Simulacijski modeli iterirane zatvorenikove dileme u sustavu agenata limitirane memorije

Hižak, Jurica

Doctoral thesis / Disertacija

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Organization and Informatics / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:211:939824

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE
VARAŽDIN

Repository / Repozitorij:

Faculty of Organization and Informatics - Digital Repository

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



Sveučilište u Zagrebu

Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

Jurica Hižak

SIMULACIJSKI MODELI ITERIRANE ZATVORENIKOVE DILEME U SUSTAVU AGENATA LIMITIRANE MEMORIJE

DOKTORSKI RAD

Varaždin, 2020.

PODACI O DOKTORSKOM RADU

I.AUTOR

Ime i prezime	Jurica Hižak
Datum i mjesto rođenja	25.03.1975. Varaždin
Naziv fakulteta i datum diplomiranja na VII/1 stupnju	Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilište u Zagrebu, 18.04.2002.
Naziv fakulteta i datum diplomiranja na VII/2 stupnju	Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trst, Italija, 30.04.2004
Sadašnje zaposlenje	Sveučilište Sjever

II.DOKTORSKI RAD

Naslov	Simulacijski modeli iterirane zatvorenikove dileme u sustavu agenata limitirane memorije
Broj stranica, slika, tabela, priloga, bibliografskih podataka	146 stranica, 51 slika, 27 tablica, 5 priloga, 87 bibliografskih podataka
Znanstveno područje i polje iz kojeg je postignut doktorat znanosti	Društvene znanosti, Informacijske i komunikacijske znanosti
Mentori ili voditelji rada	prof.dr.sc.Mirko Čubrilo, prof.dr.sc.Robert Fabac
Fakultet na kojem je obranjen doktorski rad	Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu
Oznaka i redni broj rada	156

III.OCJENA I OBRANA

Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je prihvaćena tema	16. listopada 2018.
Datum predaje rada	6.rujna 2019.
Datum sjednice Fakultetskog vijeća na kojoj je prihvaćena pozitivna ocjena rada	17.prosinca 2019.
Sastav povjerenstva koje je rad ocijenilo	prof.dr.sc.Alen Lovrenčić, prof.dr.sc. Robert Manger, izv.prof.dr.sc.Markus Schatten
Datum obrane doktorskog rada	22.siječnja 2020.
Sastav povjerenstva pred kojim je rad obranjen	1)prof.dr.sc.Alen Lovrenčić, predsjednik 2)prof.dr.sc. Robert Manger, član 3)izv.prof.dr.sc.Markus Schatten, član 4)doc.dr.sc. Marcel Maretić, zamjena
Datum promocije	



Sveučilište u Zagrebu

Fakultet organizacije i informatike
Varaždin

Jurica Hižak

SIMULACIJSKI MODELI ITERIRANE ZATVORENIKOVE DILEME U SUSTAVU AGENATA LIMITIRANE MEMORIJE

DOKTORSKI RAD

Mentori:
prof.dr.sc.Mirko Čubrilo
prof.dr.sc.Robert Fabac

Varaždin, 2020.



University of Zagreb

Faculty of Organization and Informatics
Varaždin

Jurica Hižak

SIMULATION MODELS OF ITERATED PRISONER'S DILEMMA IN A SYSTEM OF AGENTS WITH LIMITED MEMORY CAPACITY

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors:
prof.dr.sc.Mirko Čubrilo
prof.dr.sc.Robert Fabac

Varaždin, 2020.

ZAHVALA

Kao što svako istraživanje predstavlja avanturu prepunu neočekivanih prepreka, tako je i ovo istraživanje imalo cijeli niz teorijskih i programerskih problema. Bilo je višemjesečnih lutanja, stranputica i velikih digresija u odnosu na prvobitni nacrt istaživanja. Neke stranputice bile su poput slijepih ulica; poput mrtvih riječnih rukavaca – misliš da ideš prema nečemu, a na kraju se moraš vratiti odakle si krenuo. Ali neke stranputice nas vode do zanimljivih područja i novih ideja koje mogu uroditi plodom. „Kad istražujem, nemam pojma što radim“, govorio je Wernher von Braun[1], a pod tom izjavom vjerojatno je mislio upravo na takvo lutanje; na tapkanje u mraku nepoznatog. Kad bismo unaprijed znali što ćemo pronaći, to ne bi bilo istraživanje, nego potraga za već viđenim; stoga je i tzv. nacrt doktorskog istraživanja samo *nacrt*, slabašna skica osuđena na promjene, jednako kao i metodologija definirana na papiru. Zahvaljujući sjajnom mentoru, prof.dr.sc. Mirku Čubrilu koji mi je omogućio veliku autonomiju, a istodobno pružio svu pomoć koja mi je trebala, nisam odustao od veslanja, a neki uski rukavci u koje sam zaplovio pretvorili su se u rijeke i jezera. Primjerice, tokom mjerenja brzine kojom *suradnici* dostižu *izrabljivače*, u sklopu ovog istraživanja došlo je do sasvim neočekivanog preokreta. Pokazalo se da neke uobičajene polazne jednadžbe za igru između klasičnih TFT i ALLD agenata neispravno opisuju Brownovsku populaciju (populaciju u kojoj se agenti nasumično kreću). To (neugodno) otkriće izazvalo je šestomjesečno i sasvim neplanirano „kopanje“ po matematičkim relacijama, odgađanje pisanja disertacije i posljedično tome prolongiranje studija. Ipak, uz mentorsku podršku i pomoć kolega, rezultat nije izostao. Ovom prilikom najtoplije se zahvaljujem dragom prijatelju i cimeru iz studentskih dana dr.sc. Igoru Gašpariću s Instituta Ruđer Bošković koji mi je pomogao kod izračunavanja vjerojatnosti (problem izvlačenja nepoznate karte iz špila za poker), te doc.dr.sc. Marcelu Maretiću s Fakulteta za organizaciju i informatiku koji mi je svratio pozornost na Lambertovu W funkciju. Neki od rezultata i zaključaka pretočeni su u znanstveni članak koji se trenutno nalazi u rukama recenzenata časopisa *Physical Review E*. U samom procesu pisanja članka od velike pomoći bio je dr.sc.Vinko Zlatić s Instituta Ruđer Bošković.

Uz profesora Čubrila, u ovih pet godina istraživanja bilo je mnogo važnih ljudi koji su direktno ili indirektno utjecali na kvalitetu ovog rada. Želim istaknuti komentora prof.dr.sc.Roberta Fabca, prof.dr.sc.Dianu Šimić, prof.dr.sc.Alena Lovrenčića (čije oštre kritike su me natjerale da sredim metodologiju) i prof.dr.sc. Jasminku Dobšu. Također, velika hvala i dipl.oec. Lei Friščić

[1] U Simanekovoj knjizi Science Askew, citat se pripisuje Werner Von Braunu. Tamo stoji verzija „Research is what I'm doing when I don't know what I'm doing.“. Postoji i Einsteinova izjava vrlo slična navedenoj : „If we knew what it was we were doing, it would not be called research, would it?“

koja mi je uvijek bila na raspolaganju po pitanju administracije. Zahvaljujem se i kolegama sa Sveučilišta Sjever; svom cimeru doc.dr.sc. Robertu Logožaru, doc.dr.sc. Lovorki Gotal koja me potaknula da dio ovih istraživanja prezentiram na konferenciji u Cambridgeu i dr.sc. Damiri Keček, koja mi je dobrim savjetima pomogla prilikom odabira kolegija na doktorskom studiju. Hvala kolegama doktorandima, osobito mr.sc. Mariju Klačmeru kojeg sam često kontaktirao kad mi je trebao savjet.

Smatra se da znanost pripada prvenstveno racionalnoj sferi ljudskog djelovanja i pritom se vrlo često zanemaruje jedan iracionalan aspekt cijelog procesa istraživanja, a to je *strast*. Ovom prilikom želim iskazati zahvalnost dr.sc. Klari Bilić Meštrić koja mi je ukazala na važnost strasti u izboru doktorskog studija. "Istraživanje koje ne uključuje strastvenu ljubav prema predmetu istraživanja vrlo vjerojatno će se pretvoriti u agoniju.", bile su njene riječi, a danas mi je drago što sam ih uzeo za ozbiljno.

Doktorski studij iziskuje strast, ali i podršku okoline, jer svi mi na raspolaganju imamo isti, ograničeni vremenski okvir u koji moramo uklopiti profesionalne i obiteljske obaveze. U tom smislu, najviše dugujem svojoj zaručnici Nataši koja mi je bila emotivna i logistička podrška svih ovih godina. Na posljetku, vjerujem da bez obitelji, prijatelja i šire porodice, ništa ne bi imalo smisla. Valter i Darvin moje su pogonsko gorivo i moja inspiracija. Ali isto tako i Lucija, Eva, Ivča, Jura, Sofija i svi ostali nećaci i nećakinje. Hvala Dunji, Vladiju, Davoru, Tanji, Ščapecima, Ljupčekima i Furlanima. Dakako, bez familije bih vjerojatno imao više vremena za pisanje i možda bih bio slobodniji, ali istovremeno bio bih kao moreplovac bez kompasa. „I need more blankets, and I need less blankets", rekao bi Dewey Cox u filmu Walk Hard, bacakajući se u krevetu, kao što se i mi bacakamo u vlastitim proturječnostima. Hvala Chubakinoj Baki i Pravim konjima!

Zadnja slova ove zahvale pripadaju mojoj Mami. Ova se disertacija bavi evolucijom suradnje i mehanizmom recipročnog altruizma, ali majčinska ljubav nadilazi matematiku reciprociteta. Hvala Mama, ti znaš kolike su dimenzije odricanja i koliko bi Tata bio ponosan da može čitati ove retke.

Jurica Hižak

SAŽETAK

Višeagentne simulacije na polju evolucijske teorije igara pokazuju da mehanizam direktnog reciprociteta dobro funkcionira u malim grupama gdje se agenti susreću često i gdje prevaranti ne mogu proći nekažnjeno. Ipak, nigdje do sad nije kvantitativno objašnjeno pod kojim uvjetima direktni reciprocitet ustupa mjesto indirektnom reciprocitetu. Za razliku od ranijih modela, simulacijski model predložen u ovom radu uzima u obzir memorijske sposobnosti agenata, kao i energetsku cijenu takvih sposobnosti. Pokazalo se da veličina grupe raste s memorijskim kapacitetom agenata upravo kao što ukazuju Dunbarovi empirijski podaci. Štoviše, utvrđeno je da vrijeme dostizanja izrabljivača raste asimptotski s veličinom grupe što upućuje na zaključak da postoji granična veličina grupe iznad koje direktni reciprocitet nije dostatan za održanje suradnje i iznad koje je agentima potrebno omogućiti horizontalni prijenos informacija o izrabljivačima koji su prisutni u populaciji.

Ključne riječi: iterirana zatvorenikova dilema, višeagentni sustavi, TFT, direktni reciprocitet, indirektni reciprocitet, simulacijski modeli, evolucija suradnje, memorija

ABSTRACT

Multi-agent simulations applied to the evolutionary game theory show that the mechanism of direct reciprocity operates well within small groups of agents where it would be hard to get away with cheating one another. However no research has been done yet to explain quantitatively under which conditions direct reciprocity gives place to indirect reciprocity. Unlike previous models, our model takes into account the memory of the agents as well as the cost of having such memory. It was shown that the group size grows with the memory capacity of agents exactly as Dunbar's empirical data points to. Moreover, it was shown that time required for the cooperators to reach the defectors increases asymptotically with the group size which points to the conclusion that there is a group size limit over which the direct reciprocity is insufficient to maintain the cooperation and above which it is necessary to allow the horizontal transmission of the information about the defectors present in the population.

Keywords: iterated prisoner's dilemma, multi-agent systems, TFT, direct reciprocity, indirect reciprocity, simulation models, evolution of cooperation, memory

PREDGOVOR

Formalno gledano *Zatvorenikova dilema* samo je djelić jednog velikog područja matematike koje je rođeno 1944. zaslugom pionira računalstva **Johna von Neumanna** i koje danas nazivamo *Matematička teorija igara* (MTI). Međutim, kad se govori o Zatvorenikovoj dilemi (PD), nikad se ne govori samo o matematici - obično se istovremeno govori o evoluciji suradnje; govori se o biologiji, psihologiji, recipročnom altruizmu, moralu, politici, ekonomiji, o višeagentnim simulacijama, o sebičnim agentima i o svemu što god se može udruživati i razdruživati. Zašto su šišmiši nesebični, zašto se jednostanični organizmi udružuju u višestanične, zašto životinje žive u čoporima – gdje god se teorijski raspravlja o mogućoj *suradnji* neizbježno se raspravlja i o Zatvorenikovoj dilemi. Zanimljiv je i jezik koji se rabi prilikom takvih rasprava; organizmi mogu surađivati, mogu varati, parazitirati, uzvraćati, kažnjavati, izrabljivati, opraštati; mogu biti izdajnici, slobodni jahači, naivci, dobričine, osvetnici; mogu tvoriti stabilne suradničke enklave, mogu prenositi svoje suradničke gene, mogu učiti, oponašati, mutirati. Dakle, cijeli žargon kojim se opisuje PD zvuči više filmski nego li „matematičarski". Teško je zapravo pronaći područje matematike koje rabi takvu paletu imenica, pridjeva i glagola, i u koje se uključilo toliko nematematičara. Svake godine objavljuje se nekoliko tisuća radova koji se bave problematikom Zatvorenikove dileme. Ti radovi objavljuju se u časopisima poput *Journal of Theoretical Biology*, *Informatica*, *Journal of Economic Behavior & Organization*, *Physical Review E*, *Psychological science* itd. – već i letimični pogled na taj popis otkriva da je Zatvorenikova dilema univerzalna tema koja zaokuplja stručnjake svih profila. Konflikt između suradnje i izdaje arhetipska je tema koja prožima našu kulturu. Stoga će ovaj tekst vjerojatno će biti zanimljiv ne samo informatičarima (koji se bave simulacijama Zatvorenikove dileme), nego i svim intelektualno radoznalim ljudima. Ipak, jednostavnost osnovne forme igre mogla bi biti varljiva – matematika koja opisuje odnos između izrabljivača i osvetoljubivih suradnika nije trivijalna, osobito u slučaju konačno velikih populacija. Čitateljima koji se planiraju baviti ovim područjem savjetujem detaljno iščitavanje s olovkom u ruci. Onima koji su upoznati s osnovnim konceptima, a ne planiraju ulaziti u matematičke detalje, preporučam preskakanje treće glave ove disertacije.

Neke čitatelje vjerojatno će iznenaditi terminologija koja se velikim dijelom temelji na biologiji, ali slična situacija uočava se i na području *Umjetne inteligencije* (AI), osobito na polju evolucijskih algoritama. Tko zna, možda će s vremenom informacijske znanosti razviti drugačiju terminologiju, pa će pojmovi mutacija i rekombinacija biti zamijenjeni nekim drugim pojmovima (kao što riječ *agent* koristimo umjesto npr. *organizam* ili *jedinka*). Situacija je danas takva kakva jest, pretpostavljam upravo zbog toga što su informacijske znanosti relativno nova područja koja od

svoje starije braće nasljeđuju paradigme i posuđuju sintagme. Neka područja računalnih znanosti, koja danas promatramo kao zasebne discipline, razvila su se primarno nadahnuta biologijom. Primjerice, *Artificial Life* (AL), znanstveno je područje koje proučava žive sustave uporabom višeagentnih simulacija, celularnih automata i robota, a pokriva široki spektar tema od *biomimikrije* do *evolucijske dinamike*. I baš kao što studiranje *genetskog algoritma* podrazumijeva poznavanje procesa stanične diobe, tako i *evolucijska dinamika* iziskuje poznavanje evolucijske teorije igara.

U sklopu evolucijske dinamike izučavaju se matematička načela na kojima se temelji evolucija (ne samo evolucija bioloških obilježja već i evolucija ideja), a matematički se modeli prevode u *simulacijske modele* pomoću kojih se promatra uspješnost određenog obilježja. U tom kontekstu, *višeagentni sustavi* nezamjenjiv su alat koji nam omogućuje simuliranje procesa čije se trajanje u prirodi mjeri godinama. Agenti koji igraju Zatvorenikovu dilemu primjenjuju različite strategije ponašanja; neki uvijek igraju izdajnički, neki uvijek suradnički, a neki surađuju pod uvjetom da u prethodnoj interakciji nisu bili izdani. Važno je primijetiti da **na nivou agenata nestaju razlike između biologije, sociologije i ekonomije**. Ono što je „ekonomično“ to će se realizirati u vidu spajanja ili razdvajanja, u vidu simbioze ili parazitiranja. Isplativost suradnje ili nesuradnje odlučuje o tome hoće li se agenti udružiti. Pod kojim uvjetima je suradnja moguća i kakvi mehanizmi održavaju suradnju – to su pitanja za čijim odgovorima tragamo.

SADRŽAJ

ZAHVALA IV
SAŽETAK VI
ABSTRACT VI
PREDGOVOR VII
SADRŽAJ IX
POPIS SLIKA XII
POPIS TABLICA XIV
POPIS KRATICA XV
1 Uvod 2
1.1 Struktura doktorske disertacije 5
1.2 Definiranje problema 7
1.3 Hipoteze i ciljevi 9
1.4 Nacrt istraživanja i metodologija 10
2 Evolucija suradnje i Axelrodovi turniri 11
2.1 Mehanizmi suradnje 12
2.1.1 Grupni odabir 12
2.1.2 Srodnički odabir 13
2.1.3 Direktni reciprocitet 13
2.1.4 Indirektni reciprocitet 14
2.1.5 Prostorni odabir 14
2.2 Zatvorenikova dilema – suradnja ili izdaja 15
2.2.1 Iterirana Zatvorenikova dilema i najpoznatije determinističke strategije 17
2.2.2 Axelrodov turnir 18
2.2.3 Axelrodova sjena budućnosti 19
2.2.4 Primjeri reciprociteta i kritika Triversove teorije 20
2.3 Veličina zajednice 22
2.3.1 Socijalne dileme 23
2.3.2 Dunbarova korelacija 25
3 Matematički temelji Zatvorenikove dileme 28
3.1 Matematička teorija igara 29
3.1.1 Suigrači, potezi i strategije 29
3.1.2 Bimatrica isplate i normalna forma igre 31
3.1.3 Matrica isplate u simetričnoj igri 32

3.1.4 Isplata u slučaju mješovite strategije ... 33
3.1.5 Nashova ravnoteža kao obostrano najbolji odgovor ... 35
3.1.6 Određivanje Nashove ravnoteže eliminacijom dominiranih strategija ... 38
3.1.7 Nashova ravnoteža u igri Zatvorenikove dileme ... 39
3.1.8 Ravnoteža u slučaju primjene mješovitih strategija ... 40
3.1.9 Određivanje ravnoteže mješovitih strategija deriviranjem očekivanih isplata ... 42
3.1.10 Nashova ravnoteža mješovitih strategija u simetričnoj igri 2×2 ... 44
3.2 Evolucijska teorija igara ... 46
3.2.1 Strategija u okviru evolucijske teorije igara ... 47
3.2.2 Ekvivalencija miješanih populacija i mješovitih strategija ... 47
3.2.3 Evolucijski stabilna strategija ... 52
3.2.4 Fitnes i reprodukcija ... 54
3.2.5 Kontinuirana replikacijska dinamika u dvokomponentnoj populaciji ... 56
3.2.6 Odnos između fitnesa i očekivane isplate ... 57
3.2.7 Replikacijska dinamika u igri 2×2 ... 58
3.2.8 Replikacijska dinamika u Zatvorenikovoj dilemi ... 60
3.2.9 Iterirana zatvorenikova dilema i strategija TFT ... 61
3.2.10 Iterirana Zatvorenikova dilema s reaktivnim strategijama ... 64
3.3 Evolucijska teorija igara u konačno velikim populacijama ... 69
3.3.1 Moranov proces ... 69
3.3.2 Vjerojatnost fiksacije u slučaju neutralnog drifta ... 72
3.3.3 Vjerojatnost fiksacije u općem slučaju ... 74
3.3.4 Vjerojatnost fiksacije u Moranovom procesu uz stalnu selekciju ... 75
3.3.5 Zatvorenikova dilema u Moranovom modelu ... 77
4 Simulacijski modeli Iterirane zatvorenikove dileme ... 81
4.1 Simulacijski modeli s deterministčkim strategijama u NetLogu ... 81
4.1.1 Simulacijski model „Svaki sa svakim“ (bezuvjetne strategije) ... 83
4.1.2 Realizacija TFT agenta ... 86
4.1.3 Sučelje i programski kôd „Svaki sa svakim“ (uključujući TFT) ... 88
4.1.4 Simulacijski model „IPD Brown“ ... 92
4.1.5 Sučelje i programski kôd „IPD Brown“ ... 94
4.1.6 Izračunavanje uspješnosti strategije ... 98
4.2 Simulacijski model stohastičke IPD s reaktivnim strategijama ... 100
4.2.1 Simulacija stohastičke IPD u MatLabu ... 100
4.2.2 Program „Stohastička IPD“ i vizualni output ... 102
5 Simulacijski modeli IPD u sustavu agenata limitirane memorije ... 104

5.1 Model i realizacija zaboravljivog TFT agenta (OTFT) 105
5.1.1 Memorijski kapacitet 105
5.1.2 Vrijeme poluraspada memorije 106
5.1.3 Cijena posjedovanja memorije 107
5.2 Simulacijski eksperimenti OTFT vs ALLD 108
5.2.1 Istraživačka pitanja 108
5.2.2 Vrijeme dostizanja izrabljivača kao mjera uspješnosti 108
5.2.3 Problem gustoće agenata 110
5.2.4 Ovisnost brzine dostizanja o memorijskom kapacitetu 113
5.2.5 Optimalni memorijski kapacitet u ovisnosti o veličini populacije 115
5.2.6 Utjecaj zaboravljivosti i cijene memorije na vrijeme dostizanja 116
5.2.7 Empirijsko određivanje asimptotske granice 118
5.3 Model GossipTFT 124
5.4 Usporedba OTFT i GossipTFT 126
6 Teorijski pristup populaciji agenata u nasumičnom hodu 128
6.1 Očekivani broj susreta 132
6.2 Očekivana isplata 134
6.3 Eksperimentalni rezultati 136
6.4 Diskusija 139
7 Zaključak 141
8 Literatura 147
PRILOG A 151
PRILOG B 153
PRILOG C 160
PRILOG D 163
PRILOG E 164
ŽIVOTOPIS 165
Popis radova (kronološkim redom) 165

POPIS SLIKA

Slika 1 Shematski prikaz odnosa između konceptualnog i računalnog modela
Slika 2 Direktni i indirektni reciprocitet
Slika 3 Matrica isplate u igri Zatvorenikove dileme.
Slika 4 IPD između igrača RAND i igrača koji koriste strategije TFT i GRIM.
Slika 5 Korelacija između relativne veličine neokorteksa primata i veličine društvene skupine
Slika 6 Evolucija favorizira izdaju
Slika 7 Reaktivne strategije
Slika 8 Frekvencija igrača u nekom trenutku igre.
Slika 9 Primjer Markovljeve tranzicijske matrice za strategije $S_1(0.7,0.6)$ i $S_2(0.9,0.2)$
Slika 10 Evolucija suradnje u heterogenoj populaciji reaktivnih strategija
Slika 11 Populacija koja se sastoji od dva fenotipa (dvije strategije)
Slika 12 Tranzicije u susjedna stanja.
Slika 13 Primjer tranzicijske matrice Moranovog procesa
Slika 14 Tri moguća scenarija za penjanje populacije iz i=2 prema apsorpcijskom stanju $i=N$
Slika 15 IPD u Moranovoj populaciji.
Slika 16 Primjer povezanosti procedura u programskom jeziku NetLogo.
Slika 17 Programsko sučelje (*interface*) simulacije „Svaki sa svakim“
Slika 18 Spareni agenti i njihova svojstva
Slika 19 Sučelje simulacije „svaki sa svakim“
Slika 20 Simulacijsko okruženje (svijet) i okvir za podešavanje parametara svijeta
Slika 21 Tipovi susjedstva u simulacijskom okruženju
Slika 22 Sučelje simulacije „IPD Brown“
Slika 23 Usporedba različitih mjera uspješnosti strategija ALLD i TFT
Slika 24 Simulacija evolucije suradnje izvedena u Matlabu pomoću programa „Stohastička IPD“
Slika 25 Raspad memorije
Slika 26 Relativni fitnes TFT i ALLD u četiri populacije različitih veličina
Slika 27 Vrijeme potrebno za dostizanje ALLD
Slika 28 Podešavanje postavki monitora koji prikazuje broj sudara između agenata
Slika 29 Broj susreta u ovisnosti o veličini populacije
Slika 30 Struktura “svijeta” u Netlogu i prozor za podašavanje broja polja od kojih se sastoji “svijet”
Slika 31 Relativni fitnes strategija ALLD i OTFT
Slika 32 Vrijeme dostizanja izrabljivača ne pada linearno s memorijom

Slika 33(a) Vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača (b) minimalno vrijeme dostizanja
Slika 34 Optimalni memorijski kapacitet linearno raste s veličinom grupe
Slika 35 Utjecaj zaboravljivosti na vrijeme dostizanja
Slika 36 Utjecaj k-vrijednosti (cijene memorije) OTFT na vrijeme dostizanja izrabljivača
Slika 37 Sučelje programa „IPD BROWN SIMEX“ za izvođenje simulacijskih eksperimenata
Slika 38 Vrijeme dostizanja izrabljivača u ovisnosti o memoriji *m* i veličini populacije *N*
Slika 39 Povezanost minimalnog vremena dostizanja i optimalnog memorijskog kapaciteta
Slika 40 Teorijske krivulje provučene kroz eksperimentalno dobivene vrijednosti
Slika 41 Regresijski pravci između točaka optimalne memorije u ovisnosti o veličini populacije
Slika 42 Shematski prikaz tračanja
Slika 43 Brzina OTFT (k=5) u usporedbi s tračerima (k=7)
Slika 44 Vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača u populacijama razl. veličina (160-250)
Slika 45 U sustavu svaki-sa-svakim jedan TFT agent u svakoj rundi igra N-1partija
Slika 46 Vjerojatnost da TFT agent u μ-tom susretu sretne nepoznatog ALLD agenta
Slika 47 Tročlane varijacije iz špila karata pri čemu je treća karta „nova“
Slika 48 Očekivani broj susreta do izjednačavanja isplata TFT i ALLD
Slika 49 Očekivani broj susreta u ovisnosti o relativnoj frekvenciji TFT
Slika 50 Efektivan broj rundi do izjednačavanja u ovisnosti o veličini populacije
Slika 51 Minimalan broj rundi potreban da jedan TFT agent preuzme cijelu populaciju

POPIS TABLICA

Tablica 1 Najpoznatije strategije u IPD
Tablica 2 Tok igre za prvih deset rundi između pet najpoznatijih strategija
Tablica 3 Primjer bimatrice
Tablica 4 Primjer bimatrice u simetričnoj igri
Tablica 5 Primjer igre 2x3.
Tablica 6 Najbolji odgovori prvog igrača.
Tablica 7 Nashova ravnoteža.
Tablica 8 Primjer igre 2x3.
Tablica 9 Reducirana igra
Tablica 10 Primjer Zatvorenikove dileme
Tablica 11 Nashova ravnoteža
Tablica 12 Primjer igre bez striktno podređenih strategija
Tablica 13 Strategije s pripadnim vjerojatnostima primjene
Tablica 14 Primjer igre u kojoj ne postoji ravnoteža čistih strategija
Tablica 15 Broj duela u dobro miješanoj populaciji (svaki agent igra sa svakim).
Tablica 16 Vjerojatnosti tranzicije
Tablica 17 Shematski prikaz jedne runde PD u sustavu „svaki-sa-svakim“
Tablica 18 Svojstva agenata.
Tablica 19 Kako Isplata ovisi o stanjima dviju varijabli *defect-now?* i *partner-defected?*
Tablica 20 Memorija TFT agenta se može realizirati uvođenjem uređene N-torke
Tablica 21 Mjere uspješnosti strategije ALLC
Tablica 22 Broj sudara u ovisnosti o veličini populacije
Tablica 23 Broj sudara u ovisnosti o veličini populacije uz stalnu gustoću agenata
Tablica 24 Vrijeme dostizanja izrabljivača u ovisnosti o memoriji i veličini populacije
Tablica 25 Vjerojatnost sretanja nepoznatog ALLD agenta u μ-tom susretu
Tablica 26 Vrste dijada, pripadne vjerojatnosti i očekivani broj dijada
Tablica 27 Broj susreta potreban za dostizanje ALLD

POPIS KRATICA

AI –Artificial Intelligence

AL –Artificial Life

ALLC –Always Cooperate

ALLD –Always Defect

DR –Direktni reciprocitet

EBH –Ecological Brain Hypothesis

ESS –Evolucijski stabilna strategija

ETI –Evolucijska teorija igara

GossipTFT –Gossip Tit-for-tat

GTFT –Generous Tit-for-tat

IPD –Iterated Prisoner's Dilemma

IR –Indirektni reciprocitet

MTI –Matematička teorija igara

OTFT –Oblivious Tit-for-tat

PD –Prisoner's Dilemma

PGG –Public Goods Game

SBH –Social Brain Hypothesis

TFT –Tit-for-tat

1 Uvod

Svijet današnje znanosti gotovo je nemoguće zamisliti bez uporabe *modela*. Bilo u fizičkom smislu (poput plastičnog modela molekula DNA), bilo u apstraktnom smislu (poput modela idealnog harmoničkog oscilatora) modeli su nezaobilazan alat znanosti i kao splet proširenih metafora, svakodnevni dio znanstvenog diskursa. Tako se u fizici govori o Bohrovom modelu atoma, u medicini o Kermackovom modelu širenja zaraze (tzv.S.I.R. model), a u ekonomiji o Cobb-Douglasovom modelu proizvodnje. U okviru matematičke teorije igara, sasvim općenito rečeno, *igra Zatvorenikove dileme* je matematički model konfliktne situacije između dviju ili više sebičnih jedinki. Može li se kompleksna stvarnost između suprotstavljenih subjekata vjerno opisati takvom analogijom posebno je pitanje. Odnos između (kompleksne) stvarnosti i (simplificiranog) modela izgleda otprilike kao odnos između Zemlje i globusa[2]. Odbacujući detalje poput Zemljinog reljefa, globusom omogućujemo elegantan prikaz relativnih odnosa između oceana i kopna iako smo svjesni da je Zemlja kvrgava i spljoštena i da kontinenti polako, ali sigurno putuju. Stvara li takav model pogrešnu predodžbu planeta? Zapravo i ne, jer u odnosu na Zemljin radijus, čak i Mt.Everest bi na kućnom globusu bio manji od jednog milimetra, a tektonska pomicanja su toliko spora da će svi današnji globusi biti korišteni još stotinama godina. S obzirom da svi modeli sadrže značajnu dozu pojednostavnjenja, često se nalaze na udaru kritika, međutim veliku većinu kritičara čine sami znanstvenici. Štoviše, moglo bi se reći da i sâm razvoj znanosti funkcionira kao serijsko donošenje, te potom odbacivanje ili proširivanje modela. Odbacivanje ili prihvaćanje modela vrši se na temelju empirije –ukoliko stanoviti model predviđa fenomene koje ne primjećujemo, sadrži neobjašnjivi paradoks ili daje numeričke podatke koji se kose s poznatim vrijednostima, on se odbacuje. Newtonova formula za izračunavanje gravitacijske sile ispravno je predviđala kretanje planeta, stoga je postala općeprihvaćena. Međutim, kasnije se pokazalo da ne može objasniti pomicanje Merkurovog perihela. Teorija je srušena i zamijenjena Einsteinovom općom teorijom relativnosti. Ipak, Newtonova jednadžba sasvim solidno funkcionira u velikoj većini slučajeva tj. na relativno velikoj udaljenosti od Sunca gdje gravitacija nije toliko snažna da bi izazvala tzv. relativističke efekte. S druge strane, Einsteinova teorija gravitacije, a osobito njen matematički okvir neprikladni su za izračunavanje trajektorija satelita koje šaljemo na Mars. Dakle, ispravan, ali kompliciran i nepraktičan model preopterećen detaljima i parametrima koji u kontekstu određenog znanstvenog pitanja nisu relevantni podjednako je neprikladan kao i previše pojednostavnjen model. Dobar model je, dakle, razborit kompromis između realizma i jednostavnosti [1].

[2] Čak i sama analogija između parova stvarnost-model i Zemlja-globus predstavlja svojevrsni model modela

Ipak, znanstvena pitanja često su u drugom planu, zasjenjena tehničkim i operativnim pitanjima na koja treba vrlo brzo reagirati kako bi se spasili ljudski životi i oprema. Umjesto *izgradnje* modela, u tu svrhu *izvode se* simulacije. Trening pilota primjerice uključuje umjetno stvorene uvjete koji oponašaju uvjete u aktivnom stanju zrakoplova koji leti 15.000 metara iznad tla. Uređaje koji stvaraju takve prilike (kakve inače rijetko nalazimo u prirodi i kakve susrećemo samo u određenim okolnostima), i koji nam omogućuju uzastopno testiranje manevarskih odluka (poput primjerice slijetanja s jednim ugašenim motorom) nazivamo *simulatorima*. Simulacije leta omogućuju nam da ispitamo ponašanje letjelica, a da ne riskiramo ljudske živote. Računalne video-simulacije letenja, medicinskih zahvata i ratnih operacija danas su toliko sofisticirane da ih je teško razlikovati od filmskih snimki stvarnih događaja. Ironija je možda u tome da je u cijelom procesu razvoja simulacija veću ulogu od znanosti igrala visoko profitabilna industrija video-igara. Zahvaljujući video-igrama, danas je teško *razlikovati* simulaciju od modela. Naime, u svijetu znanosti *model* je simplificirani, idealizirani reprezentant realnog sustava, a istodobno u informatičkom žargonu riječ *simulacija* praktički je sinonim za softver koji oponaša svijet (odnosno dio svijeta) čime simulacija ujedno postaje i *model* .

Budući da i *simulacija* i *model* na neki način oponašaju stvarnost, moglo bi se pomisliti da je *simulacijski model* pomalo nespretna i redundantna sintagma. U hrvatskoj literaturi simulacijski se model tretira kao podvrsta modela, pa tako razlikujemo konceptualne, matematičke i simulacijske modele [2]. Nasuprot tome, **B. Schweindman** i matematičke i poslovne i računalne modele svrstava u konceptualne modele koji se za razliku od fizičkih modela (poput maketa i globusa) nalaze u svijetu misaonih analogija. Iako ne koristi sintagmu simulacijski model, ipak on pravi distinkciju između simulacija i modela, te kaže da je simulacija *čin* korištenja računalnog modela. Prema njemu, računalni model je **produkt** oblikovanja, a simulacija aktivni **proces** korištenja računalnog modela [3]. Takav je pristup u suglasju s tekstom koji se može naći na Wikipediji: „The model represents the system itself, whereas the simulation represents its operation over time". Prema tome možemo zaključiti: *simulacijski model* je računalni model (određenog djelića stvarnosti) unutar kojeg se mogu promatrati procesi u vremenu.

Oblikovanje simulacijskih modela idealna je metoda za proučavanje sustava koji ovise o desetinama parametara i nad kojima bi bilo preskupo, presporo ili čak nemoguće izvoditi pokuse (primjerice simulacije raspršenja x-zračenja na međuzvjezdanoj prašini). Osim toga, postoji cijela paleta znanstvenih pitanja čije bi testiranje predstavljalo teško kršenje etičkih načela stoga su simulacijski modeli jedini način da se istraže opcije i odgovarajući ishodi (u tu skupinu mogli bismo ubrojiti i evolucijsku teoriju igara). Takve su simulacije ratnih operacija, ali i gotovo sve simulacije koje se tiču ponašanja ljudi, skupina ljudi i općenito ljudskog društva. Općenito rečeno, simulacije

su u društvenim znanostima prisutne od prvih računala. Naime, pioniri računalnih znanosti poput **John von Neumanna** istodobno su bili pioniri i u formalnom opisu društvenih znanosti, pa je već početkom 60-tih godina **Jay W.Forrester** koristio simulacije za predviđanje budućnosti tvrtki i gradova, a **Orcutt** za predviđanje ekonomskih kretanja u slučaju promjene poreznih zakona. Poznata je Abelson-Bernsteinova simulacija programirana sa svrhom kreiranja izborne kampanje i predviđanja ponašanja glasača. Svim tim ranim simulacijama bilo je zajedničko to što su pokušavale oponašati zamršene odnose između socio-ekonomskih procesa, pa se smatralo da su simulacije „zamjena za matematičke izvode“ [4]. U kasnijoj fazi, sedamdesetih i osamdesetih, simulacije su se počele smatrati jedinstvenim oruđem koje nam može dati potpuno novi uvid u stvarnost. Pojava celularnih automata pokazala je da u slučaju velikog broja jedinki (ćelija), vrlo jednostavni algoritmi mogu iznjedriti kompleksne i sasvim neočekivane rezultate [5]. **Thomas Ostrom** je računalne simulacije nazvao *trećim simboličkim sistemom*, uz jezik kao prvi simbolički sistem i matematiku kao drugi simbolički sistem. Sociolozima, psiholozima i ostalim znanstvenicima u društvenim područjima, simulacije omogućuju direktno prevođenje ideja iz prvog simboličkog u treći simbolički sustav [6], osobito otkad su dostupne programske platforme za višeagentne simulacije kao što su Swarm, NetLogo i RePast.

