Geometrijski integratori za numeričku simulaciju dinamike letjelica

Zlatar, Dario

Doctoral thesis / Disertacija

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:520707

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-20**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Dario Zlatar

GEOMETRIJSKI INTEGRATORI ZA NUMERIČKU SIMULACIJU DINAMIKE LETJELICA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.

Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Dario Zlatar

GEOMETRIC INTEGRATORS FOR NUMERICAL SIMULATION OF FLIGHT VEHICLE DYNAMICS

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015.

Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Dario Zlatar

GEOMETRIJSKI INTEGRATORI ZA NUMERIČKU SIMULACIJU DINAMIKE LETJELICA

DOKTORSKI RAD

Mentor: Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Zagreb, 2015.

Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Dario Zlatar

GEOMETRIC INTEGRATORS FOR NUMERICAL SIMULATION OF FLIGHT VEHICLE DYNAMICS

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Zagreb, 2015.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	519.6: 629.7
Ključne riječi:	geometrijski integracijski algoritmi, mnogostrukosti, Lieva rotacijska grupa *SO*(3), grupa jediničnih kvaterniona *Sp*(1), dinamika letjelica, zrakoplovi i sateliti
Znanstveno područje:	tehničke znanosti
Znanstveno polje:	zrakoplovstvo, raketna i svemirska tehnika
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu
Mentor rada:	Prof. dr. sc. Zdravko Terze
Broj stranica:	175
Broj slika:	58
Broj tablica:	3
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	111
Datum obrane:	24.06.2015.
Povjerenstvo:	Dr. sc. Milan Vrdoljak, izv. prof. – predsjednik Dr. sc. Zdravko Terze, red. prof. – mentor Dr. sc. Stjepan Bogdan, red. prof. – član, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

Časek so v tebi vmanji oblaki,
zatem pak dojde zmirenje sveto...
hinclivi so naši zemni koraki

Tancaš senako kaj kranjec na špagi,
a vreme ide... za letom leto...
denes si v nebu, zutra vu grabi.

Što nam to cuka življenja dreto?

Ivan Horvat Hlebinski, iz *Kranjec na dreti*

ZAHVALA

Prvo bih želio izraziti najveću zahvalnost svom mentoru, prof. dr. sc. Zdravku Terzeu, na prenesenom znanju, izvrsnom vodstvu i stalnoj potpori tijekom dosadašnjih istraživanja koja su rezultirala ovim doktorskim radom. Profesore zahvalan sam Vam do neba!

Zahvaljujem članovima povjerenstva, prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku i prof. dr. sc. Stjepanu Bogdanu, za pronalaženje vremena za pregled ovog rada, te za sve primjedbe i sugestije koje su poboljšale njegovu kvalitetu.

Zahvaljujem se svojim roditeljima Božidaru i Mariji na omogućenom školovanju i pruženoj podršci tijekom cijelog poslijediplomskog studija.

Posebno se zahvaljujem svojoj zaručnici Martini Maljak na pruženoj moralnoj podršci i golemom strpljenju tijekom izrade ovog doktorskog rada.

Na kraju, veliko hvala i svima ostalima koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom izrade ovog rada, a koji nisu poimence spomenuti u zahvali.

Hvala vam svima, vaša pažnja, razumijevanje i molitva ugrađeni su u ovaj rad!

SADRŽAJ

1. UVOD 1

1.1 Motivacija 1

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja 2

1.3 Cilj i hipoteza rada 5

1.4 Metode istraživanja 5

1.5 Očekivani znanstveni doprinos i struktura doktorskog rada 7

2. MNOGOSTRUKOSTI 11

2.1 Uvodni pojmovi 11

2.1.1 Definicija i svojstva mnogostrukosti 11

2.1.2 Funkcije i krivulje na mnogostrukosti 16

2.1.3 Vektori i vektorska polja 17

2.1.4 Vlakna i svežnjevi 20

2.1.5 Polja jedan-formi, gradijent i tenzor 24

2.1.6 Lieva derivacija i invarijantnost 25

2.1.7 Lieve grupe i Lieve algebre u kontekstu mnogostrukosti 27

2.2 Dinamika na tangentnom svežnju 29

3. ROTACIJE I *SO*(3) GRUPA 32

3.1 Matematički opis rotacija 32

3.1.1 Osnovni pojmovi vezani uz grupe 34

3.2 Rotacija kao grupa 37

3.2.1 Parametrizacija rotacije 38

3.2.2 Eulerov i Chaslesov teorem 40

3.3 *SO*(3) grupa 41

3.3.1 *SO*(3) grupa kao diferencijabilna mnogostrukost 41

3.3.2 *SO*(3) kao Lieva grupa 42

3.3.3 Lieva algebra *so*(3) 43

3.3.4 Eksponencijalna mapa 45

3.3.5 Veza između vektorskih prostora u različitim točkama *SO*(3) grupe 51

4. METODA INTEGRACIJE ZA SUSTAVE VIŠE TIJELA NA LIEVOJ GRUPI PROSTORA STANJA 53

4.1 Konfiguracijski prostor mehaničkog sustava više tijela 53

4.2 Kinematička rekonstrukcija gibanja 56

4.3 Formulacija dinamičkog modela 57

4.4 Integracijski algoritam na Lievoj grupi prostora stanja sustava više tijela 60

4.5 Primjena metode integracije DAE zadaća na Lievim grupama prostora stanja na dinamički model zračne letjelice s rotirajućim krilom 63

4.5.1 Definiranje Lieve grupe prostora stanja helikoptera kao krutog tijela 63

4.5.2 Dinamički model 65

4.5.3 Numerički primjer: zračna letjelica s rotirajućim krilom 66

4.5.4 Opis modela helikoptera 66

4.5.5 Početni uvjeti 68

4.5.6 Rezultati simulacije 70

5. METODA INTEGRACIJE ROTACIJSKOG TENZORA NA GRUPI JEDINIČNIH KVATERNIONA *Sp*(1) 74

5.1 Kvaternioni 74

5.2 Kinematika rotacije krutog tijela 79

5.3 Integracijska shema 81

5.4 Primjena metode integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona na dinamički model zračne letjelice s nepomičnim krilom 82

5.4.1 Dinamički model 83

5.4.2 Numerički primjer: zračna letjelica s nepomičnim krilom 83

5.4.3 Opis modela malog putničkog aviona 83

5.4.4 Rezultati simulacije 89

6. INTEGRACIJSKE SHEME KOJE ČUVAJU PRVE INTEGRALE GIBANJA 96

6.1 Polazne točke korištene kod projektiranja odabranih integracijskih shema 96

6.1.1 Integracijska shema dinamike rotacije krutog tijela u Hamiltonovom kanonskom obliku 100

6.2 Ne-kanonski eksplicitni Störmer-Verlet algoritam za integraciju dinamike na rotacijskoj grupi *SO*(3) 103

6.2.1 Polazna shema 103

6.2.2 Preinačena shema 105

6.2.3 Eksplicitna shema koja čuva kinetički moment sustava 108

6.3 Implicitna shema koja čuva kinetički moment i kinetičku energiju sustava 109

6.4 Primjena geometrijskih algoritama koji omogućavaju algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije na integraciju dinamičkog modela svemirskog satelita 111

6.4.1 Numerički primjer: svemirski satelit 112

6.4.2 Rezultati simulacije 112

7. ZAKLJUČAK 117

A. DIFERENCIJAL EKSPONENCIJALNE MAPE 122

B. NUMERIČKI PRIMJERI KORIŠTENI KOD PROJEKTIRANJA EKSPLICITNE I IMPLICITNE SHEME KOJA ČUVA KINETIČKI MOMENT I KINETIČKU ENERGIJU SUSTAVA 124

PREDGOVOR

Tematsko područje istraživanja je matematičko i numeričko modeliranje nelinearnih dinamičkih procesa gibanja konstrukcijskih sustava (engl. *multibody structural systems* (*MBS*)) s posebnom primjenom na dinamičku simulaciju gibanja zračnih i svemirskih letjelica.

Analizirajući nedostatke standardnih rješenja integracije dinamičkih modela u vektorskim prostorima, osnovna ideja razvoja geometrijskih algoritama je projektiranje integracijskih metoda koje će 'razumjeti' fizikalnu podlogu gibanja, odnosno bit će algoritamski prilagođene diferencijalno-geometrijskoj strukturi dinamičkog sustava. Usvajajući takvu polaznu točku, istraživanja grupe prof. dr. sc. Zdravka Terzea rezultirala su u posljednje vrijeme predstavljanjem više novih algoritama za integraciju dinamike diskretnih mehaničkih sustava na mnogostrukostima i Lievim grupama s dokazano dobrim integracijskim karakteristikama [1-4], od kojih su oni korišteni u predmetnom istraživanju odabrani prema kinematičkim i dinamičkim značajkama karakterističnih letjelica prezentiranih u primjerima.

Kao primjeren geometrijski integracijski algoritam za numeričko izračunavanje dinamike karakteristične zračne letjelice s rotirajućim krilom odabrana je nova integracijska metoda projektirana proširenjem i redizajniranjem Munthe-Kaas algoritma za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi na Lievoj grupi [1]. Nadalje, metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona kojom se rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela trodimenzijske kinematike krutog tijela [5, 6], prilagođena je i primijenjena na integraciju standardnog modela leta zračne letjelice s nepomičnim krilom. Također, uz navedene primjere simulacijskih modela zračnih letjelica, sintetiziran je i dinamički model svemirskog satelita, pri čemu je za integraciju gibanja izvedenog matematičkog modela korišten izvorni geometrijski algoritam koji omogućava algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije [2].

SAŽETAK

U fokusu istraživanja je prilagodba i primjena novoprojektiranih geometrijskih integracijskih algoritama na numeričke zadaće dinamike letjelica te je ocijenjena njihova pogodnost i kvaliteta za primjenu u okviru numeričkih simulacijskih procedura za izračunavanje dinamičkih odziva zračnih i svemirskih letjelica.

Za razliku od standardnih numeričkih metoda integracije običnih diferencijalnih jednadžbi koje operiraju u vektorskim prostorima, ciljani geometrijski algoritmi projektirani su na mnogostrukostima i Lievim grupama. Polazne geometrijske metode uobličene su na način da algoritamski zadovoljavaju određena kinematička i dinamička ograničenja koja proistječu iz diferencijalno-geometrijske strukture sustava.

Nakon pojedinačnog opisa izvoda matematičkih modela odabranih algoritama i njihove prilagodbe za ciljane zadaće integracije dinamike letjelica, prezentirani su primjeri primjene geometrijskih integracijskih metoda te njihova usporedba s klasičnim procedurama vektorskih prostora.

EXTENDED SUMMARY

The research focuses on the adaptation and application of a newly designed geometric integration algorithms on numerical tasks of flight vehicle dynamics and evaluation of their benefits and quality of adaptation in the framework of numerical simulation procedures for calculating the dynamic response of aircrafts and spacecrafts.

With regard to the standard numerical methods for integrating ordinary differential equations that operate on vector spaces, targeted geometric algorithms are designed on manifolds and Lie groups. Starting geometric methods are shaped in the form that algorithmically satisfies kinematic and dynamic constraints that come from the differential geometric structure of system.

Upon completion of description of the individual derivation of mathematical models of the selected algorithms and their adaptation to the target tasks of integration of flight vehicle dynamics, the examples of applying geometric integration methods are presented and compared with classical procedures of linear vector spaces.

This thesis is organized in seven chapters, as follows:

Chapter 1: *Introduction*. This chapter presents the relevance of the research. It gives an overview of the relevant literature related to the topic of the thesis and explains the scope of the research. The first chapter is divided into five sections which includes: motivation, overview of the previous research, research goals and hypotheses, methodology of the research, expected scientific contributions and structure of the thesis.

Chapter 2: *Manifolds*. In this chapter manifolds are introduced and explained. Firstly manifolds are explained and then vector fields, vector spaces, curves and vector fields commutation are shortly described. The mathematics and terminology described here enables a better understanding of the following sections.

Chapter 3: *Rotations and the SO(3) group*. In this chapter rotations and their mathematical description in terms of groups and manifolds is presented. Until now no formal mathematical mention of the rotations was made and the dynamics was mostly focused on particles and body translations. After the detailed presentation of rotations of the following chapter the description of the individual derivation of mathematical models of the selected algorithms is presented.

Chapter 4: *Lie-group integration method for constrained multibody systems in state space*. Coordinate-free Lie-group integration method of arbitrary (and possibly higher) order of accuracy for constrained multibody systems (MBS) is described, adapted and applied to the helicopter forward dynamics in this chapter. Mathematical model of MBS dynamics is shaped as DAE system of equations of index 1, while dynamics is evolving on the system state space modelled as a Lie-group. Since formulated integration algorithm operates directly on the system manifold via MBS elements' angular velocities and rotational matrices, no local rotational coordinates are necessary and kinematical differential equations (that are prone to singularities in the case of 3-parameters-based local description of the rotational kinematics) are completely avoided. Basis of the integration procedure is the Munthe-Kaas algorithm for ODE integration on Lie-groups, which is reformulated and expanded to be applicable for the integration of constrained MBS in the DAE-index-1 form.

Dynamic simulation procedures of aircraft 3D motion need robust and efficient integration methods in order to allow for reliable (and possibly real-time) simulation missions. To this end, derivation of such integration schemes in coordinate-free Lie-group setting could be a promising start, since Lie-group dynamical models operate directly on $SO(3)$ rotational matrices and angular velocities, avoiding local rotation parameters and additional algebraic constraints as well as kinematical differential equations. These integration characteristics should be especially beneficial for the flight vehicle simulation missions since a realization of the aircraft complex 3D maneuvers often requires numerical forward dynamics that includes complete 3D rotation domain. In such cases, the utilization of the 'standard' vector-space-based modeling procedures (with the local rotation parameters) leads toward kinematical singularities and re-parameterization of the rotation domain, which requires further computational burden. Along this line, a numerical integration scheme in Lie-group settings for the helicopter forward dynamics is presented and discussed in this chapter. The presented formulation provides a compact integration platform for smooth flight vehicle dynamics numerical integration, independently of the character of the 3D rotations involved and without introducing additional 'artificial' algebraic constraints.

For the initial case study a simple maneuver of a helicopter is selected with generic transport helicopter modeled as a single 6DOF rigid body problem. The proposed Lie-group DAE-index-1 integration scheme is easy-to-use for a MBS with kinematical constraints of general type and it is especially suitable for dynamics of mechanical systems with large 3D rotations where standard (vector space) formulations might be inefficient due to kinematical

singularities (3-parameters-based rotational coordinates) or additional kinematical constraints (redundant quaternion formulations).

Chapter 5: *Singularity-free time integration of rotational quaternions using non redundant ordinary differential equations*. In this chapter a novel time stepping scheme for solving rotational kinematics, formulated as an ODE in terms of unit quaternions, is described, adapted and applied to the numerical forward dynamics of a fixed-wing aircraft. This scheme inherently respects the unit-length condition without including it explicitly as a further equation, as it is common practice. In the standard algorithms, the unit-length condition is included as an additional equation leading to kinematical equations in the form of a system of differential-algebraic equations (DAE). On the contrary, the proposed method is based on numerical integration of the kinematic relations in terms of the instantaneous rotation vector that form an ordinary differential-equations (ODE) on Lie-algebra *so*(3) of the rotation group *SO*(3). This rotation vector then defines an incremental rotation (and thus the associated unit-quaternion), and the rotation update is determined by projection of the incremental vector on the quaternion group via pertinent exponential mapping. Since the kinematic ODE on *so*(3) can be solved by using any standard (possibly higher-order) ODE integration scheme, the result of the procedure is a non-redundant integration algorithm for the rotational kinematics in terms of unit quaternions that allows for application of general ODE integration schemes, and thus avoids integration of DAE equations. This solves a long-standing problem of necessity to deal with DAE's during integration of rotational kinematics, which has been a major drawback of using quaternions.

As a numerical example, a 3D motion of a general aviation airplane, modeled as a flat-earth 6DOF single rigid body problem, is presented.

Chapter 6: *An angular momentum and energy conserving Lie-group integration schemes for rigid body rotational dynamics originating from Störmer-Verlet algorithm*. This chapter describes two novel 2nd order conservative Lie-group geometric methods for integration of rigid body rotational dynamics. Firstly described algorithm is a fully explicit scheme that exactly conserves spatial angular momentum of a free spinning body. The method is inspired by the Störmer-Verlet integration algorithm for solving ordinary differential equations, which is also momentum conservative when dealing with ODEs in linear spaces but loses its conservative properties in a non-linear regime, such as non-linear *SO*(3) rotational group. Then, is described an algorithm that is an implicit integration scheme with a direct update in *SO*(3). The method is algorithmically designed to conserve exactly both of the two 'main' motion integrals of a rotational rigid body, i.e. spatial angular momentum of a torque-free

body as well as its kinetic energy. As it is shown in the thesis, both methods also preserve Lagrangian top integrals of motion in a very good manner, and generally better than some of the most successful conservative schemes to which the proposed methods were compared within the presented numerical examples. The proposed schemes can be easily applied within the integration algorithms of the dynamics of general rigid body systems.

The system under consideration is a satellite modeled as a single rigid body problem.

Chapter 7: *Conclusion*. This chapter summarises the main contributions of the thesis and gives several recommendations for future research.

KLJUČNE RIJEČI (KEYWORDS)

Ključne riječi:

- *geometrijski integracijski algoritmi*
- *mnogostrukosti*
- *Lieva rotacijska grupa SO(3)*
- *grupa jediničnih kvaterniona Sp(1)*
- *dinamika letjelica*
- *zrakoplovi i sateliti.*

Keywords:

- *geometric integration algorithms*
- *manifolds*
- *Lie rotation group SO(3)*
- *unit quaternion group Sp(1)*
- *flight vehicle dynamics*
- *aircraft and satellites.*

POPIS SLIKA

Slika 2.1: Preslikavanje φ slike u na otvorenu okolinu u $\mathcal{R}^n$ [39]. 12

Slika 2.2: Preslikavanje okoline u_1 i u_2, koje na $\mathcal{M}$ imaju presjek, na otvorenu okolinu $\mathcal{R}^n$ 13

Slika 2.3: Uvećani detalj slike 2.2 koji prikazuje vezu između preslikavanja. 14

Slika 2.4: Preslikavanje 1-1 okoline točke *P* na disk u $\mathcal{R}^2$ [39]. 15

Slika 2.5: Diferencijabilno preslikavanje s otvorenog skupa u $\mathcal{R}^1$ na $\mathcal{M}$ (točki $\lambda \in \mathcal{R}^1$ pridružuje se točka P)[39]. 17

Slika 2.6: Preslikavanje 1-1 iz okoline u na otvorenu okolinu $\mathcal{R}^n$ 19

Slika 2.7: Jednodimenzionalna mnogostrukost sa nekim njezinim tangentnim prostorima [39]. 20

Slika 2.8: Geometrijska interpretacija Lieve zagrade [39]. 23

Slika 2.9: Preslikavanje okoline od e lijevom translacijom nekim određenim $\mathbf{y}$ na okolinu od $\mathbf{y}$ [39]. 27

Slika 2.10: Preslikavanje Lieve zagrade iz e u Lievu zagradu u $\mathbf{y}$ [39]..... 28

Slika 2.11: Sfera $\mathcal{S}^2$ kao mnogostrukost s prikazom nekoliko tangentnih prostora [38]..... 30

Slika 3.1: a) Izomorfizam, b) epimorfizam i c) monomorfizam. 36

Slika 3.2: Veza između dva vektorska prostora i Lieve algebre. 51

Slika 3.3: Veza između Lieve algebra i tangentnog vektorskog prostora. 52

Slika 4.1: Shema integracijske procedure DAE sustava na Lievoj grupi. 62

Slika 4.2: Vremenski promjenjive upravljačke veličine: θ_0 kolektivni postavni kut lopatica nosivog rotora i θ_{0_T} kolektivni postavni kut repnog rotora. 70

Slika 4.3: Prikaz putanje $\mathbf{r}$ letjelice u prostoru. 70

Slika 4.4: Položaj središta mase helikoptera. 71

Slika 4.5: Brzine izražene u koordinatnom sustavu letjelice. 71

Slika 4.6: Kutna brzina letjelice. 71

Slika 4.7: Stav helikoptera $\mathbf{\Psi}$ - Eulerovi kutovi. 71

Slika 4.8: Elementi matrice rotacije $\mathbf{R}$ 72

Slika 4.9: Svojstva matrice rotacije. 72

Slika 4.10: Svojstva matrice rotacije (vremenska domena 400 sekundi). 72
Slika 5.1: Tri različita puta iz točke 1 u točku -1. 76
Slika 5.2: Vremenski promjenjive upravljačke veličine: otklon krilca, otklon kormila visine, otklon kormila pravca i upravljačka veličina pogonske sile. 90
Slika 5.3: Prikaz putanje $\mathbf{r}$ letjelice u prostoru. 90
Slika 5.4: Komponenta $r_3(t)$ (visina) položaja središta mase aviona i globalna projekcija putanje centra mase na ravninu $r_1\ r_2$. 91
Slika 5.5: Komponente globalnog vektora brzine $\mathbf{v}^b$. 91
Slika 5.6: Kutna brzina aviona. 91
Slika 5.7: Stav aviona $\boldsymbol{\Psi}$ - Eulerovi kutovi. 91
Slika 5.8: Elementi kvaterniona. 92
Slika 5.9: Norma jednadžbe ograničenja kvaterniona jedinične veličine. 92
Slika 5.10: Norma jednadžbe ograničenja kvaterniona jedinične veličine (vremenska domena 400 sekundi). 92
Slika 5.11: Usporedba 50 mjerenih procesorskih vremena predložene i standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona. 93
Slika 5.12: Prosjek izmjerenih vrijednosti procesorskih vremena. 93
Slika 5.13: Usporedba položaja dobivenih standardnom (sm) i predloženom metodom (nm) za korake integracije *h*=1e-1 i *h*=1e-4, te dugu vremensku domenu (400 sekundi). 95
Slika 5.14: Konvergencija norme greške elemenata kvaterniona. 95
Slika 6.1: Geometrijski prikaz aproksimacije diferenciranjem korištene kod projektiranja Störmer-Verlet integracijske metode (lijevo). Jedna od moguće dvije varijante Störmer-Verlet sheme (desno) [76]. 97
Slika 6.2: Kutna brzina letjelice. 113
Slika 6.3: Elementi matrice rotacije $\mathbf{R}$ 113
Slika 6.4: Svojstva matrice rotacije. 113
Slika 6.5: Svojstva matrice rotacije (vremenska domena 400 sekundi). 113
Slika 6.6: Komponenta Ψ_3 Cartesijevog rotacijskog vektora $\boldsymbol{\Psi}$, definiranog kao $\|\boldsymbol{\Psi}\| \leq \pi$. 114
Slika 6.7: Norma Cartesijevog rotacijskog vektora $\boldsymbol{\Psi}$ 114
Slika 6.8: Tait-Bryantovi kutovi 115
Slika 6.9: Konvergencija norme greške globalnog kinetičkog momenta. 115
Slika 6.10: Konvergencija norme greške kinetičke energije. 115

Slika B7.1: Usporedba metoda. Globalna komponenta kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela - odstupanje od analitičkog rješenja komponente y_3 [111]. 125
Slika B7.2: Usporedba metoda. Globalna komponenta kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela - odstupanje od analitičkog rješenja komponente y_2 [2]. 125
Slika B7.3: Ocjena konvergencije norme greške globalnog kinetičkog momenta [2]. 126
Slika B7.4: Ocjena konvergencije norme greške kinetičke energije [2]. 126
Slika B7.5: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na vektor gravitacije [2]. 127
Slika B7.6: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela [2]. 127
Slika B7.7: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na vektor gravitacije [2]. 128
Slika B7.8: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela [2]. 128
Slika B7.9: Ocjena konvergencije norme greške matrice rotacije. 129
Slika B7.10: Ocjena konvergencije norme greške lokalnog kinetičkog momenta..... 129

POPIS TABLICA

Tabela 4.1: Osnovni podaci za transportni helikopter. 67
Tabela 5.1: Osnovni podaci za mali putnički avion. 84
Tabela 6.1: Osnovni podaci za svemirski satelit. 112

POPIS OZNAKA

$b\,[\mathrm{m}]$	raspon krila zrakoplova
$\mathbf{C}$	Jacobieva matrica kinematičkih ograničenja
$\boldsymbol{C}$	skup kompleksnih brojeva
$c_A\,[\mathrm{m}]$	srednja aerodinamička tetiva krila
C_D, C_Y, C_L	koeficijenti aerodinamičke sile u aerodinamičkom koordinatnom sustavu: koeficijent sile otpora, koeficijent bočne sile i koeficijent sile uzgona
C_{D_0}, K	elementi koeficijenta sile otpora: parazitski otpor i koeficijent induciranog otpora
$C_{L_\alpha}, C_{L_{\dot{\alpha}}}, C_{L_{\omega_2}}, C_{L_{\delta_m}}$, C_{L_0}	gradijenti koeficijenta sile uzgona: gradijent po napadnom kutu, gradijent po derivaciji napadnog kuta, gradijent po kutnoj brzine ω_2, gradijent po otklonu kormila visine i koeficijent sile uzgona za nulti napadni kut
C_l, C_m, C_n	koeficijenti aerodinamičkog momenta: koeficijent momenta valjanja, koeficijent momenta propinjanja i koeficijent momenta skretanja
$C_{l_\beta}, C_{l_{\omega_1}}, C_{l_{\omega_3}}, C_{l_{\delta_l}}, C_{l_{\delta_n}}$	gradijenti koeficijenta momenta valjanja: gradijent po kutu klizanja, gradijent po kutnoj brzini ω_1, gradijent po kutnoj brzini ω_3, gradijent po otklonu krilca i gradijent po otklonu kormila pravca
$C_{m_\alpha}, C_{m_{\dot{\alpha}}}, C_{m_{\omega_2}}, C_{m_{\delta_m}}$	gradijenti koeficijenta momenta propinjanja: gradijent po napadnom kutu, gradijent po derivaciji napadnog kuta, gradijent po kutnoj brzini ω_2 i gradijent po

	otklonu kormila visine
$C_{n_\beta}, C_{n_{\omega_1}}, C_{n_{\omega_3}}, C_{n_{\delta_l}}$, $C_{n_{\delta_n}}$	gradijenti koeficijenta momenta skretanja: gradijent po kutu klizanja, gradijent po kutnoj brzini ω_1, gradijent po kutnoj brzini ω_3, gradijent po otklonu krilca i gradijent po otklonu kormila pravca
C_x, C_y, C_z	aerodinamički koeficijenti izraženi u koordinatnom sustavu letjelice: koeficijent aksijalne sile, koeficijent bočne sile i koeficijent normalne sile
$C_{Y_\beta}, C_{Y_{\omega_1}}, C_{Y_{\omega_3}}, C_{Y_{\delta_n}}$	gradijenti koeficijenta bočne sile: gradijent po kutu klizanja, gradijent po kutnoj brzini ω_1, gradijent po kutnoj brzini ω_3 i gradijent po otklonu kormila pravca
e	identitet grupe
$\mathbf{e}_i$	standardna ortonormalna baza
$\mathcal{G}$	konfiguracijski prostor sustava
$h\ [\mathrm{s}]$	veličina koraka integracije
$\mathcal{H}$	grupa kvaterniona
$\mathbf{I}_i\ [\mathrm{kg\,m^2}]$	tenzor inercije *i*-tog tijela
$I_x, I_y, I_z\ [\mathrm{kg\,m^2}]$	glavni moment inercije letjelice
$\boldsymbol{I}$	jedinična matrica
k	vektor stanja položaja i stava letjelice
$\mathrm{L}\ [\mathrm{J}]$	Lagrangeov operator
$m\ [\mathrm{kg}]$	masa letjelice
$\mathbf{M}$	poopćena matrica inercije dimenzije $n \times n$ (sadrži mase

	i tenzore inercije)
P_{eng} [W]	raspoloživa pogonska snaga motora
$\mathcal{R}^n$	*n*-dimenzionalni Euklidski prostor
$\mathbf{r}_i$ [m]	vektor položaja središta mase *i*-tog tijela
$\tilde{\mathbf{r}}_b$ [m]	vektor položaja središta mase izražen u lokalnim koordinatama
r_1, r_2, r_3 [m]	komponente vektora $\mathbf{r}$; koordinate položaja središta mase aviona izražene u globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{R}$	ortogonalna matrica rotacije
$\mathbf{R}_v^T$	matrica transformacije iz aerodinamičkog koordinatnog sustava (os x leži uzduž vektora aerodinamičke brzine, a os z u ravnini simetrije letjelice) u koordinatni sustav letjelice
q , p	kvaternion
$\mathbf{Q}^n$, $\mathcal{M}^n$	*n*-dimenzionalna mnogostrukost
$\mathbf{Q}_f^b$ [N]	vektor unutarnje sile izražene u koordinatnom sustavu letjelice
$\mathbf{Q}_{f\,A}^b$ [N]	vektor aerodinamičke sile izražene u koordinatnom sustavu letjelice
$\mathbf{Q}_{f\,P}^b$ [N]	vektor pogonske sile izražene u koordinatnom sustavu letjelice
$\mathbf{Q}_m^b$, $\mathbf{Q}_{mA}^b$ [Nm]	vektor vanjskog i aerodinamičkog momenta izražen u koordinatnom sustavu letjelice
$\mathcal{S}$	prostor stanja sustava

$SO(3)$	Lieva grupa
$so(3)$	Lieva algebra
$S_{ref}\ [\mathrm{m}^2]$	referentna površina krila
$t\ [\mathrm{s}]$	vrijeme
$\mathrm{T}\ [\mathrm{J}]$	kinetička energija
$T_a\ [\mathrm{N}]$	raspoloživa pogonska sila elise
$\mathbf{u}$	vektor upravljačkih veličina
$\mathbf{v}_i\ [\mathrm{m/s}]$	vektor translacijskih brzina *i*-tog tijela
$v_1^b,\ v_2^b,\ v_3^b\ [\mathrm{m/s}]$	komponente vektora $\mathbf{v}^b$, brzine izražene u koordinatnom sustavu letjelice
$V\ [\mathrm{m/s}]$	intenzitet aerodinamičke brzine
$\mathrm{V}\ [\mathrm{J}]$	potencijalna energija
$\boldsymbol{\mathcal{w}}$	imaginarni kvaternion
$\alpha\ [\mathrm{rad}]$	napadni kut
$\alpha_T\ [\mathrm{rad}]$	postavni kut motora
$\dot{\alpha}^*\ [\mathrm{rad/s}]$	bezdimenzijska varijacija napadnog kuta
$\beta\ [\mathrm{rad}]$	kut klizanja
$\delta_l,\ \delta_m,\ \delta_n\ [\mathrm{rad}]$	elementi vektora otklona upravljačkih veličina aviona: otklon krilca (engl. *aileron*), otklon kormila visine (engl. *elevator*) i otklon kormila pravca (engl. *ruder*)
δ_{eng}	upravljačka veličina pogonske sile

η_{prop}	koeficijent učinkovitosti elise
$\rho\ [\mathrm{kg/m^3}]$	gustoća zraka
$\phi,\ \theta,\ \psi\ [\mathrm{rad}]$	Eulerovi kutovi: kut valjanja letjelice, kut propinjanja i kut zanosa
$\mathbf{\Phi}$	matrica funkcija ograničenja
$\mathbf{\Psi}\ [\mathrm{rad}]$	vektora tri kuta koji predstavlja matricu rotacije $\mathbf{R}$
$\boldsymbol{\omega}\ [\mathrm{rad/s}]$	vektor kutne brzine u lokalnim koordinatama tijela
$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\ [\mathrm{rad/s}]$	koso-simetrična matrica kutne brzine
$\dot{\boldsymbol{\omega}}\ [\mathrm{rad/s^2}]$	vektor kutne akceleracije u lokalnim koordinatama tijela
$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\ [\mathrm{rad/s}]$	komponente vektora kutnih brzina $\boldsymbol{\omega}$ izražene u koordinatnom sustavu letjelice
$(\ )_0$	početne vrijednosti (za $t = 0$)
θ_0	kolektivni postavni kut lopatica nosivog rotora
θ_{0_T}	kolektivni postavni kut repnog rotora
θ_{1_c}	poprečni ciklični postavni kut
θ_{1_s}	uzdužni ciklični postavni kut

Napomena: *Sve gore spomenute oznake, kao i one preostale, objašnjene su detaljnije na mjestu pojavljivanja u tekstu doktorata.*

POPIS KRATICA

DAE – Differential-Algebraic Equation

DOF – Degrees of Freedom

MBS – Multibody System

MK – Munthe-Kaas Method

NED – North-East-Down

ODE – Ordinary Differential Equation

ODJ – Obična Diferencijalna Jednadžba

RK – Runge-Kutta Method

RK-MK – Runge-Kutta-Munthe-Kaas Method

1

UVOD

U prvom uvodnom poglavlju izložena je motivacija kojom je potaknuto istraživanje. Definiran je cilj istraživanja, te je dan prikaz hipoteze rada, kao i prikaz metoda istraživanja koje su upotrijebljene u ovom doktorskom radu. Očekivani znanstveni doprinos i struktura doktorskog rada prikazani su na kraju poglavlja.

1.1 Motivacija

Matematičko i numeričko modeliranje nelinearnih dinamičkih procesa gibanja sustava više tijela (engl. *multibody structural systems* (MBS)) zahtjevno je područje suvremene računalne mehanike. Iako se gibanja takvih sustava uspješno računalno modeliraju već od sredine sedamdesetih godina prošlog stoljeća još uvijek nije moguće pouzdano i točno računalno oblikovati, dinamički oponašati i prediktivno sagledavati složenija gibanja kompleksnih tehničkih konstrukcijskih sustava. Tijekom posljednjih desetljeća područje se ubrzano razvija zbog velikog znanstvenog i industrijskog potencijala takvih računalnih modela koji, u sprezi s tvorbom adekvatnih softverskih rješenja, omogućavaju dinamičku simulaciju i virtualno ispitivanje, analizu i sintezu složenih tehničkih i industrijskih sustava kao što su mehatronički sustavi, vozila i letjelice, biomehanički sustavi, 'zeleni' inženjerski eko-sustavi (npr. vjetroturbine) ali i drugih fizikalnih aplikacija makro i nano-svijeta (npr. sustavi molekularne dinamike).

Matematička i numerička zahtjevnost takvih računalnih modela proistječu iz geometrijske (i eventualno materijalne) nelinearnosti elemenata, numeričke krutosti te iz 'globalnih' dinamičkih značajki sustava. Domenu gibanja elemenata takvih sustava predstavljaju prostorni pomaci s velikim 3D rotacijama, što konfiguracijski prostor sustava čini nelinearnim ('zakrivljenim') geometrijskim prostorom u kojem se, bez posebne prilagodbe, najčešće ne

mogu efikasno koristiti standardne numeričke procedure projektirane za linearne vektorske prostore. Osim toga, uvjete integriranja dodatno usložnjava prisutnost kinematičkih ograničenja u konfiguracijskom prostoru sustava, koja su najčešće nezaobilazan dio definicije MBS modela (to nije slučaj u drugim disciplinama numeričke mehanike - npr. modeliranju metodom konačnih elemenata gdje su kinematička ograničenja rijetko prisutna i nastoje se izbjeći). Kinematička ograničenja uvjetuju matematičke modele u obliku diferencijalno-algebarskih jednadžbi i nužnost sadržanosti integracijskog odziva na mnogostrukostima (engl. *manifolds*) manjih dimenzija. Spomenuta numerička krutost sustava posljedica je prisutnosti holonomnih i neholonomnih kinematičkih veza unutarnjih i vanjskih kinematičkih parova, unilateralnih kontakata ili kinematičkih upravljačkih funkcija. Gibanja sustava često sadrže i 'globalne' dinamičke značajke, kao što su očuvanje 'integrala gibanja' u obliku održanja mehaničke energije ili kinetičkog momenta sustava, koje moraju biti izražene i u numeričkom simulacijskom odzivu. Pitanja globalne numeričke stabilnosti algoritma, numerička efikasnost integracije i drugi važni aspekti, često su u izravnoj vezi s mogućnostima algoritma da prati navedene globalne značajke egzaktnog rješenja.

U tom smislu, integracijski algoritmi trebaju biti tako projektirani, da 'razumiju' fizikalnu podlogu gibanja. Standardna rješenja izravne diskretizacije dinamičkih jednadžbi te integracija klasičnim algoritmima za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ), kakvi su dio standardnih numeričkih biblioteka, najčešće ne daju zadovoljavajuća rješenja.

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

Na zahtjeve za unapređenjem matematičkih modela i numeričkih algoritama računalnih simulacija, znanstvena zajednica u području inženjerskih znanosti i primijenjene matematike odgovorila je razvojem više integracijskih algoritama, kojima se pokušavaju projektirati točne, stabilne i efikasne simulacijske procedure.

Matematički modeli konstrukcijskih MBS sustava najčešće su u obliku diferencijalno-algebarskih sustava jednadžbi indeksa tri (engl. *DAE index 3*). Numeričkoj integraciji takvog dinamičkog modela moguće je pristupiti snižavanjem indeksa DAE sustava jednadžbi njegovom pretvorbom u DAE sustav jednadžbi indeksa jedan [7]. To se postiže preoblikovanjem holonomnih kinematičkih ograničenja na poopćenim pomacima sustava (translacije i rotacije) u oblik algebarskih ograničenja na nivou akceleracija sustava [8, 9]. Prednost transformiranog DAE sustava indeksa jedan je što se za njegovo integriranje mogu koristiti klasični ODJ algoritmi, sadržani u standardnim programskim bibliotekama, a glavni

nedostatak takvog rješenja je nužnost uvođenja stabilizacijskog algoritma dinamičkog odziva, koji ima zadaću projiciranja numeričkog rješenja natrag na mnogostrukost ograničenja [10-12]. Također, nedostatak opisanog postupka je i mogućnost povrede globalnih značajki gibanja, kao što je invarijantnost mehaničke energije ili očuvanje kinetičkog momenta [13, 14]. Kako bi se izbjegli navedeni nedostaci, DAE sustave indeksa tri moguće je izravno integrirati pomoću više različitih algoritama, kao što su implicitne Runge-Kutta metode [10, 12], Hilber-Hughes-Taylor metode te poopćene Alpha metode [14, 15]. Nažalost, spomenute metode (sastavnice standardnih programskih biblioteka) projektirane za numeričku integraciju u vektorskim prostorima najčešće gube značajke bezuvjetne stabilnosti u slučajevima integracije nelinearnih dinamičkih zadaća [16], a prisutnost kinematičkih (algebarskih) ograničenja dodatno usložnjava uvjete integracije i snižava nivo performansi (npr. red točnosti i brzina konvergencije). Kao dobar primjer može se navesti Newmark integracijski algoritam koji je bezuvjetno stabilan u linearnom režimu rada bez ograničenja, a potpuno neadekvatan za integraciju nelinearnih MBS modela s kinematičkim ograničenjima [17].

S obzirom na opisane poteškoće u upotrebi standardnih algoritama linearnih prostora, počinju se koristiti metode za dinamičku simulaciju MBS sustava, koje ne operiraju na vektorskim prostorima, već na diferencijabilnim mnogostrukostima. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski 'zakrivljeni' prostor mnogostrukosti MBS sustava, imanentno zadovoljavajući određena kinematička ograničenja. Velike 3D rotacije nezaobilazan su dio definicije topologije MBS sustava te nužno uvjetuju geometrijsku nelinearnost MBS modela i modeliranje konfiguracijskog prostora sustava korištenjem mnogostrukosti ortogonalnih $SO(3)$ grupa za kinematički opis 3D rotacija, nameće se kao prirodno rješenje. Na taj se način izbjegava upotreba lokalnih koordinata za parametrizaciju mnogostrukosti velikih rotacija te se uvodi mogućnost integracije rotacija izravno na specijalnim ortogonalnim grupama $SO(3)$. Štoviše, s obzirom na to da $SO(3)$ grupe posjeduju značajke Lievih grupa, njihova se struktura uspješno može koristiti za projektiranje integracijskih algoritama koji će operirati izravno na $SO(3)$, koristeći globalnu parametrizaciju velikih rotacija bez singulariteta, odnosno kinematičkih ograničenja ortogonalnosti (kao što je nužno u slučaju upotrebe kvaterniona za globalnu parametrizaciju $SO(3)$ mnogostrukosti).

Slijedeći gornje argumente, više autora predložilo je numeričke algoritme koji operiraju na Lievim grupama i koji pokušavaju u što je moguće većoj mjeri slijediti kinematičku i dinamičku strukturu sustava. U nekim slučajevima takve integracijske procedure polaze od provjerenih, bezuvjetno stabilnih algoritama linearnih zadaća, koji se zatim prilagođavaju za nelinearne slučajeve integriranja na mnogostrukostima. Klasična metoda za integraciju ODJ

na mnogostrukostima predložena je u [18] dok je u [19, 20] za polaznu točku u projektiranju nelinearnih integratora odabrana Newmark metoda. Munthe-Kaas i suradnici [21], inspirirani Runge-Kutta (RK) shemama, razvijaju numerički postupak za integraciju na Lievim grupama, a Marsden i suradnici [22] razvijaju geometrijske integracijske algoritme na Lievim grupama, koji čuvaju simplektičnost i značajke gibanja sustava. Detaljan prikaz numeričkih algoritama integracije diferencijalnih jednadžbi na Lievim grupama može se naći u [23]. U kontekstu primjene geometrijskih integracijskih shema u [24] su upotrijebljeni Grossmanov i Munthe-Kaas (MK) algoritmi za integraciju jednostavnijih nelinearnih zadaća dinamike krutog tijela bez dodatnih kinematičkih ograničenja. Također, u [25-27] se proučava modifikacija implicitnih Runge-Kutta algoritama za rad u nelinearnom režimu i primjena istih na osnovne zadaće dinamike, dok je u radovima [28, 29] fokus stavljen na prilagodbu poopćenih-Alpha metoda za rad na Lievim grupama te upotrebu geometrijskih integratora na zadaće dinamičke simulacije gibanja vozila.

U pogledu očuvanja integrala gibanja, s polazištem u izvornom Störmer-Verlet algoritmu linearnog prostora [10, 30, 31], predložene su dvije konstrukcije algoritama na Lievoj grupi koje omogućavaju algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije slobodno rotirajućeg krutog tijela [2].

U posljednje vrijeme, osim integracijske procedura koje polaze od provjerenih, bezuvjetno stabilnih algoritama linearnih zadaća, sve se više koriste varijacijski integratori za konstruiranje algoritama na Lievoj rotacijskoj grupi. Diskretna varijacijska mehanika i primjena varijacijskih integratora na primjeru slobodno rotirajućeg tijela predstavljena je u radu Mosera i Veselova [32]. Marsden, Pekarsky i Shkoller [33] predstavljaju Euler-Poincareovu jednadžbu pomoću koje razvijaju varijacijski integrator na Lievoj grupi, dok je u [23] prvi puta predstavljena eksplicitna integracijska metoda na Lievoj grupi u kontekstu varijacijskih integratora. Teorijska pozadina i povijesni pregled literature koja se odnosi na varijacijski princip i rješavanje jednadžbi gibanja pomoću varijacijskih integratora mogu se naći u [34].

Osim navedenih metoda integracije rotacija izravno na $SO(3)$ grupama, često se za parametrizaciju rotacija koriste četveroparametarski jedinični kvaternioni (Eulerovi parametri), a kao mogućnost potrebno je navesti i Lievu specijalnu Euklidsku grupu $SE(3)$ [3] koja, osim rotacija, uvodi i translacijske pomake u konfiguracijski prostor krutog tijela. U [6] predstavljena je nova izvorna metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona, kojom se rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela trodimenzijske kinematike krutog tijela.

1.3 Cilj i hipoteza rada

Glavni cilj predloženog istraživanja je prilagodba i primjena novoprojektiranih geometrijskih integracijskih algoritama na numeričke zadaće dinamike letjelica te ocjena njihove pogodnosti za primjenu u okviru numeričkih simulacijskih procedura za izračunavanje dinamičkih odziva zračnih i svemirskih letjelica.

Navedeni glavni cilj istraživanja odražava sljedeću hipotezu istraživanja:
Ocjena prilagođenih geometrijskih integracijskih algoritama pokazat će njihovu sposobnost za stabilno i numerički efikasno rješavanje dinamičkih zadaća vremenske simulacije gibanja zračnih i svemirskih letjelica, kao i upotrebnu vrijednost u usporedbi s klasičnim integracijskim procedurama na vektorskim prostorima.

1.4 Metode istraživanja

Plan istraživanja može se podijeliti u tri faze:
Prva faza istraživanja odnosi se na opisivanje izvoda matematičkih modela odabranih geometrijskih integracijskih algoritama s ciljem utvrđivanja polaznih točaka potrebne prilagodbe. Prvo je opisana novopredložena metoda integracije DAE zadaća na Lievim grupama prostora stanja diskretnih mehaničkih sustava [1], a zatim i nova integracijska metoda na Lievoj grupi rotacije $SO(3)$ koja omogućava očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije rotacije krutog tijela bez vanjske uzbude [2]. Osim navedenih algoritama, opisana je i novopredložena metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona, kojom se rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela pri upotrebi rotacijskih kvaterniona [6].

Druga faza istraživanja odnosi se na prilagodbu i primjenu integracijske metode, projektirane modifikacijom Munthe-Kaas algoritma u smislu mogućnosti rješavanja DAE zadaća na Lievim grupama kakve su karakteristične za diskretne mehaničke sustave s kinematičkim ograničenjima, na dinamičku simulaciju zračne letjelice s rotirajućim krilom (helikopter). Primijenjena geometrijska integracijska metoda ne operira na vektorskom prostoru lokalnih rotacijskih koordinata pojedinih elemenata, već izravno na Lievoj grupi prostora stanja diskretnog mehaničkog sustava [1]. Takvim modeliranjem proces numeričke integracije prirodno slijedi mnogostrukost prostora stanja mehaničkog sustava, modeliranu pomoću izravnog produkta $SO(3)$ grupa rotacija pojedinih elemenata (koje posjeduju značajke Lievih grupa), te domena translacijskih pomaka elemenata. Na temelju tako oblikovane

integracijske metode, sintetizirana je simulacijska procedura prostornog gibanja modela zračne letjelice s rotirajućim krilom. Definiran je model opterećenja i upravljački model takvog helikoptera te dodatne dinamičke sprege i kinematička ograničenja proistekla iz kinematičkih i dinamičkih veza s okolinom.

Uz simulacijski model zračne letjelice s rotirajućim krilom, temeljenog na dinamičkom modelu u prostoru stanja oblikovanog kao Lieva grupa [1], rezultati ove faze istraživanja obuhvaćaju i sintezu dinamičkog modela zračne letjelice s nepomičnim krilom, projektiranog korištenjem novopredložene metode integracija rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona $Sp(1)$ [6]. Predloženom metodom riješen je standardni problem redundantnog matematičkog modela trodimenzijske kinematike krutog tijela, a koji je u svojoj standardnoj formulaciji iziskivao integraciju DAE jednadžbi (kao i numeričku stabilizaciju dodatnog kinematičkog ograničenja uslijed četveroparametarske parametrizacije prostornih rotacija). U okviru primjene navedene metode koriste se jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora u minimalnoj formi, definirane na Lievoj algebri rotacijske grupe $SO(3)$, pri čemu se, nakon što se izračuna lokalni rotacijski vektor za trenutni korak integracije, trenutna orijentacija izravno rekonstruira na $Sp(1)$ grupi kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski prostor rotacijske mnogostrukosti i izbjegavaju kinematički singulariteti lokalne parametrizacije, iako se integracijska procedura temelji na rješavanju triju običnih diferencijalnih jednadžbi.

U kontekstu razvoja geometrijskih simulatora zračnih letjelica, primijenjen je model leta poznatog malog aviona i helikoptera te je ocijenjena stabilnost i efikasnost odabranih rutina u usporedbi s konvencionalnim rješenjima.

Rezultati treće faze istraživanja obuhvaćaju rezultate sinteze dinamičkog modela svemirskog satelita, projektiranog na mnogostrukosti sustava više tijela s kinematičkim ograničenjima i korištenjem integracijskih algoritama koji čuvaju globalne značajke i diferencijalno-geometrijsku strukturu gibanja. Pri numeričkoj integraciji dinamike svemirskih letjelica, zbog složenih uvjeta gibanja (kinematički lanci konstrukcijskog sustava satelita, specifične dinamičke veze s okolinom, održavanje stabilnog položaja, orbitalni manevri izvedeni s najmanjim utroškom goriva, itd.), potrebni su stabilni integracijski algoritmi koji, osim velikih prostornih rotacija, u obzir uzimaju očuvanje integrala gibanja u obliku održanja mehaničke energije i kinetičkog momenta sustava.

Što se suvremenih aplikacija tiče, numeričke simulacije dinamike svemirskih letjelica postale su iznimno važne u projektiranju i optimizaciji satelita, zbog poteškoća kod testiranja i provjere parametara sustava satelita na zemlji prije lansiranja letjelice. U tom je smislu

razvijen veći broj simulacijskih procedura u okviru softverskih paketa od kojih mnogi koriste neoptimirane numeričke integratore, pa dugotrajne simulacije s proširenom vremenskom domenom rezultiraju neadekvatnom točnošću (npr. simulacijski softveri za satelite s reakcijskim rotorom koji se koriste za analizu kvarova postrojenja [35]). Kako tražene značajke s tom svrhom posjeduje novopredloženi implicitni numerički integrator na Lievoj grupi koji čuva prve integrale gibanja [2], navedena implicitna metoda je u fokusu predmetnog istraživanja, ali primijenjena je i ocijenjena i eksplicitna inačica istog algoritma, koja je numerički efikasnija ali omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta sustava [36].

