporedba profila brzine pri Re=4.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30, 60 i 100 elemenata u radijalnom smjeru (q=1,05 za sve tri mreže) s eksperimentalno dobivenim profilom [57]



Sl. 4.6 Usporedba profila brzine pri Re=23.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30, 60 i 100 elemenata u radijalnom smjeru (q=1,08 za sve tri mreže) s eksperimentalno dobivenim profilom [57]



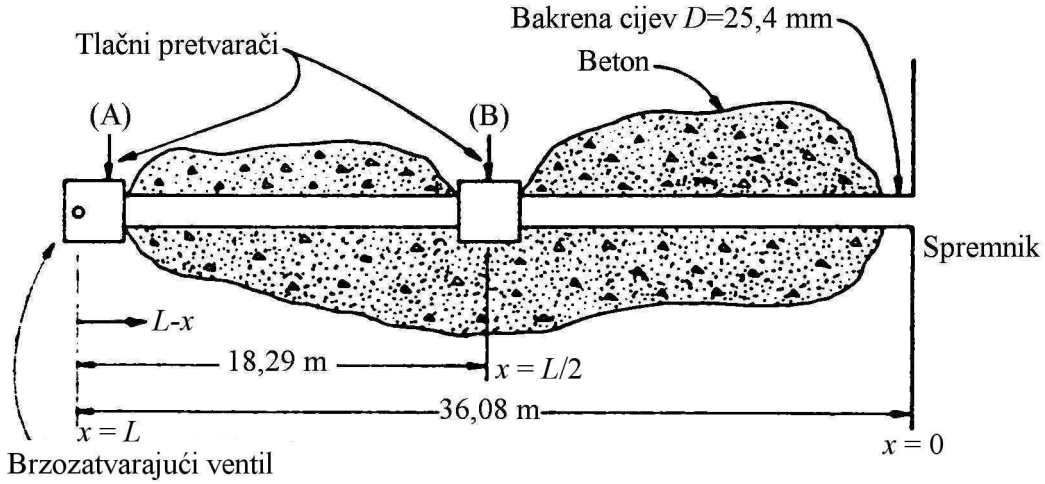
Sl. 4.7 Usporedba profila brzine pri Re=110.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 30 (q=1,15), 60 (q=1,1) i 100 (q=1,1) elemenata u radijalnom smjeru s eksperimentalno dobivenim profilom [57]



Sl. 4.8 Usporedba profila brzine pri Re=1.100.000 dobivenih numeričkom integracijom modela turbulencije na mrežama s 60 (q=1,15), 100 (q=1,1) i 150 (q=1,1) elemenata u radijalnom smjeru s eksperimentalno dobivenim profilom [57]

4.2 Hidraulički udar

Validacija predložene metode proračuna izvršena je usporedbom s rezultatima dva eksperimenta hidrauličkog udara koje su objavili Holmboe i Rouleau [58], te s rezultatima numeričkog proračuna (Vardy i Hwang [9]) za dvije situacije hidrauličkog udara koje odgovaraju spomenutim eksperimentima. Oba eksperimenta izvršena su na eksperimentalnom uređaju prikazanom na Sl. 4.9. Bakrena cijev (srednja visina hrapavosti za standardne bakrene cijevi iznosi $k_r \approx 0{,}0015$ mm) unutrašnjeg promjera $D = 25{,}4$ mm i duljine $L = 36{,}08$ m savinuta je u obliku spirale promjera oko 0,9 m i ulivena u beton kako bi se postigla krutost stjenke u radijalnom i aksijalnom smjeru. Na jednoj strani cijevi smješten je veliki spremnik (volumena oko 230 l) pod tlakom. Na taj način osiguran je konstantni tlak P_0 na početku cijevi (uz spremnik). Na drugoj strani cijevi smješten je brzozatvarajući ventil. Nakon uspostave stacionarnog strujanja, hidraulički udar postiže se praktički trenutnim zatvaranjem ventila. Osjetnici tlaka smješteni su na udaljenostima (mjereno od spremnika) $x_A = L$ (kod ventila) i $x_B = 17{,}79$ m (otprilike na sredini cijevi). Za prvi eksperiment odabrano je ulje relativno velike viskoznosti, a početno stacionarno strujanje bilo je laminarno. Drugi eksperiment izvršen je s vodom, početno stacionarno strujanje bilo je turbulentno u prijelaznom području, tj. uz relativno niski Reynoldsov br. (Re=6132), a cijev je hidraulički glatka.



Sl. 4.9 Shema uređaja za ispitivanje hidrauličkog udara [58]

Podaci korišteni za proračune oba primjera za validaciju navedeni su u tablici 4.1. Podaci označeni zvjezdicama nisu navedeni u originalnom radu [58]

Tablica 4.1 Podaci o eksperimentima hidrauličkog udara [58]

Eksperiment	Br. 1	Br. 2
Početno strujanje	laminarno	turbulentno
Početni Reynoldsov broj	81,97	6132 **
Duljina cijevi, L, m	36,08	36,08
Promjer cijevi, D, mm	25,4	25,4
Hrapavost cijevi, ε, mm	0,0015 ** (bakar)	0,0015 ** (bakar)
Položaj osjetnika A, x_A, m	36,08	36,08
Položaj osjetnika B, x_B, m	17,79	17,79
Početna srednja brzina, U_0, m/s	0,128	0,244
Brzina zvuka, c, m/s	1324	1350 *
Kinematička viskoznost, υ,m^2/s	$3{,}967\times10^{-5}$	$1{,}01\times10^{-6}$ **
Gustoća, ρ, kg/m^3	878,4 *	998,2 **
Temperatura, θ, ^{0} C	0	20 **
* podaci o eksperimentu [58] prema [12] ** procijenjeno		

Prema Vardy i Hwang [9] najbolji rezultati proračuna postižu se kad omjer broja aksijalnih i radijalnih elemenata iznosi oko 1,5. U slučaju prevelikog broja radijalnih elemenata oni upozoravaju na nestabilnost proračuna, a u slučaju prevelikog broja aksijalnih elemenata na gubitak rezolucije odn. preciznosti.

Pri korištenju predložene metode proračuna, utjecaj mreže zamijećen je jedino u prikazima profila brzine. Po pitanju preciznosti proračuna, može se i očekivati da je upravo proračun profila brzine najzahtjevniji. Na prikazima profila brzine u laminarnom i u turbulentnom strujanju primjećuje se da se profil malo mijenja s promjenom gustoće mreže. Na rezultat utječe promjena gustoće u radijalnom, ali također i u aksijalnom smjeru. Za razliku od [9], ni u jednom slučaju nisu opaženi problemi sa stabilnošću proračuna sa smanjenjem broja elemenata u aksijalnom smjeru.

Usporedbe rezultata proračuna i eksperimentalnih [58] rezultata u nastavku, pokazat će visok nivo poklapanja tih rezultata. Prema očekivanju, proračunski rezultati samo se minimalno razlikuju od rezultata proračuna Vardy i Hwang [9]. Te male razlike mogle bi biti uzrokovane pogreškama u očitavanju dijagrama prezentiranih u [9] kao i različitom metodom numeričke diskretizacije jednadžbi.

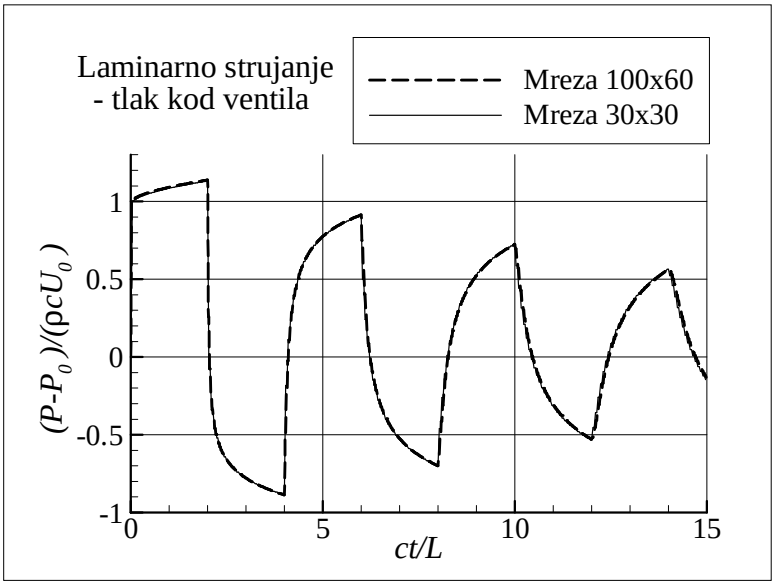
Vardy i Hwang [9] navode da su za proračun radijalne komponente brzine *v* koristili potpuno implicitnu shemu, tako da u tom pogledu nema razlike u odnosu na predloženu metodu. Ne navode da li je korištena eksplicitna ili implicitna shema za proračun trenja (tj. za proračun aksijalne brzine *u*). Iako u provedenim usporedbama utjecaj korištene sheme nije mogao biti velik, utjecaj sheme trebalo bi detaljno istražiti.

Zanemarivanje radijalne komponente brzine u rubnim elementima (na početku i na kraju cijevi) u predloženoj metodi možda djelomično uzrokuje razlike koje će se u rezultatima pokazati pri promjeni aksijalnog koraka mreže. Te razlike su se pokazale relativno male, pa se čini da detaljno istraživanje utjecaja tog rubnog uvjeta nije potrebno.

4.2.1. Hidraulički udar u laminarnom režimu

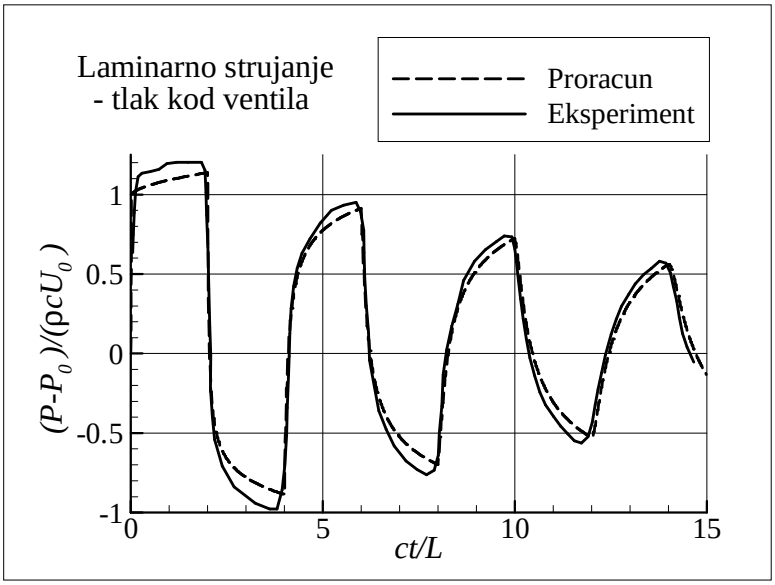
Proračun hidrauličkog udara u laminarnom režimu (eksperiment br. 1) proveden je na mreži s $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 100 \times 60$ elemenata. Podjela u aksijalnom smjeru (po koordinati *x*) je jednolika, a podjela u radijalnom smjeru (po koordinati *r*) ispunjava uvjet da su međusobno jednake površine poprečnog presjeka elemenata (pri *x=const*). Razlike u rezultatima koje se dobiju istim proračunom izvršenim na mrežama s manje elemenata (30×30 i 60×30) na slikama se teško mogu zamijetiti. Takve razlike ipak se zamjećuju na prikazu profila brzine.

Na Sl. 4.10 uspoređeni su rezultati proračuna tlaka izvršenog na mreži $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 100 \times 60$ elemenata i na mreži $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 30 \times 30$. Unatoč vrlo velikoj razlici ovih dviju mreža, u rezultatima nema zamjetne razlike. Svi proračuni laminarnog strujanja izvršeni su koristeći finiju (100×60) mrežu, a daljnja testiranja integralnih jednodimenzijskih parametara (tlak *P*, srednja brzina *U*) nisu prikazana u radu.

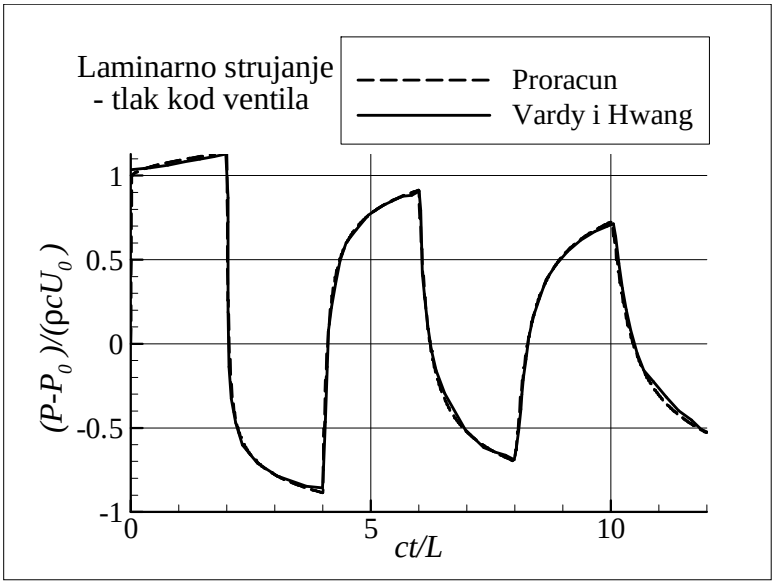


Sl. 4.10 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću dvije mreže

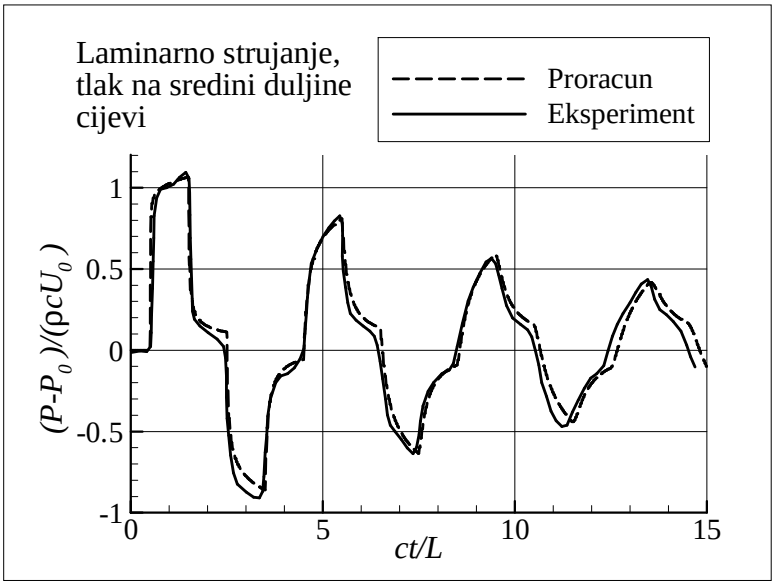
Na Sl. 4.11 do Sl. 4.14 vremenski tijek promjene tlaka dobiven proračunom pomoću predložene metode uspoređen je s izmjerenim tijekom [58] i s tijekom dobivenim proračunom pomoću metode Vardy i Hwang [9]. Na Sl. 4.11 i Sl. 4.12 uspoređen je tijek tlaka pored ventila (na kraju cijevi), a na Sl. 4.13 i Sl. 4.14 uspoređen je tijek tlaka na sredini cijevi. Za oba ova tlaka poklapanje rezultata proračuna s eksperimentalnim rezultatima je dobro, dok su rezultati proračuna Vardy i Hwang [9] gotovo identični.