Višeagentni sustavi su, u suštini, računalni programi koji se sastoje od relativno samostalnih elemenata koji „žive svoj život“ unutar programa i koje upravo zbog te autonomnosti nazivamo agentima. Agenti imaju određeni broj *pravila* koja slijede i, tipično, određena *stanja* u kojima se mogu nalaziti. Kako vrijeme prolazi, agenti međudjeluju i mijenjaju stanja sukladno zadanim pravilima, ali usprkos prividnoj jednostavnosti algoritama, konačan ishod je, zbog velikog broja međusobnih interakcija najčešće nepredvidiv. Opravdanost primjene višeagentnih simulacija danas više nitko ne dovodi u pitanje, a optimizam glede primjene osobito je vidljiv iz **Brasselove** opservacije da „jedino višeagentni pristup može *pokriti* cijeli svijet budući da jedino takav pristup: (a) uključuje sve ostale znanstvene pristupe i (b) zadovoljava potrebu društvenih znanosti za modelima u kojima jedinke mogu razmjenjivati i interpretirati simboličke poruke potrebne za donošenje odluka.“ [4]

S praktičnog stajališta, simulacije se mogu podijeliti na one u kojima korisnik sudjeluje i na one u kojima je korisnik puki promatrač. S obzirom na svrhu, ovaj drugi tip simulacija možemo kategorizirati na simulacije dizajnirane radi: (1) donošenja operativnih odluka, (2) donošenja dizajnerskih ili inženjerskih rješenja, (3) testiranja modela ili hipoteze, (4) dobivanja dubljeg uvida u određenom području istraživanja [4]. Simulacije oblikovane u sklopu ovog doktorata, prvenstveno su izrađene sa svrhom koja je navedena pod točkom (4) –radi dobivanja dubljeg uvida u Zatvorenikovu dilemu i problematiku direktnog reciprociteta.

1.1 Struktura doktorske disertacije

Činjenica jest da Zatvorenikova dilema pripada matematici, ali je isto tako činjenica i da su znanstveni radovi koji se tiču Zatvorenikove dileme većim dijelom motivirani evolucijskom biologijom. Kad bismo apsolutnom laiku morali objasniti znanstveni značaj Zatvorenikove dileme zacijelo ne bismo mogli preskočiti velikog američkog biologa **Roberta Triversa** i njegovu teoriju recipročnog altruizma. Drugim riječima, kad bismo morali reducirati broj znanstvenih disciplina izravno uključenih u povijest Zatvorenikove dileme, od svih disciplina morali bismo zadržati minimalno dvije: matematiku i evolucijsku biologiju. Fuzijom matematike i evolucijske biologije nastala je evolucijska teorija igara. Upravo stoga sljedeće dvije cjeline (Glava 2 i Glava 3) ove doktorske disertacije obrađuju evolucijsku pozadinu suradnje i osnove matematičke teorije igara.

Druga glava kronološki i letimično opisuje razvoj znanstvenih ideja po pitanju altruizma i suradnje, od Darwinove teorije prirodne selekcije do Hamiltonovih i Triversovih radova. Ova glava ne ulazi u matematičke detalje i uglavnom se zadržava na kvalitativnom opisu. Opisani su osnovni mehanizmi suradnje, ali i znanstvene nedoumice koje su dovele do Axelrodovih turnira s kraja sedamdesetih godina i početka osamdesetih godina.

Treća glava daje detaljni uvid u teoriju igara, uz neizbježnu i rigoroznu matematiku koja je nužna kako bi se definirale relevantne veličine koje će kasnije poslužiti kao ulazni parametri simulacija. Bit će opisani odnosi između strategija, način izračunavanja očekivanih isplata i metode nalaženja dominantnih strategija. Već u početnim poglavljima pokazat će se da obostrana izdaja predstavlja ravnotežu između dva racionalna igrača (tzv.Nashova ravnoteža). U poglavlju 3.2.3 bit će dokazano da je Nashova ravnoteža ekvivalent tzv. evolucijski stabilnoj strategiji. Pokazat će se da je heterogena populacija životinjskih organizama ekvivalentna racionalnom igraču koji koristi tzv.miješanu strategiju. Ovdje treba naglasiti da postoji konceptualna razlika između matematičke teorije igara i *evolucijske teorije igara.* U potonjoj smatramo da igrači ne razmišljaju nego imaju *uprogramirane strategije* koje su nasljedili od roditelja. Neki su oblici ponašanja uspješniji (u smislu da će imati više potomaka), a neki manje uspješni. Pretpostavlja se da je značajan udio životinjskog ponašanja genetski uvjetovan, odnosno da genotip upravlja obrascima ponašanja koji se nazivaju *bihevioralnim fenotipom.* Svakoj strategiji, prema tome, pripada određena podobnost (fitnes) koja će odrediti broj potomaka sljedeće generacije. U tom smislu i „suradnik" i „izdajnik" su genetski uvjetovane kategorije.

Da je kojim slučajem ova disertacija pisana prije 1979.g. zacijelo bi nakon treće glave uslijedio Zaključak. Međutim, priča o Zatvorenikovoj dilemi kao da tek 1979.g. dobiva svoj *plot point one*, prvi preokret koji pokreće radnju, odnosno u ovom kontekstu – novo znanstveno područje istraživanja. Te godine američki politolog **Robert Axelrod** organizira računalni turnir

Zatvorenikove dileme na kojem se različite matematičke strategije bore svaka sa svakom i, na sveopće iznenađenje, otkriva da ipak postoji suradnička strategija koja može pobijediti sebične i izdajničke rivale. Radi se dakako o slavnoj strategiji tit-for-tat (TFT), eng.milo-za-drago koju je na turnir priložio **Anatol Rapaport**. Ono što nije uspjelo matematici, uspjelo je računalima, makar pod specijalnim uvjetima turnira. Novi zamah u istraživanju Zatvorenikove dileme potaknut Axelrodovim turnirom izazvao je cijeli niz analiza i računalnih simulacija, ali i etabliranje novog znanstvenog polja koje je prema Axelrodovoj knjizi prozvano *Evolucija suradnje*. Iz praktičnih razloga turnir je opisan u drugoj glavi disertacije kao prirodan produžetak Triversovih ideja, dok treća glava zaokružuje priču dajući matematičku pozadinu.

Četvrta glava objašnjava kako se može simulirati turnir. Zahvaljujući brzom razvoju računala i objektno-orijentiranih jezika, broj publikacija na području evolucije suradnje u neprestanom je porastu. Primjerice, samo u periodu od 2010. do 2012. bilo je objavljeno 15 tisuća publikacija na području istraživanja Zatvorenikove dileme [7]. S obzirom da se danas gotovo svako istraživanje na području evolucije suradnje temelji na višeagentnim simulacijama, četvrta glava ove disertacije posvećena je simulacijskom modeliranju. Kako se može simulirati IPD s deterministčkim strategijama, a kako IPD s reaktivnim strategijama, bit će u žarištu ove cjeline.

U petoj glavi disertacije bit će predstavljena istraživanja na originalnim simulacijskim modelima. Kao što i sâm naslov disertacije sugerira, istraživanja provedena tiču se simulacijskih eksperimenata provedenih na posebnom tipu agenata. Naime, većina dosadašnjih modela istražuje ponašanje agenata koji mogu upamtiti prethodne interakcije s proizvoljno mnogo rivala (u proizvoljno velikoj populaciji). Za razliku od takvih modela, ovdje predlažemo TFT agente koji imaju limitirani kapacitet memorije. Drugi dio ove cjeline posvećen je utjecaju prijenosa informacije. Uz „zaboravljive TFT“ agente dizajnirani su i TFT agenti koji mogu razmjenjivati informacije o izrabljivačima prisutnim u populaciji

Šesta glava posvećena je matematičkom opisu brzine kojom suradnici dostižu izrabljivače. Naime, tokom doktorskog studija bilo je nekoliko rasprava vezanih uz ovaj projekt, što na kvalifkacijskom ispitu što na doktorskoj radionici, a jedno od pitanja vezanih uz istraživanje bilo je i pitanje prof. Alena Lovrenčića u vezi metodologije – kako dokazati da vrijeme dostizanja zaista asimptotski raste s veličinom populacije. Radi ispitivanja hipoteze povećan je broj pokusa, a kao nusprodukt, otkriven je jedan drugi fenomen –kad se TFT agenti nasumično gibaju zapravo postižu bolje rezultate nego u slučaju turnirskog sustava „svaki-sa-svakim“. Ovaj fenomen je potvrđen empirijski, a pronađena je i egzaktna formula koja opisuje uspješnost strategije.

1.2 Definiranje problema

Iako se čini da je suradnja između jedinki svima u grupi korisna i općenito razumljiva sama po sebi, treba imati na umu da uvijek postoje jedinke koje primaju usluge, ali nikad ne uzvraćaju i time narušavaju stabilnost grupe. Taj se problem u ekonomiji naziva „problem slobodnih jahača" odnosno „problem izrabljivača", a izuzetno je bitan u biologiji jer vrste koje evolucijski nisu riješile taj problem ne mogu živjeti u grupi. Kako bi objasnili suradnju između jedinki koje nisu u rodbinskoj vezi, znanstvenici su u proteklih pola stoljeća predložili nekoliko mehanizama suradnje od kojih su najpoznatiji direktni i indirektni reciprocitet. Dok se direktni reciprocitet (DR) bazira na ideji „ja tebi – ti meni" [8], indirektni reciprocitet (IR) podrazumijeva da jedinka koja je primila uslugu ne uzvraća nego pomaže nekoj drugoj jedinki ili jednostavnije rečeno „ja tebi – ti nekom drugom" [9].

Da bi suradnja putem DR-a opstala, jedinke moraju imati sposobnost memoriranja i prepoznavanja, a upravo te sposobnosti ima općepoznata strategija TFT (*tit-for-tat eng. milo-za-drago*) koja pamti interakcije i promptno se osvećuje u slučaju izdaje. Od Axelrodovog turnira 1979. na kojem je TFT neočekivano pobijedila [10], u proteklih četrdesetak godina izvedeno je mnoštvo analiza i računalnih simulacija i općenito se smatra da je TFT jedina suradnička strategija koja može svladati izrabljivačku strategiju ALLD (*always defect eng. uvijek varaj*), pod uvjetom da postoji dovoljno duga „sjena budućnosti". Štoviše, smatra se da je prisutnost TFT nužna kako bi se u populaciji odstranili izrabljivači i kako bi se otvorio prostor za velikodušnije strategije [11].

Za razliku od direktnog reciprociteta koji je prilično dobro elaboriran i u kvalitativnom i u kvantitativnom smislu, mehanizam indirektnog reciprociteta još uvijek nije razjašnjen. Zašto se IR pojavljuje, nije posve jasno, ali uobičajeno se smatra da s povećanjem grupe pada vjerojatnost susreta i snaga DR-a [12] . Ako se jedinke rijetko susreću, u nedostatku vlastitog iskustva, mogu se osloniti jedino na primljenu informaciju o nečijem ponašanju. Jedan od mogućih načina da se realizira mehanizam IR-a jest stvaranje reputacije. Tehnički gledano reputacija je *informacija* o nečijoj velikodušnosti i može poslužiti kao mjera podobnosti. Ako pojedinac odbija pružiti pomoć, smanjuje mu se reputacija, a time i šanse za preživljavanje i reprodukciju. Da suradnja može opstati isključivo zahvaljujući reputaciji igrača dokazali su krajem devedesetih **Martin Nowak** i **Karl Sigmund** [13]. U njihovom, tzv. „image score" modelu, uopće nema opetovanih susreta, pa prema tome nema ni direktnog reciprociteta. Ipak, kasnije je utvrđeno da model funkcionira, ne samo uz odsustvo DR, nego *upravo zbog odsustva* DR [14]. Kad se pomiješaju DR i IR igrači ne mogu razlikovati opravdanu od neopravdane izdaje [15]. Drugim riječima, vidjeti kako određena jedinka *ne surađuje* s nekim ne može biti pouzdana smjernica za strategiju spram te jedinke [16]. Upravo

stoga, neki znanstvenici smatraju da se IR umjesto na snazi imidža mora temeljiti na tračanju iz vlastitog iskustva [17].

Razliku između direktnog i indirektnog reciprociteta jezgrovito je opisao **David Haig**: „Za direktni reciprocitet potrebno je lice, a za indirektni potrebno je ime.“ [12]. Ova dosjetka zapravo implicira da IR pretpostavlja postojanje jezika kojim pojedinci mogu tračati jedni druge. Neki znanstvenici poput **Robina Dunbara** smatraju da se jezik razvio upravo radi tračanja, odnosno radi prenošenja informacija o izrabljivačima. Prema tome neokorteks nije adaptacija (samo) na fizičku, nego prvenstveno na socijalnu okolinu. A da je mozak zaista baždaren na socijalnu okolinu, Dunbar je i dokazao utvrdivši da među primatima postoji korelacija između relativne veličine neokorteksa i veličine grupe jedinki [18]. Upravo ovo otkriće poslužit će nam kao temeljni empirijski oslonac da za premošćivanje jaza između DR i IR.

Dunbarova korelacija ukazuje na to da mehanizam DR-a ne funkcionira sam po sebi, neovisno o kognitivnom aparatu jedinki. Da bi reciprocitet bio uspostavljen, jedinka mora imati sposobnost prepoznavanja drugih jedinki i sposobnost memoriranja prethodnih interakcija. Iako je očigledno da u životinjskom svijetu nemaju sve jedinke jednake mentalne sposobnosti, u klasičnom modelu IPD, igrači koji koriste TFT-strategiju, nemaju nikakva memorijska ograničenja – oni pamte prethodne interakcije sa svim igračima u populaciji, neovisno o njihovom broju. Upravo stoga takav model ne može objasniti zašto neke životinjske vrste žive u manjim čoporima, a neke u većim. Ovdje se logično nameće pitanje: Kako bi se s izrabljivačima nosili TFT-igrači s ograničenim kapacitetom memorije? Pitanje je naizgled trivijalno jer „gluplji“ igrači ne mogu pamtiti interakcije s puno partnera, pa se čini da će oni uvijek biti u gorem položaju od „pametnijih“ igrača. Međutim, iz evolucijske perspektive, nijedna adaptacija nema apsolutnu vrijednost; posjedovati pamćenje može biti podjednako dobro kao i ne-posjedovati pamćenje, ovisno o kontekstu. Evolucijsko načelo je jednostavno: ono što je uspješno, u budućnosti će se pojavljivati češće. Prema tom načelu, bakterije su, iako „primitivne i glupe“, najuspješniji organizmi, jer ih ima najviše. Svaka nadgradnja i svaka kompleksnost organizma iziskuje povećanje energetskih troškova. Prema tome, veći memorijski kapacitet ujedno predstavlja i veće ulaganje (u smislu hrane/energije). Kako bi se model učinio realnijim, osim kapaciteta memorije, potrebno je ugraditi trošak energije koji ovisi o kapacitetu, odnosno potrebno je oduzeti udio energije od isplate igrača u Zatvorenikovoj dilemi.

1.3 Hipoteze i ciljevi

Kako se penjemo po evolucijskoj ljestvici, vrste žive u sve većim grupama. Ovdje treba naglasiti da se pod „grupom“ podrazumijeva populacija jedinki koje surađuju. Drugim riječima: populaciju koja se sastoji od izrabljivača ne smatramo grupom. Ako izuzmemo eusocijalne insekte kod kojih primarnu ulogu igra Hamiltonov mehanizam srodničke selekcije [10], stupanj suradnje kod većine organizama odgovara stupnju razvoja i složenosti živčanog sustava. Pripadnici životinjskih vrsta koje nisu uspjele (evolucijski) riješiti problem izrabljivača ne žive u grupama; primjerice žabe – niti zajednički love, niti surađuju na bilo koji način, osim eventualno prilikom parenja. Naprednije životinje žive u većim zajednicama; gorile žive u grupama od desetak jedinki, čimpanze žive u grupama od 30-40 jedinki. U nekom evolucijskom trenutku, prije 200.000 tisuća godina, došlo je do istovremene pojave jezika i ekspanzije grupe. Prema Dunbarovoj projekciji, prvobitne ljudske zajednice brojile su oko 150 jedinki (tzv. Dunbarov broj). Ljudi su, zahvaljujući jeziku, nadišli ovu brojku i stvorili države koje prelaze Dunbarov broj za faktor 10^6 . Neki znanstvenici smatraju da se ključ razumijevanja evolucije jezika krije upravo u evoluciji suradnje [12].

Pojava jezika (odnosno horizontalne transmisije informacija) definitivno predstavlja točku preokreta, ali postavlja se pitanje: koji su evolucijski pritisci doveli do stvaranja jezika? Predstavlja li upravo povećanje grupe taj evolucijski pritisak koji je doveo do pojave jezika? Ako je odgovor na to pitanje potvrdan, tada mehanizam DR mora ima neka intrinzična ograničenja. Naime, kad on ne bi imao takvih ograničenja, postojali bi primati koji ne govore, a žive u grupama od nekoliko tisuća članova. Takvi super-primati morali bi imati izrazito razvijeno pamćenje, a možda i ogromne glave. Ali, s obzirom da takvi super-primati (na Zemlji) ne postoje, za pretpostaviti je da postoji granična veličina grupe iznad koje DR ne funkcionira, i to upravo zbog troškova koje nosi velika memorija.

Cilj ovog istraživanja je razviti višeagentni simulacijski model koji će uzeti u obzir memorijska ograničenja igrača Zatvorenikove dileme, kao i troškove memorije, te detaljno ispitati **zašto i pod kojim uvjetima mehanizam direktnog reciprociteta kolabira i ustupa mjesto indirektnom reciprocitetu**. Ugrađivanje energetskog troška u agente moglo bi rezultirati time da veliki memorijski kapacitet postane nepotrebno breme u malim populacijama agenata. Prema tome, možda postoji optimum između malog kapaciteta/male cijene memorije i visokog kapaciteta/visoke cijene? Ukoliko stavimo da je cijena proporcionalna memoriji, hoće li optimalan memorijski kapacitet TFT igrača biti koreliran s veličinom grupe? Nadalje, bude li odgovor na to pitanje potvrdan, može li se veličina grupe širiti u nedogled? S obzirom na porast cijene pretpostavit ćemo da je odgovor negativan, odnosno da postoji granica do koje se grupa može povećavati. Ta razmišljanja moguće je sažeti u tri polazne hipoteze:

Hipoteza H1. Ako se suradnja u grupi ostvaruje isključivo putem direktnog reciprociteta, optimalna memorija agenta proporcionalna je veličini grupe.

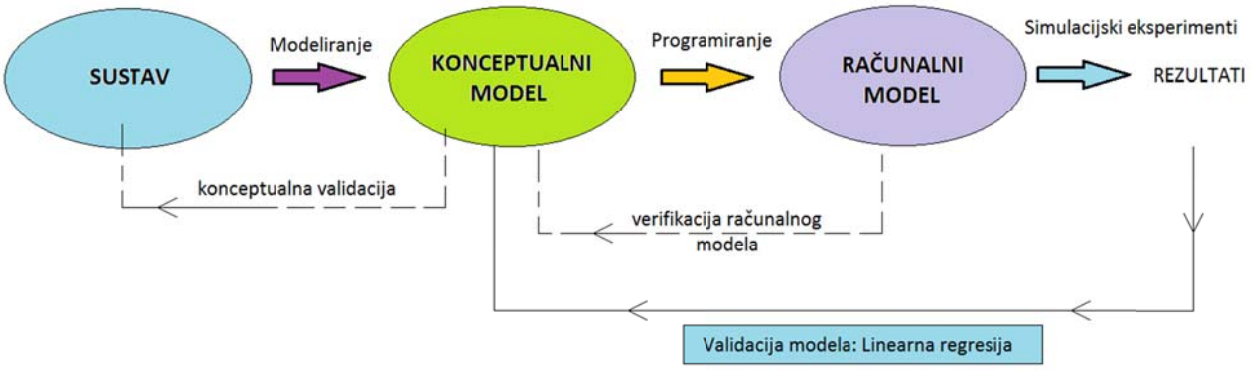
Hipoteza H2. Postoji granična veličina populacije iznad koje direktni reciprocitet nije dostatan za održanje suradnje između jedinki u populaciji.

Hipoteza H3. Iznad granične veličine populacije, suradnja između jedinki moguća je ukoliko postoji mehanizam horizontalnog širenja informacije kroz populaciju.

1.4 Nacrt istraživanja i metodologija

Metodologija korištena u ovom istraživanju slijedi opće preporuke za izradu simulacijskih modela koje je krajem šezdesetih formulirao **Geoffrey Gordon** [19]:

- Granica između promatranog sustava i okoline mora biti odabrana tako da model sustava obuhvaća samo fenomene od interesa (okolina sustava modelira se tako da se ne uključuju detalji i kauzalne veze među njima)
- model ne smije biti odveć složen, ali ni odveć jednostavan (mora obuhvaćati samo relevantne elementne sustava, ali ne smije ignorirati parametre nužne za adekvatan opis sustava)
- model je razumno rastaviti na više jednostavnijih modula
- poželjno je koristiti provjerene algoritme odnosno pouzdana softverska rješenja
- potrebna je provjera logičke ispravnosti, kako modela u cjelini, tako i njegovih pojedinačnih modula



Slika 1 Shematski prikaz odnosa između konceptualnog i računalnog modela

Na temelju prve dvije Gordonove preporuke izgrađen je konceptualni model koji je detaljno objašnjen u 4.poglavlju ove disertacije. Konceptualni model zatim je preveden u programski kôd sukladno dijagramu na sl.1. [19].

Nakon verifikacije računalnog modela osmišljen je, u skladu s teorijom planiranja simulacijskih eksperimenata [20] niz pokusa čiji su rezultati nakon provedbe podvrgnuti validaciji.

Za razliku od simulacijskih modela koji su izgrađeni na temelju dobro poznatih sustava, u mnogim istraživanjima (poput ovog) potrebno je simulirati sustave čije mehanizme ne razumijemo u potpunosti (tzv. *black box problem*). Također, broj variranih parametara (koji se u stvarnim eksperimentima nazivaju faktorima) u simulacijama najčešće daleko nadmašuju broj variranih faktora u stvarnim eksperimentima. Neki znanstvenici stoga smatraju da na području simulacijskih modela, opće smjernice DOE protokola (Design of Experiments) nije moguće slijediti. U takvim istraživanjima ne treba tražiti numeričke procjene utjecaja faktora –umjesto numeričkih vrijednosti bolje je tražiti tendencije [21]. U skladu s tim, isplanirani su pokusi čiji primarni cilj nije utvrditi valjane numeričke vrijednosti koje bi se mogle provjeriti u stvarnom svijetu, već utvrditi koji parametri utječu na mehanizam direktnog reciprociteta uvažavajući empirijske podatke. S obzirom da dosadašnji simulacijski modeli direktnog reciprociteta nisu uzimali u obzir memorijski kapacitet i zaboravljivost agenata, u fokusu istraživanja bit će relevantnost upravo tih faktora.

2 Evolucija suradnje i Axelrodovi turniri

Nesebično ponašanje predstavlja jednu od najvećih enigmi u prirodi. S jedne strane, živa bića su sebična i kompetitivna, ali s druge strane se žrtvuju, ne samo za svoje mlade, već i za članove čopora s kojima nisu u krvnom srodstvu. Dakle, opisivati prirodu (isključivo) kao arenu u kojoj se vodi nemilosrdna borba za opstanak, bilo bi, u najmanju ruku, manjkavo. Svijet prirode golema je priča o suradnji, pomaganju i žrtvi u ime kolektiva. Delfini pomažu ozlijeđenim drugovima da dođu na površinu vode kako bi udahnuli zrak, a pčele i mravi gotovo da i ne mare za vlastiti život kad je u pitanju opstanak košnice odnosno mravinjaka [22]. Na višoj organizacijskoj razini, suradnja je potpomognuta komunikacijom; čopor majmuna opstaje zahvaljujući "čuvarima" koji podižu uzbunu kad primjete grabežljivca u blizini, izlažući sebe opasnosti da upravo oni budu primjećeni i napadnuti. Ljudi su, zahvaljujući jeziku i pismu, postali vrhunski suradnici, krenuvši od lovačko-sakupljačkih zajednica do saveza država, pritom stvarajući grandioznu komunikacijsku mrežu koja danas pokriva cijeli planet.

Kad govorimo o suradnji, potrebno je razlikovati barem dvije klase ponašanja: u prvoj klasi je suradnja koja je trenutno isplativa i sama po sebi razumljiva- dva ribara zajedno izvlače mrežu iz vode jer obojica imaju trenutnu korist. U drugoj klasi je suradnja koja sadrži rizik: "Danas ja tebi dajem polovicu ulova, a jednog dana ti ćeš možda meni". Ovaj doktorski rad velikim je dijelom posvećen upravo toj, drugoj vrsti suradnje koju evolucijski psiholozi vole nazivati *recipročnim*

altruizmom. Filozofi osjetljivi na uporabu riječi kažu da recipročni altruizam nije "pravi altruizam", pa je upravo to mogući razlog što se u zadnjih dvadeset godina, umjesto o evoluciji nesebičnog ponašanja češće govori o *evoluciji suradnje*. Ipak, neovisno o terminologiji, neovisno o tome da li ćemo govoriti o nesebičnom ponašanju ili o suradnji s elementom rizika, ostaje pitanje: ako se jedinke zaista natječu, zašto neke jedinke iskazuju ponašanje koje im direktno šteti ili čak ugrožava život? Da bi se neko obilježje prenijelo u narednu generaciju, ono mora imati selekcijsku prednost za jedinku – mora doprinositi njegovim šansama za preživljavanje i reprodukciju. Iako se čini da je prednost recipročnog ponašanja očigledna, ovdje postoji rizik od izdaje: jedinka kojoj smo pružili uslugu, možda nam nikad neće uzvratiti. Kao što je spomenuto (u poglavlju 1.2) taj problem je poznat kao *problem izrabljivača*. Kad je izrabljivač gladan ili kada je u opasnosti, ostali članovi čopora mu priskaču u pomoć i plaćaju određenu cijenu za pomaganje. Izrabljivač uživa u tim uslugama, ali nikad ne plaća cijenu. Ako je neprepoznat, izrabljivač će biti uspješniji u preživljavanju i reprodukciji, pa će geni za izrabljivanje postati dominantni u genskom skupu. Na taj način, suradnja/altruizam u grupi nestaje [23]. Ipak, pomaganje drugima po cijenu vlastitog života vrlo je rašireno u životinjskom svijetu. Kako je onda evoluiralo takvo ponašanje?

U ovoj cjelini, izložit ću osnovne ideje koje su oblikovale današnji prevladavajući pogled na problematiku suradnje. Ukratko ću opisati pet osnovnih mehanizama suradnje, a zatim ću se fokusirati na Iteriranu zatvorenikovu dilemu (IPD) koja se smatra temeljnim osloncem Triversovog mehanizma direktnog reciprociteta. Važan dio ove cjeline čini računalni turnir koji je 1979. organizirao Robert Axelrod kako bi istražio koja strategija može prikupiti najviše bodova u IPD. Pokušat ću objasniti (na kvalitativnom nivou) kako i zašto se tako jednostavna strategija kao što je TFT našla u središtu pozornosti matematičara, biologa, filozofa i politologa. Zadnje poglavlje ove cjeline posvećeno je problematici grupnog načina života i faktorima koji utječu na veličinu grupe.

2.1 Mehanizmi suradnje

2.1.1 Grupni odabir

Pitanje suradnje mučilo je i velikog **Charlesa Darwina**, a iz nekih njegovih tekstova moglo bi se zaključiti da je vjerovao u sljedeće: skupina u kojoj postoje požrtvovni članovi ima prednost u odnosu na skupinu koja nema takve članove [24]. Takav mehanizam danas nazivamo *grupna selekcija*. Jedan od najgorljivijih zastupnika ove ideje bio je ruski biolog **Pjotr Kropotkin** koji je vjerovao da je međusobna pomoć temeljna značajka čoporativnih životinja i žestoko se protivio Huxleyevom opisu života kao „stalne borbe bez pravila" [22]. Međutim, grupna selekcija ima jedan

ozbiljan nedostatak (kojeg je Darwin bio svjestan): ako u grupi postoje požrtvovni pojedinci, oni će uvijek imati manje resursa i veću stopu smrtnosti od ostalih članova. Njihov broj će padati iz generacije u generaciju sve dok potpuno ne iščeznu, a s njima će iščeznuti i prednost koju je ta grupa imala. Sedamdesetih godina, ideja grupne selekcije bila je potpuno ismijana i odbačena, ali danas postoje znanstvenici koji je pokušavaju rehabilitirati.

2.1.2 Srodnički odabir

Odgovarajuće objašnjenje požrtvovnog ponašanja pčela i ostalih eusocijalnih insekata dao je **William Hamilton**, osamdeset godina nakon Darwinove smrti. Hamilton je jedan od prvih znanstvenika koji je shvatio da se selekcija ne događa na razini jedinke, nego na razini gena. Dakle, pravo pitanje nije „Koje ponašanje donosi prednost jedinki?“ nego „Koje ponašanje *genima* donosi prednost?“. Prema Hamiltonu, životinja je *oklop za gene*, a u interesu gena je da se prenesu u narednu generaciju bez obzira da li se oni nalazili u tijelu životinje ili njenog rođaka [25]. Prema tome, pomaganje vlastitom bratu znači pomaganje zajedničkim genima. Ovaj mehanizam uobičajeno se naziva *rodbinski odabir* (kin selection). Iako vrlo dobro objašnjava požrtvovnost pčela radilica koje se žrtvuju za maticu i njene ličinke, ovaj mehanizam ne može objasniti ostale oblike altruizma koje uočavamo u prirodi.

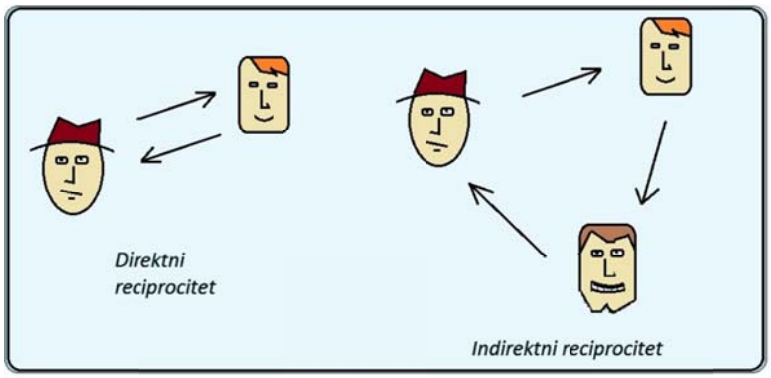
2.1.3 Direktni reciprocitet

Kritični udarac protivnicima Darwinove teorije zadao je **Robert Trivers** koji je objasnio pojavu *nesrodničkog* altruizma (među životinjama koje nisu u rodbinskoj vezi). Iako se jedinka žrtvuje u korist drugoga (npr. dijeli hranu s drugom jedinkom), ovakvo ponašanje je eventualno isplativo ako će druga jedinka uzvratiti uslugu. Takav mehanizam Trivers je nazvao *recipročni altruizam*, ali iz spomenutih razloga, danas se češće koristi sintagma *direktni reciprocitet*. Postoji mnogo evidentiranih primjera recipročnog ponašanja u prirodi, od čega je možda najšokantniji, ali i najedukativniji Frans de Waalov opis šišmiša krvosasa koji svojim “drugovima” daruju napola probavljenu krv: „Izgleda da u razmjeni hrane postoji *prijateljski sustav* , pri čemu dvije jedinke mogu iz noći u noć mijenjati uloge, ovisno o tome koja je imala više uspjeha u pribavljanju krvi. Budući da ne može izdržati bez hrane više od dvije noći za redom, za krvosasa je takav prijatelj životno pitanje“ [22]. Iz ovog primjera može se iščitati temeljna značajka recipročnog altruizma: jedinka umanjuje svoju vlastitu korist, računajući da će joj druga jedinka uzvratiti. Dakle, ne smatramo svaku suradnju recipročnim altruizmom. Kad čopor vukova zajedno opkoli plijen,

njihova međusobna suradnja je *trenutno isplativa.* Recipročni altruizam, s druge strane, ima izvjesnu cijenu prije nego donese korist [22]. Budući da uvijek postoji opasnost od izrabljivanja (da usluga neće biti uzvraćena), postavlja se pitanje: pod kojim uvjetima reciprocitet može opstati? Odgovor na to pitanje nudi nam analiza *Iterirane zatvorenikove dileme*.

2.1.4 Indirektni reciprocitet

Dok se direktni reciprocitet bazira na ideji „ti pomozi meni, pa ću ja tebi“, postoji i tzv. *indirektni reciprocitet* koji se može sažeti u frazu „ti pomozi meni, pa ću ja nekom drugom“ . Ovaj mehanizam suradnje funkcionira samo ako postoji način da članovi populacije saznaju da li je pojedinac pružio ili uskratio pomoć. Ako članovi populacije vide ili čuju da je određeni pojedinac bio velikodušan, tada se njemu povećavaju šanse da i sam dobije pomoć kad mu ustreba. Ovdje se radi o tipično ljudskom fenomenu koji nazivamo *ugled.* Ugled je zapravo *informacija* o nečijoj



Slika 2 Direktni i indirektni reciprocitet

velikodušnosti i može nam poslužiti kao mjera podobnosti. Ako je pojedinac odbio pružiti pomoć, on dobiva etiketu škrca, sebičnjaka i sl. pa se njemu smanjuje ugled, a time i šanse za preživljavanje i reprodukciju. Očigledno, ovaj mehanizam iziskuje razmjenu informaciju o „trećoj stranci“. Neki znanstvenici poput **Robina Dunbara** smatraju da se jezik razvio upravo radi prenošenja takvih informacija. Zahvaljujući jeziku ljudi mogu saznati u koga mogu imati povjerenja, tko je velikodušan, a tko izrabljivač. Prema tome jezik nije adaptacija na fizičku okolinu, nego na socijalnu okolinu, a njegova primarna funkcija je trač [23].

2.1.5 Prostorni odabir

Tradicionalni model u evolucijskoj teoriji igara pretpostavlja da su populacije miješane. To znači da svi igrači imaju jednaku vjerojatnost interakcije sa svima. Ali u stvarnosti, zbog

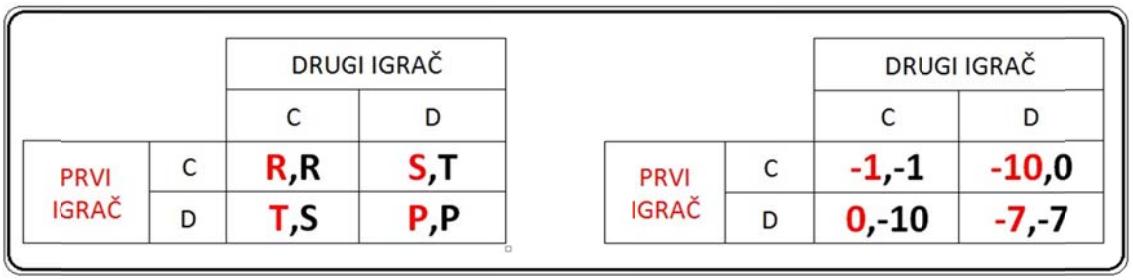
geografskih datosti, pojedinci ne mogu stupiti u interakciju sa svima. Ako su pojedinci prostorno razdvojeni, tada ne mogu izvlačiti korist iz međusobnih interakcija. Kroz određene simulacije na dvodimenzionalnim matricama, pokazalo se da širenje izrabljivača nije ekvivalentno širenju suradnika; suradnicima više odgovara grupiranje, a odmetnici bolje prolaze kada djeluju sami usred suradnika. Kad su gusto zbijeni, suradnici profitiraju od uzajamne pomoći. S druge strane, izrabljivači ne profitiraju kad su okruženi izrabljivačima. Stoga njihovo širenje kroz populaciju izgleda kao grananje tankih niti ili kao formiranje snježnih pahuljica [26]. U ovakvom modelu, čini se da suradnici bolje prolaze. To je također potvrđeno tzv. igrama na grafovima (*games on graphs*). Kad se teorija igara primjeni na teoriju grafova, tada tradicionalni model „dobro miješane populacije" znači da su svi čvorovi grafa (koji predstavljaju igrače) povezani sa svim ostalim čvorovima tj. radi se o tzv.*kompletnom grafu*. Ali u stvarnom svijetu, populacija nikad nije kompletni graf. Postavlja se pitanje, pod kojim uvjetima će evoluirati suradnja? Ispostavilo se da grafovi favoriziraju suradnju ako omjer dobivenog i uloženog (u interakciji između čvorova) nadilazi prosječan stupanj čvorova [27]. Drugim riječima, evolucija suradnje ne ovisi ni o srodstvu, ni o relativnoj frekvenciji strategija, ni o reputaciji, već samo o strukturi grafa.

Problem geometrije prostora sasvim neočekivano izniknut će prilikom simuliranja Zatvorenikove dileme u NetLogu u populaciji agenata koji se nasumično gibaju. Naime, mjerenje je pokazalo da u „brownovskoj" populaciji suradnici mogu dostići izrabljivače brže nego u slučaju „svaki-sa-svakim". Problem je elaboriran u šestoj glavi disertacije.