Pri evaluaciji performansi pojedinih procedura, numerički dinamički odziv nelinearnih metoda uspoređen je s odzivom DAE algoritama vektorskih prostora. Na taj je način rezultatima treće faze istraživanja ocijenjena upotrebna vrijednost primijenjenih geometrijskih integracijskih algoritama u usporedbi s klasičnim integracijskim procedurama linearnih prostora, uvriježenih u znanstvenoj zajednici prilikom primjene standardnih računalnih rješavača opisanih dinamičkih zadaća.

Ocjena upotrebne vrijednosti primijenjenih geometrijskih integracijskih algoritama provedena je kroz ocjenu numeričke efikasnosti i stabilnosti svih analiziranih metoda, kao što je provedena i ocjena numeričke točnosti u kontekstu rješavanja ciljanih dinamičkih zadaća.

Numeričke procedure razvijene su u okviru računalnog okruženja *MATLAB* koje se, zbog svoje arhitekture, lako može sprezati s drugim programskim aplikacijama. Osim spomenutih pogodnosti prilikom implementacije (iako spada u niže interpretirane jezike s nužno sporijim izvršavanjem rutina od onih pisanih u višim jezicima), *MATLAB* je izabran zbog razlike u brzini numeričkih izračuna prilikom korištenja petlji koje su sporije u višim programskim jezicima (skriptni jezici - *Python*, *Perl*, jezici za intenzivno i složeno računanje - *C++*, *Fortran*), kao i zbog varijabli koje koristi u obliku matrica na čijem se zapisu temelje primijenjene integracijske metode [37].

1.5 Očekivani znanstveni doprinos i struktura doktorskog rada

U okviru istraživanja koje će biti provedeno ovim doktorskim radom, očekuje se da će prilagodba i primjena novih geometrijskih integracijskih algoritama rezultirati stabilnim računalnim simulacijskim procedurama s numeričkom točnošću pogodnom za pouzdano izračunavanje dinamičkih odziva karakterističnih zračnih i svemirskih letjelica s proširenom vremenskom domenom gibanja.

Doktorski rad podijeljen je u sedam poglavlja uključujući uvod i zaključak. U nastavku slijedi sažeti prikaz doktorskog rada.

U prvom, uvodnom poglavlju doktorskog rada, izložene su: motivacija istraživanja, pregled dosadašnjih istraživanja, cilj i hipoteza rada, metodologija istraživanja, te očekivani znanstveni doprinos.

Drugo poglavlje uvodi pojam konfiguracijskog prostora i konfiguracijske mnogostrukosti. Konfiguracijski prostor je linearni vektorski prostor koji se u slučaju sustava tijela bez nametnutih veza među tijelima, podudara s konfiguracijskom mnogostrukosti. Kada su u sustavu prisutne kinematičke veze, sustav više ne može zauzeti proizvoljni položaj u konfiguracijskom prostoru, već se njegova rješenja nalaze na konfiguracijskoj mnogostrukosti. Na spomenutu konfiguracijsku mnogostrukost može se gledati kao na nelinearnu hiperplohu koja je lokalno definirana kinematičkim ograničenjima u Euklidskom vektorskom prostoru. Na temelju danog opisa konfiguracijskog prostora i mnogostrukosti definirane su i poopćene koordinate kao koordinate na mnogostrukosti. U nastavku poglavlja je pokazano kako jednadžbe dinamike konstrukcijskih sustava sačinjavaju sustav algebarsko-diferencijalnih jednadžbi. Ovisno o tome jesu li jednadžbe ograničenja izražene na razini položaja ili akceleracija, sustav algebarsko-diferencijalnih jednadžbi može biti indeksa jedan ili indeksa tri. Pored osnova o konstrukcijskim sustavima, u drugom poglavlju dane su i matematičke osnove potrebne za razumijevanje mnogostrukosti, vektorskih polja i vektorskih prostora na mnogostrukostima. Također, opisane su i funkcije i krivulje na mnogostrukosti, vlakna i svežnjevi, polja jedan-formi, gradijent, tenzor, komutator kao operacija između vektorskih polja, Lieva derivacija i invarijantnost te Lieve grupe i Lieve algebre u svrhu izražavanja invarijantnosti tenzora. Na kraju poglavlja, gore navedeni matematički entiteti su primijenjeni na dinamiku konstrukcijskih sustava (dinamika na tangentnom svežnju).

U trećem poglavlju detaljno se opisuju prostorne rotacije tijela i specijalna ortogonalna grupa $SO(3)$. Rotacija je opisana kao proces promjene orijentacije tijela, dok je orijentacija stanje tijela. Rotacije se matematički opisuju matricama rotacije koje čine grupu specijalnih ortogonalnih matrica. Također, definirane su i grupe kao matematički entitet sa svojim aksiomima i svojstvima. Kako je $SO(3)$ mnogostrukost sa matematičkom strukturom grupe, ona se može definirati kao Lieva grupa, što omogućava primjenu integracijskih metoda na Lievim grupama. U poglavlju je objašnjena i Lieva algebra, te je opisana i diferencijalna jednadžba na $SO(3)$ grupi čije je rješenje definirano eksponencijalnom mapom. Time je u radu dan potpuni matematički okvir za opis integracijskih metoda za dinamiku konstrukcijskih sustava na Lievoj grupi. S obzirom da je $SO(3)$ mnogostrukost koja može biti lokalno

prikazana u koordinatnom sustavu vektorskog prostora (npr. parametrizacija Eulerovim kutovima), dan je detaljan opis postupka parametrizacije i integracije na *SO*(3) grupi. Prilikom integracije u svakoj točki *SO*(3) grupe uvodi se lokalna parametrizacija uz pomoć inverzne diferencijalne eksponencijalne mape kojom se diferencijalne jednadžbe sa grupe prebacuju na Lievu algebru koja je linearan prostor. Na algebri se tada provodi integracija pomoću linearnih integracijskih metoda (npr. Eulerova i Runge-Kutta metoda), a rješenje se vraća na grupu pomoću eksponencijalne mape. Na taj način dobiva se nova točka na *SO*(3) grupi koja predstavlja orijentaciju tijela u trenutnom integracijskom koraku.

U četvrtom poglavlju opisan je izvod matematičkog modela novopredložene integracijske metode, projektirane modifikacijom Munthe-Kaas algoritma u smislu mogućnosti rješavanja DAE zadaća na Lievim grupama kakve su karakteristične za diskretne mehaničke sustave s kinematičkim ograničenjima [1]. Spomenuta integracijska metoda prilagođena je i primijenjena na dinamičku simulaciju zračne letjelice s rotirajućim krilom. Primijenjena geometrijska integracijska metoda ne operira na vektorskom prostoru lokalnih rotacijskih koordinata, već izravno na Lievoj grupi prostora stanja diskretnog mehaničkog sustava [1]. To omogućava da proces numeričke integracije prirodno slijedi mnogostrukost prostora stanja mehaničkog sustava, modeliranu pomoću izravnog produkta *SO*(3) grupa rotacija pojedinih elemenata, te domena translacijskih pomaka elemenata. Na temelju tako oblikovane integracijske metode, sintetizirana je simulacijska procedura prostornog gibanja modela zračne letjelice s rotirajućim krilom (helikopter). Definiran je model opterećenja i upravljački model takvog zrakoplova te dodatne dinamičke sprege i kinematička ograničenja proistekla iz kinematičkih i dinamičkih veza s okolinom.

Peto poglavlje daje opis izvoda matematičkog modela novopredložene metode integracija rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona *Sp*(1) [6]. Rezultati u ovom poglavlju obuhvaćaju sintezu dinamičkog modela zračne letjelice s nepomičnim krilom. Opisana metoda rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela trodimenzijske kinematike krutog tijela, a koji je u svojoj standardnoj formulaciji iziskivao integraciju DAE jednadžbi. Navedena metoda koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora u minimalnoj formi (definirane na Lievoj algebri rotacijske grupe *SO*(3)) pri čemu se, nakon što se izračuna lokalni rotacijski vektor za trenutni korak integracije, trenutna orijentacija izravno rekonstruira na *Sp*(1) grupi kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski prostor rotacijske mnogostrukosti i izbjegavaju kinematički singulariteti lokalne parametrizacije.

U šestom poglavlju opisan je izvod matematičkog modela novih integracijskih metoda na Lievoj grupi rotacije $SO(3)$ koje omogućavaju očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije rotacije krutog tijela bez vanjske uzbude [36]. Ovo poglavlje obuhvaća rezultate sinteze dinamičkog modela svemirskog satelita, projektiranog na mnogostrukosti korištenjem integracijskih algoritama koji čuvaju globalne značajke i diferencijalno-geometrijsku strukturu gibanja. Implicitna metoda je u fokusu ovog dijela rada, ali primijenjena je i ocijenjena i eksplicitna inačica istog algoritma, koja je numerički efikasnija ali omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta sustava [36].

U sedmom, posljednjem poglavlje, na temelju svih ostvarenih rezultata i zapažanja sažeti su zaključci i dan je kritički osvrt na rezultate zajedno sa smjernicama budućeg istraživanja.

2

MNOGOSTRUKOSTI

U smislu ostvarenja zacrtanih ciljeva ovog istraživanja, odabrani su i prilagođeni geometrijski numerički algoritmi koji ne operiraju u linearnim vektorskim prostorima već su definirani na mnogostrukostima posebnih karakteristika. U ovom poglavlju dane su matematičke osnove potrebne za razumijevanje mnogostrukosti, vektorskih polja i vektorskih prostora na mnogostrukostima. Također, opisane su funkcije i krivulje na mnogostrukosti, vlakna i svežnjevi, polja jedan-formi, gradijent, tenzor, komutator kao operacija između vektorskih polja, Lieva derivacija i invarijantnost, te Lieve grupe i Lieve algebre.

2.1 Uvodni pojmovi

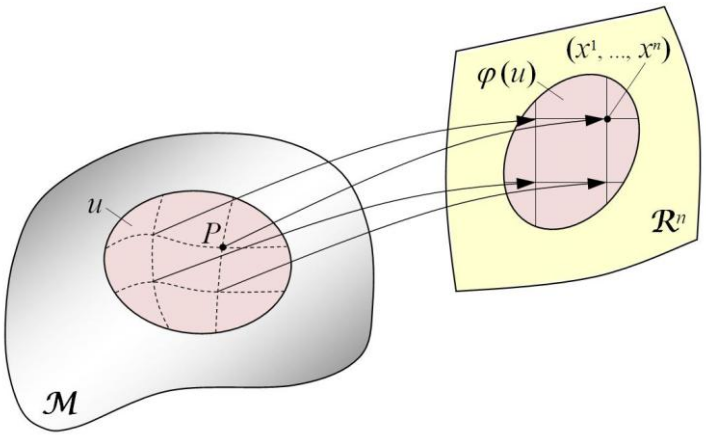
2.1.1 Definicija i svojstva mnogostrukosti

Pojam mnogostrukosti je izuzetno važan u diferencijalnoj geometriji jer omogućava izražavanje i shvaćanje složenih struktura u okviru dobro poznatih svojstava jednostavnijih prostora.

Mnogostrukost se može promatrati kao *n*-dimenzionalna nelinearna hiperploha[1] koja je lokalno definirana kinematičkim ograničenjima u Euklidskom vektorskom prostoru $\mathcal{R}^p$, čija je dimenzija $p \geq n$. Također, može se reći da mnogostrukost predstavlja matematički entitet koji lokalno sliči Euklidskom vektorskom prostoru [38], što znači da je lokalna topologija mnogostrukosti jednaka topologiji vektorskog prostora.

1 *Hiperploha - podmnogostrukost dimenzije za jedan manje od dimenzije mnogostrukosti*

Skup točaka $\mathcal{M}$ je mnogostrukost ukoliko se otvorena okolina oko bilo koje točke može preslikavati na injektivan[2] (preslikavanje jedan na jedan '1-1') i neprekidan način na otvorenu okolinu u $\mathcal{R}^n$. Inverzno preslikavanje također mora biti neprekidno. Svako takvo preslikavanje se naziva lokalnom kartom ili lokalnim koordinatnim sustavom. Spomenuta neprekidnost funkcije među topološkim prostorima javlja se u slučaju kada je inverzna slika (praslika) svakog otvorenog skupa opet otvoreni skup.



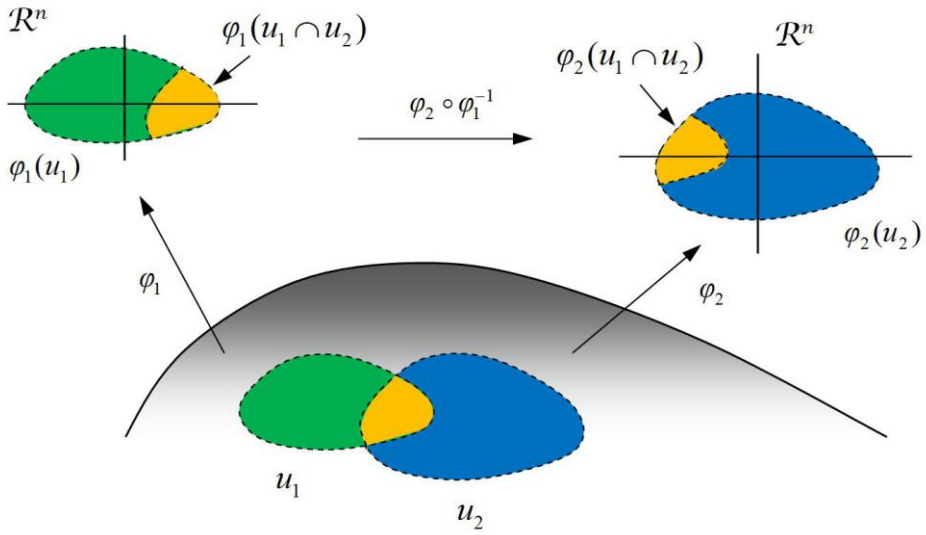
Slika 2.1: Preslikavanje φ slike u na otvorenu okolinu u $\mathcal{R}^n$ [39].

Spomenuti matematički pojmovi dovode do pojma homeomorfizma koji predstavlja neprekidnu funkciju među topološkim prostorima, koja je injekcija i to takva da je inverz također neprekidna funkcija. U duhu navedenih pojmova, mnogostrukost se može definirati kao topološki prostor lokalno homeomorfan topološkom vektorskom prostoru. Koordinatna karta na topološkom prostoru je homeomorfizam sa otvorenog podskupa topološkog prostora na otvoreni podskup Euklidskog prostora.

Točka P iz $\mathcal{M}$ je preslikavanjem povezana s *n*-torkom brojeva $(x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P))$ koje se nazivaju koordinatama točke P (vidi sliku 2.1). Upravo spomenute koordinate definiraju mnogostrukost i skup točaka jest mnogostrukost ukoliko se u okolini svake točke može definirati *n* nezavisnih koordinata. Okolina neke točke ne pokriva cijeli $\mathcal{M}$, pa je očito da postoji više okolina i to svaka sa svojim preslikavanjem, tj. svaka sa svojim koordinatama. Par koji sačinjavaju okolina i njeno preslikavanje naziva se karta. Sljedeće važno svojstvo mnogostrukosti jest svojstvo kompatibilnosti koje proizlazi iz činjenice da će neke otvorene okoline imati (neprazne) presjeke (preklapanja). Kad se dvije karte preklapaju na

2 *Injekcija - elementi iz domene se preslikavaju u međusobno različite elemente iz kodomene (tj. funkcija ne 'lijepi' različite elemente u* isti*)*

mnogostrukosti one definiraju preslikavanje iz $\mathcal{R}^n$ na same sebe, te time zadovoljavaju svojstvo kompatibilnosti (slika 2.2).



Slika 2.2: Preslikavanje okoline u_1 i u_2, koje na $\mathcal{M}$ imaju presjek, na otvorenu okolinu $\mathcal{R}^n$.

Atlas $\mathcal{A}$ je skup svih kompatibilnih karata, tj. skup *n*-dimenzionalnih karata na $\mathcal{M}$ sa sljedećim svojstvima [38]:

1) Domene karata skupa $\mathcal{A}$ pokrivaju $\mathcal{M}$

$$\bigcup_{(u,\varphi)\in\mathcal{A}} u = \mathcal{M}.$$

2) Ako su $(u_1,\varphi_1),(u_2,\varphi_2)\in\mathcal{A}$ takve karte da je $u_1 \cap u_2 \neq 0$, onda je

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}:\ \varphi_1(u_1 \cap u_2) \to \varphi_2(u_1 \cap u_2)$$

C^∞ - preslikavanje. Budući da je φ koordinatni homeomorfizam sa u na otvoreni podskup od $\mathcal{R}^n$, a φ i φ^{-1} glatke funkcije, φ je isto tako i difeomorfizam.

Dvije okoline u_1 i u_2 na $\mathcal{M}$ imaju presjek, te se svaka od tih okolina preslikava s φ_1 i φ_2 na neki otvoreni skup u $\mathcal{R}^n$. Presjek otvorenih okolina u_1 i u_2 je opet otvorena okolina, na kojoj postoje dva različita koordinatna sustava. Iz gore navedenih svojstava, očito je da postoji veza između tih preslikavanja. Da bi se pronašla veza, potrebno je izabrati točku

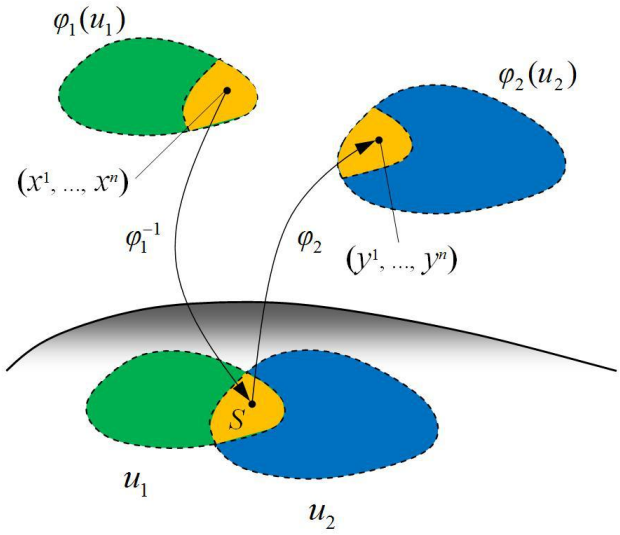
$(x^1,..., x^n)$ u slici preslikavanja $\varphi_1(u_1 \cap u_2)$ i pomoću inverznog preslikavanja vratiti se u 'jedinstvenu' točku S na presjeku $u_1 \cap u_2$. Isto tako, korištenjem preslikavanja φ_2, preslikava se točka S na točku $(y^1,..., y^n)$ u slici preslikavanja $\varphi_2(u_1 \cap u_2)$ (vidi sliku 2.3). Iz toga proizlazi spomenuto preslikavanje

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n, \tag{2.1}$$

tj. koordinatna transformacija

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, x^2,..., x^n), \\ y^2 &= y^2(x^1, x^2,..., x^n), \\ &\vdots \\ y^n &= y^n(x^1, x^2,..., x^n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

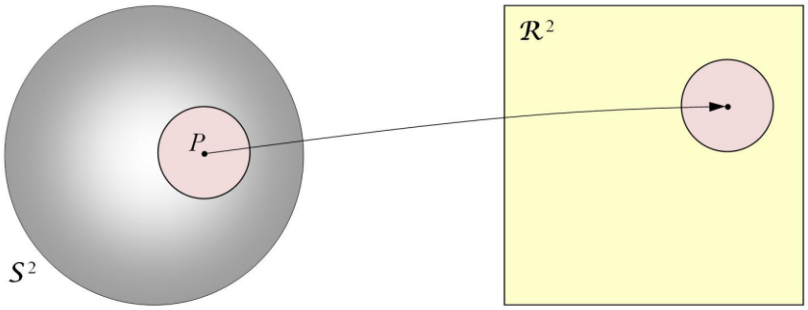
Ako postoje parcijalne derivacije reda k ili manje, svih funkcija transformacije, tada su preslikavanja, tj. karte C^k - vezane. Ako je skup svih karata $\mathcal{A}$ (atlas) takav da je svaka točka mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u barem jednoj otvorenoj okolini, te da je svaka karta C^k - vezana sa svakom kartom s kojom ima presjek, tada se mnogostrukost naziva C^k - mnogostrukost.



Slika 2.3: Uvećani detalj slike 2.2 koji prikazuje vezu između preslikavanja.

Ako se dva ili više atlasa mogu objediniti tako da rezultat bude glatki atlas (može se dogoditi da objedinjavanje dva glatka atlasa ne rezultira glatkim atlasom), skup takvih atlasa naziva se skupom kompatibilnih atlasa. Relacija kompatibilnosti je ujedno i relacija ekvivalencije, tako da se objedinjavanjem svih glatkih atlasa može dobiti maksimalni glatki atlas. Uz spomenuti maksimalno glatki atlas, mnogostrukost se naziva glatkom ili diferencijabilnom mnogostrukošću. Može se reći da je topološka mnogostrukost zajedno sa klasom ekvivalencije atlasa, diferencijabilna mnogostrukost [39]. U ovom radu pod pojmom diferencijabilna (glatka) mnogostrukost, ili samo mnogostrukost, podrazumijevat će se difrenecijabilna mnogostrukost klase C^{∞}. Matematičari često koriste diferencijalnu mnogostrukost kao zamjenu za riječ 'prostor'.

U literaturi [39] navedeno je nekoliko primjera mnogostrukosti, a prvi među njima je sfera S^2 koja predstavlja skup točaka u $\mathcal{R}^3$ za koje vrijedi da je $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ - konstantno. Svaka točka na sferi ima malu okolinu koja se može 1-1 preslikavati na disk u $\mathcal{R}^2$ (slika 2.4).



Slika 2.4: Preslikavanje 1-1 okoline točke *P* na disk u $\mathcal{R}^2$ [39].

Kao sljedeći primjer navodi se skup rotacija krutog tijela koji predstavlja trodimenzionalnu mnogostrukost koja se može (kontinuirano) parametrizirati s tri Eulerova kuta. Spomenuti skup rotacija čini Lievu *SO*(3) grupu koja se koristi kod definiranja odabranih numeričkih algoritama primijenjenih u ovome istraživanju. Općenito se može reći da je Lieva grupa mnogostrukost klase C^{∞} koja posjeduje također i matematičku strukturu grupe. Operator na grupi omogućava C^{∞} preslikavanje mnogostrukosti na samu sebe čime je zadovoljen uvjet kompatibilnosti između strukture grupe i strukture mnogostrukosti.

Sljedeći primjer mnogostrukosti je fazni prostor[3] N čestica koji predstavlja $6N$-dimenzionalnu mnogostrukost parametriziranu položajem i brzinom čestice.

Osim spomenutih primjera navedeni je i primjer diferencijalne jednadžbe i vektorskog prostora. Ako zavisna varijabla y predstavlja funkciju nezavisne varijable x, tada set točaka (x, y) definira mnogostrukost, a rješenja jednadžbe krivulju na toj mnogostrukosti. Vektorski prostor $\mathcal{V}$ nad poljem realnih brojeva isto tako predstavlja mnogostrukost. Ako je $\mathcal{V}$ n-dimenzionalan i ima bazu $\mathbf{e}_i, i = 1,...,n$, svaki se vektor u $\mathcal{V}$ može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i$ koja predstavlja preslikavanje iz $\mathcal{V}$ na $\mathcal{R}^n$ i to za sve točke $\mathbf{x}$ u $\mathcal{V}$. Budući da su mnogostrukosti, $\mathcal{V}$ i $\mathcal{R}^n$ su identični, tj. kao grupe su izomorfne.

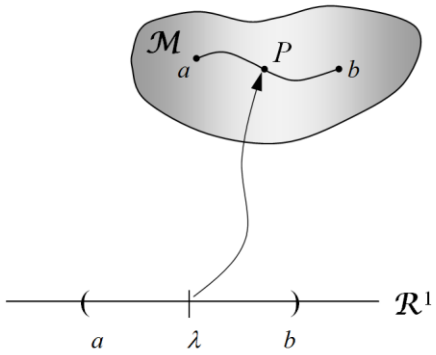
Iz svih predstavljenih primjera može se zaključiti da se dvije mnogostrukosti iste klase C^k i iste dimenzije n ne mogu lokalno razlikovati jer su lokalno iste kao $\mathcal{R}^n$ (to ne vrijedi globalno).

2.1.2 Funkcije i krivulje na mnogostrukosti

Funkcija na $\mathcal{M}$ predstavlja preslikavanje $f : \mathcal{M} \to \mathcal{R}^1$ koje svakoj točki P u $\mathcal{M}$ pridružuje realni broj $f(P)$. Kod preslikavanja $\mathcal{M}$ na $\mathcal{R}^n$, $g : \mathcal{M} \to \mathcal{R}^n$, funkcija f postaje funkcija na $\mathcal{R}^n$, $f(\mathrm{x}^1(P),..., \mathrm{x}^n(P))$. Ako je ta funkcija diferencijabilna na $\mathcal{R}^n$, onda je f diferencijabilna na $\mathcal{M}$.

Krivulju na mnogostrukosti može se zamišljati kao kontinuirani niz točaka na $\mathcal{M}$. Preciznije, krivulju se može definirati kao diferencijabilno preslikavanje s otvorenog skupa u $\mathcal{R}^1$ na $\mathcal{M}$, odnosno točki $\lambda \in \mathcal{R}^1$ pridružuje se točka P, tj. slika od λ na $\mathcal{M}$ (vidi sliku 2.5).

3 *Fazni prostor - zamišljeni prostor čije se dimenzije sastoje od svih koordinata položaja, svih koordinata brzine i svih čestica sustava*



Slika 2.5: Diferencijabilno preslikavanje s otvorenog skupa u $\mathcal{R}^1$ na $\mathcal{M}$ (točki $\lambda \in \mathcal{R}^1$ pridružuje se točka P)[39].

Slika otvorenog skupa u $\mathcal{R}^1$ daje krivulju na $\mathcal{M}$ u obliku kontinuiranog niza točaka što predstavlja parametrizaciju krivulje s λ. Valja napomenuti da su dvije krivulje različite, pa čak i kad im je slika na $\mathcal{M}$ ista, ako su parametrizirane različitim parametrima.

U nastavku rada nećemo više koristiti preslikavanja s $\mathcal{M}$ na $\mathcal{R}^n$ već ćemo koristiti pretpostavku da na mnogostrukosti možemo definirati koordinate i lokalno invertibilni diferencijabilni skup jednadžbi koji će predstavljati koordinatnu transformaciju.

2.1.3 Vektori i vektorska polja

Nakon definicije krivulje na mnogostrukosti slijedi njezino detaljno razmatranje kada ona prolazi točkom P na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ te je opisana jednadžbom $x^i = x^i(\lambda), i = 1,...,n$. Osim jednadžbe krivulje potrebno je razmotriti i diferencijabilnu funkciju $f(x^1,...,x^n)$ na $\mathcal{M}$ čije vrijednosti u točkama daje funkcija (može se izvrijedniti u svakoj točki funkcije)

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda),...,x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)). \tag{2.3}$$

Funkcija g se može diferencirati korištenjem lančanog pravila

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2.4}$$

a dobiveni izraz osim za funkciju g može vrijediti za bilo koju funkciju, pa poopćeni izraz ima oblik

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.5}$$

gdje $dx^i/d\lambda$ predstavlja komponente vektora tangentnog na krivulju $x^i(\lambda)$ što je u skladu s interpretacijom vektora na Euklidskom prostoru. Svaka krivulja definirana je jedinstvenim parametrom λ, pa za svaku krivulju postoji i jedinstveni tangentni vektor (obratno ne vrijedi). Jedan vektor tangira beskonačno mnogo krivulja koje prolaze točkom P, a osim toga, različite krivulje mogu imati iste slike na $\mathcal{M}$ pa samim time i iste tangente. Stoga se može reći da svaki vektor definira cijelu klasu ekvivalencije različitih krivulja koje prolaze točkom P na $\mathcal{M}$.

Udaljenost i koncept pomaka duž puta koji se uobičajeno javlja kod definiranja vektora na Euklidskom prostoru zamijenjen je konceptom 'infinitezimalnih okolina' koji se javlja u definiciji mnogostrukosti, a čiju iskoristivost u definiranju vektora treba provjeriti. Pretpostavka je da postoje dva realna broja a i b te dvije krivulje u točki P, $x^i(\lambda)$ i $x^i(\mu)$. Tada izraz (2.4) ima oblik

$$a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu} \right)\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{2.6}$$

gdje su $(adx^i/d\lambda + adx^i/d\mu)$ komponente novog vektora koji tangira neku od krivulja kroz P. Mora postojati krivulja kroz P parametrizirana s parametrom ϕ takva da je

$$\frac{d}{d\phi} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu} \right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.7}$$

gdje vektori $\partial/\partial x^i$ čine bazu vektorskog prostora predstavljenog s derivacijama duž krivulje. Iz svega toga proizlazi da između prostora svih tangentnih vektora u točki P i prostora derivacija duž krivulje kroz P postoji 1-1 preslikavanje. Potrebno je naglasiti da samo vektore u istoj točki možemo zbrajati i da vektori, tj. tangente ne leže u $\mathcal{M}$ već u tangentnom prostoru od $\mathcal{M}$ u točki P, označenim s $T_P\mathcal{M}$. Tangentni vektor je vektor u P od $\mathcal{M}$, a vektori u svim točkama od $\mathcal{M}$ čine vektorsko polje.

Prostor $T_P\mathcal{M}$ je vektorski prostor iste dimenzije *n* kao i pripadajuća mnogostrukost. Bazu vektorskog prostora čini bilo koji skup od *n* linearno nezavisnih vektora u $T_P\mathcal{M}$. Odabirom

baze od $T_P\mathcal{M}$ u svakoj točki P na mnogostrukosti dobiva se baza vektorskog polja. Koordinatni sustav x^i u okolini u oko točke P definira koordinatnu bazu $\partial/\partial x^i$ za sve točke u toj okolini. Izraz vektora $\mathbf{v}$ u točki P razvijenog po komponentama u proizvoljnoj bazi ima oblik

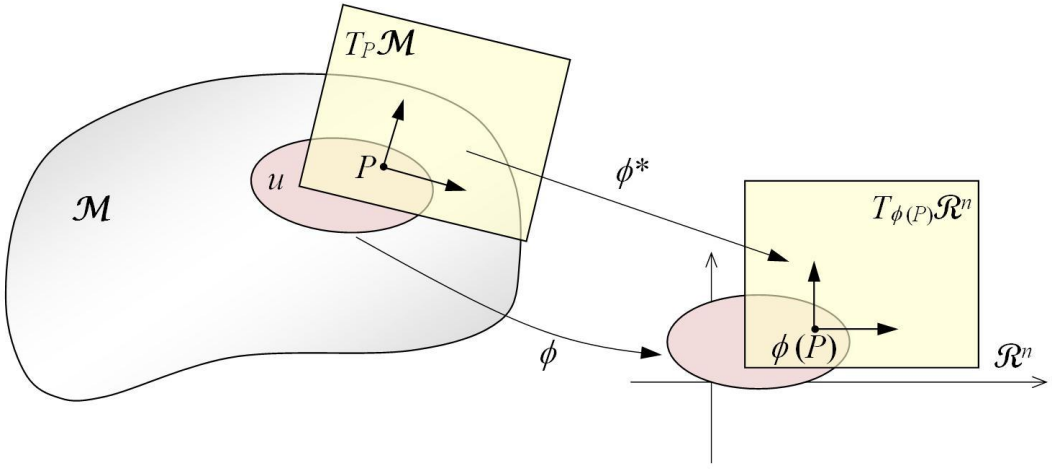
$$\mathbf{v} = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i v^{ij} \mathbf{e}_j , \tag{2.8}$$

gdje su v^i i v^{ij} komponente vektora $\mathbf{v}$ u bazi $\partial/\partial x^i$. Ako se vektor $\mathbf{v}$ i razne baze promatraju kao vektorska polja onda su komponente vektora funkcije na $\mathcal{M}$ koje ako su diferencijabilne i vektorsko polje je diferencijabilno. Može se pokazati da koordinate daju 1-1 preslikavanje (čine koordinatni sustav) iz okoline u na otvorenu okolinu $\mathcal{R}^n$ ako i samo ako $\partial/\partial x^i$ čine bazu vektorskog prostora u svakoj točki u u (vidi sliku 2.6). Uz pretpostavku dobrog koordinatnog sustava na u, preslikavanje na u može se zapisati kao

$$y^j = y^j(x^1, x^2, ..., x^n),\ j = 1, ..., n. \tag{2.9}$$

Preslikavanje ima inverz u u ako i samo ako matrica $\partial y^i / \partial x^i$ ima determinantu različitu od nule

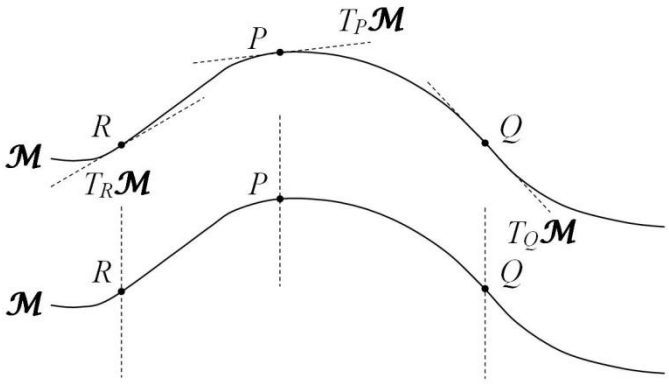
$$J = \frac{\partial(y^1, ..., y^n)}{\partial(x^1, ..., x^n)} \neq 0. \tag{2.10}$$



Slika 2.6: Preslikavanje 1-1 iz okoline u na otvorenu okolinu $\mathcal{R}^n$.

2.1.4 Vlakna i svežnjevi

Posebno je zanimljiva činjenica da se objedinjavanjem mnogostrukosti $\mathcal{M}$ sa svim njezinim tangentnim prostorima $T_P\mathcal{M}$ opet dobiva mnogostrukost. Zbog jednostavnosti, kao primjer u literaturi [39] koristi se slučaj kada je $\mathcal{M}$ krivulja. Svakoj točki krivulje može se pridružiti samo jedan tangentni vektor i jedna točka na $\mathcal{M}$. Na slici 2.7 prikazana je jednodimenzionalna mnogostrukost (krivulja) s nekim njezinim tangentnim prostorima. Kako bi se izbjegli lažni presjeci između tangentnih prostora i krivo shvaćanje tangentnih svežnjeva, mnogostrukost je prikazana u dvije inačice. Druga inačica slike 2.7 predstavlja bolji način prikaza tangentnih prostora kao međusobno paralelnih (ne sijeku se) ali ne prikazuje činjenicu da je svaki $T_P\mathcal{M}$ tangentan na krivulju.



Slika 2.7: Jednodimenzionalna mnogostrukost sa nekim njezinim tangentnim prostorima [39].

Svakoj točki na slici može se pridružiti samo jedan tangentni vektor i samo jedna točka na $\mathcal{M}$. Na taj je način definirana nova dvodimenzionalna mnogostrukost $T\mathcal{M}$ koja se naziva svežanj (engl. *fiber bundle*) i sastoji se od vlakana (engl. *fibers*) tj. vektorskih prostora $T_P\mathcal{M}$ u svakoj točki P. Moguće je pokazati da je $T\mathcal{M}$ dvodimenzionalna mnogostrukost i to na način da se pretpostavi da na $\mathcal{M}$ postoje koordinate x, a na tangentnim prostorima koordinate y nad dijelom $a < x < b$ od $\mathcal{M}$. Bilo koji od tangentnih vektora $\mathbf{v}$ možemo napisati kao $\mathbf{v} = y\partial/\partial x$, pa y u bazi $\partial/\partial x$ predstavlja koordinatu na $T_P\mathcal{M}$. Budući da svako vlakno ima fiksiranu vrijednost x, koordinate (x, y) predstavljaju jedan vektor tangentan na jednu točku. Svaka točka svežnja leži u ovako definiranoj okolini što dokazuje da je $T\mathcal{M}$ dvodimenzionalna mnogostrukost. Opisani svežanj koji se sastoji od mnogostrukosti i

njezinih tangentnih prostora naziva se tangentni svežanj (engl. *tangent bundle*). Ukoliko je $\mathcal{M}$ *n*-dimenzionalna mnogostrukost, $T\mathcal{M}$ je dimenzije 2*n*. Svežanj dimenzije *m*+*n* sastoji se od mnogostrukosti $\mathcal{M}$ dimenzije *m* i vlakna pridruženog svakoj točki od $\mathcal{M}$ dimenzije *n*. Na taj način definirana mnogostrukost omogućava preslikavanje sa svežnja na mnogostrukost koja svakoj točki vlakna pridružuje točku na mnogostrukosti. Nadalje, ako postoji neko vektorsko polje na mnogostrukosti znači da je u svakoj točki od $\mathcal{M}$ definiran vektor u $T\mathcal{M}$, odnosno postoji preslikavanje iz $\mathcal{M}$ na $T\mathcal{M}$.

Postavlja se pitanje zbog čega su svežnjevi toliko značajni. U prethodnom razmatranju, svežnjevi su definirani kao produktni prostor (engl. *product space*). Produktni prostor označava $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ prostor. Ukoliko su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ mnogostrukosti, Cartesijev produkt $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ je isto tako mnogostrukost. Tangentna mnogostrukost $T\mathcal{M}$ je lokalno produktni prostor (sve je definirano u okolini u točke P), a to svojstvo ima svaki svežanj i kao takav on je lokalno trivijalan. Općenito, svojstvo trivijalnosti ne vrijedi globalno iz dva razloga. Prvi od njih je netrivijalna globalna topologija osnovne mnogostrukosti. Kao primjer može se razmotriti svežanj $T\mathcal{S}^2$ s kojeg bi se u slučaju da je globalno trivijalan moglo definirati 1-1 preslikavanje na $\mathcal{S}^2\times\mathcal{R}^2$. Inverz difeomorfizma daje presjek na $T\mathcal{S}^2$, tj. vektorsko polje na $\mathcal{S}^2$ ne iščezava [38]. Tu tvrdnju pobija teorem o fiksnoj točki koji tvrdi da svaki difeomorfizam s $\mathcal{S}^2$ na samu sebe ostavlja barem jednu točku preslikavanja fiksnom, te stoga ne postoji $\mathcal{C}^\infty$ vektorsko polje. Kao drugi razlog spominje se mogućnost korištenja netrivijalnog svežanja na osnovnoj mnogostrukosti trivijalne globalne topologije. Primjer toga je globalno netrivijalan svežanj $T\mathcal{S}^1$ geometrijski interpretiran kao plašt cilindra razrezan duž jednog vlakna kojem je jedan kraj zarotirani i čini Moebiusovu traku[4], te kao takav nema globalno definirani presjek.

Zadnji primjer pokazuje da svežanj nije definiran samo definicijom osnovne mnogostrukosti i jednog vlakna, već je potrebno definirati i strukturnu grupu.

Valja spomenuti, vektorsko polje je pravilo koje daje po jedan vektor u svakoj točki od $\mathcal{M}$. Budući da svaka točka nad sobom ima svoj tangentni vektorski prostor, vektorsko polje odabire jedan tangentni vektor u svakoj točki od $\mathcal{M}$. Isto je i sa krivuljom koja u svakoj svojoj točki ima tangentni vektor.

Ukoliko je zadano vektorsko polje, postavlja se pitanje je li moguće krenuti od neke točke P i pronaći krivulju čiji su tangentni vektori upravo vektori vektorskog polja, za sve točke

4 *Moebiusova traka - lokalno dvodimenzionalna ploha (npr. površina Zemljine kugle)*

krivulje. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan i ta se krivulja naziva integralna krivulja vektorskog prostora. Dokaz za gore navedeni navod je dokaz postojanja jedinstvenog rješenja obične diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Kako kroz svaku točku od $\mathcal{M}$ prolazi jedna integralna krivulja, one ispunjavaju cijeli $\mathcal{M}$ i nikada se međusobno ne sijeku. Ako je $\mathcal{M}$ trodimenzionalna mnogostrukost, tada za svako vektorsko polje na $\mathcal{M}$ postoji dvodimenzionalna familija integralnih krivulja koja pokriva cijeli $\mathcal{M}$ (takav skup krivulja naziva se kongruencija (engl. *congruence*)).

Uz pretpostavku postojanja analitičke mnogostrukosti i vektorskih polja $\mathbf{y} = d/d\lambda$ u obliku vrijednosti koordinata $x^i(\lambda)$ točaka duž integralne krivulje analitičke funkcije od λ, koordinate dviju točaka s parametrima λ_0 i $\lambda_0 + \varepsilon$ povezane su Taylorovim redom u obliku [39]

$$\begin{aligned} x^i(\lambda_0+\varepsilon) &= x^i(\lambda_0) + \varepsilon\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}\right)_{\lambda_0} + \ldots = \\ &= \left(1+\varepsilon\frac{d}{d\lambda}+\frac{1}{2!}\varepsilon^2\frac{d^2}{d\lambda^2}+\ldots\right)x_i \Big|_{\lambda_0} = \exp\left[\varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right]\Big|_{\lambda_0}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

gdje operator $\varepsilon\, d/d\lambda$ daje infinitezimalni pomak duž integralne krivulje, a eksponencijalna funkcija operatora daje konačni pomak. Ovaj način zapisivanja diferencijalnog operatora vrlo je čest u teoriji grupa.

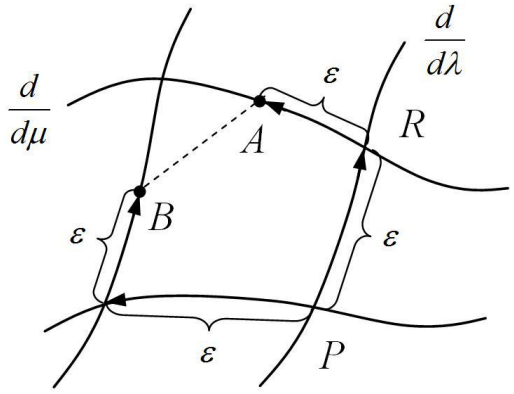
Do sada se koristila koordinatna baza $\partial/\partial x^i$ za vektorska polja ali i bilo koji skup linearno nezavisnih vektorskih polja čini bazu od kojih se ne mogu svi definirati korištenjem koordinatnog sustava. Razlog tome su operatori $\partial/\partial x^i$ i $\partial/\partial x^j$ koji komutiraju za svaki *i* i *j* ali općenito dva vektorska polja $\mathbf{v} = d/d\lambda$ i $\mathbf{w} = d/d\mu$ ne komutiraju

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda} &= \sum_{i,j} v^i\frac{\partial}{\partial x^i}w^j\frac{\partial}{\partial x^j} - w^j\frac{\partial}{\partial x^j}v^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \\ = \sum_{i,j} v^i w^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &+ \sum_{i,j} v^i\frac{\partial w^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - w^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i,j}\left(v^i\frac{\partial w^j}{\partial x^i} - w^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Proizlazi da je komutator [39]

$$\left[\frac{d}{d\lambda},\frac{d}{d\mu}\right]=\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}-\frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda}, \tag{2.13}$$

vektorsko polje čije komponente ne iščezavaju i takva baza se naziva nekoordinatnom bazom. Razliku između koordinatne i nekoordinatne baze može se primijetiti samo promatranjem nekog područja na $\mathcal{M}$, a ne samo točke, budući da ona ovisi ne samo o njihovoj vrijednosti u točki veći i o derivaciji komponenata vektora. Komutator (2.13) se naziva Lievom zagradom. Na slici 2.8 je prikazana geometrijska interpretacija Lieve zagrade.



Slika 2.8: Geometrijska interpretacija Lieve zagrade [39].

Postavlja se pitanje što nam, geometrijski gledano, predstavlja Lieva zagrada. Da bi to pokazali najjednostavnije je iskoristiti eksponencijalni zapis operatora. Kretanje iz točke P duž krivulje vektorskog polja $\mathbf{v}=d/d\lambda$ može se izraziti u obliku

$$x^i(P+\varepsilon)=x^i(R)=\exp\left[\varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right]x^i\ \Big|_P,$$

a kretanje duž integralne krivulje polja $\mathbf{w}=d/d\mu$ do točke A u obliku

$$x^i(A)=\left[\varepsilon\frac{d}{d\mu}\right]\exp\left[\varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right]x^i\ \Big|_P.$$

Na isti način je potrebno izraziti i put od P do točke B

$$x^i(B) = \left[\varepsilon \frac{d}{d\lambda}\right] \exp\left[\varepsilon \frac{d}{d\mu}\right] x^i \Big|_P ,$$

što omogućava da se razlika koordinata $x^i(A)$ i $x^i(B)$ izrazi u obliku

$$x^i(A) - x^i(B) = \left[e^{\varepsilon d/d\lambda}, e^{\varepsilon d/d\mu}\right] x^i \Big|_P ,$$

koji predstavlja komutator operatora i koji raspisan u Taylorov red daje

$$x^i(A) - x^i(B) = e^2 \left[\mathbf{v}, \mathbf{w}\right] x^i \Big|_P + \mathcal{O}(e^3),$$

što predstavlja *i*-tu komponentu Lieve zagrade.

Lieva algebra koju ćemo kasnije detaljnije opisati, u području u od $\mathcal{M}$ predstavlja skup vektorskih polja na u koji čini vektorski prostor s obzirom na zbrajanje, te koji je zatvoren s obzirom na Lievu zagradu (Lieva zagrada od bilo koja dva polja vektorskog skupa opet daje polje u skupu). Skup svih C^∞ vektorskih polja na u čini Lievu algebru, ali nisu isključeni ni manji skupovi polja koji također tvore Lievu algebru, a obično su posljedica invarijantnosti mnogostrukosti.

Iz dosadašnjeg razmatranja očito je da linearno nezavisna vektorska polja, da bi predstavljala koordinatnu bazu, nužno moraju međusobno komutirati, a jednostavno se može pokazati da to nije samo nužan već i dovoljan uvjet.

Možemo zaključiti da ukoliko imamo *n* linearno nezavisnih vektorskih polja, koja međusobno komutiraju u nekoj otvorenoj okolini u od $\mathcal{M}$, tada ona predstavljaju koordinatnu vektorsku bazu koordinatnog sustava izraženog pomoću proizvoljnog koordinatnog sustava oko proizvoljne točke P u u.

2.1.5 Polja jedan-formi, gradijent i tenzor

Jedan-forma na prostoru $T_P\mathcal{M}$ svih tangentnih vektora u točki P definirana je kao linearna funkcija vektora čija je vrijednost realan broj. Jedan-forma u točki P zadovoljava sve aksiome vektorskog prostora koji se naziva dualnim vektorskim prostorom od $T_P\mathcal{M}$ i označava se s $T_P^*\mathcal{M}$. Glavni razlog zbog kojeg se taj prostor naziva dualnim jest što se i

vektor može shvatiti kao linearnu funkciju jedan-formi, tj. vektori i jedan-forme su međusobno dualni [39].

Polje jedan-formi daje jedan-formu u svakoj točki mnogostrukosti što proizlazi iz analogije s vektorskim poljem. Pravilo za zbrajanje i množenje formi proširuje se i na polje formi. Što se tiče diferencijabilnosti formi ona se definira pomoću diferencijabilnosti funkcija i vektorskih polja. Kao i u slučaju vektorskih polja definira se svežanj koji se u ovom slučaju naziva kotangentnim svežnjem $T^*\mathcal{M}$, gdje je $\mathcal{M}$ baza, a $T_P^*\mathcal{M}$ vlakno nad točkom P. Presjeci kotangentnog svežnja predstavljaju polja jedan-formi. Za nas važan primjer polja jedan-formi je gradijent funkcije f koji označavamo kao df. Gradijent omogućava da se slika jedan-forme razvije kao komplementarna slika vektora kao strelice. Jedan-forme se mogu zamisliti kao niz površina, a vrijednost forme na vektoru kao broj površina koje vektor prolazi. Kao što se vektor predstavlja ravnom linijom, tako se i forma predstavlja ravnim i paralelnim površinama.

Tenzori predstavljaju prirodno proširenje linearne funkcije (operatora) na vektorima i jedan-formama. Kao i za slučaj vektora i jedan-formi, tenzorsko polje predstavlja pravilo koje daje tenzor u svakoj točki mnogostrukosti. Linearnost se prirodno proširuje na tenzorsko polje, a diferencijabilnost tenzorskog polja je definirana kao i u slučaju jedan-formi (koristi se diferencijabilnost funkcija, vektora i jedan-formi).

2.1.6 Lieva derivacija i invarijantnost

Za daljnju analizu potrebno je definirati Lievu derivaciju duž kongruencije vektorskog polja neovisno o koordinatnoj bazi. Spomenuto je da kongruenciju čini skup integralnih krivulja vektorskog polja koje ispunjavaju mnogostrukost i međusobno se ne sijeku. Svaka točka mnogostrukosti $\mathcal{M}$ nalazi se na jednoj i samo jednoj integralnoj krivulji. Budući da je svaka krivulja jednodimenzionalni skup točaka, skup krivulja je tada (n - 1) - dimenzionalan i s odgovarajućom parametrizacijom taj skup predstavlja mnogostrukost. Ukratko, kongruencija je preslikavanje s $\mathcal{M}$ na $\mathcal{M}$. Ukoliko λ označava parametar krivulje, tada neki mali broj $\Delta\lambda$ predstavlja preslikavanje koje neku točku krivulje preslikava u točku $\Delta\lambda$ dalje duž iste krivulje. To preslikavanje predstavlja 1-1 preslikavanje ukoliko je vektorsko polje klase C^1. Ukoliko postoji preslikavanje za svaki $\Delta\lambda$, tada postoji jednodimenzionalna diferencijabilna obitelj takvih preslikavanja koja predstavlja jednoparametarsku Lievu grupu s

grupnim zbrajanjem i takvo preslikavanje naziva se povlačenje duž kongruencije, tj. Lievo povlačenje (engl. *Lie dragging*) [39].