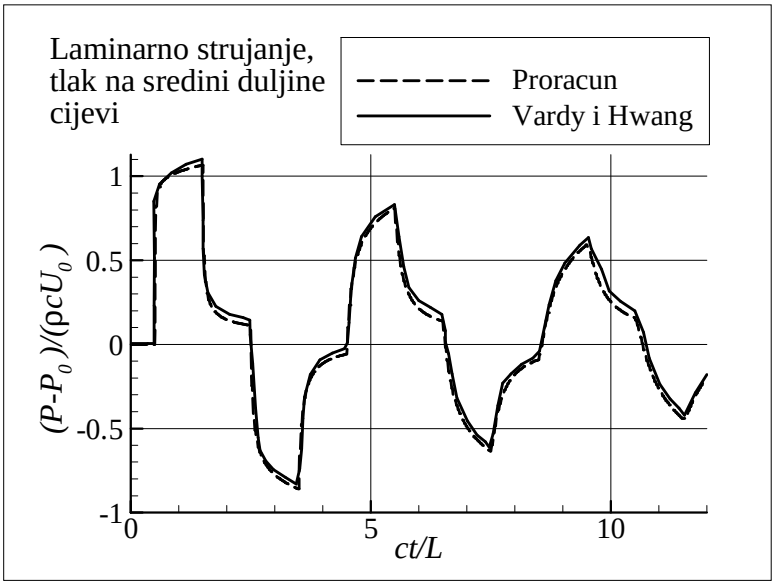
Sl. 4.11 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka kod ventila



Sl. 4.12 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

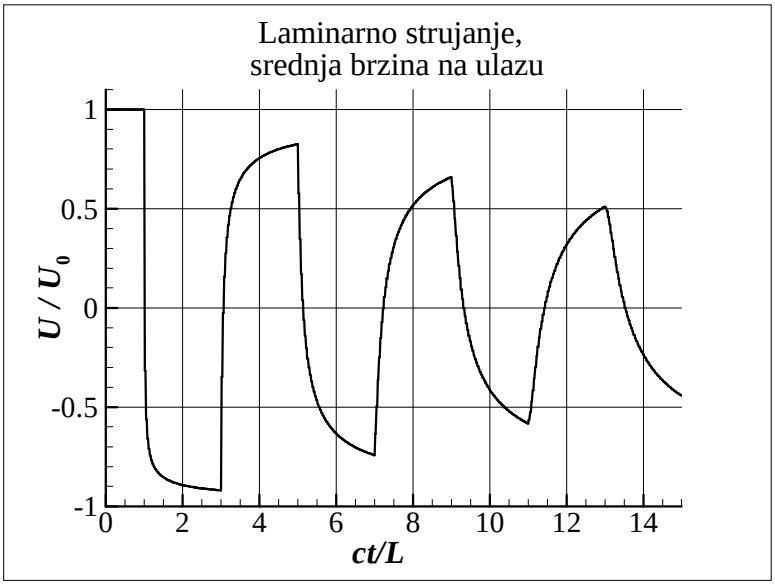


Sl. 4.13 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi

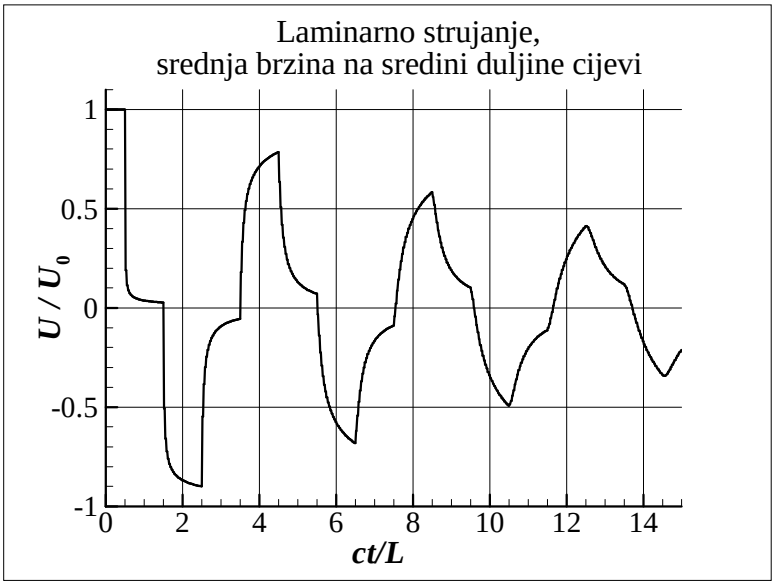


Sl. 4.14 Tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

Vremenski tijek srednje brzine *U* nije lako eksperimentalno odrediti. Možda je to razlog da se taj tijek u literaturi prikazivao izuzetno rijetko. Zato je ovdje bez usporedbe dan na Sl. 4.15 i Sl. 4.16 vremenski tijek srednje brzine dobiven pomoću predložene metode proračuna. Ne osvrćući se na razumljivi fazni pomak, vrijedi uočiti sličnost krivulje tijeka srednje brzine kod spremnika (Sl. 4.15) i krivulje tijeka tlaka kod ventila (Sl. 4.11). Sličnost je također prisutna i među krivuljama tijeka srednje brzine (Sl. 4.16) i tlaka (Sl. 4.13) na sredini cijevi. Jedino je iz razumljivih razloga ovdje osim faznog pomaka prisutna i promjena predznaka. Može se reći da je međusobna sličnost tijeka tlaka i srednje brzine, koja je prisutna kod idealnog modela (bez trenja), zadržana i kod modela s trenjem.



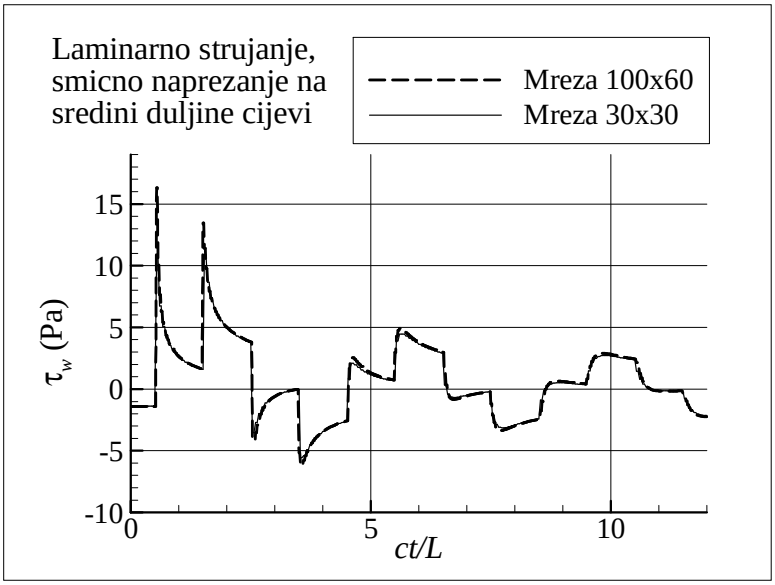
Sl. 4.15 Tijek srednje brzine kod spremnika proračunat pomoću predložene metode



Sl. 4.16 Tijek srednje brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode

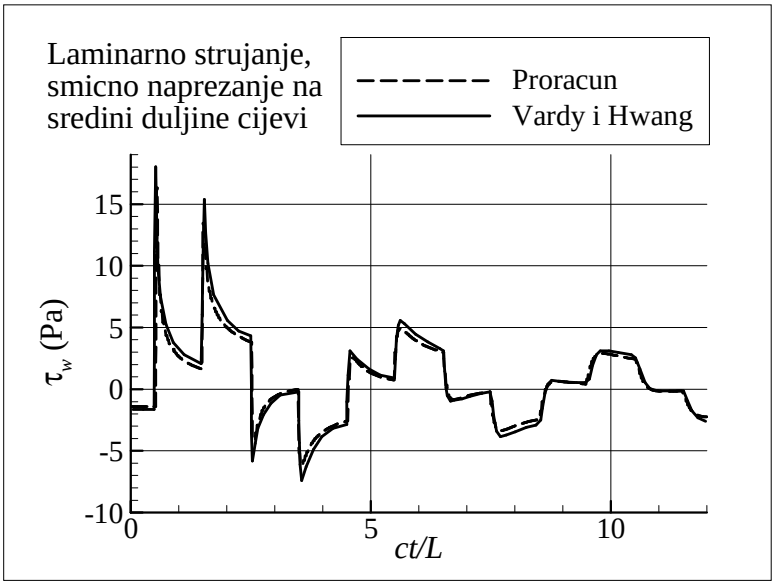
Za razliku od integralnih jednodimenzijskih parametara (tlak, srednja brzina), smično naprezanje na stjenci cijevi τ_w slično kao i profil brzine zahtijeva nešto veću preciznost proračuna. Zato je na Sl. 4.17 prikazana usporedba proračunatih vrijednosti vremenskog tijeka smičnog naprezanja na stjenci cijevi (na sredini duljine cijevi) dobivenih pomoću mreže $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 100 \times 60$ elemenata i mreže $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 30 \times 30$. Unatoč velikoj razlici u gustoći mreže, razlika u proračunskom rezultatu ponovo nije jako zamjetna. Međutim, razlika u

maksimalnim naprezanjima u trenutku prolaska prvog poremećaja je znatna i iznosi oko 50%. No oblik krivulje upućuje da se na tom mjestu radi o asimptoti, pa ta razlika možda i nije pretjerano bitna.



Sl. 4.17 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću dvije mreže

Na Sl. 4.18 uspoređen je vremenski tijek smičnog naprezanja na stjenci cijevi τ_w na sredini duljine cijevi dobiven proračunom prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9]. Slaganje rezultata dviju metoda i ovdje je dobro. Vidljivo je da su se predloženom metodom dobila nešto manja naprezanja τ_w. To može biti uzrokovano i eventualnom razlikom u odabranoj interpolacijskoj shemi određivanja derivacije brzine na stjenci cijevi.

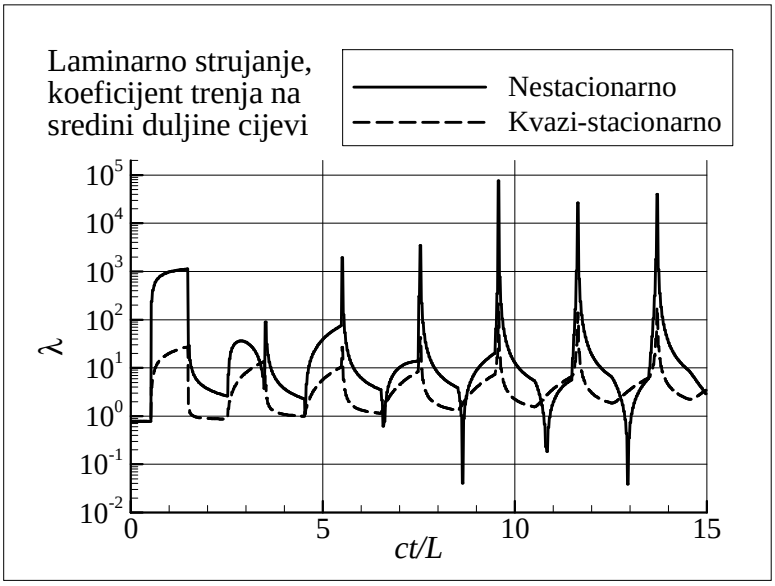


Sl. 4.18 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

Sl. 4.19 prikazuje tijek koeficijenta trenja λ izračunatog na bazi gore prikazanog tijeka nestacionarnog tangencijalnog naprezanja na stjenci cijevi, prema izrazu

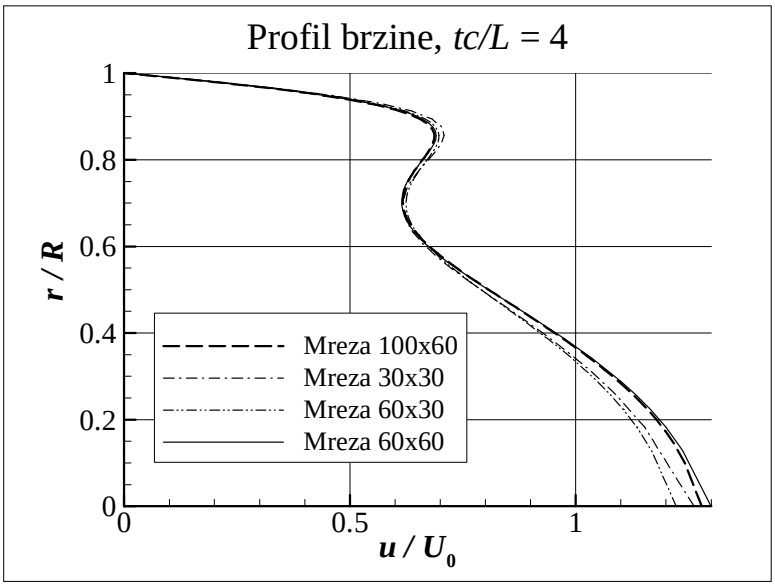
$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho U^2} \ . \tag{4.4}$$

Za usporedbu, prikazana je i krivulja kvazi-stacionarnog koeficijenta trenja izračunatog na bazi trenutačne vrijednosti Reynoldsovog broja ($\lambda = 64/$**Re**, odn. prema Colebrookovom izrazu za slučaj **Re**<2300). Nestacionarni koeficijent trenja je i do dva reda veličine veći od kvazi-stacionarnog, čime se još jednom potvrđuje činjenica da korištenjem kvazi-stacionarnog modela nije moguće postići realne vrijednosti prigušenja titraja. Iz slike je također vidljivo da na mjestima na kojima je srednja brzina približno jednaka nuli, koeficijent trenja poprima ekstremno visoke vrijednosti. Time se još dodatno otežava cijeli ionako problematični koncept korištenja koeficijenta trenja za nestacionarno strujanje. Obzirom na jednostavnost i veliku brzinu dobivanja rezultata pomoću predložene kvazi-2D metode, predložena metoda se već uz brzinu i snagu današnjih računala može koristiti za simulacije strujanja u cijevnim mrežama u realnom vremenu, pa se zato ovdje ne uvodi metoda računanje pomoću koeficijenta trenja.