2.2 Zatvorenikova dilema – suradnja ili izdaja

Zatvorenikova dilema (Prisoner's Dilemma ili kraće PD) poznata je igra u kojoj dva igrača neovisno jedan o drugome moraju donijeti odluku: surađivati (C) ili izdati suigrača (D). Iako je svoju najveću primjenu doživjela u sklopu evolucijske biologije, autori igre **Flood** i **Dresher**, Zatvorenikovu dilemu osmislili su prvenstveno radi analize hladnoratovske politike šezdesetih godina. Naziv je dobila po slikovitoj situaciji u kojoj dva zatvorenika optuženih za provalu sjede odvojeno u svojim ćelijama, suočeni s dvije opcije – šutjeti ili progovoriti (i pritom izdati suučesnika). S obzirom da policija nema čvrstih dokaza, njihov iskaz je ključan kako bi bili osuđeni, a u slučaju da obojica šute, izlaze na slobodu nakon minimalno odslužene kazne za neki prijašnji, sitni prekršaj. Evidentno je da njihova međusobna suradnja tj. *omertá* donosi benefit obojici, međutim, problem je u tome što policija nudi najveću nagradu onome koji progovori i zločin prišije drugome. Takav ishod izrazito je nepovoljan za šutljivog suradnika koji preuzima na sebe sve „grijehe". Dakle, ukoliko donesu različite odluke, jedan od njih (izdajnik) maksimalno

profitira, dok drugi igrač (suradnik) stradava. Kako nemaju informacije o ponašanju svog suigrača, oni moraju odvagnuti sve potencijalne ishode.



		DRUGI IGRAČ	
		C	D
PRVI IGRAČ	C	R,R	S,T
	D	T,S	P,P

		DRUGI IGRAČ	
		C	D
PRVI IGRAČ	C	-1,-1	-10,0
	D	0,-10	-7,-7

Slika 3 Matrica isplate u igri Zatvorenikove dileme.

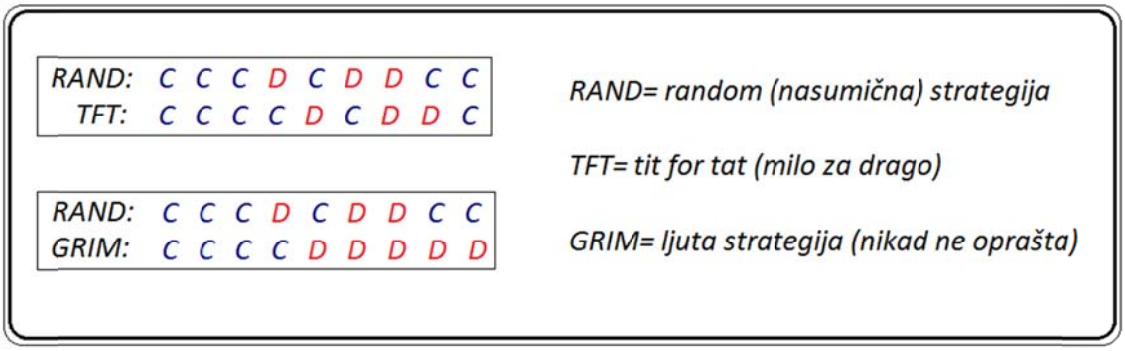
Ukoliko obojica šute prilikom ispitivanja, iz zatvora mogu izaći već nakon mjesec dana. Takav, za njih vrlo povoljan ishod uobičajeno se označava $(R, R) = (-1, -1)$ i naziva se „obostrana suradnja“. Ukoliko jedan drugog odluče izdati te obojica progovore, dobivaju svaki po sedam mjeseci $(P, P) = (-7, -7)$, a ukoliko donesu različite odluke, jedan od njih (izdajnik) je slobodan $(T = 0)$ dok drugi igrač (suradnik) završava u zatvoru na deset mjeseci $S = -10$. Tablica isplate nam pokazuje: ako je prvi igrač spreman na suradnju, te izabere prvi redak C (cooperate), riskira da umjesto u (R, R) završi u (S, T) što znači da dobiva maksimalnu zatvorsku kaznu od 10 mjeseci. Stoga on nužno dolazi do zaključka da je najpametnije izdati suigrača, odnosno izabrati drugi redak D (defect) jer je $T > R$, a $P > S$. S druge strane, njegov partner u zločinu, imajući u vidu raspoložive opcije, također bira izdaju (D), pa tako dilema završava obostranom izdajom i isplatom $(P, P) = (-7, -7)$. Obostrana izdaja nalazi se u tzv.*Nashovoj ravnoteži*, budući da promjenom strategije nijedan igrač ne može poboljšati svoju isplatu. Definicija i metode pronalaženja Nashove ravnoteže detaljno su objašnjene u poglavljima 3.1.5-3.1.10.

Treba primijetiti da za formiranje Zatvorenikove dileme nisu bitni apsolutni iznosi nagrada i kazni. Bitan je samo relativan odnos parametara. Igra s parametrima $-10 < -7 < -1 < 0$ ima potpuno isti epilog kao i igra s parametrima $-2 < 0 < 5 < 23$. U iteriranoj varijanti igre s različitim strategijama, može se pokazati da razlika između parametra utječe na dinamiku u akumulaciji bodova, ali ona ne mijenja suštinske odnose između strategija. Od početka osamdesetih do danas, najviše analiza izvršeno je na Zatvorenikovoj dilemi uz tzv.Axelrodove parametre, $0 < 1 < 3 < 5$, stoga će u svim našim simulacijama biti korištena upravo ta kombinacija.

Zanimljivost PD dakle leži u činjenici da je pametnije igrati „izdaju“ umjesto „suradnje“, iako suradnja donosi povoljnije isplate za obojicu. Ova naizgled paradoksalna (i za naše pljačkaše nesretna) činjenica potaknula je teoretičare da se udube u ovu neobičnu igru i da razmotre varijantu u kojoj igrači mogu igrati više puta zaredom.

2.2.1 Iterirana Zatvorenikova dilema i najpoznatije determinističke strategije

Na prvi pogled, evolucija se protivi suradnji, jer suradnja umanjuje isplatu, a time i podobnost, međutim, kad se igračima dozvoli da opetovano igraju, pomalo neočekivano otvaraju se vrata prema suradnji. Takva opetovana igra naziva se Iterirana zatvorenikova dilema (IPD) i, prema Nowakovim riječima, danas se smatra paradigmom za evoluciju suradnje između sebičnih jedinki [28]. Budući da se igrači u IPD više puta sreću, omogućeno im je da korigiraju svoje odluke zavisno od prethodno odigrane runde. Primjerice, igrač može kazniti partnera koji ga je u prethodnoj rundi izdao. Takva je npr. strategija "Milo-za-drago" („Tit for Tat", u daljnjem tekstu TFT) koja u prvom koraku bira suradnju, a zatim kopira suparničke poteze.



Slika 4 IPD između igrača RAND i igrača koji koriste strategije TFT i GRIM.

Strategije koje u prvom koraku surađuju, nazivamo *suradničkim strategijama*. Strategija koja igra isključivo suradnički, obično se označava sa ALLC („always cooperate"). Nasuprot njoj, ultimativno izdajnička strategija uvijek igra *izdaju* i nju ćemo označavati ALLD („always defect"). Takve strategije koje igraju po svom sistemu, neovisno o protivničkim potezima, nazivamo bezuvjetnima (*unconditional*).

Bezuvjetne strategije		**Kondicionalne (uvjetovane) strategije**	
ALLC	Always cooperate (uvijek surađuj)	**TFT**	Tit-for-tat (Milo-za-drago, kopiraj protivnikov potez iz prethodne igre)
ALLD	Always defect (uvijek izdaj)	**GRIM**	Igraj suradnički, a nakon doživljene izdaje zauvijek igraj izdaju.
ALT	Alternate (alterniraj suradnju i izdaju; DCDCDC…)	**WSLS**	Win-stay-Lose-shift (Kad izgubiš promijeni strategiju u suradnju i obratno)
RAND	Random(Nasumično biraj potez)	**GTFT**	Velikodušna Milo-za-drago (Kao TFT, ali u 30% slučajeva oprašta izdaju)

Tablica 1 Najpoznatije strategije u IPD

Tablica 2 Tok igre za prvih deset rundi između pet najpoznatijih strategija ALLD, ALLC, TFT, GRIM i ALT. Uz parametre 0<1<3<5, ukupna zarada koju strategija ALLD dobiva iznosi 108 bodova, dok TFT 94 boda, i GRIM dobiva 98 bodova.

													E
1	ALLD	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	10T	50
	ALLC	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10S	0
2	ALLD	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1·T+9P	14
	TFT	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1·S+9P	9
3	ALLD	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1·T+9P	14
	GRIM	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	1·S+9P	9
4	ALLD	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	5T+5P	30
	ALT	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	5P+5S	5
5	ALLC	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
	TFT	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
6	ALLC	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
	GRIM	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
7	ALLC	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	5S+5R	15
	ALT	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	5T+5R	40
8	TFT	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
	GRIM	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10R	30
9	TFT	C	D	C	D	C	D	C	D	C	D	5S+5T	25
	ALT	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	5T+5S	25
10	GRIM	C	D	D	D	D	D	D	D	D	D	S+5T+4P	29
	ALT	D	C	D	C	D	C	D	C	D	C	T+5S+4P	14

Trivers je u svom članku iz 1971.g. istaknuo da je odnos između dviju jedinki ekvivalentan odnosu koji imaju igrači u Iteriranoj zatvorenikovoj dilemi i ukratko je razmotrio neke matematičke uvjete za suradničko ponašanje, ali osim Rapaportovih eksperimenata nije imao dovoljno empirijskih materijala za daljnje zaključke [8]. Kasnije će se pokazati da mu je nedostajala računalna podrška. Tek s razvojem kompjutera moglo se u dovoljno kratkom vremenskom roku simulirati ponašanje jedinki u velikom broju opetovanih susreta. Ključan doprinos tom aspektu evolucije dao nam je Robert Axelrod sa svojim turnirom u iteriranoj igri Zatvorenikove dileme.

2.2.2 Axelrodov turnir

Da bi otkrio koja je najisplativija strategija u Iteriranoj zatvorenikovoj dilemi (IPD), poznati američki politolog Robert Axelrod je 1979.g. organizirao računalni turnir. Pozvao je najpoznatije matematičare, teoretičare igara, da prilože svoje strategije. Prijavilo se 14 strategija koje su igrale po principu svaki sa svakim (round-robin), ali i same sa sobom. Axelrod je k tome dodao jednu svoju i jednu nasumičnu strategiju (koja surađuje u 50% slučajeva). Na sveopće iznenađenje, pobijedila je strategija milo-za-drago (TFT). Iako sama po sebi nije najjača, pokazala se najisplativijom jer je uzela mnogo bodova od suradničkih strategija, a nije izgubila mnogo od izdajničkih strategija budući da ne dopušta izrabljivanje [10]. Spoznaja da jedna suradnička strategija može opstati i još k tome pobijediti u populaciji sebičnih jedinki, izazvala je veliko uzbuđenje u znanstvenoj zajednici, što je rezultiralo mnoštvom IPD turnira i matematičkih analiza.

Uspješnost strategije TFT počiva na nekoliko osobina, od kojih Axelrod izdvaja sljedeće:

1. Dobrodušnost (strategija TFT nikad ne vara prva)
2. Jednostavnost (drugi igrači je lako prepoznaju)
3. Opraštanje (s obzirom da TFT kopira protivnički potez, s njom je lako ponovo uspostaviti suradnju-dovoljno je odigrati suradnički i ona će uzvratiti suradnički)
4. Budnost (bez oklijevanja se osvećuje i time obeshrabruje suigrače da ponovo varaju) [29]

Međutim, četvrta vrlina ujedno je i slabost, pogotovo ako je s druge strane igrač koji se drži iste takve strategije ponašanja. Naravno, ova slabost se primjećuje tek ako jedan TFT igrač iz nekog razloga pomisli da ga je drugi TFT igrač izdao. Ali takva opcija je realna i treba imati na umu da u stvarnom životu uvijek postoji komunikacijski šum . Za razliku od Isusove strategije „okreni drugi obraz“ koja bezuvjetno oprašta, starozavjetna strategija „oko za oko“ vrlo često vodi u beskrajnu spiralu osvete, kakvu primjećujemo u pastoralnim društvima. Recimo, sicilijanska *vendeta* ili kosovska *besa*, ponekad traju stoljećima dok se klanovi tvrdoglavo osvećuju jedni drugima. Evo kako Axelrod komentira ovu karakteristiku strategije TFT: „Milo-za-drago ima i svoje strateške slabosti. Npr, ako drugi igrač jednom prevari, ona će obavezno uzvratiti prijevarom, pa ako drugi igrač uzvrati istim, rezultat će biti beskonačni eho naizmjeničnih prijevara. U tom smislu, strategija “milo za drago” ne oprašta dovoljno.“ [29]

2.2.3 Axelrodova sjena budućnosti

Treba nešto reći i o problemu konačnog odnosno beskonačnog broja iteracija. Na prvom Axelrodovom turniru igrao se fiksan broj rundi ($n = 200$). U kasnijoj analizi pokazalo se da bi TFT izgubila turnir od nekih podmuklijih strategija. Primjerice, čista strategija TFT može biti biti poražena od strategije koja igra TFT do predzadnje runde ($n - 1$), a u n-toj rundi igra izdaju [30]. Takva strategija bi pobijedila na turniru. Da bi izbjegao takve smicalice, na sljedećem turniru Axelrod je umjesto fiksnog broja rundi, uveo vjerojatnost odigravanja sljedeće runde $\omega < 1$. Uvođenje vjerojatnosti može nam se činiti čudnim, ali treba imati na umu: ako je unaprijed *poznat* broj interakcija među parovima jedinki, stalna će prevara uvijek biti evolucijski najstabilnija strategija i u stvari jedina koja postoji. To je zbog toga što je prevara u posljednjoj interakciji optimalna za obje strane, stoga je i prevara u pretposljednjem potezu optimalna, i tako dalje unatrag, sve do prve interakcije (tzv.*backward induction*) Međutim, u stvarnosti, u mnogim biološkim okolinama, iste jedinke mogu se sresti više od jednom, pa je uvođenje vjerojatnosti realističnija pretpostavka [29]. Kad govori o evoluciji suradnje u svijetu sebičnih jedinki, Axelrod zaključuje da je osnovni preduvjet „dovoljno duga sjena budućnosti“, odnosno dovoljno velika vjerojatnost ponovnog susreta [29] (izračun vjerojatnosti dan je u Prilogu A). Kad igrači znaju da postoji vjerojatnost ponovnog susreta tada je suradnja isplativija opcija od varanja. Poznata su primirja na

Zapadnoj fronti u Prvom svjetskom ratu gdje su vojnici bili primorani na beskrajnu rovovsku bitku. S vremenom, vojnici su prestali pucati jedni po drugima ili su demonstrirali ritualne kanonade u dogovoreno vrijeme. Većinu vremena mogli su slobodno šetati ničijom zemljom, razmjenjivati cigarete ili čak igrati nogomet s neprijateljskim vojnicima. Glumljeni napadi bili su organizirani kako bi zadovoljili svoje oficire, a vojnici su unaprijed znali točno vrijeme napada. Ovdje se radi o tipičnom slučaju suradnje između neprijateljskih vojnika kada vojnici znaju da će s istim neprijateljem biti suočeni jako dugo; u tom slučaju su motivirani na suradnju, a ne na sukobe jer i sami u budućnosti mogu očekivati isti postupak s druge strane [26]. U normalnim ratnim okolnostima, kad je omogućena mobilnost vojske, takva suradnja ne postoji jer vojne trupe ulaze u jednokratne sukobe, a ne u trajno sučeljavanje. U svijetu biznisa uočavamo sličan obrazac: prevare se događaju kad se ugovori bliže kraju i kad se zna da partneri više neće međusobno poslovati. Slično je i u ljubavnim odnosima: prilikom raskida braka, bračni partneri postaju skloni klevetama i lažima kako bi izvukli što više po pitanju raspodjele imovine ili skrbništva nad djecom.

2.2.4 Primjeri reciprociteta i kritika Triversove teorije

Jedno od obilježja grupnog načina života je stvaranje socijalnih veza (*social bonds*) između životinja. One se mogu stvarati između rođaka, između pripadnika istog spola, iste dobi ili istog ranga u hijerarhiji grupe. Socijalne se veze mogu uspostaviti kroz širok spektar aktivnosti specifičnih za pojedinu vrstu. Mnoge od tih aktivnosti podrazumijevaju reciprocitet: grljenje, međusobno dotjerivanje (*allopreening*), međusobno timarenje (*allogrooming*) i agonistička potpora [31].

Za razliku od *preeninga* koji je tipičan za sve ptice pri čemu jedinka sama čisti i namješta vlastito perje, allopreening je nešto rjeđa pojava i podrazumijeva situaciju u kojoj dvije ptice jedna drugu dotjeruju. Allogroming (ili *social grooming*) veoma je važna aktivnost u svih vrsta primata (ali ne samo primata) koja članovima zajednice zapravo oduzima većinu (slobodnog) vremena. Allogrooming podrazumijeva međusobno timarenje, lizanje i čišćenje krzna, i dokazano donosi zdravstveni benefit ne samo u vidu uništavanja parazita koji prenose zarazne bolesti već i u vidu smanjenja stresa i srčanog pulsa putem lučenja oksitocina i beta-endorfina [32; 33]. Poznato je da kod razvijenijih primata timarenje služi za rješavanje konfliktnih situacija i za mirenje posvađanih jedinki itd [34].

Agonistička potpora (*agonistic support* ili *mobbing*) predstavlja borbu protiv zajedničkog neprijatelja i obično opisuje situaciju kad plijen tjera grabežljivca. Napad na grabežljivca započinje jedna životinja, a njoj se potom pridružuje saveznik ili više njih. Takvo ponašanje primjećeno je kod vrana koje tjeraju orlove, kod babuna koji tjeraju leoparde itd. Zanimljivo je to da većina

istraživanja sugerira da agonistička potpora nije čin kojim se tjera predator kako bi zaštitila cijela skupina već individualni čin koji se izvodi kako bi se zaštitili oni koji će kasnije uzvratiti uslugu [35]. Dobar primjer je crnoglava muharica koja će tjerati grabežljivca od one muharice koja joj je pomogla u nekoj prijašnjoj situaciji [31].

Da ne ispadne sve u ružičastim tonovima valja reći da je Triversova teorija DR-a od samih početaka izložena kritikama. Ako zanemarimo napade iz redova filozofa i etičara, većina kritika odnosi se na navodno pomanjkanje empirijskih dokaza. Čak i primjer reciprociteta između Ribe-čistača (*Labroides dimidiates*) i Velikooke (*Priacanthus hamrur*) koje je sâm Trivers naveo u svom članku iz 1971. odbačen je od strane nekih znanstvenika. Prema Shultzineru odnos između Čistača i Velikooke nije primjer recipročnog altruizma već simbioze. Wilkinsonova studija vampirskih šišmiša također je dovedena pod upitnik s obzirom na metodologiju i relativno mali broj recipročnih odnosa između šišmiša koji nisu u rodbinskoj vezi [36]. Mnoge od ovih kontroverzi posljedica su nesporazuma u nekoliko kritičnih točaka teorijskog okvira DR-a. Među tim točkama Schino et al. (2010) navode (1) problem „vremenskog razmaka“ između davanja i uzvraćanja usluge, (2) problem kognitivnih preduvjeta (3) problem inkliniranja srodnicima (4) problem asimetričnosti [37]. Iznenađujuća je zapravo terminološka zbrka u ovom području. Primjerice, De Waal pravi distinkciju između mutualizma (simbioze) i DR na temelju vremenskog razmaka između davanja i uzvraćanja usluge. Mutualizam, prema njegovom mišljenju podrazumijeva istovremenu razmjenu usluga. S druge strane Bronstein pod mutualizmom smatra suradnju između *različitih vrsta*, dok pod recipročnim altruizmom podrazumijeva uzajamne interakcije unutar iste vrste. Prema nekim znanstvenicima koji staju u Triversovu obranu distinkcija između trenutačnog i zakašnjelog uzvraćanja je izvještačena i precijenjena [38]. Također nije jasno zašto se uzajamno pomaganje između *različitih vrsta* mora proglašavati simbiozom (mutualizmom), odnosno zašto se uopće mutualizam mora tretirati kao odvojeni fenomen. Axelrod u petom poglavlju svoje slavne knjige „Evolucija društvenosti“ kaže da se model Zatvorenikove dileme može primijeniti na dvije bakterije, kao i na dva primata, ali da nema nikakvog razloga da se ne primijeni na odnos između kolonije bakterija i primata (koji služi kao domaćin koloniji). Samo jedan paragraf niže osvrće se i na problem vremenskog razmaka i kaže „And while the model treats the choices as simultaneous, it would make little difference if they were treated as sequential” [39]. U fusnoti se poziva na Thomsonov članak iz 1980. Međutim, čini mi se da je u ovom kontekstu interesantnije empirijsko istraživanje iz 2006. gdje je utvrđeno da asimetrija ima negativan efekt na klasičnu Zatvorenikovu dilemu (sa simultanim donošenjem odluka). Takvom asimetričnom odnosu (u kojem parametri isplata nisu jednaki za oba igrača) pogoduje sekvencijalno donošenje odluka, štoviše suradnja se lakše uspostavlja ako slabiji igrač vuče prvi potez, a jači igrač odgovara na „ponudu“ [40].

2.3 Veličina zajednice

Život u grupi podrazumijeva mnoštvo kompromisa, stoga je predviđanje optimalne veličine grupe jedan od najtežih zadataka teorijske biologije. Na grupu utječu mnogobrojni čimbenici: hrana, okoliš, klimatski uvjeti, prisustvo predatora, bolesti, međusobne interakcije itd. Postavlja se pitanje koji faktori djeluju kao pritisak u smjeru udruživanja. Prednosti grupe su mnogostruke, prvenstveno po pitanju izbjegavanja predatora. Grupa pruža zaštitu, povećava budnost (tzv. *many-eye theory*) i zbunjuje grabežljivce, ali kad bi obrana od predatora bila jedini faktor koji utječe na socijalizaciju tada bi pripadnici onih vrsta koje nemaju dostojnih neprijatelja (jer su na vrhu hranidbene piramide) uvijek živjeli solitarnim načinom života (poput jaguara primjerice). Međutim poznata je činjenica da vukovi i afrički divlji psi čoporativno love krupniji plijen koji pojedinačno ne bi mogli uloviti. Istočnopacifički dupini (Stenella longirostris) zajedničkim snagama opkoljavaju jato riba te ga pritišću u gušću formaciju čime povećavaju vjerojatnost ulova. Dakle, postoje ekosustavi u kojima *pribavljanje hrane* (*foraging*) iziskuje suradnju između predatora. Životinjske vrste žive u različitim ekosustavima, te ih je nemoguće staviti pod isti nazivnik, ali većina biologa slaže se s tvrdnjom da su *razina predacije* i *količina hrane* dva temeljna ekološka faktora koja utječu na veličinu grupe i hoće li životinja uopće živjeti u grupi [35]. Neki znanstvenici kao treći faktor navode i pristup spolnim partnerima [31], ali u ovom ultra-kratkom pregledu ograničit ćemo se na: (1) obranu od predatora i (2) potragu za hranom. Oba faktora ili bolje rečeno ekološka pritiska mogu djelovati dvosmjerno- u smjeru samotnjačkog života ili u smjeru udruživanja. Drugim riječima život u grupi nosi cijenu i korist u oba aspekta, i po pitanju hrane i po pitanju predacije. Pribavljanje hrane je lakše i brže kad se zajednički lovi, ali izaziva trzavice i svađe prilikom podjele plijena. Slično je i s obranom od grabežljivaca; u većoj grupi lakše se sakriti, ali veća je grupa sama po sebi vidljivija grabežljivcima. Oblik i konačna veličina zajednice ovise o odnosu između cijene i koristi koju donosi udruživanje, a ovdje treba uračunati i unakrsne mogućnosti; prednost u obliku zaštite, a nedostatak u obliku hrane ili obrnuto. Dakle, pogrešno bi bilo promatrati samo jedan faktor neovisno o drugom jer dok s povećanjem grupe raste benefit u obliku zaštite, možda raste i cijena s obzirom da svaki član dobiva manji udio plijena. U tom slučaju javlja se iskušenje u obliku krađe ili prevare. S povećanjem grupe, općenito rečeno, povećava se vjerojatnost krađe hrane, mladunaca i partnera, ali i vjerojatnost zaraze parazitima. Stoga za svaku vrstu/populaciju možemo reći da ima gornji i donji limit, odnosno granice tolerancije unutar kojih se nalazi optimalna veličina grupe [31]. Ako veličina grupe padne ispod ili poraste iznad granica tolerancije, cijena života nadmašuje korist pa će se jedinke priključiti drugoj grupi ili će se prevelika grupa raspasti na dvije manje grupe.

Možda je trivijalna tvrdnja da je suradnja preduvjet socijalizacije, ali ona ipak ima određenu vrijednost jer stavlja naglasak na kognitivne sposobnosti organizama. Vanjski faktori su važni, utoliko što prisiljavaju (ili ne prisiljavaju) na suradnju. Neke životinjske vrste nađu se u izobilju hrane, u okolišu bez prirodnih neprijatelja, pa im je dozvoljeno da uživaju u komforu samotnjačkog načina života, dok na neke vrste vanjski faktori djeluju tako da one eventualno mogu preživjeti i proći kroz *usko grlo evolucije* jedino ako počnu surađivati. Možda se nešto slično desilo i s našim precima u dalekoj prošlosti. Zacijelo je bilo i onih vrsta koje su izumrle jer nisu znale surađivati. Naime, dokle god ekološki pritisci djeluju u smjeru suradnje, prirodna selekcija će dati zeleno svjetlo za opstanak samo onima koji imaju sposobnost nadvladati tzv. *socijalne dileme*.

2.3.1 Socijalne dileme

Iz perspektive ovog istraživanja osobito je zanimljiv utjecaj pojedinačnih odluka na sudbinu grupe. Tzv. *socijalne dileme* opisuju situacije u kojima se sebični interes jedinke sudara s interesima grupe [41] (a jedna od takvih dilema je i Zatvorenikova dilema). Ako svaki član uživa u plodovima zajedničkog rada, tada uvijek postoji iskušenje da pojedinac uloži manje truda od ostalih članova. Kad bi se svi članovi predali takvom iskušenju, plodova zajedničkog dobra uskoro ne bi bilo. Odnos između članova grupe ponekad se modelira pomoću *Igre javnog dobra* (*Public Goods Game*, PGG). U PGG-u svaki igrač daje određenu svotu u zajedničku blagajnu, a nakon što je novac prikupljen ukupna svota se množi s određenim faktorom (tipično između 1 i 2), te se potom dijeli na jednake dijelove. Idealan ishod igre postiže se kad svi članovi ulože maksimalan iznos, međutim, s vremenom neki igrači počinju ulagati manje svote jer na taj način povećavaju omjer dobivenog i uloženog. Kao i u Zatvorenikovoj dilemi, racionalan izbor je prevara odnosno ulaganje minimalnog ili nikakvog uloga. Problem je u tome što tada i svi ostali počinju ulagati manje, pa u konačnici nitko ne dobiva ništa. Takav ishod u engleskoj literaturi susrećemo pod nazivom *Tragedy of the commons.* Dramatičan i aktualan primjer takve zajedničke tragedije trenutačna je situacija s globalnim zatopljenjem. Za globalnu klimu najbolje bi bilo kad bi sve zemlje potpisale Kyoto protokol i prestrukturirale svoje industrije tako da emisije stakleničkih plinova budu što manje. Svaka država se, međutim, suočava s primamljivijom opcijom – „Pusti druge da potpišu i ulažu napor u prestrukturiranje, a ti nastavi s razvojem kao dosad.“ [42]. Budući da ova opcija svima stoji na raspolaganju jasno je da do povoljnog ishoda ne može doći. Svaka država htjela bi uživati u plodovima ekoloških napora, a da pritom sama ne mora uložiti novac. Rezultat je, nažalost, katastrofalan – emisije stakleničkih plinova se nastavljaju i globalne klimatske promjene postaju očigledan problem.

Svijet prirode nudi mnoštvo sličnih konflikata pojedinca i grupe, ali još uvijek ne razumijemo mehanizme putem kojih životinjske vrste održavaju svoje zajednice. U svjetlu ranije spomenutih faktora (hrane i predacije) zanimljiv je i za sad neobjašnjiv način na koji ptice održavaju *budnost* jata [35]. Kad se jato golubova nalazi na tlu, skupljajući hranu, ono je izloženo napadu jastreba. Ako neki golub uoči jastreba, on poleti, a odmah potom slijedi ga čitavo jato. Ako golub uoči jastreba dok je ovaj već relativno blizu, najvjerojatnije neće baš svi golubovi poletjeti na vrijeme i jastreb će jednog od njih ščepati. Međutim, poznato je da se jastrebov uspjeh značajno smanjuje kad napadne veće jato. Naime, svaki golub povremeno digne glavu i promatra uokolo tražeći potencijalnog napadača, pa se s povećanjem grupe značajno povećava vjerojatnost opažanja jastreba. Teoretski, ako je u svakom trenutku nekoliko glava u zraku, *budnost* jata je stopostotna, pa je jastrebu nemoguće da se približi. Međutim, ovdje opet postoji problem izrabljivača. Evolucijski gledano, ako postoji golub koji vara (nikad ne diže glavu) on će imati najviše vremena za skupljanje hrane. Dok drugi golubovi promatraju, on skuplja hranu – njemu raste fitnes i vjerojatnost širenja prevarantskih gena.

U ovoj disertaciji PGG neće biti posebno razmatrana, tim više što su PGG i PD u nekim aspektima matematički ekvivalentne igre. Prevladavanje socijalnih dilema kao što su PGG i PD moguće je jedino na dužoj vremenskoj skali pod uvjetom da se dilema ponavlja kao što je pokazano Axelrodovim turnirima. Strategije ponašanja koje imaju najviše šanse promovirati grupni način života sadrže elemente kažnjavanja. Kažnjavanje prevaranata pokazuje se ključnim začinom kako u PD tako i u PGG-u. Mnoge studije temeljene na metodama eksperimentalne psihologije, pokazale su da učesnici u PGG najmanje varaju kad se istovremeno primjenjuju i nagrada i kazna [43]. Dakle, nagrada sama po sebi nije dovoljan motiv dokle god je isplativije varati (što po definiciji dilemu i čini dilemom). U trećoj glavi disertacije detaljno su opisani pojmovi poput očekivane isplate i Nashove ravnoteže, a između ostalog pokazano je i kako PD zapravo proizlazi iz igre Hawk-Dove. Ako je cijena grabežljivosti dovoljno visoka, strategija povlačenja može koegzistirati, jer se grabežljivcima ne isplati međusobno konfrontirati. Međutim ako cijena grabežljivosti padne ispod kritične vrijednosti, tada igrači upadaju u dilemu iz koje nema izlaza dokle god su matematički parametri u tranzitivnom odnosu $S < P < R < T$. Povećanje nagrade R nema nikakvog utjecaja dokle god je ona uglavljena između P i T. Upravo zato je Nowak jedno od poglavlja svoje knjige Supercooperators duhovito nazvao „Prisoner of the dilemma“ umjesto „Prisoner's dilemma“. Vanjski faktori poput odnosa među parametrima isplate (koji uključuju podjelu plijena i sve troškove interakcije) određuju hoće li organizmi upasti u socijalnu dilemu (PD ili PGG) ili neki drugi matematički okvir, ali kad jednom upadnu u čelični stisak dileme tada

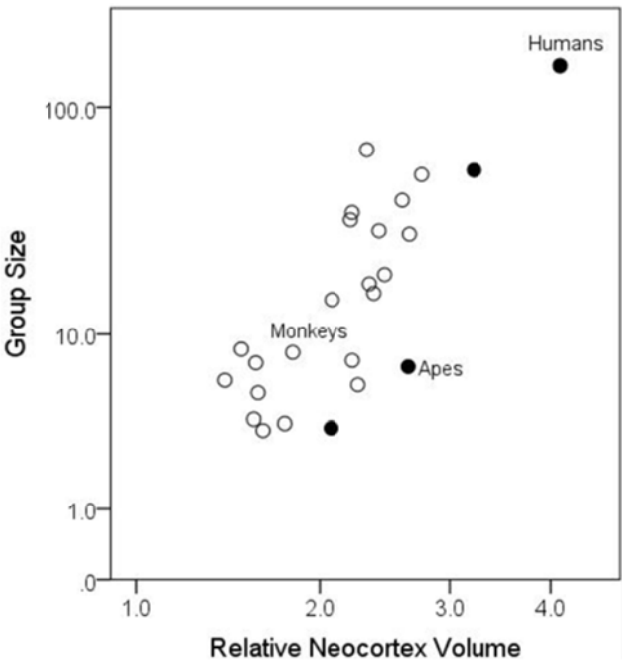
budućnost suradnje ovisi jedino o kažnjavanju prevaranata odnosno o kognitivnim sposobnostima suradnika da ih memoriraju i prepoznaju.

2.3.2 Dunbarova korelacija

Usporedo uz raspravu o evoluciji suradnje, krajem osamdesetih godina zahuktala se i rasprava o evoluciji mozga. Naime, u usporedbi s drugim kralježnjacima, primati imaju neobično veliki mozak u odnosu na ukupni volumen tijela. Ta „anomalija“ svoj vrhunac dostiže, naravno, s homo sapiensom. Iako ljudski mozak čini oko dva posto ukupne tjelesne težine, on troši čak petinu ukupnog unosa kalorija neovisno o tome bavimo li se teškim mentalnim zadacima ili spavamo [44]. Kako je i zašto naš mozak postao tako velik? S obzirom na ogromne energetske troškove, nije baš očigledno zašto bi evolucija išla u smjeru takve dramatične encefalizacije. Ustvrditi da nam mozak daje prednost, nije samo bahato, već i besadržajno budući da još uvijek ne znamo u čemu je zaista prednost takvog mozga. Vjerojatnost preživljavanja jednog, izdvojenog čovjeka u džungli vrlo je mala – čini se da su sve vrste bolje prilagođene prirodi od nas. Gledajući čovjeka izdvojeno, izvan kulture i društva, ljudski mozak je groteskna, skupocjena izraslina koja mehanički destabilizira posturu tijela i izaziva čitav niz psihičkih nuspojava poput anksioznosti i opsesivnih misli, a ima vrlo malu vrijednost kad se u divljini nađete oči u oči s predatorom.

U posljednjih nekoliko desetljeća, znanstvenici su iznijeli cijeli niz hipoteza o evoluciji mozga, ali najotpornija na kritiku pokazala se tzv. hipoteza o socijalnom mozgu (Social Brain Hypothesis, SBH). Njen glavni zagovornik, antropolog Robin Dunbar sa Sveučilišta Oxford, tvrdi da je evolucija ljudskog mozga tokom povijesti bila vođena sve složenijim društvenim odnosima u zajednicama hominida. Za razliku od hipoteze o ekološkom mozgu (EBH), koja kaže da je glavni evolucijski pritisak na mozak izvršila fizička okolina, SBH kaže da je najvažniji faktor u evoluciji mozga bila socijalna kompleksnost. Primati moraju posjedovati veliki mozak jer žive mnogo složenijim društvenim životom od svih drugih skupina životinja [45]. To ne znači nužno da žive u *većim* društvenim skupinama (svi znamo da mravi žive u mnogo većim skupinama), nego da zajednice primata imaju složeniju strukturu. Narativ o društvenom mozgu, u najkraćim crtama, kaže: Kako bismo mogli pratiti koji član grupe što (i s kim) radi, trebali smo sve veću procesorsku snagu koja je u stanju obraditi sve veću količinu podataka o spletkama i savezima suplemenika. Naravno, naši prošireni mozgovi bili su praktični i za druge aktivnosti, poput izrade alata i uvođenja raznovrsnih inovacija, ali većina znanstvenika, uključujući i Dunbara, uzima da se te dvije hipoteze međusobno ne isključuju.

Sâm Dunbar u Oxfordovoj istraživačkoj enciklopediji, priznaje da ekološki pritisak leži u pozadini svih objašnjenja za evoluciju mozga, uključujući hipotezu o socijalnom mozgu. Temeljne razlike između EB i SBH proizlaze iz odgovora na pitanja: (1) jesu li životinje rješavale svoje ekološke probleme individualnim učenjem ili su to činile društvenim naporima i (2) koji je od dva ekološka faktora (hranjenje ili izbjegavanje predatora) primarni evolucijski pokretač. Ono što hipotezu društvenog mozga čini *društvenom* jest tvrdnja da primati svoje ekološke probleme rješavaju tako što prvo rješavaju problem grupne kohezije i koordinacije. Taj redoslijed vjerojatno proizlazi iz činjenice da je, na ljestvici hitnosti, rizik od predacije prioritetan u odnosu na pronalaženje hrane. Primati, kao i većina drugih životinja, rješavaju problem predacije tako što žive u skupinama, ali za razliku od drugih vrsta razvijaju neobično složene saveze i dugotrajne socijalne veze. U stvari, primati rješavaju problem predacije neizravno stvaranjem koherentnih, stabilnih, koordiniranih društvenih skupina [46].



Slika 5 Korelacija između relativne veličine neokorteksa primata i veličine društvene skupine (Dunbar,1992)

Primarni dokaz u prilog hipotezi o društvenom mozgu dolazi iz činjenice da među primatima postoji korelacija između srednje veličine društvene skupine i više ili manje bilo koje standardne mjere moždane veličine, (Sl. 5) [18], iako se korelacija poboljšava kad se kao mjera uzme frontalni režanj [18; 47]. U ovome se primati razlikuju od gotovo svih drugih sisavaca i ptica; u većini ptica i malih sisavaca, veličina mozga nije korelirana s veličinom društvene grupe, već sa sustavom parenja [48]. Korelacije između veličine neokorteksa i veličine grupe, osim kod primata, nema kod drugih porodica životinja, ali ta činjenica ne ruši hipotezu o društvenom mozgu, nego baš naprotiv – čovjek pripada lozi primata, a upravo je veličina *ljudskog* mozga bila ta stršeća pojava zbog koje se cijela rasprava i povela.