Povlačenje omogućava definiranje derivacije duž kongruencije i otklanjanje problema definicije udaljenosti između točaka (kao metrika iskorištava se kongruencija krivulje na mnogostrukosti te se za udaljenost između točaka koristi parametarska udaljenost) i uspoređivanje vektora u različitim točkama (koncept paralelnosti na diferencijabilnoj mnogostrukosti ne definira se dodatnom strukturom Afinih koneksija već pomoću Lievog povlačenja). Oznaka operatora Lieve derivacije je $L_{\mathbf{y}}$, gdje $\mathbf{y}$ predstavlja vektorsko polje koje generira preslikavanje (povlačenje $d/d\lambda$). Za funkcije vrijedi

$$L_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(f) = df/d\lambda . \tag{2.14}$$

Prema definiciji Lieve derivacije duž vektorskog polja $\mathbf{y}$, ono ima nultu Lievu derivaciju ukoliko mu Lieva zagrada s $\mathbf{y}$ iščezava ($\mathbf{y}$ je Lie povučeno). Očekivano iz svega proizlazi da je Lieva derivacija zapravo Lieva zagrada

$$L_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \frac{d}{d\lambda}\mathbf{x} - \frac{d}{d\mu}\mathbf{y} = [\mathbf{y},\mathbf{x}], \tag{2.15}$$

iz čega slijedi da se antisimetričnost Lieve zagrade može izraziti u obliku

$$L_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = -L_{\mathbf{x}}\mathbf{y} . \tag{2.16}$$

U fizici se Lieva derivacija koristi za izražavanje invarijantnosti nekog tenzorskog polja na neku transformaciju. Tenzorsko polje $\mathbf{t}$ je invarijantno na djelovanje vektorskog polja $\mathbf{y}$ ako je

$$L_{\mathbf{y}}\mathbf{t} = 0 . \tag{2.17}$$

Ako $\mathbf{t}$ predstavlja fizikalno važan tenzor (metrički tenzor, vektorsko polje sile, skalarno polje koje definira potencijalnu energiju čestice) u tom slučaju postaju važna i vektorska polja na čije su djelovanje tenzori invarijantni.

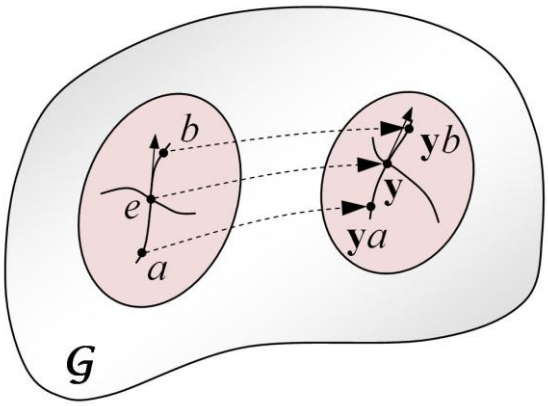
Kroz dokaz invarijantnosti može se pokazati da spomenuta vektorska polja zatvaraju Lievu algebru (zatvorena u odnosu na Lievu zagradu). Iz razmatranja primjera sfere $\mathcal{S}^2$ na kojoj su vektori (operatori kinetičkog momenta) linearno zavisni kao vektorska polja na $\mathcal{R}^3$

jer su svi tangentni na S^2, nije moguće izraziti jedan pomoću preostala dva korištenjem konstantnih koeficijenata. Iz toga proizlazi da su vektorska polja linearno nezavisni elementi Lieve algebre, te kao takvi čine bazu trodimenzionalne Lieve algebre.

2.1.7 Lieve grupe i Lieve algebre u kontekstu mnogostrukosti

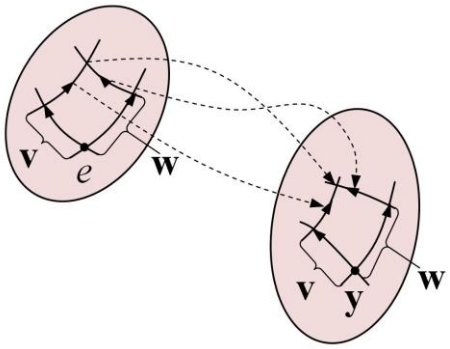
Lieve grupe su u fizici važne zbog izražavanja invarijantnosti tenzora ali nama su važnije u kontekstu grupne mnogostrukosti. Bitno je naglasiti da je grupna mnogostrukost potpuno nevezana uz mnogostrukost koja sadrži tenzore koji su invarijantni na djelovanje vektora koji čine Lievu algebru. Kao primjer toga u našem slučaju to je mnogostrukost svih rotacija *SO*(3), a mnogostrukost čiji se koordinatni sustavi rotiraju je $\mathcal{R}^3$.

Pretpostavka je da postoji konačno-dimenzionalna Lieva grupa, tj. C^∞ mnogostrukost $\mathcal{G}$ dimenzije *n* sa C^∞ preslikavanjima (difeomorfizmima) takvim da se svaki element $\mathbf{y}$ iz $\mathcal{G}$ preslikava $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{yz}$ (lijeva translacija) ili $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{zy}$ (desna translacija). Za preslikavanje okolina od e odabrana je lijeva translacija nekim određenim $\mathbf{y}$ na okolinu od $\mathbf{y}$ (vidi sliku 2.9). Preslikavanje je diferencijabilno pa preslikava krivulje u krivulje i tangentne vektore iz e (elementi $T_e\mathcal{G}$) u tangentne vektore u $\mathbf{y}$. Takvo preslikavanje se često označava kao $L_\mathbf{y} : T_e\mathcal{G} \to T_\mathbf{y}\mathcal{G}$. Vektorsko polje $\mathbf{v}$ na $\mathcal{G}$ je lijevo-invarijantno ako $L_\mathbf{y}$ preslikava $\mathbf{v}$ u e, e u $\mathbf{v}$, a $\mathbf{v}$ u $\mathbf{y}$, ili kraće napisano $L_\mathbf{y} : \mathbf{v}(e) \to \mathbf{v}(\mathbf{y})$ vrijedi za svaki $\mathbf{y}$.



Slika 2.9: Preslikavanje okoline od e lijevom translacijom nekim određenim $\mathbf{y}$ na okolinu od $\mathbf{y}$ [39].

Grupni zakon kompozicije omogućava da $L_{\mathbf{y}}$ preslikava $L_{\mathbf{y}}:\mathbf{v}(\mathbf{z})\to\mathbf{v}(\mathbf{zy})$ za svaki $\mathbf{z}$ u $\mathcal{G}$ iz čega proizlazi prirodna definicija 'konstantnog' vektorskog polja na $\mathcal{G}$. Jasno je da svaki vektor u $T_e\mathcal{G}$ definira jedinstveno lijevo-invarijantno vektorsko polje, a lijevo-invarijantna vektorska polja čine *n*-dimenzionalan vektorski prostor. Dalje se može uočiti da za bilo koja dva lijevo-varijantna vektorska polja $L_{\mathbf{y}}$ preslikava njihovu Lievu zagradu iz e u Lievu zagradu u $\mathbf{y}$, pa se i Lieva zagrada može nazvati lijevo-invarijantna (slika 2.10) [39]. Lijevo-invarijantna vektorska polja čine Lievu algebru koja se označava sa $L(\mathcal{G})$ ili $\mathcal{g}$.



Slika 2.10: Preslikavanje Lieve zagrade iz e u Lievu zagradu u $\mathbf{y}$ [39].

Bitno je razmotriti integralnu krivulju lijevo-invarijantnog vektorskog polja $\mathbf{v}$ koja prolazi kroz e. Krivulja u e ima jedinstveni tangentni vektor $\mathbf{v}_e$ u e i jedinstveni parametar t za koji e odgovara točki $t=0$. Kao što je već spomenuto, točke na krivulji se mogu locirati pomoću $\exp(t\mathbf{v})$ koja predstavlja difeomorfizam s $\mathcal{G}$ na $\mathcal{G}$ koji generira $\mathbf{v}$. Vektorsko polje $\mathbf{v}$ je u potpunosti određeno s vektorom $\mathbf{v}_e$ i točke u $\mathcal{G}$ na toj krivulji su dane u obliku

$$\mathbf{y}_{\mathbf{v}_e}(t)=\exp(t\mathbf{v})\big|_e. \tag{2.18}$$

Za eksponencijalnu funkciju vrijedi $\exp(t_2\mathbf{v})\exp(t_1\mathbf{v})\big|_e=\exp\left[(t_1+t_2)\mathbf{v}\right]\big|_e$, pa točke na integralnoj krivulji čine jednoparametarsku (Abelovu) podgrupu od $\mathcal{G}$

$$\mathbf{y}_{\mathbf{v}_e}(t_1+t_2)=\mathbf{y}_{\mathbf{v}_e}(t_2)\mathbf{y}_{\mathbf{v}_e}(t_1). \tag{2.19}$$

Svakom od vektora u $T_e\mathcal{G}$ odgovara jedinstvena podgrupa. Budući da svaka jednoparametarska podgrupa mora biti C^∞, krivulja koja prolazi kroz e u $\mathcal{G}$ (podgrupa

mora sadržavati jedinični element grupe), postoji 1-1 korespondencija između jednoparametarskih podgrupa i elemenata Lieve algebre od $\mathcal{G}$.

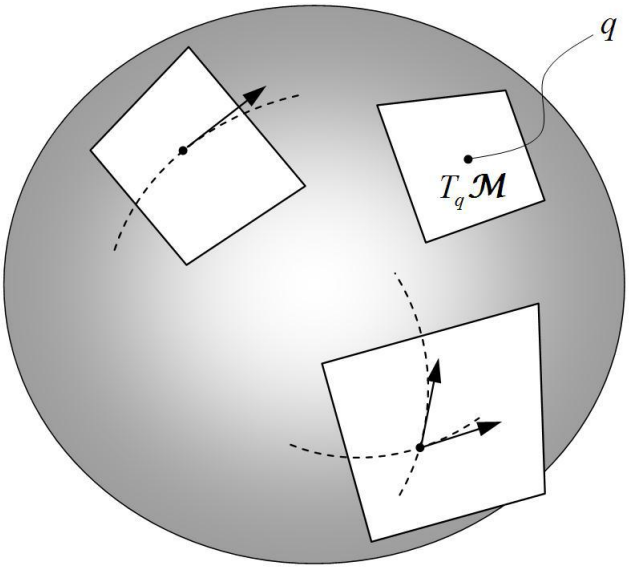
Kao najjednostavniji primjer može se navesti $\mathcal{R}^n$, koji predstavlja mnogostrukost i Abelovu grupu s obzirom na zbrajanje vektora. Jednoparametarske podgrupe su zrake (engl. *rays*), tj. ravne linije kroz ishodište. Lijevo-invarijantna vektorska polja su paralelna sa zrakama i međusobno komutativna. Lieva algebra je vektorski prostor $T_e\mathcal{G}$ s trivijalnom Lievom zagradom $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$ za svaki $\mathbf{v},\mathbf{w}$ iz $T_e\mathcal{G}$.

2.2 Dinamika na tangentnom svežnju

Iz dosadašnjeg razmatranja može se zaključiti da konfiguracijska mnogostrukost $\mathcal{M}$ predstavlja skup točaka koje predstavljaju položaje sustava. U dinamici položaji i brzine igraju važnu ulogu i čini se kako upravo one sačinjavaju mnogostrukost odnosno vektorski prostor. Na konfiguracijskoj mnogostrukosti postoji beskonačno mnogo putanja (krivulje na mnogostrukosti) od kojih svaka predstavlja potencijalnu putanju fizikalnog gibanja sustava, a njezini tangentni vektori predstavljaju brzine sustava.

Svakoj točki q konfiguracijske mnogostrukosti $\mathcal{M}$ može se pridružiti tangentni vektorski prostor $T_q\mathcal{M}$. Skup svih točaka konfiguracijske mnogostrukosti zajedno s njihovim tangentnim vektorskim prostorima čine veću mnogostrukost koja se naziva tangentni svežanj $T\mathcal{M}$. Dimenzija te mnogostrukosti iznosi $2n$, gdje n predstavlja broj stupnjeva slobode gibanja sustava (tj. dimenziju konfiguracijske mnogostrukosti $\mathcal{M}$ koju možemo nazvati temeljnom mnogostrukosti tangentnog svežnja). Tangentni svežanj obuhvaća poopćene položaje (koordinate) q i brzine $\dot{q}$. Najjednostavniji primjer tangentnog svežnja je fazni prostor brzine dimenzije 2, gdje gibanje čestice uzduž krivulje predstavlja 1-dimenzionalno gibanje pridruženo svakoj točki putanje, a vektorski prostor (1-dimenzionalni objekt) sačinjava 2-dimenzionalnu ravninu poznatu pod imenom fazni prostor brzine. Svaka točka na tangentnom svežnju pridružuje jedan vektor brzine jednoj točki putanje.

Slika 2.11 prikazuje sferu $\mathcal{S}^2$ kao mnogostrukost s nekoliko tangentnih prostora. Skup tangentnih prostora u svakoj točki sfere zajedno s temeljnom mnogostrukosti sfere sačinjava tangentni svežanj sfere $T\mathcal{S}^2$. Dimenzija sfere i njezinog tangentnog prostora iznosi 2 iz čega proizlazi da definirani tangentni svežanj ima dimenziju 4 ($n=2, \dim T\mathcal{S}^2 = 2n = 4$). Na slici 2.11 je vidljivo da se dva vektora iz različitih tangentnih prostora ne mogu zbrajati.



Slika 2.11: Sfera $\mathcal{S}^2$ kao mnogostrukost s prikazom nekoliko tangentnih prostora [38].

Potrebno je formalizirati zaključke ovog i potpoglavlja 2.2.4:

U svakoj točki q postoji vektorski prostor koji se naziva tangentni prostor i koji sadrži sve moguće brzine od q. Budući da brzine $\dot{q}$ tangiraju putanje u točki q i $T_q\mathcal{M}$ je tangentan na mnogostrukost $\mathcal{M}$ u istoj točki.

Tangentni svežanj $T\mathcal{M}$ dobivamo u slučaju kada su svi tangentni prostori $T_q\mathcal{M}$ pridruženi temeljnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$, $\forall_q \in \mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M} = \bigcup T_q\mathcal{M}, \forall_q \in \mathcal{M}.$$

Na taj način tangentni svežanj $T\mathcal{M}$ je sačinjen od mnogostrukosti $\mathcal{M}$ i tangentnih prostora $T_q\mathcal{M}$ u svim točkama q temeljne mnogostrukost.

Bez ulaženja u detalje, tangentni svežanj $T\mathcal{M}$ predstavlja prostor za koji su nužni:

- Temeljna mnogostrukost $\mathcal{M}$;
- Preslikavanje $\Pi: T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$;
- Karakteristično vlakno F;

gdje karakteristično vlakno F predstavlja vektorski prostor strukture jednake strukturi tangentnog prostora.

Svojstva tangentnog svežnja uglavnom proizlaze iz svojstava mnogostrukosti i vektorskog prostora. Elementi koji pripadaju različitim tangentnim prostorima (tangentni prostori su definirani u različitim točkama temeljne mnogostrukosti) ne mogu se izravno zbrajati. Iz toga možemo zaključiti da se elementi istog vlakna mogu izravno zbrajati, a elementi na različitim vlaknima ne mogu.

Vektorska polja imaju isto tako pridružene tangentne vektore u svakoj točki temeljne mnogostrukosti, iz čega proizlazi da vektorsko polje predstavlja preslikavanje iz mnogostrukosti u tangentni svežanj. Tangentni svežanj predstavlja posebnu vrstu mnogostrukosti koju je moguće razložiti na vlakna (tangentne prostore) na kojima su primjenjive projekcijske mape koje preslikavaju bilo koju točku vlakna u točku mnogostrukosti. Jedno od najvažnijih svojstava tangentnog svežnja je da isto kao i temeljna mnogostrukost, predstavlja diferencijabilnu mnogostrukost.

Integralna krivulja dobivena iz poznatog vektorskog polja i početnih uvjeta, definira početnu točku na konfiguracijskoj mnogostrukosti, koja predstavlja rješenje dinamičkog sustava. Može se pokazati da su jednadžbe gibanja mehaničkog sustava istovjetne vektorskom polju Δ na mnogostrukosti $T\mathcal{M}$ (jednadžbe gibanja izražavaju akceleracije sustava u obliku funkcija na mnogostrukosti). Kada su jednadžbe gibanja formulirane pomoću Lagrangeovih jednadžbi, Lagrangeov operator (engl. *Lagrangian*) L definiran kao

$$\mathrm{L}(q,\dot{q}) = \mathrm{T} - \mathrm{V},$$

gdje je T kinetička energija, a V potencijalna energija, predstavlja funkciju na tangentnom svežnju $T\mathcal{M}$, zajedno s potencijalnom i kinetičkom energijom u obliku funkcija poopćenih položaja i brzina.

Iz ovog kratkog razmatranja vidljivo je da postoji dinamika sustava modelirana na mnogostrukosti i sve funkcije koje se javljaju u definiciji sustava predstavljaju funkcije na mnogostrukosti. Uobičajeni pristup u mehanici se temelji na korištenju lokalne karte i rješavanju problema u okolini točke u kojoj je problem definiran. Za probleme koji zahtijevaju veće okoline to nije toliko jednostavno kao kod pojave singulariteta pri korištenju lokalnih karata, i neke stavove nije moguće opisati. Taj se problem često javlja u opisu rotacije krutog tijela, osobito kod domena rotacijskih gibanja većih od domene korištene parametrizacije. U sljedećem poglavlju detaljno su opisane prostorne rotacije.

3

ROTACIJE I *SO*(3) GRUPA

U ovom poglavlju detaljno su opisane prostorne rotacije tijela i specijalna ortogonalna grupa SO(3) zajedno sa svojim svojstvima.

3.1 Matematički opis rotacija

Rotacija krutog tijela u trodimenzionalnom Euklidskom vektorskom prostoru $\mathcal{R}^3$ predstavlja gibanje koje čuva međusobne udaljenosti točaka tijela, a za razliku od translacijskog gibanja, jedna točka ostaje nepomična tokom gibanja i ona se naziva središtem rotacije [40].

Izrazi rotacija i orijentacija imaju različita značenja, te je rotacija opisana kao proces promjene orijentacije tijela, dok je orijentacija stanje tijela.

Svaka rotacija se može predstaviti kompozicijom rotacija koje u većini slučajeva međusobno ne komutiraju (matrice reda većeg od dva prilikom množenja ne komutiraju). Bitno je spomenuti da iako se infinitezimalne rotacije promatraju kao vektori i njihova se kompozicija svodi na zbrajanje vektora, konačne rotacije nisu vektorske veličine i njihove kompozicije se ne mogu izraziti zbrajanjem.

Orijentacija tijela se može odrediti ako pretpostavimo da su koordinate nekog vektora vezane uz *p*-dimenzionalni objekt koji se nalazi u *n*-dimenzionalnom prostoru, te u tom slučaju matrica orijentacije $\mathbf{O}$ ima dimenziju $\dim(\mathbf{O}) = p \times n$ [40]. Matrica $\mathbf{O}$ se sastoji od p vektora koji sadrže *n* elemenata. Budući da promatramo prostorni slučaj (3D prostor), razmatrani objekti predstavljaju tijela istih dimenzija $p = n = 3$.

Matrica $\mathbf{O}$ koja daje orijentaciju tijela, sadrži vektore iz čijih se svojstava definiraju posebna svojstva i grupe.

Za $p = n$ matrica $\mathbf{O}$ predstavlja kvadratnu matricu (ima redaka koliko i stupaca) koja je ortogonalna ako je n vektora koje sadrži međusobno ortogonalno, te zadovoljava svojstvo ortogonalnosti

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \boldsymbol{I},$$

gdje je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzije $\dim(\boldsymbol{I}) = n \times n$. Općenito, matrica je ortogonalna kada su njezini stupci ortonormirani vektori. Ako vektori sadržani u matrici imaju jediničnu veličinu (jedinični vektori), sve matrice $\mathbf{O}$ sačinjavaju topološki prostor koji predstavlja bazu Stiefelove mnogostrukosti.

Rotacije su komponirane od jednostavnih matričnih množenja koja predstavljaju skalarno množenje vektora sadržanih u matricama $\mathbf{O}$ i $\mathbf{O}_1$ dviju različitih orijentacija tijela

$$\mathbf{R} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}^T.$$

Matrica $\mathbf{R}$ predstavlja rotaciju tijela iz orijentacije $\mathbf{O}$ u orijentaciju $\mathbf{O}_1$ što se može tumačiti kao transformacija iz nulte orijentacije u orijentaciju definiranu s $\mathbf{O}_1$. Budući da je matrica orijentacije $\mathbf{O}$ sastavljena od vektora, matrica rotacije $\mathbf{R}$ se može promatrati kao transformacija vektora. Kompozicija uzastopnih rotacija predstavlja matrično množenje

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_1\mathbf{O}^T,$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{O}_2\mathbf{O}_1^T,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_2\mathbf{O}^T,$$

$$\mathbf{O}_2 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{O},$$

u kojem je korišteno svojstvo ortogonalnosti $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_1^T = \boldsymbol{I}$. Za kompoziciju rotacija vrijedi svojstvo asocijativnosti

$$(\mathbf{R}_3\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1).$$

Budući da je $\mathbf{O}\mathbf{O}^T = \boldsymbol{I}$, iz Binet-Cauchyjeva teorema dobivamo $\det(\mathbf{O})\det(\mathbf{O}^T) = 1$. Determinanta matrice $\mathbf{R}$ može se izraziti u obliku

$$\det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{O}_1\mathbf{O}^T) = \det(\mathbf{O}_1)\det(\mathbf{O}^T),$$

što zajedno sa svojstvom ortogonalnosti matrice vodi do izraza

$$\det(\mathbf{R}) = \pm 1.$$

Determinanta se ne mijenja transponiranjem i zato vrijedi $[\det(\mathbf{R})]^2 = 1$, odnosno determinanta matrice može biti $+1$ ili -1. Skup matrica koje imaju determinantu $+1$ čini čiste rotacije (engl. *pure rotation*) koje osim što čuvaju duljine vektora čuvaju i orijentaciju. Kada je determinanta -1, korištenjem takve transformacije događa se i refleksija s obzirom na ravninu koja sadrži ishodište. U mehanici u kojoj se promatraju realna tijela, refleksija predstavlja nepostojeću transformaciju pa su rotacije ograničene na $\det(\mathbf{R}) = +1$. Na taj način orijentacije su određene pomoću ortogonalnih matrica s istim predznacima determinanti.

U Euklidskom vektorskom prostoru da bi se opisala orijentacija tijela potrebna su tri vektora s tri komponente. Budući da je $\dim(\mathbf{O}) = 3\times 3$, korištenjem ortogonalnih svojstava tih matrica proizlazi da za odgovarajuće rotacije u $\mathcal{R}^3$ potrebna su samo tri međusobno nezavisna parametra za određivanje orijentacije tijela. To omogućava da se rotacija tijela parametrizira pomoću tri parametra (s obzirom da rotacija krutog tijela ima 3 stupnja slobode gibanja).

Uzastopna primjena rotacija na vektor predstavlja ponovno rotaciju s obzirom da je duljina vektora ostala nepromijenjena. Pokazat ćemo da skup svih rotacija čini ortogonalnu grupu za koju se često koristi oznaka $O(3)$. Podskup rotacija s determinantom jednakom $+1$ također formira grupu jer produkt dviju matrica s determinantom $+1$ ponovno daje istu determinantu. To je podgrupa ortogonalne grupe, naziva se specijalna grupa rotacija i označava se s $SO(3)$ koja sadrži spomenute čiste rotacije.

3.1.1 Osnovni pojmovi vezani uz grupe

Prije obrazloženja zašto rotacije čine grupu, potrebno je dati matematičku definiciju i objasniti koncept grupe koja predstavlja matematičko poopćenje razmatranja simetrije skupova. Teorija grupa predstavlja središnju teoriju apstraktne algebre i sve ostale algebarske strukture kao što su vektorska polja, vektorski prostori itd., mogu se promatrati kao grupe s

dodatnim operacijama i aksiomima. Razumijevanje pojmova kao što su grupe i mnogostrukosti ključno je za kasnije proučavanje Lievih grupa.

Grupa $\mathcal{G}$ je skup objekata zajedno sa zatvorenom binarnom operacijom ako za sve $X,Y,Z \in \mathcal{G}$ vrijedi [39]:

1. Grupoidnost (rezultat binarne operacije $\cdot$ između dva elementa grupe ponovno daje element grupe)

$$X \cdot Y \in \mathcal{G};$$

2. Asocijativnost

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z;$$

3. Postojanje jediničnog elementa $\mathcal{G}$ takvog da je

$$e \cdot X = X \cdot e = X;$$

4. Za svaki element $X \in \mathcal{G}$ postoji inverzni element X^{-1} takav da vrijedi

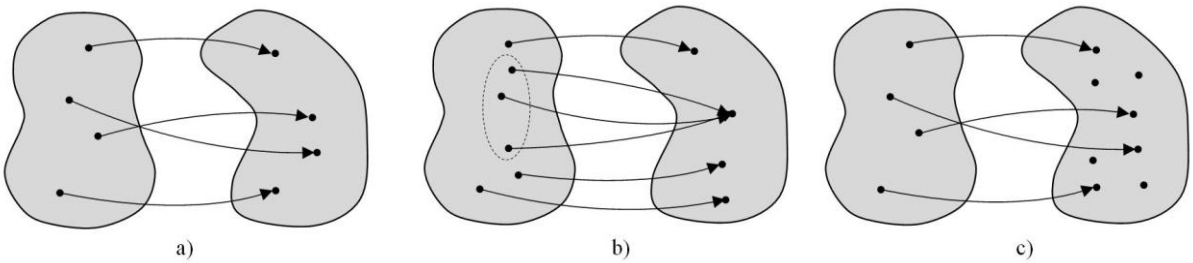
$$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = e;$$

Osim navedenih svojstava za grupu $\mathcal{G}$ kažemo da je komutativna ili Abelova grupa ako za sve elemente $X, Y, Z \in \mathcal{G}$ vrijedi $X \cdot Y = Y \cdot X$. U svrhu razlikovanja grupe od skupa uobičajeno se uz oznaku grupe navodi i operator $(\mathcal{G}, \cdot)$.

Potrebno je spomenuti još neke termine koji se koriste kod opisivanja grupa i njihovih svojstava. Dvije grupe $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ zajedno sa svojim binarnim operacijama $\cdot$ i $*$ su homomorfne ako postoji preslikavanje $\varphi: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ koje uvažava operacije na grupi [39]

$$\varphi(X \cdot Y) = \varphi(X) * \varphi(Y).$$

Homomorfizmi se mogu razlikovati po odnosu kodomene, slike preslikavanja i injektivnosti (vidi sliku 3.1).



Slika 3.1: a) Izomorfizam, b) epimorfizam i c) monomorfizam.

Svojstva homomorfizma koja slijede iz definicije možemo izraziti u obliku

- $\varphi(e) = e$,
- $[\varphi(X)]^{-1} = \varphi(X^{-1})$.

Homomorfizam preslikava jedinični element iz $\mathcal{M}_1$ u jedinični element iz $\mathcal{M}_2$, a inverzno preslikavanje elementa iz $\mathcal{M}_1$ identično je preslikavanju inverza tog elementa. Može se dogoditi da se homomorfizmom preslikava više različitih elemenata iz $\mathcal{M}_1$ u jedinični element iz $\mathcal{M}_2$ pa se skup takvih elemenata naziva jezgrom homomorfizma i označava s $\ker\varphi$. Sljedećom važnom definicijom uvedena je apstraktna jednakost grupa. Jednakost grupa odnosi se na ponašanje grupa s obzirom na njihove binarne operacije. Homomorfizam predstavlja izomorfizam grupa ako je φ bijekcija. Prema teoriji grupa izomorfne grupe $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ se ne razlikuju, a to svojstvo se označava s $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2$. Za dokazivanje izomorfizma dovoljno je provjeriti da je φ homomorfizam, injektivnost od φ ($\ker\varphi = \{e\}$) i surjektivnost. Može se dogoditi da postoji više različitih izomorfizama između dvije zadane grupe. Ako $\varphi: \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ predstavlja surjektivni izomorfizam grupe, onda je φ epimorfizam. U slučaju injektivnog homomorfizma φ se naziva monomorfizmom.

Iz svega gore rečenog jasno je da homomorfizam predstavlja širi pojam od izomorfizma. Bitno je spomenuti i slučaj kada izomorfizam predstavlja C^∞ preslikavanje tada je grupa difeomorfna. U tom smislu može se zaključiti da preslikavanja proizlaze iz grupa, a njihova svojstva su naslijeđena svojstva grupe.

3.2 Rotacija kao grupa

Grupa $\mathcal{M}_2$ podgrupa je grupe $\mathcal{M}_1$ ako je $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$, a binarna operacija $\cdot$ naslijeđena od binarne operacije definirane na $\mathcal{M}_1$. Budući da je $\mathcal{M}_2$ i sama za sebe grupa podrazumijeva se grupoidnost nad binarnom operacijom, te postojanje inverznog i neutralnog elementa. Može se reći da svaka grupa ima dvije trivijalne podgrupe: jediničnu podgrupu i samu sebe. Osim toga, podskup grupe (podgrupa) uvijek posjeduje svojstva veće grupe.

Skup rotacija zajedno s operacijama među njima čine grupu izomorfnu grupi ortogonalnih $n \times n$ matrica koja se označava s $O(n)$, a koja predstavlja skup svih rotacija. Budući da promatramo samo realna 3D tijela, matrice su dimenzije 3×3 (n=3).

Matrice $\mathbf{R}$ s $\det(\mathbf{R}) = +1$ nazivaju se specijalnim ortogonalnim matricama (engl. *special orthogonal matrices*) koje formiraju grupu 3×3 matrica izomorfnu specijalnoj ortogonalnoj grupi matrica koja se označava s $SO(3)$ [40]. Svojstvo spomenute grupe je da skalarni umnožak vektora (unutarnji produkt ili in-produkt) čuva duljinu vektora i grupa je zatvorena s obzirom na kompoziciju (matrično množenje) i inverz. To znači da je $SO(3)$ invarijantna podgrupa $O(3)$ grupe koja čuva skalarni umnožak. Specijalna ortogonalna grupa $SO(3)$ je definirana s

$$SO(3) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3\times 3} : \mathbf{R}\mathbf{R} = \boldsymbol{I}, \det(\mathbf{R}) = +1 \right\}. \tag{3.1}$$

Iz gore navedene definicije slijedi da je $SO(3)$ podgrupa $O(3)$ grupe ($SO(3) \leq O(3)$, što proizlazi iz ograničenja $\det(\mathbf{R}) = +1$). Iz jednadžbe (3.1) je vidljivo da je $O(3)$ grupa definirana kao podgrupu $GL(3)$ grupe pomoću ograničenja ortogonalnosti (opća linearna grupa invertibilnih 3×3 matrica). Rezultat operacije na grupi između dva elementa grupe ponovno je element grupe iz čega se može zaključiti da je $O(3)$ grupa, a samim time i $SO(3)$ grupa, tj. topološki prostor.

Preciznije se može reći da je $SO(3)$ grupa formirana iz $GL(3)$ grupe pomoću ograničenja prikazanih u jednadžbi (3.1), a koja definiraju hiperplohu na $GL(3)$. Jednadžbom (3.1), $SO(3)$ grupa je definirana kao podgrupa $GL(3)$ grupe s ograničenjem ortogonalnosti i determinantom jednakom jedinici. Pokazuje se kako je upravo tim ograničenjem u $GL(3)$ grupi definirana mnogostrukost. Iz svega gore navedenog može se zaključiti da je $SO(3)$ mnogostrukost s matematičkom strukturom grupe.

Matrice *SO*(3) grupe opisuju prave rotacije (engl. *proper rotations*) (rotacije s pozitivnom determinantom, bez refleksije i inverzije), te postoji 1-1 korespondencija između specijalnih ortogonalnih matrica i pravih rotacija.

Iz definicije grupa slijedi da svaka grupa mora imati jedinični element (e) koji za slučaj rotacija predstavlja neutralnu rotaciju danu sa unitarnom jediničnom matricom $\boldsymbol{I}$. Neutralna rotacije ne mijenja orijentaciju bilo koje proizvoljne matrice $\mathbf{R}$

$$\boldsymbol{I}\mathbf{R} = \mathbf{R}\boldsymbol{I} = \mathbf{R}.$$

U kontekstu topologije rotacijske grupe potrebno je spomenuti da se grupa svih rotacija *O*(3), koja uključuje prave (engl. *proper rotations*) i neprave rotacije (rotoinverzije) (engl. *improper rotations*), sastoji od dva razdvojena otvorena podskupa (dva podskupa definirana pomoću dvije različite determinante $\det(\mathbf{O}) = +1, \mathbf{O} \in O(3)$). U suprotnosti tome je grupa pravih rotacija *SO*(3) koja predstavlja kontinuiranu grupu koja pomoću putanje na grupi povezuje svaku orijentaciju sa sljedećom.

3.2.1 Parametrizacija rotacije

Budući da je *SO*(3) mnogostrukost koja može biti lokalno prikazana u prikladnom koordinatnom sustavu vektorskog prostora (npr. parametrizacija Eulerovim kutovima), dan je kratak osvrt na parametrizacije rotacija. Također, spomenuti su i problemi koji se javljaju kod korištenja dolje opisanih parametrizacija.

Na parametrizaciju se može gledati kao na preslikavanje iz *SO*(3) grupe na Euklidski vektorski prostor $\mathcal{R}^3$. Parametrizacije se isto tako može predstaviti kao lokalni prikaz *SO*(3) mnogostrukosti u koordinatnom sustavu vektorskog prostora. Budući da nije moguće uvesti parametrizaciju velikih rotacija upotrebom troosnih lokalnih koordinata koja bi u potpunosti eliminirala pojavu kinematičkih singulariteta u cijeloj domeni definicije velikih rotacija, koriste se različite tehnike parametrizacije koje imaju svoje prednosti i nedostatke. Neke od najčešće korištenih parametrizacija su [41]:

- Eulerovi kutovi;
- Rodriguesovi parametri;
- Cayley-Kleinovi parametri;
- Kvaternioni;
- Rotacijski vektor.

Pojedinosti oko vrsta parametrizacija, te njihovih prednosti i nedostataka, nisu predstavljene u okviru ovog rada. Neke od spomenutih parametrizacija korištene su samo u okviru standardnih algoritama linearnih prostora upotrijebljenih za usporedbu, te izračunavanje početne matrice rotacije u okviru prezentiranih primjera. U svrhu određivanje početne matrice rotacije korišten je najpopularniji prikaz matrice rotacije pomoću Eulerovih kutova (321 nesimetrični slijed). Kao parametri korišteni su ϕ, θ i ψ, a matrica rotacije je dobivena pomoću izraza

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi + s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

gdje su

$$s_\phi = \sin\phi, \qquad c_\phi = \cos\phi,$$

$$s_\theta = \sin\theta, \qquad c_\theta = \cos\theta,$$

$$s_\psi = \sin\psi, \qquad c_\psi = \cos\psi.$$

Zbog nekomutativnosti rotacija, Eulerovi se kutovi mogu definirati na nekoliko različitih načina. S obzirom da se dvije uzastopne rotacije ne mogu provesti oko iste osi, postoji 12 mogućih sljedova Eulerovih kutova (šest simetričnih sljedova i šest nesimetričnih sljedova). Ako se uzme u obzir da svaki od mogućih sljedova može koristiti nepomične ili pomične (rotirane) osi, na kraju dobivamo 24 verzije Eulerovih kutova. Neki od nedostataka parametrizacije pomoću Eulerovih kutova su: važnost redoslijeda rotacija, složeni izraz za matricu rotacije koja sadrži trigonometrijske funkcije te pojava singulariteta za svih dvanaest sljedova. Pojava singulariteta Eulerovih kutova u literaturi je poznatija pod nazivom 'blokada kardana' (engl. *gimbal lock*). Međutim, važno je napraviti pojmovno odvajanje između singulariteta i pojave blokade kardan. Blokada kardana predstavlja gubitak stupnja slobode te se javlja kada se dvije od tri osi rotacije međusobno poklope. Iz navedenog se može zaključiti da su sve blokade kardana specifične vrste singulariteta, ali svi singulariteti nisu blokade kardana. Za svih dvanaest sljedova singularnost se javlja za određenu vrijednost drugog kuta rotacije θ.

Važno je naglasiti da se parametrizacije razlikuju prema vrsti podataka koji se koriste za opisivanje rotacija. Osim toga, parametrizacije se razlikuju po domenama u kojima je omogućena 1-1 korespondencija između matrica, neprekidnost i neprekidni inverz, tj. izbjegavanje pojave singulariteta. Kako bi se mogla opisati rotacija koja je veća od domene korištene parametrizacije, mora se koristiti više različitih parametrizacija. Konačni rezultat i ispravljanje greške predstavlja numerički skupi postupak koji se temelji na pronalaženju 'najbliže' ortogonalne matrice (ortonormalizacija matrice). Isto tako korištenje nekoliko parametrizacija za opis rotacije nije prikladno i usložnjava postupak rješavanja.

Iz ovog se vidi jedna od glavnih prednosti geometrijskih integracijskih procedura na Lievoj grupi rotacije $SO(3)$, a to je izbjegavanje kinematičkih singulariteta koji bi zahtijevali dodatnu re-parametrizaciju.

3.2.2 Eulerov i Chaslesov teorem

Prije detaljnog opisa $SO(3)$ grupe, u svrhu boljeg razumijevanja numeričkih procedura korištenih u okviru provedenog istraživanja, predstavljeni su Eulerov i Chaslesov teorem. Oni razmatraju konačne sferne rotacije krutog tijela kao i opće gibanje tijela u prostoru iz različitih točaka gledišta.

Eulerov teorem prema literaturi [42] glasi:

> *'The most general displacement of a rigid body with one point fixed can be described as a single rotation about some axis through that fixed point, called the axis of rotation or principal line.'*

U prijevodu to bi značilo da svako gibanje koje ima jednu nepomičnu točku možemo shvatiti kao rotaciju oko glavne osi (osi rotacije), koja prolazi kroz tu točku, za neki određeni kut. Glavna os predstavlja pravac u prostoru koji se, poput svakog drugog pravca, može odrediti smjerom i jednom točkom koja pripada tom pravcu. Potrebno je naglasiti da dvije uzastopne rotacije predstavljene pomoću Eulerovih rotacijskih vektora nije moguće komponirati pomoću jednostavnog zbrajanja vektora. U nastavku je pokazano da se spomenuti rotacijski vektor javlja kod definiranja jednadžbi na Lievoj algebri $so(3)$ i predstavlja vrlo važno svojstvo korišteno u odabranim integracijskim metodama.

Za potpunu sliku problema potrebno je spomenuti i Chaslesov teorem koji predstavlja proširenje Eulerovog teorema na opće gibanje krutog tijela. Chaslesov teorem naveden u literaturi [42] glasi:

'The most general displacement of a rigid body is equivalent to a translation of some point in the body, plus a rotation about an axis through that point.'

Prema Chaslesovom teoremu, svaki pomak krutog tijela sastavljen je od rotacije oko osi i translacije duž iste osi, tj. Chaslesov teorem gibanje krutog tijela promatra kao gibanje pužnog vijka (eng. *screw motion*). Osim spomenutih metoda integracije rotacija izravno na *SO*(3) grupama, često se za parametrizaciju rotacija koristi i Lieva specijalna Euklidska grupa *SE*(3) [3] koja prema Chaslesovom teoremu, osim rotacija, uvodi i translacijske pomake u konfiguracijski prostor krutog tijela. To je jedna od mogućnosti modeliranja konfiguracijskog prostora sustava korištenjem *SE*(3) grupe koja nije primijenjena u ovom radu.

3.3 *SO*(3) grupa

U ovom dijelu rada detaljno je opisana specijalna ortogonalna grupa *SO*(3) zajedno sa svojim svojstvima koja daju matematički okvir za opis integracijskih metoda za izravnu integraciju rotacija na grupi. Prvo je *SO*(3) grupa opisana kao diferencijabilna mnogostrukost, a kasnije su predstavljene Lieva grupa i Lieva algebra zajedno s eksponencijalnom mapom.

3.3.1 *SO*(3) grupa kao diferencijabilna mnogostrukost

Na *SO*(3) grupu možemo gledati kao na diferencijabilnu mnogostrukost prekrivenu kartama koje se djelomično preklapaju. To proistječe iz definicije *SO*(3) grupe prikazane jednadžbom (3.1), gdje je *SO*(3) grupa definirana kao mnogostrukost ugrađena u *GL*(3) grupu ograničenjem ortogonalnosti. Kao što je već spomenuto, φ preslikava otvoreni skup iz mnogostrukosti *SO*(3) grupe na otvoreni skup u $\mathcal{R}^3 : \varphi : SO(3) \to \mathcal{R}^3$.

Diferencijabilnost *SO*(3) grupe omogućava definiranje tangenti na mnogostrukost, kao i interpretaciju kutne brzine u obliku tangentnog vektora u ishodištu mnogostrukosti *SO*(3) grupe.

Zbog infinitezimalnih kutova rotacije koji se promatraju kao vektorske veličine, kutna brzina također predstavlja vektor. Kako se kutna brzina dobiva iz derivacije matrice rotacije po vremenu koja pripada *SO*(3) grupi, u okviru teorije Lievih grupa to je vektor koji se nalazi u ishodištu *SO*(3) grupe raspisan preko koso-simetrične matrice (engl. *skew-symmetric matrix*).

Također, mnogostrukost *SO*(3) grupe može se smatrati Riemannovom mnogostrukosti za koju je određena metrika što znači da je određeno glatko polje simetričnog i pozitivno

definitnog metričkog tenzora g_{ij}. U točki $P \in SO(3)$ polje metričkog tenzora prebacuje vektore $\mathbf{v}$ i $\boldsymbol{\omega}$ definirane na tangentnom prostora $T_P SO(3)$, u realne brojeve, što predstavlja poopćenje skalarnog produkta vektora. Iz definicije Riemannove mnogostrukosti proizlazi da $SO(3)$ grupa isto tako zadovoljava sljedeći uvjet: Riemannova mnogostrukost je diferencijabilna mnogostrukost u kojoj je svaki tangentni vektorski prostor opremljen unutarnjim produktom zvanim Riemannova metrika (zadana pozitivno definitna forma na tangentnom prostoru) koja od točke do točke glatko varira.

3.3.2 *SO*(3) kao Lieva grupa

Lieva grupa $\mathcal{G}$ je grupa čiji skup predstavlja diferencijabilnu mnogostrukost s analitičkim operacijama $(X,Y) \to X \cdot Y$ i $X \to X^{-1}$. Operator na grupi f predstavlja glatko preslikavanje s mnogostrukosti na samu sebe $f : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Definicija Lieve grupe preuzeta iz [23] glasi:

Lieva grupa je diferencijabilna mnogostrukost opremljena s produktom $\cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ koji zadovoljava uvjete:

$p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r \quad \forall\, p, q, r \in \mathcal{G}$ (asocijativnost),

$\exists\, \boldsymbol{I} \in \mathcal{G}$ takav da $\boldsymbol{I} \cdot p = p \cdot \boldsymbol{I} \quad \forall\, p \in \mathcal{G}$ (jedinični element),

$\forall\, p \in \mathcal{G} \;\; \exists \;\; p^{-1} \in \mathcal{G}$ takav da $p^{-1} \cdot p = \boldsymbol{I}$ (inverz),

Preslikavanja $(p, r) \mapsto p \cdot r$ i $p \mapsto p^{-1}$ glatke su funkcije (glatkoća).

Druga definicija preuzeta iz [39], spomenuta u potpoglavlju 2.2.7, predstavlja Lievu grupu kao konačno-dimenzionalnu C^∞ mnogostrukost $\mathcal{G}$ sa C^∞ preslikavanjima (difeomorfizmima). To su preslikavanja koja za svaki element $\mathbf{y}$ iz $\mathcal{G}$ preslikavaju $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{yz}$ (lijeva translacija) ili $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{zy}$ (desna translacija).

Lieve grupe su dobile naziv po norveškom matematičaru Mariusu Sophusu Lieu koji je u drugoj polovici devetnaestog stoljeća postavio temelje teorije kontinuiranih transformacijskih grupa, te ih primijenio na geometrijske probleme i rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Iz definicija Lieve grupe može se zaključiti da je Lieva grupa mnogostrukost, a točke na mnogostrukosti elementi grupe. Dimenzija Lieve grupe jednaka je dimenziji pridružene mnogostrukosti. *SO*(3) grupa je strukturirana na način da vrijedi:

1. Kao prvo, ona je mnogostrukost čija je složena struktura definirana pomoću jednadžbe (3.1) i koja se može lokalno prikazati u prikladnom koordinatnom sustavu vektorskog prostora (u slučaju parametrizacije rotacija).
2. Kao drugo, točke (elementi) na mnogostrukosti predstavljaju matrice rotacije koje formiraju grupu s matričnim množenjem (kompozicija rotacija) kao operacijom na grupi.

Za definiranje Lieve grupe mora postojati mnogostrukost koja posjeduje svojstva grupe, na koju se potom primjenjuje teorija grupe. Iz aksioma i operacije na grupi proistječe posebna struktura tangentnog vektorskog prostora na mnogostrukosti. Kao primjer Lieve grupe može se navesti trodimenzionalni vektorski prostor koji je:

1. Mnogostrukost – može se prikazati u Euklidskom vektorskom prostoru.
2. Grupa – ispunjava grupne aksiome, operaciju na grupi predstavlja zbrajanje vektora (translacije u trodimenzionalnom prostoru), a jedinični element je dan nultim vektorom.

Zbog svojstva 1 i 2 trodimenzionalni vektorski prostor predstavlja Lievu grupu. Tangentni vektorski prostor se podudara s mnogostrukosti zbog čega ima jednaka svojstva kao i mnogostrukost.

3.3.3 Lieva algebra *so*(3)

Na Lievoj grupi, tangentni prostor u identitetu grupe je vektorski prostor opremljen s matričnim komutatorom (Lieva zagrada $[\,,\,]$ je spomenuta u potpoglavlju 2.2.4) koji predstavlja Lievu algebru. Postoji prirodna korespondencija između elementa grupe i elemenata algebre [40].

Prije ulaženja u detalje i davanja formalne definicije Lieve algebre, dana je definicija algebre navedena u [40]. Lieva algebra se može formirati od skupa elemenata linearnog prostora koji je opremljen operacijom koja kao rezultat opet daje elemente skupa.

Svakoj Lievoj grupi može se pridružiti Lieva algebra čiji vektorski prostor predstavlja tangencijalan prostor grupe $\mathcal{G}$ u ishodišnjem elementu u kojem je sadržana lokalna struktura grupe. Algebra se može nazivati Lievom kada operacije koje se u ovome kontekstu označavaju $[A,B]$ (algebra je zatvorena s obzirom na Liev umnožak $[\ ,\ ]$), za svaki A, B, C vektorskog prostora i $\alpha \in \mathcal{R}$ zadovoljavaju

$$[A,B] = -[A,B],$$

$$[\alpha A,B] = \alpha[A,B],$$

$$[A+B,C] = [A,C]+[B,C],$$

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B] = 0,$$

gdje zadnja jednadžba predstavlja Jacobijev identitet. Prvi identitet predstavlja koso-simetričnost, a treći bilinearnost. Lako se može dokazati vjerodostojnost Jacobijeva identiteta

$$([[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B])\alpha = (AB-BA)C(\alpha)-C(AB-BA)A(\alpha)-A(BC-CB)(\alpha) \\ +(CA-AC)B(\alpha)-B(CA-AC)(\alpha)=0.$$

Vektorski prostor na kojem je definirano bilinearno preslikavanje koje zadovoljava svojstva definirana prvom i trećom jednadžbom naziva se Lieva algebra. Lieva algebra je isto tako zatvorena s obzirom na matrično zbrajanje i skalarno množenje.

Zatvorenost Lieve algebre s obzirom na Lievu zagradu znači da L_A i L_B predstavljaju dva linearna vektorska polja, te se može pokazati da vrijedi [23]

$$[L_A, L_B] = L_C,$$

gdje je $C = AB - BA$. Sve ovo pokazuje da rezultat Lieve zagrade (komutator) pripada vektorskom prostoru definiranom u identitetu grupe, dok umnožak dviju koso-simetričnih matrica ne pripada vektorskom prostoru [40]. To znači da je komutator operacija između elemenata algebre koja za rezultat opet daje elemente algebre.

Za slučaj *SO*(3) grupe, identitet grupe predstavlja unitarna matrica $\boldsymbol{I}$, pa je Lieva algebra *so*(3) definirana u identitetu u obliku jedinične matrice i sastoji se od koso-simetričnih matrica. Treba imati na umu da Lieva algebra predstavlja linearni prostor. Upravo spomenuta

linearnost algebre omogućava upotrebu linearnih integratora za integraciju rotacija (vrijede zbrajanje i skalarni umnožak).

Slijedi opis eksponencijalne mape koja predstavlja prirodnu parametrizaciju *SO*(3) grupe.