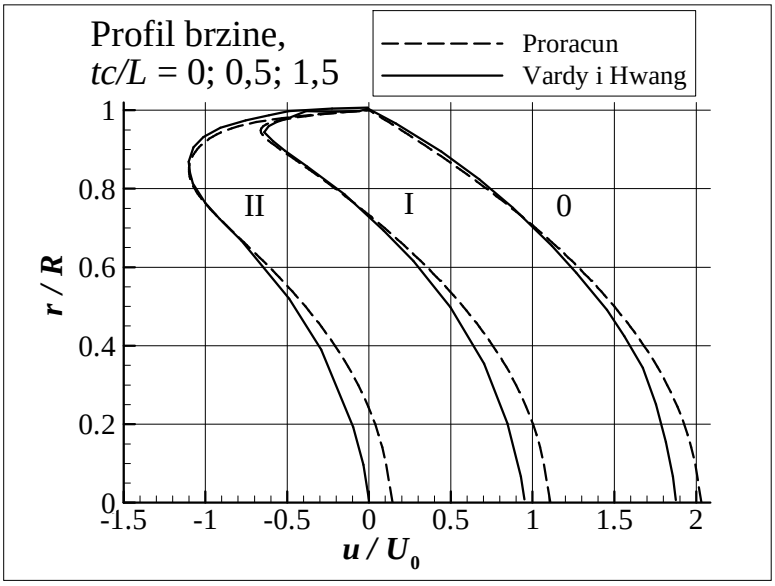
Sl. 4.19 Tijek koeficijenta trenja, nestacionarnog (određen iz smičnog naprezanja τ_w) i kvazi-stacionarnog (određen prema vrijednosti **Re**)

Na Sl. 4.20 prikazan je proračunati profil brzine na sredini duljine cijevi u trenutku $tc/L = 4$. Proračun je proveden koristeći četiri različite mreže ($N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$: 30×30; 60×30; 60×60; 100×60). Iako su u ovom najzahtjevnijem testu razlike u rezultatima zbog utjecaja mreže najveće, one su ipak relativno male. Čini se da promjena gustoće mreže u aksijalnom smjeru ima čak veći utjecaj na profil brzine nego njena promjena u radijalnom smjeru.



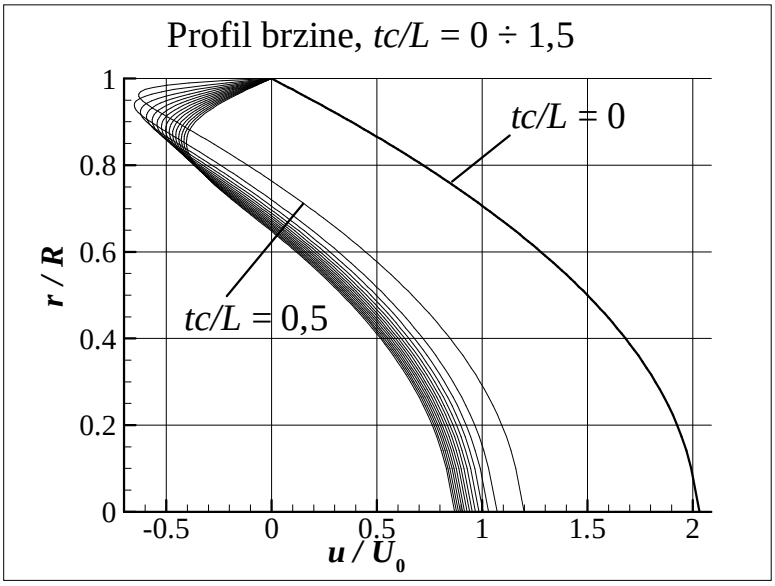
Sl. 4.20 Profil brzine na sredini duljine cijevi u trenutku tc/L = 4 proračunat pomoću četiri različite mreže

Na Sl. 4.21 prikazani su stacionarni profil brzine (0) i dva profila brzine (I i II) na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prvog (tc/L = 0,5) i drugog (tc/L = 1,5) poremećaja, proračunati prema [9]. Budući da nije poznat točan trenutak u kojem su profili I i II proračunati, za usporedbu su odabrani najsličniji profili dobiveni predloženim proračunom nekoliko vremenskih koraka nakon prolaska poremećaja. Razlike među profilima nisu prevelike. Zapravo je odstupanje iznenađujuće veliko kod stacionarnog profila (0). Predloženim modelom dobivena je vrijednost maksimalne brzine znatno bliža analitičkoj vrijednosti u_{max}/U_0 = 2. Dio razloga za tu razliku zacijelo leži u finijoj diskretizacijskoj mreži (Vardy i Hwang primijenili su podjelu na 20 radijalnih elemenata, a proračun je načinjen koristeći mrežu od 100 elemenata). Razlika u maksimalnoj stacionarnoj brzini prenosi se i na nestacionarne profile I i II. Ukoliko bi se čak identičnim programom za nestacionarno strujanje izvršili proračuni u kojima je prisutna takva razlika u početnim uvjetima (tj. u maksimalnoj brzini), moglo bi se očekivati da ta razlika 'preživi' nekoliko valnih ciklusa zbog nedovoljnog vremena za uravnoteženje profila.

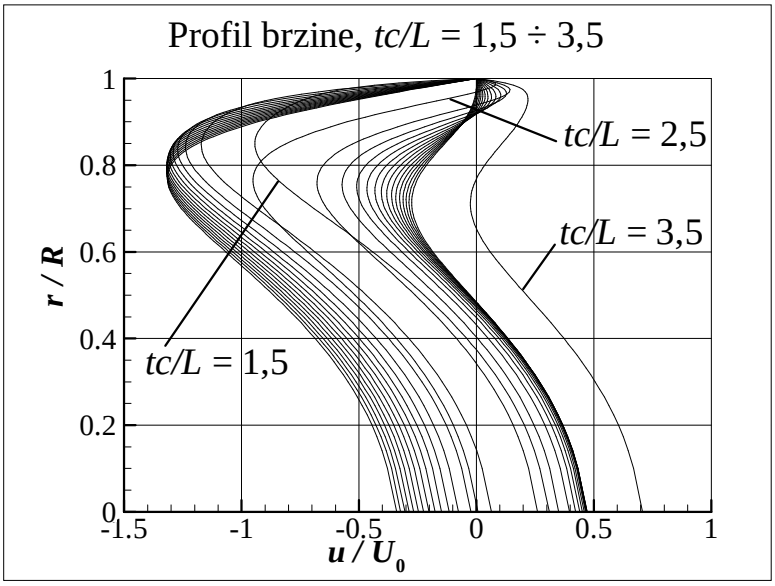


Sl. 4.21 Profili brzine na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prva dva poremećaja, proračunati prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9]

Sl. 4.22 prikazuje razvoj proračunatog profila brzine nakon prolaska prvog poremećaja ($tc/L = 0 \div 1{,}5$). Promjena stacionarnog profila događa se skokovito u trenutku $tc/L = 0{,}5$, nakon čega se profil postupno mijenja (uravnotežuje) do prolaska sljedećeg poremećaja u trenutku $tc/L = 1{,}5$. Zbog podjele na 60 elemenata po osi x, profil se mijenja kroz 60 vremenskih koraka, ali je na slikama prikazan svaki četvrti od tih 60 profila. Sl. 4.23 prikazuje razvoj profila brzine nakon prolaska sljedeća dva poremećaja ($tc/L = 1{,}5 \div 3{,}5$ tj. do početka četvrtog poremećaja). Poremećaji dolaze u razmacima $tc/L = 1$ (tj. u trenucima $tc/L = 0{,}5$; 1,5; 2,5; 3,5; itd.). Može se pratiti kako se profil razvija pod utjecajem poremećaja tlaka koji također nije trenutačan nego ima svoj vremenski tijek, te pod utjecajem znatne sile trenja uz stjenku nakon prolaska fronte poremećaja. Pri tome je, osim udaljavanja točke ekstrema brzine od stjenke cijevi, posebno od interesa udaljavanje točke infleksije, koje prema [35] naročito nepovoljno utječe na stabilnost strujanja.



Sl. 4.22 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja

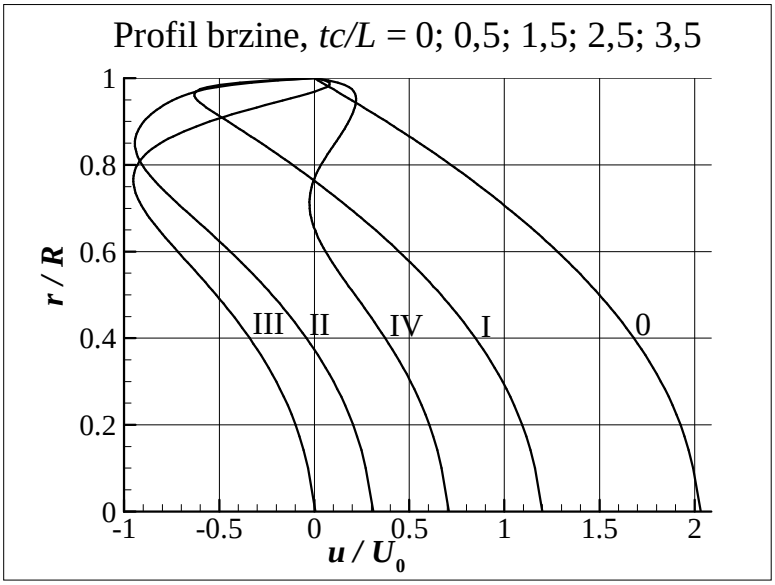


Sl. 4.23 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska drugog i trećeg poremećaja

Treba napomenuti da se zbog specifičnosti metode karakteristika tlak i brzina u istom presjeku (*x=const*) mijenjaju u svakom drugom vremenskom koraku. Zato su se u istom presjeku dobivala po dva ista vremenski sukcesivna profila. Ako se dakle u nekom vremenskom koraku tlak i brzina ne mijenjaju npr. u parnim presjecima odn. čvorovima, mijenjaju se, u istom vremenskom koraku, vrijednosti brzine i tlaka u svim neparnim čvorovima. U parnim čvorovima promijenit će se vrijednosti tek u narednom vremenskom

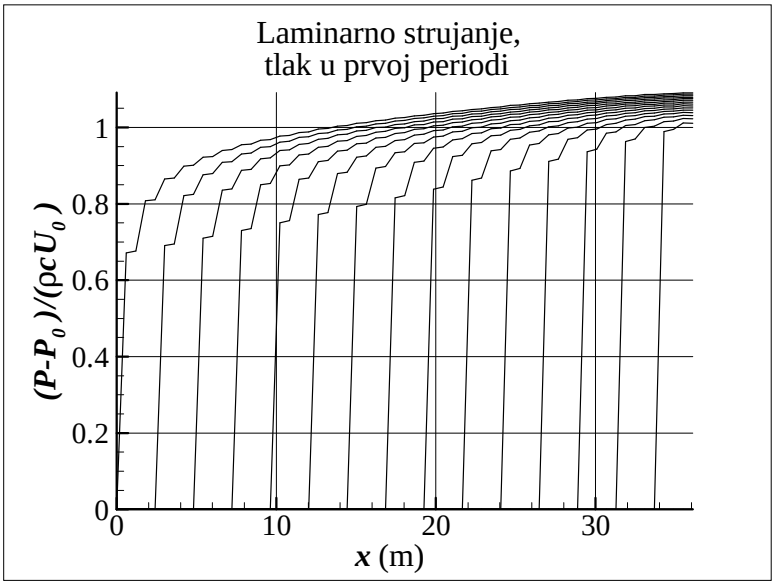
koraku, ali će tad vrijednosti u neparnim čvorovima ostati nepromijenjene. Ovakva naizmjenična promjena omogućava uredno napredovanje poremećaja duž cijevi u svakom vremenskom koraku.

Sl. 4.24 prikazuje proračunati stacionarni profil brzine (0) i četiri profila brzine (I-IV, tj. profile u trenucima tc/L = 0,5; 1,5; 2,5; 3,5) u presjeku na sredini duljine cijevi točno u trenucima prva četiri poremećaja u tom presjeku.



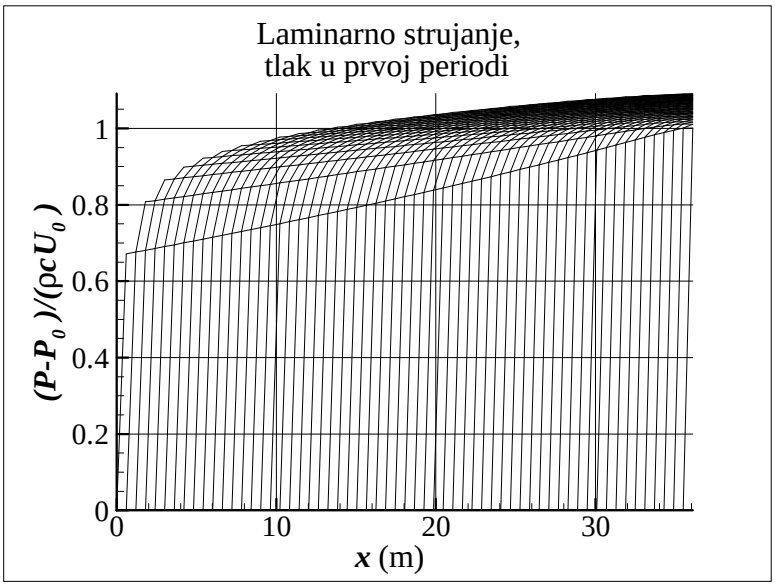
Sl. 4.24 Profili brzine na sredini duljine cijevi neposredno nakon prolaska (prva četiri) poremećaja

Sl. 4.25 prikazuje raspored tlaka duž cijevi i to u svakom četvrtom vremenskom koraku tijekom prve periode (tijekom prolaza prvog poremećaja od ventila do spremnika). Krivulje imaju 'stepenice' zato jer se vrijednost tlaka (ozbiljnije) mijenja samo u svakom drugom vremenskom koraku, a to znači da u svakom drugom x-čvoru vrijednost kasni. Pomoću tih stepenica može se pratiti kako se porast tlaka npr. u prvom vremenskom koraka nakon prolaska poremećaja smanjuje s udaljavanjem od ventila.