Mnogo je kritika adresirano na Dunbarovu metodologiju i uopće na cijeli poduhvat da se kompleksno ponašanje dovede u korelaciju s pojedinim dijelovima mozga. Healy i Rowe izlistali su preko 50 sličnih istraživanja i „otkrivenih“ korelacija između pojedinih dijelova mozga i određenih bihevioralnih obrazaca [49]. Primjerice, otkrivena je antikorelacija između veličine mozga i migrantskih sklonosti ptica selica. Između svih tih istraživanja postoje velike razlike i u statističkoj

obradi podataka i u metodologiji (seciranje dehidriranog nasuprot smrznutom tkivu) i u načinu uzorkovanja (nije svejedno obuhvaća li uzorak i starije jedinke koje više nisu toliko mobilne i koje su s godinama promijenile ponašanje). Jedno od takvih „šlampavih“ istraživanja je i Dunbarovo kojem se između ostalog zamjera i vrlo nejasna sintagma *kompleksnog ponašanja* [49; 50].

Da stvar bude zanimljivija, Dunbar je ekstrapolacijom izvukao zaključak da je ljudski mozak „baždaren“ na 150 jedinki, odnosno da je prvobitna ljudska zajednica brojila oko 150 članova. Iako su današnje zajednice nemjerljivo veće i složenije, određena povijesna i antropološka istraživanja potvrdila su da *Dunbarov broj* nije samo dio pop-kulture već i tema vrijedna znanstvene pozornosti. Katastarski podaci pokazali su da se oko tog broja vrti broj stanovnika tipičnog sela srednjovjekovne Engleske i sl. Budući da prosječan čovjek može održavati prilično velik broj dugotrajnih odnosa (između 100 i 200), a ipak nije sa svima prisan, ti odnosi su raspoređeni hijerarhijski u tzv. Dunbarove slojeve koji podrazumijevaju: najbliže ljude, bliske prijatelje, prijatelje s kojima povremeno komuniciramo i stotinjak poznanika vanjskog prstena. Kumulativan broj ljudi u Dunbarovim slojevima, pripada geometrijskom nizu: 3-5, 9-15, 27-45, 81-135, kao što sugeriraju neka istraživanja [51]. Jenksovim algoritmom klasteriranja MacCarron i suradnici razbili su 6 milijardi telefonskih poziva na slojeve i utvrdili da većina ljudi ima 5 slojeva prijatelja (a ne 4) s prosječnim veličinama: 2.9, 7.4, 17.7, 43.0, 134.3 [52]. Kolika je teorijska i praktična vrijednost tih magičnih brojeva, pokazat će neka buduća istraživanja.

Na posljetku treba reći da se hipoteza o društvenom mozgu održala usprkos suviše simplificiranim (i pristranim) istraživanjima. Čak i u svom najgrubljem obliku, ona je vrlo značajna, gledajući iz perspektive evolucije suradnje. Kao što je već rečeno, izlaz iz socijalne dileme nije moguć bez mehanizma kažnjavanja, a takav mehanizam implicira memoriranje izrabljivača. Najjednostavniji primjer takvog ponašanja je strategija TFT koja pamti prethodni potez svih natjecatelja prisutnih na turniru. Evidentno je da kognitivne sposobnosti igrača (odnosno agenta koji personificira Dubarovo društveno biće) moraju rasti s veličinom društvene zajednice, a prvi kandidat među tim sposobnostima upravo je memorija.

3 Matematički temelji Zatvorenikove dileme

Učenje, posao, sport, kupoprodaja dionica – sve se u stanovitoj mjeri može promatrati kao *igra* i upravo ta široka primjenjivost je ono što teoriju igara čini primamljivom. Ipak, u fokusu disertacije, bit će primjena teorije igara na višeagentne simulacije s ciljem razumijevanja suradnje. Agenti u programiranim simulacijama su kompetitivni (nadmeću se za bodove), a s druge strane te iste bodove mogu podijeliti s ostalim agentima. Agent kojem je ponuđena suradnja možda će surađivati, a možda će uzvratiti izdajom te uzeti sve bodove za sebe. Najprikladniji i (barem do sad) najbolji matematički model konfliktne situacije između više agenata koji mogu, ali ne moraju surađivati, jest upravo igra Zatvorenikove dileme.

Kako bismo razumjeli uzroke i sve aspekte Zatvorenikove dileme neophodno je malo čvršće definirati pojmove te izgraditi matematički okvir; ne samo radi teorijskog razmatranja, već prvenstveno radi računalnog simuliranja dileme. S tom svrhom, u ovom su poglavlju izloženi osnovni pojmovi teorije igara, a radi lakše orijentacije, poglavlje je podijeljeno na klasičnu teoriju igara (poglavlje 3.1), evolucijsku teoriju igara (poglavlje 3.2) i teoriju igara u konačno velikim populacijama (poglavlje 3.3).

U prvom su poglavlju objašnjeni osnovni pojmovi teorije igara poput mješovite strategije i bimatrice isplate; definiran je najbolji odgovor na suparničku strategiju i objašnjena je metoda pronalaženja Nashove ravnoteže. Na samom kraju prvog dijela izložena je definicija Zatvorenikove dileme, odnosno objašnjeno je kakvi moraju biti parametri isplate da bi neku igru mogli smatrati Zatvorenikovom dilemom.

Drugi dio ove cjeline (poglavlje 3.2) proširuje teoriju igara i prilagođava je potrebama evolucijske biologije. Iako je takvo proširenje logično, s obzirom da teorija igara pruža idealan okvir za evolucijsku biologiju, ono nikako nije trivijalno. Na prvi pogled, igru igraju individualni organizmi (jer oni de facto ulaze u interakcije s drugim organizmima), ali stvarni igrači zapravo su genetski determinirane strategije. Organizmi se bore (i pritom skupljaju bodove), ali oni su samo egzekutori pozadinskog programa koji je genetski naslijeđen od roditelja. Ispoljavanje naslijeđenih svojstava manifestira se u vidu strategije, te stoga u evolucijskoj teoriji igara pojmovi *genotip*, *fenotip* i *strategija* postaju sinonimi. U okviru ETI iščezava i semantička razlika između fitnesa i isplate (barem kad je u pitanju tzv. *jaka selekcija*). Naime, ostvarena dobit manifestira se odgovarajućim brojem potomaka, stoga se isplata može smatrati fitnesom. Veliki dio ovog poglavlja posvećen je suptilnoj razlici između miješane populacije i mješovite strategije u uniformoj populaciji. Naime, pokušavajući utvrditi koji fenotip će prevladati u promatranoj populaciji, Maynard Smith i Price shvatili su da miješanu populaciju sastavljenu od više varijacija fenotipa

možemo tretirati kao mješovitu strategiju. Drugim riječima, prosječna očekivana isplata igrača u miješanoj populaciji jednaka je očekivanoj isplati igrača u klasičnoj igri između dva igrača ako suigrač koristi mješovitu strategiju. Ova tvrdnja potkrijepljena je matematičkim dokazom (potpoglavlju 3.2.2). Potom, nešto dalje u tekstu, izložen je koncept evolucijski stabilne strategije (potpoglavlje 3.2.3) koja se u ETI koristi kao supstitucija za Nashovu ravnotežu. U potpoglavlju 3.2.7, Zatvorenikova dilema je stavljena u kontekst evolucijske biologije, te je matematički dokazano da evolucija preferira izdajničku strategiju ponašanja. Zadnja tri potpoglavlja posvećena su Iteriranoj zatvorenikovoj dilemi.

Poglavlje 3.3. obrađuje evolucijsku dinamiku u konačno velikim populacijama. Naime, elegantne jednadžbe i rezultati teorije igara velikim dijelom proizlaze iz pretpostavke da se igra odvija u jako velikim populacijama pa se često uzima da $N \to \infty$. Proteklih godina napravljen je veliki teorijski pomak, zahvaljujući Fudenbergu i Nowaku, te je evolucija suradnje stavljena u okvir tzv.Moranovog procesa.

3.1 Matematička teorija igara

Teorija igara je matematička teorija koja se bavi interakcijama između pojedinaca u određenim (konfliktnim) situacijama. Skup pojedinaca, njihovih interakcija i ciljeva mogli bi nazvati *igrom*. Apstrahirani, kvantitativni opis situacije, općenito rečeno, nazivamo matematički model, pa bi se alternativno moglo reći da je *igra* u MTI zapravo matematički model koji opisuje konflikt između subjekata, što bi bila podjednako dobra definicija [30]. Veliki dio ovog polja matematike posvećen je pokušajima da se odgovori na pitanje – koji je najbolji potez u danoj situaciji? Teškoća ovog pitanja proizlazi iz činjenice da zapravo ne postoji *najbolji* potez u apsolutnom smislu te riječi. Svaki pojedinac ima određeni izbor, ali konačan ishod ne ovisi samo o njegovim odlukama, već i o odlukama svih igrača koji su uključeni u igru, što će posljedično utjecati i na zaradu svakog pojedinca. Činjenica da najbolji mogući potez u danom trenutku ovisi i o potezima svih ostalih igrača upravo je ono što teoriju igara razlikuje od optimizacijske teorije [30].

3.1.1 Suigrači, potezi i strategije

Iako se ponekad, u svakodnevnom životu, riječ *suigrač* koristi kao sinonim za partnera s kojim nismo u konfliktu, već naprotiv, za nekoga s kim zajedno u tandemu igramo protiv treće osobe, u ovom tekstu suigrač će biti sinonim za protivnika. Tako će se naizmjenice koristiti nazivi: suigrač, drugi igrač, protivnik, suparnik i rival, a sve u značenju pojedinca (ili jedinke) s kojim je prvi igrač u konfliktu. Tokom svake igre pojavljuju se momenti u kojima igrač mora donijeti

određenu odluku, a donešene odluke čine ono što u MTI nazivamo povučenim *potezima. Potez* je pojam koji treba razlikovati od pojma *strategije*. Potez je akcija koju igrač sprovodi u nekom trenutku tokom igre kao što je u šahu, primjerice, pomicanje crnog konja s polja B8 na polje C6. S druge strane, *strategija* je potpuni algoritam za igranje igre, koji eksplicitno ili implicitno (nekim pravilom) definira sve poteze i kontra-poteze za svaku moguću situaciju tokom igre. Dok se strategija može definirati kao unaprijed određen skup poteza za sva moguća stanja igre, malo je teže razlikovati *čistu* od *mješovite* strategije. Već u vrlo jednostavnim igrama poput Kamen-škare-papir distinkcija između čiste i mješovite strategije nije posve jasna i zapravo ovisi o broju zadanih rundi i o (biološkim) značajkama igrača. Ako igrači nemaju pamćenje i ako se igra iterirana varijanta igre, tada čistom strategijom možemo smatrati uporno igranje poteza „škare" ili konstantno igranje poteza „kamen", dok bi *mješovita strategija* bila recimo nasumično igranje „škare" i „kamen" u određenom omjeru frekvencija. Međutim, ako igrači imaju pamćenje tada promjena iz poteza „škare" u potez „kamen" može biti unaprijed definirana pravilom koje se tiče ishoda u prethodnoj rundi pa takvu promjenu ne možemo smatrati skokom iz jedne čiste strategije u drugu, već je ona čista sama po sebi. Čista strategija, dakle, mora pružati kompletan opis načina na koji igrač igra partiju bez a priori nasumičnosti. Ona definira odluku za svaki mogući potez suigrača. Skup svih čistih strategija koje su dostupne igraču nazivamo *prostorom strategija.*

Mješovita strategija podrazumijeva slučajan izbor iz skupa raspoloživih strategija prema nekoj distribuciji vjerojatnosti. Umjesto da koristi jednu određenu čistu strategiju, igrač slučajnim izborom koristi neku od čistih strategija S_i. Naravno, svaka čista strategija S_i može se smatrati mješovitom strategijom kod koje je ta čista strategija S_i izabrana s vjerojatnošću $p_i = 1$, a svaka druga strategija S_j $(j \neq i)$ s vjerojatnošću $p_j = 0$. Stoga se definira i *potpuno mješovita strategija* kao mješovita strategija kod koje je svakoj čistoj strategiji dodijeljena strogo pozitivna vjerojatnost, odnosno nijednoj čistoj strategiji nije dodijeljena vjerojatnost nula ($p_i \neq 0, \forall\, i$). Strogo matematički rečeno, ako postoji konačno velik prostor strategija $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ tada se *mješovita strategija* može definirati kao vektor vjerojatnosti $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ gdje je p_i vjerojatnost da će igrač izabrati strategiju S_i. Primjerice, u igri Kamen-škare-papir igrač može odlučiti da će u pedeset posto poteza igrati „kamen", u pedeset posto „škare", a nikad „papir", pa ćemo njegovu strategiju predstaviti vektorom $\vec{p} = (1/2, 1/2, 0)$ odnosno jednoretčanom matricom $\mathbf{p} = [0.5\ 0.5\ 0]$. Ako čiste strategije predstavimo vektorima baze $[1,0,0,\dots], [0,1,0,\dots], [0,0,1,\dots]$ tada svaku mješovitu strategiju možemo prikazati kao linearnu kombinaciju u $\mathbb{R}^n$ prostoru

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i S_i . \tag{3.1}$$

3.1.2 Bimatrica isplate i normalna forma igre

Općenito rečeno, postoje igre u kojima je broj igrača proizvoljno velik, ali radi jednostavnosti analize najčešće se uzimaju primjeri s dva igrača. U tom slučaju, zarada igrača prikazuje se tzv. bimatricom. Pretpostavimo da prvi igrač ima na raspolaganju n čistih strategija iz prostora strategija $\boldsymbol{S}$, a drugi ima na raspolaganju m čistih strategija iz prostora $\boldsymbol{T}$. Ukoliko prvi igrač koristi strategiju $S_i \in \boldsymbol{S}$, a drugi igrač $T_j \in \boldsymbol{T}$ tada prvi grač dobiva isplatu a_{ij} dok drugi igrač dobiva b_{ij}. S obzirom da ukupno postoji $n \times m$ kombinacija korištenih strategija, zarada se može prikazati sljedećom bimatricom:

$$H = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1m}, b_{1m}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2m}, b_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \cdots & (a_{nm}, b_{nm}) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Ovakva prezentacija igre naziva se *normalna forma*. Drugim riječima, ukoliko poznajemo prostor raspoloživih strategija prvog igrača ($\boldsymbol{S}$) i prostor strategija drugog igrača ($\boldsymbol{T}$), te odgovarajuće isplate $h_1(S,T)$ i $h_2(T,S)$ možemo reći da je igra u potpunosti definirana. Jezgrovito zapisano, u normalnoj formi, igra je definirana na sljedeći način:

$$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}\,;\, h_1(S,T), h_2(T,S)\}.$$

Prema tome, normalna forma igre je forma koja specificira: (1) igrače, (2) strategije dostupne igračima i (3) isplate s obzirom na moguće kombinacije strategija [53].

Ilustracije radi, pretpostavimo da u nekoj borilačkoj video-igri prvi igrač ima dvije mogućnosti na raspolaganju, desni kroše (S_1) i saginjanje (S_2), dok drugi ima desni kroše (T_1), saginjanje (T_2) i aperkat (T_3). Kroše donosi dva boda, aperkat tri boda. Svaki primljeni udarac oduzima jedan bod. Što znači ako obojica upute desni kroše istovremeno, obojica dobivaju dva boda i gube jedan bod, što donosi netto dobit $a_{11} = b_{11} = 2 - 1 = 1$. U slučaju protivničkog krošea, saginjanje donosi dva boda jer protivnika izbacuje iz ravnoteže ($a_{21} = 2, b_{21} = 0$), ali saginjanje kod aperkata ne pomaže, udarac se ne može izbjeći ($a_{23} = -1, b_{23} = 3$), a protivniku daje tri boda. Uz pretpostavku istovremenih akcija, bimatrica isplate mogla bi izgledati ovako:

$$H = \begin{bmatrix} (1,1) & (0,2) & (1,2) \\ (2,0) & (0,0) & (-1,3) \end{bmatrix}$$

Ekvivalentna zadanoj bimatrici bila bi sljedeća tablica:

	Drugi igrač			
Prvi igrač		*kroše*	*saginjanje*	*aperkat*
	kroše	1,1	0,2	1,2
	saginjanje	2,0	0,0	$-1,3$

Tablica 3 Primjer bimatrice

Potrebno je napomenuti da, iako formalno gledano matrica i bimatrica nisu iste matematičke strukture, u žargonu, a i u literaturi MTI općenito prevladava naziv *matrica isplate* kao da su u pitanju sinonimi. Takvu terminologiju lako je opravdati lingvistički s obzirom da bimatricu možemo smatrati matricom čiji elementi su uređeni parovi, a ispuštanje prefiksa „bi-“ osobito ima smisla kad su u pitanju simetrične igre budući da matrica implicira izgled bimatrice i obrnuto.
Simetrične igre tj. igre simetričnih isplata su igre u kojima vrijedi $a_{ij} = b_{ji}$, odnosno igre u kojima prilikom zamjene strategija između igrača i suigrača dolazi do zamjene isplata. Da bi takva igra bila moguća, nužno je da igrači koriste *isti* prostor strategija.

3.1.3 Matrica isplate u simetričnoj igri

Pretpostavimo da oba igrača imaju na raspolaganju n čistih strategija iz *istog* prostora strategija. U tom slučaju zarada se može prikazati sljedećom $n \times n$ bimatricom:

$$H = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \cdots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & (a_{n2}, b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}, b_{nn}) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Takva igra je npr. Kamen-škare-papir u kojoj svaki igrač ima na raspolaganju tri iste strategije. Strategija „kamen“ pobjeđuje „ škare“, „škare“ pobjeđuju strategiju „papir“, a „papir“ pobjeđuje „kamen“ (ne ulazeći u smisao ove zadnje premise). U svakoj rundi igrač može pobijediti uz isplatu $a = 1$, može izgubiti pri čemu je $a = -1$ ili izvući remi tako da je $a = 0,\ b = 0$ (u slučaju da obojica igraju istu strategiju npr. „kamen“). Ovako postavljena igra daje nam devet isplatnih parova definiranih bimatricom 3×3.

$$H = \begin{bmatrix} (0,0) & (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (0,0) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) & (0,0) \end{bmatrix}$$

Važno je primijetiti – svejedno je kojeg ćemo igrača imenovati igračem br.1 ili igračem br.2, odnosno ako igrač i suigrač međusobno zamjene strategije $i \leftrightarrow j$, dolazi do zamjene njihovih isplata, ali bimatrica ostaje potpuno ista. S obzirom da vrijedi $b_{ij} = a_{ji}$ dovoljna je zapravo jedna klasična matrica koja automatski definira isplate za oba igrača. Ako prvi grač dobiva isplatu a_{ij}, drugi dobiva $b_{ij} = a_{ji}$. Bez gubitka općenitosti, može se reći da onaj igrač koji koristi strategiju S_k pri čemu suigrač koristi S_l, dobiva isplatu h_{kl} definiranu matricom:

$$H = (h_{kl}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je igra simetrična, to *ne znači* da je matrica isplate simetrična. Igra može biti simetrična i kad je matrica isplate, primjerice

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bitno je razumjeti da simetrična igra podrazumijeva ravnopravnost igrača; igrači na raspolaganju imaju jednaka strateška oružja i jednaki tretman po pitanju isplata. Iz dane matrice H slijedi da drugi igrač dobiva 2 boda u slučaju kad prvi igrač dobiva 5 bodova i obrnuto. Prema tome, iz zadane matrice H, slijedi da bimatrična tablica isplata izgleda ovako:

	Drugi igrač		
Prvi igrač		S_1	S_2
	S_1	1,1	5,2
	S_2	2,5	0,0

Tablica 4 Primjer bimatrice u simetričnoj igri

3.1.4 Isplata u slučaju mješovite strategije

U ponavljajućim igrama gdje se ne mijenja matrična struktura igre igrač može koristiti tzv. *mješovitu strategiju*, što znači da ponekad primjenjuje jednu čistu strategiju, a ponekad drugu čistu

strategiju, svaku s određenom vjerojatnošću odabira. Sukladno tome postoje različite isplate s odgovarajućim vjerojatnostima dobitka. Budući da ne znamo unaprijed koju će *stvarnu isplatu* igrač dobiti, govorimo o tzv. *očekivanoj isplati.*

Očekivana isplata je statistička veličina koji ovisi o teorijskoj distribuciji ishoda. Ako primjerice bacamo kocku i svaki put dobijemo količinu novaca sukladno ishodu kocke, naša stvarna isplata bi u 100 bacanja mogla biti 600kn (pod uvjetom da svaki put dobijemo šesticu). Međutim, teorija vjerojatnosti nam kaže da ćemo od 100 bacanja, u približno $100/6 \approx 17$ bacanja dobiti šesticu, u 17 bacanja peticu itd. Dakle, ako je kocka simetrična, vjerojatnost svakog ishoda je $p = 1/6$. Prema tome očekivana isplata u 100 bacanja je:

$$E_{100} = \frac{100}{6} \cdot 1 + \frac{100}{6} \cdot 2 + \frac{100}{6} \cdot 3 + \frac{100}{6} \cdot 4 + \frac{100}{6} \cdot 5 + \frac{100}{6} \cdot 6 = 350,$$

odnosno, očekivana isplata u jednom bacanju:

$$E_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

Ako imamo n ishoda s različitim vjerojatnostima $(p_1, p_{2,\dots} p_n)$ i ako su odgovarajuće isplate za svaki od tih ishoda $h_1, h_2, \dots, h_n$ tada očekivanu isplatu možemo predstaviti sumom

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i \, h_i, \tag{3.4}$$

ili umnoškom vektora vjerojatnosti i vektora isplate

$$E = [p_1 \; p_2 \dots p_n] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Međutim u MTI isplata ovisi i o strategiji drugog igrača. Ako prvi igrač igra mješovitu strategiju s vjerojatnostima $\mathbf{p} = (0.3, 0.7)$ koristeći S_1 i S_2 , a drugi igrač čistu strategiju T_1 tada će očekivana isplata prvog igrača biti

$$E_1 = [0.3 \;\; 0.7] \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = 0.3h_{11} + 0.7h_{21},$$

gdje smo pretpostavili da je matrica isplate

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

Ako suigrač također igra neku mješovitu strategiju $\boldsymbol{q} = [q, 1-q]$ (umjesto čiste T_1), tada u računicu ulazi i drugi stupac matrice isplate. Pretpostavimo li, primjerice, da u devedeset posto slučaja koristi T_1 tada je vjerojatnost isplate h_{11} umnožak $0.3 \cdot 0.9 = 0.27$. Sličnim razmatranjem dolazimo do vjerojatnosti $0.7 \cdot 0.9 = 0.63$ za isplatu h_{21}. S obzirom da suigrač koristi T_2 u 10% ishoda tada prvi grač dobiva h_{12} s vjerojatnošću $0.3 \cdot 0.1 = 0.03$, odnosno h_{22} s vjerojatnošću $0.7 \cdot 0.1 = 0.07$. Dakle, ako suigrač koristi mješovitu strategiju [0.9 0.1] očekivana isplata prvog igrača je:

$$E_1 = 0.3 \cdot 0.9h_{11} + 0.7 \cdot 0.9h_{21} + 0.3 \cdot 0.1h_{21} + 0.7 \cdot 0.1h_{22}\,.$$

Članovi ovog izraza mogli bi se pregrupirati na sljedeći način

$$E_1 = 0.3 \cdot (0.9h_{11} + 0.1h_{12}) + 0.7 \cdot (0.9h_{21} + 0.1h_{22}) = \sum_{\boldsymbol{j}} p_j \sum_{i} h_{ji}\, q_i,$$

$$E_1 = [0.3 \;\; 0.7] \begin{bmatrix} 0.9h_{11} + 0.1h_{12} \\ 0.9h_{21} + 0.1h_{22} \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [0.3 \;\; 0.7] \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = [0.3 \;\; 0.7] \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot [0.9 \;\; 0.1]^T.$$

Općenito rečeno, ako igrač koristi mješovitu strategiju **p**, a suigrač mješovitu strategiju **q**, tada su očekivane isplate:

$$E_1 = \mathbf{p} H \mathbf{q}^T \tag{3.6}$$

$$E_2 = \mathbf{q} H \boldsymbol{p}^T \tag{3.7}$$

Primjerice, ako je $\mathbf{p} = [0.3 \;\; 0.7]$, $\mathbf{q} = [0.9 \;\; 0.1]$, a matrica isplate

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

tada su očekivane isplate:

$$E_1 = 0.27 \cdot 3 + 0.63 \cdot 5 + 0.03 \cdot 0 + 0.07 \cdot 1 = 4.03,$$
$$E_2 = 0.27 \cdot 3 + 0.63 \cdot 0 + 0.03 \cdot 5 + 0.07 \cdot 1 = 1.03.$$

3.1.5 Nashova ravnoteža kao obostrano najbolji odgovor

Pretpostavimo da (u nekoj matričnoj igri) igrač zna koje sve strategije može koristiti suigrač. Za strategiju S_i kažemo da je *najbolji odgovor* na suigračevu strategiju T_j ako vrijedi:

$$h_1(S_i, T_j) \geq h_1(S_k, T_j) \; \forall S_k \in \boldsymbol{S}.$$

Jednostavnije rečeno, najbolji odgovor na suigračevu strategiju T_j je ona strategija S_i koja nam daje najveću isplatu od svih mogućih raspoloživih strategija. Pretpostavimo li da oba racionalna igrača znaju koje su sve strategije obojici na raspolaganju, jasno je da će oni uvijek tražiti *najbolji odgovor* koji im je dostupan. Razmatranjem najboljih odgovora dolazimo do pojma *Nashove ravnoteže* koji će nam kasnije biti izuzetno dragocjen za razumijevanje koncepta *evolucijski stabilne strategije* (u poglavlju 3.2).

Razmotrimo ponuđenu tablicu isplate neke zamišljene igre:

	T_1	T_2	T_3
S_1	1,3	5,3	2,4
S_2	2,4	0,6	1,5

Tablica 5 Primjer igre 2x3.

Usporedbom parova (1,3) i (2,4) iz prvog stupca tablice dolazimo do zaključka: izabere li suigrač strategiju T_1 , najbolji odgovor prvog igrača je strategija S_2 jer $h_1(S_2, T_1) = 2 \geq 1 = h_1(S_1, T_1)$. Izabere li suigrač T_2, najbolji odgovor je S_1 jer $h_1(S_1, T_2) = 5 \geq 0 = h_1(S_2, T_2)$.

Radi lakšeg razmatranja uokvirit ćemo isplatu koja odgovara najboljem odgovoru:

	T_1	T_2	T_3
S_1	1,3	$\boxed{5}$,3	2,4
S_2	$\boxed{2}$,4	0,6	1,5

Tablica 6 Najbolji odgovori prvog igrača.

Istu proceduru primjenjujemo kod analize najboljih odgovora drugog igrača na strategije S_1 i S_2, pri čemu dolazimo do zaključka da su to T_3 i T_2 (strategija T_3 kao odgovor na S_1 i T_2 kao odgovor na S_2).

Kad bismo **uokvirili** oznakom $\square$ sve najbolje odgovore prvog igrača, a zatim **zakaparili (oznakom** $\widehat{\ }$)sve najbolje odgovore drugog igrača, došli bi do sljedeće tablice:

	T_1	T_2	T_3
S_1	1,3	$\boxed{5}$,3	$\boxed{2}$,$\hat{4}$
S_2	$\boxed{2}$,4	0,$\hat{6}$	1,5

Tablica 7 Nashova ravnoteža.

Kao što vidimo treća ćelija u prvom retku sadrži najbolje odgovore i jednog i drugog igrača, što znači da su strategija S_1 i strategija T_3 *međusobno* najbolji odgovori jedna na drugu. U takvom slučaju kažemo da ponuđena igra posjeduje točku *Nashove ravnoteže*. Koncept Nashove ravnoteže vrlo je važan u MTI jer nam omogućuje da predvidimo ishod konflikta između jedinki ili grupa. Racionalnom igraču analiza najboljih odgovora nudi izbor *relativno najbolje* strategije u igri u kojoj poznajemo potencijalno iskoristive strategije, a ne znamo koju će protivnik u stvari izabrati. Ako i pokuša forsirati strategiju izvan točke ravnoteže (recimo S_2) protivnik će ga vrlo brzo (recimo primjenom T_2) vratiti u S_1. U konačnici oba igrača završavaju u kombinaciji (S_1, T_3).

Do koncepta ravnotežnog stanja u igri **John Nash** došao je 1950.g u svojoj doktorskoj disertaciji koja broji svega 28 stranica, ničim ne odajući golemu snagu koja se krije u toj zamisli. Njegov pristup nekooperativnim igrama (a to je većina igara) kasnije će znanstvenici primijeniti na analizu ekonomske kompetitivnosti između subjekata na tržištu i na kompetitivnost između organizama u prirodi. Na tim temeljima Maynard i Price izgradili su evolucijsku teoriju igara, a ne treba zanemariti ni Nashov utjecaj na suvremenu kulturu – atomska bomba koju *Dr.Strangelove* u svom ludilu lansira na kraju filma zapravo je racionalan odgovor na (pogrešno) detektiranu rusku invaziju[3] . U Tarantinovim filmovima uvijek postoji moment u kojem junaci i antijunaci jedni druge drže na nišanu znajući da je situacija loša, a istovremeno svjesni da će svaki pomak situaciju pogoršati. Poput opruge koju elastična sila vraća u ravnotežno stanje, subjekti se pod vanjskim pritiskom oponenata vraćaju Nashovoj konstelaciji ma kako pogrešna se ona nama činila. Naime, bilo kakav lateralni pomak tj. promjena strategije dovodi do pada u isplati naspram isplate Nashove ravnoteže. Treba naglasiti da Nashova ravnoteža ne povlači nužno da se radi o najboljem ekonomskom ili najboljem evolucijskom ishodu – obostrana izdaja u Zatvorenikovoj dilemi mračan je primjer takve ravnoteže. Možda je i ta crna, pesimistična spoznaja bila jedan od okidača Nashove paranoidne shizofrenije nedugo nakon obrane disertacije.

Kao što je već rečeno, ako se igrači nalaze u Nashovoj ravnoteži, nijedan igrač ne može promjenom (samo svoje) strategije povećati vlastitu isplatu. Sasvim općenito možemo reći: Ukoliko su dvije protivničke strategije ujedno i najbolji odgovori jedna na drugu onda se one nalaze u Nashovoj ravnoteži [53]. Primijenimo li definiciju najboljeg odgovora tada možemo zaključiti: dvije strategije S_i i T_j čine Nashovu ravnotežu ako istodobno vrijedi

$$h_1(S_i, T_j) \geq h_1(S_k, T_j) \forall S_k \in \boldsymbol{S},$$
$$h_2(S_i, T_j) \geq h_2(S_i, T_l) \forall T_l \in \boldsymbol{T}. \quad (3.8)$$

[3] Fiktivni lik Dr.Strangelovea redatelj Stanley Kubrick napisao je parodirajući njemačko-američkog fizičara Wernher von Brauna, a prema drugoj teoriji Strangelove utjelovljuje poznatog matematičara John Von Neumanna

U igri može biti i više točaka Nashove ravnoteže. Također, ako u simetričnoj igri postoji *jedinstvena* točka Nashove ravnoteže, ona se mora nalaziti na dijagonali matrice. Naime, kad bi u simetričnoj igri čista strategija S_i bila najbolji odgovor na S_j $(j \neq i)$ tada bi nužno i S_j bila najbolji odgovor na S_i što znači da bi u tom slučaju igra imala barem dvije točke Nashove ravnoteže. Iako je Nash dokazao da u svim *konačnim* igrama postoji Nashova ravnoteža, nemaju sve igre *ravnotežu čistih strategija*. U tom slučaju govorimo o *Nashovoj ravnoteži mješovitih strategija.* Dakle, to je ravnoteža u kojoj barem jedan od igrača primjenjuje mješovitu strategiju. Primjer takve igre obrađen je u potpoglavlju 3.1.7.

3.1.6 Određivanje Nashove ravnoteže eliminacijom dominiranih strategija

Važni pojmovi u MTI su *dominantna* i *dominirana* strategija. Strategiju $S_i \in \boldsymbol{S}$ nazivamo dominantnom strategijom ukoliko neovisno o izboru strategije drugog igrača iz $\boldsymbol{S}\backslash S_i$ vrijedi $h_1 \geq h_2$ tj. isplata za S_i je veća od isplate bilo koje druge strategije $S_j \in \boldsymbol{S}\backslash S_i$. S druge strane, podređenom (dominiranom) strategijom nazivamo onu S_i za koju je isplata manja od bilo koje druge neovisno o izboru suigrača. Racionalan igrač je onaj koji nikad neće izabrati podređenu strategiju. Stoga je prilikom traženja Nashove ravnoteže moguće koristiti metodu eliminacije podređenih strategija.

	T_1	T_2	T_3
S_1	1,3	5,3	2,4
S_2	2,4	0,6	1,5

Tablica 8 Primjer igre 2x3.

U našem primjeru (iz prethodnog poglavlja) možemo krenuti od činjenice da je T_1 podređena strategiji T_2 . Naime isplate h_2 u prvom stupcu jednake su ili lošije od isplata ponuđenih u drugom stupcu Tablice 8.

$*, 3$	$*, 3$
$*, 4$	$*, 6$

Eliminacijom podređene strategije T_1 preostaje nam reducirana igra:

	T_2	T_3
S_1	5,3	2,4
S_2	0,6	1,5

Tablica 9 Reducirana igra

Sad se možemo fokusirati na pitanje koja je strategija podređena za prvog igrača. Kao što vidimo $(5,*) > (0,*)$ & $(2,*) > (1,*)$ stoga zaključujemo da je S_2 podređena. Preostaje nam samo prvi redak reducirane tablice:

	T_2	T_3
S_1	5,3	2,4

Za drugog igrača, T_2 je podređena jer $(*,3) < (*,4)$ što nas navodi na zaključak da je točka Nashove ravnoteže:

	T_3
S_1	2,4

Eliminacija dominiranih strategija je moguća samo ukoliko takve strategije u igri postoje, međutim moguće je zamisliti beskonačno mnogo igara u kojima su isplate takve da je na protivnikovu T_j najbolje odgovoriti jednom strategijom, a na $T_{k\neq j}$ nekom drugom strategijom. Drugim riječima, u mnogim igrama ne postoje dominirane strategije. Kažemo da ne postoji Nashova ravnoteža čistih strategija. Tada je moguće kombinirati više čistih strategija s odgovarajućim udjelima u ukupnom broju igara, odnosno s odgovarajućom vjerojatnošću u jednoj igri. U tom slučaju govorimo o Nashovoj ravnoteži mješovitih strategija. Pronalaženje takvog oblika ravnoteže detaljno je razmatrano u poglavljima 3.1.8-3.1.10.

3.1.7 Nashova ravnoteža u igri Zatvorenikove dileme

Pretpostavimo da igrači igraju simetričnu igru s ponuđenom matricom isplate:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća bimatrična tablica isplate, tada izgleda ovako:

		Drugi igrač	
		S_1	S_2
Prvi igrač	S_1	3,3	1,4
	S_2	4,1	2,2

Tablica 10 Primjer Zatvorenikove dileme

Ako u tablici isplata označimo *najbolje odgovore* igrača dolazimo do zaključka da je točka Nashova ravnoteže pozicionirana u u zadnjoj ćeliji tablice s isplatama (2,2). Do istog odgovora došli bismo i eliminacijom podređene strategije S_1.

	S_1	S_2
S_1	3,3	$1, \hat{4}$
S_2	$\boxed{4}, 1$	$\boxed{2}, \hat{2}$

Tablica 11 Nashova ravnoteža

Prvo što upada u oči jest prilično loša pozicija Nashove ravnoteže s ekonomskog gledišta. Od četiri moguća parametra isplate, igrači u Nashovoj ravnoteži dobivaju isplatu koja je po iznosu tek treće rangirana. Za usporedbu, kad bi oba igrača igrala podređenu strategiju S_1 završili bi s isplatama (3,3) što bi bio znatno povoljniji ishod za obojicu. Ovako postavljena igra naziva se **Zatvorenikova dilema**.

Općenito, svaku simetričnu igru s dvije čiste strategije opisanu matricom

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

nazivamo *Zatvorenikovom dilemom između dva grača* ukoliko je relativni odnos između parametara isplate

$$b < d < a < c.$$

Dakle, da bi igra zaista bila Zatvorenikova dilema, parametri isplate moraju biti takvi da vrijednosti dijagonalnih elemenata (a, d) budu između lateralnih elemenata (b, c) i da pritom isplata u Nashovoj ravnoteži bude slabija od isplate podređenih strategija. Kako bi se lakše snalazili u parametrima, znanstvenici su im dali imena. Matrica isplate, u većini literature popunjava se parametrima sljedećih oznaka: S=sucker, P=punishment, R=reward, T=temptation, pri čemu vrijedi:

$$S < P < R < T.$$

3.1.8 Ravnoteža u slučaju primjene mješovitih strategija

U mnogim igrama ne postoji *Nashova ravnoteža čistih strategija*. Ipak, i u takvim igrama moguće je uspostaviti ravnotežu pažljivim odabirom udjela strategija. Uzmimo kao primjer neku igru u kojoj ne postoje striktno podređene strategije (koje bismo inače mogli lako eliminirati). Pretpostavimo da su isplate neke igre zadane tablicom

	T_1	T_2
S_1	$2,-3$	$1,2$
S_2	$1,1$	$4,-1$

Tablica 12 Primjer igre bez striktno podređenih strategija

Budući da ne postoji Nashova ravnoteža čistih strategija, postavlja se pitanje: u kojim omjerima je potrebno kombinirati strategije? Pretpostavimo, stoga, da prvi igrač primjenjuje S_1 s vjerojatnošću p, odnosno S_2 s vjerojatnošću $(1-p)$, dok suigrač slijedi T_1 s vjerojatnošću q, odnosno T_2 s vjerojatnošću $(1-q)$. Matematičkim rječnikom –prvi igrač primjenjuje $\mathbf{p} = [p \quad (1-p)]$, dok drugi primjenjuje $\mathbf{q} = [q \quad (1-q)]$.