3.3.4 Eksponencijalna mapa

Specijalna ortogonalna matrica $\mathbf{O}$ može se izraziti kao beskonačan red istovjetan Taylorovom redu za eksponencijalnu funkciju $\exp$. Matrica $\tilde{\mathbf{n}}$ je koso-simetrična matrica koja sadrži jedinične vektore $\mathbf{n}$ rotacijskih osi u obliku

$$\tilde{\mathbf{n}} = -\varepsilon_{ijk}\mathbf{n},$$

gdje je ε_{ijk} Levi-Civita permutacijski simbol. Permutacija iz vektora $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}^T$ formira koso-simetričnu matricu

$$\tilde{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Ako je iznos kuta rotacije oko osi $\mathbf{n}$ dan s ψ, matrica orijentacije se može izraziti u obliku

$$\mathbf{O} = \exp(\psi\tilde{\mathbf{n}}) = \exp(\tilde{\psi}),$$

koji se naziva eksponencijalnim preslikavanjem. Specijalna ortogonalna matrica kao i $\exp$ funkcija imaju istu ekspanziju, no međutim, tu završava svaka njihova poveznica i sličnost. Kao primjer toga mogu se spomenuti komutacijska svojstva eksponencijalne funkcije koja se ne mogu koristiti budući da u općem slučaju matrice ne komutiraju.

Eksponencijalnu mapu možemo interpretirati kao aproksimaciju konačne rotacije u obliku kompozicija velikog broja malih rotacija [40].

U skladu s gore navedenim, slijedi detaljno objašnjenje eksponencijalne mape. Ako je krivulja na Lievoj grupi, koja prolazi kroz identitet dana s

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t),$$
$$\mathbf{A}(0) = \boldsymbol{I},$$

tada tangentni vektor na krivulju u identitetu grupe ima formu

$$\boldsymbol{\psi} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Spomenuti tangentni vektor pripada tangentnom vektorskom prostoru i nalazi se u identitetu grupe (mnogostrukosti). Može se pokazati da izraz

$$\mathbf{A}(t) = \exp(t\mathbf{X}),$$

predstavlja rješenje problema početne vrijednosti

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{XA},\ \mathbf{A}(0) = \boldsymbol{I}.$$

Iz problema početne vrijednosti i njenog rješenja slijedi da je

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\exp(t\mathbf{X})) = \mathbf{X}\exp(t\mathbf{X}) = \mathbf{XA},$$

pa se može pokazati da je

$$\mathbf{X} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Ako se gore navedene formulacije izraze pomoću ortogonalne matrice rotacije $\mathbf{R}$, dobiva se jednadžba (3.4)

$$\mathbf{R} = \exp(t\tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \exp(\tilde{\boldsymbol{\psi}}), \tag{3.4}$$

koja predstavlja rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

Korištenjem $\mathbf{R}(0) = \boldsymbol{I}$ slijedi da je $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ vektor (matrica formirana iz vektora) u $\boldsymbol{I}$ definiran u obliku

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Iz svojstva ortogonalnosti $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}$ proizlazi da matrica $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ zadovoljava relaciju

$$\frac{d\mathbf{R}\mathbf{R}^T}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T,$$

koja potvrđuje da matrica $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ mora biti koso-simetrična.

Budući da je $\mathbf{R}$ element $SO(3)$ grupe, a $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ vektor u tangentnom prostoru definiran u identitetu grupe $\boldsymbol{I}$, koji je istovremeno i Lieva algebra, dobiva se da eksponencijalno preslikavanje

$$\mathbf{R} = \exp(t\tilde{\boldsymbol{\omega}}),$$

preslikava vektore tangentne na $SO(3)$ u $\boldsymbol{I}$, na elemente $SO(3)$ grupe. Također, ako je Lieva algebra definirana u identitetu $SO(3)$ označena s $so(3)$, može se reći da eksponencijalna mapa povezuje elemente Lieve algebre $so(3)$ s elementima Lieve grupe $SO(3) : \exp : so(3) \to SO(3)$.

Gornji izrazi su namijenjeni elementima vektorskog prostora definiranih u identitetu grupe, no međutim i za elemente vektorskog prostora koji se nalazi u drugim točkama mnogostrukosti, dobivaju se slični rezultati. Ako je $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ krivulja koja prolazi kroz $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{R}$, tada vektor tangentan u $\mathbf{R}$ dan je s

$$\mathbf{R} = \left.\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Krivulja $\mathbf{P} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}(t)$ zadovoljava jednakost $\mathbf{P}(0) = \boldsymbol{I}$ i izraz

$$\left.\frac{d\mathbf{P}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tag{3.5}$$

je koso-simetričan.

Izlazi da je vektorski prostor tangentan na $SO(3)$ u $\mathbf{R}$ (ne nužno jednak $\boldsymbol{I}$) predstavlja prostor matrice $\dot{\mathbf{R}}$ takav da je matrica definirana u jednadžbi (3.5) koso-simetrična. Koso-simetrična matrica $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ pripada Lievoj algebri definiranoj u identitetu, dok matrica $\dot{\mathbf{R}}$ nije koso-simetrična i pripada tangentnom vektorskom prostoru u točki $\mathbf{R}$ $SO(3)$ grupe. Ako se na $\dot{\mathbf{R}}$ gleda kao na derivaciju matrice rotacije, tada $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ predstavlja matematičku reprezentaciju (u formi koso-simetrične matrice) kutne brzine kao Lieve algebre $so(3)$. Izraz

$$\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{R}}, \tag{3.6}$$

je invarijantan pod lijevim množenjem specijalnih ortogonalnih matrica, dok desna invarijanta vrijedi za izraz

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}'\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}}, \tag{3.7}$$

koji se dobiva kada je krivulja $\mathbf{P}(t)$ definirana kao $\mathbf{P} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}^T$.

U kontekstu dinamike krutog tijela, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}'$ u izrazu (3.7) predstavlja kutnu brzinu u inercijalnom koordinatnom sustavu (apsolutna kutna brzina). Sukladno tome, ovisno o matematičkoj formulaciji koja se koristi, odabire se lijeva ili desna invarijanta i pomoću nje se dobiva kutna brzina u traženom koordinatnom sustavu.

Newton-Eulerove jednadžbe koje opisuju dinamiku krutog tijela

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}, \tag{3.9}$$

uključuju sve koordinate koje daju položaj i orijentaciju tijela, tj. vremensku promjenu položaja i orijentacije. Spomenute jednadžbe čine ODJ sustav koji je jednostavan za rješavanje ali za slučaj sustava više tijela u formulaciju ulaze i jednadžbe konfiguracijskih ograničenja što daje drugačiji, kompliciraniji sustav jednadžbi.

Ovisno o vrsti, ograničenja se mogu matematički izraziti u obliku skupa algebarskih ili diferencijalnih jednadžbi. Jedna od osnovnih podjela je podjela na holonomna ograničenja izražena u obliku integrabilnih jednadžbi u implicitnoj formi

$$f_r(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N,t) = 0,\ r = \{1,...,K < 3N\}, \tag{3.10}$$

te na neholonomna ograničenja koja predstavljaju neintegrabilne jednadžbe u implicitnoj formi

$$f_r(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N,\dot{\mathbf{r}}_1,...,\dot{\mathbf{r}}_N,t) = 0,\ r = \{1,...,K < 3N\}.$$

Nadalje, ograničenja se mogu podijeliti i prema vremenskoj ovisnosti na vremenski ovisna reonomna ograničenja i skleronomna ograničenja koja ne ovise o vremenu.

Rješavanje dinamičkog modela sustava više tijela zahtijeva istovremeno rješavanje dinamičkih jednadžbi i jednadžbi ograničenja što je omogućeno uvođenjem sila ograničenja u jednadžbe. Umjesto sila ograničenja (okomitih na površinu ograničenja), koje nisu poznate, a na temelju pretpostavke da kod idealnih ograničenja nema trenja, uvode se Lagrangeovi multiplikatori. S obzirom na gore navedeno obrazloženje, *i*-ta sila ograničenja može se izraziti u obliku

$$Q_i^C = \lambda_i \nabla f_i(\mathbf{r}, t), \tag{3.11}$$

gdje je $\nabla f_i(\mathbf{r},t)$ gradijent koji daje vektor okomit na površinu ograničenja $f_i(\mathbf{r},t)$. Lagrangeov multiplikator je označen s λ_i, a predstavlja iznos sile ograničenja. Na taj se način rješavanjem sustava jednadžbi, istovremeno rješavaju i jednadžbe Lagrangeovih multiplikatora.

U ovom radu dinamičke jednadžbe će biti formulirane u proširenoj (engl. *descriptor*) formi, što znači da će broj koordinata (diferencijalnih jednadžbi) biti veći od broja stupnjeva slobode gibanja [11].

Matrica inercije *i*-tog tijela je izražena u obliku

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i \end{bmatrix},$$

gdje je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica. Uvođenje vektora $\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i & \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}^T$ omogućava objedinjavanje jednadžbi (3.8) i (3.9) u jednu matričnu jednadžbu oblika

$$\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{Q}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{Q}_i^C(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}, \tag{3.12}$$

gdje $\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$ predstavlja vanjske sile i sile nelinearnih članova brzina, a $\mathbf{Q}_i^C(\mathbf{r}_i)$ su sile u ograničenjima *i*-tog tijela. Bitno je naglasiti da vektor $\mathbf{r}_i$ sadrži translacijske i rotacijske koordinate.

Definiranjem gradijenta matrice sila ograničenja u obliku

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \nabla \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \mathbf{r}},$$

te uvođenjem Lagrangeovih multiplikatora $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ldots \lambda_K]^T$, mogu se izvesti jednadžbe sustava više tijela u obliku [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{C}^T(\mathbf{r})\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Matricom $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})$ objedinjene su sve funkcije ograničenja $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = [f_1(\mathbf{r}) \ldots f_K(\mathbf{r})]^T$.

Sustav jednadžbi (3.13) predstavlja skup diferencijalno algebarskih jednadžbi dimenzije $6N + K$. U sustavu jednadžbi javlja se po 6 nepoznatih funkcija za svako tijelo i K nepoznatih Lagrangeovih multiplikatora.

Predstavljene jednadžbe formiraju DAE sustav jednadžbi indeksa tri, budući da su jednadžbe ograničenja uvedene kao ograničenja na poopćenim pomacima sustava (translacije i rotacije). Umjesto 'reda' diferencijalne jednadžbe koji za ODJ predstavlja red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje, u kontekstu DAE sustava jednadžbi, upotrebljava se pojam 'indeks' DAE sustava koji označava koliko puta je potrebno diferencirati algebarske jednadžbe u okviru DAE skupa jednadžbi da bi se dobio ekvivalentan sustav ODJ drugog reda [43].

Ako se holonomna kinematička ograničenja (3.10) na poopćenim pomacima sustava preoblikuju u oblik algebarskih ograničenja na nivou akceleracija sustava [8], dobiva se DAE sustav jednadžbi indeksa jedan. Jednadžbe ograničenja na nivou akceleracija, za holonomne sustave, jednostavno se dobivaju dvostrukim deriviranjem jednadžbi ograničenja po vremenu

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Nadalje, jednadžbe kinematičkih ograničenja na nivou akceleracija mogu se izraziti u obliku

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\xi},$$

koje zajedno s prvom jednadžbom sustava (3.13) daju DAE sustav indeksa jedan u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

U tom slučaju matrica inercije $\mathbf{M}$ je konstantna i koristi se lijevo-invarijantna forma (3.6). Detaljnija objašnjenja oko formulacije jednadžbi za MBS sustave mogu se naći u [11].

3.3.5 Veza između vektorskih prostora u različitim točkama *SO*(3) grupe

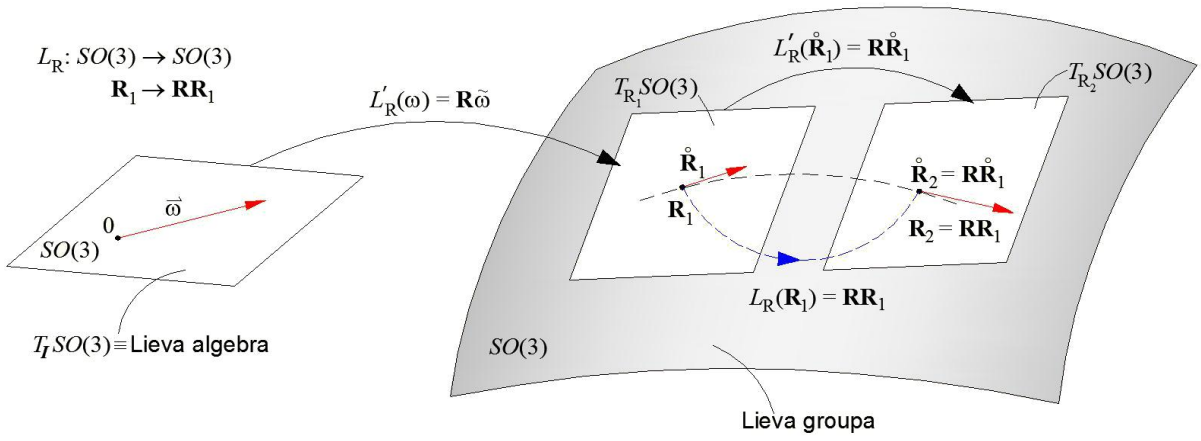
Prije definiranja relacije između vektorskih prostora, potrebno je prisjetiti se operacija na Lievoj grupi. Operacija na *SO*(3) Lievoj grupi je matrično množenje koje predstavlja kompoziciju rotacija u obliku

$$\mathbf{R}_{new} = \mathbf{R}_{old}\mathbf{R}\,, \tag{3.15}$$

gdje je $\mathbf{R}$ matrica rotacije koja predstavlja promjenu orijentacije tijela između dvije orijentacije $\mathbf{R}_{old}$ i $\mathbf{R}_{new}$. Spomenuto je u potpoglavlju 3.3.2 da posebna struktura i svojstva tangentnog vektorskog prostora na mnogostrukosti proizlaze iz operacija na grupi. To znači da veza između vektorskih prostora uključuje operacije na grupi, tj. veza se dobiva pomoću operacija na grupi.

Redoslijed rotacija u kompoziciji definiran je jednadžbom (3.15) koja se koristi u odabranim integracijskim metodama za komponiranje koraka rotacije.

Slika 3.2 pokazuje vezu između dva vektorska prostora u obliku dviju točaka na Lievoj grupi povezanih operacijom na grupi, dok su tangentni vektorski prostori povezani s lijevim invarijantnim vektorskim poljem.



Slika 3.2: Veza između dva vektorska prostora i Lieve algebre.

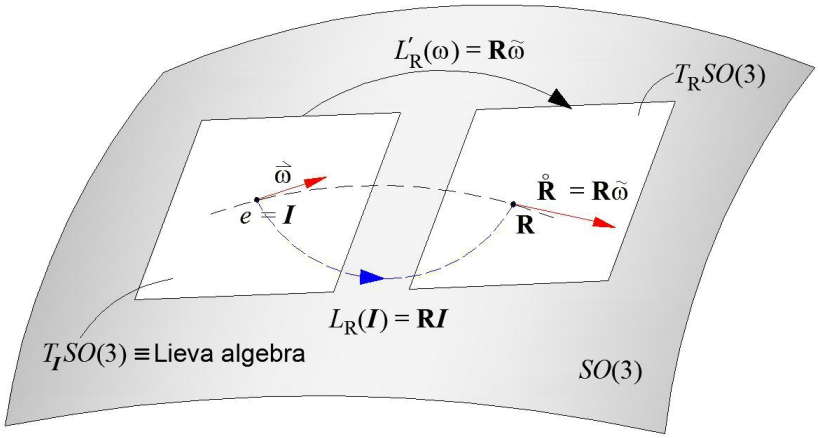
Operacija na grupi (3.15) predstavlja translaciju na *SO*(3) grupi. Na sličan način dva tangentna vektorska prostora u točkama 1 i 2 međusobno su povezana izrazom

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}_1\dot{\mathbf{R}}\,. \tag{3.16}$$

Bitno je naglasiti da točke 1 i 2 nisu proizvoljne i moraju ležati na istoj integralnoj krivulji na Lievoj grupi. Integralna krivulja na Lievoj grupi povezana je samo sa jednim elementom Lieve algebre, tj. kutnom brzinom $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$. To se može vidjeti kada se diferencijalna jednadžba na $SO(3)$ izrazi u obliku jednadžbe (3.16)

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}. \tag{3.17}$$

Na slici 3.3 prikazana je veza između elementa Lieve algebre $\boldsymbol{\omega}$ i vektora u proizvoljno odabranoj točki $\mathbf{R}$ tangentnog vektorskog prostora.



Slika 3.3: Veza između Lieve algebra i tangentnog vektorskog prostora.

U jednadžbi (3.17) korišteno je lijevo-invarijantno vektorsko polje što je vidljivo iz rasporeda elemenata u izrazu (3.17), gdje je koso-simetrična matrica kutne brzine pomnožena s lijeve strane matricom rotacije.

4

METODA INTEGRACIJE ZA SUSTAVE VIŠE TIJELA NA LIEVOJ GRUPI PROSTORA STANJA

U ovom poglavlju opisana je novopredložena metoda integracije, projektirana proširenjem i redizajniranjem Munthe-Kaas algoritma za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi na Lievim grupama [1] s ciljem utvrđivanja polaznih točaka potrebne prilagodbe. Ona je odabrana kao primjeren geometrijski integracijski algoritam za numeričko izračunavanje dinamike karakteristične zračne letjelice s rotirajućim krilom (helikopter).

4.1 Konfiguracijski prostor mehaničkog sustava više tijela

Konfiguracijski prostor mehaničkog sustava više tijela modeliran je kao Lieva grupa $\mathcal{G} = \mathcal{R}^3 \times SO(3) \times ... \times \mathcal{R}^3 \times SO(3)$ (k kopija od $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$) s elementom oblika

$$q = (\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_1, ..., \mathbf{r}_k, \mathbf{R}_k), \tag{4.1}$$

gdje je $SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{3x3} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}, \det \mathbf{R} = +1\}$ trodimenzionalna specijalna ortogonalna grupa (Lieva grupa rotacije krutog tijela). Svaki od k faktora $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$ predstavlja konfiguracijski prostor jednog krutog tijela, izraženog pomoću vektora položaja središta mase i matrice rotacije kojom se uvodi orijentacija tijela u globalnom koordinatnom sustavu $(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i)$. Lieva grupa $\mathcal{G}$ ima dimenziju $n = 6k$ gdje k predstavlja broj krutih tijela. Lijevo množenje na grupi je dano s $L_q : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\bar{q} \mapsto q \cdot \bar{q}$, gdje je produkt operacije na $\mathcal{G}$ definiran kao $q \cdot \bar{q} = (\mathbf{r}_1 + \bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{R}_1\bar{\mathbf{R}}_1, ..., \mathbf{r}_k + \bar{\mathbf{r}}_k, \mathbf{R}_k\bar{\mathbf{R}}_k)$, a jedinični element (identitet) grupe

$e = (\mathbf{0}_1, \boldsymbol{I}_1, ..., \mathbf{0}_k, \boldsymbol{I}_k)$. Primijenjeno je lijevo-invarijantno vektorsko polje $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$, definirano kao

$$\dot{\mathbf{R}}_i(t) = \mathbf{R}_i(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i, \tag{4.2}$$

tako da je kutna brzina tijela kao element Lieve algebre *so*(3), izražena u lokalnom koordinatnom sustavu tijela. Element Lieve algebre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ može se poistovjetiti s $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ preko operatora koji preslikava vektor $\boldsymbol{\omega}_i \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ u koso-simetričnu matricu $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Brzina krutog tijela *i* može se izraziti preko parova $(\mathbf{v}_i, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3)$ ili $(\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$. Tako definirana Lieva grupa $\mathcal{G}$ ima Lievu algebru oblika $\mathcal{g} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3) \times ... \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3)$ s elementom oblika

$$v = (\mathbf{v}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, ..\mathbf{v}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k). \tag{4.3}$$

U radu je korištena vektorska notacija $\mathbf{v} = \left[\mathbf{v}_1^T, \boldsymbol{\omega}_1^T, ...\mathbf{v}_k^T, \boldsymbol{\omega}_k^T\right]^T$ za formulaciju matematičkog modela koji se temelji na matričnoj notaciji.

Također možemo definirati Lievu grupu prostora stanja MBS sustava koja, uz vektorske prostore translacija i Lieve grupe rotacija, sadrži i vektorske prostore translacijskih brzina i Lieve algebre kutnih brzina. Prostor stanja MBS sustava dan je izrazom $\mathcal{S} = \mathcal{G} \times \mathcal{g}$, tj. $\mathcal{S} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times SO(3) \times ... \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times SO(3) \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3) \times ... \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3) \cong T\mathcal{G}$ ($\mathcal{S}$ je lijeva trivializacija tangentnog svežnja $T\mathcal{G}$) s elementom

$$x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_1, ..., \mathbf{r}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{v}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 ..., \mathbf{v}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k). \tag{4.4}$$

Lieva algebra $\mathcal{s}$ prostora stanja $\mathcal{S}$ dana je izrazom $\mathcal{s} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3) \times ...$ $... \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3) \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times ... \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ s elementom $z \in \mathcal{s}$ oblika

$$z = (\mathbf{v}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, ..., \mathbf{v}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k, \dot{\mathbf{v}}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1, ..., \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{\boldsymbol{\omega}}_k), \tag{4.5}$$

koji sažima brzinu i akceleraciju MBS sustava. Zbog jasnoće, uvedene operacije na Lievoj grupi prostora stanja razmatrane su na primjeru jednog tijela, kako slijedi:

a) Lijevo množenje na $\mathcal{S} = \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times SO(3) \times \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \times so(3)$ je dano s $L_x : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\bar{x} \mapsto x \cdot \bar{x}$ gdje je produkt operacije $(a, b, c, d) \cdot (e, f, g, h) = (a + e, b \cdot f, c + g, d + h)$.

b) Zbrajanje na $\mathcal{S} = \mathcal{R}^3 \times so(3) \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ $(u, w, c, d) + (\bar{u}, \bar{w}, \bar{c}, \bar{d}) = (u + \bar{u}, w + \bar{w}, c + \bar{c}, d + \bar{d})$.

c) Množenje skalarom na $\mathcal{S} = \mathcal{R}^3 \times so(3) \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$: $\alpha(u, w, c, d) = (\alpha u, \alpha w, \alpha c, \alpha d)$.

d) Eksponencijalna mapa na $\mathcal{S} = \mathcal{R}^3 \times so(3) \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$: $\exp(u, w, c, d) = (u, \exp\mathrm{m}(w), c, d)$.

e) Zagrada na $\mathcal{S} = \mathcal{R}^3 \times so(3) \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$: $[(u, w, c, d), (\bar{u}, \bar{w}, \bar{c}, \bar{d})] = (0, [w, \bar{w}], 0, 0)$.

Na desnoj strani gore navedenih izraza, '$\cdot$' predstavlja množenje na $SO(3)$, '+' je zbrajanje na $\mathcal{R}^3$ i $so(3)$, 'expm' je eksponencijalnu mapu na $so(3)$, a $[w, \bar{w}]$ je Lieva zagrada (matrični komutator $[w, \bar{w}] = w\bar{w} - \bar{w}w$ za Lievu algebru $so(3)$).

Nužno je povezati tangentni prostor konfiguracijskog prostora Live grupe $\mathcal{G}$ u danoj konfiguraciji q s njegovom Lievom algebrom. To je dano diferencijalom mape lijevog množenja L_q

$$L_q' : T_e\mathcal{G} \to T_q\mathcal{G} : (\mathbf{v}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, ..., \mathbf{v}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k) \mapsto (\dot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{R}_1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_k, \mathbf{R}_k\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k), \tag{4.6}$$

koja predstavlja linearno preslikavanje translacijske brzine $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$. Diferencijalom mape lijevog množenja definirana je veza između vremenske derivacije $\dot{q}$ konfiguracije MBS sustava i brzine $v \in \mathcal{J}$ preko tangentne mape

$$\dot{q} = L_q'(v), \tag{4.7}$$

koja omogućava kinematičku rekonstrukciju gibanja iz vektorskog polja brzina v. Jednadžba (4.7) predstavlja proširenje lijevo-invarijantne Poissonove jednadžbe (4.2), kojom je definirana veza između $\dot{\mathbf{R}}_i$ i $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$, a koja se u takvom proširenom obliku koristi za sustave od k međusobno nepovezanih krutih tijela čiji je konfiguracijski prostor $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$. Nadalje, isto tako, može se reći da jednadžbe (4.2) i (4.7) predstavljaju skup svih $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_\mathrm{i}$ i $\dot{\mathbf{R}}_i(t) = \mathbf{R}_i(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ za sva tijela $i = 1, ..., k$ u sustavu, pomoću kojih je definirana veza translacijskih i kutnih brzina s derivacijama vektora položaja i matricama rotacije.

Prema analogiji izraza (4.6) izveden je izraz za prostor stanja $\mathcal{S} = \mathcal{G} \times \mathcal{J}$ u obliku

$$L_x' : T_e\mathcal{S} \to T_x\mathcal{S}, (\mathbf{v}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, .., \mathbf{v}_k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k, \dot{\mathbf{v}}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1, .., \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{\boldsymbol{\omega}}_k) \mapsto (\dot{\mathbf{r}}_1, \mathbf{R}_1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, .., \dot{\mathbf{r}}_k, \mathbf{R}_k\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k, \dot{\mathbf{v}}_1, \dot{\boldsymbol{\omega}}_1, .., \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{\boldsymbol{\omega}}_k), \tag{4.8}$$

koji povezuje Lievu algebru $\mathcal{S}$ s tangentnim prostorom u x, te omogućava povezivanje vremenske derivacije elementa prostora stanja MBS sustava sa sažetim oblikom brzine i akceleracije $z \in \mathcal{S}$

$$\dot{x} = L'_x(z). \tag{4.9}$$

Ukratko, Lieve grupe $\mathcal{G}$ i $\mathcal{S}$ se koriste kao konfiguracijski prostor i prostor stanja MBS sustava.

Izraz (4.7) omogućava kinematičku rekonstrukciju jednadžbi stanja sustava više tijela (poopćene položaje) koje se mijenjaju pri gibanju sustava nekom brzinom. Rješavanjem tih jednadžbi na temelju poznatog vektorskog polja, određuje se gibanje MBS sustava. Jednadžba kinematičke veze (4.9) određuje promjene stanja MBS sustava kada se on giba nekom brzinom i akceleracijom. To je polazni izraz za projektiranje dolje opisane integracijske procedure na Lievoj grupi.

4.2 Kinematička rekonstrukcija gibanja

Rekonstrukcija orijentacije krutog tijela $\mathbf{R}(t)$ temelji se na kutnoj brzini $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t) \in so(3)$ dobivenoj rješavanjem jednadžbe (4.2). Rješenje jednadžbe (4.2) ima oblik [23]

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \exp\mathrm{m}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)), \tag{4.10}$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na $SO(3)$ grupi dana Euler-Rodriguesovim izrazom [40]

$$\exp_{SO(3)}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\|\boldsymbol{\theta}\|)}{\|\boldsymbol{\theta}\|}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1-\cos(\|\boldsymbol{\theta}\|)}{\|\boldsymbol{\theta}\|^2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \tag{4.11}$$

U izrazu (4.10), $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathcal{R}^3$ predstavlja trenutni lokalni rotacijski vektor, a $\mathbf{R}_0$ matricu početne rotacije. Jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela (4.2) predstavlja ODJ na Lievoj grupi $SO(3)$ za čije se rješavanje mogu koristiti geometrijske integracijske metode koje operiraju na Lievim grupama [23]. Integracija jednadžbe (4.2) ishodišnja je primjena integracijskih algoritama na Lievoj grupi koja se može proširiti na slučajeve MBS sustave sa slobodnim tijelima. Kao što je gore pokazano, jednadžba kinematičke rekonstrukcije (4.7)

omogućava izravnu primjenu integracijskih algoritama na Lievoj grupi na cjelokupnu kinematiku MBS sustava.

Cilj projektirane procedure nije samo rješavanje kinematike MBS sustava, već objedinjavanje numeričke integracije kinematike i dinamike MBS sustava. Ključno je spomenuti da jednadžbe (4.7) koje operiraju na Lievoj grupi konfiguracijskog prostora i jednadžbe (4.9) koje operiraju na Lievoj grupi prostora stanja imaju istovjetnu matematičku strukturu što omogućava njihovu integraciju pomoću iste geometrijske procedure. Osim navedenih značajki, projektirana procedura mora algoritamski zadovoljavati i određena kinematička ograničenja koja proistječu iz strukture MBS sustava. Matematički model konstrukcijskog MBS sustava uobličen je u DAE sustav jednadžbi indeksa jedan. To se postiže preoblikovanjem holonomnih kinematičkih ograničenja, koja su u izvornom obliku DAE modela indeksa tri uvedena kao ograničenja na poopćenim pomacima sustava (translacije i rotacije), u oblik algebarskih ograničenja na nivou akceleracija sustava [8]. Glavna poteškoća takvog rješavanja je nužnost uvođenja stabilizacijskog algoritma dinamičkog odziva s obzirom da numeričko rješenje dobiveno opisanim načinom nezaobilazno sadrži numeričke povrede kinematičkih ograničenja na nivou poopćenih pomaka i brzina.

Zadaća predložene metode integracije DAE zadaća na Lievim grupama prostora stanja [1], rješavanje je jednadžbe (4.9) pomoću integracijskih algoritama na Lievoj grupi, te određivanje brzina i akceleracija $z \in \mathcal{S}$ iz dinamike MBS sustava u uvjetima prisutnosti kinematičkih ograničenja.

4.3 Formulacija dinamičkog modela

Za formulaciju dinamičkog modela sustava više tijela s holonomnim kinematičkim ograničenjima, uvodimo Newton-Eulerove jednadžbe u obliku

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}^T(q)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(q, \mathbf{v}, t), \tag{4.12a}$$

$$\dot{q} = L_q'(v), \tag{4.12b}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(q) = 0, \tag{4.12c}$$

gdje je $\mathbf{M}$ poopćena matrica inercije dimenzije $n \times n$ (sadrži mase i tenzore inercije), a $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{v} = \left[\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\omega}_1, ..., \mathbf{v}_k, \boldsymbol{\omega}_k\right]^T$ su brzine sustava k tijela. $\mathbf{Q}$ predstavlja vanjske i sve

ostale sile koje djeluju na sustav, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^m$ je vektor Lagrangeovih multiplikatora dok je s $\mathbf{C}$ označena $m \times n$ Jacobieva matrica kinematičkih ograničenja za koju vrijedi $\boldsymbol{\Phi}'(v) = \mathbf{C}(q)\mathbf{v}$ (gdje je $\boldsymbol{\Phi}'$ diferencijal mape kinematičkih ograničenja $\boldsymbol{\Phi}(q) : \mathcal{G} \to \mathcal{R}^m$). Uslijed djelovanja kinematičkih veza, gibanje mehaničkog sustava ograničeno je na podmnogostrukost $\mathcal{N} = \{q \in \mathcal{G} : \boldsymbol{\Phi}(q) = \mathbf{0}\}$ dimenzije $n - m$. Neki autori konfiguracijski prostor (prostor sustava slobodnih tijela $\mathcal{G}$ na kojem su definirana geometrijska ograničenja $\boldsymbol{\Phi}(q) = \mathbf{0}$) nazivaju okolišnim konfiguracijskim prostorom [4].

Sustav jednadžbi (4.12) predstavlja DAE sustav jednadžbi indeksa tri na Lievoj grupi $\mathcal{G}$. Matrična jednadžba (4.12a) predstavlja dinamičke jednadžbe MBS sustava ovisne o jednadžbama konfiguracijskih ograničenjima (4.12c) koje su nadopunjene jednadžbama kinematičke rekonstrukcije (4.12b). Kao što je već spomenuto, rezultati integracije sustava jednadžbi (4.12) moraju zadovoljavati jednadžbe kinematičkih ograničenja na nivou brzine

$$\mathbf{C}(q)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{4.13}$$

i akceleracije sustava

$$\mathbf{C}(q)\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\xi}(q, \mathbf{v}), \tag{4.14}$$

dobivene iz prve i druge derivacije ograničenja na nivou poopćenih pomaka $\boldsymbol{\Phi}(q) = \mathbf{0}$ (isti postupak kao za slučaj klasične formulacije MBS sustava). Ovdje je pretpostavljeno da dinamički model MBS sustav ima skleronoma ograničenja ali model je lako modificirati i za slučaj MBS sustava s reonomnim ograničenjima. Kako je gore pokazano, jednadžbe ograničenja u matričnoj notaciji (4.12c), (4.13) i (4.14) kao i dinamička jednadžba (4.12a) imaju identične izraze kao što bi imale u slučaju dinamičkog modela formuliranog pomoću klasične formulacije MBS sustava [44].

Iako (4.12) predstavlja DAE sustave jednadžbi indeksa tri kojeg je moguće izravno integrirati pomoću više različitih algoritama [29], u svrhu formuliranja dinamičkog modela primjerenog za kinematičku rekonstrukciju na $\mathcal{S} = \mathcal{G} \times \mathcal{g}$ i korištenje Munthe-Kaas algoritma za rješavanje ODJ, sustav jednadžbi (4.12) je preformuliran u DAE sustave indeksa jedan u obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Tijekom dobro poznate procedure snižavanja indeksa DAE sustava jednadžbi, jednadžba ograničenja na nivou položaja (4.12c) zamijenjena je jednadžbom ograničenja na nivou akceleracije (4.14), dok su dinamičke jednadžbe ostale jednake kao u formulaciji (4.12).

Uz izravno zadovoljavanje ograničenja na nivou akceleracija (4.14) koja su eksplicitno uključena u dinamički model, rezultati integracije sustava jednadžbi (4.15) moraju zadovoljiti i kinematička ograničenja na nivou položaja (4.12c) i brzina (4.13) (nazivaju se još i skrivenim ograničenjima (engl. *hidden constraints*)) [45].

Ideja o formulaciji modela prostora stanja na Lievoj grupi temelji se na jednadžbi (4.9) i izuzimanju $z(x,t) \in \mathcal{S}$ iz definicije ograničenja dinamičkog modela MBS sustava (4.15). Za poopćene sile $\mathbf{Q}(x,t)$, linearni algebarski sustav (4.15) može se riješiti uvođenjem preslikavanja

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{H}(t, x, \mathbf{Q}) \ . \tag{4.16}$$

Predstavljanjem preslikavanja $\mathcal{F}: \mathcal{R} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definiranog kao

$$\mathcal{F}(t,x) = (v, \mathcal{H}(t,x)) \, , \tag{4.17}$$

dinamičke jednadžbe MBS sustava zajedno s (4.9) čine prostor stanja oblika

$$\dot{x} = L'_x(\mathcal{F}(t,x)) \, . \tag{4.18}$$

Ovdje je potrebno napomenuti da je DAE sustav jednadžbi indeksa jedan (4.15) u istoj (matričnoj) formi kakva se javlja i u klasičnim MBS formulacijama na vektorskim prostorima [46]. Spomenuta tvrdnja, naravno, vrijedi uz pretpostavku da su polja brzina i akceleracija izražena pomoću $\mathbf{v}$ i $\dot{\mathbf{v}}$ (tj. pomoću translacijskih i kutnih brzina tijela), a kinematička ograničenja (4.12c), (4.13) i (4.14) pomoću q (tj. pomoću vektora položaja središta mase $\mathbf{r}_i$ i matrice rotacije $\mathbf{R}_i$), $\mathbf{v}$ (ili v) i $\dot{\mathbf{v}}$.

Za razliku od klasičnih formulacija MBS sustava koje koriste troosne lokalne koordinate za parametrizaciju velikih rotacija, kod koje se nužno pojavljuju kinematički singulariteti [47], dolje opisani geometrijski algoritam na Lievoj grupi, omogućava jednostavnu integraciju dinamičkog modela u obliku DAE sustava indeksa jedan (4.15) i istovremenu kinematičku rekonstrukciju na q bez pojave singulariteta. Razlog tome je što odabrani geometrijski integracijski algoritam ne operira na vektorskom prostoru lokalnih poopćenih koordinata, već izravno na diferencijabilnoj mnogostrukosti prostora stanja mehaničkog sustava, te time u

potpunosti zaobilazi pojavu singulariteta i omogućava korištenje algoritma u kompaktnoj formi.

4.4 Integracijski algoritam na Lievoj grupi prostora stanja sustava više tijela

Izraz (4.18) predstavlja ODJ na Lievoj grupi $\mathcal{S}$ koje se mogu numerički rješavati korištenjem geometrijskih integracijskih metoda koje operiraju na Lievoj grupi. Za tu namjenu korišten je Munthe-Kaas algoritma za rješavanje ODJ na Lievoj grupi [21]. Na temelju tog pristupa, rješenje (4.18) je izraženo u formi

$$x(t) = x(0)\exp(u(t)), \tag{4.19}$$

gdje $u(t) \in \mathcal{S}$ predstavlja rješenje ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre $\mathcal{S}$ [4] u obliku

$$\dot{u} = \mathrm{dexp}^{-1}_{-u}(z(x,t)), u(0) = 0, \tag{4.20}$$

s operatorom dexp^{-1}_{-u} oblika

$$\mathrm{dexp}^{-1}_{-\bar{z}}(z) = (\mathrm{d}\exp^{-1}_{(-\bar{\mathbf{v}},-\bar{w})}(\mathbf{v},w),\dot{\mathbf{v}},\dot{w}) = ((\mathbf{v},\mathrm{dexpm}^{-1}_{-\bar{w}}(w)),\dot{\mathbf{v}},\dot{w}), \tag{4.21}$$

gdje je $w(t), \bar{w}(t) \in so(3)$, a $\mathrm{dexpm}^{-1}_{-\bar{w}}$ je inverzna funkcija (temelji se na eksponencijalnom preslikavanju $\mathrm{dexpm}: so(3)\times so(3) \to so(3)$ izvedenom preko lijeve trivijalizacije matrice eksponencijalne mape 'expm' (vidi detalje u dodanom poglavlju A)) izražena u formi

$$\mathrm{dexpm}^{-1}_{-\bar{w}}(w) = w + \frac{1}{2}[\bar{w},w] + \frac{1}{12}[\bar{w},[\bar{w},w]] + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}(-\mathrm{ad}^{j}_{\bar{w}}(w)). \tag{4.22}$$

U izrazu (4.22) adijungirani operator je definiran kao Lieva zagrada

$$\mathrm{ad}_{\bar{w}}(w) = \bar{w}w - w\bar{w} = [\bar{w},w], \text{ za sve } w(t), \bar{w}(t) \in so(3), \tag{4.23}$$

a B_j predstavlja Bernulijev broj.

Budući da izraz (4.20) predstavlja ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre, za njezino se integriranje može koristiti bilo koji od standardnih vektorskih ODJ rješavača (npr. Runge - Kutta metoda četvrtog reda (RK4)). Integracijska metoda projektirana modifikacijom Munthe-Kaas algoritma ne operira na nelinearnoj mnogostrukosti na kojoj je jednadžba (4.18)

definirana, već se točka integracije prebacuje u lokalni tangentni (vektorski) prostor pomoću izraza (4.20) gdje se provodi integracija na Lievoj algebri korištenjem standardnih ODJ rješavača (vidi sliku 4.1.). Za integraciju na Lievoj algebri korištena je RK metoda koja se koristi i u izvornom Munthe-Kaas algoritmu.

Jednadžba (4.20) se može izraziti u obliku

$$\dot{u} = \mathrm{dexp}_{-u}^{-1}(\mathcal{F}(t,x)), u(0) = 0, \tag{4.24}$$

na koji se standardna RK shema može primijeniti u svakom koraku integracije.

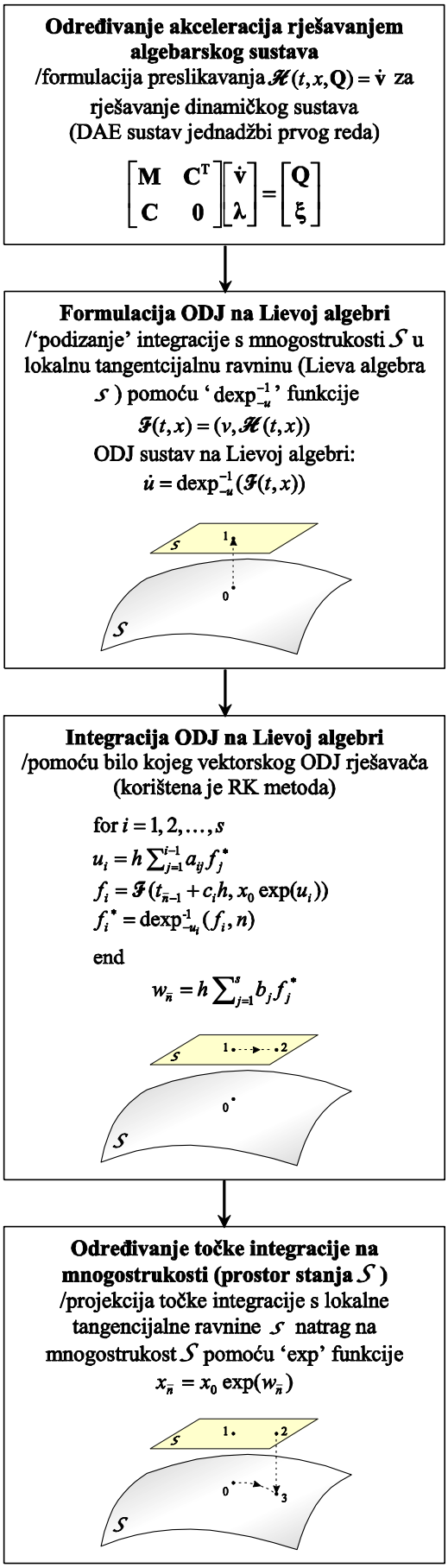
Na temelju [24], korak integracije $\bar{n}$ MK-RK algoritma u vremenskom intervalu $t \in [t_{\bar{n}-1}, t_{\bar{n}} = t_{\bar{n}-1} + h]$ može se izraziti u formi

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_{\bar{n}-1} \\
&\quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, s \\
&u_i = h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j^* \\
&f_i = \mathcal{F}(t_{\bar{n}-1} + c_i h, x_0 \exp(u_i)) \\
&f_i^* = \mathrm{dexp}_{-u_i}^{-1}(f_i, n) \\
&\quad \text{end} \\
&w_{\bar{n}} = h \sum_{j=1}^{s} b_j f_j^* \\
&x_{\bar{n}} = x_0 \exp(w_{\bar{n}})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

gdje su $u, f_i, f_i^*, w_{\bar{n}} \in \mathcal{s}$, koeficijenti a_{ij}, b_j, c_i su definirani Butcherovom tablicom za RK metodu *n*tog reda sa s stadija oblika [23]

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}, \tag{4.26}$$

a funkcija $\mathrm{dexp}_{-u_i}^{-1}(f_i, n)$ je skraćeni oblik (4.21). Zatvorene forme funkcija '$\exp$' i 'dexp^{-1}' na *SO*(3) grupi mogu se naći u [23].



Slika 4.1: Shema integracijske procedure DAE sustava na Lievoj grupi.

Shema opisane integracijske procedure prikazana je na slici 4.1. Procedura kreće od određivanja akceleracija za trenutni korak integracije rješavanjem linearnog algebarskog sustava uobličenog u DAE sustava jednadžbi prvog reda koji predstavlja dinamički model u matričnoj notaciji. Nakon toga, točka integracije se 'podiže' iz nelinearnog prostora stanja mnogostrukosti, tj. Lieve grupe $\mathcal{S}$, u njezin lokalni (vektorski) tangentni prostor, tj. Lievu algebru $\mathcal{s}$, gdje se provodi integracija klasičnih ODJ na linearnom vektorskom prostoru izraženih pomoću novouvedenih lokalnih koordinata u. Po završetku integracije ODJ, točka integracije se projicira natrag na prostor stanja mnogostrukosti $\mathcal{S}$ pomoću 'exp' funkcije, čime je završen korak integracije.

Ukratko, princip rješavana temelji se na podizanju točke integracije s mnogostrukosti prostora stanja u lokalnu tangencijalnu ravninu iz koje se nakon integracijskog koraka vrši projekcija natrag na Lievu grupu prostora stanja.

4.5 Primjena metode integracije DAE zadaća na Lievim grupama prostora stanja na dinamički model zračne letjelice s rotirajućim krilom

Ovo potpoglavlje odnosi se na prilagodbu i primjenu integracijske metode, projektirane modifikacijom Munthe-Kaas algoritma u smislu mogućnosti rješavanja DAE zadaća na Lievim grupama kakve su karakteristične za diskretne mehaničke sustave s kinematičkim ograničenjima, na dinamičku simulaciju poznatog transportnog helikoptera. Primijenjena geometrijska integracijska metoda opisana u prethodnom poglavlju, ne operira na vektorskom prostoru lokalnih rotacijskih koordinata pojedinih elemenata, već izravno na Lievoj grupi prostora stanja diskretnog mehaničkog sustava. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi mnogostrukost prostora stanja mehaničkog sustava, modeliranu pomoću izravnog produkta $SO(3)$ grupa rotacija pojedinih elemenata, te domena translacijskih pomaka elemenata. Na temelju tako oblikovane integracijske metode, sintetizirana je simulacijska procedura prostornog gibanja modela zračne letjelice s rotirajućim krilom.

4.5.1 Definiranje Lieve grupe prostora stanja helikoptera kao krutog tijela

Konfiguracijski prostor helikoptera kao krutog tijela možemo modelirati kao Lievu grupu $\mathcal{G} = \mathcal{R}^3 \times SO(3)$ s elementom oblika

$$q = (\mathbf{r}, \mathbf{R}), \tag{4.27}$$

gdje je $\mathbf{R}$ matrica rotacije kojom se uvodi orijentacija zračne letjelice (stav), a $\mathbf{r}$ vektora položaja središta mase letjelice u globalnom koordinatnom sustavu. U ovom slučaju $\mathcal{G}$ predstavlja šesterodimenzionalnu Lievu grupu. Lijevo množenje na grupi je dano s $L_q : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\bar{q} \mapsto q \cdot \bar{q}$, gdje je produkt operacije na $\mathcal{G}$ definiran kao $q \cdot \bar{q} = (\mathbf{r} + \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{R}\bar{\mathbf{R}})$, a jedinični element grupe $e = (\mathbf{0}, \boldsymbol{I})$.

Kutna brzina helikoptera, izražena u lokalnom koordinatnom sustavu tijela, može se dobiti primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ definiranog kao

$$\dot{\mathbf{R}}_i(t) = \mathbf{R}_i(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i, \tag{4.28}$$

gdje je *so*(3) Lieva algebra od *SO*(3). Budući da se element Lieve algebre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ može poistovjetiti s $\mathcal{R}^3$ preko operatora koji preslikava vektor $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{R}^3$ u kososimetričnu matricu $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$, brzinu zrakoplova možemo izraziti u parovima $(\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \in \mathcal{R}^3 \times so(3)$ ili $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$. Za tako definiranu Lievu grupu $\mathcal{G}$, Lievu algebru možemo izraziti u obliku $\mathcal{g} = \mathcal{R}^3 \times so(3)$ s elementom

$$v = (\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}). \tag{4.29}$$

Kako bi omogućili primjenu odabrane integracijske metodu na Lievoj grupi, prostor stanja zračnih letjelica moramo izraziti u obliku Lieve grupe $\mathcal{S} = \mathcal{G} \times \mathcal{g}$ tj. $\mathcal{S} = \mathcal{R}^3 \times SO(3) \times \mathcal{R}^3 \times so(3)$ s elementom

$$x = (\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}). \tag{4.30}$$

Valja napomenuti da $\mathcal{S}$ nije tangentni svežanj $T\mathcal{G}$, već lijeva trivializacija tangentnog svežnja $T\mathcal{G}$. Također, $\mathcal{S}$ predstavlja Lievu grupu koja ima Lievu algebru $\mathcal{s} = \mathcal{R}^3 \times so(3) \times \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ s elementom oblika

$$z = (\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}). \tag{4.31}$$

U prethodnom poglavlju razmatrane su operacije na Lievoj grupi prostora na primjeru jednog tijela što je primjenjivo za slučaj zračne letjelice.

Već smo spomenuli da postoji nužan uvjet prema kojem tangentni prostor konfiguracijskog prostora Live grupe $\mathcal{G}$ u danoj konfiguraciji q mora biti povezan s njegovom Lievom algebrom $\mathcal{g}$. Tu vezu možemo definirati pomoću diferencijala mape lijevog množenja L_q u obliku

$$L_q' : T_e\mathcal{G} \to T_q\mathcal{G} : (\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \mapsto (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}), \tag{4.32}$$

kojom je definirana veza između vremenske derivacije $\dot{q}$ konfiguracije MBS sustava i brzine $v \in \mathcal{g}$ preko tangentne mape $\dot{q} = L_q'(v)$

$$\dot{q} = L_q'(v). \tag{4.33}$$

To je proširenje lijevo-invarijantne Poissonove jednadžbe (4.2) (jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela) kojom se dobiva cjelokupna kinematika (s uključenim translacijskim gibanjem) za slučaj korištenja $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$ kao konfiguracijskog prostora zračne letjelice.