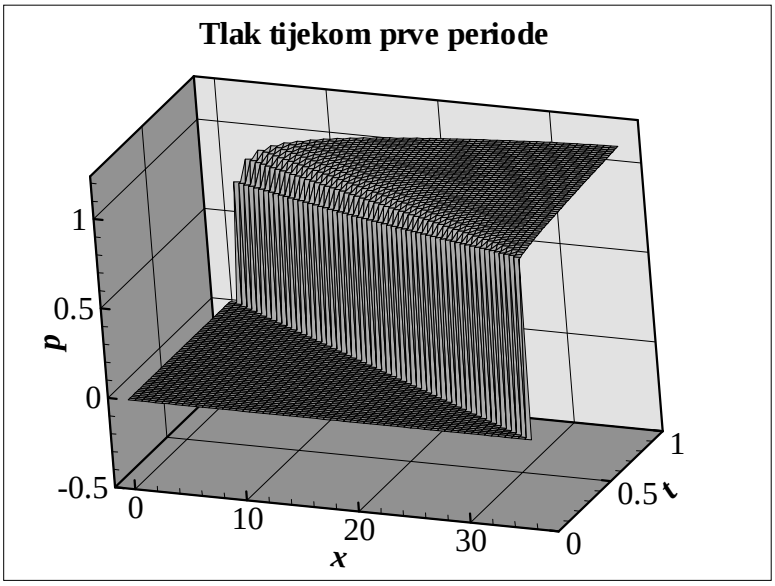


Sl. 4.25 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom četvrtom vremenskom koraku

Sl. 4.26 prikazuje isti raspored tlaka kao i prethodna slika, ali ovaj puta u svih 60 vremenskih koraka. Vidljivo je da svi spomenuti porasti tlaka npr. u prvom vremenskom koraku leže na istom (najdonjem) pravcu. Porasti tlaka u drugom vremenskom koraku nakon prolaska poremećaja leže na sljedećem pravcu itd.

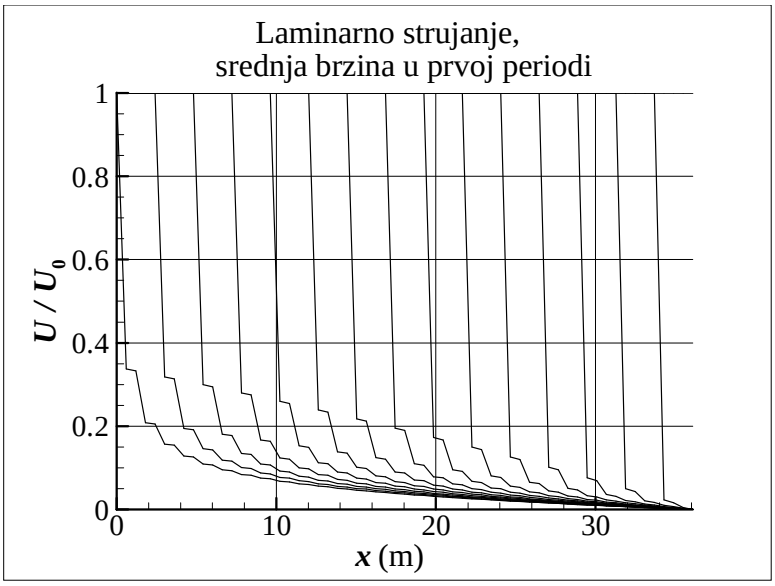


Sl. 4.26 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku

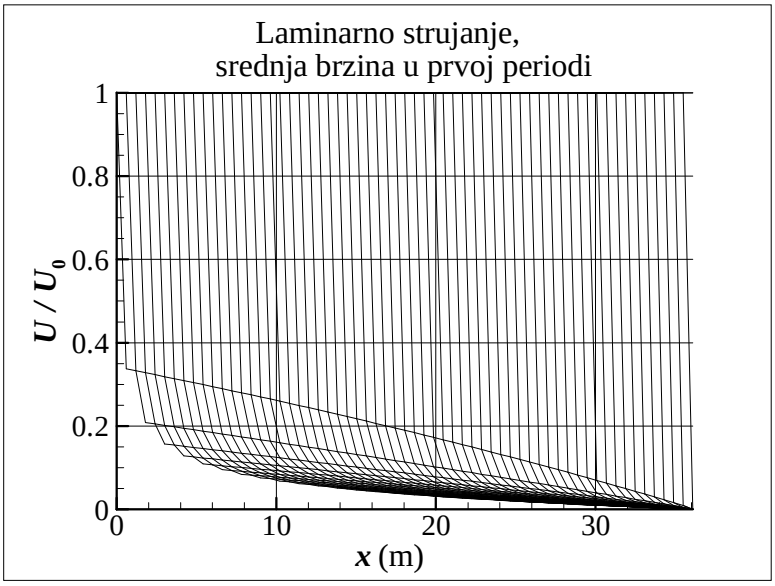


Sl. 4.27 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) u zavisnosti od pozicije x i vremena t

Analogno prethodnim dvjema slikama, Sl. 4.28 i Sl. 4.29 prikazuju raspored srednje brzine duž cijevi (u svakom četvrtom odn. u svakom koraku). Ponovo je očito analogno ponašanje srednje brzine i tlaka. Upada u oči izrazita simetrija rasporeda srednje brzine i rasporeda tlaka.



Sl. 4.28 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom četvrtom vremenskom koraku



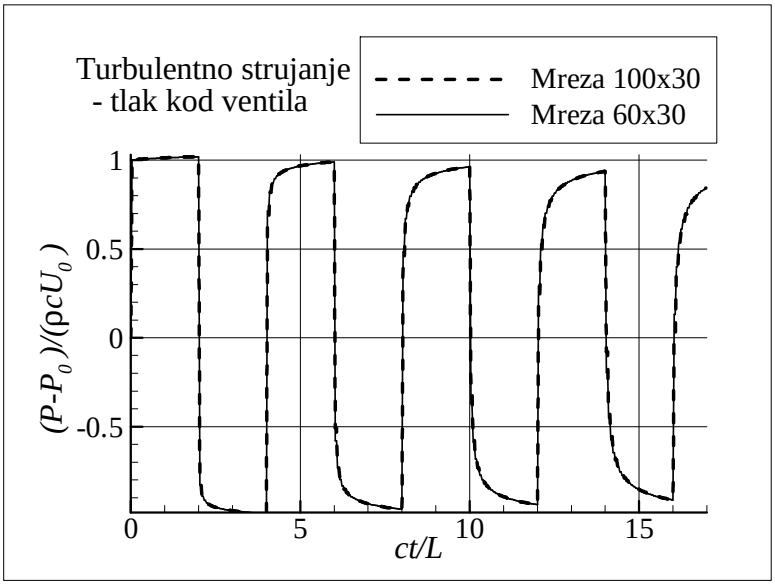
Sl. 4.29 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku

4.2.2. Hidraulički udar u turbulentnom režimu – hidraulički glatka cijev

Proračun hidrauličkog udara u turbulentnom režimu (eksperiment br. 2) proveden je na mreži s $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$ = 100×30 elemenata. Podjela u aksijalnom smjeru (po koordinati x) je jednolika, a podjela u radijalnom smjeru (po koordinati r) načinjena je po principu geometrijskog niza (kvocijent niza q=1,05, početni element niza je uz stjenku cijevi). Slično kao i u proračunu laminarnog strujanja, utjecaj mreže zamjećuje se jedino na prikazima profila brzine.

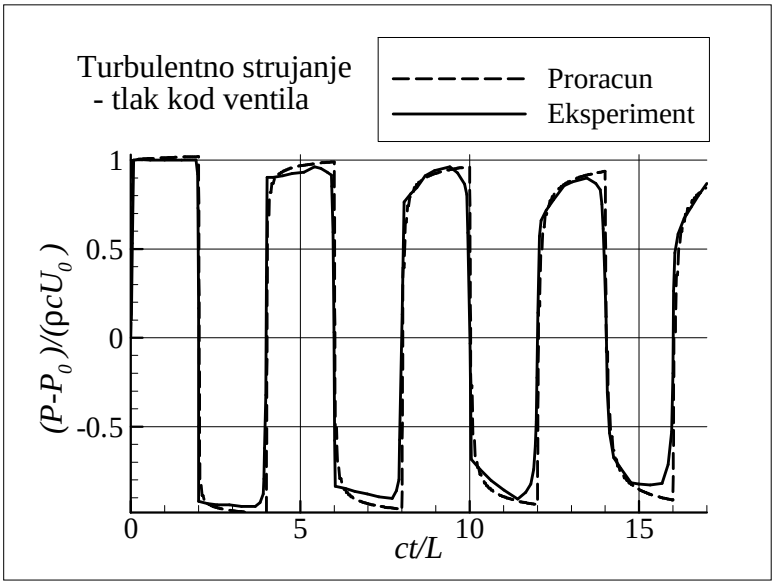
Po pitanju proračuna hidrauličkog udara, turbulentno strujanje donosi vrlo malo novosti u odnosu na laminarno strujanje. Proračun i rezultati su u potpunosti analogni onima za laminarno strujanje, tako da ovdje nije bilo potrebno ponavljati sve komentare rezultata laminarnog strujanja.

Na Sl. 4.30 uspoređeni su rezultati proračuna tlaka izvršenog na mreži $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$ = 100×30 elemenata i na mreži $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$ = 60×30. U rezultatima nema zamjetne razlike. Svi proračuni turbulentnog strujanja izvršeni su koristeći finiju (100×30) mrežu, a daljnja testiranja integralnih jednodimenzijskih parametara (tlak P, srednja brzina U) nisu prikazana u radu.

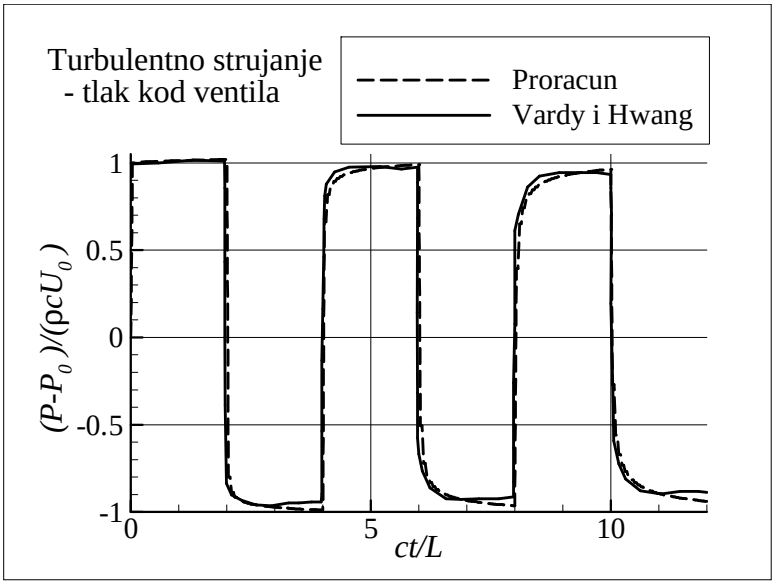


Sl. 4.30 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću dvije mreže

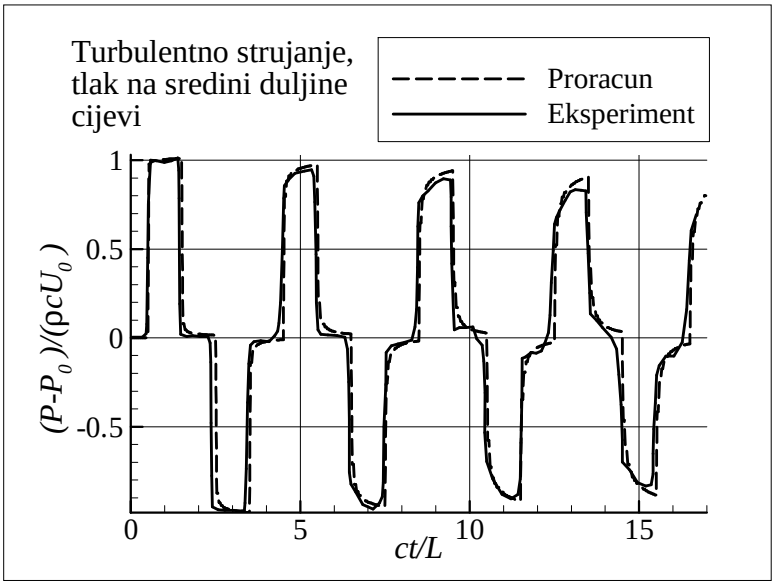
Na Sl. 4.31 do Sl. 4.34 vremenski tijek promjene tlaka dobiven proračunom pomoću predložene metode uspoređen je s izmjerenim tijekom [58] i s tijekom dobivenim proračunom pomoću metode Vardy i Hwang [9]. Na Sl. 4.31 i Sl. 4.32 uspoređen je tijek tlaka pored ventila (na kraju cijevi, tj. pri $x=L$), a na Sl. 4.33 i Sl. 4.34 uspoređen je tijek tlaka na sredini duljine cijevi ($x=L/2$). Za oba ova tlaka poklapanje rezultata proračuna s eksperimentalnim rezultatima je dobro, dok su rezultati proračuna Vardy i Hwang [9] gotovo identični.



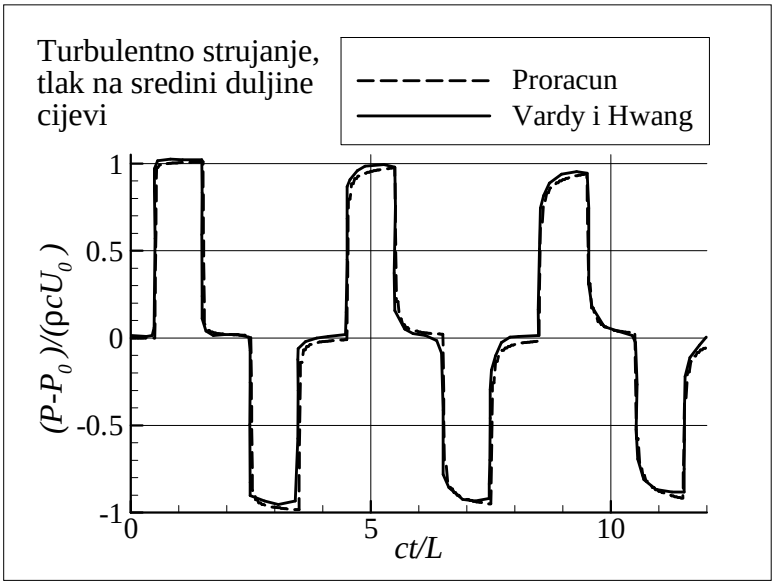
Sl. 4.31 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka kod ventila



Sl. 4.32 Tijek promjene tlaka kod ventila proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

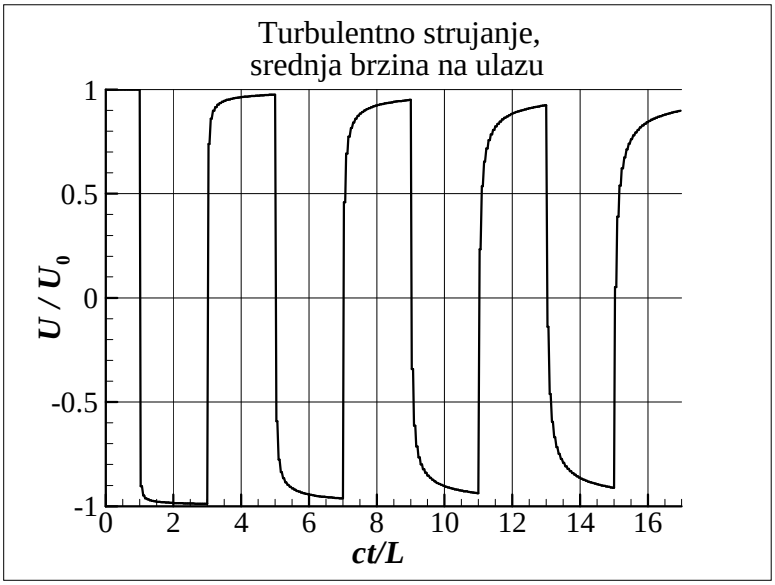


Sl. 4.33 Proračunati i izmjereni [58] tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi

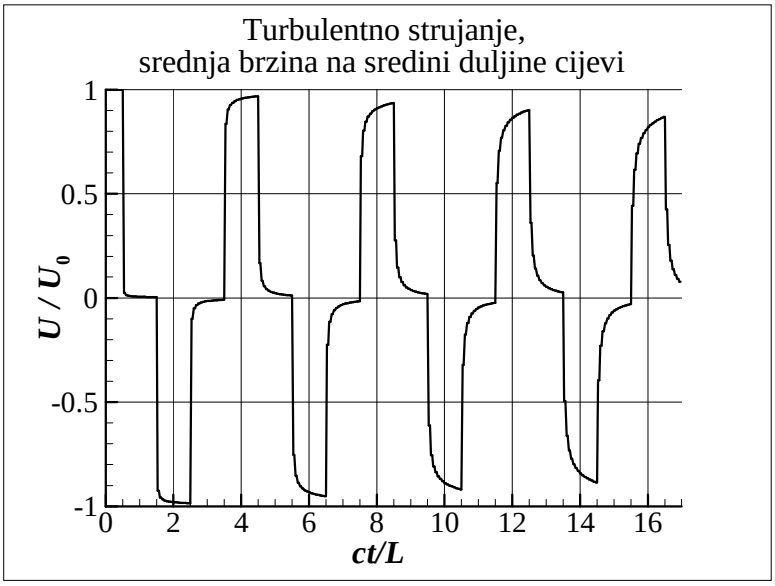


Sl. 4.34 Tijek promjene tlaka na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

Na Sl. 4.35 i Sl. 4.36 prikazan je vremenski tijek srednje brzine *U* (kod spremnika odn. na sredini duljine cijevi) dobiven pomoću predložene metode proračuna. Kao i kod laminarnog strujanja, ponovo je prisutna upadljiva analogija krivulja tijeka srednje brzine i tijeka tlaka.

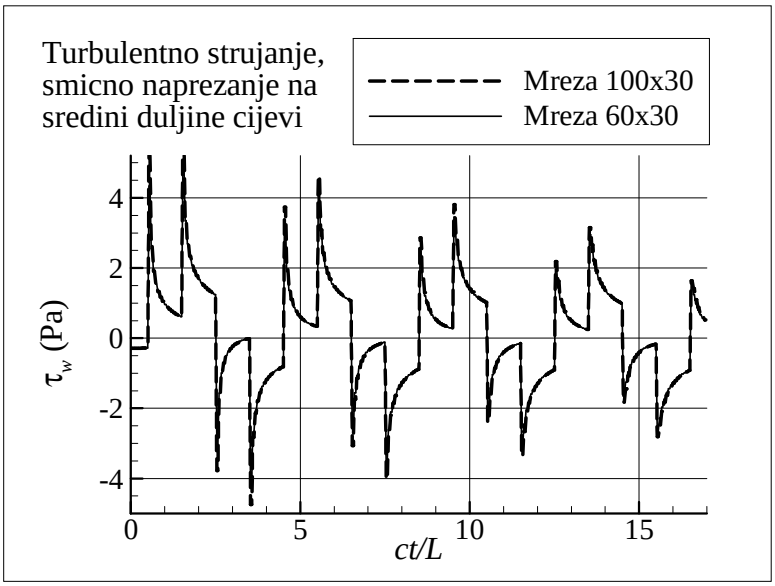


Sl. 4.35 Tijek srednje brzine kod spremnika proračunat pomoću predložene metode



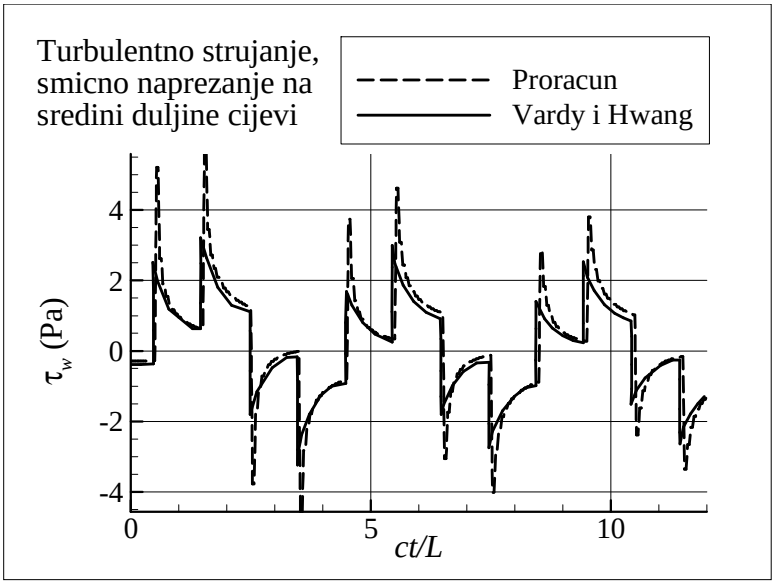
Sl. 4.36 Tijek srednje brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode

Na Sl. 4.37 prikazana je usporedba proračunatih vrijednosti vremenskog tijeka smičnog naprezanja τ_w na stjenci cijevi (na sredini duljine cijevi) dobivenih pomoću mreže $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 100 \times 30$ elemenata i mreže $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 60 \times 30$. Razliku u rezultatima prisutna je jedino u šiljcima maksimalnih naprezanja, ali je znatno manja nego kod laminarnog strujanja.



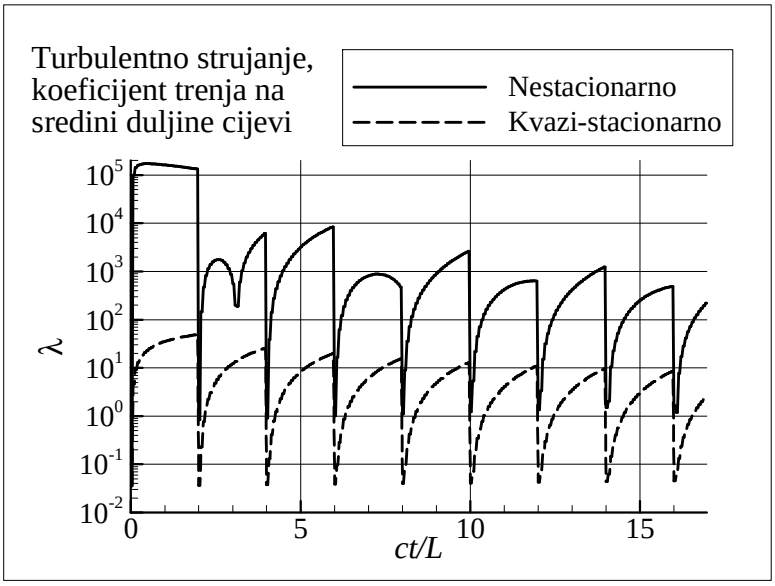
Sl. 4.37 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću dvije mreže

Na Sl. 4.38 uspoređen je vremenski tijek smičnog naprezanja na stjenci cijevi τ_w na sredini duljine cijevi dobiven proračunom prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9]. Slaganje rezultata dviju metoda relativno je dobro, iako slabije nego za slučaj laminarnog strujanja. Predložena metoda ovaj puta daje nešto veća naprezanja τ_w.



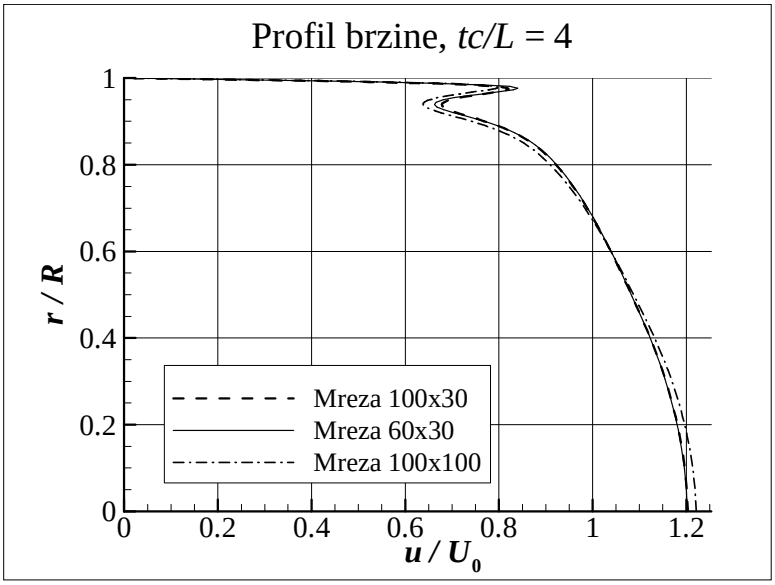
Sl. 4.38 Tijek smičnog naprezanja na sredini duljine cijevi proračunat pomoću predložene metode i metode Vardy i Hwang [9]

Sl. 4.39 prikazuje tijek koeficijenta trenja λ izračunatog na bazi gore prikazanog tijeka nestacionarnog tangencijalnog naprezanja na stjenci cijevi. Za usporedbu, prikazana je i krivulja kvazi-stacionarnog koeficijenta trenja (izračunatog na bazi trenutačne vrijednosti Reynoldsovog broja). Nestacionarni koeficijent trenja je i preko tri reda veličine veći od kvazi-stacionarnog, čime se ponovo potvrđuje činjenica da korištenjem kvazi-stacionarnog modela nije moguće postići realne vrijednosti prigušenja titraja.



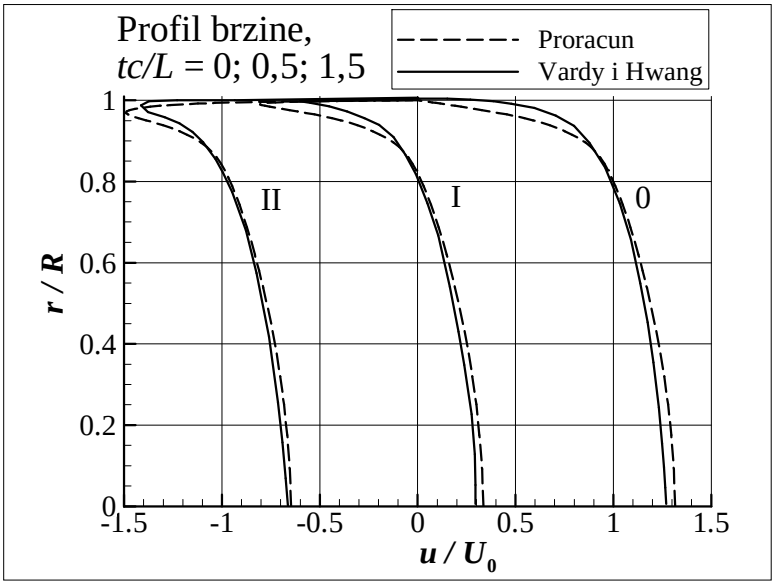
Sl. 4.39 Tijek koeficijenta trenja, nestacionarnog (određen iz smičnog naprezanja τ_w) i kvazi-stacionarnog (određen prema vrijednosti **Re**)

Na Sl. 4.40 prikazan je proračunati profil brzine na sredini duljine cijevi u vremenskom trenutku $tc/L = 4$. Proračun je proveden koristeći tri različite mreže ($N_{\Delta r} \times N_{\Delta x}$: 60×30; 100×30; 100×100). Utjecaj promjene gustoće mreže u radijalnom smjeru nije zamjetan. Utjecaj promjene gustoće mreže u aksijalnom smjeru je očit, ali je ipak relativno mali.



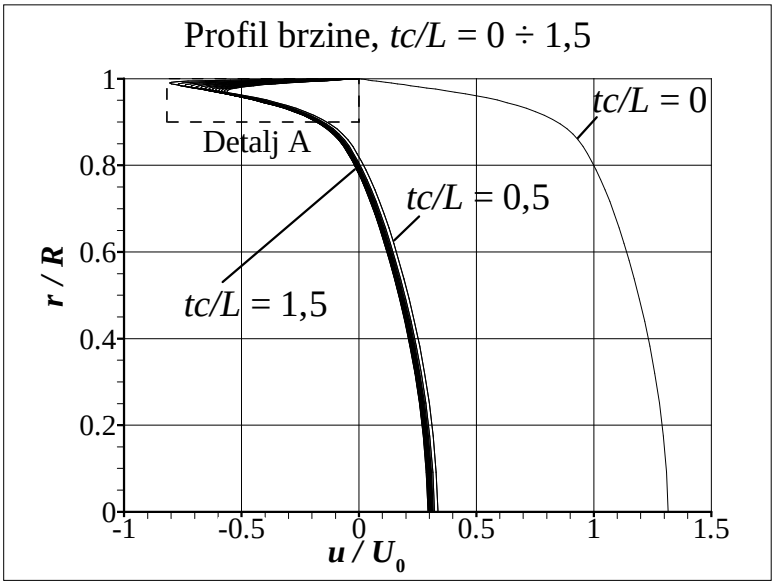
Sl. 4.40 Jedan profil brzine na sredini duljine cijevi proračunat pomoću tri različite mreže

Na Sl. 4.41 prikazani su stacionarni profil brzine (0) i dva profila brzine (I i II) na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prvog i drugog poremećaja, proračunati prema [9]. Ponovo nije poznat točan trenutak u kojem su profili I i II proračunati, pa su za usporedbu odabrani najsličniji profili dobiveni predloženim proračunom nekoliko vremenskih koraka nakon prolaska poremećaja. Razlike među profilima ni ovaj puta nisu prevelike, a razlika u stacionarnom profilu (0) se ponovo prenosi na nestacionarne profile (I i II).