			Drugi igrač	
			T_1	T_2
			q	$1-q$
Prvi igrač	S_1	p	$2,\mathbf{-3}$	$1,2$
	S_2	$1-p$	$1,\mathbf{1}$	$4,-1$

Tablica 13 Strategije s pripadnim vjerojatnostima primjene

Razmotrimo isplate drugog igrača u slučaju igranja čiste strategije.

1) Ako drugi igrač igra T_1 dobiva isplatu -3 s vjerojatnošću p ili isplatu 1 s vjerojatnošću $(1-p)$. Prema tome njegova očekivana isplata dok igra T_1 je
$$E_2(T_1) = -3p + (1-p).$$
2) Ako igra T_2 dobiva isplatu 2 s vjerojatnošću p ili isplatu -1 s vjerojatnošću $(1-p)$. U tom slučaju očekivana isplata je
$$E_2(T_2) = 2p + (-1)(1-p).$$

Važno je naglasiti činjenicu da dotični nema potrebe kombinirati strategije T_1 i T_2 ako jedna od tih strategija *sigurno* donosi veću isplatu. Prema tome, on će igrati mješovitu strategiju jedino ako su očekivane isplate iste

$$E_2(T_1) = E_2(T_2)$$

odnosno ako vrijedi

$$-3p + (1-p) = 2p + (-1)(1-p)$$
$$-4p + 1 = 3p - 1$$
$$7p = 2$$

$$p = 2/7$$

Sličnim razmatranjem zaključujemo da će prvi igrač kombinirati S_1 i S_2 jedino ako

$$E_1(S_1) = E_1(S_2)$$

odnosno

$$2q + (1-q) = q + 4(1-q) \;\Rightarrow\; q = 3/4.$$

Dolazimo do zaključka da Nashova ravnoteža nastupa u slučaju

$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$$
$$\mathbf{q}^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Pri čemu su isplate: $E_1 = \frac{7}{4} = 1.75,\ E_2 = -\frac{1}{7} \approx -0.14.$

3.1.9 Određivanje ravnoteže mješovitih strategija deriviranjem očekivanih isplata

Općenito rečeno, par mješovitih strategija $\mathbf{p}^*$ i $\mathbf{q}^*$ čini Nashovu ravnotežu ako:

$$E_1(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq E_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*)\ \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*,$$
$$E_2(\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*) \geq E_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}^*)\ \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{q}^*, \qquad (3.9)$$

tj. ako jednostranom promjenom vjerojatnosti igranja iz $\mathbf{p}^*$ u $\mathbf{p}$ (odnosno $\mathbf{q}^*$ u $\mathbf{q}$) ne mogu poboljšati svoju očekivanu isplatu. Prema tome, Nashovu ravnotežu moguće je pronaći traženjem uvjeta maksimalnih očekivanih isplata. Razmotrimo igru iz prethodnog poglavlja:

	q	$1-q$
p	$2,-3$	$1,2$
$1-p$	$1,1$	$4,-1$

Tablica 14 Primjer igre u kojoj ne postoji ravnoteža čistih strategija

Ako igrači koriste mješovite strategije $\mathbf{p} = [p \quad (1-p)]$, odnosno $\mathbf{q} = [q \quad (1-q)]$ očekivane isplate su:

$$E_1 = \mathbf{p} H_1 \mathbf{q}^T$$

$$E_2 = \mathbf{q} H_2 \boldsymbol{p}^T$$

gdje su matrice isplata

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Očekivana isplata prvog igrača:

$$E_1 = [p \quad (1-p)] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix} = [p \quad (1-p)] \begin{bmatrix} 2q + (1-q) \\ q + 4(1-q) \end{bmatrix}$$

$$E_1 = 2pq + p(1-q) + q(1-p) + 4(1-p)(1-q)$$

$$E_1 = 4 - 3p - 3q + 4pq.$$

Sličnim razmatranjem dolazimo do isplate drugog igrača:

$$E_2 = -1 + 3p + 2q - 7pq.$$

Promatrajući dobivene izraze, mogli bismo sasvim općenito reći da su isplate igrača funkcije dviju varijabli $E_1 = E_1(p,q)$ i $E_2 = E_2(p,q)$ gdje su varijable vjerojatnosti p, q. Ukoliko tražimo uvjet maksimalne isplate E_1 uz zadani, fiksni q (koji ovisi o suigraču), zapravo tražimo da parcijalna derivacija funkcije $E_1(p,q)$ po varijabli p bude jednaka nuli.

$$\frac{\partial E_1}{\partial p} = 0. \tag{3.10}$$

Obrnuto, kad tražimo uvjet maksimalne isplate za drugog igrača tada s nulom izjednačavamo parcijalnu derivaciju funkcije $E_2(p,q)$ po varijabli q

$$\frac{\partial E_2}{\partial q} = 0. \tag{3.11}$$

Tako definirani uvjeti vode nas k sustavu jednadžbi:

$$\frac{\partial E_1}{\partial p} = -3 + 4q^* = 0 \Rightarrow q^* = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial q} = 2 - 7p^* = 0 \Rightarrow p^* = \frac{2}{7},$$

što znači da se Nashova ravnoteža postiže kad igrači koriste strategije

$$\mathbf{p}^* = \left(\frac{2}{7}, 1 - \frac{2}{7}\right)$$

$$\mathbf{q}^* = \left(\frac{3}{4}, 1 - \frac{3}{4}\right)$$

Analiza ravnoteže mješovitih strategija pokazala se izuzetno značajnom u razvoju evolucijske teorije igara jer je igra mješovitih strategija ekvivalentna turniru unutar miješane populacije

(poglavlje 3.2.2). Npr. igra između dva igrača koji kombiniraju svaki po 2 strategije može biti predstavljena beskonačno velikom populacijom u kojoj se nadmeću dvije vrste s dvije podvarijante fenotipa. Drugim riječima, kad bi isplate jedinki u miješanoj populaciji odgovarale tablici u našem primjeru, mogli bi reći da postoji evolucijski stabilna populacija sastavljena od dvije životinjske vrste s 2 varijacije fenotipa pri čemu su njihovi udjeli u populaciji: $\frac{2}{7}:\frac{5}{7}:\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$.

3.1.10 Nashova ravnoteža mješovitih strategija u simetričnoj igri 2×2

Ako je igra simetrična tada iz $E_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = E_2(\mathbf{q},\mathbf{p})$ slijedi jednostavnija definicija Nashove ravnoteže:

$$\left.\begin{matrix} E_1(\mathbf{p}^*,\mathbf{q}^*) \geq E_1(\mathbf{p},\mathbf{q}^*)\ \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^* \\ E_2(\mathbf{q}^*,\mathbf{p}^*) \geq E_2(\mathbf{q},\mathbf{p}^*)\ \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{q}^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(\mathbf{p}^*,\mathbf{p}^*) \geq E(\mathbf{p},\mathbf{p}^*)\ \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{p}^* \qquad (3.12)$$

Moglo bi se reći: ako je igra simetrična tada Nashovu ravnotežu čini strategija koja je najbolji odgovor sama sebi.

Pretpostavimo da je matrica isplate

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako igrači koriste mješovite strategije, tada je prema relaciji (3.6) očekivana isplata strategije $\mathbf{q} = [q \quad (1-q)]$ u igri protiv strategije $\mathbf{p} = [p \quad (1-p)]$

$$E_2 = E(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{q}H\mathbf{p}^T$$

$$\boldsymbol{E_2} = 2qp + q(1-p) + 4(1-q)p = 4p - 3pq + q.$$

S druge strane, očekivana isplata strategije $\mathbf{p}$ protiv strategije $\mathbf{q}$

$$E_1 = \mathbf{p}F\mathbf{q}^{\boldsymbol{T}} = 2pq + p(1-q) + 4(1-p)q = 4q - 3pq + p.$$

Deriviranjem ovih funkcija po vjerojatnostima dobivamo

$$\frac{\partial E_2}{\partial q} = -3p + 1$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial p} = -3q + 1$$

Maksimumi isplata dobivaju se kad vrijedi:

$$\frac{\partial E_2}{\partial q} = 0 \;\Rightarrow\; p^* = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial p} = 0 \;\Rightarrow\; q^* = \frac{1}{3}$$

S obzirom da je igra simetrična, Nashova ravnoteža se postiže kad oba igrača primjenjuju *istu* mješovitu strategiju. $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^* = (1/3\,, 2/3)$.

Razmotrimo općeniti slučaj kad igrači primjenjuju mješovite strategije na simetričnu igru 2×2 s matricom isplate

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dobivamo

$$E_1 = [p \;\; (1-p)] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1-q \end{bmatrix}$$

$$E_1 = apq + bp(1-q) + cq(1-p) + d(1-p)(1-q)$$

$$E_1 = (b-d)p + (a-b-c+d)pq + (c-d)q + d \tag{3.13}$$

Sličnim postupkom dobivamo očekivanu isplatu suigrača

$$E_2 = (b-d)q + (a-b-c+d)pq + (c-d)p + d. \tag{3.14}$$

Kao što se moglo i očekivati (s obzirom na simetričnost igre) parcijalnim deriviranjem isplata dobivamo simetrične relacije:

$$\frac{\partial E_1}{\partial p} = (b-d) + (a-b-c+d)q \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial q} = (b-d) + (a-b-c+d)q \tag{3.16}$$

Iz uvjeta Nashove ravnoteže (3.10) i (3.11) slijedi:

$$p^* = q^* = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)} \tag{3.17}$$

3.2 Evolucijska teorija igara

Budući da preživljavanje i reproduktivni uspjeh jedinke u određenom ekosistemu ne ovisi samo o tome što čini jedinka već i o tome što čine drugi organizmi prisutni u okolini, teorija igara je idealan okvir za teorijsko razmatranje evolucije. Primjerice, iz perspektive matematike, odnos između plijena i predatora također je igra. Prividno, cilj te igre je preživljavanje, ali ultimativno, zapravo cilj je stvaranje što većeg broja potomaka. Uspjeh/isplata igrača, zapravo je reproduktivni uspjeh ili jezgrovito rečeno *fitnes*, a strategiju igrača čini skup obilježja koje jednom rječju nazivamo *fenotip*.

Iako je bilo pokušaja da se teorija igara primjeni na evolucijsku biologiju još početkom šezdesetih godina [54], godinom rođenja evolucijske teorije igara smatramo 1973. kad su **John Maynard Smith i George Price** objavili članak „*The Logic of Animal Conflict"*. U ovom članku Maynard Smith i Price razmatraju ritualno hrvanje između mužjaka, te postavljaju pitanje: Zašto mužjaci u borbi za dominaciju nad teritorijem i ženkama ne iskoriste sva „oružja" koja imaju na raspolaganju? Zašto, primjerice, mužjaci zmija ne koriste svoje otrovne očnjake i zašto jeleni ne primjenjuju smrtonosne udarce rogovima? Kako bi odgovorili na to pitanje, oni suprotstavljaju strategiju „totalnog rata" (strategija *Hawk*) strategijama „ograničenog ratovanja" (strategija *Mouse* i sl). Isplatu igrača izjednačili su s brojem potomaka koje će igrač ostaviti iza sebe uz postavku da potomci nose isti (njegov) fenotip. Na taj način uspjeli su odrediti kako će se kroz više generacija u populaciji mijenjati udjeli pojedinih čistih strategija. Prema njihovim izračunima populacija sastavljena od strategije *Hawk* nije stabilna jer su isplate mnogo manje u odnosu na isplate kad je populacija sastavljena od mekanijih strategija [55]. Osim što su postavili novu paradigmu u kojoj se fenotip i fitnes odnose kao čista strategija i isplata, Maynard Smith i Price su, umjesto Nashovog ekvilibrija, uveli i tzv. evolucijski stabilnu strategiju (ESS) koja se danas smatra središnjim konceptom evolucijske teorije igara (ETI). Dok u klasičnoj teoriji igara govorimo o racionalnim odlukama igrača, u ETI govorimo o urođenim strategijama. Stoga je i Nashov ekvilibrij kao konačan izbor racionalnih igrača također neprikladan. Razmatrajući problem stabilnosti populacije, oni definiraju ESS kao čistu strategiju otpornu na pojavu mutanata gdje pod mutantima podrazumijeva podskupinu koja počinje pratiti neku drugu čistu strategiju. Zanimljiva je i činjenica, što se tiče same metodologije, da su Maynard Smith i Price koristili računalnu simulaciju kako bi izračunali isplate, pa su i time najavili novu eru evolucijske biologije.

U najkraćim crtama odnos između klasične i evolucijske teorije igara mogao bi se predstaviti točkama:

- Čista strategija→fenotip
- Isplata→ fitnes

- Nashov ekvilibrij→evolucijski stabilna strategija

3.2.1 Strategija u okviru evolucijske teorije igara

U prirodi, vrste imaju na raspolaganju cijeli arsenal fenotipskog oružja; aerodinamičnu građu, kandže, očnjake, krila, bodlje, šareno krzno itd. Tako će se jež, primjerice, u slučaju nužde pretvoriti u bodljikavu loptu. Za promatrača koji prvi put vidi takvu pretvorbu, takva akcija mogla bi se činiti kao samo jedan *potez*. Međutim pomnijim promatranjem na dužoj vremenskoj skali otkrivamo da jež uvijek na isti način reagira na predatora. On se nikad neće popeti na drvo, skakati kroz visoku travu ili lučiti neugodan vonj poput tvora. Bodlje kao fenotipsko obilježje u potpunosti definiraju način na koji se jež kao vrsta nosi s predatorima u svim situacijama. Stoga možemo zaključiti da fenotip jest strategija.

Fenotip uključuje ne samo boju krzna, anatomiju, oblik čeljusti i sve vidljive, materijalne značajke već i filogenetski ugrađene obrasce ponašanja koje nazivamo *bihevioralnim fenotipom*. Primjerice, kad hrčak pronađe hranu na livadi on je prvo spremi u posebne unutarnje džepove u obrazima, a konzumira je tek nakon što se nađe u sigurnosti skloništa. Ovaj obrazac ponašanja ima smisla ako se uzme u obzir da svaka sekunda provedena na otvorenom prostoru može biti kobna. Interesantno je i komično, međutim, to što hrčak ponavlja istu radnju čak i kad živi kao kućni ljubimac u modernom stanu, potpuno zaštićen od ptica grabljivica [56]. Njegova strategija ponašanja nije racionalna već je genetski determinirana i oblikovana milijunima godina evolucije. Međutim, da bismo shvatili kako i zašto neka strategija postaje dominantna u populaciji, potrebno je modelirati igru stvaranjem nekoliko alternativnih strategija i zatim ih konfrontirati. U takvoj igri rivali nisu nužno predator i plijen. Primjerice, u igri spolova, rivali mogu biti monogamni i poligamni mužjaci.

Uobičajen model igre u ETI sadrži vrlo velik broj igrača koji nazivamo *populacijom* i koji dijelimo na manje podskupine – vrste. Određeni postotak igrača koristi jednu strategiju, dok drugi postotak igrača slijedi više ili manje sličnu strategiju. U tom smislu možemo reći da su strategije zastupljene u određenim udjelima ili da neka strategija ima „takvu i takvu“ relativnu frekvenciju. Podvrste igrača uobičajeno nazivamo strategijama, pa prema tome pojam *strategija* ima dva lingvistička značenja; ona može označavati (1) fenotip, ali i (2) konkretan podskup igrača zadane populacije.

3.2.2 Ekvivalencija miješanih populacija i mješovitih strategija

Pretpostavimo da populaciju čine dvije varijacije fenotipa odnosno dvije podskupine jedinki (pri čemu svaka podskupina primjenjuje jednu od dvije ponuđene strategije S_1ili S_2). U tom slučaju, uobičajeno je reći: „Populaciju čine dvije strategije.“. Ukoliko N jedinki igra 2×2 igru, pri čemu

$N/2$ primjenjuju S_1 , a $N/2$ primjenjuju strategiju S_2 takvu populaciju možemo predstaviti vektorom $(0.5, 0.5)$. Ako pretpostavimo da će *svaki sa svakim* odigrati jednu partiju igre, ukupno će biti odigrano:

$$K = \frac{N}{2}(N-1) \text{ duela,}$$

od čega će ukupno biti:

$$\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \text{ okršaja između } S_1 \text{i } S_2,$$

$$\frac{N/2}{2}(N/2-1) \text{ međusobnih okršaja između } S_1 \text{i } S_1,$$

$$\frac{N/2}{2}(N/2-1) \text{ međusobnih okršaja između } S_2 \text{ i } S_2.$$

Uzmimo da je populacija jako velika. Ukupan broj partija tada je približno

$$K = \frac{N}{2}(N-1) \approx \frac{1}{2}N^2.$$

Distribuciju duela možemo predstaviti tablicom

Broj duela	Vrsta duela
$\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} = \frac{1}{4}N^2 = 0.5K$	između S_1 i S_2
$\frac{N/2}{2}(N/2-1) \approx \frac{1}{8}N^2 = 0.25K$	između S_1
$\frac{N/2}{2}(N/2-1) \approx \frac{1}{8}N^2 = 0.25K$	između S_2

Tablica 15 Broj duela u dobro miješanoj populaciji (svaki agent igra sa svakim).

Usporedbe radi, razmotrimo sad uniformnu populaciju sastavljenu od N jedinki koje igraju identičnu, ali mješovitu strategiju $(0.5, 0.5)$. Svaka jedinka, dakle, nasumično igra ili S_1 ili S_2 s vjerojatnošću pedeset posto. Vjerojatnost da obje jedinke odigraju S_1 je $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$, vjerojatnost da obje jedinke odigraju S_2 je $0.5 \cdot 0.5 = 0.25,$ a vjerojatnost da odigraju različito je

$$p(S_1S_2 \; ili \; S_2S_1) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.5.$$

U ovom slučaju također će biti K susreta. Prema tome u uniformnoj populaciji mješovite strategije, distribucija duela potpuno je ista kao i u slučaju kad se miješana populacija sastoji od čistih strategija. U 50% slučajeva ishod je S_1S_2 , u 25% slučajeva ishod je S_1S_1 , a 25 % ishod je S_2S_2 . Ovakvo pomanjkanje distinkcije je prirodno jer matematički izraz za mješovitu strategiju $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$ igrača uniformne populacije na neki način možemo smatrati „težištem“ mješovite populacije, otprilike kao što u fizici točku $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{m_i}{M}$ smatramo težištem sustava raspršenih

čestica [30]. Prema tome, vektor $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ može predstavljati populaciju koja se sastoji od tri (ili više) podskupa igrača koji primjenjuju čiste strategije $S_1, S_2, S_3, \dots$ s udjelima $p_1, p_2, p_3, \dots$, ali i uniformu populaciju u kojoj svi igrači (100%) primjenjuju potpuno istu mješovitu strategiju $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$. Uobičajeno je, stoga, reći: „Populacija sastava **p** ekvivalentna je uniformnoj populaciji u kojoj sve jedinke igraju mješovitu strategiju **p**."

Kako bismo mogli razlikovati ta dva slučaja, neka **p** bude *mješovita strategija*, a njoj transponirana matrica $\mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ neka dogovorno bude *miješana populacija*. U tom slučaju vrijede relacije:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \, S_i \,, \\ \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \, \delta_i \,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

gdje jednostupčana matrica $\delta_i = {S_i}^T$ označava populaciju koja se sastoji od jedinki koje primjenjuju strategiju S_i . Primjerice, $S_2 = [0\ 1\ 0\ \dots\ 0]$ predstavlja čistu strategiju, dok

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

predstavlja populaciju koja se sastoji isključivo od igrača koji primjenjuju S_2. Takvom notacijom uveli smo matematičku distinkciju između spomenutih pojmova. U većini literature relativna frekvencija strategije S_i tj. udio igrača koji primjenjuju strategiju S_i označava se oznakom x_i. U takvoj notaciji:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \delta_i \,; \quad 1 = \sum x_i \tag{3.19}$$

Važna posljedica jednake distribucije duela u uniformnoj populaciji mješovite strategije i miješanoj populaciji čistih strategija jest jednaka distribucija isplata. Naime, može se pokazati da očekivana isplata igrača koji koristi strategiju $\boldsymbol{\sigma}$ protiv jednog igrača koji koristi miješanu strategiju **p** jednaka očekivanoj isplati igrača ubačenog u miješanu populaciji sastava $\boldsymbol{x} = \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$. Razmotrimo isplatu u prvom slučaju, kad igrač $\boldsymbol{\sigma}$ igra protiv drugog igrača koji koristi **p**

$$E(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = \boldsymbol{\sigma} H \mathbf{p}^T = \sum_j \sigma_j \sum_i h_{ji} \, p_i. \tag{3.20}$$

S druge strane, isplata jedinke koja koristi neku specifičnu strategiju $\boldsymbol{\sigma}$ unutar populacije $\boldsymbol{x} = \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ ovisi o tome s kim će igrati. Pretpostavimo da je igrač odigrao k duela. Iako se ne može točno

predvidjeti s kojim suparnicima će igrati, može se reći da je očekivani broj duela protiv strategije S_i jednak $x_i k$, gdje x_i predstavlja relativnu frekvenciju igrača koji primjenjuju strategiju S_i, odnosno vjerojatnost da nasumičnim izvlačenjem iz populacije izvučemo jedinku koja primjenjuju strategiju S_i. Pritom, zarada je $E(\boldsymbol{\sigma}, S_i)$. Prema tome, ukupna očekivana zarada (protiv svih strategija) je

$$E_{UK} = x_1 k \cdot E(\boldsymbol{\sigma}, S_1) + x_2 k \cdot E(\boldsymbol{\sigma}, S_2) + \cdots$$

$$E_{UK}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}} x_i k \cdot E(\boldsymbol{\sigma}, S_i) \tag{3.21}$$

Očekivana isplata miješane strategije $\boldsymbol{\sigma}$ u duelu s čistom strategijom S_i je

$$E(\boldsymbol{\sigma}, S_i) = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & & h_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\sigma}, S_i) = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_n] \begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ \vdots \\ h_{ni} \end{bmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\sigma}, S_i) = \sum_j \sigma_j h_{ji}. \tag{3.22}$$

Prema (3.21) i (3.22) ukupna očekivana zarada u k odigranih duela je:

$$E_{UK}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}} x_i k \cdot \sum_j \sigma_j h_{ji} \tag{3.23}$$

Ako ukupnu očekivanu zaradu $E_{UK}(\sigma, \boldsymbol{x})$ podijelimo s ukupnim brojem duela k dobivamo očekivanu isplatu u jednom duelu:

$$E(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{i}} x_i \sum_j \sigma_j h_{ji} \tag{3.24}$$

Uz komutativnost množenja i uz pretpostavku da je $\boldsymbol{x} = \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$, možemo zaključiti da je izraz (3.24) jednak izrazu (3.20)

$$E(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}) = \sum_{\boldsymbol{j}} \sigma_j \sum_i h_{ji}\, p_i \quad \Rightarrow$$

$$E(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}) = E(\sigma, \mathbf{p}), \tag{3.25}$$

čime smo dokazali da je očekivana isplata jedinke koja koristi strategiju $\boldsymbol{\sigma}$ unutar miješane populacije $\mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ jednaka očekivanoj isplati jedinke u igri jedan-na-jedan protiv rivala koji koristi mješovitu strategiju $\mathbf{p}$. Jednakost isplata strogo vrijedi samo za simetrične igre u *beskonačno velikim* populacijama, ali je ekvivalencija miješanih populacija i mješovitih strategija općenito vrlo značajna za analizu evolucijske stabilnosti strategija u različitim problemima.

Razmotrimo značaj ove ekvivalencije na primjeru igre Jastreb-Golub. Ova igra u kontekstu biologije opisuje situaciju između grabežljivih jedinki koje žele cijeli plijen za sebe i miroljubivih jedinki sklonih podjeli plijena. U okviru klasične teorije igara možemo zamisliti susret između dvije osobe koje pred sobom imaju blago odnosno plijen vrijednosti V. Svaka osoba može birati između dvije alternative: (1) napadam protivnika i uzimam plijen za sebe, (2) dijelim plijen ukoliko mi protivnik dozvoli. Ako obje osobe odaberu ovu drugu, miroljubivu opciju (strategija Golub), svaka dobiva polovicu plijena $V/2$. Međutim, ako osoba koja je odabrala miroljubivu strategiju naiđe na protivnika koji je odabrao agresivnu strategiju (Jastreb) tada će ostati bez plijena. U slučaju da obje osobe primijene strategiju Jastreb, neminovno dolazi do borbe koja ima svoju cijenu. Uz pretpostavku da su igrači jednako snažni i agresivni, svaki od njih će podjednako stradati. Ako cijenu borbe označimo s C, tada se matrica isplate može napisati u sljedećem obliku:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{V-C}{2} & V \\ 0 & V/2 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Ako je $V > C$ tada je bolje koristiti strategiju Jastreb neovisno o protivniku, pa možemo reći da je Jastreb dominantna, a Golub dominirana strategija, međutim ako $V < C$ tada igra nema Nashovu ravnotežu čistih strategija. Primjerice, ako su parametri $V = 6, C = 8$ tada je matrica isplate

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

pa u tom slučaju nema dominirane strategije koja bi se mogla eliminirati. Nashova ravnoteža se postiže ako oba igrača primijene mješovitu strategiju zadanu relacijom (3.17)

$$p^* = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}.$$

$$p^* = \frac{3-6}{(-1-0)+(3-6)} = \frac{3}{4}$$

Drugim riječima, za svakog igrača je najpovoljnije u 75% susreta primjenjivati strategiju Jastreb, a u preostalih 25 % susreta strategiju Golub.

Kakav je značaj ovog rješenja u kontekstu evolucijske biologije? S obzirom da je očekivana isplata igrača u Nashovoj ravnoteži jednaka (u simetričnoj igri poput ove), iz ekvivalencije mješovitih strategija i miješane populacije slijedi da su isplate jastreba i goluba također jednake

ukoliko se u populaciji nalazi 75% jastreba i 25% goluba. Pojednostavnjeno rečeno, uz takvu matricu isplate kakva je predočena u ovom primjeru, populacija neće konvergirati ni prema istrebljenju jastreba ni prema istrebljenju golubova, nego će pronaći točku ravnoteže u kojoj mogu koegzistirati obje vrste. Stoga se takve strategije nazivaju *evolucijski stabilne strategije*.

3.2.3 Evolucijski stabilna strategija

Evolucija ima jedno svojstvo od suštinske važnosti koje bi se metaforički moglo nazvati „metoda pokušaja i pogrešaka“ [57]. Naime, preduvjet preživljavanja vrste je genetička varijabilnost koja svakoj generaciji osigurava šarolikost svojstava i nova rješenja za adaptivne probleme koje nameće okoliš. Ukoliko je vrsta previše jednolična, ona ne može odgovoriti na eventualne promjene u ekosustavu. Primjerice, veliki kineski panda jede isključivo bambus i bambusove mladice. Ova specifična preferencija je, zbog uništavanja bambusovih šuma u prošlom stoljeću, pande dovela do ruba izumiranja [58]. S druge strane, vrste koje u svojoj genskoj zalihi čuvaju raznovrsnost gena, mogu preživjeti i ekološke i klimatske promjene. Prema tome, genetička varijabilnost je, uz selekciju, ključna značajka uspješne evolucije. Varijabilnost se kod dvospolnih vrsta osigurava operacijama rekombinacije i mutacije. Rekombinacija je operacija koja križa informacije oba roditelja i spaja ih u jednog potomka, a izbor tih informacija je nasumičan, uz određenu šansu da se kombiniranjem dobrih rješenja pojavi još bolje rješenje. Ovaj se princip tisućama godina koristi za uzgoj domaćih biljaka i životinja – u svakoj sljedećoj generaciji dobivamo sve bolje jedinke. U pozadini križanja, na molekulskoj razini, rekombinacija je kompleksan proces razmjene genetskog materijala između parova kromosoma. Dva kromosoma se, nakon interfaze (u kojoj se dupliciraju) fizički poravnaju, lome se na jednom ili više mjesta, te potom razmjenjuju fragmente. S druge strane, mutacija je slučajna promjena genetskog materijala somatske ili spolne stanice. Ova promjena može biti potencirana vanjskim čimbenicima, poput radijacije. Ukoliko se dogodi u *somatskoj stanici*, mutacija se neće nasljediti, ali može izazvati oštećenje i smrt stanice ili u rjeđem broju slučajeva nekontroliranu diobu i maligno oboljenje. Ipak, s evolucijskog stajališta, mnogo je značajnija mutacija koja se događa u *spolnoj stanici* jer takva promjena prenosi se u sljedeću generaciju i manifestira se kao promjena fenotipa, odnosno kao neko novo svojstvo potomstva. Dakle, mutacija je, uz rekombinaciju, drugi značajan faktor koji povećava varijabilnost unutar populacije.

S obzirom da su strategija i fenotip sinonimi, pod mutacijom u teoriji igara podrazumijevamo pojavu neke nove čiste strategije. Za takvu strategiju reći ćemo da je *mutantska strategija*. Ako pretpostavimo da se u populaciji sastava $\mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ pojavila mutantska strategija $\boldsymbol{\mu}$ tada se i sam sastav populacije mijenja. Postavlja se pitanje hoće li se mutantska strategija proširiti i preuzeti dominaciju

u populaciji ili će postupno iščeznuti tako da se populacija vrati u stanje $\mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$. Kako bismo odgovorili na to pitanje pozvat ćemo se na ekvivalenciju miješane populacije i miješane strategije. Populacija sastava $\mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ ekvivalentna je uniformnoj populaciji u kojoj sve jedinke igraju strategiju $\mathbf{p}$, dok je populacija $\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}$ koja sadrži mutantsku strategiju ekvivalentna miješanoj populaciji u kojoj sve jedinke prate mješovitu strategiju $\boldsymbol{\rho} = \varepsilon\boldsymbol{\mu} + (1-\varepsilon)\mathbf{p}$ gdje je $\varepsilon \in \langle 0{,}1\rangle$ udio mutanata u populaciji. Kao što je strategija $\mathbf{p}$ u Nashovoj ravnoteži „otporna“ na bilo kakvo odstupanje tako i evolucijski stabilna strategija mora biti otporna na mutante. Kad se igrači nalaze u Nashovoj ravnoteži, nijedan igrač ne može promjenom (samo svoje) strategije povećati vlastitu isplatu. Bilo kakva promjena strategija u iteriranoj varijanti igre, prije ili kasnije vratila bi igrače u Nashovu točku. Ukoliko pod igračima podrazumijevamo strategije tada slijedi da evolucija također „gura“ strategije prema ravnoteži. U iteriranoj igri racionalni igrači koji bi izašli iz ravnoteže bili bi kažnjeni gubitkom bodova, ali u prirodi kazne su mnogo okrutnije. Podvrsta koja bi (mutacijom) promijenila strategiju umanjila bi vlastiti fitnes i u roku nekoliko generacija nestala iz populacije. Stabilnost strategije $\mathbf{p}$ u novoj situaciji zahtjeva da mutantska strategija $\boldsymbol{\mu}$ ostvaruje nižu korist od nje, to jest, da se ne uspije proširiti u populaciji $\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}$. Isplata strategije $\mathbf{p}$ u novoj populaciji je $E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}})$, dok je isplata mutantske strategije $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}})$, međutim, iz (3.25) slijedi da su te isplate jednake kao i $E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})$, odnosno $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho})$. Radi jednostavnosti razmatranja, zamislimo 2×2 igru u kojoj su moguće strategije $\mathbf{p}$ i $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}\mathbf{p} & \boldsymbol{\mu}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\mu}\end{matrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}$$

Očekivana isplata strategije $\mathbf{p}$ u borbi protiv miješane strategije $\boldsymbol{\rho} = [(1-\varepsilon)\ \ \varepsilon]$ je prema (3.6)

$$E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = [1 \ \ 0]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1-\varepsilon) \\ \varepsilon \end{bmatrix} = (1-\varepsilon)a + \varepsilon b.$$

Očekivana isplata mutantske strategije $\boldsymbol{\mu}$ protiv miješane strategije $\boldsymbol{\rho}$ je

$$E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}) = (1-\varepsilon)c + \varepsilon d$$

Ako $a > c$ ili $a = c \ \& \ b > d$ isplata strategije $\mathbf{p}$ je sigurno veća od isplate mutantske strategije $\boldsymbol{\mu}$, a to znači da je

$$E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}) > E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}})$$

za bilo koji $\varepsilon \in \langle 0{,}1\rangle$ udio mutanata u populaciji. To znači da će se evolucija protiviti širenju mutanata u populaciji.

Općenito možemo reći da je strategija $\mathbf{p}$ *evolucijski stabilna u odnosu na mutantsku strategiju* $\boldsymbol{\mu}$ ako postoji proizvoljno maleni udio $\varepsilon_0 > 0$ takav da vrijedi

$$E(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}) > E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{T}}) \tag{3.27}$$

za svaki $\varepsilon < \varepsilon_0$. Evolucijski stabilna strategija (ESS) je ona strategija koja je *evolucijski stabilna u odnosu na bilo koju* mutantsku strategiju [30].

3.2.4 Fitnes i reprodukcija

Ako je strategija uspješna, broj nosioca te strategije postupno se povećava, dok manje uspješne strategije stagniraju ili im se udio u populaciji smanjuje. Mjera uspješnosti naziva se *fitnes*. S obzirom da je broj potomaka, iz evolucijske perspektive, jedina relevantna mjera uspješnosti strategije, Martin Nowak nudi sljedeću definiciju: **Fitnes je ne-negativni realni broj koji opisuje brzinu reprodukcije** [59].

U hrvatskoj akademskoj zajednici ne postoji konsenzus po pitanju odgovarajućeg naziva ove veličine. Tako se u matematičkoj literaturi često rabi pojam *korisnost*, dok u antropološkim publikacijama prevladava naziv *podobnost* [60]. U skriptama i seminarskim radovima studenata računalstva često se upotrebljava naziv *dobrota*, osobito kad se govori o genetičkom algoritmu [61]. Primjerice umjesto engleskog naziva *fitness-function* koristi se naziv *funkcija dobrote* . Upravo zbog takvog nesuglasja, u ovoj će se disertaciji uglavnom koristiti naziv fitnes.

Važno je primijetiti da je pojam fitnesa neraskidivo vezan uz pojam replikacije, stoga se način izračunavanja fitnesa klasificira jednako kao što se klasificira i način replikacije. Dva su osnovna modela; (1) diskretna replikacijska dinamika i (2) kontinuirana replikacijska dinamika. Pod replikacijom se podrazumijeva aseksualna reprodukcija kod koje se jedinke razmnožavaju diobom poput bakterija. Oba modela polaze od pretpostavke da populacija veličine N sadrži jedinke različitih strategija, tako da svakoj strategiji S_i pripada N_i jedinki koje prilikom replikacije stvaraju potomstvo koje nosi istu (roditeljsku) strategiju. U svakom trenutku vrijedi

$$N = \sum_{i=1}^{k} N_i, \tag{3.28}$$

Udio (relativna frekvencija) x_i strategije S_i, može se mijenjati u vremenu, ovisno o trenutnom broju jedinki $N_i(t)$ i trenutnoj veličini populacije $N(t)$

$$x_i(t) = \frac{N_i(t)}{N(t)}. \tag{3.29}$$

Razmotrimo kako se udio svake strategije mijenja s vremenom u spomenutim modelima:

(1) **Diskretna replikacijska dinamika** podrazumijeva da vrijeme teče u koracima, a svaki korak predstavlja jednu generaciju. Jedinke se razmnožavaju tako da nema

generacijskog preklapanja (sve nove jedinke rađaju se istovremeno). Fitnes strategije definira se kao omjer broja jedinki te strategije u dvije uzastopne generacije:

$$f_i = \frac{N_i(t+1)}{N_i(t)} \tag{3.30}$$

Jednadžba (3.30) može se primijeniti na cijelu strategiju, ali i na samu jedinku koja nosi tu strategiju. Naime, ako se određena jedinka strategije A duplicira njen fitnes je $f = 2$, ali ako postoji deset jedinki koje nose (tu istu) strategiju A, u narednoj generaciji njih će biti dvadeset $f_A = N_A'/N_A = 20/10 = 2$.

Prosječni fitnes možemo ga definirati kao vrijednost koja povezuje veličinu cijele populacije u promatranom trenutku $t+1$ s veličinom populacije u prethodnoj generaciji:

$$\bar{f} = \frac{N_1' + N_2' + \cdots + N_k'}{N_1 + N_2 + \cdots + N_k} = \frac{N(t+1)}{N(t)} \tag{3.31}$$

Relativna frekvencija i-te strategije u trenutku $t+1$ je

$$x_i(t+1) = \frac{N_i(t+1)}{N(t+1)} = \frac{f_i N_i(t)}{\bar{f} N(t)} \tag{3.32}$$

iz čega slijedi važna relacija koja povezuje relativne frekvencije u dvije uzastopne generacije [30]:

$$x_i(t+1) = \frac{f_i}{\bar{f}} \cdot x_i(t). \tag{3.33}$$

(2) **Kontinuirana replikacijska dinamika** je model u kojem vrijeme teče kontinuirano i u kojem se jedinke razmnožavaju tako da se generacije preklapaju. Uzima se da broj jedinki raste eksponencijalno, prema jednadžbi

$$N_i(t) = N_i(0)e^{r_i t} \tag{3.34}$$

Deriviranjem ove jednadžbe po vremenu dobivamo

$$\dot{N}_\iota = r_i N_i \tag{3.35}$$

gdje je r_i brzina porasta i-te strategije.