Prema analogiji izraza (4.32) prostor stanja $\mathcal{S} = \mathcal{G} \times \mathcal{J}$ možemo pisati u obliku

$$L'_x : T_e\mathcal{S} \to T_x\mathcal{S}, (\mathbf{v}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}) \mapsto (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}), \tag{4.34}$$

koji povezuje Lievu algebru $\mathcal{S}$ s tangentnim prostorom u x. Pomoću L'_x povezujemo vremenske derivacije elementa prostora stanja zračne letjelice sa brzinom i akceleracijom u obliku

$$\dot{x} = L'_x(z). \tag{4.35}$$

Ukratko, Lieve grupe $\mathcal{G}$ i $\mathcal{S}$ ćemo koristiti kao konfiguracijski prostor i prostor stanja zračne letjelice. Drugi mogući pristup, opisan u [3], temelji se na modeliranju konfiguracijskog prostora krutog tijela kao Lieve specijalne Euklidske grupe $SE(3)$ gdje se translacijski i rotacijski pomaci promatraju spregnuto u okviru zavojnog gibanja, a ne raspregnuto kao što je slučaj u primijenjenom pristupu [1].

Izraz (4.35) predstavlja jednadžbu kinematičke rekonstrukcije koja se mijenja pri gibanju zračne letjelice nekom brzinom.

Rješavanjem jednadžbe (4.28) izravno rekonstruiramo orijentaciju tijela $\mathbf{R}(t)$ primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Rješenje jednadžbe (4.28) ima oblik $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R_0}\exp\mathrm{m}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t))$ [23], gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape 'expm' dana Euler-Rodriguesovim izrazom [40], $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathcal{R}^3$ predstavlja trenutni lokalni rotacijski vektor, a $\mathbf{R}_0$ matricu početne rotacije.

4.5.2 Dinamički model

Sintetiziran je dinamički model zračne letjelice s rotirajućim krilom, projektiran modifikacijom Munthe-Kaas algoritma u smislu mogućnosti rješavanja DAE zadaća na Lievim grupama kakve su karakteristične za diskretne mehaničke sustave s kinematičkim ograničenjima [1].

Budući da je $\mathbf{Q}$ linearna funkcija vektora upravljačkih veličina $\mathbf{u}$, za formulaciju dinamičkog modela zračne letjelice, uvodimo jednadžbe u obliku

$$\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}(q, \mathbf{v}, t) + \mathbf{B}^T(q)\mathbf{u}, \tag{4.36a}$$

$$\dot{q} = L'_q(v), \tag{4.36b}$$

gdje je $\mathbf{M}$ poopćena matrica inercije dimenzije 6×6, $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^6$, $\mathbf{v} = [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}]^T$ su brzine letjelice, q (položaj i orijentacija) i v (translacijska i kutna brzina letjelice u obliku $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)$) su definirani jednadžbama (4.27) i (4.29), $\mathbf{Q}$ predstavlja poopćene sile sačinjene od vanjskih sila i sila nelinearnih članova brzina, $\mathbf{u}$ predstavlja vektor upravljačkih veličina (postavni kutovi nosivog i repnog rotora) koji je potreban za izračun poopćenih sila koje djeluju na helikopter, a $\mathbf{B}^T\mathbf{u}$ predstavlja pogonski dio modela helikoptera (4×6 matrica $\mathbf{B}$ opisuje utjecaj upravljačkih veličina $\mathbf{u}$ na poopćene pogonske sile). Jednadžba (4.36a) opisuje dinamiku zrakoplova, dok jednadžba (4.36b) predstavlja jednadžbu kinematičke rekonstrukcije.

4.5.3 Numerički primjer: zračna letjelica s rotirajućim krilom

Kao numerički primjer upotrebe uvedene integracijske procedure, analiziran je jednostavan manevar transportnog helikoptera, modeliranog kao krutu tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja (engl. *6 DOF - six degrees of freedom*). Unaprijed definiran vektor upravljačkih veličina uzrokuje gibanje u obliku vertikalnog penjanja i rotacije oko vertikalne osi.

Za globalni (inercijski) koordinatni sustav izabran je standardni koordinatni sustav u dinamici leta, a to je desni NED (engl. *North-East-Down*) sustav (os z je postavljena vertikalno, os x poprima smjer prema sjeveru, a os y je usmjerena prema istoku) koji ćemo koristiti za opisivanje putanje $\mathbf{r}$. Za ishodišnu točku NED sustava izabrana je točka polijetanja helikoptera na tlu.

4.5.4 Opis modela helikoptera

Osnovni podaci za transportni helikopter mase 5800 kg s četiri lopatice polumjera rotora od 7.5 m, prikazani su u tablici 4.1 (podaci preuzeti iz [48, 49]).

Tabela 4.1: Osnovni podaci za transportni helikopter.

Polumjer nosivog rotora	7.5 m
Broj lopatica nosivog rotora	4
Koeficijent ispunjenosti kraka nosivog rotora (engl. *solidity ratio*)	0.0917
Polumjer repnog rotora	1.56 m
Koeficijent ispunjenosti kraka repnog rotora	0.18
Položaj repnog rotora	9 m
Masa helikoptera	5800 kg

Manevar je zamišljen kao vertikalni let s rotacijom oko vertikalne osi. Usvojene su sljedeće pretpostavke:

- Uzete su u obzir samo dvije upravljačke veličine rotora: θ_0 skupni ili kolektivni postavni kut lopatica nosivog rotora (engl. *collective pitch*) i θ_{0_T} kolektivni postavni kut lopatica repnog rotora.

- Preostale upravljačke veličine, θ_{1_c} poprečni ciklični postavni kut (engl. *lateral cyclic pitch*) kojim pilot upravlja po nagibu i kojim mijenja poprečni položaj helikoptera (oko uzdužne osi) i θ_{1_s} uzdužni ciklični postavni kut kojim se upravlja uzdužnim položajem helikoptera (engl. *longitudinal cyclic pitch*) oko poprečne osi, osiguravaju ravnotežno stanje uzduž x i y osi koordinatnog sustava letjelice.

- Mahanje lopatica (engl. *flapping*) je zanemareno, tj. zanemareno je gibanje lopatica izvan ravnine rotacije.

- Aerodinamički model elementarnog kraka lopatice (engl. *blade element theory*) nosivog i repnog rotora ima uniformni protok zraka.

- Utjecaj vjetra je zanemaren pa je aerodinamička brzina jednaka brzini leta.

- Masa letjelice je konstantna tijekom provedbe simulacije i nema promjena u inercijskim elementima.

Aerodinamičku silu i aerodinamički moment u koordinatnom sustavu letjelice možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{Q}_f^b = \begin{bmatrix} Q_{fx}^b & Q_{fy}^b & Q_{fz}^b \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{Q}_m^b = \begin{bmatrix} L & M & N \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Normalna komponenta aerodinamičke sile pogona nosivog rotora definira je izrazom

$$Q_{fz}^b = f(\theta_0), \tag{4.39}$$

a aerodinamički moment pogona nosivog i repnog rotora oko vertikalne osi z izražen je u obliku

$$N = f(\theta_0, \theta_{0_T}). \tag{4.40}$$

Poprečni ciklični postavni kut θ_{1_c} i uzdužni ciklični postavni kut θ_{1_s} određeni su tako da je tijekom leta ostvareno ravnotežno stanje (triman let) oblika $Q_{fx}^b = Q_{fy}^b = 0$ i $L = M = 0$. Ukupni iznos narinutih sila izražen u globalnom koordinatnom sustavu možemo izraziti pomoću matrice rotacije $\mathbf{R}$ u obliku

$$\mathbf{Q}_{force} = \mathbf{R}\mathbf{Q}_f^b. \tag{4.41}$$

4.5.5 Početni uvjeti

Simulacija leta helikoptera započinje iz režima lebdjenja na visini h_0. Ravnoteža sila i momenata u režimu lebdjenja omogućena je ravnotežnim stanjem dobivenim zadavanjem stava i upravljačkih veličina u obliku

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} (\theta_0)_0 \\ (\theta_{1_c})_0 \\ (\theta_{1_s})_0 \\ (\theta_{0_T})_0 \end{bmatrix}, \tag{4.42}$$

gdje je $(\theta_0)_0$ kolektivni postavni kut, $(\theta_{1_c})_0$ i $(\theta_{1_s})_0$ ciklički postavni kutovi, a $(\theta_{0_T})_0$ kolektivni postavni kut repnog rotora. Početni vektor stanja položaja i stava helikoptera za $t = 0$ možemo izraziti u obliku

$$k_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \boldsymbol{\Psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \\ (r_3)_0 \\ \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \\ \phi_0 \\ \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

U mehanici leta za određivanje stava letjelice koriste se De'Sparreovi kutovi koji se često u literaturi nazivaju i Eulerovim kutovima s oznakama ϕ za kut valjanja, θ za kut propinjanja i ψ za kut zanosa. Pomoću spomenutih početnih vrijednosti kutova definirana je početna vrijednost matrice rotacije $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(t=0)$ $\mathbf{R}(t) \in SO(3)$ (Eulerovi kutovi se mogu prozvati lokalnim koordinatnim sustavom - matematički nazvan 'kartom' - rotacijske mnogostrukosti $\mathbf{R}(t)$ [40]). Početne vrijednosti brzina možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_v)_0^T \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (\omega_1)_0 \\ (\omega_2)_0 \\ (\omega_3)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \begin{bmatrix} V_0 \cos\beta_0 \cos\alpha_0 \\ V_0 \sin\beta_0 \\ V_0 \cos\beta_0 \sin\alpha_0 \end{bmatrix} \\ (\omega_1)_0 \\ (\omega_2)_0 \\ (\omega_3)_0 \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

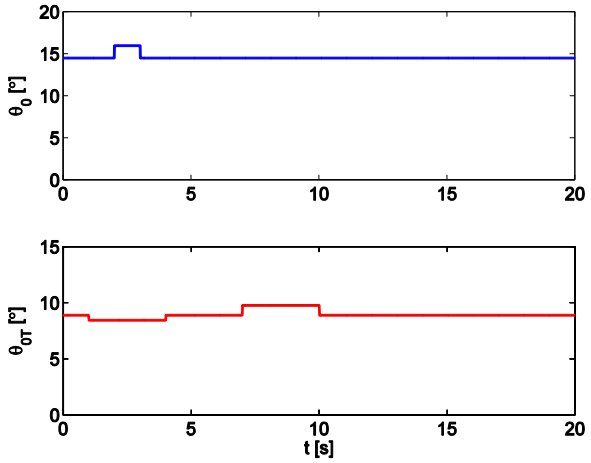
Komponente kutne brzine su izražene u koordinatnom sustavu letjelice s oznakama ω_1 za kutnu brzinu valjanja, ω_2 za kutnu brzinu propinjanja i ω_3 za kutnu brzinu zanosa. Budući da u početnoj fazi lebdjenja aerodinamička brzina iznosi $V_0 = 0\,\text{m/s}$, a napadni kut i kut klizanja $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, početni vektor brzina ima oblik

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{4.45}$$

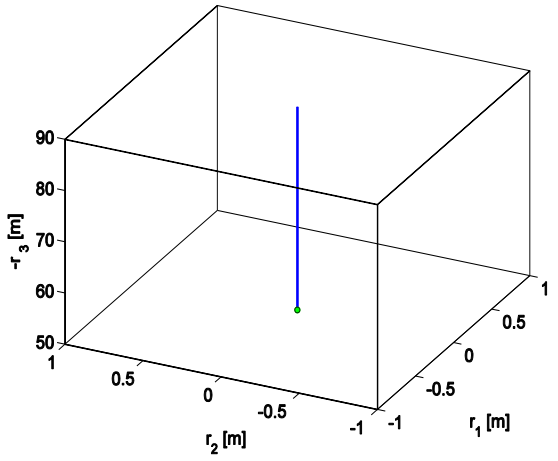
4.5.6 Rezultati simulacije

Za numerički primjer unaprijed definirane upravljačke veličine postavnog kuta lopatica nosivog rotora i kolektivnog postavnog kuta repnog rotora prikazane su na slici 4.2. Integracijski rezultati za nepromjenjivi korak integracije h=1e-2 prezentirani su slikama 4.3 - 4.8. Vremenski promjenjivi vektor upravljačkih veličina možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \theta_0 & \left(\theta_{1_c}\right)_0 & \left(\theta_{1_s}\right)_0 & \theta_{0_T} \end{bmatrix}^T. \tag{4.46}$$



Slika 4.2: Vremenski promjenjive upravljačke veličine: θ_0 kolektivni postavni kut lopatica nosivog rotora i θ_{0_T} kolektivni postavni kut repnog rotora.

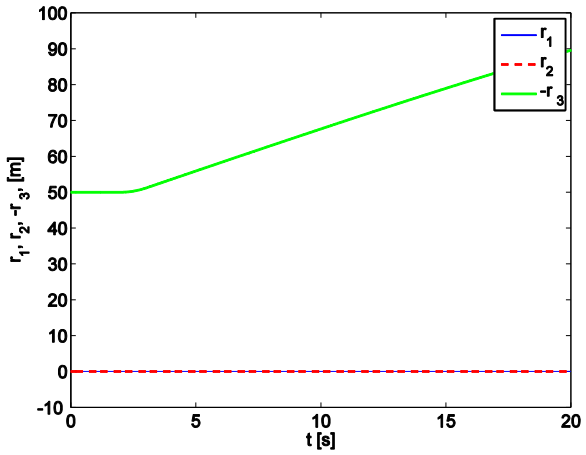


Slika 4.3: Prikaz putanje $\mathbf{r}$ letjelice u prostoru.

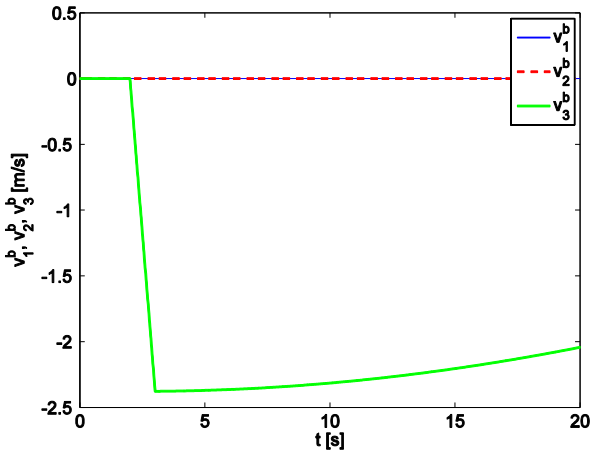
Položaj središta mase helikoptera izražen u globalnom koordinatnom sustavu prikazan je slikom 4.4. Vrijednost kolektivnog postavnog kuta lopatica nosivog rotora u trenutku $t = 2\,\mathrm{s}$ izaziva vertikalno penjanje. U duhu dinamike leta, brzine izražene u koordinatnom sustavu letjelice, prikazane na slici 4.5, možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{v}^b = \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_2^b \\ v_3^b \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{v}\,. \tag{4.47}$$

Kutna brzina helikoptera izražena u koordinatnom sustavu letjelice prezentirana je na slici 4.5.



Slika 4.4: Položaj središta mase helikoptera.

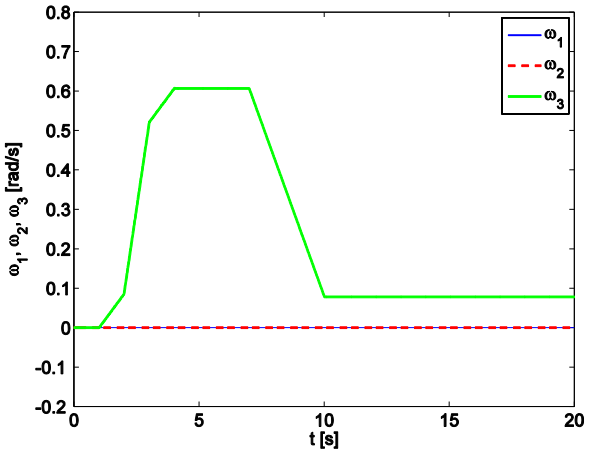


Slika 4.5: Brzine izražene u koordinatnom sustavu letjelice.

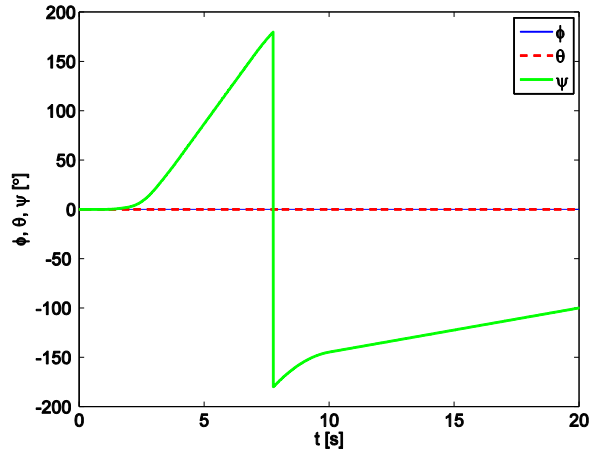
Na pobudu kolektivnog postavnog kuta repnog rotora u trenutku $t = 1\,\mathrm{s}$, helikopter reagira brzim odzivom u obliku rotacije oko vertikalne osi (zanošenje brzinom ω_3), što je vidljivo na slici 4.6. Stav helikoptera je definiran preko tri Eulerova kuta (slika 4.7)

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \tag{4.48}$$

dobivenih pomoću matrice rotacije $\mathbf{R}(t)$ čiji elementi su prikazani na slici 4.8.

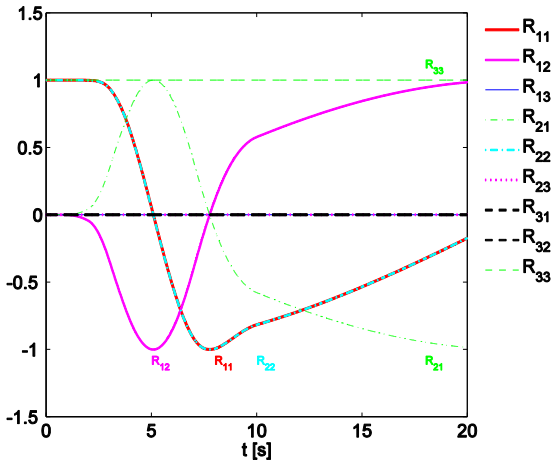


Slika 4.6: Kutna brzina letjelice.

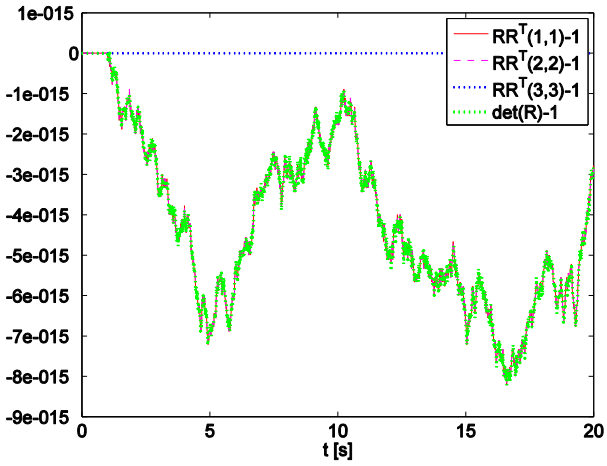


Slika 4.7: Stav helikoptera $\mathbf{\Psi}$ - Eulerovi kutovi.

Kao što je i očekivano, svojstvo ortogonalnosti matrice rotacije $\mathbf{R} \in SO(3)$ je egzaktno očuvano preko odabrane integracijske sheme na Lievoj grupi. Osim očuvanja ortogonalnosti, očuvano je i drugo bitno svojstvo matrice rotacije, a to je svojstvo jedinične determinante $\det\mathbf{R} = +1$ zbog čega ona i pripada specijalnoj ortogonalnoj grupi $SO(3)$. Na slici 4.9 prikazani su rezultati dobiveni oduzimanjem dijagonalnih elemenata matrice $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ i elemenata jedinične matrice $\boldsymbol{I}$, kao i greška u jediničnoj determinanti $\det\mathbf{R} = +1$ uspoređena s analitičkim rješenjem.

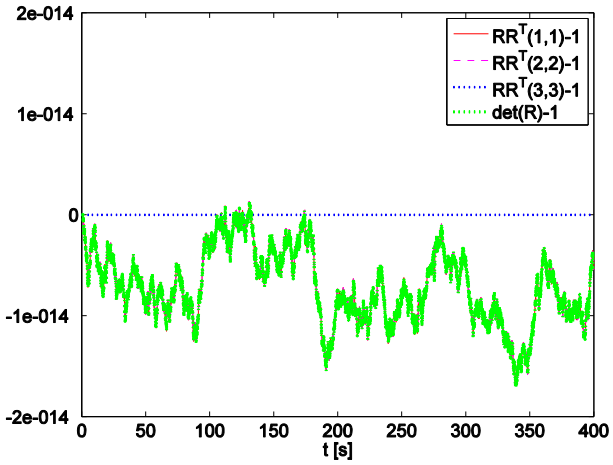


Slika 4.8: Elementi matrice rotacije $\mathbf{R}$.



Slika 4.9: Svojstva matrice rotacije.

Kako bi se dokazalo da ne dolazi do napredovanja greške u elementima matričnog produkta $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}$ i determinante $\det\mathbf{R} = +1$ provedena je i simulacija na proširenoj vremenskoj domeni od 400 sekundi (vidi sliku 4.10).



Slika 4.10: Svojstva matrice rotacije
(vremenska domena 400 sekundi).

Primijenjena integracijska procedura koristi izravnu rekonstrukciju stanja rotacije (odziv stava letjelice) na $\mathbf{R} \in SO(3)$, te time u potpunosti zaobilazi pojavu singulariteta (vidi sliku 4.8), iako se u prezentiranom manevru javljaju velike 3D rotacije. Na slici 4.8 prikazani su rezultati dobiveni integracijom pomoću primijenjene procedure gdje je vidljivo da su sve integralne krivulje glatke funkcije bez diskontinuiteta. U suprotnosti tome su rezultati integracije na temelju klasičnog modela lokalnih koordinata parametrizacije velikih rotacija (Eulerovi kutovi), prikazani na slici 4.7, na kojima je vidljiva pojava diskontinuiteta zbog pojave nužnih singulariteta. Kod pojave diskontinuiteta eventualno je moguće provesti re-parametrizaciju varijabli integracije, što može dovesti do usporavanja integracijske procedure (ili numeričke nestabilnosti).

Korištenjem primijenjene integracijske sheme, orijentacija (stav) helikoptera izravno se rekonstruira primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja kutne brzine, rješavanjem jednadžbe kinematičke rekonstrukcije (4.36b). Na taj je način izbjegnuta upotreba kinematičkih diferencijalnih jednadžbi u klasičnoj formi, koje nužno dovode do kinematičkih singulariteta. Klasična forma kinematičkih diferencijalnih jednadžbi predstavlja diferencijalne jednadžbe koje povezuju kutne brzine i derivacije lokalnih koordinata, kod parametrizacije rotacija upotrebom troosnih lokalnih koordinata. Na temelju svega navedenog, pojava kinematičkih singulariteta na nivou brzine, koja je neizbježna kod parametrizacije velikih rotacija, upotrebom troosnih lokalnih koordinata, u potpunosti je izbjegnuta.

5

METODA INTEGRACIJE ROTACIJSKOG TENZORA NA GRUPI JEDINIČNIH KVATERNIONA $Sp(1)$

U ovom poglavlju opisana je i primijenjena novopredložena numerička metoda integracije rotacijskog tenzora koja koristi kvaternione za parametrizaciju mnogostrukosti velikih rotacija, čime se izbjegavaju kinematički singulariteti koji se nužno pojavljuju pri svakoj parametrizaciji velikih rotacija troosnim lokalnim koordinatama (kao što su npr. Eulerovi kutovi). Izvornost odabrane procedure zasniva se na novom matematičkom modelu integracijske metode koja se temelji na integraciji skupa triju ODJ definiranih u vektorskom prostoru Lieve algebre rotacijske grupe SO(3), pri čemu se koordinate trenutnog vektora rotacije koriste kao lokalne koordinate integracije. Na taj način se, za razliku od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona koja nužno iziskuje integraciju četiri diferencijalno-algebarskih jednadžbe (uz stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona), zadaća integracije prostornih rotacija svodi na prirodni oblik integracije triju ODJ. U ovom poglavlju je opisan izvod matematičkog modela novopredložene integracijske procedure te je sintetiziran dinamički modela zračne letjelice s rotirajućim krilom.

5.1 Kvaternioni

Kvaternione (engl. *quaternions*) je prvi formulirao irski matematičar, fizičar i astronom William Rowan Hamilton (1805. - 1865.). Hamilton dolazi do ideje koja prethodi kvaternionim, 16. listopada 1843. godine u Dablinu na putu do Irske kraljevske akademije. Zadovoljan svojim otkrićem, Hamilton je temeljne jednadžbe za kvaternione

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

odmah urezao u kamen Broome Bridge mosta kojim je prolazio [50]. Hamilton je uređene četvorke brojeva s uvedenim pravilima nazvao kvaternionima i njima će posvetiti ostatak života. Osnovao je i školu 'kvaternionista' koja objavljuje nekoliko knjiga. Kvaternioni se osim u Hamiltonovim publikacijama (1853. i 1969.) [51, 52], javljaju i u radovima Taita [53], Kellanda i Taita [54] te Cayleya [55].

Sredinom 19. stoljeća, kvaternioni se sve rjeđe koriste zbog otkrića vektorske analize Josiaha Willarda Gibbsa (1839. - 1903.) [56]. Ponovna popularizacija kvaterniona potaknuta je zrakoplovnom industrijom simulatora leta krajem 20. stoljeća, a kasnije razvojem računalne grafike koja koristi kvaternione u svrhu osno-kutne reprezentacije rotacija [57].

U novije vrijeme, sve više autora koristi kvaternione za parametrizaciju rotacijske mnogostrukosti u različitim poljima kao što su dinamika sustava više tijela i prostorna kinematička analiza [58, 59], planiranje trajektorije robota [60], dinamika robota [61], upravljački modeli letjelica [62, 63], računalna grafika [64], fotogrametrija [65] i projektiranje integracijskih metoda [66]. Osim toga, kvaternioni se danas koriste u orbitalnoj mehanici, molekularnoj dinamici, fizici i bioinformatici.

U matematici, kvaterninoni predstavljaju proširenje kompleksnih brojeva koji predstavljaju jednu vrstu podprostora kvaterniona i pomoću njih se mogu najlakše objasniti kvaternioni [21]. Polazeći od kompleksnog broja

$$\mathrm{q} = n + im, \tag{5.1}$$

gdje i predstavlja imaginarnu jedinicu, a n i m posebne kompleksne brojeve s različitom imaginarnom dimenzijom $n = a + jc$ i $n = b + jd$, uvrštavanjem u (5.1) i korištenjem definicije $ij = k$

$$\mathrm{q} = (a + jc) + i(b + jd) = a + jc + ib + ijd = a + id + jc + kd, \tag{5.2}$$

dobiva se jednadžba koja definira općeniti kvaternion koji ima četiri dimenzije, jednu realnu i tri imaginarne. Kako bi odredili računske operacije s kvaternionima, potrebno je uvesti definicije koje povezuju imaginarne dimenzije

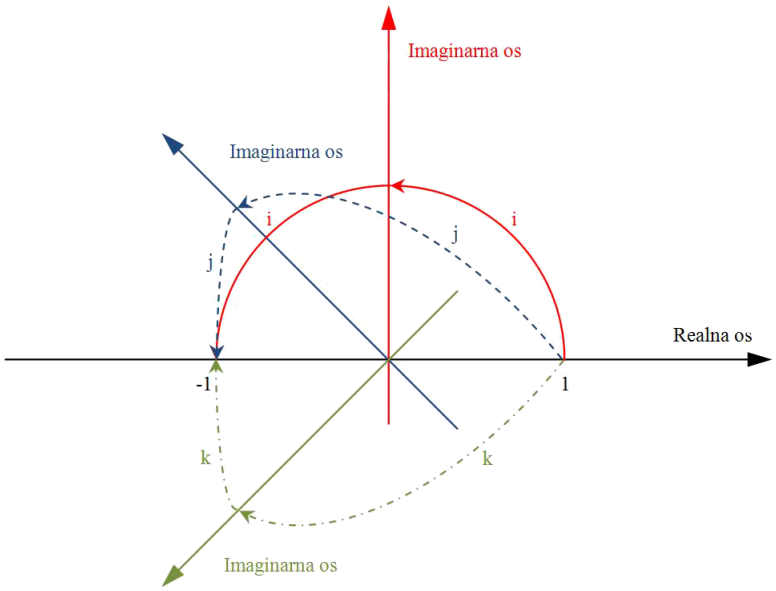
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{5.3}$$

$$ij = -ji = k\,,$$

$$jk = -kj = i\,,$$

$$ki = -ik = j\,.$$

Svaka od imaginarnih dimenzija ima svoju vrijednost za $\sqrt{-1}$ koja može biti *i*, *j* ili *k*. Razlog postojanja tri različite vrijednosti za $\sqrt{-1}$ je četverodimenzionalni prostor što znači da postoje tri različita puta koji vode iz točke 1 u točku -1 [67] (na slici 5.1 prikazana su ova tri puta).



Slika 5.1: Tri različita puta iz točke 1 u točku -1.

Kvaternion se može interpretirati kao uređena četvorka realnih brojeva koja se sastoji od skalarnog $q_0 \in \mathcal{R}$ i vektorskog dijela $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^3$. Na temelju ove činjenice slijedi da se aritmetičke operacije između kvaterniona mogu svesti na dobro poznate aritmetičke operacije između vektora. U radu je korištena vektorska notacija kvaterniona $\mathrm{q} \in \mathcal{H} \cong \mathcal{R}^4$

$$\mathrm{q} = (q_0, \mathbf{q})\,, \tag{5.4}$$

gdje je vektorski dio napisan u obliku $\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i$, a $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ predstavlja standardnu ortonormiranu bazu na $\mathcal{R}^3$. U različitim literaturama koriste se različiti načini notacije kvaterniona koji mogu biti zapisani na nekoliko ekvivalentnih (izomorfnih) načina

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= (q_0, \mathbf{q}), \\ &= (q_0, (q_1, q_2, q_3)), \\ &= (q_0, q_1, q_2, q_3), \\ &= q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Korištenjem pravila (5.3), raspisane su osnovne aritmetičke operacije nad kvaternionima. Osim toga, objašnjena je normalizacija kvaterniona, računanje inverznih kvaterniona i pojam jediničnog kvaterniona.

- **Zbrajanje i oduzimanje kvaterniona**

Za svaka dva kvaterniona $\mathrm{q}, \mathrm{p} \in \mathcal{H}$ zbrajanje i oduzimanje je definirano na sljedeći način

$$\mathrm{q} \pm \mathrm{p} = (q_0, \mathbf{q}) \pm (p_0, \mathbf{p}) = (q_0 \pm p_0, \mathbf{q} \pm \mathbf{p}). \tag{5.6}$$

- **Množenje kvaterniona skalarom**

Kvaternion se množi skalarom tako da mu se svaki član pomnoži s vrijednošću skalara.

$$a\mathrm{q} = (aq_0, aq_1, aq_2, aq_3). \tag{5.7}$$

- **Množenje dvaju kvaterniona**

Produkt dvaju kvaterniona q i p dan je sljedećim izrazom

$$\mathrm{q} \circ \mathrm{p} = (q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}), \ \mathrm{q}, \mathrm{p} \in \mathcal{H}, \tag{5.8}$$

gdje $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = q_i p_i$ predstavlja skalarni produkt. Bitno je naglasiti da pri množenju kvaterniona ne vrijedi pravilo komutativnosti $\mathrm{q} \circ \mathrm{p} \neq \mathrm{p} \circ \mathrm{q}$, ali vrijedi asocijativnost zbrajanja i množenja, te distributivnost.

- **Konjugirani kvaternion**

Računa se slično kao i konjugirano kompleksni broj samo što se za kvaternion promijeni predznak za sve tri imaginarne osi

$$\bar{\mathrm{q}} = (q_0, -\mathbf{q}) . \tag{5.9}$$

- **Jedinični kvaternion**

Nama važni jedinični kvaternion (engl. *unit quaternion*) naziva se još i normirani kvaternion. Normiranje kvaterniona vrši se na način da se prvo izračuna norma kojom se svi članovi kvaterniona podijele. Za jedinični kvaternion vrijede sljedeća svojstva

$$\|\mathrm{q}\| = q_0 q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1 \text{ ili } \mathrm{q} \circ \bar{\mathrm{q}} = (1, \mathbf{0}) . \tag{5.10}$$

Norma kvaterniona se još naziva i veličina kvaterniona, pa se za jedinične kvaternione, osim već spomenutih naziva, često koristi naziv kvaternioni jedinične veličine.

- **Inverzni kvaternion**

Svaki kvaternion različit od nule ima inverzni kvaternion koji se može izračunati korištenjem izraza

$$\mathrm{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathrm{q}}}{\|\mathrm{q}\|} . \tag{5.11}$$

Za slučaj jediničnog kvaterniona kad je $\|\mathrm{q}\| = 1$, inverz se računa kao i konjugirana vrijednost, tj. $\mathrm{q}^{-1} = \bar{\mathrm{q}}$.

- **Imaginarni kvaternion** (engl. *pure imaginary quaternion*)

On predstavlja vektor u formatu kvaterniona i ima oblik

$$\boldsymbol{w} = (0, \mathbf{u}) , \ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^3 . \tag{5.12}$$

Hamilton naziva čiste imaginarne kvaternione pravim kvaternionima, a kvaternione s nulom na vektorskom dijelu skalarnim kvaternionima [52].

5.2 Kinematika rotacije krutog tijela

Ishodišna točka kod projektiranja odabrane integracijske sheme bila je jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t), \tag{5.13}$$

kojom je definirana veza između kutne brzine tijela $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)$, izražene u lokalnom koordinatnom sustavu vezanom za tijelo, i matrice rotacije $\mathbf{R}(t)$. Rješavanjem jednadžbe (5.13), koja predstavlja ODJ na rotacijskoj grupi *SO*(3), izravno se rekonstruira orijentacija tijela $\mathbf{R}(t)$ primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Element Lieve algebre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ može se poistovjetiti s $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ preko operatora koji preslikava vektor $\boldsymbol{\omega}_i \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ u koso-simetričnu matricu $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$ [68], gdje je *so*(3) Lieva algebra rotacijske grupe *SO*(3).

Slično kao i kod Muthe-Kaas pristupa [21], rješenje jednadžbe (5.13) ima oblik

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \exp(\tilde{\mathbf{u}}(t)), \tag{5.14}$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na *SO*(3) grupi dana Euler-Rodriguesovim izrazom [23]

$$\exp_{SO(3)}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\|\mathbf{u}\|)}{\|\mathbf{u}\|}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1-\cos(\|\mathbf{u}\|)}{\|\mathbf{u}\|^2}\tilde{\mathbf{u}}^2. \tag{5.15}$$

U izrazu (5.15), $\mathbf{u}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ predstavlja trenutni lokalni rotacijski vektor, a $\mathbf{R}_0$ matricu početne rotacije. Primjenom Magnusovog teorema [10, 69], rješenje diferencijalne jednadžbe (5.13) može se izraziti u obliku (5.14) ako $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in so(3)$ predstavlja rješenje ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre u obliku

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \operatorname{dexp}^{-1}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}(t))), \ \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}, \tag{5.16}$$

s operatorom $\operatorname{dexp}^{-1}_{u}$ oblika

$$\operatorname{dexp}^{-1}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}] + \frac{1}{12}[\tilde{\mathbf{u}}, [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}]] + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!}(-\operatorname{ad}^j_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})), \tag{5.17}$$

gdje je adijungirani operator $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{u}}}$ definiran kao Lieva zagrada

$$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{u}} = \left[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\right], \text{ za sve } \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t) \in so(3), \tag{5.18}$$

a B_j predstavlja Bernulijev broj.

S obzirom na topološke karakteristike rotacijske mnogostrukosti, parametrizaciju velikih rotacija upotrebom troosnih lokalnih koordinata (npr. Eulerovi kutovi), koja bi eliminirala pojavu kinematičkih singulariteta u cijeloj domeni definicije velikih rotacija, nije moguće uvesti. Da bi se izbjegli navedeni kinematički singulariteti, uvođenje četveroparametarnih jediničnh kvaterniona (Eulerovi parametri) uobičajeno je rješenje. Međutim, numerička integracija jednadžbe kinematičke rekonstrukcije (5.13) pri kojoj je orijentacija krutog tijela izražena jediničnim kvaternionima, u slučaju primjene uobičajenih metoda integracije opisanih u literaturi [68] nužno iziskuje (numerički neoptimalnu) integraciju DAE jednadžbi, što je složenija zadaća u usporedbi s izvornom ODJ formulacijom prikazanom u izrazu (5.13). Uzrok tome je redundantnost četiri Eulerova parametra (kojima su parametarizirana 'samo' tri rotacijska stupnja slobode gibanja) i nužnost numeričke stabilizacije dodatnog kinematičkog ograničenja koje proistječe iz zavisnosti uvedenih Eulerovih parametara (elemenata jediničnog kvaterniona).

Jedinični kvaternioni (5.10) formiraju ortogonalnu i simplektičnu grupu $Sp(1) \cong \mathcal{S}^3$ koja predstavlja jediničnu sferu na $\mathcal{R}^4$ definiranu kao

$$\mathcal{S}^3 = \left\{ \mathrm{q} \in \mathcal{R}^4 \mid \|\mathrm{q}\| = 1 \right\}.$$

Rotacijsko gibanje krutog tijela dano je s $\mathrm{q}(t) \in \mathcal{S}^3$, gdje *t* predstavlja vrijeme. Brzina krutog tijela $\dot{\mathrm{q}} \in T_{\mathrm{q}}\mathcal{S}^3$ može se definirati u vektorskom prostoru koso-simplektičnih kvaterniona

$$sp(1) = \left\{ \mathcal{W} \in \mathcal{R}^4 \mid \mathcal{W} + \overline{\mathcal{W}} = (0, \mathbf{0}) \right\},$$

gdje je $\overline{\mathcal{W}}$ konjugirana vrijednost imaginarnog kvaterniona $\mathcal{W}$. Nadalje, $sp(1)$ možemo poistovjetiti s tangentnim vektorskim prostorom na $Sp(1) \cong \mathcal{S}^3$ u identitetu grupe [70]. Također, $sp(1)$ predstavlja Lievu algebru grupe $Sp(1)$ i izomorfan je $so(3)$. Element Lieve algebre $\mathcal{W} \in sp(1)$ može se poistovjetiti s $\mathcal{R}^3$ i kao takav koincidira sa skupom imaginarnih kvaterniona definiranim kao $\mathcal{W} = (0, \mathbf{u})$ za $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$. Slično kao i za $\exp_{SO(3)}$, i za kvaternione

se može uvesti zatvorena forma eksponencijalne mape $\exp_{\mathcal{S}^3} : sp(1) \cong \boldsymbol{\mathcal{R}}^3 \to Sp(1) \cong \boldsymbol{\mathcal{S}}^3$. Po definiciji, eksponencijalna mapa je definirana beskonačnim redom [66]

$$\exp_{\mathcal{S}^3}\left(\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}, \tag{5.19}$$

koji se može izraziti u obliku

$$\exp_{\mathcal{S}^3}\left(\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}\right)\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\right)(1,\mathbf{0}) + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\right)}{\|\mathbf{u}\|}(0,\mathbf{u}). \tag{5.20}$$

Jednadžba (5.20) predstavlja rotacijski kavternion (četiri Eulerova parametra) kao funkciju rotacijskog vektora $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ koji (prema Eulerovom teoremu) jediničnim vektorom definira os rotacije, a kut rotacije je izražen pomoću modula rotacijskog vektora $\|\mathbf{u}\|$. Također, valja napomenuti da je grupa jediničnih kvaterniona izomorfna Lievoj grupi *SU*(2) i kao takve obje imaju dvostruko pokrivanje na *SO*(3) [1, 3]. To je geometrijski razlog zbog kojeg je moguća parametrizacija bez singulariteta ali pod cijenu uvođenja četiri redundantna parametra. U sljedećem poglavlju opisana je novopredložena integracijska shema koja eliminira poteškoće integracije jediničnih kvaterniona u klasičnoj DAE formulaciji, definiranjem matematičkog modela numeričke integracije lokalnog rotacijskog vektora u prostoru Lieve algebre *so*(3) u minimalnoj ODJ formi [5, 6].

5.3 Integracijska shema

U odabranom algoritmu, rekonstrukcija orijentacije krutog tijela temelji se na eksponencijalnoj mapi definiranoj izrazom (5.20), gdje $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$ predstavlja rotacijski vektor trenutnog koraka integracije koji rekonstruira rotaciju iz q_n u q_{n+1}. Uzevši za polazište jednadžbu (5.14), uvodimo uzorak napredovanja koraka integracije u obliku

$$\mathrm{q}_{n+1} = \mathrm{q}_n \circ \exp_{\mathcal{S}^3}\left(\left(0,\frac{1}{2}\mathbf{u}_n\right)\right), \tag{5.21}$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na $\mathcal{S}^3$ grupi dana izrazom (5.20), a $\mathbf{u}_n$ predstavlja rotacijski vektor *n*-tog koraka integracije. Za određivanje rotacijskog vektora $\mathbf{u}_n$, prema analogiji izraza (5.16) izveden je izraz oblika

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n = \mathrm{dexp}^{-1}_{\tilde{\mathbf{u}}_n}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathrm{q}(t)))\,,\ \tilde{\mathbf{u}}_{n_0} = \mathbf{0}\,, \tag{5.22}$$

gdje je operator dexp^{-1}_{u} definiran u (5.17), a određivanje kutne brzine tijela $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{R}^3$ zahtjeva zasebnu integraciju Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela pomoću standardnog ODJ rješavača (određivanje polja kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$ na temelju polja kutnog ubrzanja $\dot{\boldsymbol{\omega}}$). Budući da izraz (5.22) predstavlja ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre, za njezino se integriranje može koristiti bilo koji od standardnih vektorskih ODJ rješavača. U dolje opisanom primjeru korištena je RK metoda četvrtog reda. Ovdje možemo naglasiti da je opisana integracija u minimalnoj ODJ formi u predloženom modelu omogućena činjenicom da su uvedenim $\mathbf{u}_n$ rotacijskim vektorom istodobno definirane i nezavisne koordinate integracije u okolini trenutnog stanja rotacije q_n.

5.4 Primjena metode integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona na dinamički model zračne letjelice s nepomičnim krilom

Ovo potpoglavlje se odnosi na prilagodbu i primjenu integracijske procedure za numeričku integraciju dinamike rotacije krutog tijela koja koristi kvaternione za parametrizaciju mnogostrukosti velikih rotacija. Na taj se način izbjegava upotreba lokalnih koordinata rotacije (npr. Eulerovih kutova i sl.) koja nužno dovodi do kinematičkih singulariteta. Za razliku od standardnog algoritma koji se zasniva na redundantnoj DAE formulaciji jednadžbi na jediničnim kvaternionima (i pri tome nameće nužno rješavanje dodatne jednadžbe kinematičkog ograničenja modula jediničnog kvaterniona), predstavljena metoda koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora u minimalnoj formi koje operiraju na Lievoj algebri rotacijske grupe *SO*(3). Nakon što se izračuna lokalni rotacijski vektor za trenutni korak integracije korištenjem standardnog ODJ rješavača (metode višeg reda), stanje rotacije se izravno rekonstruira na *Sp*(1) grupi kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski prostor rotacijske mnogostrukosti, modeliran pomoću grupe jediničnih kvaterniona *Sp*(1).

5.4.1 Dinamički model

Sintetiziran je dinamički model zračne letjelice s nepomičnim krilom, projektiran korištenjem gore opisane novopredložene metode integracije rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona $Sp(1)$ [5, 6].

Za formulaciju dinamičkog modela zračne letjelice, uvodimo jednadžbe u obliku

$$\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}(q, \mathbf{v}, \mathbf{u}, t), \tag{5.23a}$$

$$\dot{q} = L'_q(v), \tag{5.23b}$$

gdje je $\mathbf{M}$ poopćena matrica inercije dimenzije 6×6, $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^6$, $\mathbf{v} = \left[\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\right]^{\mathrm{T}}$ je translacijska i kutna brzina letjelice, q je položaj i orijentacija letjelice, v je translacijska i kutna brzina letjelice u obliku $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)$, $\mathbf{Q}$ predstavlja poopćene sile sačinjene od vanjskih sila, sila nelinearnih članova brzina i pogonskih sila, a $\mathbf{u}$ predstavlja vektor upravljačkih veličina (otkloni upravljačkih površina) koji je potreban za izračun poopćenih sila koje djeluju na zrakoplov. Jednadžba (5.23a) opisuje dinamiku zrakoplova, dok jednadžba (5.23b) predstavlja jednadžbu kinematičke rekonstrukcije.

5.4.2 Numerički primjer: zračna letjelica s nepomičnim krilom

Opisanim postupkom predlaže se izvorna metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona kojom se rješava standardni problem redundantnog matematičkog modela koji je nužno iziskivao integraciju DAE jednadžbi (kao i numeričku stabilizaciju dodatnog kinematičkog ograničenja), dok u novo-opisanoj formi predloženi algoritam vodi jednostavnijem i numerički efikasnijem rješavanju minimalnog skupa ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre.

Na temelju tako oblikovane integracijske metode, sintetizirana je simulacijska procedura prostornog gibanja modela zračne letjelice s nepomičnim krilom. Definiran je model opterećenja i upravljački model takvog zrakoplova te dodatne dinamičke sprege i kinematička ograničenja proistekla iz kinematičkih i dinamičkih veza s okolinom.

5.4.3 Opis modela malog putničkog aviona

Kao numerički primjer upotrebe uvedene integracijske procedure, analizirano je gibanje malog putničkog aviona, modeliranog kao standardni 6 DOF model krute zračne letjelice

[71], uz zanemaren utjecaj vjetra i zakrivljenost Zemlje. Vektor upravljačkih veličina **u** je definiran varijablom visine u obliku unaprijed propisane putanje leta.

Za globalni koordinatni sustav, kao i kod primjera transportnog helikoptera, izabran je standardni koordinatni sustav u dinamici leta, a to je desni NED sustav koji ćemo koristiti za opisivanja putanje $\mathbf{r}$. Za ishodišnu točku NED sustava izabrana je početna točka putanje središta mase helikoptera na tlu.

Spomenuti model aviona uključuje kompletni aerodinamički model dobiven pomoću metode projektne aerodinamike. U tablici 5.1 dan je pregled osnovnih podataka potrebnih za sintezu modela leta poznatog malog putničkog aviona, preuzetih iz [72, 73].

Tabela 5.1: Osnovni podaci za mali putnički avion.

Referentna površina krila	$S_{ref} = 15.1\,\mathrm{m}^2$
Srednja aerodinamička tetiva	$c_A = 1.698\,\mathrm{m}$
Raspon krila	$b = 8.77\,\mathrm{m}$
Postavni kut motora	$\alpha_T = 3.3°$
Intenzitet aerodinamičke brzine	$V_0 = 45\,\mathrm{m/s}$
Masa aviona	$m_0 = 1088\,\mathrm{kg}$
Visina leta	$(r_3)_0 = -500\,\mathrm{m}$
Moment tromosti oko osi x	$I_x = 1450\,\mathrm{kgm}^2$
Moment tromosti oko osi y	$I_y = 1693\,\mathrm{kgm}^2$
Moment tromosti oko osi z	$I_z = 3134\,\mathrm{kgm}^2$

Djelovanje zraka na avion zamijenit ćemo jednom aerodinamičkom silom u središtu mase i jednim aerodinamičkim momentom oko središta mase. U praksi se umjesto aerodinamičke sile i momenta koriste njihovi aerodinamički koeficijenti. Oni predstavljaju bezdimenzijske veličine koje se dobivaju dijeljenjem komponenata aerodinamičke sile s referentnom silom, a komponente aerodinamičkog momenta s referentnim momentom. Referentna sila je definirana produktom referentnog tlaka i referentne površine, a referentni moment produktom referentne sile i referentne duljine. Referentni tlak $1/2\rho V^2$ je dinamički tlak koji nastaje zbog aerodinamičke brzine letjelice, a referentna površina S_{ref} predstavlja površinu krila s nepostojećim dijelom kroz tijelo zrakoplova. Referentna duljina za propinjanje je

aerodinamička tetiva krila c_A, a za valjanje i skretanje referentnu duljinu predstavlja raspon krila zrakoplova b.