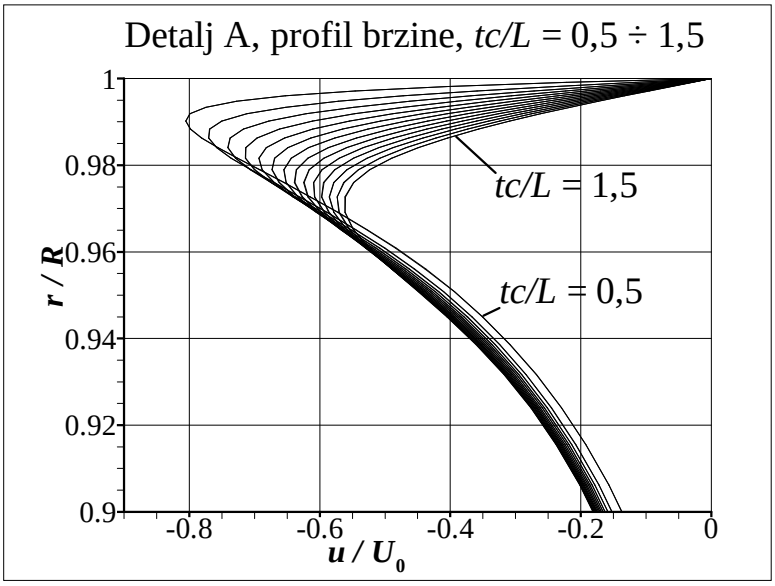


Sl. 4.41 Profili brzine na sredini duljine cijevi 'ubrzo' nakon prolaska prva dva poremećaja, proračunati prema predloženoj metodi i prema metodi Vardy i Hwang [9]

Sl. 4.42 prikazuje razvoj proračunatog profila brzine nakon prvog poremećaja ($tc/L = 0 \div 1{,}5$). U korištenom bezdimenzijskom prikazu, relativne promjene brzine i oblika profila tijekom njegovog uravnoteživanja manje su nego ranije u laminarnom strujanju. Vjerojatni razlog tome leži u činjenici da su u svom apsolutnom iznosu brzine u turbulentnom strujanju veće nego u laminarnom. Razgovjetniji prikaz tih promjena vidljiv je na uvećanom prikazu detalja A (Sl. 4.43), gdje je moguće pratiti udaljavanje točke ekstrema brzine i točke infleksije od stjenke cijevi.

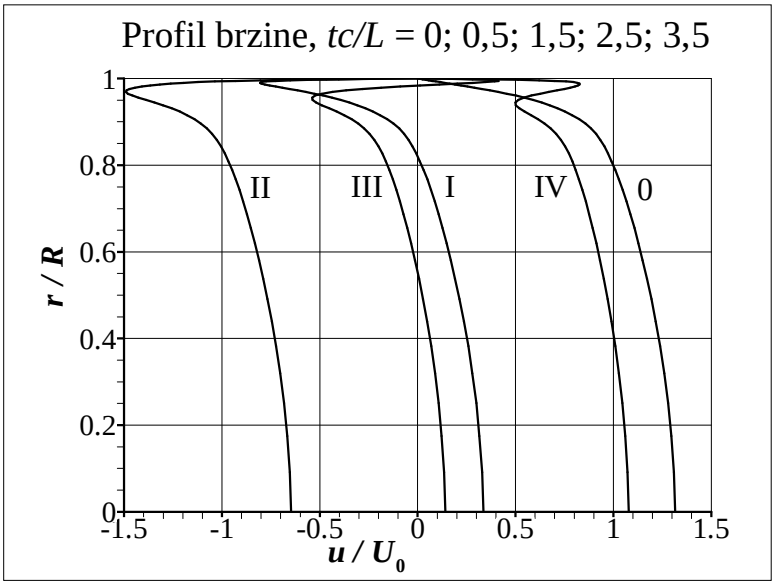


Sl. 4.42 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja



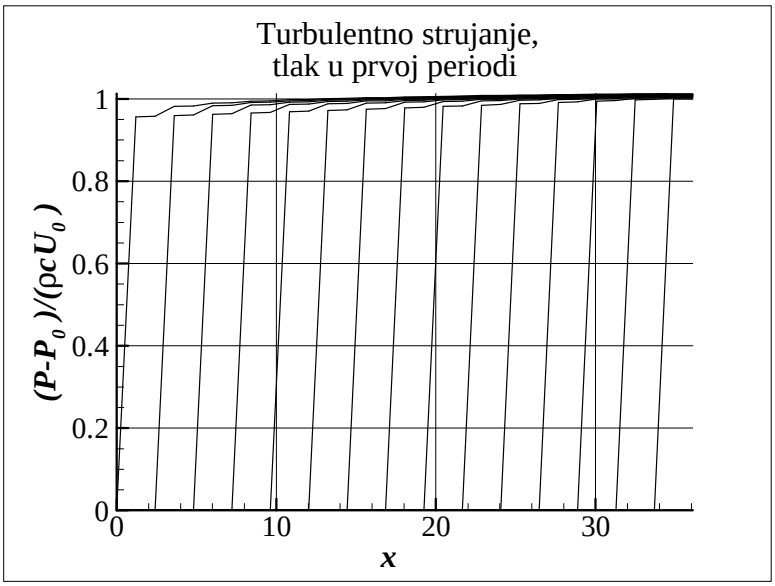
Sl. 4.43 Razvoj profila brzine na sredini duljine cijevi nakon prolaska prvog poremećaja – detalj A sa prethodne slike

Sl. 4.44 prikazuje proračunati stacionarni profil brzine (0) i četiri profila brzine (I÷IV) u presjeku na sredini duljine cijevi točno u trenucima prva četiri poremećaja u tom presjeku (u trenucima tc/L = 0,5; 1,5; 2,5; 3,5).

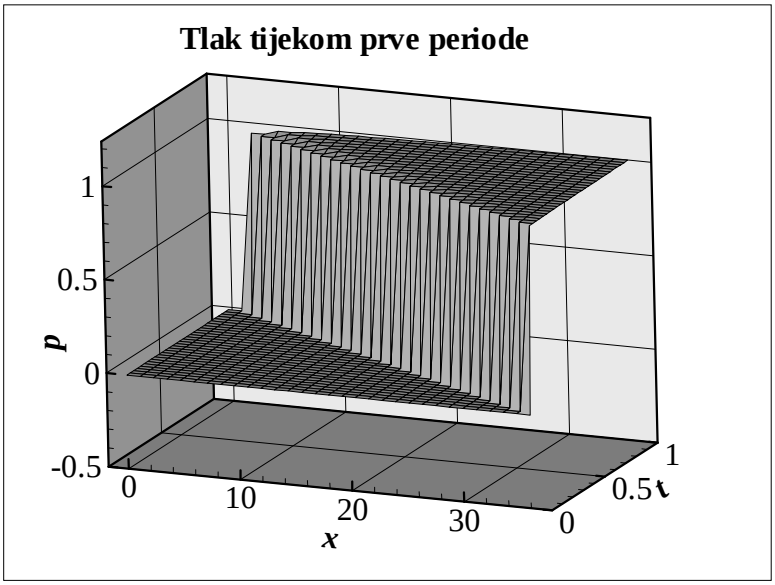


Sl. 4.44 Profili brzine na sredini duljine cijevi neposredno nakon prolaska (prva četiri) poremećaja

Sl. 4.45 prikazuje raspored tlaka duž cijevi i to u svakom drugom vremenskom koraku tijekom prve periode (tijekom prolaza prvog poremećaja od ventila do spremnika). Ponovo su vidljive 'stepenice' u svakom drugom koraku koje svojim položajem ponovo ukazuju na smanjenje promjene tlaka sa smanjenjem vrijednosti *x* nakon npr. prolaska prvog poremećaja.

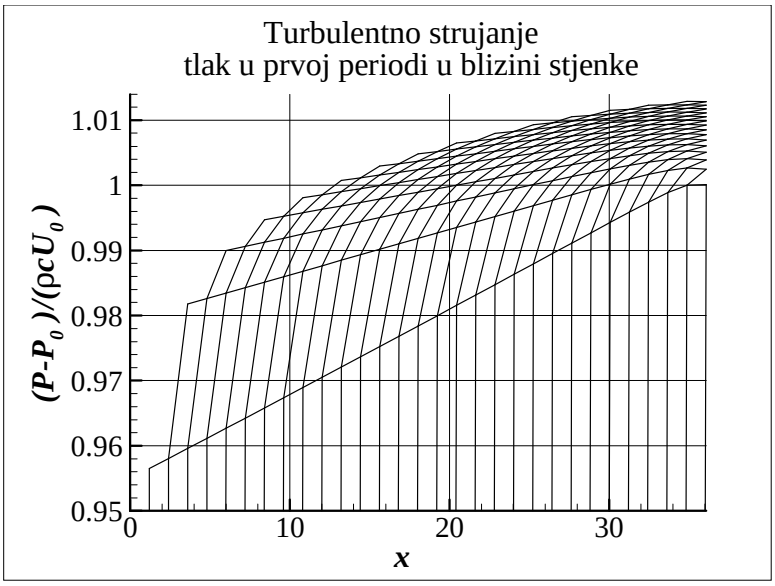


Sl. 4.45 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (*tc/L*=0÷1) prikazan u svakom drugom vremenskom koraku



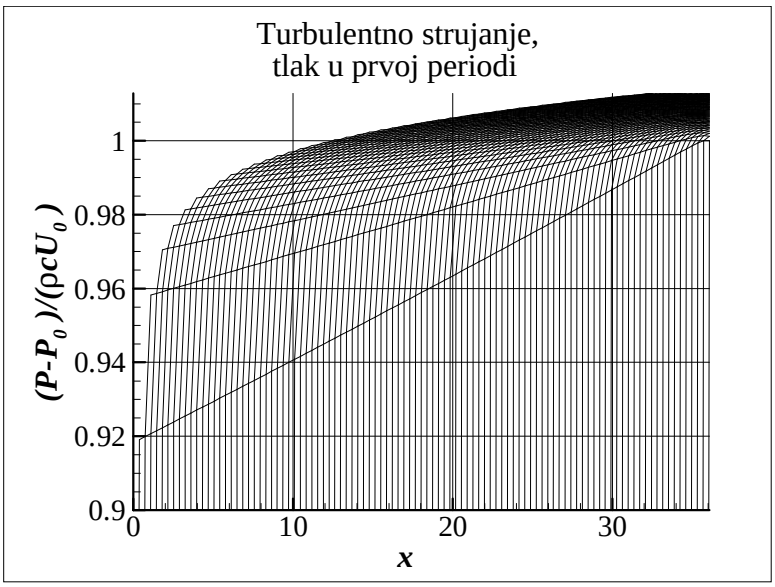
Sl. 4.46 Raspored tlaka duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) u zavisnosti od udaljenosti x i vremena t

Budući da je na prethodnoj slici velik dio krivulje 'sakriven' u blizini stjenke, na Sl. 4.47 dan je uvećani prikaz (u okolici stjenke) istog rasporeda tlaka, ali u svakom vremenskom koraku. Tu su ponovo prepoznatljivi pravci skoka tlaka u jednom (svakom drugom) koraku.



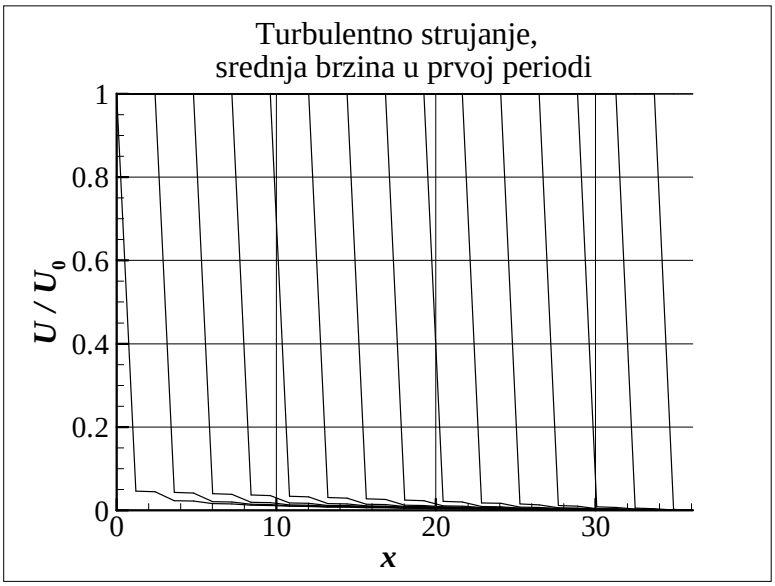
Sl. 4.47 Raspored tlaka u blizini stjenke duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku

Sl. 4.48 istovjetna je prethodnoj slici, ali je dobivena proračunom pomoću mreže s $N_{\Delta r} \times N_{\Delta x} = 100 \times 100$ elemenata.

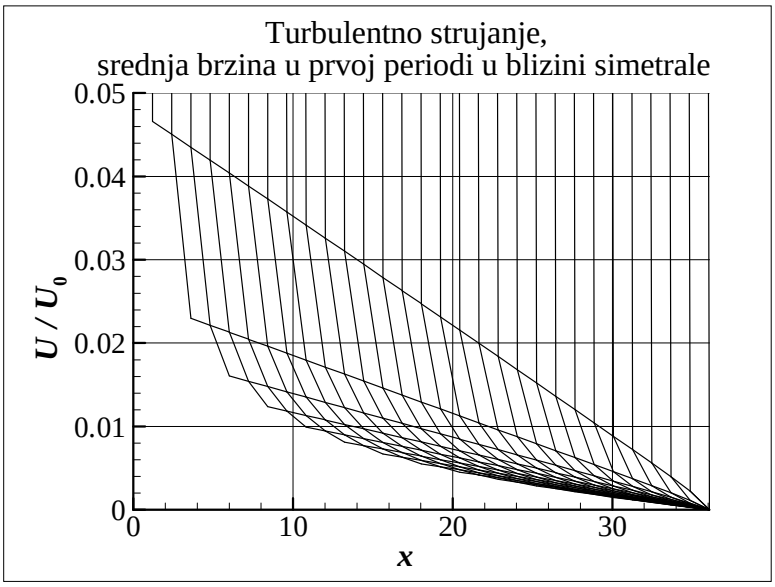


Sl. 4.48 Raspored tlaka u blizini stjenke duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) proračunat pomoću mreže sa 100 elemenata u aksijalnom smjeru

Analogno prethodnim slikama rasporeda tlaka, Sl. 4.49 i Sl. 4.50 prikazuju raspored srednje brzine duž cijevi (u svakom drugom vremenskom koraku za cijelu širinu cijevi odn. u svakom koraku za područje u blizini simetrale cijevi). Ponašanje srednje brzine ponovo je analogno ponašanju tlaka.



Sl. 4.49 Raspored srednje brzine duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom drugom vremenskom koraku



Sl. 4.50 Raspored srednje brzine u blizini simetrale duž cijevi u prvoj periodi (tc/L=0÷1) prikazan u svakom vremenskom koraku

5. ANALIZA REZULTATA

Predložen je novi kvazi-dvodimenzijski (2D) model i metoda za proračun hidrauličkog udara. Kvazi-2D modeli predstavljaju najtočnije modele hidrauličkog udara koji su danas u uobičajenoj upotrebi. Pretežno se koriste za verifikaciju jednostavnijih modela i za bolje razumijevanje fizikalne pozadine hidrauličkog udara. Zbog njihove složenosti oni se danas u manjoj mjeri koriste za simulacije strujanja u realnom vremenu (npr. za dijagnosticiranje propuštanja u cijevnim mrežama).