Deriviranjem jednadžbe (3.28) dobivamo

$$\dot{N} = \sum_{i=1}^{k} \dot{N}_\iota = \sum_{i=1}^{k} r_i N_i. \tag{3.36}$$

Iskoristimo li (3.29) jednadžba prelazi u sljedeći oblik:

$$\dot{N} = N \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \tag{3.37}$$

Uvedemo li novu veličinu tzv. *prosječni porast populacije* [62]

$$\bar{r} \equiv \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \tag{3.38}$$

jednadžba (3.33) prelazi u

$$\dot{N} = \bar{r} N \tag{3.39}$$

Kako bismo odredili brzinu promjene relativne frekvencije strategije, jednadžbu (3.29) je potrebno derivirati po vremenu

$$\dot{x_\imath} = \frac{d}{dt}\left(\frac{N_i}{N}\right) = \frac{\dot{N_\imath} N - N_i \dot{N}}{N^2}$$

Iskoristimo li (3.31) i (3.35), izraz se pojednostavnjuje

$$\dot{x_\imath} = \frac{r_i N_i}{N} - \frac{N_i \bar{r}}{N} \tag{3.40}$$

i vodi nas na poznatu Taylor-Jonkerovu jednadžbu:

$$\dot{x_\imath} = x_i (r_i - \bar{r}) \tag{3.41}$$

Kod kontinuirane replikacije brzinu porasta r_i smatramo fitnesom i-te strategije, a prosječni porast populacije nazivamo *prosječni fitnes populacije.*

$$f_i \equiv r_i$$

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \tag{3.42}$$

Prema tome

$$\dot{x_\imath} = x_i \left(f_i - \bar{f}\right) \tag{3.43}$$

3.2.5 Kontinuirana replikacijska dinamika u dvokomponentnoj populaciji

Ako se populacija sastoji od dvije strategije A i B, koje se razmnožavaju različitim brzinama r_A i r_B tada će postupno jedna strategija brojčano nadvladati drugu.

$$\dot{x}_A = r_A x_A$$

$$\dot{x}_B = r_B x_B$$

Napišimo Taylor-Jonkerovu jednadžba kontinurane replikacije za svaku komponentu posebno:

$$\dot{x_A} = x_A (r_A - \bar{r})$$

$$\dot{x_B} = x_B(r_B - \bar{r})$$

Prosječni porast populacije, prema (3.38) iznosi

$$\bar{r} = r_A x_A + r_B x_B$$

Iz čega slijedi

$$\dot{x_A} = x_A(r_A - r_A x_A - r_B x_B) = x_A[r_A(1 - x_A) - r_B x_B].$$

S obzirom da vrijedi $x_A + x_B = 1$

$$\dot{x_A} = x_A(r_A x_B - r_B x_B)$$

$$\dot{x_A} = x_A x_B(r_A - r_B) \tag{3.44}$$

Radi jednostavnijeg zapisa uvest ćemo $x \equiv x_A$, pa se (3.44) može zapisati

$$\dot{x} = x(1 - x)(r_A - r_B)$$

U kontinuiranoj dinamici brzina reprodukcije se interpretira kao fitnes, pa slijedi

$$\dot{x} = x(1 - x)(f_A - f_B) \tag{3.45}$$

Kad je $\dot{x} = 0$ tada u populaciji vlada ravnoteža i udjeli strategija se ne mijenjaju, a taj uvjet je zadovoljen u tri slučaja

(1) $x = 0$, u populaciji nema jedinki A tj.cijela populacija je sastavljena isključivo od B

(2) $x = 1$, populacija se sastoji isključivo od A

(3) $f_A = f_B$, strategije imaju jednaki fitnes

3.2.6 Odnos između fitnesa i očekivane isplate

U okviru ETI pretpostavljamo da fitnes odgovara isplati, međutim između tih dviju vrijednosti nije nužno znak jednakosti. Većoj isplati svakako odgovara veći fitnes, ali treba imati u vidu da dueli između jedinki nisu jedini izvor resursa, stoga se pretpostavlja da je ukupan fitnes jedinke zbroj očekivane isplate i tzv.*pozadinskog fitnesa* (koji je isti za sve jedinke) [30].

Svaka jedinka koja primjenjuje čistu strategiju S_i unutar populacije strukture $\boldsymbol{x} = \mathbf{p^T}$, ima očekivanu isplatu prema (3.25)

$$E(S_i, \mathbf{p^T}) = E(S_i, \mathbf{p}) = [0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots 0] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & & h_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

$$E(S_i, \mathbf{p^T}) = (H\mathbf{p^T})_i = [h_{i1} \quad \cdots \quad h_{in}] \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Možemo zaključiti, *očekivana isplata jedinke* strategije S_i , što je ujedno i *očekivana isplata čiste strategije*, u miješanoj populaciji $\boldsymbol{x}$ iznosi

$$E(S_i, \boldsymbol{x}) = [h_{i1} \quad \cdots \quad h_{in}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_j h_{ij} x_j \tag{3.46}$$

Fitnes jedinke, a ujedno i *fitnes strategije* zapisuje se na sljedeći način

$$f_i = E(S_i, \boldsymbol{x}) + \beta \tag{3.47}$$

gdje je β pozadinski fitnes zadane populacije. Ponekad se fitnes označava kao funkcija dviju varijabli $f_i(S_i, \boldsymbol{x})$, kako bi se naglasilo da ovisi o trenutnom stanju populacije $\boldsymbol{x}$. Ovo je osobito značajno kad se uvede replikacija jer se u tom slučaju sastav populacije mijenja iz generacije u generaciju.

Da bismo replikacijske jednadžbe (3.33) i (3.43) izrazili pomoću očekivanih isplata potrebno je povezati prosječni fitnes s prosječnom isplatom. Prosječna isplata u populaciji $\boldsymbol{x} = \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}}$ ekvivalentna je očekivanoj isplati miješane strategije $\mathbf{p}$ u populaciji $E(\mathbf{p}, \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}})$ što je opet jednako očekivanoj isplati u jednom duelu $\mathbf{p}$ kad igra sama protiv sebe $E(\mathbf{p}, \mathbf{p}^{\boldsymbol{T}})$. Prema [30], prosječni fitnes populacije jednak je

$$\bar{f} = E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \beta \tag{3.48}$$

Ako pretpostavimo da se generacije ne preklapaju, udio strategije S_i u momentu $t + 1$ iznosi

$$x_i(t+1) = \frac{E(S_i, \boldsymbol{x}) + \beta}{E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \beta} \cdot x_i(t). \tag{3.49}$$

Treba primijetiti da kod diskretne replikacije pozadinski fitnes β može poprilično utjecati na dinamiku razmnožavanja, dok se u kontinuiranom slučaju preklapajućih generacija taj doprinos poništava

$$\dot{x}_\iota = x_i(f_i - \bar{f})$$

$$\dot{x}_\iota = x_i[E(S_i, \boldsymbol{x}) - E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})] \tag{3.50}$$

3.2.7 Replikacijska dinamika u igri 2×2

Pretpostavimo da se u dvokomponentnoj populaciji igra simetrična igra zadana matricom isplate

$$\begin{matrix} & A & B \\ A & a & b \\ B & c & d \end{matrix}$$

Uzmemo li u obzir jednadžbe (3.45) i (3.47) možemo zapisati da se udio strategije A mijenja prema diferencijalnoj jednadžbi

$$\dot{x} = x(1-x)(E_A - E_B) \tag{3.51}$$

gdje su E_A i E_B očekivane isplate prisutnih strategija.

Prema (3.46) isplate su:

$$E_A = [a \quad b]\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = ax + b(1-x)$$
$$E_B = [c \quad d]\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = cx + d(1-x) \tag{3.52}$$

Prema tome brzina promjene relativne frekvencije strategije A

$$\dot{x} = x(1-x)[(a-b-c+d)x + b - d]. \tag{3.53}$$

Kad je u pitanju ravnotežno stanje populacije, osim trivijalnih rješenja za $x = 0$ i $x = 1$, postoji netrivijalno rješenje za

$$x^* = \frac{d-b}{a-b-c+d} \tag{3.54}$$

Očekivano, ovo rješenje ima potpuno isti matematički oblik kao rješenje (3.17) kod problema Nashove ravnoteže u simetričnoj igri 2×2.

Kako će se udio strategije A mijenjati u vremenu ovisi parametrima matrice isplate. Postoji pet mogućih ishoda

(1) A i B su neutralni. Ovo je slučaj kad matrični elementi zadovoljavaju $a = c$ i $b = d$ pa diferencijalna jednadžba (3.53) daje $\dot{x} = 0$. Kakvi god bili inicijalni udjeli strategija, oni se ne mijenjaju jer obje strategije imaju jednake očekivane isplate neovisno o brojčanim odnosima jedinki u populaciji.

(2) A i B stabilno koegzistiraju u točki ravnoteže x^*. Ovo je slučaj kod igre Jastreb-Golub kad matrični elementi zadovoljavaju $a < c$ i $b > d$. Miješana populacija konvergira prema x^*.

(3) Nestabilna ravnoteža u x^*. Ako vrijedi $a > c$ i $b < d$, tada postoji točka ravnoteže, međutim svaki odmak od ravnoteže vodi prema dominaciji A ili B ovisno o inicijalnom odnosu relativnih frekvencija. Ako $x(0) < x^*$ derivacija $\dot{x} < 0$ pa udio strategija A pada. Vrijedi i obrnuto; ako $x(0) > x^*$ derivacija $\dot{x} > 0$ pa populacija konvergira prema $x_B = 1$.

(4) A dominira. Iz para jednadžbi (3.52) je vidljivo: ako $a > c$ i $b > d$ očekivana isplata E_A je uvijek veća od E_B pa je $\dot{x} > 0$.

(5) B dominira. Ako su parametri isplate takvi da je $a < c$ i $b < d$ tada $\dot{x} < 0$ što znači da strategija A postupno iščezava. Upravo takav je slučaj kod Zatvorenikove dileme.

3.2.8 Replikacijska dinamika u Zatvorenikovoj dilemi

Pretpostavimo da se u dvokomponentnoj populaciji, sastavljenoj od od suradnika C i izdajnika D igra Zatvorenikova dilema zadana matricom isplate

$$\begin{matrix} & C & D \\ C & R & S \\ D & T & P \end{matrix}$$

$$S < P < R < T$$

Ako je udio suradnika x, a udio izdajnika $(1-x)$ tada će, prema (3.52) suradnici u prosjeku zaraditi

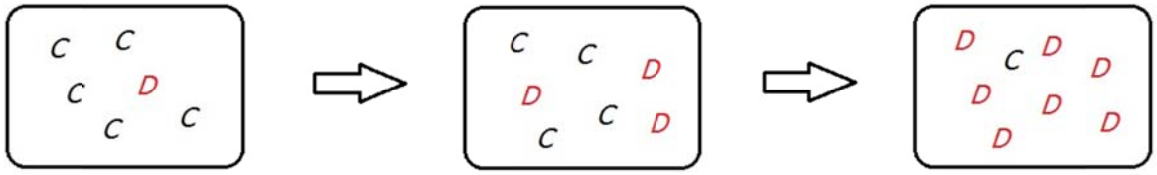
$$E_c = Rx + S(1-x) \tag{3.55}$$

dok će izdajnici zaraditi

$$E_D = Tx + P(1-x) \tag{3.56}$$

S obzirom da vrijedi $R < T$ i $S < P$ evidentno je da suradnici imaju manju isplatu, neovisno o x

$$E_c = Rx + S(1-x) < Tx + P(1-x) = E_D \tag{3.57}$$



SLIKA 6 **EVOLUCIJA FAVORIZIRA IZDAJU**

Iz jednadžbe (3.51) slijedi da se udio suradničke strategije neprestano smanjuje

$$\dot{x} = x(1-x)(E_C - E_D) < 0 \tag{3.58}$$

Drugim riječima, u miješanoj populaciji, izdajnici će uvijek imati veću podobnost odnosno veću vjerojatnost ostavljanja potomstva i prenošenja svojih „izdajničkih gena“. Dakle, udio izdajnika u populaciji nužno se povećava [59]. Ovo je zapravo poznati problem izrabljivača o kojem smo govorili u drugom poglavlju. Iz perspektive matematike Zatvorenikova dilema proizlazi iz podvarijante igre Jastreb-Golub gdje je cijena koju grabežljivci plaćaju dovoljno mala da se grabežljivost ipak isplati. U tom slučaju miroljubiva strategija je dominirana, pa se Nashova ravnoteža čiste strategije nalazi u obostrano agresivnoj strategiji. Slična je situacija i u Zatvorenikovoj dilemi.

3.2.9 Iterirana zatvorenikova dilema i strategija TFT

Iterirana odnosno opetovana varijanta Zatvorenikove dileme (IPD) omogućuje igračima da uzvraćaju izdajom ili suradnjom na prethodne poteze protivnika. Jedna od takvih je i strategija TFT koju smo već opisali u poglavlju 2.2.1. Kako bi stekli malo dublji uvid u matematičku pozadinu IPD, razmotrimo za početak najjednostavniju mogućnost –onu između ultimativnih suradnika (ALLC) i ultimativnih izrabljivača (ALLD). Ako se igra između njih ponovi m puta tada je matrica isplate:

$$\begin{array}{c} \\ \text{ALLC} \\ \text{ALLD} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ALLC} & \text{ALLD} \end{array} \\ \begin{bmatrix} mR & mS \\ mT & mP \end{bmatrix} \end{array}$$

Pretpostavimo da u populaciji postoji $i > 1$ suradnika i $(N - i) > 1$ izrabljivača. Tada će svaki suradnik igrati m partija protiv $(i - 1)$ suradnika i protiv $(N - i)$ izrabljivača. S druge strane, svaki izrabljivač igra m partija protiv $(N - i - 1)$ izrabljivača i protiv i suradnika. Svaki igrač (neovisno o strategiji) stupa u kontakt s ukupno $(N - 1)$ protivnika. Prema tome je očekivana zarada suradnika (normirana s obzirom na broj igrača s kojima ulazi u interakciju):

$$E_{ALLC} = mR\frac{i-1}{N-1} + mS\frac{N-i}{N-1}. \tag{3.59}$$

Očekivana isplata izrabljivača:

$$E_{ALLD} = mT\frac{i}{N-1} + mP\frac{N-i-1}{N-1}. \tag{3.60}$$

Pretpostavimo li da je populacija jako velika, možemo uvesti aproksimacije:

$$\frac{i-1}{N-1} \approx \frac{i}{N} = x,$$
$$\frac{N-i-1}{N-1} \approx \frac{N-i}{N} = 1 - x.$$

Uz aproksimaciju velike populacije, očekivane isplate možemo izraziti u obliku:

$$\begin{aligned} E_{ALLC} &= mRx + mS(1-x) \\ E_{ALLD} &= mTx + mP(1-x). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Zaključujemo:

$$E_{ALLC} = mRx + mS(1-x) < mTx + mP(1-x) = E_{ALLD}.$$

Drugim riječima ALLC uvijek ima manju isplatu od ALLD neovisno o udjelima strategija, čak i ako ALLD čini 99% populacije (uz pretpostavku da postoje barem dva suradnika i dva izrabljivača).

Treba primijetiti da je izračun očekivane isplate iterirane igre (3.61) u beskonačno velikoj populaciji vrlo sličan izračunu jednokratne igre (3.55). Isplata ALLC bi se mogla zapisati i u obliku

$$E_{ALLC} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} mR & mS \\ mT & mP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Razmotrimo sad igru između jednog igrača koji koristi strategiju TFT i jednog igrača koji koristi ALLD. U prvoj igri matrica isplate je

$$\begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix},$$

međutim, u svim ostalim susretima, TFT više ne bira *suradnju*, stoga je matrica:

$$\begin{bmatrix} R & P \\ P & P \end{bmatrix}.$$

Uzevši to u obzir, matrica isplate za igru između TFT protiv ALLD mogla bi se zapisati u obliku

$$\begin{array}{c} \\ \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{array} \\ \begin{bmatrix} mR & S+(m-1)P \\ T+(m-1)P & mP \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.63}$$

što znači da će ukupan odnos između njihovih isplata biti

$$S + (m-1)P < T + (m-1)P.$$

Razlika u zaradi je samo $(T - S)$ i ta frakcija se relativno smanjuje na ukupnu isplatu s brojem odigranih duela. Ipak, činjenica je da jedan TFT igrač uvijek gubi kad igra protiv jednog ALLD igrača. Međutim, kad se igra turnir između više igrača, tada IPD otkriva mogućnost postojanja dvije Nashove ravnoteže. Uz pretpostavku da je populacija jako velika, očekivana isplata TFT je:

$$E_{TFT} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} mR & S+(m-1)P \\ T+(m-1)P & mP \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

$$E_{TFT} = mRx + S(1-x) + (m-1)P(1-x). \tag{3.65}$$

Hoće li TFT nadvladati ALLD ovisi o broju odigranih rundi m i o udjelima strategija u populaciji.

Dominacija strategije TFT zadana je uvjetom

$$mRx + S(1-x) + (m-1)P(1-x) > Tx + (m-1)Px + mPx \tag{3.66}$$

Ako su strategije TFT i ALLD jednako zastupljene u populaciji tada je uvjet stabilnosti TFT:

$$mR\frac{1}{2} + S\frac{1}{2} + (m-1)P\frac{1}{2} > T\frac{1}{2} + (m-1)P\frac{1}{2} + mP\frac{1}{2}$$

$$mR + S > T + mP$$

Možemo zaključiti, ako su TFT i ALLD podjednako zastupljene, strategija TFT je stabilna protiv ALLD ako broj odigranih rundi prelazi kritičnu vrijednost

$$m > \frac{T-S}{R-P}, \tag{3.67}$$

što uz Axelrodove parametre isplate daje $m > 5/2$.

Ako su strategije zastupljene relativnim frekvencijama $x_1 = i/N$ i $x_2 = (n-i)/N$ relacija (3.66) nas vodi na uvjet

$$m > \frac{T - Sx_2/x_1 + P(x_2/x_1 - 1)}{R-P} \tag{3.68}$$

što znači –ako u populaciji prevladava TFT tada je dovoljno da bude ispunjeno $m > 2$ i u tom slučaju nekolicina izrabljivača ne može narušiti suradnju u skupini. Zaključujemo, suradnja se može održati čak i protiv notorno nadmoćne strategije ALLD. Ipak, ne treba brzati s optimističnim zaključcima –ako od samog početka u populaciji prevladava ALLD, suradnja se nikako ne može pojaviti jer mP je uvijek veće od $S + (m-1)P$. Prema tome, IPD ne garantira evoluciju suradnje.

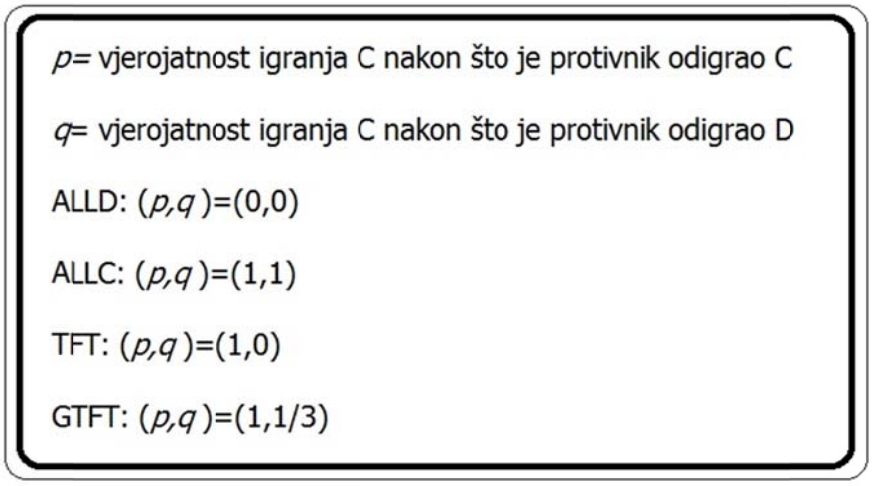
Kad je u pitanju održavanje suradnje u populaciji koja se sastoji isključivo od TFT igrača postoje dva velika problema: (1) problem zadnjeg koraka i (2) problem beskonačnih osveta.

Kad bi se populaciji načinjenoj od TFT-a, pojavila mutacija TFT* koja bi u zadnjem koraku igrala izdajnički, takva bi strategija uvijek pobjeđivala. Međutim, ni ljudi ni životinje ne koriste „indukciju unatraške“ (backward induction) [63]. Naime, organizmi tokom evolucije nisu razvili nagone za strateške igre s čvrsto definiranim brojem interakcija. Upravo suprotno, organizmi su izloženi „otvorenim“ odnosima koji se mogu ponavljati u nedogled. Takva beskonačna igra bila je predstavljena na drugom Axelrodovom turniru (što je opisano u poglavlju 2.2.2). Ako zamislimo IPD kod koje uvijek postoji vjerojatnost sljedeće runde tada je nemoguće u igru ubaciti strategiju koja bi u zadnjem koraku varala. Drugi problem koji se tiče beskonačne spirale osvećivanja, moguće je zaobići tako da se uvede TFT s određenom dozom opraštanja.

3.2.10 Iterirana Zatvorenikova dilema s reaktivnim strategijama

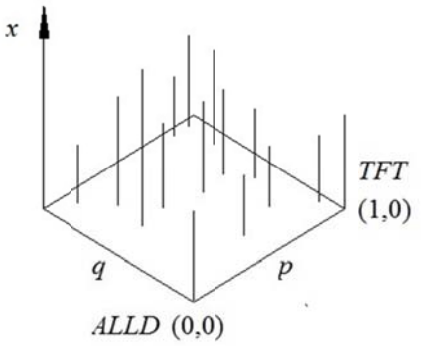
U svom članku iz 1992.g. Nowak i Sigmund ističu da evolucijsku ulogu TFT-a, u suštini, možemo razmatrati na dva načina. Prvo, možemo se pitati hoće li se homogena TFT skupina oduprijeti napadu ostalih strategija, te zatim analitički ispitivati uvjete u kojima TFT jest ili nije evolucijski stabilna strategija. (Npr. usporedbom prosječnih isplata TFT u duelu s ALLD i dr. može se zaključiti da je TFT stabilna strategija ako je ω>2/3). Drugi pristup je simulacija prirodne selekcije; kreće se od široko raspršene distribucije strategija i zatim ih se prepušta „prirodnoj" selekciji. To je bilo učinjeno na drugom Axelrodovom tzv.„ekološkom" turniru gdje su se 63 strategije borile, generaciju za generacijom, ali svaki put s frekvencijom koja je bila proporcionalna zaradi prethodne generacije. Međutim, Nowak se kritički osvrće na Axelrodov pristup: „Sudionici tog turnira dobrim su dijelom bili teoretičari igara, koji teško da mogu biti reprezentativni primjeri strategija u eko-sustavu" [28].

Kako bi dobili na realističnosti i kako bi se što više približili stvarnim situacijama iz prirode, Nowak i Sigmund su uveli određenu nesigurnost u povlačenju poteza svojih igrača. Taj pristup Nowak komentira: „To bi trebalo oponašati biološke interakcije. Igrači mogu pogrešno interpretirati tuđi potez (ili identitet) ili nespretno sprovesti vlastite intencije" [28]. Dakle, za razliku od autora stvarnih i simuliranih IPD koje su bile provedene prije ove studije, Nowak i Sigmund svoje igrače nisu determinirali nepromjenjivim strateškim algoritmima, nego su svakoj strategiji pridružili vjerojatnosti suradnje nakon protivničke suradnje, odnosno izdaje.

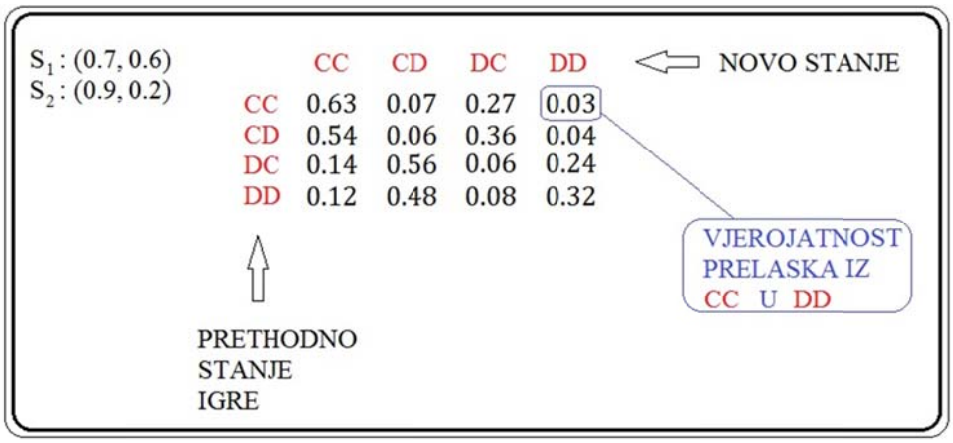


Slika 7 Reaktivne strategije. Strategija GTFT odnosno "Velikodušna milo-za-drago" zadana je uređenim parom (1,1/3). S obzirom da je p=1, ona sigurno surađuje nakon što je protivnik surađivao. Vjerojatnost q=1/3 znači da oprašta izdaju svaki treći put.

Reaktivna strategija pojedinog igrača zadana je uređenim parom (p,q), gdje su p i q su uvjetne vjerojatnosti za suradnju nakon protivničke suradnje, odnosno nakon izdaje. U nekim modelima (u slučaju konačnog broja rundi), uzima se u obzir vjerojatnost suradnje u prvoj rundi. Tada se reaktivna strategija pojedinog igrača može predstaviti uređenom trojkom (y,p,q), gdje je y vjerojatnost suradnje u prvoj rundi, a p i q su uvjetne vjerojatnosti za suradnju nakon protivničke suradnje, odnosno nakon izdaje. Tada će TFT biti predstavljena s (1,1,0), ultimativno izdajnička ALLD (0,0,0), ultimativno suradnička strategija ALLC (1,1,1), sumnjičavi tit-for-tat STFT (0,1,0) itd. Međutim, Nowak i Sigmund su razmatrali beskonačnu IPD (krajnji slučaj, ω=1), što unači da je prvi korak ionako nevažan. Dakle, svaka strategija može se predstaviti naprosto kao točka (p,q) u jediničnom kvadratu. Treća dimenzija, Nowaku i Sigmundu poslužila je za grafički prikaz broja igrača, odnosno njihove relativne frekvencije. Budući da ishod jedne runde nije strogo determiniran prethodnom rundom, potrebno je odrediti vjerojatnosti. Četiri su moguća ishoda $(\mathrm{CC}, \mathrm{CD}, \mathrm{DC}, \mathrm{d.d.})$ što znači da svakoj rundi igre pripada uređena četvorka koju nazivamo stanje sustava $\vec{\alpha} = (p_{CC}, p_{CD}, p_{DC}, p_{DD})$. Primjerice, ako je u k-toj rundi vjerojatnost svakog ishoda jednaka, tada ćemo takvo stanje zapisati kao $\vec{\alpha}_k = (0.25,0.25,0.25,0.25)$. Možemo se zapitati kolika je vjerojatnost da ishod sljedeće runde bude CC. Vjerojatnost prelaska iz CC u CC je $p_1 p_2$, ali ako je ishod prethodne runde bio CD (jedan igrač surađuje, a drugi izdaje) tada je vjerojatnost da će prvi surađivati q_1, a vjerojatnost da će drugi surađivati p_2, dakle, vjerojatnost prelaska je u tom slučaju $q_1 p_2$. Vjerojatnost prelaska iz DC u CC je $p_1 q_2$, a iz DD u CC je $q_1 q_2$.



Slika 8 Frekvencija igrača u nekom trenutku igre.



Slika 9 Primjer Markovljeve tranzicijske matrice za strategije S_1(0.7,0.6) i S_2(0.9,0.2)

Ukupna vjerojatnost da će sustav iz $\vec{\alpha}_k = (0.25,0.25,0.25,0.25)$ prijeći u CC je

$$p_{CC} = 0.25p_1p_2 + 0.25q_1p_2 + 0.25q_1p_2 + 0.25q_1q_2,$$

Radi preglednosti, prijelaz iz jednog stanja u drugo, možemo izraziti jednadžbom:

$$\vec{\alpha}_{k+1} = \vec{\alpha}_k M \tag{3.69}$$

gdje je M tranzicijska matrica 4×4 [64] :

$$M = \begin{bmatrix} p_1p_2 & p_1(1-p_2) & (1-p_1)p_2 & (1-p_1)(1-p_2) \\ q_1p_2 & q_1(1-p_2) & (1-q_1)p_2 & (1-q_1)(1-p_2) \\ q_1p_2 & p_1(1-q_2) & (1-p_1)q_2 & (1-p_1)(1-q_2) \\ q_1q_2 & q_1(1-q_2) & (1-q_1)q_2 & (1-q_1)(1-q_2) \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Ako imamo n ishoda s različitim vjerojatnostima $(p_1, p_{2,\dots}p_n)$ i ako su odgovarajuće isplate za svaki od tih ishoda $e_1, e_2, \dots, e_n$ tada očekivanu isplatu u jednom pokusu možemo predstaviti kao umnožak vektora vjerojatnosti i vektora isplate:

$$E = [p_1\ p_2 \dots p_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \therefore \\ e_n \end{bmatrix}$$

Primjenimo taj način razmatranja na stohastičku IPD. Očekivana isplata strategije S_1 u duelu sa strategijom S_2 u $(k+1)$-oj rundi može se izraziti kao umnožak vektora stanja i vektora isplate:

$$E(S_1, S_2) = \vec{\alpha}_{k+1} \cdot \begin{bmatrix} R \\ S \\ T \\ P \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

Odnosno, pomoću matrice prijelaza:

$$E(S_1, S_2) = \vec{\alpha}_k \cdot M \cdot \begin{bmatrix} R \\ S \\ T \\ P \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Dakle, poznavajući stanje igre u k-tom koraku, možemo izračunati očekivanu isplatu u sljedećem koraku. Čini se da bi za veliki broj rundi, izračun ukupne očekivane isplate mogao biti prilično zamoran. Međutim, stanje igre već nakon nekoliko koraka prelazi u tzv.stacionarno stanje π, za koje vrijedi

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}M, \tag{3.73}$$

što znači da se vrijednosti $(p_{CC}, p_{CD}, p_{DC}, p_{DD})$ više ne mijenjaju. To ujedno znači da će očekivana isplata u svakom sljedećem koraku biti ista.

Može se generalno pokazati da je stacionarno stanje jednako:

$$\vec{\pi} = [s_2 s_2\ ,\ \ s_1(1-s_2), (1-s_1)s_2, (1-s_1)(1-s_2)\ ] \tag{3.74}$$

gdje su

$$s_1 = \frac{q_2(p_1-q_1)+q_1}{1-(p_1-q_1)(p_2-q_2)} \quad \text{i} \quad s_2 = \frac{q_1(p_2-q_2)+q_2}{1-(p_1-q_1)(p_2-q_2)} \tag{3.75}$$

vjerojatnosti da igrači igraju kooperativno u stacionarnom stanju [65]. Isplata strategije S_1 u duelu sa S_2, u stacionarnom stanju, slijedi iz relacija (3.62) i (3.65):

$$E(S_1, S_2) = Rs_2 s_2 + Ss_1(1-s_2) + T(1-s_1)s_2 + P\,(1-s_1)(1-s_2) \tag{3.76}$$

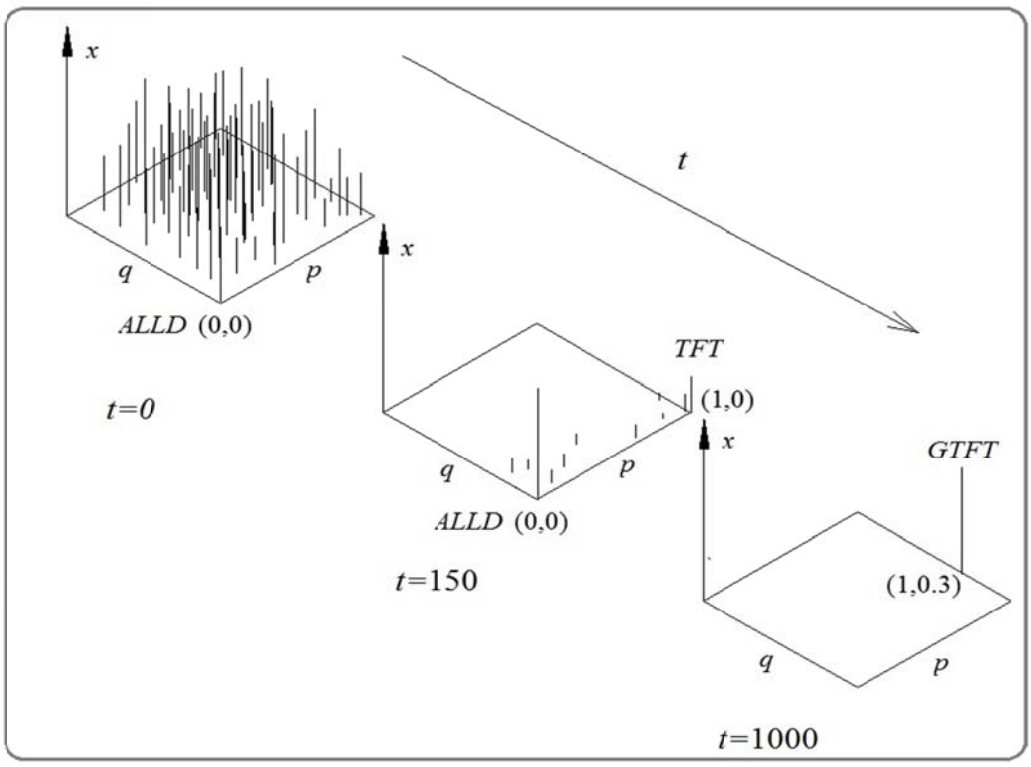
Odnosno, uz Axelrodove parametre:

$$E(S_1, S_2) = 1 + 4s_2 - s_1 - s_1 s_2. \tag{3.77}$$

Evidentno je da prema ovoj formuli ne možemo računati isplatu za TFT S(1,0) jer bi nam se u relaciji (3.75) u nazivniku pojavila nula. Ali svi slučajevi za koje vrijedi $(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) = 1$ predstavljaju takozvane deterministčke strategije i za njih se lako može izračunati isplata i bez formule (3.77). Tom problemu se može doskočiti i aproksimacijom $(0.99,0)$ umjesto $(1,0)$ što je primjerice učinjeno u priloženom programu (poglavlje 4.2). Izabravši nasumični uzorak reaktivnih strategija S_1 do S_{100} uniformno distribuiranih po površini jediničnog kvadrata (s jednakom početnom frekvencijom), Nowak i Sigmund pustili su sustav da evoluira. Relativna frekvencija svake sljedeće generacije bila je zadana diskretnom replikacijom pomoću jednadžbe (3.33):

$$x_i' = x_i \frac{f_i}{\bar{f}}$$

Kad se simulacija turnira pusti u „pogon“, strategijama koje su blizu (0,0) frekvencija raste, dok ostale strategije vrlo brzo nestaju. Drugim riječima, preostaje praktički samo ALLD. Naime, daleko najveći udio strategija u uzorku ima visoke q-vrijednosti i ne osvećuje se izrabljivačima. Nowak slikovito kaže: „Kraj bogate zalihe naivaca, isplati se biti izdajnik.“



Slika 10 Evolucija suradnje u heterogenoj populaciji reaktivnih strategija

Ipak, ishod se dramatično mijenja negdje oko 150-te generacije, ako je jedna od početnih strategija (dodanih ručno ili slučajno) bliska strategiji TFT. Autori kažu: „Preokret se događa u momentu kad su naivčine toliko desetkovane da se izrabljivači više nemaju čime hraniti. Isprva pomalo, a zatim uzimajući sve jači zamah, osvetnici se vraćaju i sada izrabljivači iščezavaju“. Interesantno, strategija TFT i njoj slične strategije (koje su izazvale ovaj preokret) same neće profitirati: uklonivši izrabljivače, bivaju smijenjene od strane strategije koja je najsličnija GTFT (tzv. velikodušna strategija koja oprašta oko 30% izdajničkih poteza). Evolucija tada prestaje.

Čini se da u evoluciji suradnje strategija TFT ima ulogu policije, koja beskompromisno kažnjava odmetnike i na taj način „čisti“ sustav od izrabljivača. Međutim, kad je uspostavljena suradnja u sustavu, tada je bolje imati određeni postotak opraštajućih poteza jer svaka i najmanja pogreška (npr.komunikacijski šum) kod igrača TFT uzrokuje spiralu osvete.

3.3 Evolucijska teorija igara u konačno velikim populacijama

3.3.1 Moranov proces

Pretpostavimo da postoji populacija zadane veličine N koja se sastoji od dva tipa jedinki, tipa A i tipa B, koje se razmnožavaju i umiru istom brzinom. Ove jedinke možemo smatrati rivalskim mutacijama jedne životinjske vrste ili stanicama zdravog i kancerogenog tkiva koje nose normalan (A) i mutirani genotip (B), ali isto tako možemo ih smatrati agentima koji koriste dvije različite strategije neke igre. U svakom vremenskom koraku jedna nasumično odabrana jedinka se reproducira, a jedna nasumično odabrana jedinka biva eliminirana, tako da je ukupan broj jedinki isti [66]. Takav proces naziva se **Moranov proces.**

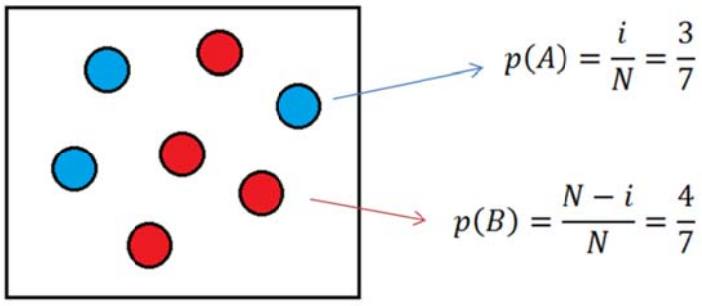
Razlikujemo tri vrste Moranovog procesa:

i) Neutralni drift

ii) Konstantna selekcija

iii) Selekcija ovisna o udjelu vrste.