Iz svega gore navedenog slijedi definicija koeficijenata komponenata aerodinamičke sile i momenta u obliku

$$C_x = \frac{Q^b_{f\,Ax}}{1/2\rho V^2 S_{ref}},$$

$$C_y = \frac{Q^b_{f\,Ay}}{1/2\rho V^2 S_{ref}},$$

$$C_z = \frac{Q^b_{f\,Az}}{1/2\rho V^2 S_{ref}},$$

$$C_l = \frac{Q^b_{m\,Ax}}{1/2\rho V^2 S_{ref}},$$

$$C_m = \frac{Q^b_{m\,Ay}}{1/2\rho V^2 S_{ref}},$$

$$C_n = \frac{Q^b_{m\,Az}}{1/2\rho V^2 S_{ref}}.$$

(5.24)

Svi aerodinamički koeficijenti predstavljaju funkcije Machova broja, Reynoldsova broja, kutova položaja aerodinamičke brzine, bezdimenzijskih kutnih brzina aerodinamičke brzine, bezdimenzijskih kutnih brzina letjelice te otklona upravljačkih površina kao i ostalih površina (npr. zračne kočnice, pretkrilca, zakrilca, itd.). Neki od parametara o kojima ovise aerodinamički koeficijenti su:

- kutovi položaja aerodinamičke brzine u odnosu na letjelicu
  napadni kut α i kut klizanja β

- bezdimenzijska kutna brzina aerodinamičke brzine
  $\dot{\alpha}^* = \frac{\dot{\alpha}}{V / c_A}$

- bezdimenzijske kutne brzine letjelice

  $\frac{\omega_1}{V/b}$ za valjanje, $\frac{\omega_2}{V/c_A}$ za propinjanje i $\frac{\omega_3}{V/b}$ za skretanje

- otkloni upravljačkih površina

  δ_l otklon krilca (engl. *aileron*), δ_m otklon kormila visine (engl. *elevator*) i δ_n otklon kormila pravca (engl. *ruder*)

Linearni oblik funkcija koeficijenata komponenata aerodinamičke sile u aerodinamičkom koordinatnom sustavu možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D_0} + KC_L^2, \\ C_Y &= C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\omega_1}}\frac{\omega_1}{V/b} + C_{Y_{\omega_3}}\frac{\omega_3}{V/b} + C_{Y_{\delta_n}}\delta_n, \\ C_L &= C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + C_{L_{\dot\alpha}}\dot\alpha^* + C_{L_{\omega_2}}\frac{\omega_2}{V/c_A} + C_{L_{\delta_m}}\delta_m, \end{aligned} \tag{5.25}$$

a linearne funkcije koeficijenata komponenata aerodinamičkog momenta izražavamo u koordinatnom sustavu letjelice u obliku

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\omega_1}}\frac{\omega_1}{V/b} + C_{l_{\omega_3}}\frac{\omega_3}{V/b} + C_{l_{\delta_l}}\delta_l + C_{l_{\delta n}}\delta_n, \\ C_m &= C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_{\dot\alpha}}\dot\alpha + C_{m_{\omega_2}}\frac{\omega_2}{V/c_A} + C_{m_{\delta m}}\delta_m, \\ C_n &= C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\omega_1}}\frac{\omega_1}{V/b} + C_{n_{\omega_3}}\frac{\omega_3}{V/b} + C_{n_{\delta_l}}\delta_l + C_{n_{\delta_n}}\delta_n. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Parcijalne derivacije aerodinamičkih koeficijenata koje se javljaju u izrazima (5.25) i (5.26) nazivaju se derivativima ili gradijentima. U ovom aerodinamičkom modelu, sve parcijalne derivacije aerodinamičkih koeficijenata funkcije su Machova broja. Kod određivanja performansi zrakoplova najčešće se upotrebljavaju aerodinamički koeficijenti sile otpora i uzgona u aerodinamičkom koordinatnom sustavu. Za potrebe ovog modela aerodinamički koeficijenti (5.26) su izraženi u koordinatnom sustavu letjelice preko matrice transformacije izražene pomoću kvaterniona $\mathbf{R}_v = (2q_{v0}^2 - 1)\boldsymbol{I} + 2(\mathbf{q}_{v0}\mathbf{q}_{v0}^T - q_{v0}\tilde{\mathbf{q}}_{v0}^T)$ (transformacija iz

aerodinamičkog koordinatnog sustava u koordinatni sustav letjelice) definiranog pomoću napadnog kuta α i kuta klizanja β [74]

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \left[(2q_{v0}^2 - 1)\boldsymbol{I} + 2(\mathbf{q}_{v0}\mathbf{q}_{v0}^T - q_{v0}\tilde{\mathbf{q}}_{v0}^T)\right]^T \begin{bmatrix} -C_D \\ C_Y \\ -C_L \end{bmatrix}. \tag{5.27}$$

Sad možemo izraziti rezultantnu aerodinamičku silu u koordinatnom sustavu letjelice u obliku

$$\mathbf{Q}_{fA}^b = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{ref} \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

a aerodinamički moment u obliku

$$\mathbf{Q}_{mA}^b = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{ref} \begin{bmatrix} b \cdot C_l \\ c_A \cdot C_m \\ b \cdot C_n \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Model klipnog (stapnog) motora je implementiran u dinamiku letjelice pomoću raspoložive pogonske snage P_{eng} (engl. *power available*) kao funkcije tlaka, temperature okolnog zraka i upravljačke veličine pogonske sile δ_{eng} definirane kao raspon broja okretaja u minuti (engl. *RPM - revolutions per minute*) [72]. Raspoloživa pogonska sila elise izračunata je pomoću raspoložive snage motora koja se računa prema analitičkom postupku iz literature [73] u kojoj je opisana metoda koja dva dijagrama dana od proizvođača motora (na temelju ispitivanja motora) pretvara u jednadžbe [73, 75]. Kakva će biti raspoloživa snaga ovisi i o elisi, npr. dvokraka elisa konstantnog napadnog kuta odabranog malog putničkog zrakoplova (Piper Cherokee PA-28) korištenog u primjeru, ima koeficijent učinkovitosti η_{prop} [73]

$$\eta_{prop} = -1.6923J^3 + 1.4815J^2 + 0.5670J + 0.2644, \tag{5.30}$$

koji ovisi o parametru $J = V/(nD)$ u kojem D predstavlja promjer elise, a n broj okretaja elise u sekundi. Raspoloživa pogonska snaga na elisi bit će

$$P_a = \eta_{prop} P_{eng}, \tag{5.31}$$

iz koje računamo raspoloživu pogonsku silu elise

$$T_a = \frac{P_a}{V}, \tag{5.32}$$

a koja izražena u koordinatnom sustavu letjelice ima oblik

$$\mathbf{Q}_{fP}^{b} = \left[T_a \cos\alpha_T \quad 0 \quad T_a \sin\alpha_T\right]^T. \tag{5.33}$$

Zanemarene su dodatne sile i momenti na elisu zbog pojave napadnog kuta α i kuta klizanja β, te je zanemaren utjecaj vrtloženja struje. Kod definiranja pogonske sile u koordinatnom sustavu letjelice uzeta je u obzir samo činjenica da se os rotacije elise nalazi pod kutom α_T u odnosu na os zrakoplova. Sad možemo definirati ukupnu silu koja djeluje na zrakoplov izraženu u globalnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{Q} = \left[(2q_0^2 - 1)\boldsymbol{I} + 2(\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0^T - q_0\tilde{\mathbf{q}}_0^T)\right](\mathbf{Q}_f^b + \mathbf{Q}_m^b), \tag{5.34}$$

u kojoj su sadržane

$$\mathbf{Q}_f^b = \mathbf{Q}_{fA}^b + \mathbf{Q}_{fP}^b,\ \mathbf{Q}_m^b = \mathbf{Q}_{mA}^b. \tag{5.35}$$

Pretpostavljeno je da je letjelica nepromjenjive mase pa elementi tenzora tromosti ostaju konstantni tokom izvođenja simulacije.

Vektor upravljačkih veličina $\mathbf{u}$ za usvojeni model ima četiri komponente

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_l \\ \delta_m \\ \delta_n \\ \delta_{eng} \end{bmatrix}, \tag{5.36}$$

tj. vektor sadrži otklone aerodinamičkih kontrolnih površina i upravljačku veličinu pogonske sile δ_{eng}. Sila koja djeluje na zrakoplov (5.34) predstavlja ukupnu silu $\mathbf{Q}$ koja se javlja u jednadžbi dinamičkog modela (5.23a). Ako je $\mathbf{Q}$ linearna funkcija vektora upravljačkih veličina $\mathbf{u}$ (kao što može biti u slučaju nekih konfiguracija zrakoplova), jednadžba (5.23a) se može izraziti u obliku

$$\mathbf{M}(q)\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}(q, \mathbf{v}, t) + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(q)\mathbf{u}. \tag{5.37}$$

To nije slučaj kod dinamičkog modela opisanog u ovom poglavlju, budući da se u definiciji javljaju aerodinamčki koeficijenti sile otpora (5.25).

5.4.4 Rezultati simulacije

Za numerički primjer unaprijed je definiran vremenski promjenjivi vektor upravljačkih veličina $\mathbf{u}(t)$, tj. upravljački signali letjelice prikazani na slici 5.2. Simulacija započinje u zraku, a početni uvjeti su određeni za ravnotežni let što znači da su momenti koji djeluju oko središta mase letjelice u ravnoteži za definiranu početnu aerodinamičku brzinu i početnu visinu horizontalnog leta $-(r_3)_0$. Početni vektor stanja položaja i stava letjelice za $t=0$ izražen je u obliku

$$k_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{\Psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \\ (r_3)_0 \\ \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_3)_0 \\ 0 \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.38}$$

U dinamici leta, stav letjelice se obično definira pomoću vektora $\mathbf{\Psi}(t)$ sačinjenog od tri kuta koji se nazivaju De'Sparreovi kutovi, u literaturi vrlo često nazvani Eulerovim kutovima ($\phi(t)$ kut valjanja letjelice, $\theta(t)$ kut propinjanja i $\psi(t)$ kut zanosa). Ista reprezentacija stava je korištena i ovdje, zajedno s reprezentacijom pomoću kvaterniona q. Stoga, početni stav letjelice $\mathbf{\Psi}_0$ odgovara početnom stavu izraženom pomoću kvaterniona $\mathrm{q}_0 = \mathrm{q}(t=0)$. Bitno je napomenuti da korištena integracijska shema operira izravno na $\mathrm{q}(t)$, a $\mathbf{\Psi}(t)$ se koristi samo za jasniju prezentaciju stava. Početne vrijednosti brzina možemo izraziti u obliku

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[(2q_0^2-1)\boldsymbol{I} + 2(\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0^T - q_0\tilde{\mathbf{q}}_0^T)\right] \begin{bmatrix} V_0\cos\beta_0\cos\alpha_0 \\ V_0\sin\beta_0 \\ V_0\cos\beta_0\sin\alpha_0 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.39}$$

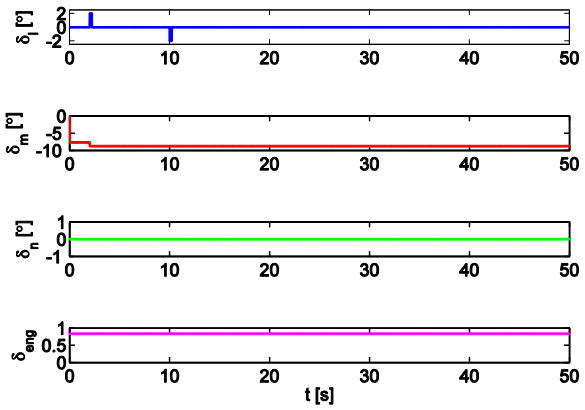
a početne vrijednosti vektora upravljačkih veličina

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \delta_{l0} \\ \delta_{m0} \\ \delta_{n0} \\ \delta_{eng0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0° \\ 7.7° \\ 0° \\ 0.83 \end{bmatrix}, \tag{5.40}$$

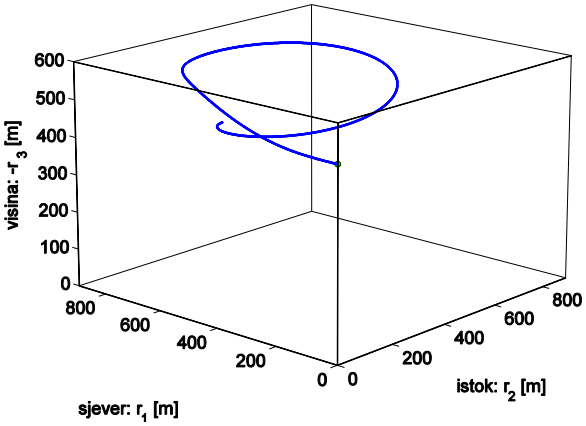
s početnim vrijednostima napadnog kuta i kuta klizanja

$$\alpha_0 = 4.6°,\ \dot{\alpha}_0 = 0°,\ \beta_0 = 0°. \tag{5.41}$$

Pošto je utjecaj vjetra u ovom modelu zanemaren, aerodinamička brzina V je jednaka brzini leta izraženoj u koordinatnom sustavu letjelice. Na slici 5.3 prikazana je putanja letjelice u prostoru s početnim koordinatama $r_1 = 0\,\text{m}$, $r_2 = 0\,\text{m}$ na visini $-r_3 = 500\,\text{m}$.

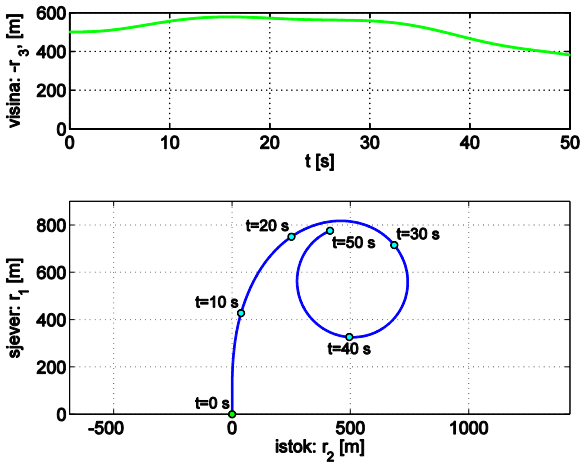


Slika 5.2: Vremenski promjenjive upravljačke veličine: otklon krilca, otklon kormila visine, otklon kormila pravca i upravljačka veličina pogonske sile.

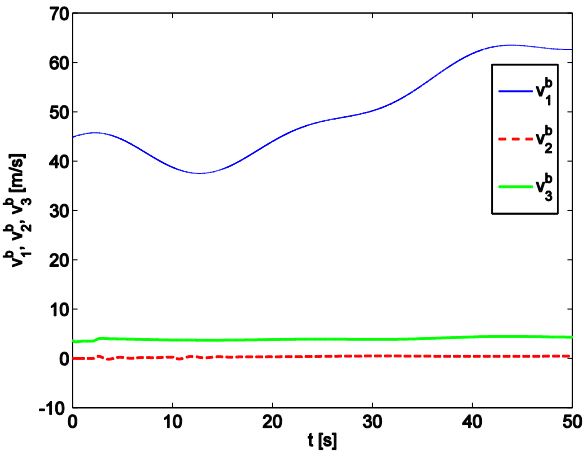


Slika 5.3: Prikaz putanje $\mathbf{r}$ letjelice u prostoru.

Promjena visine $-r_3$ u ovisnosti o vremenu kao i globalna projekcija putanje centra mase na ravninu $r_1\ r_2$ prikazane su na slici 5.4. Otklon krilca u trenutku $t = 2\,\text{s}$ izaziva zaokret, tj. rotaciju oko vertikalne osi. Otklon kormila visine je podešen na vrijednost ravnotežnog stanja (triman let) na početku simulacije. Međutim, tijekom provedbe simulacije ne traži se ravnotežno stanja što može uzrokovati gubitkom visine i akceleracije.



Slika 5.4: Komponenta $r_3(t)$ (visina) položaja središta mase aviona i globalna projekcija putanje centra mase na ravninu $r_1\ r_2$.

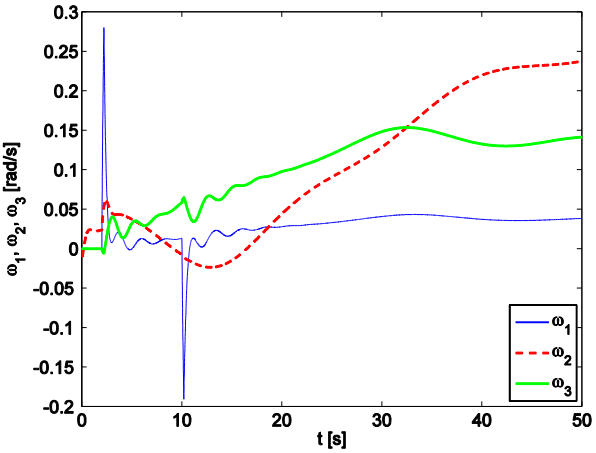


Slika 5.5: Komponente globalnog vektora brzine $\mathbf{v}^b$.

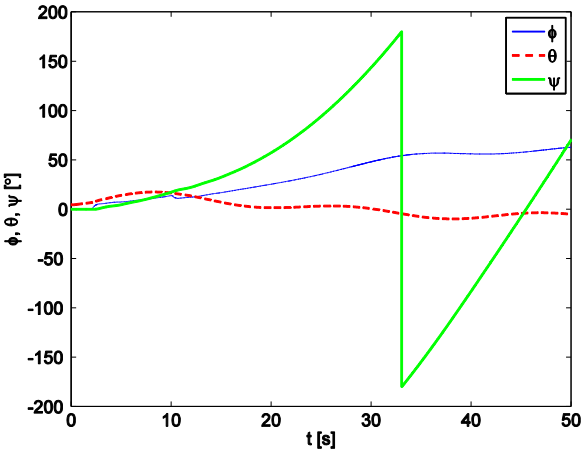
Prema dinamici leta [74], brzine su izražene u koordinatnom sustavu letjelice

$$\mathbf{v}^b = \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_2^b \\ v_3^b \end{bmatrix} = \left[(2q_0^2 - 1)\boldsymbol{I} + 2(\mathbf{q}_0\mathbf{q}_0^T - q_0\tilde{\mathbf{q}}_0^T)\right]^T \mathbf{v}\,, \tag{5.42}$$

i prikazane na slici 5.5.



Slika 5.6: Kutna brzina aviona.



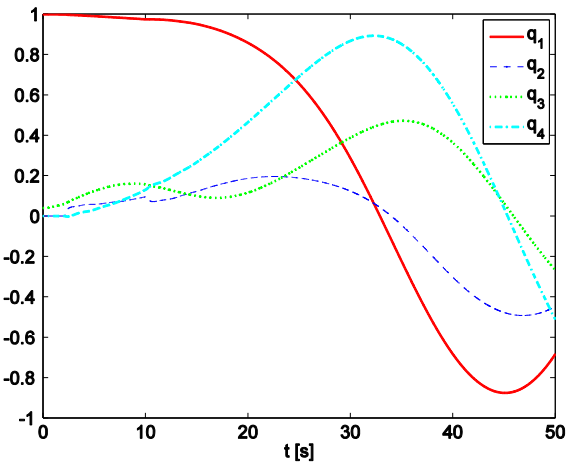
Slika 5.7: Stav aviona $\boldsymbol{\Psi}$ - Eulerovi kutovi.

Na slici 5.6 prikazan je kutna brzina izražena u koordinatnom sustavu letjelice. Na pobudu odskoka kormila krilca u trenutku $t = 2\,\mathrm{s}$ i $t = 10\,\mathrm{s}$, iznosa $\delta_l = 2°$, avion reagira brzim

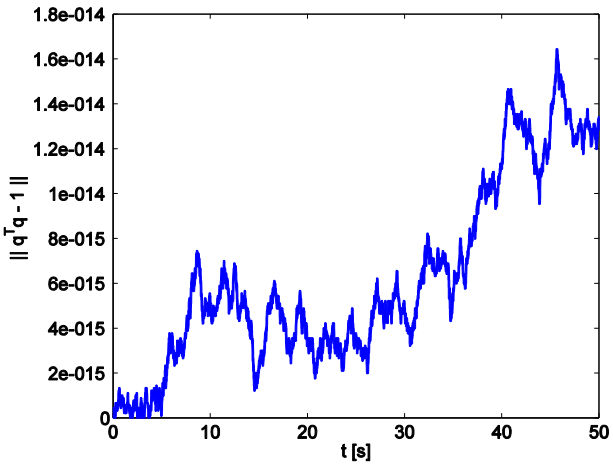
odzivom u obliku rotacije oko uzdužne osi (valjanje brzinom ω_1), što je vidljivo na slici 5.6. Kao što je već spomenuto, stav avion je definiran preko tri Eulerova kuta (slika 5.7)

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \tag{5.43}$$

dobivena pomoću kvaterniona q(t) čiji elementi su prikazani na slici 5.8. Na slici 5.9 prikazana je norma jednadžbe algebarskog ograničenja duljine (modula) jediničnog kvaterniona.

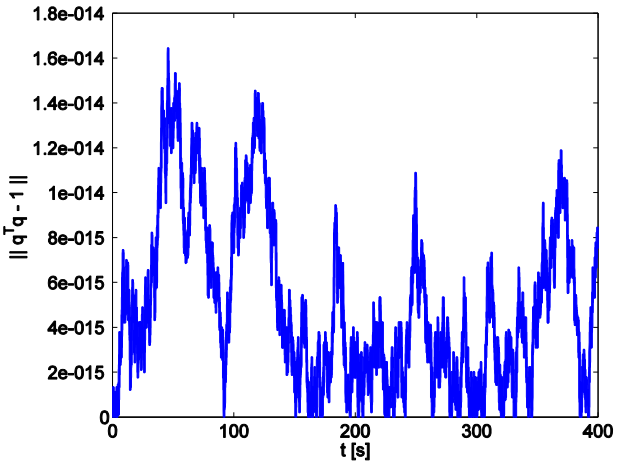


Slika 5.8: Elementi kvaterniona.



Slika 5.9: Norma jednadžbe ograničenja kvaterniona jedinične veličine.

Kako bi se dokazalo da ne dolazi do napredovanja greške u jediničnoj duljini kvaterniona provedena je i simulacija na proširenoj vremenskoj domeni od 400 sekundi (vidi sliku 5.10).



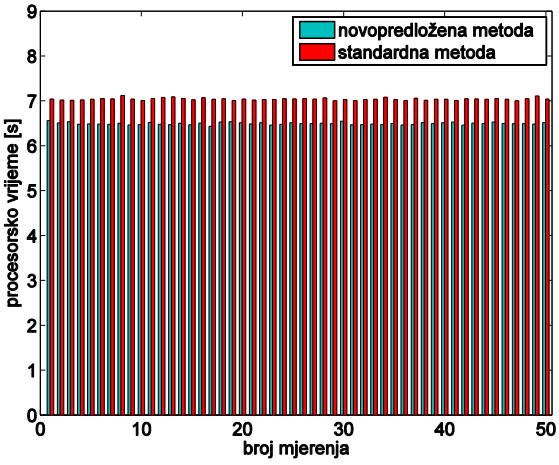
Slika 5.10: Norma jednadžbe ograničenja kvaterniona jedinične veličine (vremenska domena 400 sekundi).

Iz slike 5.10 koja prikazuje normu jednadžbe ograničenja kvaterniona jedinične veličine vidljivo je da opisana metoda čuva jediničnu duljinu kvaterniona do na strojnu točnost bez uvođenja numerički neefikasne stabilizacije dodatnog kinematičkog ograničenja - tj. bez normalizacije karakteristične za standardni redundantni matematički model. Iako normalizacija kvaterniona nije numerički zahtjevna što se može vidjeti iz izraza

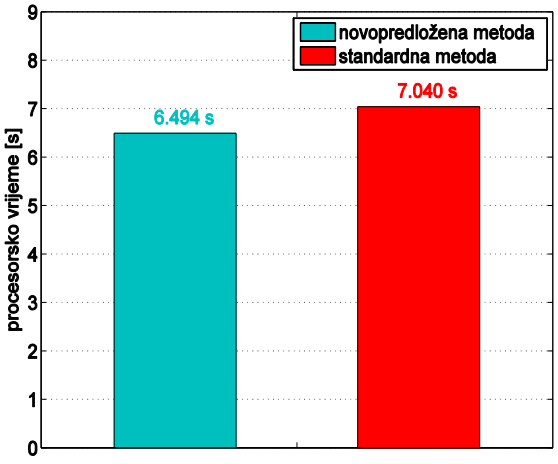
$$\hat{\mathrm{q}} = \frac{1}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \mathrm{q}, \tag{5.44}$$

pokazalo se da njeno korištenje snizuje nivo performansi standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona.

Kako bi se dokazalo da je predložena metoda numerički efikasnija od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona, izvršeno je mjerenje i usporedba procesorskog vremena za obje metode pomoću *MATLABova* alata *Profiler*. Procesorsko vrijeme *MATLAB* mjeri u broju tzv. otkucaja procesorskog sata. Korišten je *MATLAB* pokrenut u virtualnom *Linux Ubuntu* kako bi se eliminirao utjecaj ostalih programa i procesa na mjerenje procesorskog vremena potrebnog za simulaciju procedure gibanja modela zračne letjelice. Sva su mjerenja provedena na procesoru *Intel Core i5-2500K 3.3 GHz*. Provedeno je ukupno 50 mjerenja kako bi se eliminirala sitna odstupanja u vrijednostima procesorskog vremena koja se javljaju kod svakog novog mjerenja (na slici 5.11 vidljivo je da vrijednosti imaju minimalno odstupanje). Iz slike 5.11 vidljivo je da predložena metoda ima kraće procesorsko vrijeme računanja od standardne metode za svih 50 mjerenja.



Slika 5.11: Usporedba 50 mjerenih procesorskih vremena predložene i standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona.

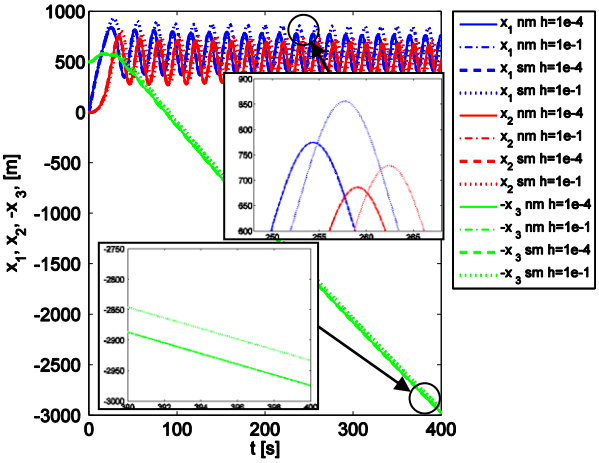


Slika 5.12: Prosjek izmjerenih vrijednosti procesorskih vremena.

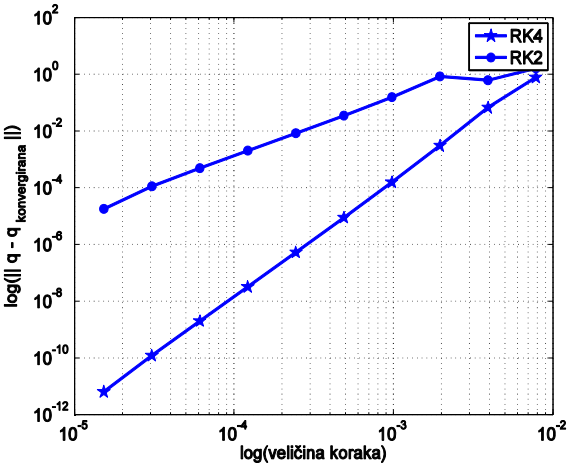
Na slici 5.12 dan je prosjek svih mjerenja koji također pokazuje bolju numeričku efikasnost predložene metode.

Provedeno je i dodatno testiranje u smislu utvrđivanja dodatnih dobrobiti metode integracije rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona u usporedbi sa standardnom metodom integracije rotacijskih kvaterniona. U tom smislu testirani su primjeri integracije s predloženim algoritmom ali s dužim korakom integracije i duljom vremenskom domenom te uspoređeni rezultati dobiveni novom metodom s odstupanjima od stabiliziranih rezultata jediničnih kvaterniona koji su se pojavili u slučaju integracije dinamičkog modela malog putničkog aviona (sustava s vanjskom uzbudom) pri korištenju standardne metode integracije kvaterniona (vidi sliku 5.13). Korišteni su koraci integracije h=1e-1 i h=1e-4, te vremenska domena od 400 sekundi. Rezultati za mali korak integracije h=1e-4 podudaraju se za obje metode i oni su korišteni kao referentne usporedbene vrijednosti. Standardna metoda integracije kvaterniona iako koristi stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona, za veliki korak integracije h=1e-1 uzrokuje odstupanje od referentnih vrijednosti položaja (vidi sliku 5.13). Osim na položajima prikazanim na slici 5.13 odstupanja su prisutna i na ostalim integracijskim krivuljama koje prikazuju translacijske brzine, kutne brzine i elemente kvaterniona. Odstupanja u rezultatima uzrokovana su konstrukcijom standardne metode integracije kvaterniona koja u svakom koraku integracije iz kutne brzine računa kvaternione koji unose grešku na uzbudni član (koji se mijenja zbog promjene orijentacije). Za razliku od standardne metode, predložena integracijska procedura koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora i izravnu rekonstrukciju stanja rotacije na $Sp(1)$ grupi kvaterniona i ne unosi nestabilnost u uzbudni član.

Uz do sada spomenute i dokazane dobrobiti predložene integracijske procedure, bitno je spomenuti i mogućnost biranja po volji reda točnosti integracije koji ovisi isključivo o točnosti primijenjenog ODJ algoritma [5]. U svrhu ilustracije utjecaja reda točnosti ODJ algoritma na predloženu metodu, za integraciju je korišten Runge-Kutta algoritam drugog i četvrtog reda točnosti (RK2 i RK4). Na slici 5.14 prikazana je konvergencija norme $\left\|\mathrm{q}-\mathrm{q}_{konvergirana}\right\|_2$ za RK2 i RK4 algoritme, gdje je vrijednost $\mathrm{q}_{konvergirana}=\mathrm{q}(t=1)$ dobivena pomoću malog koraka integracije h=1e-5. Norma greške je ocijenjena za sljedeće vrijednosti koraka integracije 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024, 1/2048, 1/4096, 1/8192, 1/16384, 1/32768 i 1/65536. Rezultati prikazani na slici 5.14 potvrđuju spomenuto svojstvo predložene metode da se red točnosti integracije može po volji birati i ovisi isključivo o točnosti primijenjenog ODJ algoritma.



Slika 5.13: Usporedba položaja dobivenih standardnom (sm) i predloženom metodom (nm) za korake integracije *h*=1e-1 i *h*=1e-4, te dugu vremensku domenu (400 sekundi).



Slika 5.14: Konvergencija norme greške elemenata kvaterniona.

Iz gore navedenog može se zaključiti da je predložena metoda numerički efikasnija i točnija od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona. Uzrok leži u konstrukciji standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona koja nužno iziskuje integraciju četiri diferencijalno-algebarske jednadžbe i stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona.

Za integraciju ODJ dinamičkih jednadžbi malog putničkog aviona kao i za izračun lokalnog rotacijskog vektora u svakom koraku integracije (5.22), korištena je RK4 metoda. Integracijski rezultati za nepromjenjivi korak integracije *h*=1*e*-2 prezentirani su slikama 5.3 – 5.9. Na slikama 5.3, 5.4, 5.5 i 5.8 prikazani su rezultati dobiveni integracijom pomoću novopredložene procedure gdje je vidljivo da su sve integralne krivulje glatke funkcije bez diskontinuiteta. U suprotnosti tome su rezultati ODJ integracije na temelju klasičnog modela lokalnih koordinata parametrizacije velikih rotacija (Eulerovi kutovi), prikazani na slici 5.7, na kojima je vidljiva pojava diskontinuiteta zbog pojave nužnih singulariteta. Predložena integracijska procedura, koja koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^3$ i izravnu rekonstrukciju stanja rotacije na *Sp*(1) grupi kvaterniona, u potpunosti zaobilazi pojavu singulariteta, a također ne uvodi integraciju redundantnih DAE jednadžbi poput standardne metode integracije jediničnog kvaterniona.

6

INTEGRACIJSKE SHEME KOJE ČUVAJU PRVE INTEGRALE GIBANJA

Störmer-Verlet integracijski algoritam, izvorno definiran kao integracijska shema za obične diferencijalne jednadžbe u linearnom vektorskom prostoru (s učestalom primjenom u okviru zadaća molekularne dinamike), ima više pogodnih značajki stabilne numeričke integracije: shema je eksplicitna, drugog reda točnosti, omogućava očuvanje integrala gibanja te je simplektična za Hamiltonove sustave.

S polazištem u izvornom Störmer-Verlet algoritmu linearnog prostora predložen je implicitni numerički integrator na Lievoj grupi koji čuva prve integrale gibanja [2], a kojem je prethodila eksplicitna inačica istog algoritma, koja je numerički efikasnija ali omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta sustava [36].

Opisan je izvod matematičkog modela implicitnog i eksplicitnog integracijskog algoritma na Lievoj grupi konfiguracijskog prostora krutog tijela te je sintetiziran dinamički model svemirskog satelita.

6.1 Polazne točke korištene kod projektiranja odabranih integracijskih shema

Kako bi se projektirala integracijska shema koja će biti čim boljih performansi za integraciju rotacije krutog tijela kao polazište je uzeta izvorna Störmer-Verlet integracijska shema na linearnom vektorskom prostoru. Ona posjeduje više pogodnih značajki kod rješavanja ODJ u linearnom vektorskom prostoru: shema je eksplicitna, drugog reda točnosti, omogućava očuvanje integrala gibanja te je simplektična za Hamiltonove sustave. Shema ima

dugu i bogatu povijest korištenja [76, 77]. Pod imenom Verlet metoda, algoritam je postao jedan od najčešće korištenih integracijskih shema u području molekularne dinamike.

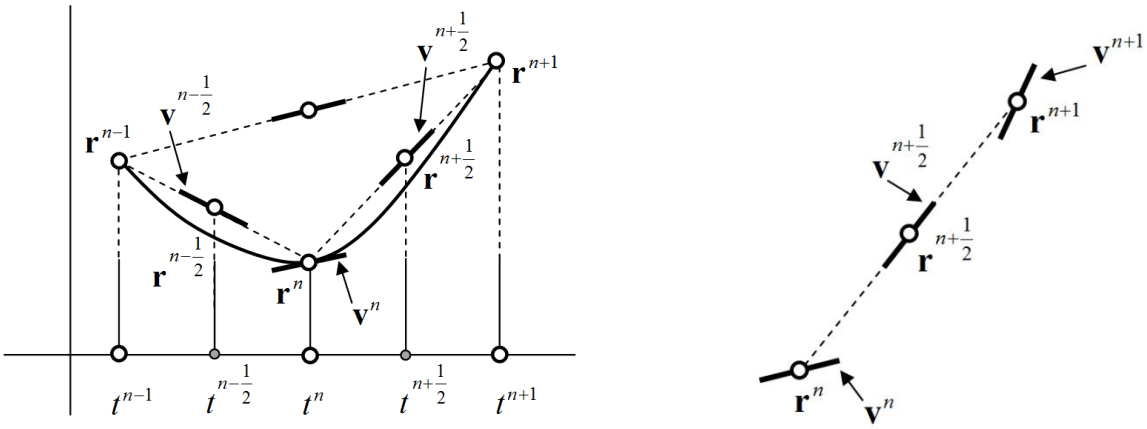
Struktura Störmer-Verlet integracijske sheme na linearnom vektorskom prostoru u formi prilagođenoj za integraciju dinamike čestice u potencijalnom polju, dana je u obliku (vidi sliku 6.1)

$$m_p \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = m_p \mathbf{v}^n - \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}^n), \tag{6.1a}$$

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + h\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{6.1b}$$

$$m_p \mathbf{v}^{n+1} = m_p \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}^{n+1}), \tag{6.1c}$$

gdje je m_p masa čestice, $\mathbf{r}$ je vektor položaja čestice, $\mathbf{v}$ je vektor brzine čestice, a $\nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r})$ predstavlja gradijent potencijalne energije kao funkcije pomaka. Opsežna istraživanja predstavljena u [76], pokazala su izvrsne geometrijske karakteristike Störmer-Verlet sheme što objašnjava atraktivna svojstva očuvanja globalnih značajki. Međutim, kod integracije na (nelinearnoj) rotacijskoj grupi gube se neke od spomenutih karakteristika.



Slika 6.1: Geometrijski prikaz aproksimacije diferenciranjem korištene kod projektiranja Störmer-Verlet integracijske metode (lijevo). Jedna od moguće dvije varijante Störmer-Verlet sheme (desno) [76].

Störmer-Verlet integracijska shema u [31, 78, 79] je primijenjena na numeričke zadaće dinamike rotirajućeg krutog tijela. Iz navedene literature je vidljivo da primjena Störmer-Verlet algoritma za integraciju dinamičkih jednadžbi rotacije krutog tijela pri čemu se kruto

tijelo modelira kao mehanički sustav s kinematičkim ograničenjima, vodi prema RATTLE integracijskoj shemi (preinačena RATTLE shema je opisana u sljedećem potpoglavlju). Iako RATTLE shema omogućava algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela, očuvanje ostalih integrala gibanja dinamike krutog tijela uglavnom nije zadovoljeno. Isto tako metoda više nije eksplicitna (kao polazna Störmer-Verlet shema) i zahtjeva rješavanje nelinearnih algebarskih jednadžbi u svakom koraku integracije, kao i određivanje 'umjetnih' Lagrangeovih multiplikatora koji općenito nisu interesantni kod analize gibanja.

Umjesto razmatranja krutog tijela kao sustava s ograničenjima (pristup koji koristi 'izvorni' RATTLE algoritam, usvojen je i u [80]) usvojio se drugi put u projektiranju čim učinkovitije sheme za dinamiku rotirajućeg krutog tijela. Uzevši za polazište izvornu Störmer-Verlet integracijsku shemu na linearnom vektorskom prostoru, uvedena je integracijska shema drugog reda točnosti na Lievoj grupi. Cilj kod procesa projektiranja sheme bio je izvod sheme koja će dokazano omogućiti očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije slobodno rotirajućeg tijela, uzimajući u obzir i očuvanje ostalih integrala gibanja dinamike krutog tijela, kao što su četiri konstante gibanja rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom (engl. *Lagrangian top*). Četiri integrala gibanja rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom su: Hamiltonova funkcija (tj. ukupna energija sustava)

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_b^T \mathbf{R}^T m\mathbf{g}, \tag{6.2}$$

projekcija kinetičkog momenta na os simetrije tijela $\mathbf{y}\cdot\chi$, projekcija kinetičkog momenta na gravitacijski vektor $\mathbf{y}\cdot\mathbf{g}_1$ i norma gravitacijskog vektora izražena u lokalnim koordinatama $\left\|\mathbf{R}^T\mathbf{g}\right\|$. Zadnje dvije konstante gibanja predstavljaju Casimirove funkcije (engl. *Casimirs*) Poissonove zagrade koje definiraju Hamiltonovu strukturu sustava. U izrazu (6.2), $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{I}$ predstavljaju kutnu brzinu i tenzor inercije izražene u lokalnom koordinatnom sustavu (vezan za tijelo), $\mathbf{y}$ je kinetički moment izražen u globalnim koordinatama, χ je jedinični vektor koji leži na osi simetrije tijela, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ je jedinični vektor koji leži na pravcu djelovanja gravitacijskog vektora, $\mathbf{r}_b$ je položaj središta mase tijela izražen u lokalnim koordinatama, a $\mathbf{R}$ predstavlja matricu transformacije iz lokalnog u globalni koordinatni sustav.

Postavlja se pitanje zašto je važno da integracijska metoda zadovoljava integrale gibanja. Kao prvo, konstante gibanja, kao što je kinetički moment i kinetička energija u slučaju slobodno rotirajućeg tijela, predstavljaju temeljne fizikalne veličine od izravnog inženjerskog interesa. Drugo, očuvanje integrala gibanja može izravno doprinijeti robusnosti i stabilnosti

sheme (poglavito kod njezine primjene u nelinearnom režimu koji je u fokusu istraživanja - nelinearna rotacijska grupa). Kao treći razlog može se reći da je očuvanje integrala gibanja dobar indikator kako metoda slijedi fizikalne zakone gibanja što ukazuje na njezino ponašanje pri upotrebi na ostale primjere gibanja. Isto tako, može se reći da je očuvanje integrala gibanja dobar indikator da numerička metoda slijedi geometrijsku strukturu proisteklu iz zadaće promatranog mehaničkog sustava (u suprotnosti tome su standardne metode za rješavanje općenitih ODJ bez algoritamske poveznice s mehanikom na kojoj se sustav temelji).

Kako bi se projektirala integracijska shema koja će omogućiti očuvanje navedenih značajki uz istodobnu bez-koordinatnu integraciju rotacija krutog tijela, prvo je modelirana dinamika rotacije krutog tijela, izvedena kao Hamiltonov mehanički sustav u kanonskom obliku koji predstavlja preinačenu RATTLE integracijsku shemu [81] s izravnom rekonstrukcijom na rotacijskoj grupi $SO(3)$. Modificirana RATTLE shema je dala lošije rezultate po pitanju očuvanja kinetičkog momenta i od 'izvornog' RATTLEa, te je iz tog razloga napuštena.

Na temelju iskustva dobivenih projektiranjem modificirane RATTLE sheme, prvo je predložen eksplicitni numerički integrator koji omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta sustava slobodno rotirajućeg tijela [2, 36]. Kasnije, kako bi se otklonio nedostatak predloženog algoritma [2, 36] u pogledu očuvanja kinetičke energije, konstruiran je implicitni matematički model [2] koji dokazano čuva kinetički moment i kinetičku energiju rotirajućeg krutog tijela bez vanjske uzbude.

U sljedećim potpoglavljima je pokazano kako uz algoritamski dokazano očuvanje dva najvažnija integrala gibanja, obje predložene metode dobro čuvaju i ostale integrale gibanja važne za gibanje krutog tijela. U radovima [2, 36] pokazano je da obje metode imaju bolje računalne performanse u smislu očuvanja integrala gibanja rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom od nekih od najuspješnijih usporedbenih integracijskih shema opisanih u literaturi. Implicitni numerički integrator jasno je pokazao bolje numeričke performanse od svih testiranih shema koje čuvaju integrale gibanja, dok eksplicitni integrator koji je numerički efikasniji, nije zadovoljio uvjet očuvanja kinetičke energije sustava bez vanjske uzbude (što se i očekivalo s obzirom na njegovu algebarsku strukturu) ali je bolji u očuvanju ostalih konstanti gibanja u odnosu na testirane sheme.

6.1.1 Integracijska shema dinamike rotacije krutog tijela u Hamiltonovom kanonskom obliku

Za ilustraciju primjene Störmer-Verlet algoritma za integraciju dinamičkih jednadžbi mehaničkog sustava na temelju Newton-Eulerovih jednadžbi modelirana je dinamika rotacije krutog tijela, izvedena kao Hamiltonov mehanički sustav u kanonskom obliku s izravnom rekonstrukcijom na rotacijskoj grupi *SO*(3).

Krećemo od predstavljanja dijagonalne matrice $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ s koeficijentima definiranim u (6.3), gdje su svojstvene vrijednosti I_1, I_2 i I_3 tenzora inercije dane u obliku

$$I_1 = d_2 + d_3, I_2 = d_3 + d_1, I_3 = d_1 + d_2, d_k = \int_{\mathcal{B}} x_k^2 dm(x), \tag{6.3}$$

iz čega se dobiva izraz za kinetičku energiju rotacije krutog tijela

$$E_k = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{D}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T) = \mathrm{trace}(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{D}\dot{\mathbf{R}}^T), \tag{6.4}$$

gdje je korišteno lijevo-invarijantno vektorsko polje, definirano kao Poissonova jednadžba $\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$. Pomoću konjugiranog momenta

$$\mathbf{P} = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{D}, \tag{6.5}$$

dobiva se Hamiltonov sustav s $\mathbf{P}$ i $\mathbf{R}$ u obliku 3×3 matrica

$$H(\mathbf{P},\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T) + U(\mathbf{R}), \tag{6.6}$$

gdje je pretpostavljeni vanjski potencijal $U(\mathbf{R})$ dodan kinetičkoj energiji E_k. Jednadžba gibanja krutog tijela izvedena kao Hamiltonov sustav s ograničenjima [68, 69] može se izraziti u kanonskoj formi u obliku

$$\dot{\mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{P}} H(\mathbf{P},\mathbf{R}) = \mathbf{P}\mathbf{D}^{-1},$$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{P},\mathbf{R}) - \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda} = -\nabla U(\mathbf{R}) - \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} - \boldsymbol{I},$$

gdje je $\nabla U = (\partial U / \partial \mathbf{R}_{ij})$, $\nabla_{\mathbf{R}} H = (\partial H / \partial \mathbf{R}_{ij})$, a isto vrijedi i za $\nabla_{\mathbf{P}} H$. Nezavisni koeficijenti simetrične matrice Lagrangeovih multiplikatora povezani su sa jednadžbom kinematičkog ograničenja

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} - \boldsymbol{I}\,, \tag{6.8}$$

koja proistječe iz redundantne 3 DOF formulacije kinematike krutog tijela. Nakon diferenciranja kinematičkog ograničenja na nivou položaja, dobiva se kinematičko ograničenje na nivou brzina $\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^T\mathbf{R} = \mathbf{0}$ koje daje izraz

$$\mathbf{R}^T\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R} = \mathbf{0}. \tag{6.9}$$

Kinematička ograničenja (6.8) i (6.9) upućuju na to da jednadžbe (6.7) predstavljaju Hamiltonov sustav ograničen na mnogostrukost

$$\mathcal{K} = \left\{ (\mathbf{P}, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}^{3\times 3} \times \mathcal{R}^{3\times 3};\ \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \boldsymbol{I},\ \mathbf{R}^T\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R} = \mathbf{0} \right\}.$$

Potrebno je naglasiti da $\mathcal{K}$ nije kotangentni svežanj $T^*SO(3)$ rotacijske mnogostrukosti $SO(3)$.

Na temelju jednadžbi (6.7) i slijedeći [76, 77] predstavljen je Störmer-Verlet algoritam za integraciju dinamičkih jednadžbi rotacije krutog tijela u kanonskom obliku. Takav pristup vodi preinačenoj RATTLE integracijskoj shemi [81] s izravnom rekonstrukcijom na rotacijskoj grupi $SO(3)$ bez upotrebe lokalnih koordinata/parametara integracije, koja se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{1/2} &= \mathbf{P}_0 - \frac{h}{2}\nabla U(\mathbf{R}_0) - \frac{h}{2}\mathbf{R}_0\boldsymbol{\Lambda}_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega})\,, \\
\mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_0 \exp(h\mathbf{R}_0^T\mathbf{P}_{1/2}\mathbf{D}^{-1})\,, \\
\mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_{1/2} - \frac{h}{2}\nabla U(\mathbf{R}_1) - \frac{h}{2}\mathbf{R}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\,,\ \mathbf{R}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}_1^T\mathbf{R}_1 = \mathbf{0}\,.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

U (6.10), $\boldsymbol{\Lambda}_0$ i $\boldsymbol{\Lambda}_1$ predstavljaju simetrične matrice Lagrangeovih multiplikatora kinematičkih ograničenja na nivou brzina uslijed konfiguracijskih ograničenja rotacijske grupe $SO(3)$, a h je veličina koraka integracije. Budući da se matrica $\boldsymbol{\Lambda}_0$ (sadrži Lagrangeove multiplikatore kinematičkih ograničenja na nivou položaja (6.8)) ne može eksplicitno

izračunati u izvornoj formulaciji, zamijenjena je izrazom koji je dobiven diferenciranjem (6.9) i eliminacijom $\mathbf{\Lambda}_0$ iz prve jednadžbe izraza (6.10). Posljednje dvije jednadžbe izraza (6.10) zahtijevaju rješavanje linearnog algebarskog sustava za $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{\Lambda}_1$. Shema (6.10) se razlikuje u odnosu na izvorni RATTLE algoritam u prve dvije jednadžbe koje u izvornom RATTLE algoritmu predstavljaju spregnute jednadžbe u obliku

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + h\mathbf{P}_{1/2}\mathbf{D}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{1/2} = \mathbf{P}_0 - \frac{h}{2}\nabla U(\mathbf{R}_0) - \frac{h}{2}\mathbf{R}_0\mathbf{\Lambda}_0, \tag{6.11}$$

$$\mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_1 - \boldsymbol{I} = \mathbf{0}.$$

Za razliku od izvornog RATTLE algoritma koji ima implicitan karakter, integracijska shema oblikovana u (6.10) je potpuno eksplicitna i osigurava bez-koordinatnu rekonstrukciju prostornih rotacija (integracijsko rješenje ostaje bezuvjetno na rotacijskoj mnogostrukosti *SO*(3) u domeni primijenjene numeričke tolerancije). Iako joj eksplicitan karakter omogućava poboljšanu primjenu u odnosu na izvornu RATTLE shemu, numerički primjer prezentiran u radu [36] pokazuje da druge integracijske značajke izvedenog algoritma u smislu očuvanja integrala gibanja nisu potpuno zadovoljavajuće (vidi dodano poglavlje B).

U radu [36] kao numerički primjer upotrebe algoritma, prezentirana je rotacija slobodnog tijela, te je dana usporedba komponente kinetičkog momenta dobivene integracijom pomoću preinačene RATTLE sheme s rezultatima izračunatim RK-MK2 algoritmom i jednim od algoritama drugog reda s istaknuto dobrim numeričkim performansa (algoritam na Lievoj grupi temeljen na 'klasičnoj' Newmark shemi linearnih prostora [19]). Iako je opisana RATTLE shema dala bolje rezultate od RK-MK2 algoritma u smislu očuvanja kinetičkog momenta, uvedeni algoritam uvodi značajnija odstupanja u usporedbi s Lie-Newmark shemom te analitičkim rješenjem koje bi osiguravalo konstantnu vrijednost kinetičkog momenta. Također, modificirana RATTLE shema je dala lošije rezultate po pitanju očuvanja kinetičkog momenta i od 'izvornog' RATTLE algoritma koji dokazano omogućava očuvanje navedene značajke. Uzrok tome može se tražiti u postupku diferenciranja izraza $\mathbf{R}^T\mathbf{P}\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R} = \mathbf{0}$ prilikom eliminacije $\mathbf{\Lambda}_0$ iz prve jednadžbe izraza (6.10). Ta je operacija identična postupku reduciranja indeksa diferencijalno-algebarskih jednadžbi gibanja mehaničkog sustava i može imati izravnog utjecaja na Hamiltonovu strukturu sustava [76].

Nakon modificirane RATTLE sheme krenulo se s projektiranjem integracijske sheme koja će omogućiti očuvanje integrala gibanja (u prvom redu kinetičkog momenta ali moguće i drugih integrala, kao npr. Casimirovih funkcija ili očuvanje kinetičke energije sustava) uz istodobnu bez-koordinatnu integraciju rotacija krutog tijela. U nastavku su opisane dvije Störmer-Verlet sheme na Lievoj algebri i rotacijskoj grupi *SO*(3), koje se temelje na jednadžbama dinamike u ne-kanonskoj formi.