Od nekoliko postojećih kvazi-2D modela najčešće se koriste i u literaturi spominju modeli Vardy i Hwang [9] i Pezzinga [11]. Metoda Vardy i Hwang je složenija, točnija i stabilnija, dok je metoda Pezzinga brža, ali manje pouzdana.

U ovom radu predložena metoda uspoređena je s metodom Vardy i Hwang. Najprije su u poglavlju 3 uspoređeni matematički modeli i načini njihovog rješavanja. Zatim su u poglavlju 4 dani rezultati testiranja predložene metode u uvjetima stacionarnog i nestacionarnog strujanja. Na kraju su rezultati dobiveni predloženim modelom uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima (Holmboe i Rouleau [58]) i rezultatima koji se dobivaju pomoću metode Vardy i Hwang.

1) Usporedba modela i metoda

U poglavlju 3 model Vardy i Hwang i predloženi model detaljno su opisani, a zatim uspoređeni. U nastavku su rezimirani rezultati te analitičke usporedbe.

Pokazana je identičnost ukupnog modela Vardy i Hwang i dijela predloženog modela za određivanje aksijalne brzine u. Također je pokazano da je diskretizirana jednadžba za brzinu u, koja je dobivena na taj način, identična jednadžbi za brzinu metode Vardy i Hwang uz uvjet $\varepsilon=1$ (tj. uvjet da se koristi potpuno implicitna shema interpolacije za radijalnu brzinu v).

Drugi dio predloženog modela sastoji se od integralnih jednadžbi 1D modela i on odgovara modelu koji koristi Pezzinga [11]. Taj dio modela kasnije se koristi za dobivanje jednadžbe za određivanje tlaka P. Pokazano je da se predloženi 1D model dobiva integracijom po presjeku cijevi modela Vardy i Hwang. Prema tome, predloženi 1D model matematički je usklađen s modelom Vardy i Hwang. No za razliku od metode Vardy i Hwang, spomenutom

integracijom gubi se član s radijalnom brzinom v, pa tako prestaje potreba za računanjem te brzine. Dodatno se predložena diskretizirana jednadžba za tlak P dobiva i na drugi način, i to linearnim transformacijama diskretiziranih jednadžbi metode Vardy i Hwang. Time je pokazano da je predložena jednadžba za tlak P zapravo jedna od važećih jednadžbi metode Vardy i Hwang.

Predložena metoda ne predviđa računanje radijalne brzine v niti na rubovima područja (na krajevima cijevi), već se tamo propisuje uvjet v=0. Obzirom da je propisana potpuno implicitna shema interpolacije, rubni uvjet na zatvorenom kraju cijevi (ventil) usklađen je s metodom Vardy i Hwang (na samom ventilu zaista vrijedi uvjet v=0). Uvjet na otvorenom kraju (spremnik) također je usklađen jer i metoda Vardy i Hwang tu koristi uvjet v=0.

Pri korištenju originalne metode Vardy i Hwang potrebno je rješavati 5-dijagonalni sustav $2N_{\Delta r}\times 2N_{\Delta r}$ jednadžbi, gdje je $N_{\Delta r}$ broj podjela u radijalnom smjeru. Zhao i Ghidaoui [48] su formalnom modifikacijom metode sveli taj sustav na dva 3-dijagonalna sustava $N_{\Delta r}\times N_{\Delta r}$ jednadžbi, čime se znatno smanjuje vrijeme računanja.

Predložena metoda zahtijeva rješavanje jednog 3-dijagonalnog sustava $N_{\Delta r}\times N_{\Delta r}$ jednadžbi, dakle upola manje nego modificirana metoda Vardy i Hwang. Metoda Pezzinga [11] također zahtijeva rješavanje jednog 3-dijagonalnog sustava $N_{\Delta r}\times N_{\Delta r}$ jednadžbi, ali uz smanjenu točnost, stabilnost i pouzdanost [4]. Osim toga, za razliku od metode Pezzinga, koja koristi metodu konačnih razlika, predložena metoda koristi metodu karakteristika (MK), a to olakšava njeno eventualno korištenje za verifikaciju jednostavnijih modela koji također uglavnom koriste MK.

2) Usporedba rezultata

Korištena je originalna metoda proračuna koja se bazira na metodi karakteristika, ali uvodi i elemente metode konačnih volumena. Točnost ove nove numeričke metode pokazala se zadovoljavajućom.

Obzirom da je zanemaren utjecaj konvekcije vremenski korak je odabran tako da se egzaktno zadovoljava kriterij Lewy-Couranta, čime se dolazi na samu granicu stabilnosti postupka. Zbog stabilnosti, koristila se u svim slučajevima potpuno implicitna interpolacijska shema za aksijalnu brzinu u (θ=1), što nije od velikog utjecaja na rezultate proračuna.

Utjecaj diskretizacijske mreže uglavnom se nije pokazao bitnim. Kod turbulentnog strujanja iskustvo pokazuje da je važno da u svim koracima (po vremenu t i po osi x) prvi čvor do stjenke treba biti unutar laminarnog podsloja (tj. otprilike $y_* < 2$).

Metoda Vardy i Hwang [9] koristi se 5-zonskim algebarskim modelom turbulencije koji su za nestacionarno strujanje razvili Kita et al. [30]. Budući da su usporedbe s metodom Vardy i Hwang važne za ovaj rad, to se i u okviru predložene metode koristio isti 5-zonski model turbulencije. Prema Ghidaoui et al [4] model turbulencije ionako ne utječe u velikoj mjeri na rezultate numeričkog proračuna hidrauličkog udara. Međutim, za niske Reynoldsove brojeve, znatno je odstupanje vrijednosti efektivne viskoznosti u inercijskom podsloju dobivene primjenom odabranog modela turbulencije u odnosu na izmjerene vrijednosti.

Stacionarno strujanje

Testovi stacionarnog turbulentnog strujanja pokazuju znatno odstupanje također i koeficijenta trenja λ dobivenog numerički pomoću primijenjenog modela turbulencije u odnosu na očekivane vrijednosti tog koeficijenta, dobivene korištenjem standardnih metoda. Za Reynoldsov broj **Re**=4000 to odstupanje iznosi preko 10%.

S druge strane, odstupanje profila brzine od eksperimentalno izmjerenih vrlo je malo. Preciznost metode i proračuna ogleda se u činjenici da promjena gustoće mreže praktički ne utječe na stacionarne profile brzine koji se dobivaju numerički, primjenom modela turbulencije. Također, u svim primjerima, održavanje stacionarnog stanja pomoću programa za nestacionarno strujanje pokazalo se besprijekornim.

Nestacionarno strujanje

Predložena metoda proračuna testirana je usporedbom s rezultatima dva eksperimenta hidrauličkog udara koje su objavili Holmboe i Rouleau [58], te s rezultatima numeričkog proračuna (Vardy i Hwang [9]) za dvije situacije hidrauličkog udara koje odgovaraju spomenutim eksperimentima. Te dvije situacije imaju početne stacionarne vrijednosti Reynoldsovog broja Re_0=81,97 (laminarno strujanje) i Re_0=6132 (prijelazno turbulentno strujanje u hidraulički glatkoj cijevi).

Kvaliteta metode ogleda se u izvrsnom poklapanju s eksperimentalnim rezultatima vremenske promjene tlaka P u svim mjerenjima, jednako u laminarnom i u turbulentnom strujanju. Prema očekivanju, poklapanje s numeričkim rezultatima metode Vardy i Hwang za iste situacije još

je bolje. Ipak dobivene krivulje nisu potpuno identične, što se može pripisati nepreciznom prenošenju originalnih krivulja Vardy i Hwang, razlikama u korištenoj diskretizacijskoj mreži i u numeričkom postupku. Također, Vardy i Hwang ne navode koju interpolacijsku shemu brzine u (tj. koju vrijednost faktora θ) su koristili.

Usporedba proračunski dobivenih tangencijalnih naprezanja na stjenci (τ_w) i profila brzina stroža je u smislu osjetljivosti na preciznost proračuna, pa su i odstupanja tu općenito veća. Osjetljivost se ogleda i u većem utjecaju veličine koraka mreže. Poklapanje vremenskog tijeka tangencijalnih naprezanja dobivenih predloženom metodom i metodom Vardy i Hwang je još uvijek izuzetno dobro. Tim više što niti za tangencijalna naprezanja niti za profile brzine nije poznata točna x-pozicija na kojoj se naprezanje odnosno profil brzine računa.

Odstupanja su najveća u proračunatim profilima brzina. U obje uspoređene situacije (laminarno i turbulentno strujanje) vidljiva je razlika u stacionarnim profilima brzina dobivenim pomoću obje metode. Ista razlika očito se prenosi na profile brzine proračunate u nestacionarnom strujanju. Vidljivo je da su Vardy i Hwang u laminarnom strujanju znatno netočnije odredili oblik stacionarnog profila nego što se to učinilo predloženom metodom. Također, valja napomenuti da ovdje, osim spomenutog nepoznavanja točne x-pozicije profila, nije poznat niti točan trenutak proračunatog profila, pa to doprinosi dobivenim odstupanjima.

Na kraju, prezentiran je i vremenski tijek srednje brzine U dobiven pomoću predložene metode. Srednju brzinu nije lako eksperimentalno odrediti, pa se možda zbog toga tijek te brzine nije često prezentirao. Upada u oči logična simetrija koju na slikama brzina pokazuje u odnosu na tlak P.

6. ZAKLJUČAK

U radu je izložen pregled aktualnih modela za proračun nestacionarnog strujanja u cijevi. Pri tome je redoslijedom od složenijih prema jednostavnijima, precizno navodeći i prateći redoslijed uvođenja novih pretpostavki. Metode proračuna koje se često koriste u praksi kasnije su i detaljno opisane.

Sustavno je razrađena i objašnjena metodika matematičkog izvođenja karakterističnih jednadžbi za slučaj višedimenzijskog strujanja.

Predloženi su novi kvazi-dvodimenzijski model i odgovarajuća metoda za proračun hidrauličkog udara u cijevi. Predložena metoda detaljno je analitički uspoređena s jednom od najtočnijih postojećih metoda (Vardy i Hwang). Pokazuje se da predložena metoda mora davati iste rezultate kao metoda Vardy i Hwang uz uvjet da se koristi potpuno implicitna shema interpolacije za radijalnu brzinu. Pri tome je za predloženi proračun potrebno otprilike upola manje matematičkih operacija.

Predložena je i uspješno korištena originalna numerička metoda proračuna koja se bazira na metodi karakteristika, ali uvodi i elemente metode konačnih volumena.

Odabrani algebarski 5-zonski model turbulencije provjeren je u odnosu na stacionarne eksperimentalne profile brzine i na očekivani standardni stacionarni koeficijent trenja.

Rezultati dobiveni predloženim modelom uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima i proračunskim rezultatima (Vardy i Hwang) u uvjetima laminarnog i turbulentnog strujanja. Dobiven je visok stupanj podudaranja ovih rezultata.

Obzirom da je predložena 2D metoda točna i za današnja računala vrlo brza, više nema potrebe istraživati model koeficijenta trenja. Zato se za probleme u kojima je potrebna visoka točnost proračuna smičnog naprezanja na stjenci u uvjetima hidrauličkog udara ili pulzirajućeg strujanja preporučuje razvijena 2D metoda.

U budućnosti bi bilo zanimljivo istražiti eventualni utjecaj odabira implicitne ili eksplicitne interpolacijske sheme u proračunu hidrauličkog udara. Također, predložena metoda mogla bi se primijeniti na račvanje cjevovoda, te jako popustljive cijevi (krvne žile).

LITERATURA

[1] Virag, Z.; Lulić, F.; Krizmanić, S.: "Distributed model of the arterial tree", *25th Danubia-Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics*, Daniel, M.; Holy, S.; Ružička, M. (ur.), Czech Technical University in Prague, pp. 275-276, Prague, 2008.

[2] Korade, I.; Virag, Z.; Šavar, M.: "A method of characteristics for one-dimensional fluid flow in viscoelastic tubes", *7th ICCSM*, Virag, Z.; Smojver, I.; Kozmar, H. (ur.), Hrvatsko društvo za mehaniku, pp. 49-50, Zadar, 2012.

[3] Filipan, V.; Virag, Z.; Bergant, A.: "Mathematical Modeling of a Hydraulic Ram Pump System", *Strojniski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering*, Volume 49, Issue 3, 2003, Pages 137-149.

[4] Ghidaoui, M.S.; Zhao M.; McInnis, D. A.; Axworthy, D. H.: "A review of water hammer theory and practice", *Applied Mechanics Review ASME*, 2005, 58(1), pp. 49-76.

[5] Jung, B. S.; Karney, B. W.; Bolous, P. F.; Wood, D. J.: "The Need for Comprehensive Transient Analysis of Distribution Systems", *J. of AWWA*, 2007, 99(1), pp. 112-123, Jan. 2007.

[6] Naser, G.; Karney, B. W.: "A Transient 2-D Water Quality Model for Pipeline Systems", *J. Hydraul. Res, IAHR*, 2008, 46(4): pp. 516–525.

[7] Colombo, A. F.; Lee, P.; Karney, B. W.: "A Selective Literature Review of Transient-Based Leak Detection Methods", *J. of Hydro-Environment Research*, 2009, 2, pp. 212-

[8] Nixon, W.; Ghidaoui, M. S.: "Numerical Sensitivity Study of Unsteady Friction in Simple Systems with External Flows", *J. Hydraul. Eng*., 2007, 133 (7), pp. 736-749, Jul. 2007.

[9] Vardy, A. E.; Hwang, K.L.: "A Characteristics Model of Transient Friction in Pipes", *J. Hydraul. Res.*, 1991, 29(5), pp. 669-684.

[10] Fox, J. A.: *Transient flow in Pipes, Open Channels and Sewers*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1989.

[11] Pezzinga, G.: "Quasi-2D model for unsteady flow in pipe networks", *J. Hydraul. Eng.*, 1999, 125(7), pp. 676-685.

[12] Silva-Araya, W.F.; Chaudry, M.H.: "Computation of Energy Dissipation in Transient Flow", *J. Hydraul. Eng.*, 1997, 123(2), pp. 108-115.

[13] Ohmi, M.; Kyomen, S.; Usui, T.: ''Numerical Analysis of Transient Turbulent Flow in a Liquid Line'', *Bull. JSME,* 1985, 28(239), pp. 799–806.

[14] Wood, D. J.; Funk, J. E.: ''A Boundary-Layer Theory for Transient Viscous Losses in Turbulent Flow'', *ASME J. Basic Eng.,* 1970, 102, pp. 865–873.

[15] Zielke, W.: "Frequency Dependent Friction in Transient Pipe Flow", *J. of Basic Eng., Trans. ASME,* 1968, 90(1), pp. 109-115.

[16] Vardy, A. E.; Hwang, K. L.; Brown, J. M. B.: ''A Weighting Model of Transient Turbulent Pipe Friction'', *J. Hydraul. Res.*, 1993, 31, pp. 533–548.