U prvom slučaju sve jedinke su ravnopravne spram prirodne selekcije. Moglo bi se reći da su obje vrste podjednako dobro adaptirane okolišu i nijedna nema prednost ni u kom smislu. U drugom slučaju postoji razlika u fitnesu između A i B pa će se jedna vrsta brže razmnožavati od druge. U trećem slučaju fitnes ovisi o relativnoj frekvenciji odnosno u udjelu vrste u populaciji na neki način koji nipošto nije trivijalan; primjerice u slučaju Zatvorenikove dileme fitnes suradnika raste s frekvencijom, ali u slučaju predatora i plijena, predatorima fitnes pada što ih je više u populaciji. Postavlja se pitanje kolika je vjerojatnost da populaciju preuzme jedna ili druga vrsta. Kako bi odgovorili na to pitanje, za početak ćemo razmotriti tzv.*neutralni drift* tj. slučaj kad obje strategije imaju isti fitnes.



Slika 11 Populacija koja se sastoji od dva fenotipa (dvije strategije)

Vjerojatnost da nasumičnim odabirom za reprodukciju bude izabrana jedinka A jednaka je omjeru trenutnog broja jedinki A i ukupnog broja svih jedinki u populaciji $p(A) = i/N$ gdje je i broj jedinki tipa A, a N veličina populacije. Vjerojatnost odabira jedinke A za eliminaciju ista je kao i vjerojatnost odabira za reprodukciju $p(A^*) = i/N$. Prema tome, vjerojatnost da će dvije jedinke odabrane za razmnožavanje i umiranje biti izabrane iz skupine A jednaka je

$$p(A \,\&\, A^*) = p(A) \cdot p(A^*) = \left(\frac{i}{N}\right)^2.$$

S druge strane, broj jedinki B je $N - i$, pa je vjerojatnost da će se reproducirati ili eliminirati upravo jedinka tipa B jednaka $p(B) = p(B^*) = (N - i)/N$. Vjerojatnost da će jedinke odabrane za razmnožavanje i umiranje biti izabrane iz skupine B jednaka je

$$p(B \,\&\, B^*) = p(B) \cdot p(B^*) = \left(\frac{N - i}{N}\right)^2.$$

Međutim, mogući su i scenariji u kojima je je jedna jedinka odabrana iz A, a druga iz B i obrnuto. Vjerojatnost da se reproducira A i eliminira B jednaka je

$$p(A \,\&\, B^*) = \frac{i(N - i)}{N^2}.$$

Vjerojatnost da se eliminira A, a istodobno reproducira B

$$p(A^* \,\&\, B) = \frac{(N - i)i}{N^2}.$$

Očito, u svakoj iteraciji moguća su četiri scenarija. Ako su jedinke za reprodukciju i za eliminaciju izabrane iz *iste* skupine tada se omjer između između A i B ne mijenja. Ako pak za reprodukciju izaberemo A, a za eliminaciju B tada broj jedinki A raste na $i + 1$, dok se u zadnjem scenariju smanjuje na $i - 1$.

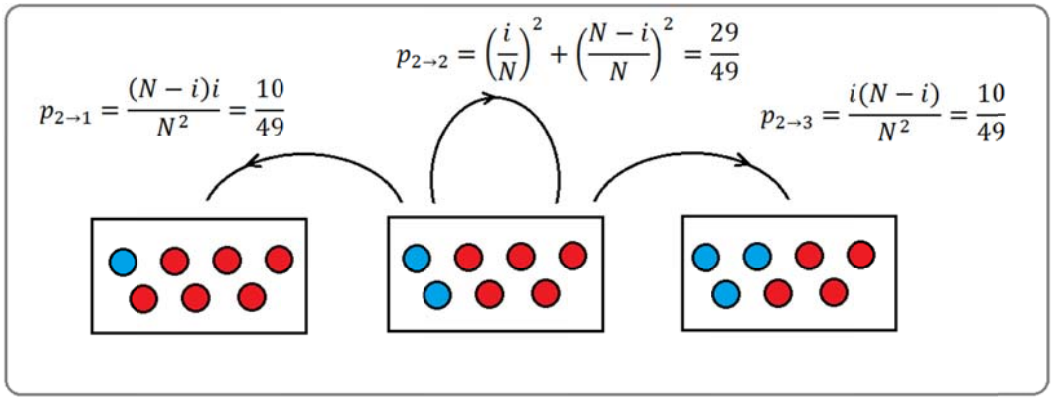
$$\left(\frac{i}{N}\right)^2 + \left(\frac{N - i}{N}\right)^2 + \frac{i(N - i)}{N^2} + \frac{(N - i)i}{N^2} = 1 \tag{3.78}$$

omjer A i B se ne mijenja — A raste na $i + 1$ — A pada na $i - 1$

Zbroj vjerojatnosti ovih četiriju scenarija jednak je *jedan*, međutim prva dva scenarija tretirat ćemo kao jedan ishod – pri kojem se stanje populacije nije promijenilo. Stanje populacije označavat ćemo oznakom i dok ćemo vjerojatnosti tranzicija označavati s $p_{i\to j}$.

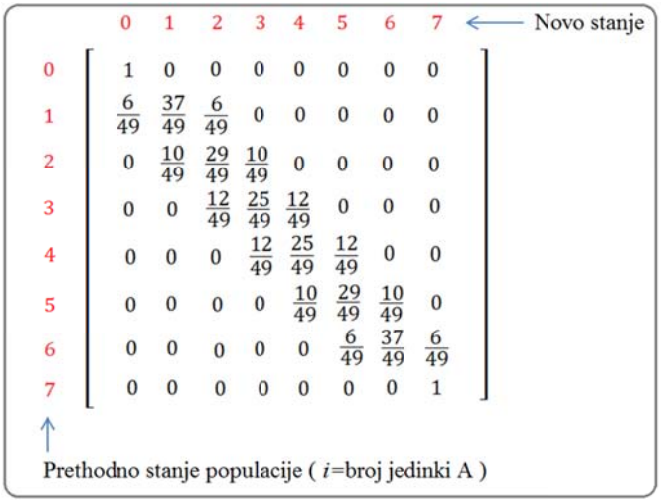
VJEROJATNOSTI TRANZICIJE		
Broj jedinki A pada na $i-1$	**Broj jedinki A ostaje isti**	**Broj jedinki A raste na $i+1$**
$p_{i\to i-1}=\frac{(N-i)i}{N^2}$	$p_{i\to i}=\left(\frac{i}{N}\right)^2+\left(\frac{N-i}{N}\right)^2$	$p_{i\to i+1}=\frac{i(N-i)}{N^2}$

Tablica 16 Vjerojatnosti tranzicije



Slika 12 Tranzicije u susjedna stanja.

Valja primijetiti da su tranzicijske vjerojatnosti za skok ili pad u susjedno stanje kod neutralnog drifta jednake $p_{i\to i-1}=p_{i\to i+1}$, iako same vjerojatnosti odabira ovise o relativnim frekvencijama. Prijelazi iz starog u novo stanje mogu se prikazati tranzicijskom matricom. Primjerice za populaciju koja se sastoji od $N=7$ jedinki, tranzicijska matrica izgleda ovako:



Slika 13 Primjer tranzicijske matrice Moranovog procesa

Krajnja stanja $i=0$ i $i=N$ su nepromjenjiva. Naime vjerojatnosti prijelaza iz tih stanja u bilo drugo stanje su nemoguća, pa se ta stanja nazivaju **apsorpcijskim stanjima.**

$$p_{0\to 0}=1\,,p_{0\to j}=0\;\forall j\neq 0;$$

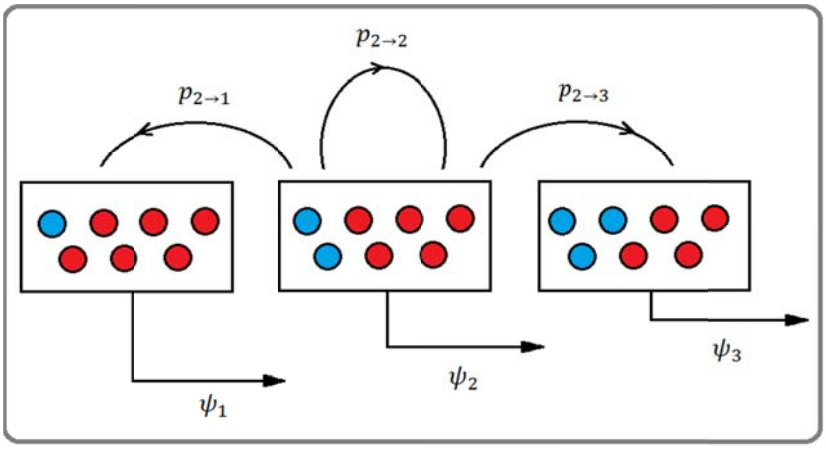
$$p_{N\to N}=1\,,p_{N\to j}=0\;\forall j\neq N.$$

3.3.2 Vjerojatnost fiksacije u slučaju neutralnog drifta

Kad populacija dođe u apsorpcijsko stanje $i = 0$ ili $i = N$, tada se ona u potpunosti sastoji od jednog genotipa (jedne strategije) što znači da je nemoguće restaurirati drugu strategiju i takva populacija ostaje u apsorpcijskom stanju zauvijek (pod uvjetom da nema mutacija). Postavlja se pitanje kolika je vjerojatnost da populacija, krenuvši iz stanja $i \neq 0, N$ završi u apsorpcijskom stanju. Također, posebno je značajno pitanje kolika je vjerojatnost da završi u apsorpcijskom stanju krenuvši upravo iz $i = 1$ tj. da od jedne usamljene jedinke koja nosi strategiju A izraste cijela populacija. Takva vjerojatnost naziva se *fiksacijska vjerojatnost.* Označimo s ψ_i **vjerojatnost da populacija završi u stanju *N* ako je krenula iz stanja *i***. S obzirom da populacija može direktno prelaziti jedino u susjedna stanja, vjerojatnost ψ_i može se pomoću tranzicijskih vjerojatnosti povezati s apsorpcijskim vjerojatnostima susjednih stanja $\psi_{i\pm1}$, stoga jednadžba sadrži tri člana

$$\psi_i = p_{i\to i-1}\psi_{i-1} + p_{i\to i}\,\psi_i + p_{i\to i+1}\psi_{i+1} \tag{3.79}$$

gdje su $\psi_{i\pm1}$ vjerojatnosti da populacija završi u apsorpcijskom stanju krenuvši iz stanja $i \pm 1$.



Slika 14 Tri moguća scenarija za penjanje populacije iz i=2 prema apsorpcijskom stanju i=N

Važno je istaknuti dvije (očigledne) istine:

$$\psi_0 = 0$$
$$\psi_N = 0$$

jer je iz apsorpcijskih stanja nemoguće doći u bilo koje drugo stanje s obzirom da je u tim stanjima populacija homogena tj. sastoji se od istih jedinki koje nose isključivo strategiju A ili strategiju B.

Također treba uočiti da je fiksacijska vjerojatnost

$$\psi_1 = \frac{1}{N}. \tag{3.80}$$

Naime, u slučaju neutralnog drifta sve jedinke imaju jednaki fitnes, pa prema tome svaka jedinka ima jednake šanse da bude izabrana kako bi postala predak cijele populacije. Relacija (3.80) ima mnogo veći značaj no što se može činiti s obzirom na njenu matematičku jednostavnost. Budući da je $1/N$ vjerojatnost da jedan jedini član strategije A preuzme cijelu populaciju neovisno o svojoj

kvaliteti (naprosto neutralnim driftom) upravo je ta vrijednost idealna referenca za usporedbu s fiksacijskim vjerojatnostima u kompliciranijim slučajevima. Kasnije, prilikom razmatranja Zatvorenikove dileme u okviru Moranovog procesa, glavni kriterij za utvrđivanje bolje strategije bit će upravo pitanje je li vjerojatnost fiksacije veća ili manja od $1/N$.

Razmotrimo još kakve su vjerojatnosti prelaska u apsorpcijska stanja kad se populacija nalazi u nekom općenitom stanju i. U slučaj neutralnog drifta gdje su tranzicijske vjerojatnosti za uspon u $(i+1)$ ili pad u $(i-1)$ smijemo pisati

$$p_{i\to i-1} = p_{i\to i+1} \equiv \hat{p}. \tag{3.81}$$

Uvažavajući činjenicu da je zbroj tranzicijskih vjerojatnosti jednak *jedan*, slijedi

$$p_{i\to i} = 1 - p_{i\to i-1} - p_{i\to i+1}$$
$$p_{i\to i} = 1 - 2\hat{p} \tag{3.82}$$

Jednadžba (3.79) koja povezuje apsorpcijske vjerojatnosti susjednih stanja prelazi u jednostavniji oblik

$$\psi_i = \hat{p}\psi_{i-1} + (1-2\hat{p})\,\psi_i + \hat{p}\psi_{i+1}$$

Iz čega slijedi:

$$\psi_{i+1} = 2\,\psi_i - \psi_{i-1} \tag{3.83}$$

Uvrštavanjem vrijednosti $i = 1, 2, 3, \ldots$ slijedi niz

$$\psi_2 = 2\psi_1,$$
$$\psi_3 = 2\psi_2 - \psi_1 = 4\psi_1 - \psi_1 = 3\psi_1,$$
$$\psi_4 = 2\psi_3 - \psi_2 = 6\psi_1 - 2\psi_1 = 4\psi_1,$$
$$\ldots$$

Dokažimo indukcijom da je $\psi_i = i\,\psi_1$. Baza indukcije za $k = 1$ već je postavljena, stoga možemo preći na korak. Ako pretpostavimo $k = i+1$, tada

$$\psi_{i+1} = 2\,\psi_i - \psi_{i-1} = 2i\,\psi_1 - (i-1)\psi_1$$
$$\psi_{i+1} = (i+1)\,\psi_1$$

Q.E.D.

S obzirom da je $\psi_1 = 1/N$, možemo zaključiti da u slučaju neutralnog drifta vjerojatnost apsorpcije u homogenu populaciju iz $i \to N$ iznosi:

$$\psi_i = \frac{i}{N}. \tag{3.84}$$

Relacija (3.81) intuitivno je jasna – s obzirom da nema preferirane strategije, vjerojatnost prijelaza u apsorpcijsko stanje $j = N$ u kojem se populacija sastoji isključivo od A, odgovara relativnoj frekvenciji strategije A. Ako se u populaciji nalazi, primjerice 33% jedinki A, tada je vjerojatnost da A nadvlada B jednaka 33%. U tom slučaju vjerojatnost da B prevlada u populaciji je 66%, odnosno

$$\chi_i = \frac{N-i}{N} = 0.66.$$

Općenito vjerojatnost prijelaza prema apsorpcijskom stanju $j = 0$ u kojem se populacija sastoji isključivo od B

$$\chi_i = \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N} = 1 - \psi_i. \tag{3.85}$$

3.3.3 Vjerojatnost fiksacije u općem slučaju

Razmotrimo Moranov proces u slučaju kad prirodna selekcija preferira jednu u odnosu na drugu vrstu. U tom slučaju tranzicijske vjerojatnosti prema smanjenju i povećanju udjela jedne vrste u odnosu na drugu nisu iste $p_{i\to i-1} \neq p_{i\to i+1}$.

Ako uvedemo notaciju

$$\beta_i \equiv p_{i\to i-1}$$

$$\alpha_i \equiv p_{i\to i+1}$$

tada se vjerojatnost da populacija ostane nepromijenjena može zapisati u obliku

$$p_{i\to i} = 1 - \alpha_i - \beta_i.$$

Jednadžba apsorpcijskih vjerojatnosti (3.79) , u takvoj notaciji, poprima sljedeći oblik:

$$\psi_i = \beta_i\psi_{i-1} + (1 - \alpha_i - \beta_i)\,\psi_i + \alpha_i\psi_{i+1} \tag{3.86}$$

S obzirom da je $\psi_0 = 0$, iz jednadžbe (3.82) uz $i = 1$ slijedi

$$\psi_1 = (1 - \alpha_1 - \beta_1)\psi_1 + \alpha_1\psi_2 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\psi_1. \tag{3.87}$$

Uvedemo li supstituciju $\gamma_i \equiv \beta_i/\alpha_i$

$$\psi_2 = (1 + \gamma_1)\psi_1. \tag{3.88}$$

Sličnim postupkom lako možemo pokazati da vrijedi:

$$\psi_3 = (1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2)\psi_1,$$

$$\psi_4 = (1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3)\psi_1,$$

odnosno generalno

$$\psi_N = \left(1 + \gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \cdots + \prod_{k=1}^{N-1}\gamma_k\right)\psi_1$$

$$\psi_N = \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{j}\gamma_k\right)\psi_1 \tag{3.89}$$

Budući da je vjerojatnost $\psi_N = 1$ slijedi da je

$$1 = \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{j} \gamma_k\right) \psi_1 \tag{3.90}$$

Vjerojatnost ψ_1 da populacija iz stanja $i = 1$ dođe do apsorpcijskog stanja naziva se *vjerojatnost fiksacije* te se najčešće definira kao vjerojatnost da jedna jedina (mutantska) individua preuzme cijelu populaciju. Uobičajeno se označava s ρ_A. Koristeći relaciju (3.90) konačno možemo zaključiti –vjerojatnost da jedan agent A preuzme populaciju iznosi:

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{j} \gamma_k}. \tag{3.91}$$

Vjerojatnost fiksacije χ_{N-1} da jedan jedini agent B preuzme cijelu populaciju prema relaciji (3.85) iznosi $\chi_{N-1} = 1 - \psi_{N-1}$ iz čega slijedi

$$\rho_B = \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \gamma_k}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{j} \gamma_k}, \tag{3.92}$$

gdje je $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{p_{i\to i-1}}{p_{i\to i+1}}$ [59].

Omjer fiksacijskih vjerojatnosti ρ_B/ρ_A govori nam koja strategija ima veću vjerojatnost preuzimanja populacije. Podijelimo li (3.90) s (3.92) dobivamo

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \prod_{k=1}^{N-1} \gamma_k. \tag{3.93}$$

Ako $\rho_B/\rho_A > 1$ tada B ima prednost tj.možemo reći da prirodna selekcija preferira strategiju B.

3.3.4 Vjerojatnost fiksacije u Moranovom procesu uz stalnu selekciju

Pretpostavimo sad da postoji konstantna razlika između fitnesa rivalskih strategija. Kako bi primijenili dobiveni izraz (3.91), potrebno je utvrditi $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{p_{i\to i-1}}{p_{i\to i+1}}$, što znači da treba odrediti *vjerojatnosti odabira* za strategije prisutne u populaciji. Naime, tranzicijske vjerojatnosti $\alpha_i = p_{i\to i+1} = p(A)p(B^*)$ i $\beta_i = p_{i\to i-1} = p(A^*)p(B)$ zapravo su umnošci vjerojatnosti *odabira za reprodukciju* jedne strategije i vjerojatnosti *eliminacije* druge strategije. U modelu Moranovog procesa, općenito rečeno, vjerojatnost eliminacije je *ista* za obje strategije i u slučaju neutralnog drifta i u slučaju konstantne selekcije. Prema tome, jedina razlika između neutralnog drifta i drifta s konstantnom selekcijom proizlazi iz toga što su u potonjem slučaju vjerojatnosti odabira za A i B različite jer su vrijednosti fitnesa strategija različite $f_A \neq f_B$. U Moranovom modelu uobičajeno je

uzeti vjerojatnost selekcije proporcionalno relativnom fitnesu (ovo pravilo se kod genetičkog algoritma naziva *roulette wheel selection*) [57]

$$p(A) = \frac{f_A i}{f_A i + f_B(N-i)}$$
$$p(B) = \frac{f_B(N-i)}{f_A i + f_B(N-i)} \tag{3.94}$$

Vjerojatnost eliminacije ista je kao i kod neutralnog drifta $p(A^*) = i/N$, $p(B^*) = (N-i)/N$.
Prema tome, tranzicijske vjerojatnosti su:

$$\beta_i = p_{i\to i-1} = p(A^*)p(B) = \frac{f_B(N-i)}{f_A i + f_B(N-i)}\frac{i}{N}$$
$$\alpha_i = p_{i\to i+1} = p(A)p(B^*) = \frac{f_A i}{f_A i + f_B(N-i)}\frac{N-i}{N} \tag{3.95}$$

Radi pojednostavnjenja računa često se uvodi omjer fitnesa $r = f_A/f_B$

$$\left.\begin{aligned}\beta_i &= \frac{N-1}{ri+N-1}\cdot\frac{i}{N}\\ \alpha_i &= \frac{ri}{ri+N-i}\cdot\frac{N-i}{N}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{1}{r} \tag{3.96}$$

Iz općenite jednadžbe (3.91) slijedi fiksacijska vjerojatnost u slučaju konstantne selekcije:

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{r}} \tag{3.97}$$

S obzirom da je $\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^j}$ izraz se pojednostavnjuje

$$\rho_A = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{r^j}}$$

Treba primijetiti da izraz u nazivniku predstavlja sumu geometrijskog niza

$$1 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{r^j} = \frac{1}{r^0} + \frac{1}{r^1} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^{N-1}} = \frac{1-1/r^N}{1-1/r}$$

pa tražene fiksacijske vjerojatnosti možemo izraziti sljedećim jednakostima

$$\rho_A = \frac{1-1/r}{1-1/r^N}$$
$$\rho_B = \frac{1-r}{1-r^N}. \tag{3.98}$$

Ako strategija A ima selekcijsku prednost $r > 1$ tada će i omjer fiksacijskih vjerojatnosti biti veći od jedan (u svakoj populaciji koja ima dvije ili više jedinki)

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = r^{N-1} > 1.$$

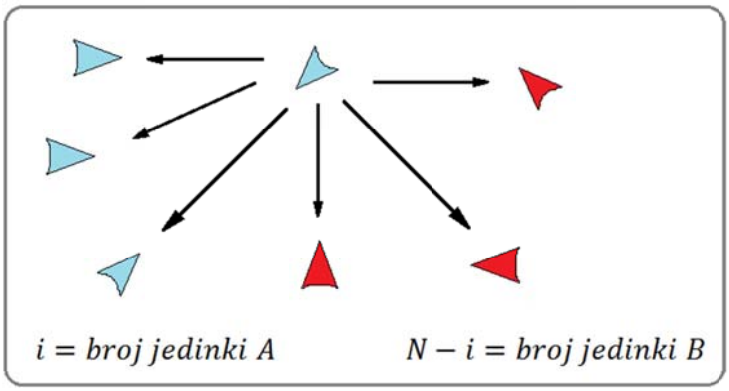
Uz $r > 1$ u slučaju vrlo velikih populacija:

$$\rho_A = \frac{1 - 1/r}{1 - 1/r^N} \approx 1 - \frac{1}{r}.$$

3.3.5 Zatvorenikova dilema u Moranovom modelu

Zamislimo populaciju koja se sastoji od $N = N_A + N_B$ jedinki gdje je $N_A = i$ broj jedinki koje nose strategiju A i $N_B = N - i$ broj jedinki koje nose strategiju B. Pretpostavimo da jedinke igraju Iteriranu zatvorenikovu dilemu s matricom isplate

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



Slika 15 IPD u Moranovoj populaciji.

Za svaku jedinku A postoji $N - 1$ jedinki u populaciji s kojima ta jedinka može igrati Zatvorenikovu dilemu. Neke od tih $N - 1$ jedinki pripadaju skupu A, a neke skupu B. Postoji $(i - 1)$ drugih jedinki A s kojima može igrati igru. Također postoji $(N - i)$ jedinki B s kojima može igrati.

Prema tome, vjerojatnost da jedinka A uđe u interakciju s drugom jedinkom A je

$$p_{AA} = \frac{i - 1}{N - 1},$$

dok je vjerojatnost da uđe u interakciju s jedinkom B

$$p_{AB} = \frac{N - i}{N - 1}$$

Slično možemo raspisati vjerojatnosti za strategiju B, pa možemo zaključiti da su očekivane isplate

$$E_A = a\frac{i - 1}{N - 1} + b\frac{N - i}{N - 1},$$

$$E_B = c\frac{i}{N - 1} + d\frac{N - i - 1}{N - 1}. \qquad (3.99)$$

Prema (3.47) fitnes se može zapisati kao zbroj isplate i pozadinskog fitnesa. Međutim, Nowak i Fudenberg [67] uvode parametar w i predlažu

$$f_A = 1 - w + wE_A$$
$$f_B = 1 - w + wE_B \tag{3.100}$$

Gdje je w tzv. intenzitet selekcije. Ako $w = 0$ tada igra uopće ne utječe na selekciju i u tom slučaju su obje strategije neutralne po pitanju prirodne selekcije. Što je intenzitet w veći od nule, to je fitnes bliži isplati. Ako $w = 1$, fitnes u potpunosti ovisi o igri i tada govorimo o *jakoj selekciji*. Međutim, smatra se da u prirodnom okružju interakcije između organizama nisu glavni izvor resursa [30], te je, prema tome, *slaba selekcija* realističnija. Ako na selekciju primijenimo pravilo ruleta tada su tranzicijske vjerojatnosti

$$\alpha_i = \frac{(1 - w + wE_A)i}{f_A i + f_B(N - i)} \cdot \frac{N - i}{N}$$
$$\beta_i = \frac{(1 - w + wE_B)(N - i)}{f_A i + f_B(N - i)} \cdot \frac{i}{N} \tag{3.101}$$

Omjer tranzicijskih vjerojatnosti je

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{1 - w + wE_B}{1 - w + wE_A}. \tag{3.102}$$

Pod uvjetom slabe selekcije $w \approx 0$ koristeći aproksimaciju $(1 + x)/(1 + y) \approx 1 + x - y$ za $x, y \approx 0$, dobivamo

$$\gamma_i = \frac{1 - w + wE_B}{1 - w + wE_A} \approx 1 + w(E_B - E_A). \tag{3.103}$$

Važno je primijetiti da omjer γ nije konstanta kao u slučaju konstantne selekcije (3.96) nego ovisi o udjelima strategija jer razlika u isplatama također ovisi o udjelima strategija. Uvrštavanjem (3.103) u relaciju za vjerojatnost fiksacije (3.91) i Taylorovom ekspanzijom u prvoj aproksimaciji dobivamo jedan od najvažnijih rezultata moderne evolucijske teorije igara

$$\rho_A \approx \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{1 - [(a + 2b - c - 2d)N - 2a + b + c - 4d]\, w/6}. \tag{3.104}$$

Ako $\rho_A > 1/N$ tada selekcija preferira strategiju A. Iz relacije (3.101) vidimo da je uvjet $\rho_A > 1/N$ ekvivalentan sljedećoj nejednakosti [67]

$$(a + 2b - c - 2d)N > 2a + b + c - 4d \tag{3.105}$$

iz čega slijedi

$$a(N-2) + b(2N-1) > c(N+1) + d(2N-4). \tag{3.106}$$

Ako u relaciju (3.106) ubacimo elemente matrice za igru između TFT i ALLD

$$\begin{array}{c} \\ \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{m}R & S + (\bar{m}-1)P \\ T + (\bar{m}-1)P & \bar{m}P \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.107}$$

gdje je $\bar{m}$ prosječan broj susreta između TFT i ALLD, dobivamo uvjet

$$\bar{m} > \frac{T(N+1) + P(N-2) - S(2N-1)}{(R-P)(N-2)}. \tag{3.108}$$

Ovaj uvjet nam govori koliko krugova (rundi) Zatvorenikove dileme mora biti odigrano prije svake Moranove egzekucije kako bi TFT imala veću vjerojatnost fiksacije. Uz Axelrodove parametre $(S = 0, P = 1, R = 3, T = 5)$ slijedi:

$$\bar{m} > \frac{3}{2}\frac{2N+1}{N-2}. \tag{3.109}$$

Kad se populacija sastoji od $N = 6$ jedinki, TFT ima veću vjerojatnost fiksacije od ALLD ako svakom koraku Moranovog procesa (koji uključuje eliminaciju i reprodukciju) prethodi IPD s minimalno $\bar{m} = 4.9$ rundi igre. Kad se populacija sastoji od $N = 10$ jedinki, u svakoj iteraciji je potrebno odigrati $\bar{m} = 3.9$ rundi. U vrlo velikim populacijama TFT ima veću vjerojatnost fiksacije ako

$$\bar{m} > \frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{2N+1}{N-2} = 3. \tag{3.110}$$

Kasnije ćemo vidjeti da u realnom slučaju, kad se jedinke nasumično kreću (Brownovo gibanje) izraz (3.109) treba korigirati. Pokazat će se da TFT ima veću vjerojatnost fiksacije čak i kad je $\bar{m} < 3$ jer kod Brownovske populacije vjerojatnost sretanja nepoznatog izrabljivača u kasnijoj fazi igre nije nula kao u slučaju round-robin turnira (svaki-sa-svakim).

Fudenberg et al. su pokazali da vrijedi

$$\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\gamma_i} \approx 1 + w\left[\frac{N}{2}(a+b-c-d)+d-a\right]. \tag{3.111}$$

Strategija A ima prednost nad B ako je ispunjen uvjet $\rho_A/\rho_B > 1$, a iz aproksimacije (3.102) lako se može pokazati da je taj uvjet zadovoljen ako

$$(N-2)(a-d) > N(b-c) \tag{3.112}$$

4 Simulacijski modeli Iterirane zatvorenikove dileme

U ovoj cjelini bit će objašnjeno na koji je način moguće isprogramirati i simulirati Iteriranu zatvorenikovu dilemu. Veći dio cjeline posvećen je programiranju višeagentne simulacije s deterministčkim strategijama (poglavlje 4.1), ali radi potpunije obrade teme, u poglavlju 4.2 je opisano programiranje stohastičkog modela s reaktivnim strategijama (o kojima je također već bila riječ u potpoglavlju 3.2.10). Poglavlje 4.1. podijeljeno je na nekoliko potpoglavlja koja objašnjavaju: model „svaki-sa-svakim“, realizaciju TFT agenta i model „Browonovske populacije“.

4.1 Simulacijski modeli s deterministčkim strategijama u NetLogu

Simulacije Iterirane Zatvorenikove dileme (IPD) opisane u ovom poglavlju napravljene su u objektno-orijentiranom jeziku NetLogo koji je namijenjen izradi višeagentnih simulacija, prvenstveno u biologiji i sociologiji. NetLogo se sastoji od dvije cjeline; od programskog kôda i korisničkog sučelja u kojem se vrlo jednostavno mogu podešavati karakteristike simulacijskog okružja. Vizualni izgled korisničkog sučelja moguće je mijenjati dodavanjem kontrolnih elemenata poput klizača ili prekidača. Izlazne parametre moguće je predstaviti dinamičkim grafovima i sl. Osnovni dio korisničkog sučelja je podesivi monitor koji prikazuje tzv.*svijet* (world) napučen agentima (turtles) i na taj način vizualizira stanje simulacije. Osim klasičnog prikaza u 2D, korisnik može odabrati i prikaz u 3D obliku.

Drugi (skriveni) dio NetLoga je editor u koji korisnik upisuje program i koji je, dakako, povezan s glavnim sučeljem. Kod samog pisanja (ili čitanja) programa potrebno je razlikovati *procedure* i *naredbe*. Procedure su osnovni građevni blokovi programa koje korisnik može imenovati po volji, dok su naredbe već postojeći elementi programskog jezika. Takav prigodno osmišljen jezik omogućuje da glomazni program podijelimo na desetak procedura koje ujedno funkcioniraju kao moduli. Zatim pomoću naredbe `ask` možemo zatražiti od agenata (kornjača) da izvršavaju procedure. Svaka procedura počinje naredbom **`to`** i završava naredbom **`end.`** Također je moguće jednom procedurom zvati drugu, iz druge procedure zvati treću itd. Primjerice procedura `go` može pozivati proceduru `partner-up`, a ova pak može pozivati proceduru `izaberi-potez` i proceduru `isplata`. Neke procedure korištene u priloženim programima, kao i njihovi nazivi, djelomično su preuzeti iz NetLogove biblioteke. Proceduru `partner-up` na kojoj se temelji igranje jedne partije Zatvorenikove dileme napisao je Uri Wilensky sa sveučilišta Northwestern.

```
;; Neka se agent pod rednim brojem #x poveže s agentom #y

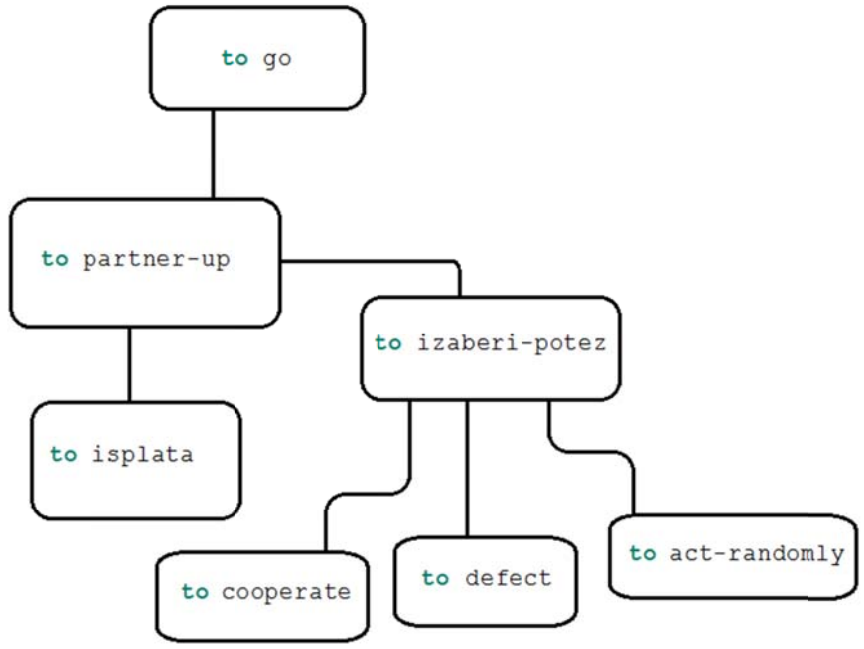
to go
ask turtle x [partner-up] ; pozivanje procedure za spajanjem agenata
end

;; Spajanje agenata
to partner-up
  create-link-with turtle y ; nacrtaj poveznicu između agenata #x i #y
  ask partnered-turtles [ izaberi-potez ] ; pozivanje procedure za igru
  ask partnered-turtles [ isplata ] ; pozivanje procedure za isplatu
end

;;Igra (biranje odgovarajućeg poteza):
to izaberi-potez
  if strategy = "RND" [ act-randomly ]
  if strategy = "ALLC" [ cooperate ]
  if strategy = "ALLD" [ defect ]
end

;;Dodavanje isplate prijašnjoj zaradi igrača:
to isplata
  set score (score + 3)
end
```

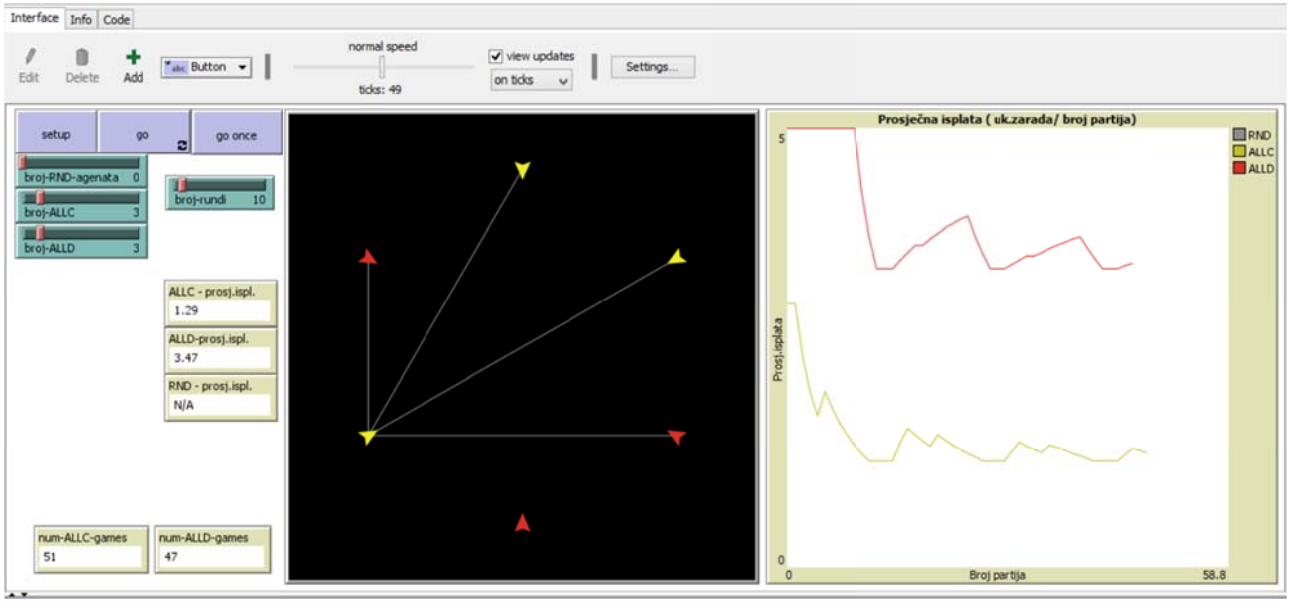
Kao što se može primijetiti napisani programski kôd svakom agentu isplaćuje 3 boda neovisno o potezu, ali svrha ovog jednostavnog primjera je prikazati način povezivanja procedura u NetLogu.