6.2 Ne-kanonski eksplicitni Störmer-Verlet algoritam za integraciju dinamike na rotacijskoj grupi *SO*(3)

6.2.1 Polazna shema

Kao i kod prethodno opisanih integracijskih shema, ishodišna točka kod projektiranja odabranih integracijskih shema bila je jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\,. \tag{6.12}$$

Rješavanjem ODJ (6.12) na rotacijskoj grupi *SO*(3), izravno se rekonstruira orijentacija tijela $\mathbf{R}(t)$ primjenom lijevog invarijantnog vektorskog polja $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Rješenje jednadžbe (6.12) ima oblik

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \exp(\widetilde{\mathbf{u}}(t))\,, \tag{6.13}$$

gdje je zatvorena forma eksponencijalne mape na *SO*(3) grupi dana već spomenutim Euler-Rodriguesovim izrazom [23]. Primjenom Magnusovog teorema [10, 69], rješenje diferencijalne jednadžbe (6.12) može se izraziti u obliku (6.13) ako $\widetilde{\mathbf{u}}(t) \in so(3)$ predstavlja rješenje ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre u obliku

$$\dot{\widetilde{\mathbf{u}}} = \mathrm{dexp}^{-1}_{\widetilde{\mathbf{u}}}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}(t)))\,,\ \widetilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}\,. \tag{6.14}$$

Krenulo se od rješavanja jednadžbe (6.12) pomoću izraza (6.13) koji je preinačen po uzoru na funkciju (6.1b) izvorne Störmer-Verlet sheme u oblik

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \exp(h\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.15}$$

gdje $h\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+\frac{1}{2}}$ predstavlja aproksimaciju prvog reda inkrementa rotacijskog vektora. Za određivanje $\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+\frac{1}{2}}$ potrebno je jednadžbu (6.14) izraziti u aproksimiranoj formi

$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}} = \mathrm{dexp}^{-1}_{-\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}(t))) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}_0 \exp(\tilde{\mathbf{u}})) + \sum_{j=1}^{q} \frac{B_j}{j!}(-\mathrm{ad}^j_{\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}_0 \exp(\tilde{\mathbf{u}})))), \ \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}, \tag{6.16}$$

gdje indeks q mora zadovoljiti uvjet $q \geq p-2$, a p označava red točnosti klasične ODJ integracijske metode na vektorskim prostorima koja je odabrana za rješavanje jednadžbe (6.14) [10]. Budući da će se za $\tilde{\dot{\mathbf{u}}}$ koristiti aproksimacija prvog reda (što je u skladu s aproksimacijom prvog reda inkrementa rotacijskog vektora korištenom u izrazu (6.15)), zanemaruje se cijela desna strana izraza (6.16), osim prvog člana, koji se za *n*-ti korak integracije može pisati u obliku

$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{R}_n \exp(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}})) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{6.17}$$

Uzevši za polazište izvornu Störmer-Verlet integracijsku shemu na temelju Newton-Eulerovih jednadžbi i gore definiranih izraza, uvedena je integracijska shemu na Lievoj grupi za slobodno rotirajuće tijelo u obliku [2, 36]

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\omega}^n - \frac{h}{2}(\mathbf{I}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^n \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^n),$$

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}(\mathbf{I}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+1} \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n+1}).$$

To je ne-kanonska integracijska shema s izravnom rekonstrukcijom stanja rotacije na $SO(3)$ grupi preko eksponencijalne mape $\exp : so(3) \to SO(3)$. Prva i treća jednadžba izraza (6.18) operiraju na Lievoj algebri (izražene u vektorskoj formi $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{R}^3$) i napredovanje koraka integracije ostvaruje se po istom uzorku kao i pri 'izvornoj' Störmer-Verlet integracijskoj shemi (6.1) na linearnom vektorskom prostoru.

Ovako oblikovan algoritam omogućio je dobro očuvanje kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela ali rezultati očuvanja Casimirovih funkcija (prezentirani u [2, 36]) pri integriranju dinamike trodimenzijskog 'zvrka', nisu bili potpuno zadovoljavajući (vidi dodano poglavlje B).

6.2.2 Preinačena shema

Da bi se unaprijedila svojstva polaznog Lie-Störmer algoritma, dio matematičkog modela (6.18) koji operira na Lievoj algebri zamijenjen je algoritmom integracije na Lievoj grupi temeljenom na izravnoj integraciji kinetičkog momenta, čime se omogućava dodatno očuvanje geometrijske strukture dinamičkog sustava. U tom se smislu rješenje jednadžbe integracije kinetičkog momenta za slobodno tijelo (Lie-Poissonova jednadžba) može izraziti u svakom koraku integracije kao operacija $SO(3)$ na $\mathcal{R}^3$

$$\dot{\mathbf{Y}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{Y}, \tag{6.19}$$

gdje $\mathbf{Y}$ predstavlja kinetički moment u lokalnim koordinatama tijela. Prema [68], $\mathbf{Y} \in \mathcal{R}^3$ se može poistovjetiti s $\hat{\mathbf{Y}} \in so^*(3)$, gdje $so^*(3)$ predstavlja dualni prostor Lieve algebre $so(3)$. Izraz (6.19) se može izraziti u formalnijem obliku kao ko-adjungirani operator [17, 23] dualnog prostora Lieve algebre $so^*(3)$ u obliku

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathrm{ad}^*_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{Y}), \tag{6.20}$$

gdje je $'\mathrm{ad}^*{}'$ dvojnik operatora $'\mathrm{ad}'$ za koji vrijedi $\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{a}}}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ i koji je definiran kao Lieva zagrada

$$\mathrm{ad}_{\tilde{\mathbf{a}}}(\tilde{\mathbf{b}}) = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}} = \left[\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}\right], \text{ za sve } \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \in so(3). \tag{6.21}$$

Rješenje Lie-Poissonove jednadžbe (6.19) može se izraziti u svakom koraku integracije kao operacija $SO(3)$ na $\mathcal{R}^3$ u obliku

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Q}^T(t)\,\mathbf{Y}^n, \; n=1,2,\ldots, \\ \mathbf{Q} \in SO(3), \; t \in \left[t_n, t_{n+1}\right], \end{gathered} \tag{6.22}$$

što vodi rješavanju ODJ na Lievoj grupi

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}\left(\mathbf{Y}(t)\right),\ t \geq t_n,$$
$$\mathbf{Q}(t_n) = \boldsymbol{I}\ . \tag{6.23}$$

Još formalnije, napredovanje koraka integracije za izraz (6.22) može se pisati pomoću adjungirane operacije $SO(3)$ na $\mathcal{R}^3$ [68], označene kao 'Ad^*', u obliku [17, 86]

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathrm{Ad}^*_{\mathbf{Q}(t)}\mathbf{Y}^n, \tag{6.24}$$

za izraz (6.24) vrijedi jednakost $\mathrm{Ad}^*_{\mathbf{Q}}\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Y}$, a ko-adjungirana orbita (putanja dobivena iz promjenjivog kinetičkog momenta izraženog u lokalnom koordinatnom sustavu za slučaj odsutnosti vanjskih sila) je dana izrazom

$$O = \left\{ \mathrm{Ad}^*_{\mathbf{Q}}\mathbf{Y} \mid \mathbf{Q} \in SO(3) \right\} \subset \mathcal{R}^3. \tag{6.25}$$

Motivacija za projektiranje napredovanja koraka integracije za $\mathbf{Y}^n \in \mathcal{R}^3$ u obliku (6.22) ili (6.24), bilo je osigurano očuvanje kinetičkog momenta tokom integracije. S obzirom na početno stanje $\mathbf{Y}^n$, ko-adjungirana orbita $O_{\mathbf{Y}^n}$ predstavlja sferu radijusa $\left\|\mathbf{Y}^n\right\|$ što osigurava očuvanje $\mathbf{Y}^n$ do na 'strojnu točnost' (uzimajući u obzir numeričku točnost programskog okruženja), neovisno o redu točnosti primijenjene integracijske metode kod određivanje $\mathbf{Q}$ (6.23).

Sve ko-adjungirane orbite su očuvane neovisno o točnosti postupka određivanja matrice rotacije $\mathbf{Q}$ koja se mora odrediti kako bi se korak integracije mogao završiti, tj. ODJ (6.23) se mora riješiti. Bitno je naglasiti da jednadžba (6.23) ima jednaku matematičku strukturu kao jednadžba kinematičke rekonstrukcije orijentacije krutog tijela (6.12). Identično postupku rješavanja jednadžbe (6.12) korišten je Muthe-Kaas pristup [10, 21, 23], te rješenje jednadžbe (6.23) ima oblik

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\tilde{\mathbf{u}}(t)),\ t \geq t_n, \tag{6.26}$$

gdje je 'exp' zatvorena forma eksponencijalne mape na $SO(3)$, a $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^3$ je trenutni lokalni rotacijski vektor koji predstavlja rješenje ODJ u vektorskom prostoru Lieve algebre u obliku

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathrm{dexp}^{-1}_{-\tilde{\mathbf{u}}}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{Q}(t)))\,,\ \tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}\,, \tag{6.27}$$

s operatorom $\mathrm{dexp}^{-1}_{-\tilde{\mathbf{u}}}$ definiranim u dodatku A. Korištenjem aproksimacije prvog reda $h\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{n+\frac{1}{2}}$ lokalnog rotacijskog vektor $\tilde{\mathbf{u}}$ u izrazu (6.26) i predstavljanjem aproksimacije od $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}$ (vidi izraz (6.17)), *n*-ti korak integracije izraza (6.24) može se pisati u obliku

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathrm{Ad}^{*}_{\exp(\tilde{\mathbf{u}}^n)}\mathbf{Y}^n = \mathrm{Ad}^{*}_{\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+0.5}))}\mathbf{Y}^n\,, \tag{6.28}$$

gdje je $\mathbf{u}^n$ *n*-ti korak rotacijskog vektora, ili u obliku

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{Y}^n\,. \tag{6.29}$$

Zamjenom treće jednadžbe izraza (6.18) jednadžbom (6.29) i dodavanjem izraza za uzbudni moment $\mathbf{T}$, oblikovane su dvije inačice preuređene Lie-Störmer sheme na Lievoj grupi [2, 36]

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\omega}^n - \frac{h}{2}(\mathbf{I}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^n\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^n) + \frac{h}{2}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{T}^n\,, \tag{6.30a}$$

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\,, \tag{6.30b}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\mathbf{Y}^n + h\mathbf{T}^n) \qquad \text{(inačica 1)}, \tag{6.30c}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\mathbf{Y}^n + h\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{T}^{n+1}) \quad \text{(inačica 2)}, \tag{6.30d}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+1}. \tag{6.30e}$$

Te dvije inačice razlikuju se po algoritmu uvođenja uzbudnog momenta $\mathbf{T}$ unutar intervala integracije. Uzbudni moment $\mathbf{T}$ u jednadžbi (6.30c) je uveden na početku intervala, a u jednadžbi (6.30d) na kraju intervala integracije. U jednadžbi (6.30d) faktor $\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})$ koji množi $\mathbf{T}^{n+1}$ omogućava napredovanje koraka integracije između početka i kraja intervala.

Uvedene modifikacije omogućile su da obje inačice sheme (6.30) čuvaju moment količine gibanja slobodno rotirajućeg tijela. To je vidljivo iz jednadžbi (6.30) iz kojih proizlazi veza

$$\mathbf{R}^{n+1}\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{R}^{n}\mathbf{Y}^{n}, \tag{6.31}$$

koja vrijedi samo za slučaj slobodnog tijela. Opisani algoritam omogućava algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela, neovisno o korištenom koraku integracije. Testiranje sheme (6.30) u kontekstu očuvanja ostalih integrala gibanja, a kako bi se odredila kvaliteta opisane sheme, pokazala je da i dalje postoji prostor za moguća poboljšanja [2, 36] (vidi dodano poglavlje B).

6.2.3 Eksplicitna shema koja čuva kinetički moment sustava

Ipak, slika B7.6 (vidi dodano poglavlje B) pokazuje suprotno ponašanje vrijednosti globalne projekcije kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela. Prema analogiji odstupanja, njezinom se ispravljanju pristupilo kroz prilagodbu treće jednadžbe izraza (6.30) nadopunjavanjem prilagođenih dijelova modela u obliku [2, 36]

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\omega}^{n} - \frac{h}{2}(\mathbf{I}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n}) + \frac{h}{2}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{T}^{n}, \tag{6.32a}$$

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n}\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.32b}$$

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n} + \frac{h}{2}\mathbf{T}^{n}) + \frac{h}{2}\exp(\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{T}^{n+1}), \tag{6.32c}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+1}. \tag{6.32d}$$

Osim navedenog oblika, izvedena je i konačna inačica algoritma (6.32) u kojoj je dio koji operira na Lievoj algebri zamijenjen modelom integracije na Lievoj grupi temeljenom na integraciji kinetičkog momenta [2, 36]

$$\mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}} = \exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n})(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n} + \frac{h}{2}\mathbf{T}^{n}), \tag{6.33a}$$

(6.33b)

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{6.33c}$$

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n}\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.33d}$$

(6.33e)

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n} + \frac{h}{2}\mathbf{T}^{n}) + \frac{h}{2}\exp(\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{T}^{n+1}),$$

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+1}.$$

Jednadžbe (6.33a) i (6.33b) mogu se objediniti u jedan izraz (to vrijedi i za jednadžbe (6.33d) i (6.33e)) ali su napisane odvojeno zbog boljeg razumijevanja.

Iz rezultata predstavljenih u dodanom poglavlju B i [2, 36], vidljivo je da konačan oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi postiže bolje rezultate integracije u usporedbi s Lie-Newmark i RK-MK4 integracijskom shemom u smislu očuvanja globalne projekcije kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela.

6.3 Implicitna shema koja čuva kinetički moment i kinetičku energiju sustava

Eksplicitna inačica algoritma (6.33), omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta ali ne i kinetička energije sustava. Za određivanje promjena kinetičke energije u svakom koraku integracije može se koristiti izraz

$$E_k^{\,n+1} - E_k^{\,n} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}^{n+1}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+1} - \frac{1}{2}\mathbf{Y}^{n}\mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n}, \tag{6.34}$$

iz kojeg je jasno vidljivo da algoritam (6.33) neće dovesti do identiteta s nulom na desnoj strani izraza (6.34) ako tijelo nema vanjsku uzbudu. Kako bi se omogućilo da algoritam osigurava očuvanje kinetičke energije slobodno rotirajućeg tijela, uvedena je sljedeća jednakost

$$E_k^{\,n+1} - E_k^{\,n} = (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^{n}) \cdot \boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{6.35}$$

u kojoj je kutna brzina $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{R}^3$ izražena u lokalnim koordinatama dana u obliku

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{-1}\left(\mathbf{Y}^{n+1} + \mathbf{Y}^{n}\right), \tag{6.36}$$

a '$\cdot$' predstavlja skalarni produkt na $\mathcal{R}^3$.

Potrebno je naglasiti da se rješenje jednadžba (6.19) za *n*-ti korak integracije izraženo u obliku

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathrm{Ad}^{*}_{\exp(\tilde{\mathbf{u}}^{n})}\mathbf{Y}^{n}, \tag{6.37}$$

može izraziti u diskretiziranoj formi aproksimiranoj pomoću metode srednje točke (engl. *midpoint rule*)

$$\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^{n} = -\tilde{\mathbf{u}}^{n}\mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{Y}}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{u}^{n} = \mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{u}^{n}, \tag{6.38}$$

gdje je $\mathbf{u}^{n} \in \mathcal{R}^{3}$ rotacijski vektor *n*-tog koraka integracije, $\mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}}$ je dan u obliku

$$\mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{Y}^{n+1} + \mathbf{Y}^{n}\right),$$

a '$\times$' predstavlja vektorski produkt na $\mathcal{R}^{3}$. Objedinjavanjem jednadžbe (6.35) i (6.38) izveden je izraz

$$E_{k}^{\,n+1} - E_{k}^{\,n} = \tilde{\mathbf{Y}}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{u}^{n} \cdot \boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{Y}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{u}^{n} \cdot \boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{6.39}$$

Iz jednadžbe (6.39) jasno je da će algoritam čuvati kinetičku energiju samo ako su rotacijski vektor $\mathbf{u}^{n}$ (6.37) i kutna brzina $\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}}$ (6.36) međusobno paralelni.

Zbog svega gore navedenog, usvojen je izraz $\mathbf{u}^{n} = h\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}}$ u skladu s kojim su jednadžbe (6.33a) i (6.33b) zamijenjene izrazom (6.36), te je predstavljena integracijska shema u obliku [2]

$$\boldsymbol{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{-1}\left(\mathbf{Y}^{n+1} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n}\right), \tag{6.40a}$$

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{n}\exp(h\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.40b}$$

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\exp(-\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{n} + \frac{h}{2}\mathbf{T}^{n}) + \frac{h}{2}\exp(\frac{h}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{n+\frac{1}{2}})\mathbf{T}^{n+1}), \tag{6.40c}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{n+1} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{Y}^{n+1}. \tag{6.40d}$$

Sve dok se za računanje kinetičkog momenta u (6.40) koristi forma koja čuva ko-adjungiranu orbitu (6.40c), a koja omogućava očuvanje kinetičkog momenta (izraz (6.40c) identičan

izrazu (6.33d)), shema (6.40) dokazano čuva kinetički moment i kinetičku energiju slobodno rotirajućeg tijela.

Bitno je naglasiti da algoritam (6.40) nije više eksplicitan, budući da zahtijeva rješavanje spregnutog sustava jednadžbi (6.40a) i (6.40c).

6.4 Primjena geometrijskih algoritama koji omogućavaju algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije na integraciju dinamičkog modela svemirskog satelita

Rezultati ove faze istraživanja obuhvaćaju rezultate sinteze dinamičkog modela svemirskog satelita, projektiranog na mnogostrukosti korištenjem integracijskih algoritama koji čuvaju globalne značajke i diferencijalno-geometrijsku strukturu gibanja. Pri numeričkoj integraciji dinamike svemirskih letjelica, zbog složenih uvjeta gibanja (kinematički lanci konstrukcijskog sustava satelita, specifične dinamičke veze s okolinom, održavanje stabilnog položaja, orbitalni manevri izvedeni s najmanjim utroškom goriva, itd.), potrebni su stabilni integracijski algoritmi koji, osim velikih prostornih rotacija, u obzir uzimaju očuvanje integrala gibanja u obliku održanja mehaničke energije i kinetičkog momenta sustava.

Što se suvremenih aplikacija tiče, numeričke simulacije dinamike svemirskih letjelica postale su iznimno važne u projektiranju i optimizaciji satelita, zbog poteškoća kod testiranja i provjere parametara sustava satelita na zemlji prije lansiranja letjelice. U tom je smislu razvijen veći broj simulacijskih procedura u okviru softverskih paketa od kojih mnogi koriste neoptimirane numeričke integratore, pa dugotrajne simulacije s proširenom vremenskom domenom rezultiraju neadekvatnom točnošću [87-102] (npr. simulacijski softveri za satelite s reakcijskim rotorom koji se koriste za analizu kvarova postrojenja [35]). Osim testiranja sustava, numeričke simulacije se koriste i za određivanje parametara za lansiranje satelita u predviđenu orbitu za što je točnost dobivenih rezultata od osobite važnosti [103]. Kako tražene značajke s tom svrhom posjeduje novopredloženi implicitni numerički integrator na Lievoj grupi koji čuva prve integrale gibanja [2], navedena implicitna metoda je u fokusu predmetnog istraživanja, ali primijenjena je i ocijenjena i eksplicitna inačica istog algoritma, koja je numerički efikasnija ali omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta sustava u slučaju slobodno rotirajućeg tijela [36].

6.4.1 Numerički primjer: svemirski satelit

Kao numerički primjer upotrebe odabranih integracijskih procedura, analizirano je gibanje satelita, modeliranog kao slobodno rotirajuće kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja s početnom kutnom brzinom $\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0.7459 & 0.1814 & 0.4764 \end{bmatrix}^T$, tenzorom inercije $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(2.223,\ 4.408,\ 7.334)$ i nepromjenjivim korakom integracije *h*=1e-2. U tablici 6.1 dan je pregled osnovnih podataka potrebnih za sintezu dinamičkog modela svemirskog satelita, preuzetih iz [104-106].

Tabela 6.1: Osnovni podaci za svemirski satelit.

Masa satelita	$m = 10\,\mathrm{kg}$
Dimenzije satelita	$l_1 = 0.9167\,\mathrm{m},\ l_2 = 1.25\,\mathrm{m},\ l_3 = 1.5833\,\mathrm{m}$
Moment tromosti oko osi x	$I_x = 2.223\,\mathrm{kgm}^2$
Moment tromosti oko osi y	$I_y = 4.408\,\mathrm{kgm}^2$
Moment tromosti oko osi z	$I_z = 7.334\,\mathrm{kgm}^2$

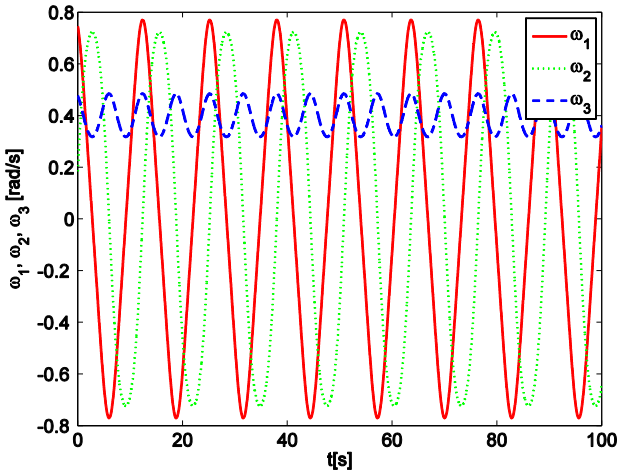
Rezultati integracije dinamike svemirskog satelita dobiveni pomoću eksplicitnog (6.33) i implicitnog (6.40) oblika izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi, uspoređeni su s najuspješnijim integracijskim shemama koje čuvaju integrale gibanja, predloženih od strane Sima i Wonga (SW)[20, 107], Austina (AKW) [108] te Krysla i Endresa (Lie-Newmark) [19].

S obzirom na rezultate dobivene u [36], očekuje se da će implicitni numerički integrator dati bolje rezultate od testiranih shema u pogledu očuvanja kinetičkog momenta i kinetičke energije sustava, dok eksplicitni integrator koji je numerički efikasniji, neće zadovoljiti uvjet očuvanja kinetičke energije sustava.

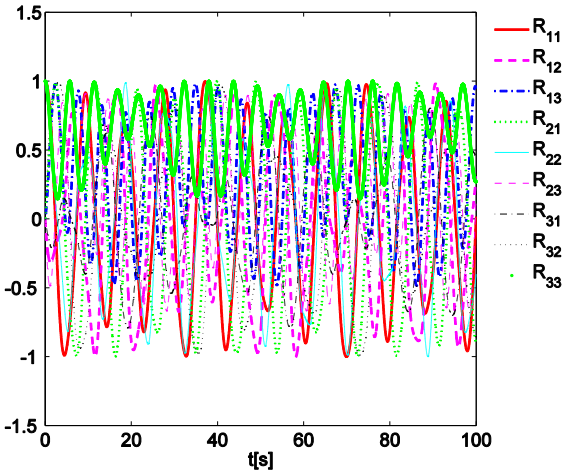
6.4.2 Rezultati simulacije

Kao što je već spomenuto, pri numeričkoj integraciji dinamike svemirskih letjelica, zbog složenih uvjeta gibanja, potrebni su stabilni integracijski algoritmi koji, osim velikih prostornih rotacija, u obzir uzimaju očuvanje integrala gibanja u obliku održanja mehaničke energije i kinetičkog momenta sustava. Zbog toga je kod prikaza rezultata stavljen naglasak na ocjenu očuvanja kinetičkog momenta i kinetičke energije sustava. Simulacija je provedena na vremenskoj domeni od 100 sekundi.

Kutna brzina satelita izražena u koordinatnom sustavu letjelice prezentirana je na slici 6.2. Na slici 6.3 pokazani su elementi matrice rotacije $\mathbf{R}(t)$.

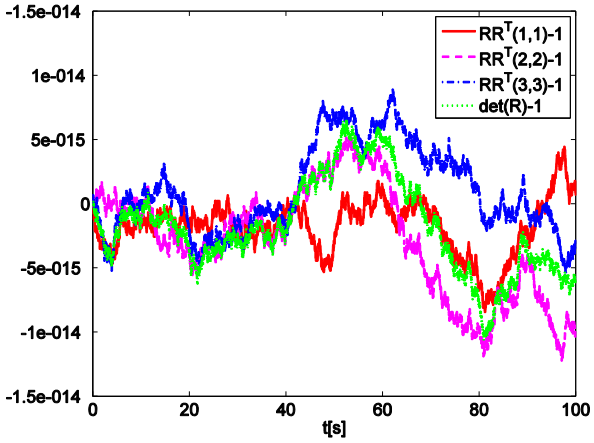


Slika 6.2: Kutna brzina letjelice.

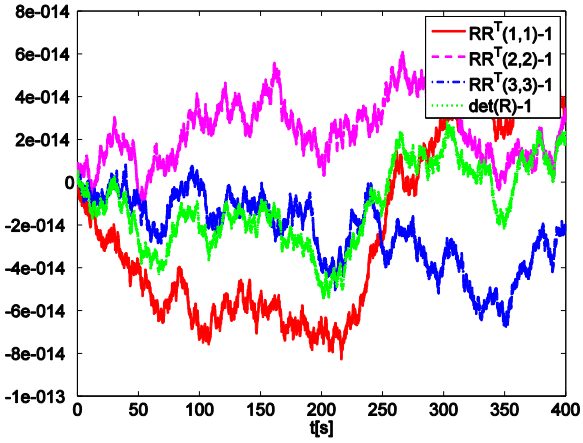


Slika 6.3: Elementi matrice rotacije $\mathbf{R}$.

Kao što je i očekivano, eksplicitni (6.33) i implicitni (6.40) oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma čuvaju svojstvo ortogonalnosti matrice rotacije $\mathbf{R} \in SO(3)$. Osim što čuvaju ortogonalnost, odabrane sheme čuvaju i drugo bitno svojstvo matrice rotacije, a to je svojstvo jedinične determinante $\det\mathbf{R} = +1$. Na slici 6.4 prikazani su rezultati dobiveni oduzimanjem dijagonalnih elemenata matrice $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ i elemenata jedinične matrice $\boldsymbol{I}$, kao i greška u jediničnoj determinanti $\det\mathbf{R} = +1$ uspoređena s analitičkim rješenjem.



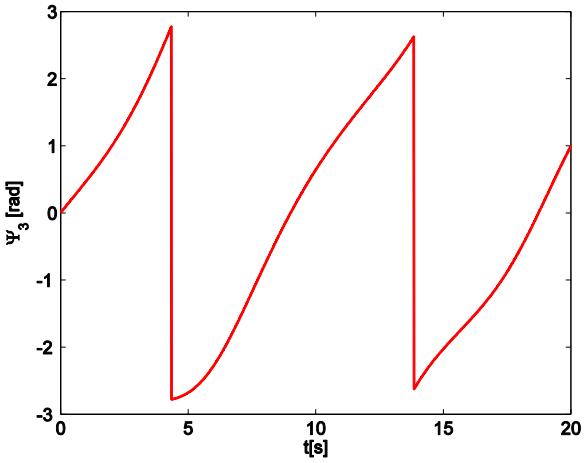
Slika 6.4: Svojstva matrice rotacije.



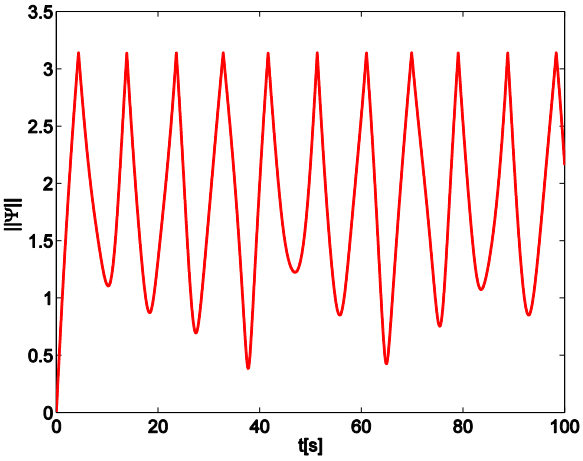
Slika 6.5: Svojstva matrice rotacije (vremenska domena 400 sekundi).

Kako bi se dokazalo da ne dolazi do napredovanja greške u elementima matričnog produkta $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \boldsymbol{I}$ i determinante $\det\mathbf{R} = +1$ provedena je i simulacija na proširenoj vremenskoj domeni od 400 sekundi (vidi sliku 6.5).

Primijenjene integracijske procedure koriste izravnu rekonstrukciju stanja rotacije na $\mathbf{R} \in SO(3)$, te time u potpunosti zaobilaze pojavu singulariteta. Na slikama 6.2-6.4 prikazani su rezultati dobiveni integracijom pomoću implicitnog (6.40) oblika izvedenog Störmer-Verlet algoritma (gore prikazani rezultati potpuno su identični i za eksplicitnu inačicu korištenog algoritma) gdje je vidljivo da su sve integralne krivulje glatke funkcije bez diskontinuiteta. U suprotnosti tome su rezultati ODJ integracije na temelju klasičnog modela lokalnih koordinata parametrizacije velikih rotacija (Cartesijev rotacijski vektor [109, 110] i Tait-Bryantovi kutovi), prikazani na slikama 6.6, 6.7 i 6.8 na kojima je vidljiva pojava diskontinuiteta zbog pojave nužnih singulariteta.

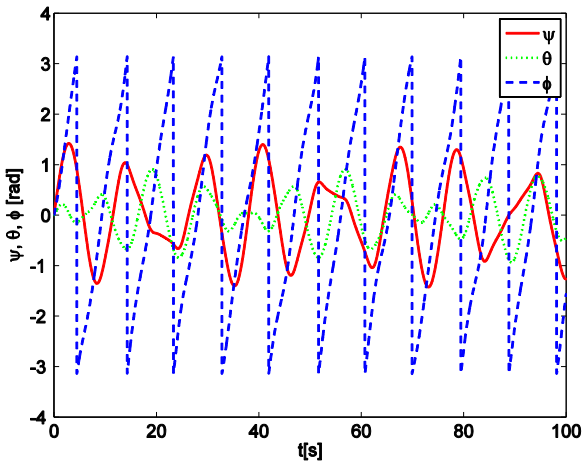


Slika 6.6: Komponenta Ψ_3 Cartesijevog rotacijskog vektora $\boldsymbol{\Psi}$, definiranog kao $\|\boldsymbol{\Psi}\| \leq \pi$.



Slika 6.7: Norma Cartesijevog rotacijskog vektora $\boldsymbol{\Psi}$.

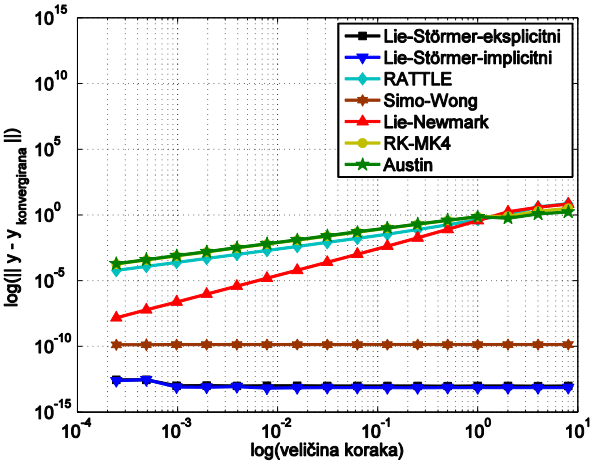
Cartesijev rotacijski vektor u svakom trenutku pokazuje smjer trenutne osi rotacije, a njegova duljina je jednaka amplitudi kuta rotacije. Budući da se parametrizacija Cartesijevim vektorom temelji na eksponencijalnom preslikavanju na $SO(3)$ grupi, jasno je da se singulariteti javljaju kod rotacije čiji je iznos veći od $2k\pi$ (gdje je k cijeli broj) (vidi sliku 6.6 i 6.7). Na slici 6.8 prikazani su Tait-Bryantovi kutovi (nesimetrični 321 slijed Eulerovih kutova) za isto gibanje, gdje se također javljaju singulariteti u obliku diskontinuiteta kuta ϕ koji izlazi iz domene definicije.



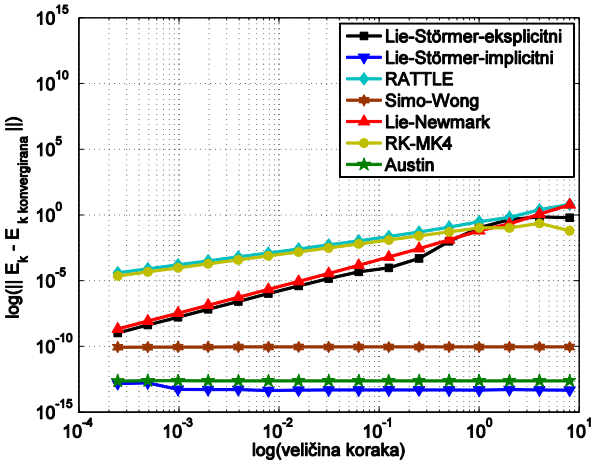
Slika 6.8: Tait-Bryantovi kutovi

(nesimetrični 321 slijed Eulerovih kutova).

Dolazimo do ocjene konvergencija norme greške globalnog kinetičkog momenta i kinetičke energije eksplicitnog (6.33) i implicitnog (6.40) oblika izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi. Dobiveni rezultati su uspoređeni s integracijskim shemama koje čuvaju integrale gibanja, predloženih od strane Sima i Wonga (SW) [107], Austina (AKW) [108] te Krysla i Endresa (Lie-Newmark) [19]. Na slici 6.9 prikazan je konvergencija norme $\left\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_{konvergirana}\right\|_2$ za satelit, gdje je kinetički moment $\mathbf{y}_{\text{konvergirana}}=\mathbf{y}(t=1)$ dobiven pomoću malog koraka integracije *h*=1e-5. Norma greške je ocijenjena za sljedeće vrijednosti koraka integracije 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024, 1/2048 i 1/4096.



Slika 6.9: Konvergencija norme greške globalnog kinetičkog momenta.



Slika 6.10: Konvergencija norme greške kinetičke energije.

Na isti način ocijenjena je i norma greške kinetičke energije prikazane na slici 6.10 iz koje je vidljivo da implicitni matematički model (6.40), osim kinetičkog momenta, dokazano čuva i kinetičku energiju satelita.

Usporedbom postignutih rezultata, vidljivo je da eksplicitni (6.33) i implicitni (6.40) oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi postiže bolje rezultate integracije u smislu očuvanja kinetičke energije od najuspješnijih usporedbenih integracijskih shema opisanih u literaturi [19, 107, 108]. Na slici 6.8 i 6.9 vidljivo je da implicitni numerički integrator jasno nadmašuje sve testirane sheme u pogledu očuvanja kinetičkog momenta i kinetičke energije sustava.

7

ZAKLJUČAK

U ovom doktorskom radu razmatrano je matematičko i numeričko modeliranje nelinearnih dinamičkih procesa gibanja konstrukcijskih sustava s posebnom primjenom na dinamičku simulaciju gibanja zračnih i svemirskih letjelica.

Opće-prihvaćene metode numeričke integracije koje operiraju na vektorskim (linearnim) prostorima (i koje su, u pravilu, gotovo isključivo u upotrebi u suvremenom znanstvenom i inženjerskom računanju) ne mogu u potpunosti uspješno dati rješenja složenijih simulacijskih zadaća. To naročito vrijedi u slučajevima kada su u konfiguracijskom prostoru konstrukcijskog sustava prisutna kinematička i upravljačka ograničenja koja 'zakrivljuju' prostor mogućeg dinamičkog odziva sustava, ograničavajući ga na nelinearnu 'mnogostrukost'. Zbog navedenih poteškoća tijekom upotrebe standardnih metoda numeričke integracije linearnih prostora počinju se koristiti metode koje ne operiraju na vektorskim prostorima, već na diferencijabilnim mnogostrukostima. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski 'zakrivljeni' prostor mnogostrukosti MBS sustava, imanentno zadovoljavajući određena kinematička ograničenja. Modeliranjem konfiguracijskog prostora sustava korištenjem mnogostrukosti $SO(3)$ grupa za kinematički opis 3D rotacija, izbjegava se upotreba lokalnih koordinata (npr. Eulerovih, Bryantovih kutova i sl.) za parametrizaciju mnogostrukosti velikih rotacija, te uvodi mogućnost integracije rotacija izravno na $SO(3)$ objektima, korištenjem globalne parametrizacije velikih rotacija bez singulariteta.

Usvajajući takvu polaznu točku, istraživanja grupe prof. dr. sc. Zdravka Terzea rezultirala su u posljednje vrijeme predstavljanjem više novih algoritama za integraciju dinamike diskretnih mehaničkih sustava na mnogostrukostima i Lievim grupama s dokazano dobrim integracijskim karakteristikama, od kojih su oni korišteni u predmetnom istraživanju odabrani prema kinematičkim i dinamičkim značajkama karakterističnih letjelica.

Kao primjeren geometrijski integracijski algoritam za numeričko izračunavanje dinamike karakteristične zračne letjelice s rotirajućim krilom odabrana je nova integracijska metoda projektirana proširenjem i redizajniranjem Munthe-Kaas algoritma za rješavanje ODJ na Lievoj grupi. Primijenjena geometrijska integracijska metoda ne operira na vektorskom prostoru lokalnih rotacijskih koordinata pojedinih elemenata, već izravno na Lievoj grupi prostora stanja diskretnog mehaničkog sustava. Integracijom dinamičkog modela helikoptera izravno na prostoru stanja nelinearne mnogostrukosti, dokazano se izbjegavaju kinematički singulariteti koji se nužno pojavljuju pri svakoj parametarizaciji velikih rotacija troosnim lokalnim koordinatama (kao što su npr. Eulerovi kutovi). Primijenjena formulacija ne uvodi dodatno (umjetno) kinematičko ograničenje, karakteristično za redundantnu parameterizaciju rotacije upotrebom kvaterniona (četiri Eulerova parametra kojima su parametarizirana 'samo' tri rotacijska stupnja slobode gibanja). Standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona nužno iziskuju integraciju četiri diferencijalno-algebarske jednadžbe uz stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona. U suprotnosti tome, primijenjena formulacija se temelji na integraciji skupa triju ODJ u minimalnoj formi, što predstavlja prirodnu formu problema s tri rotacijska stupnja slobode gibanja. Ukratko, odabrana metoda u potpunosti zaobilazi kinematičke singularitete koji su neizbježni kod parametrizacije Eulerovim kutovima bez uvođenja dodatnog kinematičkog ograničenja u matematički model, kao što je to slučaj kod upotrebe kvaterniona. Može se reći da primijenjena metode istodobno spaja prednosti tradicionalnih pristupa i zaobilazi njihove nedostatke.

Nadalje, metoda integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona kojom se rješava spomenuti standardni problem redundantnog matematičkog modela trodimenzijske kinematike krutog tijela, prilagođena je i primijenjena na integraciju standardnog modela leta zračne letjelice s nepomičnim krilom. Primijenjenom metodom integracije rotacijskog tenzora pomoću jediničnih kvaterniona rješava se standardni problem redundantnog matematičkog modela pri upotrebi kvaterniona, a koji nužno iziskuje integraciju DAE jednadžbi (kao i numeričku stabilizaciju dodatnog kinematičkog ograničenja). Opisana metoda koristi jednadžbe lokalnog rotacijskog vektora u minimalnoj formi, definirane na Lievoj algebri rotacijske grupe $SO(3)$. Nakon što se izračuna lokalni rotacijski vektor za trenutni korak integracije, kurentna orijentacija se izravno rekonstruira na $Sp(1)$ grupi kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape. Na taj se način tijekom integracije prirodno slijedi konfiguracijski prostor rotacijske mnogostrukosti i izbjegavaju kinematički singulariteti lokalne parametarizacije, iako se integracijska procedura temelji na rješavanju triju ODJ. Za integraciju ODJ dinamičkih jednadžbi malog putničkog aviona kao i za izračun lokalnog

rotacijskog vektora u svakom koraku integracije, korištena je RK4 metoda. Na rezultatima dobivenim integracijom pomoću novopredložene procedure vidljivo je da su sve integralne krivulje glatke funkcije bez diskontinuiteta. U suprotnosti tome su rezultati ODJ integracije na temelju klasičnog modela lokalnih koordinata parametrizacije velikih rotacija (Eulerovi kutovi), na kojima je vidljiva pojava diskontinuiteta zbog pojave nužnih singulariteta. Provedena su i dodatna testiranja u smislu utvrđivanja dodatnih dobrobiti metode integracije rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona u usporedbi sa standardnom metodom integracije rotacijskih kvaterniona. U svrhu dokazivanja da je predložena metoda numerički efikasnija od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona, izvršeno je mjerenje i usporedba procesorskog vremena za obje metode, koje je pokazalo bolju numeričku efikasnost predložene metode. Osim toga, testirani su primjeri integracije s predloženim algoritmom ali s dužim koracima integracije i duljim vremenskim domenama te uspoređeni rezultati dobiveni predloženom metodom i standardnom metodom integracije kvaterniona. Standardna metoda integracije kvaterniona koja koristi stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona, za veliki korak integracije i dugu vremensku domenu uzrokuje odstupanje od referentnih vrijednosti svih integracijskih krivulja.

Iz dobivenih rezultata može se zaključiti da je predložena metoda numerički efikasnija i točnija od standardne metode integracije rotacijskih kvaterniona, te omogućava proizvoljno određivanje reda točnosti integracije koji ovisi isključivo o točnosti primijenjenog ODJ algoritma. Uzrok tome je što standardna metoda integracije rotacijskih kvaterniona nužno iziskuje integraciju četiri diferencijalno-algebarskih jednadžbe i stabilizaciju algebarskog ograničenja modula jediničnog kvaterniona.

Također, uz navedene primjere simulacijskih modela zračnih letjelica, u ovoj disertaciji sintetiziran je i dinamički model svemirskog satelita, pri čemu su za integraciju gibanja izvedenog matematičkog modela korišteni izvorni geometrijski algoritmi koji omogućavaju algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije u slučajevima kada nema vanjske uzbude sustava.

Primijenjene metode predstavljaju nove konzervativne geometrijske metode drugog reda točnosti za integraciju dinamike rotacijskog gibanja krutog tijela na Lievoj grupi.

Prvi primijenjeni algoritam predstavlja potpuno eksplicitnu shemu koja omogućava algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg krutog tijela. Metoda je inspirirana izvornim Störmer-Verlet algoritmom linearnog prostora drugog reda točnosti koji ima više pogodnih značajki stabilne numeričke integracije. Međutim, kako bi se osiguralo

očuvanje kinetičkog momenta tijekom koraka integracije, dio koji operira na Lievoj algebri i koji je algoritamski preslikavao napredovanje brzine kroz korake integracije izvornog Störmer-Verlet algoritma, zamijenjen je modelom integracije na Lievoj grupi temeljenom na integraciji kinetičkog momenta koja čuva ko-adjungirane orbite sustava.

Drugi primijenjeni algoritam konstruiran je kao implicitni matematički model s izravnom rekonstrukcijom stanja rotacije (odziv stava letjelice) na nelinearnoj $SO(3)$ rotacijskoj grupi. Metoda je algoritamski konstruirana tako da egzaktno čuva dva najvažnija integrala gibanja, a to su kinetički moment i kinetička energija rotirajućeg krutog tijela bez vanjske uzbude. U radu je pokazano da obje metode imaju bolje računalne performanse u smislu očuvanja integrala gibanja svemirskog satelita od nekih od najuspješnijih usporedbenih integracijskih shema opisanih u literaturi. Implicitni numerički integrator jasno je nadmašio sve testirane sheme koje čuvaju integrale gibanja, dok eksplicitni integrator koji je numerički efikasniji, nije zadovoljio uvjet očuvanja kinetičke energije sustava, što se i očekivalo s obzirom na njegovu algebarsku strukturu.

U zaključku valja naglasiti da iako su predložene sheme fokusirane na dinamiku rotacije krutog tijela (najizazovniji dio u kontekstu numeričke integracije gibanja krutog tijela), one se lako mogu primijeniti na rješavanje dinamike općenitog konstrukcijskog sustava više tijela (MBS sustava). Budući da je većina formalizama za rješavanje MBS sustava izražena u potpuno proširenoj formi (tj. koristi se maksimalni broj koordinata za opisivanje konfiguracije sustava) koja se temelji na raspregnutoj dinamici krutih tijela, predložene sheme mogu se izravno primijeniti na MBS zadaće. Kod primjene predloženih shema na MBS sustave koristio bi se transformirani DAE sustav indeksa jedan za koji je nužno uvođenje stabilizacijskog algoritma dinamičkog odziva, koji ima zadaću projiciranja numeričkog rješenja natrag na mnogostrukost ograničenja.

U budućem istraživanju, na temelju modela implicitnog i eksplicitnog integracijskog algoritma koji omogućava algoritamsko očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije, plan je projektirati dinamički model satelita na mnogostrukosti sustava više tijela s kinematičkim ograničenjima na temelju pretpostavke da za očuvanje kinetičkog momenta i kinetičke energije rad sila u ograničenjima mora biti jednak nuli.

Kako je planom istraživanja predviđeno, izvedeni matematički modeli i numerički algoritmi primijenjeni su na zadaće simulacije gibanja više inženjerskih sustava s izraženom rotacijskom komponentom gibanja (u rasponu od zračne letjelice s rotirajućim i nepomičnim krilom do svemirske letjelice/satelita) i u svim analiziranim slučajevima pokazane su bolje

računalne performanse novih numeričkih algoritama razvijenih na diferencijalno-geometrijskim principima modeliranja u odnosu na standardne vektorske integratore.

Dodatak A

DIFERENCIJAL EKSPONENCIJALNE MAPE

Na primjeru rotacijskog gibanja jednog tijela, možemo izraziti diferencijal eksponencijalnog preslikavanja $\mathrm{dexpm}: so(3)\times so(3)\to so(3)$ preko lijeve trivijalizacije eksponencijalne mape 'expm' u obliku matrice na način koji zadovoljava izraz oblika

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\mathrm{m}(\overline{w}(t)) = \exp\mathrm{m}(\overline{w}(t))\,\mathrm{dexpm}_{-\overline{w}(t)}(\dot{\overline{w}}(t)), \tag{A1}$$

u kojem je funkcija $\mathrm{dexpm}_{-\overline{w}}$ definirana preko

$$\mathrm{dexpm}_{-\overline{w}}(w) = w - \frac{1}{2!}[\overline{w},w] + \frac{1}{3!}[\overline{w},[\overline{w},w]] + \frac{1}{4!}[\overline{w},[\overline{w},[\overline{w},w]]] + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}(\text{-}\mathrm{ad}_{\overline{w}}^{j}(w)), \tag{A2}$$

a adijungirani operator $\mathrm{ad}_{\overline{w}}$ je definiran kao Lieva zagrada

$$\mathrm{ad}_{\overline{w}}(w) = \overline{w}w - w\overline{w} = [\overline{w},w], \text{ za sve } w(t),\ \overline{w}(t)\in so(3). \tag{A3}$$

Nadalje, inverz funkcije $\mathrm{dexpm}_{-\overline{w}}^{-1}$ definiran je u obliku

$$\mathrm{dexpm}_{-\overline{w}}^{-1}(w) = w + \frac{1}{2}[\overline{w},w] + \frac{1}{12}[\overline{w},[\overline{w},w]] + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j}{j!}(\text{-}\mathrm{ad}_{\overline{w}}^{j}(w)), \tag{A4}$$

gdje B_j predstavlja Bernulijev broj. Prije no što nastavimo s opisivanjem procesa diferenciranja eksponencijalne mape, bitno je naglasiti da su jednadžbe (A2) i (A4) izvedene pomoću pretpostavljenog lijevo trivijaliziranog izraza (A1). To je u skladu s našom

formulacijom Lieve algebre $\mathcal{J}$ za čiju definiciju se koristi lijevo-invarijantno vektorsko polje $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in so(3)$. Međutim, u literaturi diferencijal eksponencijalnog preslikavanja obično je definiran pomoću desne trivijalizacije u obliku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\mathrm{m}(\overline{w}(t)) = \mathrm{dexpm}_{\overline{w}(t)}(\dot{\overline{w}}(t))\exp\mathrm{m}(\overline{w}(t)), \tag{A5}$$

koja nas vodi do izraza $\mathrm{dexpm}_{\overline{w}}$ i $\mathrm{dexpm}^{-1}_{\overline{w}}$ s Lievom zagradom koja se razlikuje po predznacima u odnosu na (A2) i (A4). Ako se koristi desna trivijalizacija, forma izraza $\mathrm{dexpm}_{\overline{w}}$ i $\mathrm{dexpm}^{-1}_{\overline{w}}$ razlikuje se od (A2) i (A4) samo po predznaku drugog člana $\pm\frac{1}{2}[\overline{w}, w]$.