[17] Vardy, A. E.; Brown, J. M. B.: ''Transient, Turbulent, Smooth Pipe Friction,'' *J. Hydraul. Res.*, 1995, 33, pp. 435–456.

[18] Vardy, A.E.; and Brown, J.M.B.: "Transient turbulent friction in fully rough pipe flows," *J. of Sound and Vibration*, 2004, 270(1/2), pp. 233-258, Feb 2004.

[19] Daily, J.W.; Hankey, W.L.; Olive, R.W.; Jordaan J.M.: "Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices", *Trans. ASME*, 1956, 78(July), pp.1071-1077, Jul 1956.

[20] Brunone, B.; Golia, U. M.; Greco, M.: "Effects of Two-Dimensionality on Pipe Transients Modeling", *J. Hydraul. Eng*., 1995, 121(12), pp. 906-912, Dec 1995.

[21] Bergant A.; Simpson A.R.; Vitkovsky J.: "Developments in unsteady pipe flow friction modeling", *J. Hydraul. Res*., 2001, 39(3), pp. 249-257.

[22] Pezzinga, G.: ''Evaluation of Unsteady Flow Resistances by Quasi-2D or 1D Models'', *J. Hydraul. Eng.*, 2000, 126(10), pp. 778–785.

[23] Vardy, A. E.; Brown, J. M. B.: “ Transient turbulent friction in smooth pipe flows”, *J. of Sound and Vibration*, 2003, 259(5) , pp. 1011-1036, Jan 2003.

[24] Trikha, A. K.: ‘‘An Efficient Method for Simulating Frequency-Dependent Friction in Transient Liquid Flow, ’’*ASME J. Fluids Eng.*, 1975, 97(1), pp. 97–105.

[25] Suzuki, K.; Taketomi, T.; Sato, S.: “Improving Zielke's Method of Simulating Frequency-Dependent Friction in Laminar Liquid Pipe Flow”, *ASME J. Fluids Eng.*, 1991, 113(4) , pp. 569-573, Dec 1991.

[26] Bergant, A.; Simpson, A.R.: “Estimating Unsteady Friction in Transient Cavitating Pipe Flow.” *Proc. 2nd International Conference on Water Pipeline Systems*, BHR Group, pp. 3-16, Edinburgh, Scotland, 1994.

[27] Ohmi, M.; Usui, T.: ‘‘Pressure and Velocity Distributions in Pulsating Turbulent Pipe Flow. Part 1: Theoretical Treatments’’, *Bull. JSME*, 1976, 19, pp. 307–313.

[28] Ghidaoui, M. S.; Mansour, S.: ‘‘Efficient Treatment of the Vardy-Brown Unsteady Shear in Pipe Transients’’, *J. Hydraul. Eng.*, 2002, 128(1), pp. 102–112.

[29] Silva-Araya, W. F.; Chaudhry, M. H.: ‘‘Unsteady Friction in Rough Pipes’’, *J. Hydraul. Eng.*, 2001, 127(7), pp. 607–618.

[30] Kita, Y.; Adachi, Y.; and Hirose, K: “Periodically Oscillating Turbulent Flow in a Pipe”, *Bull. JSME*, 1980, 23(179), pp. 656-664, May 1980.

[31] Ghidaoui, M.S.; Mansour, S.G.S.; Zhao M.: “Applicability of Quasisteady and Axisymmetric Turbulence Models in Water Hammer”, *J. Hydraul. Eng.*, 2002, 128(10), pp. 917-924, Oct 2002.

[32] Shuy, E.B.: “Wall shear stress in accelerating and decelerating turbulent pipe flows”, *J. Hydraul. Res.*, 1996, 34(2), pp. 173-183.

[33] Das, D.; Arakeri, J.H.: “Transition of unsteady velocity profiles with reverse flow.”, *J. Fluid Mech.*, 1998, 374, pp. 251-283.

[34] Brunone, B.; Karney, B. W.; Mecarelli, M.; Ferrante, M.: “Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow“, *J. Water Resour. Plng. Mgmt.,* 2000, 126(4), pp. 236-244.

[35] Ghidaoui, M.S.; Kolyshkin, A.A.: “Stability Analysis of Velocity Profiles in Water-hammer Flows“, *J. Hydraul. Eng.*, 2001, 127(6), pp. 499-512.

[36] Greenblatt, D.; Moss, E.A.: “Pipe-flow relaminarization by temporal acceleration”, *Phys. Fluids*, 1999, 11(11), pp. 3478-3481, Nov 1999.

[37] He, S.; Jackson, J.D.: “A study of turbulence under conditions of transient flow in a pipe”, *J. Fluid Mech.,* 2000, 408, pp. 1-38.

[38] Wiggert, D. C.; and Sundquist, M. J.: ‘‘Fixed-Grid Characteristics for Pipeline Transients’’, *J. Hydraul. Div.*, ASCE., 1977, 103(HY12), pp. 1403–1415.

[39] Goldberg, D. E.; and Wylie, E. B.: ‘‘Characteristics Method Using Time-Line Interpolations’’, *J. Hydraul. Eng.*, 1983, 109(5), pp. 670–683.

[40] Lai, C.: ‘‘Comprehensive Method of Characteristics Models for Flow Simulation’’, *J. Hydraul. Eng.*, 1989, 114(9), pp. 1074–1095.

[41] Yang, J. C.; Hsu, E. L.: ‘‘Time-Line Interpolation for Solution of the Dispersion Equation’’, *J. Hydraul. Res.*, 1990, 28(4), pp. 503–523.

[42] Sibertheros, I. A.; Holley, E. R.; Branski, J. M.: ‘‘Spline Interpolations for Water Hammer Analysis’’, *J. Hydraul. Eng.*, 1991, 117(10), pp. 1332–1349.

[43] Karney, B. W.; Ghidaoui, M. S.: ‘‘Flexible Discretization Algorithm for Fixed Grid MOC in Pipeline Systems’’, J. *Hydraul. Eng.*, 1997, 123(11), pp. 1004–1011.

[44] Wood, D. J.; Dorsch, R. G.; Lightnor, C.: ‘‘Wave-Plan Analysis of Unsteady Flow in Closed Conduits’’, *J. Hydraul. Div., ASCE*, 1966, 92(HY12), pp. 83–110.

[45] Chaudhry, M. H.; Hussaini, M. Y.: ‘‘Second-Order Accurate Explicitly Finite-Difference Schemes for Water Hammer Analysis’’, *ASME J. Fluids Eng.*, 1985, 107, pp. 523–529.

[46] Guinot, V.: ‘‘Riemann Solvers for Water Hammer Simulations by Godunov Method’’, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2000, 49(7), pp. 851–870.

[47] Hwang, Y. H.; Chung, N. M.: ‘‘A Fast Godunov Method for the Water-Hammer Problem’’, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2002, 40(6), pp. 799–819.

[48] Zhao, M.; Ghidaoui, M. S.: “Efficient Quasi-Two-Dimensional Model for Water Hammer Problems”, *J. Hydraul. Eng.*, 2003, 129(12), pp. 1007-1013.

[49] Hirsch, C: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1 Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, 2nd edition, Elsevier, Oxford, UK, 2007.

[50] Hirsch, C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 2 Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1990.

[51] Šavar, M.: “Smanjenje numeričke difuzije pri proračunu nestacionarnog jednodimenzionalnog strujanja fluida”, *Disertacija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1996.

[52] Šavar, M.; Virag, Z.; Živić, M.: “An Application of the Method of Characteristics on Flow Around Rectangular Cylinder”, *Proc. 2nd Congress of Croatian Society of Mechanics*, Supetar, Croatia, 1997.

[53] Šavar, M.; Virag, Z.; Korbar, R.: “A Variant of the Method of Characteristics for Hyperbolic Conservation Laws”, *Proc VIII Int. Conf. on Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Liptovský Ján, Slovak Republic, 2000.

[54] Šavar, M.; Virag, Z.; Korbar, R.: “A Variant of the Method of Characteristics”, *Proc. Conf. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Warsaw, Poland, 2002.

[55] Patankar, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

[56] Hoffman, J. D.: *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

[57] Лойцянский, Л. Г.: *Механика жидкости и газа*, Наука, Москва, 1978.

[58] Holmboe, E.L.; Rouleau, W.T.: “The Effect of Viscous Shear on Transients in Liquid Lines”, *J. of Basic Eng., Trans. ASME*, 1967, 89(1), pp. 174-180.

PRILOG 1: JEDNADŽBE KONTINUITETA I KOLIČINE GIBANJA

Zapis jednadžbe kontinuiteta, jednadžbe količine gibanja i tenzora naprezanja za fluid promjenljive gustoće i promjenljive viskoznosti u Cartesijevim i cilindarskim koordinatama

1. *Cartesijev koordinatni sustav – koordinate* $\boldsymbol{x_i}$**,** $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$ *i vrijeme* $\boldsymbol{t}$

Jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{P1.1}$$

Jednadžba količine gibanja

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right] \tag{P1.2}$$

Tenzor naprezanja

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \left[\left(\frac{2}{3}\mu - \mu_v\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right]\delta_{ij} \tag{P1.3}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \tag{P1.4}$$

2. *Cilindarski koordinatni sustav – koordinate* ***r, θ, x*** *i vrijeme* ***t***

Jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x}=0 \tag{P1.5}$$

Jednadžba količine gibanja – *r*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\rho v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}-\frac{\rho v_\theta^2}{r}=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-v_\theta\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]-\frac{2\mu}{r^2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)- \tag{P1.6}$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\right]$$

Jednadžba količine gibanja – *θ*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\rho v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{\rho v_r v_\theta}{r}=\rho f_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-v_\theta\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}\right)\right]+\frac{2\mu}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-v_\theta\right)- \tag{P1.7}$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\right]$$

Jednadžba količine gibanja – *x*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)- \tag{P1.8}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\right]$$

Komponente tenzora naprezanja

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.9}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.10}$$

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.11}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \tag{P1.12}$$

$$\sigma_{\theta x} = \sigma_{x\theta} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}\right) \tag{P1.13}$$

$$\sigma_{xr} = \sigma_{rx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right) \tag{P1.14}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima – *r*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \rho v_x\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\rho v_\theta^2}{r} = \rho f_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \\ + \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{P1.15}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima – θ-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \rho v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{\rho v_r v_\theta}{r} = \rho f_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \\ + \frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\sigma_{\theta r}}{r} \tag{P1.16}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima – *x*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_r\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = \rho f_x + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \tag{P1.17}$$

3. *Cilindarski koordinatni sustav – slučaj aksijalne simetrije*

Jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x}=0 \tag{P1.18}$$

Jednadžba količine gibanja – *r*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\rho v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]-\frac{2\mu v_r}{r^2}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\right] \tag{P1.19}$$

Jednadžba količine gibanja – *x*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\right] \tag{P1.20}$$

Komponente tenzora naprezanja

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.21}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+\frac{2\mu v_r}{r}-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.22}$$

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\left(\frac{2}{3}\mu-\mu_v\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{P1.23}$$

$$\sigma_{xr}=\sigma_{xz}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial x}\right) \tag{P1.24}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima – *r*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\rho v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}=\rho f_r+\frac{1}{r}\frac{\partial (r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial x}-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{P1.25}$$

Jednadžba količine gibanja izražena naprezanjima – *z*-komponenta

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}=\rho f_x+\frac{1}{r}\frac{\partial (r\sigma_{rx})}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \tag{P1.26}$$

ŽIVOTOPIS

Radoslav Korbar rođen je 6. 5. 1958. u Zagrebu, gdje se školovao i završio studij strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, usmjerenje Termoenergetska postrojenja. Na istom Fakultetu je 1992. g. završio postdiplomski studij iz područja Energetika i nuklearna tehnika - turbostrojevi i obranio magistarski rad "Metoda rješavanja k-ε modela turbulencije u općim koordinatama".

Od 1985. g. do 1998. g. bio je zaposlen na Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Tu je kao pripravnik i stručni suradnik u Zavodu za energetska postrojenja od 1985. do 1988. g. vršio ispitivanja hidrauličkih strojeva i drugih uređaja, a od 1988. do 1995. g. kao asistent održavao nastavu iz kolegija Mehanika fluida I i II, Hidraulički strojevi i Turbostrojevi u Zagrebu, te iz kolegija Hidromehanika I i II i Hidraulički strojevi u Karlovcu i Mehanika fluida u Slavonskom Brodu. Od 1996. g. do 1998. g. obavljao je iste poslove, ali u svojstvu stručnog suradnika na Zavodu za zrakoplovstvo istog Fakulteta.

U Australiji se stručno usavršavao 1996. g. u istraživačkom centru The G K Williams Cooperative Research Centre for Extractive Metallurgy – The University of Melbourne.

Od 1998. radi kao predavač, a od 2002. kao viši predavač na Veleučilištu u Karlovcu. Nositelj je kolegija Mehanika fluida I i II, Hidraulički strojevi i Pumpe na studiju Strojarstva, te Hidraulika i pneumatika i Aktuatori i zahvatnici na studiju Mehatronike.

Radio je na više stručnih i znanstvenih projekata financiranih od RSIZ-I, MZT / MZOŠ. Objavio je 22 stručna i znanstvena rada.

Oženjen je, govori engleski i njemački, a služi se talijanskim i ruskim jezikom.

CURRICULUM VITAE

Radoslav Korbar was born in Zagreb on 6. 5. 1958, where he completed his education and graduated in mechanical engineering, specialty Thermal Power Plants, from the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. At the same faculty he completed the graduate study and acquired the MS degree in Engineering, specialty Power and Nuclear Engineering – Turbomachines, upon submitting the MS thesis titled "A Finite Volume Method for Solving k-ε Turbulence Model in Curvilinear Coordinates" in 1992.

He was employed at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb from 1985 to 1998. From 1985 to 1988, as an apprentice and research assistant at the Institute for Power Plants of that Faculty, he conducted performance tests of hydraulic turbomachines and other devices, while from 1988 to 1995, as a Teaching Assistant at the same Institute he was teaching the following courses: Fluid Mechanics I and II, Hydraulic Machines, and Turbomachines in Zagreb, Hydromechanics I and II, and Hydraulic Machines in Karlovac, and Fluid Mechanics in Slavonski Brod. From 1996 to 1998, he was engaged in teaching the same courses but in the capacity of a research assistant at the Institute for Aeronautics of the same Faculty.

In 1996, he was employed as a research assistant in The GK Williams Cooperative Research Centre For Extractive Metallurgy, University of Melbourne, Australia.

From 1998, as a Lecturer and since 2002 as a Senior Lecturer he has been employed at the Polytechnics of Karlovac, where he has been assigned the courses Fluid Mechanics I and II, Hydraulic Machines, and Pumps for students of Mechanical Engineering and the courses Hydraulics and Pneumatics, and Actuator and Grippers for students of Mechatronics.

He participated in a number of specialized and research projects funded by the Ministry of Science. He published 22 specialized and research publications.

He is married, speaks English and German, and reads Italian and Russian.