Nakon što smo izveli diferencijal eksponencijalne mape za rotacijsko gibanje krutog tijela, u definiciju je potrebno uključiti i translacijski dio gibanja. U skladu s tim, diferencijal eksponencijalnog preslikavanja za gibanje slobodnog tijela *i*, u konfiguracijskom prostoru $\mathcal{R}^3 \times SO(3)$, izražen je u obliku

$$\mathrm{dexp}_{-\bar{z}_i}(z_i) = \mathrm{dexp}_{(-\bar{\mathbf{v}}_i, -\bar{w}_i)}(\mathbf{v}_i, w_i) = (\mathbf{v}_i, \mathrm{dexpm}_{-\bar{w}_i}(w_i)), \tag{A6}$$

(gdje je funkcija $\mathrm{dexpm}_{-\bar{w}_i}$ predstavljena u (A2)), čiji je inverz dan u obliku

$$\mathrm{dexp}^{-1}_{-\bar{z}_i}(z_i) = \mathrm{dexp}^{-1}_{(-\bar{\mathbf{v}}_i, -\bar{w}_i)}(\mathbf{v}_i, w_i) = (\mathbf{v}_i, \mathrm{dexpm}^{-1}_{-\bar{w}_i}(w_i)). \tag{A7}$$

Pomoću gore navedenih izraza možemo definirati diferencijal eksponencijalnog preslikavanja za cijeli MBS sustav bez ograničenja, u obliku funkcije $\mathrm{dexp} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ izražene kao

$$\mathrm{dexp}_{-\bar{z}}(z) = (\mathrm{d}\exp_{-\bar{z}_1}(z_1), ..., \mathrm{dexp}_{-\bar{z}_k}(z_k), \dot{\mathbf{v}}_1, \dot{w}_1, ..., \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{w}_k), \tag{A8}$$

čiji inverz možemo izraziti u obliku

$$\mathrm{dexp}^{-1}_{-\bar{z}}(z) = (\mathrm{dexp}^{-1}_{-\bar{z}_1}(z_1), ..., \mathrm{dexp}^{-1}_{-\bar{z}_k}(z_k), \dot{\mathbf{v}}_1, \dot{w}_1, ..., \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{w}_k). \tag{A9}$$

Dodatak B

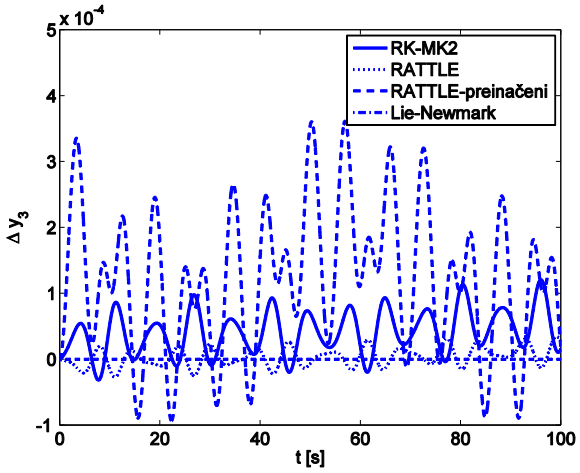
NUMERIČKI PRIMJERI KORIŠTENI KOD PROJEKTIRANJA EKSPLICITNE I IMPLICITNE SHEME KOJA ČUVA KINETIČKI MOMENT I KINETIČKU ENERGIJU SUSTAVA

Numerički primjer 1: Slobodno rotirajuće tijelo

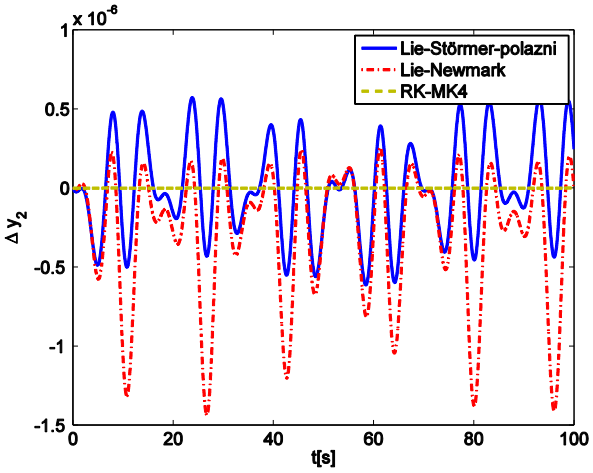
Integracijska shema oblikovana u (6.7), za razliku od izvornog RATTLE algoritma [81] koji ima implicitan karakter, potpuno je eksplicitna i osigurava bez-koordinatnu rekonstrukciju prostornih rotacija. Iako joj eksplicitan karakter omogućava poboljšanu primjenu u odnosu na izvornu RATTLE shemu, na numeričkom primjeru vidjet ćemo da druge integracijske značajke izvedenog algoritma u smislu očuvanja integrala gibanja nisu potpuno zadovoljavajuće.

Kao numerički primjer upotrebe algoritma, prezentirana je rotacija slobodnog tijela s početnom kutnom brzinom $\boldsymbol{\omega}_0 = [0.45549 \quad 0.82623 \quad 0.03476]^T$, tenzorom inercije $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(0.9144,\ 1.098,\ 1.66)$ i nepromjenjivim korakom integracije h=1e-2. Na slici B7.1 dana je usporedba komponente kinetičkog momenta dobivene integracijom pomoću preinačene RATTLE sheme s rezultatima izračunatim RK-MK2 algoritmom i jednim od algoritama drugog reda s istaknuto dobrim numeričkim performansa (algoritam na Lievoj grupi temeljen na 'klasičnoj' Newmark shemi linearnih prostora [19]). Iako je vidljivo da opisana RATTLE shema daje bolje rezultate od RK-MK2 algoritma u smislu očuvanja kinetičkog momenta, može se primijetiti da uvedeni algoritam uvodi značajnija odstupanja u

usporedbi s Lie-Newmark shemom te analitičkim rješenjem koje bi osiguravalo konstantnu vrijednost kinetičkog momenta. Također, modificirana RATTLE shema daje lošije rezultate po pitanju očuvanja kinetičkog momenta i od 'izvornog' RATTLE algoritma koji dokazano omogućava očuvanje navedene značajke.



Slika B7.1: Usporedba metoda. Globalna komponenta kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela - odstupanje od analitičkog rješenja komponente y_3 [111].



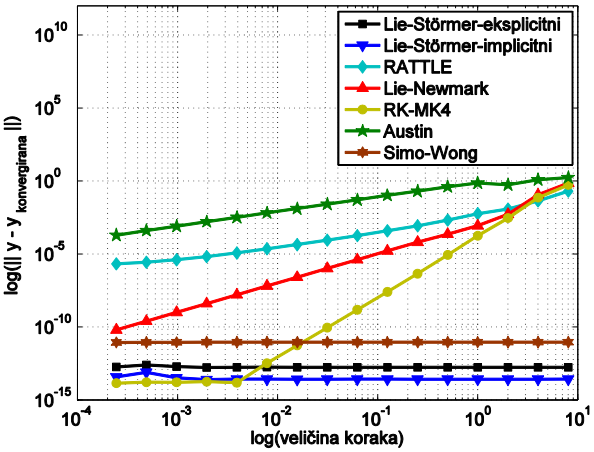
Slika B7.2: Usporedba metoda. Globalna komponenta kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela - odstupanje od analitičkog rješenja komponente y_2 [2].

Polazna Störmer-Verlet shema na Lievoj algebri i rotacijskoj grupi *SO*(3), koja vodi jednadžbama dinamike u ne-kanonskoj formi (6.18) omogućila je dobro očuvanje kinetičkog momenta slobodno rotirajućeg tijela. Kao što se vidi na slici B7.2, postignuti rezultati nešto su bolji od rezultata Lie-Newmark algoritma, usprkos činjenici da sustav ima eksplicitan numerički karakter (u usporedbi s implicitnim Lie-Newmark algoritmom). Ipak, rezultati očuvanja Casimirovih funkcija pri integriranju dinamike trodimenzijskog 'zvrka' (što je drugi numerički primjer opisan u nastavku), nisu bili potpuno zadovoljavajući.

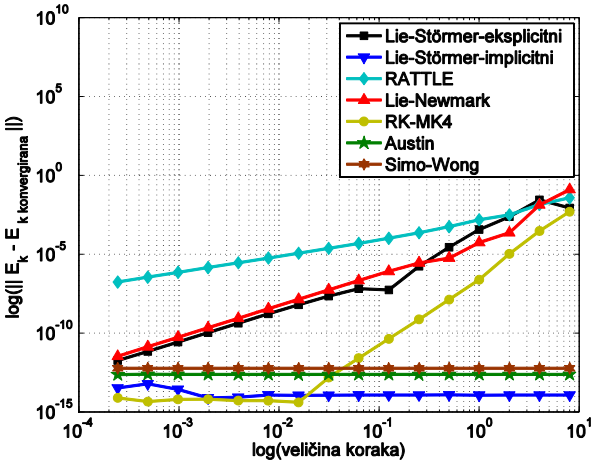
Nakon polazne Störmer-Verlet sheme, prema analogiji odstupanja u rezulatatima dobivenim u drugom primjeru, razvijeno je nekoliko inačica algoritma koje su prethodile konačnoj eksplicitnoj i implicitnoj inačici algoritma [2, 36]. Pokazalo se da konačno dobiveni eksplicitni (6.33) i implicitni (6.40) oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma (6.40) dobro čuvaju kinetički moment slobodno rotirajućeg tijela. Na slici B7.3 prikazana je konvergencija norme $\left\| \mathbf{y} - \mathbf{y}_{konvergirana} \right\|_2$ za slobodno rotirajuće tijelo, gdje je kinetički moment $\mathbf{y}_{konvergirana} = \mathbf{y}(t=1)$ dobiven pomoću malog koraka integracije *h*=1e-5. Norma greške je

ocijenjena za sljedeće vrijednosti koraka integracije 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024, 1/2048 i 1/4096.

Na isti način ocijenjena je i norma greške kinetičke energije prikazane na slici B7.4 iz koje je vidljivo da implicitni matematički model [2] osim kinetičkog momenta, dokazano čuva i kinetičku energiju rotirajućeg krutog tijela bez vanjske uzbude.



Slika B7.3: Ocjena konvergencije norme greške globalnog kinetičkog momenta [2].



Slika B7.4: Ocjena konvergencije norme greške kinetičke energije [2].

Usporedbom postignutih rezultata, vidljivo je da eksplicitni (6.33) i imlicitni (6.40) oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi postiže bolje rezultate integracije u smislu očuvanja kinetičke energije od najuspješnijih usporedbenih integracijskih shema opisanih u literaturi [19, 107, 108] (vidi sliku B6.5). Za usporedbu korišteni su algoritmi predloženi od Sima i Wonga (SW) [107], Austina (AKW) [108] te Krysla i Endresa (Lie-Newmark) [19]. Na slikama B7.3 i B7.4 vidljivo je da implicitni numerički integrator jasno nadmašuje sve testirane sheme u pogledu očuvanja kinetičkog momenta i kinetičke energije sustava.

Numerički primjer 2: Rotirajuće tijelo s jednom uporišnom točkom

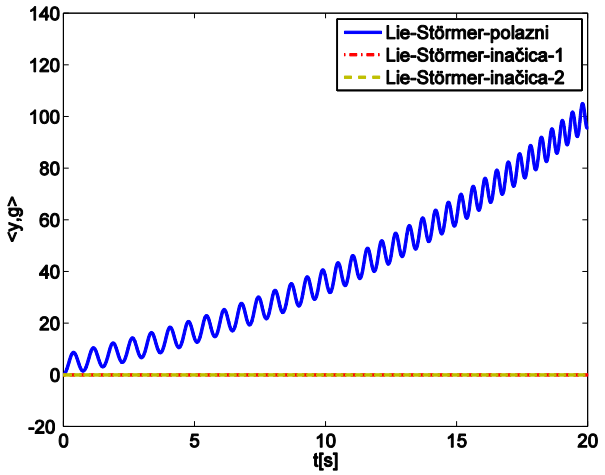
Kao numerički primjer upotrebe unaprijeđenih inačica (6.30), (6.32) i konačne inačice eksplicitnog Lie-Störmer algoritma (6.33) analizirano je gibanje rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom s početnom orijentacijom $\mathbf{R}_0 = \boldsymbol{I}$ i kutnom brzinom

$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 150 & 4.61538 \end{bmatrix}^T$ te položajem središta mase $\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, masom $m = 15$, tenzorom inercije $\mathbf{I}_{\text{FP}} = \text{diag}(15.234375, 0.46875, 15.234375)$ i gravitacijskim vektorom $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.81 \end{bmatrix}^T$.

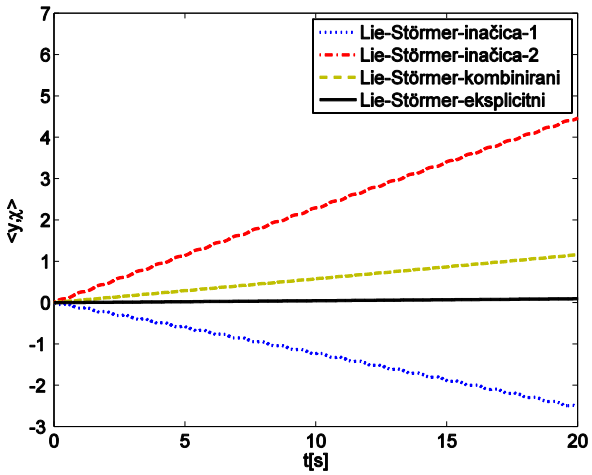
Dinamički model rotirajućeg tijela s jednom uporišnom točkom formuliran je u obliku ODJ

$$\mathbf{I}_{\text{FP}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}_{\text{FP}}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_{\text{FP}} = \mathbf{0}, \tag{B1}$$

gdje su $\boldsymbol{\omega}$ i $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ kutna brzina i akceleracija izražene u lokalnim koordinatama tijela, $\mathbf{I}_{\text{FP}}$ je tenzorom inercije u odnosu na uporišnu točku, $\mathbf{T}_{\text{FP}}$ moment gravitacijske sile koji se računa pomoću izraza $\mathbf{T}_{\text{FP}} = \tilde{\mathbf{r}}_b \mathbf{R}^T m\mathbf{g}$, m je masa tijela, $\mathbf{g}$ je gravitacija, a $\tilde{\mathbf{r}}_b$ je položaj središta mase izražen u lokalnim koordinatama vezanim za tijelo. Integracijski rezultati za nepromjenjivi korak integracije h=1e-3 prezentirani su slikama B7.5 i B7.6. Na slikama B7.5 i B7.6 prikazana je usporedba dva 'integrala gibanja' (globalna projekcija kinetičkog momenta na vektor gravitacije i na os rotirajućeg tijela) za polaznu shemu i dvije inačice preuređene sheme. Iz slike B7.5 vidljivo je da obje inačice prilagođene sheme (6.30) i (6.32) omogućavaju bolje integracijske rezultate u odnosu na polaznu shemu (6.18).



Slika B7.5: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na vektor gravitacije [2].

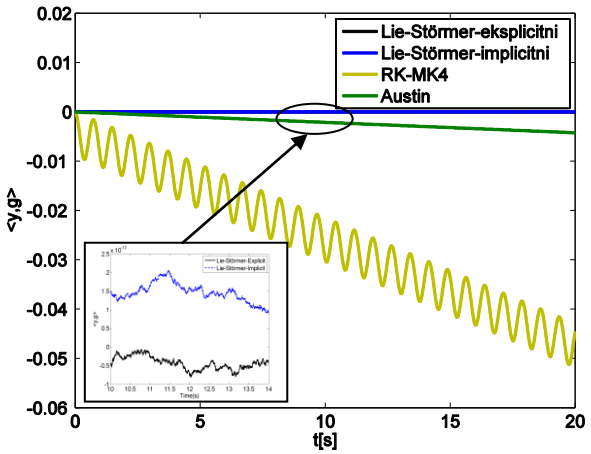


Slika B7.6: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela [2].

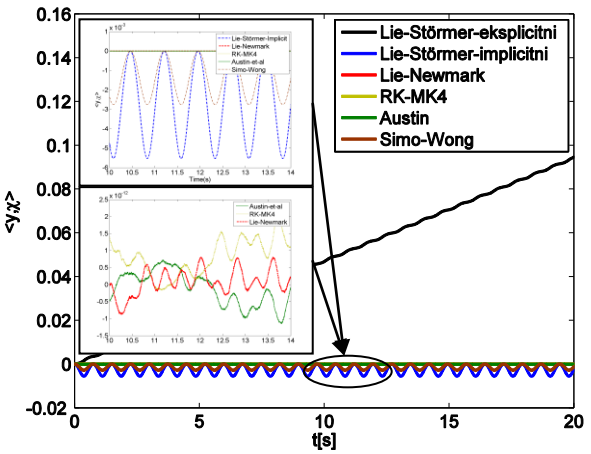
Ipak, slika B7.6 pokazuje njihovo suprotno ponašanje u smislu vrijednosti globalne projekcije kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela. Prema analogiji odstupanja, njezinom se

ispravljanju pristupilo kroz prilagodbu treće jednadžbe izraza (6.30). Usporedbom postignutih rezultata, vidljivo je da konačan oblik izvedenog Störmer-Verlet algoritma na Lievoj grupi (6.33) postiže bolje rezultate integracije u usporedbi s inačicama koje su mu prethodile, u smislu očuvanja globalne projekcije kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela, vidi sliku B7.6.

Eksplicitna inačica algoritma (6.33), omogućava algoritamsko očuvanje samo kinetičkog momenta ali ne kinetička energije sustava. Nedostatka eksplicitnog modela otklonjen je uvođenjem novog obrasca računanja kutne brzine na pola intervala koja mora biti paralelna s trenutnim lokalnim rotacijskim vektorom što dokazano čuva kinetičku energiju kroz korake integracije. Dobivena shema (6.40) je implicitna zbog spregnute prve i treće jednadžbe.



Slika B7.7: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na vektor gravitacije [2].

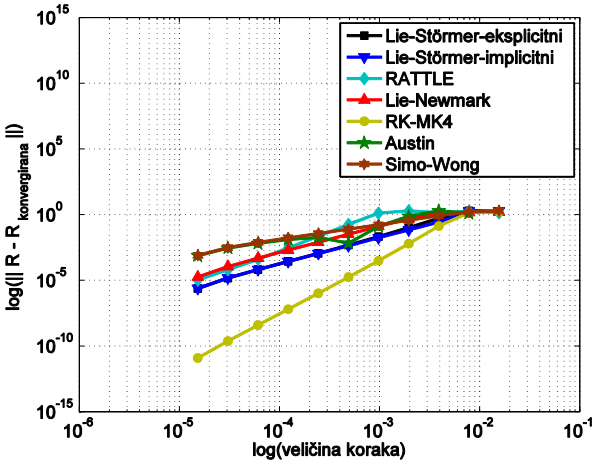


Slika B7.8: Usporedba metoda. Globalna projekcija kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela [2].

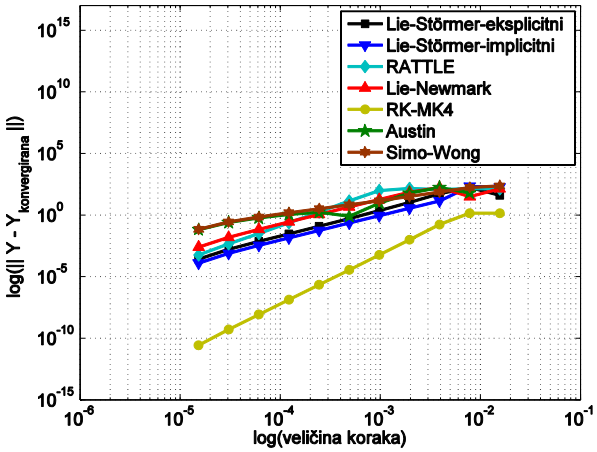
Na slici B7.7 vidljivo je da konačan oblik izvedenog eksplicitnog (6.33) i implicitnog (6.40) Störmer-Verlet algoritma postiže bolje rezultate integracije u usporedbi s uspoređenim algoritmima (RK-MK4, Lie-Newmark, Simo-Wong i Austin), u smislu očuvanja globalne projekcije kinetičkog momenta na vektor gravitacije. Što se tiče očuvanja globalne projekcije kinetičkog momenta na os rotirajućeg tijela (vidi sliku B7.8) implicitni (6.40) Störmer-Verlet algoritma postiže rezultate usporedive s rezultatima testiranih shema, dok eksplicitna (6.33) inačica izvedenog Störmer-Verlet algoritma ima vidljiva odstupanja.

Na slici B7.9 prikazana je usporedba metoda u konvergenciji norme greške matrice rotacije za rotirajuće tijelo s jednom uporišnom točkom. Norma greške $\left\|\mathbf{R}-\mathbf{R}_{konvergirana}\right\|_2$ je

računata za rastuće vrijednosti koraka integracije *h* (1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024, 1/2048, 1/4096, 1/8192, 1/16384, 1/32768 i 1/65536), a referentna vrijednost matrice rotacije $\mathbf{R}_{konvergirana} = \mathbf{R}(t=1)$ je dobivena korištenjem malog koraka integracije *h*=1e-5.



Slika B7.9: Ocjena konvergencije norme greške matrice rotacije.



Slika B7.10: Ocjena konvergencije norme greške lokalnog kinetičkog momenta.

Kao što je i očekivano, iz slike B7.9 vidljivo je da eksplicitni (6.33) i implicitni (6.40) Störmer-Verlet algoritam imaju konvergenciju drugog reda. Također, odabrani Störmer-Verlet algoritmi nadmašuju sve ostale uspoređene algoritme drugog reda točnosti (Lie-Newmark, Simo-Wong, RATTLE, Austin). Integracijska shema RK-MK4 kao shema četvrtog reda točnosti očekivano je dala najbolje rezultate.

Na isti način ocijenjena je i norma greške kinetičke momenta prikazane na slici B7.10 iz koje je vidljivo gotovo jednako ponašanje rezultata kao i kod ocjene norme greške matrice rotacije.

Bitno je naglasiti da eksplicitni (6.33) Störmer-Verlet algoritam daje bolje rezultate u usporedbi s svim ostalim implicitnim algoritmima u smislu konvergencije norme greške matrice rotacije i lokalnog kinetičkog momenta. Implicitni (6.40) numerički integrator jasno je nadmašio sve testirane sheme koje čuvaju integrale gibanja, dok eksplicitni (6.33) integrator koji je numerički efikasniji, nije zadovoljio uvjet očuvanja kinetičke energije sustava ali je bolji u očuvanju ostalih konstanti gibanja u odnosu na testirane sheme.

POPIS CITIRANE LITERATURE

[1] Terze Z, Müller A, Zlatar D. Lie-Group Integration Method for Constrained Multibody Systems in State Space. Multibody System Dynamics. 2015;34(3):275-305. doi. 10.1007/s11044-014-9439-2.

[2] Terze Z, Müller A, Zlatar D. An Angular Momentum and Energy Conserving Lie-Group Integration Scheme for Rigid Body Rotational Dynamics Originating from Störmer-Verlet Algorithm. ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015;10(5):11 pages. doi. 10.1115/1.4028671.

[3] Müller A, Terze Z. On the Choice of Configuration Space for Numerical Lie Group Integration of Constrained Rigid Body Systems. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014;262:3-13. doi. 10.1016/j.cam.2013.10.039.

[4] Müller A, Terze Z. The Significance of the Configuration Space Lie Group for the Constraint Satisfaction in Numerical Time Integration of Multibody Systems. Mechanism and Machine Theory. 2014;82:173-202. doi. 10.1016/j.mechmachtheory.2014,06.014.

[5] Terze Z, Müller A, Zlatar D. Redundancy-Free Integration of Rotational Quaternions in Minimal Form. The ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference - IDETC/CIE 2014; Buffalo, New York, USA, 17-20.08.2014. American Society of Mechanical Engineers (ASME); 2013.

[6] Terze Z, Müller A, Zlatar D. Singularity-Free Time Integration of Rotational Quaternions Using Non-Redundant Ordinary Differential Equations. Multibody System Dynamics. Forthcoming 2015.

[7] Terze Z, Müller A, Zlatar D. DAE Index 1 Formulation for Multibody System Dynamics in Lie-Group Setting. In: Goetz HM; Ziegler P, editors. The 2nd Joint

International Conference on Multibody System Dynamics - IMSD 2012; Stuttgart, Germany, 29.05-01.06.2012. Stuttgart: University of Stuttgart, Institute of Engineering and Computational Mechanics; 2012.

[8] Terze Z. Null Space Integration Method for Constrained Multibody System Simulation with no Constraint Violation. Multibody System Dynamics. 2001;6:229-243.

[9] Chen S, Hansen JM, Tortorelli DA. Unconditionally Energy Stable Implicit Time Integration: Application to Multibody System Analysis and Design. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000;48(6):791-822.

[10] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. 2nd ed. Berlin: Springer; 2006.

[11] Terze Z, Naudet J. Geometric Properties of Projective Constraint Violation Stabilization Method for Generally Constrained Multibody Systems on Manifolds. Multibody System Dynamics. 2008;20:85-106.

[12] Terze Z, Naudet J. Structure of Optimized Generalized Coordinates Partitioned Vectors for Holonomic and Non-Holonomic Systems. Multibody System Dynamics. 2010;24:203-218.

[13] Bauchau O, Bottasso C, Trainelli L. Robust Integration Schemes for Flexible Multibody Systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003;192:395-420.

[14] Arnold M, Brüls O. Convergence of the Generalized-α Scheme for Constrained Mechanical Systems. Multibody System Dynamics. 2007;18(2):185-202.

[15] Brüls O, Eberhard P. Sensitivity Analysis for Dynamic Mechanical Systems with Finite Rotations. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008;74(13):1897-1927.

[16] Bottasso C, Borri M. Integrating Finite Rotations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1998;164(3):307-331.

[17] Lewis D, Simo JC. Conserving Algorithms for the Dynamics of Hamiltonian Systems on Lie Groups. Journal of Nonlinear Science. 1994;4(1):253-299.

[18] Crouch PE, Grossman R. Numerical Integration of Ordinary Differential Equations on Manifolds. Journal of Nonlinear Science. 1993;3(1):1-33.

[19] Krysl P, Endres L. Explicit Newmark/Verlet Algorithm for Time Integration of the Rotational Dynamics of Rigid Bodies. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005;62:2154-2177.

[20] Simo JC, Wong K. Unconditionally Stable Algorithms for Rigid Body Dynamics that Exactly Preserve Energy and Momentum. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1991;31:19-52.

[21] Munthe-Kaas HZ. Runge-Kutta Methods on Lie Groups. BIT. 1998;38(1):92-111.

[22] Bou-Rabee N, Marsden JE. Hamilton-Pontryagin Integrators on Lie Groups Part I: Introduction and Structure-Preserving Properties. Foundations of Computational Mathematics. 2009;9(2):197-219.

[23] Iserles A, Munthe-Kaas HZ, Nørsett SP, Zanna A. Lie-Group Methods. Acta Numerica. 2000;9:215-365.

[24] Celledoni E, Owren B. Lie Group Methods for Rigid Body Dynamics and Time Integration on Manifolds. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003;192(3-4): 421-438.

[25] Borri M, Bottasso C, Trainelli L. Integration of Elastic Multibody Systems by Invariant Conserving/Dissipating Algorithms - Part I: Formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001;190:3669-3699.

[26] Borri M, Bottasso C, Trainelli L. Integration of Elastic Multibody Systems by Invariant Conserving/Dissipating Algorithms - Part II: Numerical Schemes and Applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001;190:3701-3733.

[27] Demoures F, Gay-Balmaz F, Leyendecker S, Ober-Blöbaum S, Ratiu TS, Weinand Y. Discrete Variational Lie Group Formulation of Geometrically Exact Beam Dynamics. Numerische Mathematik. 2014. doi. 10.1007/s00211-014-0659-4.

[28] Kobilarov M, Crane K. Desbrun M. Lie Group Integrators for Animation and Control of Vehicles. ACM Transactions on Graphics. 2009;28(2):1-14.

[29] Brüls O, Cardona A. On the Use of Lie Group Time Integrators in Multibody Dynamics. ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2010;5(3):13 pages.

[30] Leimkuhler B, Reich S. Simulating Hamiltonian Dynamics. United Kingdom: Cambridge University Press; 2004.

[31] Reich S. Symplectic Methods for Conservative Multibody Systems. Integration Algorithms and Classical Mechanics. 1996;10:181-192.

[32] Moser J, Veselov AP. Discrete Versions of Some Classical Integrable Systems and Factorization of Matrix Polynomials. Communications in Mathematical Physics. 1991;139:217-243.

[33] Marsden JE, Pekarsky S, Shkoller S. Discrete Euler-Poincar´e and Lie-Poisson equation. Nonlinearity 1999;12:1647-1662.

[34] Marsden JE, West M. Discrete Mechanics and Variational Integrators. Acta Numer. 2001;10:357-514.

[35] Lee T, Leve F. Lagrangian Mechanics and Lie Group Variational Integrators for Spacecraft with Imbalanced Reaction Wheels. American Control Conference - ACC

2014; Portland, Oregon, USA, 04-06.06.2014. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE); 2014.

[36] Terze Z, Müller A, Zlatar D. Störmer-Verlet Integration Scheme for Multibody System Dynamics in Lie-Group Setting. The ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference - IDETC/CIE 2013; Portland, Oregon, USA, 04-07.08.2013. American Society of Mechanical Engineers (ASME); 2013.

[37] Hjorth-Jensen M. Computational Physics. Oslo: University of Oslo; 2009.

[38] Jose JV, Saletan EJ. Classical Dynamics: A Contemporary Approach. Cambridge: Cambridge University Press; 1998.

[39] Schutz B. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press; 1980.

[40] Morawiec A. Orientations and Rotations: Computations in Crystallographic Textures. Berlin, Heidelberg, New York: Springer; 2004.

[41] Trainelli L. The Vectorial Parameterization of Rotation and Motion. Scientific Report DIA-SR. Politecnico di Milano, Dept. of Aerospace Engineering. 2002:2-18.

[42] Baruh H. Analytical Dynamics. Boston: WCB/McGraw-Hill; 1999.

[43] Hairer E, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer; 1996.

[44] Haug EJ. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Boston: Allyn and Bacon; 1989.

[45] Blajer W. A Geometrical Interpretation and Uniform Matrix Formulation of Multibody System Dynamics. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik). 2001;81(4):247–259.

[46] Nikravesh PE. Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Englewood Hills: Prentice Hall; 1988.

[47] Bauchau OA. Flexible Multibody Dynamics. Dordrecht, Heidelberg, London, New-York: Springer; 2010.

[48] Padfield GD. Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modelling. Oxford: Blackwell Publishing; 2007.

[49] Vuković D, Vrdoljak M, Janković S. Analysis of the Stability of the Helicopter with Water Cannon. In: Zdravko V; Kozmar H; Smojver I, editori. Proceedings of 7th ICCSM International Congress of Croatian Society of Mechanics; Zadar, Hrvatska, 22-25.05.2012. Zagreb: Studio HRG, 2012.

[50] Altmann SL. Rotations, Quaternions, and Double Groups. Oxford: Oxford University Press; 1986.

[51] Hamilton WR. Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges and Smith; 1853.

[52] Hamilton WR. Elements of Quaternions. 3rd ed. New York: New York Chelsea; 1969.

[53] Tait PG. An Elementary Treatise on Quaternions. London: MacMillan; 1867.

[54] Kelland P, Tait PG. Introduction to Quaternions, with Numerous Examples. London: MacMillan; 1882.

[55] Cayley A. On Certain Results Relating to Quaternions. The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley. 1889;1:123-126.

[56] Altmann SL. Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal. Mathematics Magazine. 1989;62:306.

[57] Vince J. Quaternions for Computer Graphics. London: Springer-Verlag; 2011.

[58] Nikravesh PE. Spatial Kinematic and Dynamic Analysis with Euler Parameters. In: Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. Haug EJ, editor. Heidelberg: Spring-Verlag; 1984., pp. 261-281.

[59] Robinson AC. On the Use of Quaternions in Simulation of Rigid-Body Motion. Tech. Rep., Aeronautical Research Lab. Dayton, OH: Wright Air Development Center. 1958;58-17.

[60] Taylor RH. Planning and Execution of Straight Line Manipulator Trajectories. IBM J. Res. Develop. 1979;23:424-436.

[61] Huston RL, Kelly FA. The Development of Equations of Motion of Single-Arm Robots. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1982;12:259-266.

[62] Meyer G. Design and Global Analysis of Spacecraft Attitude Control Systems. NASA Tech. Rep. R-3611971.

[63] Junkins JL, Turner JD. Optimal Continuous Torque Attitude Maneuvers. J. Guidance Control. 1980;3:210-217.

[64] Shoemake K. Animating Rotation with Quaternion Curves. Comput. Graph. 1985;19:245-254.

[65] Horn BKP. Closed-Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions. J. Opt. Soc. Amer. 1987;4:629-642.

[66] Betsch P, Siebert R. Rigid Body Dynamics in Terms of Quaternions: Hamiltonian Formulation and Conserving Numerical Integration. Int. J. Numer. Meth. Engng. 2009;79:444-473.

[67] Conway HJ, Smith DA. On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. A. K. Peters, Ltd.; 2003. ISBN 1-56881-134-92003.

[68] Darryl DH. Geometric Mechanics. Part II: Rotating, Translating and Rolling. London: Imperial College Press; 2008.

[69] Zanna A. Collocation and Relaxed Collocation for the Fer and Magnus Expansions. SIAM Journal of Numerical Analysis. 1999;36(4):1145-1182.

[70] Curtis ML. Matrix Groups. Berlin: Springer; 1984.

[71] Etkin B, Reid LD. Dynamics of Flight: Stability and Control. New York: Wiley; 1996.

[72] McCormick BW. Aeordynamics, Aeronautics and Flight Mechanics. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 1995.

[73] Janković S. Mehanika Leta Zrakoplova. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2002. http://www.fsb.hr/aero/.

[74] ISO Concepts, Quantities and Symbols for Flight Dynamics. Part 1: Aircraft Motion Relative to the Air. ISO/DIS 1151/1 and Part 2: Motion of the Aircraft and the Atmosphere Relative to the Earth. ISO/DIS 1151/2. ISO; 1988.

[75] Vinh NX. Flight Mechanics of High Performance Aircraft. United Kingdom: Cambridge University Press; 1995.

[76] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric Numerical Integration Illustrated by the Störmer-Verlet Method. Acta Numerica. 2003;12:399-450. doi. 10.1017/S0962492902000144.

[77] Hairer E, Lubich Ch. Energy Conservation by Störmer-Type Numerical Integrators. In: Griffiths GF, Watson GA., editors. Numerical Analysis. London: Chapman & Hall/CRC; 2000., p. 169–190.

[78] Cirilli S, Hairer E, Leimkuhler B. Asymptotic Error Analysis of the Adaptive Verlet Method. BIT. 1999;39:25-33.

[79] McLachlan RI, Scovel C. Equivariant Constrained Symplectic Integration. J. Nonlinear Sci. 1995;5:233-256.

[80] Betsch P, Steinmann P. Constrained Integration of Rigid Body Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001;191:467-488.

[81] Marsden JE, Ratiu T. Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag; 1998.

[82] Hairer E. Global Modified Hamiltonian for Constrained Symplectic Integrators. Numer. Math. 2003;95:325-336.

[83] Hairer E, Lubich Ch. The Life-Span of Backward Error Analysis for Numerical Integrators. Numer. Math. 1997;76:441-462.

[84] Hairer E, Lubich Ch. Invariant Tori of Dissipatively Perturbed Hamiltonian Systems Under Symplectic Discretization. Appl. Numer. Math. 1999;29:57-71.

[85] Hairer E, Lubich Ch. Long-Time Energy Conservation of Numerical Methods for Oscillatory Differential Equations. SIAM J. Numer. Anal. 2000;38:414-441.

[86] Engø K, Faltinsen S. Numerical Integration of Lie-Poisson Systems While Preserving Coadjoint Orbits and Energy. Report in Informatics No. 179. Bergen: University of Bergen; 1999.

[87] Lee D, Springmann JC, Spangelo SC, Cutler JW. Satellite Dynamics Simulator Development Using Lie Group Variational Integrator. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference; Oregon, USA, 19-22.08.2013. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE); 2014.

[88] Springmann JC, Cutler JW, Bahcivan H. Magnetic Sensor Calibration and Residual Dipole Characterization for Application to Nanosatellites. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference Proceedings; Toronto, Canada, AAS/AIAA; 2010.

[89] Pulecchi T, Casella F, Lovera M. Object-Oriented Modelling for Spacecraft Dynamics: Tools and Applications. Simulation Modelling Practice and Theory. 2010;18(1):63-86.

[90] Turner AJ, Hall CD. An Open-Source, Extensible Spacecraft Simulation and Modeling Environment Framework. AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference; 03.07.08.2003. AAS/AIAA; 2003.

[91] Rawashdeh SA, Lumpp JE. Nano-Satellite Passive Attitude Stabilization Systems Design by Orbital Environment Modeling and Simulation. AIAA Infotech at Aerospace; 2010.

[92] Cutler J, Bennett M, Klesh A, Bahcivan H, Doe R. The Radio Aurora Explorer A Bistatic Radar Mission to Measure Space Weather Phenomenon. Proceedings of the Small Satellite Conference; 2010.

[93] Atchison JA, Peck MA. A Passive, Sun-Pointing, Millimeter-Scale Solar Sail. Acta Astronautica. 2010;67(1-2):108-121.

[94] Rawashdeh S. Passive Attitude Stabilization for Small Satellites. Kentucky: University of Kentucky; 2009.

[95] Wie B. Space Vehicle Dynamics and Control. AIAA; 1998.

[96] Sidi MJ. Spacecraft Dynamics and Control. Cambridge: Cambridge University Press; 1997.

[97] Psiaki ML. Nanosatellite Attitude Stabilization Using Passive Aerodynamics and Active Magnetic Torquing. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2004; 27(3):347-355.

[98] James R, Wertz WJL. Space Mission Analysis and Design. Microcosm, Inc; 1999.

[99] Vallado D. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. Microcosm, Inc; 2007.

[100] Cowen R. NASA Ponders Kepler's Future. Nature. 2013; 501(7465):16-17.

[101] Kuninaka H, Kawaguchi J. Lessons Learned from Round Trip of Hayabusa Asteroid Explorer in Deep Space. In Proceedings of the IEEE Aerospace Conference; 2011.

[102] Robertson B, Stoneking E. Satellite GN & C Anomaly Trends. Advances in the Astronautical Sciences. 2003;113:531-542.

[103] Stern A., Desbrun M. Discrete Geometric Mechanics for Variational Time Integrators. Proceeding SIGGRAPH '06 ACM SIGGRAPH; New York, USA, 2006.

[104] Becker C, Betsch P. Application of a Gyrostatic Rigid Body Formulation in the Context of a Direct Transcription Method for Optimal Control in Multibody Dynamics. In: Terze Z, editor. Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications, Series: Computational Methods in Applied Sciences. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag; 2014., p. 237-254.

[105] Betsch P, Siebert R, Sänger N. Natural Coordinates in the Optimal Control of Multibody systems. J. Comput. Nonlinear Dynam. 2012;7(1):1-8.

[106] Leyendecker S, Ober-Blöbaum S, Marsden JE, Ortiz M. Discrete Mechanics and Optimal Control for Constrained Systems. Optimal Control Applications and Methods. 2010;31(6):505-528.

[107] Simo JC, Tarnow N, Wong KK. Exact Energy–Momentum Conserving Algorithms and Symplectic Schemes for Nonlinear Dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992;100:63-116.

[108] Austin M, Krishnaprasad PS, Wang LS. Almost Lie-Poisson Integrators for the Rigid Body. Journal of Computational Physics. 1993;107:105-117.

[109] Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics. Chichester: John Wiley and Sons, 2004.

[110] Bauchau O, Trainelli L. The Vectorial Parameterization of Rotation. Nonlin. Dyn. 2003;32:71-92.

[111] Terze Z; Zlatar D. Störmer-Verlet Integracijska Shema na Rotacijskoj Grupi SO(3). In: Karšaj I, Jarak T, editori. Zbornik Radova Petog Susreta Hrvatskog Društva za Mehaniku; Donja Stubica, Hrvatska, 06-07.06.2013. Zagreb: Hrvatsko Društvo za Mehaniku; 2013.

ŽIVOTOPIS

Dario Zlatar rođen je 20. listopada 1985. godine u Koprivnici gdje završava osnovnu i srednju školu, prirodoslovno-matematičku gimnaziju 'Fran Galović'. Godine 2004 zbog izvrsnog uspjeha izravno upisuje studij strojarstva, smjer Inženjersko modeliranje i računalne simulacije na Fakultetu strojarstva i brodogradnje (FSB), Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2008. završava preddiplomski studij i stječe akademski naziv sveučilišni prvostupnik inženjer strojarstva, a 2009. godine završava diplomski studij i stječe akademski naziv magistar inženjer strojarstva. Tijekom studija dobivao je državnu stipendiju za nadarene redovite studente sveučilišnih studija. U sklopu industrijske prakse i studentske ispomoći radi u tvrtkama Rasco d.o.o., Kalinovac i INA d.d. - CPS Molve.

Radno iskustvo stječe kao vanjski suradnik Laboratorija za dinamiku letjelica i konstrukcijskih sustava, Katedre za dinamiku letjelica, Zavoda za zrakoplovstvo. Od 2010. godine radi na Zavodu za zrakoplovstvo (FSB) kao asistent, gdje sudjeluje u izvođenju nastave te je angažiran na istraživanjima u okviru znanstvenog projekta 'Numeričke simulacijske procedure dinamike slijetanja elastičnog zrakoplova', br. 120-1201829-1664 i projekta 'Geometrijski numerički integratori na mnogostrukostima za dinamičku analizu i simulaciju konstrukcijskih sustava' pod pokroviteljstvom Hrvatske zaklade za znanost - HRZZ na kojima je glavni istraživač prof. dr. sc. Zdravko Terze.

Tijekom rada na Zavodu za zrakoplovstvo stručno se usavršava sudjelovanjem na mnogim domaćim i inozemnim radionicama i stručnim skupovima kao što su: 'Differential-Geometric Method in Computational Multibody System Dynamics' u organizaciji International Centre for Mechanical Sciences (CISM), Udine (Italija), NEED lab courses - Vrije Universiteit Brussel (Belgija), NEED meeting and workshop in Stuttgart-Universität Stuttgart (Njemačka), 'OpenFOAM Workshop' - FSB (Zagreb) i dr.

Kao član organizacijskog odbora sudjelovao je u pripremi međunarodne konferencije 'ECCOMAS Multibody Dynamics 2013', znanstvene radionice 'Obzor 2020: radni program Svemir - gdje je RH i kako se uključiti?' i međunarodne znanstvene radionice 'Numerical Simulation Technologies as a Driving Force for Innovation in Engineering, Medicine and Applied Sciences'.

Dario Zlatar je objavio ukupno 16 znanstvenih radova, od čega su 2 rada objavljena u CC časopisima, dok su ostali radovi objavljeni u zbornicima radova s međunarodnih i domaćih

znanstvenih skupova. Trenutna istraživačka aktivnost usmjerena mu je prema matematičkom modeliranju, računalnoj dinamici i numeričkoj simulaciji konstrukcijskih sustava.

Aktivno u govoru i pismu koristi engleski jezik a pasivno poznaje njemački jezik.

CURRICULUM VITAE

Dario Zlatar was born on October 20, 1985 in Koprivnica, Croatia where he finished elementary and high school, *Gymnasium of natural sciences and mathematics 'Fran Galović'*. In the year 2004, because of the excellent achievements, he directly enrolled to study at the *Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb* on field Engineering Modelling and Computer Simulation. He received his B. E. and M. E. in Mechanical Engineering from *University of Zagreb* in 2008 and 2009, respectively. During his studies he received Scholarship of *Croatian Ministry of Science, Education and Sports (awarded to top 10% students of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb).* Within industrial practice program he worked in companies *Rasco d.o.o., Kalinovac* and *INA d.d. - CPS Molve.*

He gets work experience while he working as external associate in *Laboratory for Flight Vehicle Dynamics and Structural Systems, Chair of Flight Vehicle Dynamics, Department of Aeronautical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture* at the *University of Zagreb*. Since 2010 he is a research assistant at the *Chair of Flight Vehicle Dynamics* where he involved in research activities at the project *Numerical Simulation Procedures for Elastic Airplane Landing Dynamics (No. 120-1201829-1664),* supported by the *Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia* and project *Geometric Numerical Integrators on Manifolds for Dynamic Analysis and Simulation of Structural Systems* financed by *Croatian Scientific Foundation* whose principal researcher is Prof. DSc. Zdravko.

During his work at the Department of Aviation he improves professional skills by participating in many national and international workshops and symposia such as *Differential-Geometric Method in Computational Multibody System Dynamics* organized by *International Centre for Mechanical Sciences (CISM), Udine (Italy), TEMPUS EU Project Numerical and Experimental Engineering Dynamics - NEED lab courses - Vrije Universiteit Brussel (Belgium), NEED meeting and workshop in Stuttgart-Universität Stuttgart (Germany), OpenFOAM Workshop - UNIZAG FSB (Zagreb, Croatia),* etc.

He was involved in organization of workshops and conferences prepared at *Dept. of Aeronautical Eng.*, and some of them are *ECCOMAS Multibody Dynamics 2013, Horizon 2020: Work Programme Space - where is RH and how to get involved?* and *Numerical*

Simulation Technologies as a Driving Force for Innovation in Engineering, Medicine and Applied Sciences.

Dario Zlatar is the co-author of 2 papers in internationally recognized CC scientific journals and 14 papers in conference proceedings with international review. Domain of his expertise is mathematical modeling, computational dynamics and numerical simulation of multibody structural systems.

He has good command of the English language and basic knowledge of German language.

Izvorni znanstveni i pregledni radovi u CC časopisima:

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. An Angular Momentum and Energy Conserving Lie-Group Integration Scheme for Rigid Body Rotational Dynamics Originating from Störmer-Verlet Algorithm. // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 10 (2014) , 1; 1-35 (članak, znanstveni).

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. Lie-Group Integration Method for Constrained Multibody Systems in State Space. // Multibody system dynamics. 33 (2014) , 1; 1-31 (članak, znanstveni).

Znanstveni radovi u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom:

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. Redundancy-Free Integration of Rotational Quaternions in Minimal Form // *Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (DETC 2014)*. Buffalo : ASME, 2014. (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Vrdoljak, Milan; Zlatar, Dario. Numerical Flight Vehicle Forward Dynamics with State-Space Lie-Group Integration Scheme // *Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2013)*. Portland, 2013. (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. Störmer-Verlet Integration Scheme for Multibody System Dynamics in Lie-Group Setting // Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and

Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2013). Portland, 2013. (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. Angular Momentum Conserving Integration Scheme for Multibody System Dynamics in Lie- Group Setting // *ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics 2013 Book of Abstracts* / Terze, Zdravko (ur.). Zagreb : Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, 2013. 281-282 (predavanje, međunarodna recenzija, sažetak, znanstveni).

Terze, Zdravko; Vrdoljak, Milan; Zlatar, Dario. Dynamic Simulation of Helicopter Airborne Maneuvers with Numerical Integration Scheme in Lie-Group Setting // *ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics 2013 Book of Abstracts* / Terze, Zdravko (ur.). Zagreb : Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, 2013. 25-26 (predavanje, međunarodna recenzija, sažetak, znanstveni).

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario; Mueller, Andreas. Numerical Integration Algorithm in Lie-Group Setting for Dynamics of Mechanical Systems // *Proceedings of 7th ICCSM International Congress of Croatian Society of Mechanics* / Virag, Zdravko ; Kozmar, Hrvoje ; Smojver, Ivica (ur.). Zagreb : Studio HRG, 2012. 101-102 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Mueller, Andreas; Zlatar, Dario. DAE Index 1 Formulation for Multibody System Dynamics in Lie-Group Setting // *In 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics* / Goetz, Heidi-Maria ; Ziegler, Pascal (ur.). Stuttgart : University of Stuttgart, Institute of Engineering and Computational Mechanics, 2012. 380-381 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario; Mueller, Andreas. Lie Group Integration Method for Constrained Multibody Systems // *Proceedings of the Multibody Dynamics, ECCOMAS 2011* / Jean-Claude Samin and Paul Fisette (ur.). Brussels, Belgium :

Universite catholique de Louvain, 2011. 1-9 (pozvano predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Vrdoljak, Milan; Zlatar, Dario. Geometric Mathematical Framework for Multibody System Dynamics // *Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2010* / Simos, Theodore E. (ur.). New York : American Institute of Physics (AIP), 2010. 1288-1291 (pozvano predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Drugi radovi u zbornicima skupova s recenzijom

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario. Numerička integracija rotacijskog tenzora na grupi jediničnih kvaterniona // *Zbornik radova šestog susreta Hrvatskog društva za mehaniku* / Jelenić, Gordan ; Gaćeša, Maja (ur.). Rijeka : Hrvatsko društvo za mehaniku, 2014. 209-214 (predavanje, domaća recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario. Störmer-Verlet integracijska shema na rotacijskoj grupi SO(3) // *Zbornik radova petog susreta Hrvatskog društva za mehaniku* / Karšaj, Igor ; Jarak, Tomislav (ur.). Zagreb : Hrvatsko društvo za mehaniku, 2013. 195-200 (predavanje, domaća recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

Druge vrste radova:

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario. Numerička analiza dinamike samohodnog kotača pogonjenog ekscentričnom masom, 2011. (elaborat).

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario. Numerička analiza kinematike samohodnog kotača pogonjenog ekscentričnom masom, 2011. (elaborat).

Terze, Zdravko; Zlatar, Dario. Računalna analiza mehanizma podizne sklopke, 2010. (elaborat).