Slika 16 Primjer povezanosti procedura u programskom jeziku NetLogo.

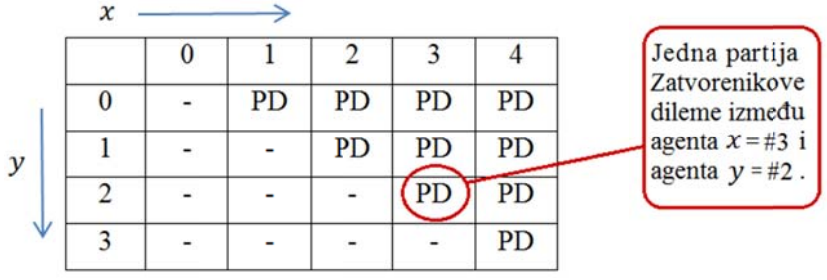
4.1.1 Simulacijski model „Svaki sa svakim“ (bezuvjetne strategije)

U simulaciji „Svaki sa svakim“ agenti su nepokretni, ali radi lakšeg praćenja simulacije, agenti su prikazani i postavljeni u kružnu formaciju pomoću naredbe `layout-circle()`, te se povezuju *linkovima* kako bi korisnik imao i vizualni doživljaj odvijanja turnira. Par agenata involviran u Zatvorenikovu dilemu povezuje se bijelom linijom, te ona ostaje prikazana do kraja jedne runde, tako da korisnik u svakom trenutku vidi koji parovi su odigrali partiju, a koji nisu.



Slika 17 Programsko sučelje (*interface*) simulacije „Svaki sa svakim“

Tokom simulacije agenti sudjeluju u turniru po sistemu *round-robin* (svaki-sa-svakim), što znači da programski kôd podrazumijeva dvije petlje odnosno dva brojača; vanjski i unutarnji. Vanjska petlja definira redni broj agenta (x), u rasponu od $\#1$ do $\#N$. Nakon što je agent odabran, on igra jednu partiju Zatvorenikove dileme sa svim agentima u rasponu od $y = \#\,(x+1)$ do $\#(N-1)$ koje kontrolira unutarnja petlja. Na taj način se izbjegava ponavljanje parova. Budući da algoritam mora preskočiti komutativne parove, tablica odigranih partija u round-robin sustavu izgleda kao prepolovljena tablica množenja



Tablica 17 Shematski prikaz jedne runde PD u sustavu „svaki-sa-svakim“

Prema tome, pseudokod za jednu rundu Zatvorenikove dileme mogao bi se izraziti u sljedećem obliku:

```
pokreni vanjsku petlju: x mijenjaj od 0 do N
  izaberi agenta #x
  pokreni unutarnju petlju: y mijenjaj od x+1 do N-1
    agenta #x poveži s agentom #y
    spojeni agenti neka odigraju PD
    izračunaj zaradu
    odvoji agente
    povećaj y na y+1
  izračunaj ukupnu zaradu agenta #x
  povećaj x na x+1
```

Simulacija se pokreće pomoću procedure `go-once()` ili `go()` putem korisničkog sučelja, međutim prije pokretanja simulacije potrebno je „namjestiti svijet“ pomoću procedure `setup()`. Naime, na početku je *svijet* prazan, te ga je potrebno napučiti agentima. Procedura `setup()` stvara i postavlja agente čiji broj se može podesiti putem kontrolnih elemenata (klizača).

Svaki agent ima sljedeća svojstva i moguća stanja:

- Identifikator (redni broj agenta koji se dodjeljuje naredbom `create`)
- Strategija (ALLD, ALLC ili RND)
- Zarada (numeričko stanje)
- Partnerstvo tj. je li sparen (da ili ne)
- Identitet partnera (*nitko* ili *redni broj agenta* s kojim je uparen)
- Je li partner igrao izdaju (da ili ne)
- Hoće li agent odgovoriti izdajom (da ili ne)

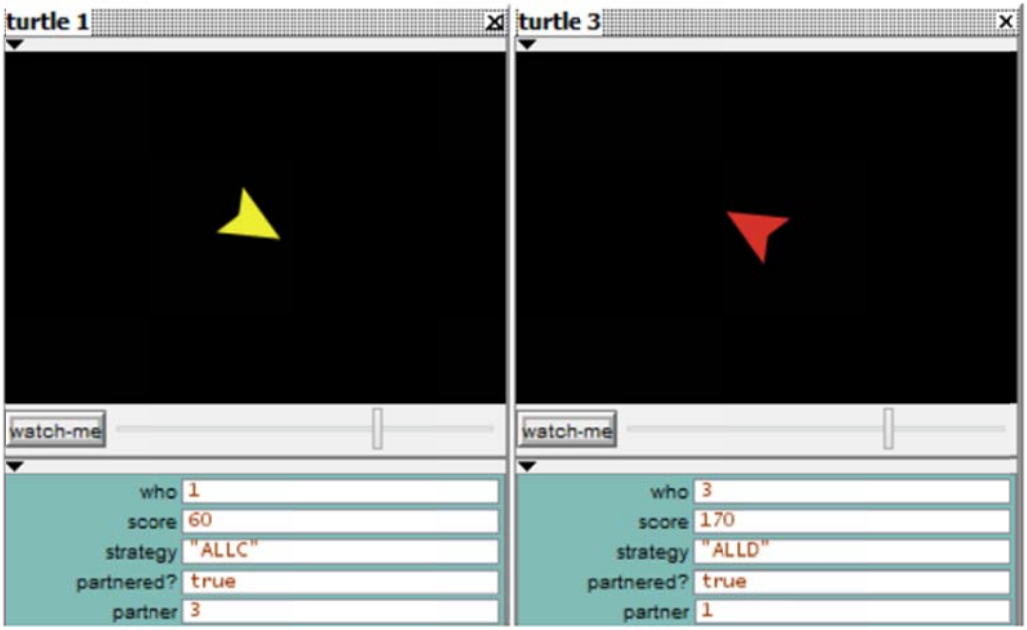
Naziv varijable	Opis varijable	Vrijednosti/stanje varijable
`who`	Identifikator (redni broj agenta)	Broj (od nula do N)
`strategy`	Koju strategiju agent koristi	ALLD, ALLC, RND ili TFT
`score`	Ukupna zarada	Numeričko stanje (broj)
`partnered?`	Je li agent sparen?	`true` ili `false`
`partner`	Identitet partnera	`nobody` ili redni broj agenta s kojim je spojen
`partner-defected?`	Je li partner igrao izdaju?	`true` ili `false`
`defect-now?`	Hoće li agent odgovoriti izdajom?	`true` ili `false`

Tablica 18 Svojstva agenata.

Spajanje aganta #x s agentom #y obavlja se putem procedure `partner-up` koju je napisao **Uri Wilensky** sa Sveučilišta Northwestern. Unutar procedure agent #x mijenja partnerski status i naravno identitet partnera. Međutim unutar iste procedure mijenja se i status partnera #y, te se njemu dodjeljuje partner #x. Također se definira lokalna varijabla `partnered-turtles` kao par kornjača kojima se istovremeno daje naredba da igraju PD.

```
;;PROCEDURA "PARTNER-UP" (Spajanje agenta #x s partnerom za igru)
to partner-up
  create-link-with turtle y    ;stvori link s agentom #y
  set partnered? true          ;partnerski status-je li agent sparen? da
  set partner turtle y         ;definiraj tko je partner: agent #y
  ask partner [set partnered? true] ;neka i partner promijeni status
  ask partner [set partner turtle x] ;neka partnerov partner bude #x
  ;; Uvedi lokalnu varijablu "partnered-turtles" (spareni agenti)
  ; i neka vrijednost te varijable bude (#x,#y)
  let partnered-turtles turtles with [ partnered? ]
  ask partnered-turtles [ izaberi-potez ] ;neka spareni agenti igraju PD
  ask partnered-turtles [ isplata ]       ;sparenim agentima daj isplatu
  izracun-zarade ;pokreni proceduru za kalkulaciju ukupne zarade strategije
end
```

Agenti koji su spareni nose vrijednost (varijable `partnered?`) `true` i, što je još značajnije, varijabla `partner?` ima vrijednost identifikatora partnera, pa bi se moglo reći da je varijabla `partner?` recipročna varijabli `who`.



Slika 18 Spareni agenti i njihova svojstva

Kad su agenti jednom spareni, tada se poziva procedura `izaberi-potez`. Izbor poteza ovisi o strategiji i tom procedurom se regulira vrijednost varijable `defect-now?`. Agentu koji nosi strategiju ALLD varijabla `defect-now?` dobiva vrijednost `true`, dok se agentu ALLC varijabla postavlja na vrijednost `false`. Agent koji nosi strategiju RND nasumičnim izborom (kao kod bacanja novčića) stavlja `true` ili `false`. Potom se poziva procedura isplata koja prije svega provjerava je li partner igrao izdaju. Ako jest tada varijablu `partner-defected?` postavlja na vrijednost `true`. Prema tome agent se može svrstati u 4 kategorije koje su prikazane u tablici s Naredbom `ifelse` tada se utvrđuje koja od 4 mogućnosti je ostvarena i sukladno tome određuje se isplata.

`defect-now?`	`true`	`true`	`false`	`false`
`partner-defected?`	`true`	`false`	`true`	`false`
Ishod u PD (igrač/suigrač)	DD	DC	CD	CC
Isplata	1	5	0	3

Tablica 19 Kako Isplata ovisI o stanjima dviju varijabli *defect-now?* i *partner-defected?*

```
;;PROCEDURA "ISPLATA" (Dodavanje isplate prijašnjoj zaradi igrača):
to isplata
  set partner-defected? [defect-now?] of partner ; provjeri je li partner
izabrao IZDAJU
  ;Razmotri sve kombinacije DD,DC,CD,CC i daj isplatu:
  ifelse partner-defected? [ ifelse defect-now? [ set score (score + 1) ]
                                                [ set score (score + 0) ]
                           ]
                           [ ifelse defect-now? [ set score (score + 5) ]
                                                [ set score (score + 3) ]
                           ]
end
```

4.1.2 Realizacija TFT agenta

Dok se bezuvjetne strategije ponašaju neovisno o potezima prisutnih igrača, igrajući po nekom svom obrascu, uvjetovane strategije reagiraju na tuđe poteze. Da bi agent mogao koristiti uvjetovanu strategiju on mora pamtiti prethodne interakcije sa svim ostalim agentima u populaciji. Najjednostavnije su dakako *memory-one* strategije koje pamte samo jedan susret po agentu. Takva je i strategija TFT.

Implementacija memorije može se realizirati pridruživanjem liste. Prilikom kreiranja agenata, uz spomenute varijable (`strategy`, `score`, `partnered?`, `partner`, `partner-`

`defected?, defect-now?)`, potrebno je uvesti listu u kojoj će biti pohranjeni prethodni potezi svih ostalih igrača. Svaki TFT agent ima svoju vlastitu listu koja je u suštini uređena N-torka boolevih vrijednosti. Položaj elementa na listi odgovara rednom broju suigrača, a logička vrijednost elementa (`true/false`) odgovara prethodnom potezu dotičnog suigrača. Popis se može smatrati memorijom agenta budući da elementi predstavljaju iskustva s ostalim igračima. Početne (defaultne) vrijednosti `false` znače da agenta nitko nije prevario. Tokom simulacije neki suigrači će možda prevariti (izdati) agenta, stoga se lista ažurira tako da se na odgovarajućem mjestu popisa element `false` mijenja u `true`. Na primjer, doživi li igrač izdaju od strane trećeg igrača, popis se ažurira na sljedeći način:

$$[false, false, false, false, \dots, false] \rightarrow [false, false, \boldsymbol{true}, false, \dots, false].$$

Sljedeći put, kada TFT-igrač ponovo sretne agenta #3, on također igra izdaju. Stoga igrač koji koristi TFT-strategiju može ispraviti svoje ponašanje spram izrabljivača i poboljšati svoj ukupni rezultat. Ako se simulacija pokrene s jednakim brojem ultimativnih izrabljivača (ALLD) i suradnika (TFT), prosječna zarada izrabljivača bit će veća u prvoj fazi simulacije, no kako vrijeme prolazi svaki TFT-igrač postupno uči iz vlastitih pogrešaka i prestaje naivno ulaziti u interakcije s izrabljivačima. S vremenom se zarada TFT strategije povećava i konačno premašuje prosječnu zaradu ALLD-strategije. Treba primijetiti da i-ti element i-tog agenta uvijek `false`.

Naziv varijable	Opis varijable	Vrijednosti/stanje varijable

`Partner-history`	Uređena N-torka booleovih vrijednosti u kojoj k -ti element označava iskustvo agenta u prethodnoj partiji Zatvorenikove dileme s k-tim agentom	Postoji 2^N mogućih vrijednosti:
		`[false, false…, false]`
		`[true, false,… ,false]`
		`[true, true,… , false]`
		⋮

Tablica 20 Memorija TFT agenta se može realizirati uvođenjem uređene N-torke (ovdje pod nazivom "partner-history")

Ažuriranje liste provodi se netom nakon odigrane partije Zatvorenikove dileme. Ako partner (koji je definiran rednim brojem $\#k$) odigra defekciju tada :

(1) stanje varijable `partner-defected?` poprima vrijednost `true`

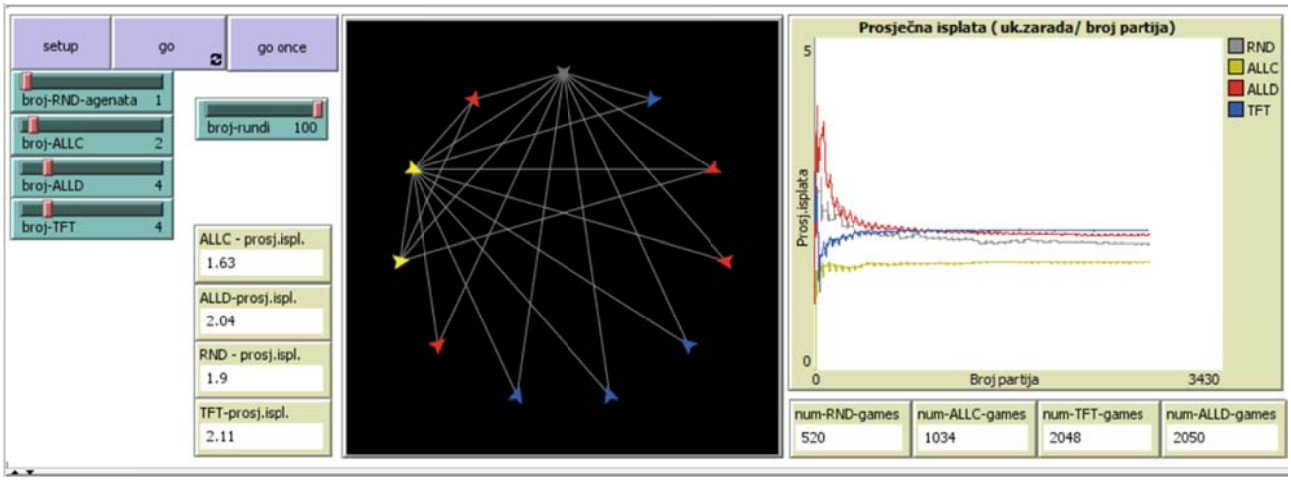
(2) k –ti element na popisu `partner-history` se pomoću naredbe `replace-item` mora zamijeniti stanjem `true` koje trenutno ima varijabla `partner-defected?`

```
;;Ažuriranje memorije agenta
to history-update
  if strategy = "TFT" [
  set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?) ]
end
```

Način na koji TFT agent koristi listu, odnosno mijenja odnos prema izrabljivaču (sukladno popisu) definira se u proceduri tit-for-tat:

```
to tit-for-tat
  ;;Je li me partner izdao u prethodnom potezu?
  set partner-defected? item ([who] of partner) partner-history
  ifelse (partner-defected?) [
    set defect-now? true
  ] [
    set defect-now? false
  ]
  set num-TFT-games num-TFT-games + 1
end
```

4.1.3 Sučelje i programski kôd „Svaki sa svakim“ (uključujući TFT)



Slika 19 Sučelje simulacije „svaki sa svakim“

```
;;NetLogo Program "SVAKI-SA-SVAKIM" (bezuvjetne strategije + TFT)
;;Program napisao Jurica Hižak 2019, credits to Uri Wilensky
globals [
   ;broj agenata:
   num-RND
   num-ALLC
   num-ALLD
   num-TFT
   N ; ukupan broj
```

```
  ;;Varijable potrebne za petlje koje će osigurati
  ;da svaki agent sa svakim odigra partiju Zatvorenikove dileme:
   x
   y
   #R ; redni broj runde
  ;Broj odigranih partija:
   num-RND-games
   num-ALLC-games
   num-ALLD-games
   num-TFT-games
  ;Ukupna zarada svake strategije:
   RND-score
   ALLC-score
   ALLD-score
   TFT-score
]

;;Svojstva agenata:
turtles-own [
  score
  strategy
  partnered?        ;je li agent sparen? (true ili false)
  partner           ;tko je partner (broj agenta ili nobody)
  partner-defected? ;da li je partner varao?
  defect-now?   ;Hoću li ja sad varati?
  partner-history ; popis poteza iz prethodne runde (MEMORIJA)
]

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Početne postavke;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to setup
  clear-all
  pohrani-broj   ;snimanje broja agenata za svaku pojedinu strategiju
  postavi-agente ;pozivanje procedure koja će stvoriti i postaviti agente
  stvori-listu ;stvori početnu memorijsku listu
  reset-ticks
end

;;Broj agenata pojedine strategije.
;(vrijednosti klizača mogu se mijenjati pa je potrebno pohraniti njihovu vrijednost)
to pohrani-broj
  set num-RND broj-RND-agenata
  set num-ALLC broj-ALLC
  set num-ALLD broj-ALLD
  set num-TFT broj-TFT
  set N (broj-RND-agenata + broj-ALLC + broj-ALLD + broj-TFT)
end

;;Kreiranje odgovarajućeg broja agenata za svaku strategiju
to postavi-agente
  create-turtles num-RND [ set strategy "RND" set color gray - 1 ]
  create-turtles num-ALLC [ set strategy "ALLC" set color yellow ]
  create-turtles num-ALLD [ set strategy "ALLD" set color red ]
  create-turtles num-TFT [set strategy "TFT" set color blue ]
  layout-circle turtles 8 ; postavljanje agenata u kružnu formaciju radijusa 8
  ask turtles [ rt 180 ]  ; okretanje agenata prema središtu
  set x 0                 ; postavljanje početnih vrijednosti brojača
  set y 1
  set #R 1
  ask turtles [
    set score 0
    set defect-now? false
    set partner nobody
    set partner-defected? false
    set partnered? false
  ]
End
```

```
;; UGRAĐIVANJE MEMORIJE :)
to stvori-listu
  let default-history [] ;;initialize the DEFAULT-HISTORY variable to be a list
  ;;create a list with NUM-TURTLE elements for storing partner histories
  repeat count turtles [ set default-history (fput false default-history) ]
  ;;svakom agentu daj kopiju defaultne liste
  ask turtles [ set partner-history default-history ]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Pokretanje programa;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to go
  ifelse #R <= broj-rundi [
    ask turtles [set partnered? false set partner nobody]
    ;;Pokretanje vanjske petlje (neka se agent #x poveže s partnerom):
    ask turtle x [partner-up ] ; pozivanje procedure da se agent #x poveže s agentom #y
    ;Unutarnja petlja:
    ifelse  x + y < 2 * count turtles - 3 [set y y + 1 ; promijeni partnera #y na #y+1
;ako još traje runda
      if y = count turtles [set x x + 1 set y x + 1 ]  ; ako je agent #x odigrao PD sa
;svima povećaj #x na #x+1
    ]
  [set #R #R + 1 set x 0 set y 1 clear-links]  ; kad runda završi promijeni #R u #R+1 i
;resetiraj x i y
  tick
  ]
  [stop]
end

;;Spajanje agenta #x s "partnerom" za igru
to partner-up
  create-link-with turtle y          ;poveži s agentom #y i prikaži poveznicu
  set partnered? true                ;partnerski status-je li agent #x povezan? da
  set partner turtle y               ;definiraj tko je partner: agent #y
  ask partner [set partnered? true] ;zatraži od partnera da i on promijeni status
  ask partner [set partner turtle x];zatraži od partnera da ime njegovog partnera bude #x
  ;; Uvedi lokalnu varijablu "partnered-turtles" (par agenata koji su spojeni):
  let partnered-turtles turtles with [ partnered? ] ;nek vrijednost varijable bude(x,y)
  ask partnered-turtles [ izaberi-potez ]  ;zatraži od sparenih agenata da igraju PD
  ask partnered-turtles [ isplata ]        ;sparenim agentima daj isplatu
  izracun-zarade           ;pokreni proceduru za izračunavanje ukupne zarade strategije
  ask partnered-turtles [ history-update ]
 end

;;Biranje odgovarajućeg poteza:
to izaberi-potez
  if strategy = "RND" [ act-randomly ]
  if strategy = "ALLC" [ cooperate ]
  if strategy = "ALLD" [ defect ]
  if strategy = "TFT" [ tit-for-tat]
end

;;Dodavanje isplate prijašnjoj zaradi igrača:
to isplata
  set partner-defected? [defect-now?] of partner ; provjeri je li partner izabrao IZDAJU
  ;Razmotri sve kombinacije DD,DC,CD,CC i daj isplatu:
  ifelse partner-defected? [ ifelse defect-now? [ set score (score + 1) ]
                                                [ set score (score + 0) ]
                           ]
                           [ ifelse defect-now? [ set score (score + 5) ]
                                                [ set score (score + 3) ]
                           ]
  show score
end
```

```
;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Strategije;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;

to act-randomly
  set num-RND-games num-RND-games + 1
  ifelse (random-float 1.0 < 0.5) [
    set defect-now? false
  ] [
    set defect-now? true
  ]
end

to cooperate
  set num-ALLC-games num-ALLC-games + 1
  set defect-now? false
end

to defect
  set num-ALLD-games num-ALLD-games + 1
  set defect-now? true
end

to tit-for-tat
  ;;Je li partner igrao defekciju u prethodnom potezu?
  set partner-defected? item ([who] of partner) partner-history
  ifelse (partner-defected?) [
    set defect-now? true
  ] [
    set defect-now? false
  ]
  set num-TFT-games num-TFT-games + 1
end

;;Ažuriranje memorije agenta
to history-update
  if strategy = "TFT" [
  set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?) ]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Izračunavanje ukupne zarade svake strategije;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

;Selekcija strategije
to izracun-zarade
  set RND-score   (Zbroj "RND" num-RND) ; pozivanje procedure "Zbroj"
  set ALLC-score  (Zbroj "ALLC" num-ALLC)
  set ALLD-score  (Zbroj "ALLD" num-ALLD)
  set TFT-score   (Zbroj "TFT" num-TFT)

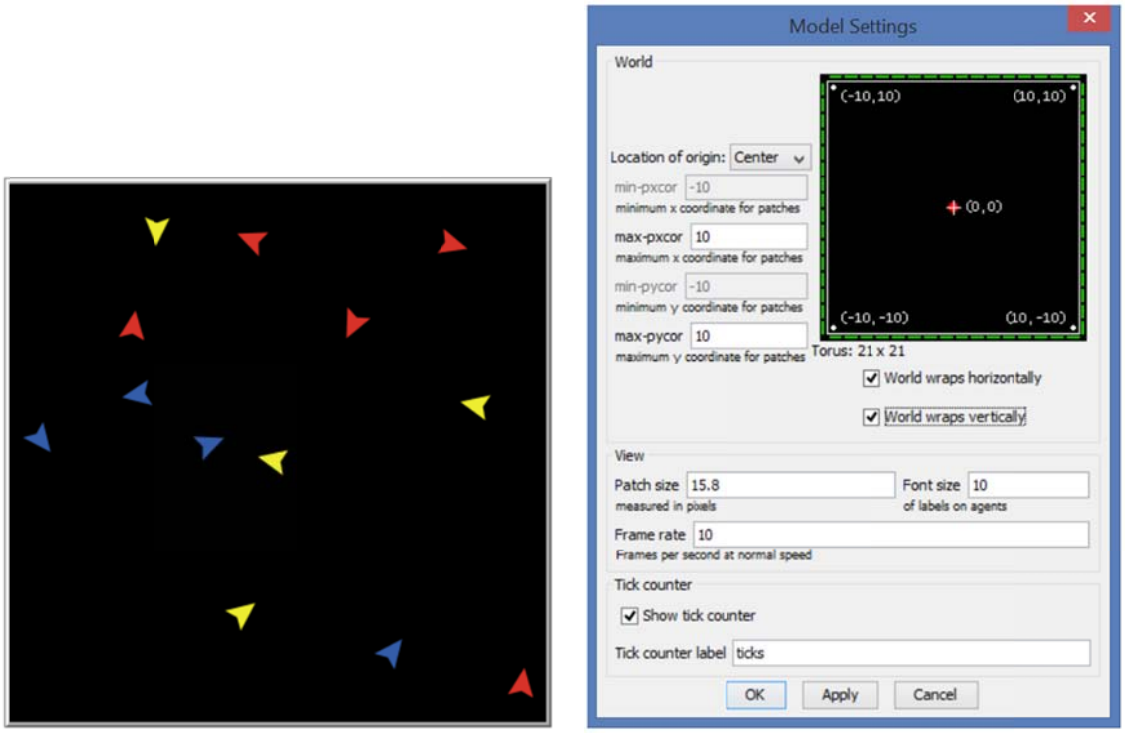
end

;Sumiranje svih isplata za svaku strategiju posebno:
to-report Zbroj [strategy-type num-with-strategy]
  ifelse num-with-strategy > 0 [
    report (sum [ score ] of (turtles with [ strategy = strategy-type ]))
  ] [
    report 0
  ]
End

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;KRAJ PROGRAMA "SVAKI SA SVAKIM" ;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
```

4.1.4 Simulacijski model „IPD Brown“

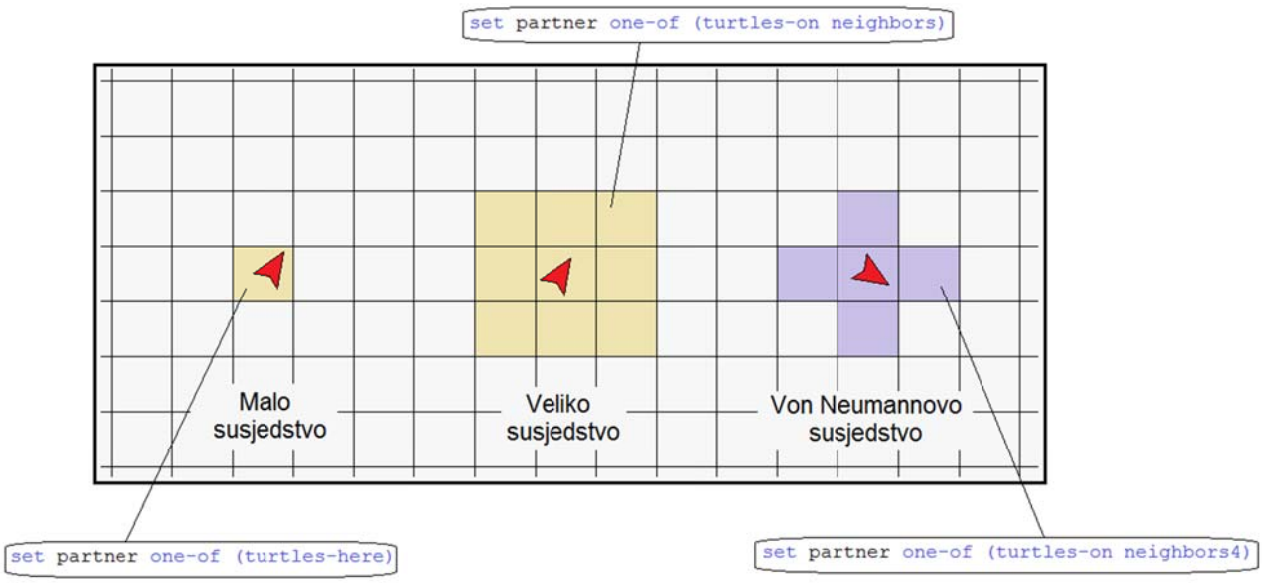
Za razliku od modela „Svaki sa svakim“, u modelu „IPD Brown“ agenti se kreću nasumično po neomeđenoj ravnini koja se može smatrati toroidalnom plohom konačne površine. Svaki je igrač okružen osobnim prostorom tzv. „susjedstvom“ u koji drugi igrači mogu zadirati. U slučaju da jedan igrač uđe u prostor drugog igrača, igra se jedna runda Zatvorenikove dileme (PD). Takav događaj nazivamo *susretom*. Nakon takvog susreta agenti se okreću jedan od drugog i kreću dalje. Vjerojatnost susreta ovisi, naravno, o gustoći agenata, dok ishod igre ovisi o njihovim strategijama i njihovim prijašnjim interakcijama.



Slika 20 Simulacijsko okruženje (svijet) i okvir za podešavanje parametara svijeta

U ovakvom modelu treba voditi brigu o geometriji prostora i načinu na koji je ona realizirana u NetLogu. Svijet u kojem se kreću agenti (*turtles*) podijeljen je na polja (*patches*) podesive veličine i može biti zakrivljeno-bezgraničan (*wraped*) ili se po želji može omeđiti. Svako polje je kvadrat jedinstveno definiran koordinatama, a uz koordinate mogu mu se dodijeliti različita svojstva ovisno o potrebama programera. Predefinirani broj polja od kojih se sastoji svijet je 441 (21x21) , ali može se i promijeniti u postavkama (vidi Sl.20) ili pomoću naredbe `resize-world`, što je u kontekstu evolucije suradnje izuzetno značajno s obzirom da nam takva naredba omogućuje očuvanje gustoće populacije agenata ukoliko je potrebno. Poznavanje strukture svijeta važno je i u kontekstu susretanja agenata. Naime susret je događaj koji se može definirati na različite načine;

jedno od mogućnosti je da kažemo da su se agenti susreli ako dođu na *isto polje*. To polje bismo mogli nazvati „malo susjedstvo“. Ali ako želimo povećati vjerojatnost susreta simulaciju možemo isprogramirati tako da agent igra PD sa svakim agentom koji dođe na susjednih 8 polja (naredba `neighbors`). Takvo susjedstvo nazvano je „veliko susjedstvo“. NetLogo nudi i naredbu `neigbors4` koja se u literaturi naziva von Neumannovo susjedstvo, ali ono nije korišteno u priloženim simulacijama.



Slika 21 Tipovi susjedstva u simulacijskom okruženju i odgovarajuće naredbe za stvaranje partnerstva

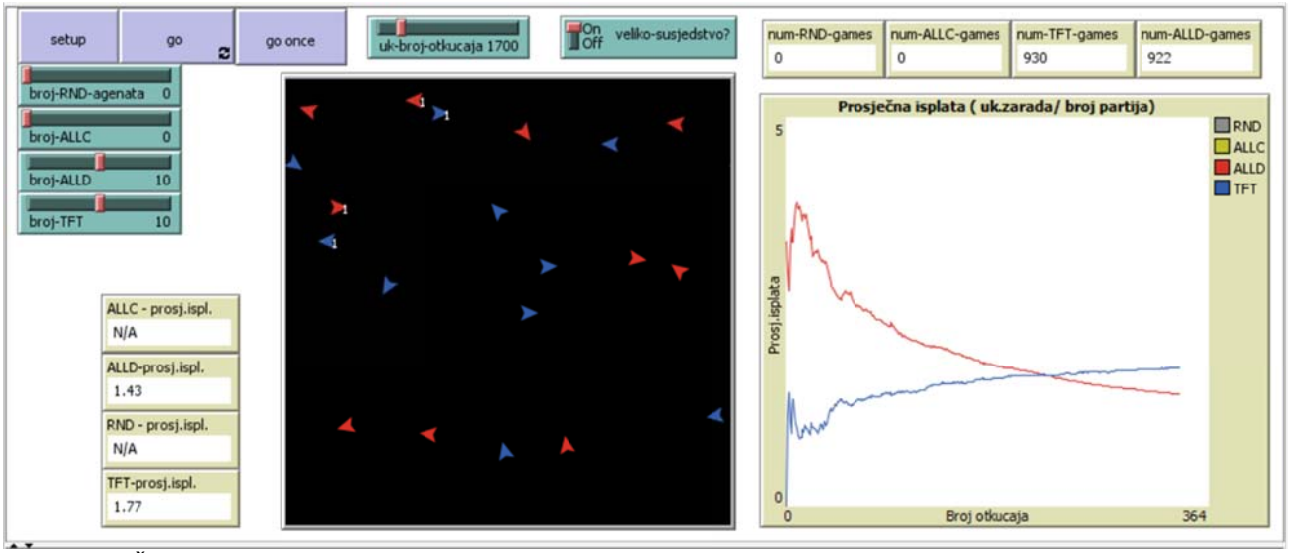
Kao i u simulaciji „Svaki sa svakim“, prilikom postavljanja svijeta poziva se procedura `postavi-agente` koja kreira zadani broj agenata, ali ovdje se agenti ne postavljaju u kružnu formaciju već se nasumično raspršuju u ravnini pomoću naredbe `setxy random-xcor random-ycor`. Za razliku od simulacije „Svaki sa svakim“, ovdje se ne moraju svi agenti nužno spariti –ishod ovisi o mnoštvu nasumičnih odluka koje agenti donose u svakoj iteraciji programa. Naime u svakoj iteraciji, agent radi korak naprijed u nasumično izabranom smjeru. Ta odluka ugrađena je u proceduru `trazi-partnera` koja ima nekoliko funkcija:

- Nasumično hodanje
- Detekcija agenta koji je ušao u susjedstvo
- Povezivanje (partner-up)
- Okretanje prema partneru

U sljedećoj iteraciji, početna procedura `go()` sve sparene kornjače rastavlja resetiranjem varijabli `partnered?` i `partner?` , te ih rotira i upućuje svakog na svoju stranu, tako da se i fizički

razdvoje. Kako bi se pojačala vizualizacija igre, prilikom isplate na svakom agentu se pojavljuje bijela brojka koja pokazuje koliku je isplatu agent dobio.

4.1.5 Sučelje i programski kôd „IPD Brown“



SLIKA 22 SUČELJE SIMULACIJE „IPD BROWN“

```
;;Program "IPD BROWN"
;;Program napisao Jurica Hižak 2017

globals [
    ;broj agenata:
    num-RND
    num-ALLC
    num-ALLD
    num-TFT
    N ; ukupan broj
   ;Broj odigranih partija:
    num-RND-games
    num-ALLC-games
    num-ALLD-games
    num-TFT-games
   ;Ukupna zarada svake strategije:
    RND-score
    ALLC-score
    ALLD-score
    TFT-score
]

;;Svojstva agenata:
turtles-own [
  score              ;zarada
  br-susreta         ;broj-susreta
  strategy           ;strategija
  partnered?         ;je li agent sparen? (true ili false)
  partner            ;tko je partner (broj agenta ili nobody)
  partner-defected?  ;da li je partner varao?
  defect-now?        ;Hoću li ja sad varati?
  partner-history    ;popis poteza iz prethodne runde (MEMORIJA)
]
```

```
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Početne postavke;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
to setup
  clear-all
  pohrani-broj    ;snimanje broja agenata za svaku pojedinu strategiju
  postavi-agente ;pozivanje procedure koja će stvoriti i postaviti agente
  stvori-listu    ;stvori početnu memorijsku listu
  reset-ticks
end

;;Broj agenata pojedine strategije.
;(potrebno je pohraniti vrijednosti kontrolnih klizača sučelja)
to pohrani-broj
  set num-RND broj-RND-agenata
  set num-ALLC broj-ALLC
  set num-ALLD broj-ALLD
  set num-TFT broj-TFT
  set N (broj-RND-agenata + broj-ALLC + broj-ALLD + broj-TFT)
end

;;Kreiranje odgovarajućeg broja agenata za svaku strategiju
to postavi-agente
  create-turtles num-RND [ set strategy "RND" set color gray - 1 ]
  create-turtles num-ALLC [ set strategy "ALLC" set color yellow ]
  create-turtles num-ALLD [ set strategy "ALLD" set color red ]
  create-turtles num-TFT [set strategy "TFT" set color blue ]
  ; početne vrijednosti:
  ask turtles [
    set score 0
    set br-susreta 0
    set defect-now? false
    set partner nobody
    set partner-defected? false
    set partnered? false
    setxy random-xcor random-ycor ;nasumično rasporedi agente
  ]
end
;; UGRAĐIVANJE MEMORIJE :)
to stvori-listu
  let default-history [] ;;initialize the DEFAULT-HISTORY variable to be a list
  ;;create a list with NUM-TURTLE elements for storing partner histories
  repeat count turtles [ set default-history (fput false default-history) ]
  ;;svakom agentu daj kopiju defaultne liste
  ask turtles [ set partner-history default-history ]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Pokretanje programa;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to go
  if ticks >= uk-broj-otkucaja [ stop] ;uvjet prekidanja simulacije
  ;;Ako ima sparenih agenata neka resetiraju varijable,
  ;neka se okrenu i razdvoje
    ask turtles with [ partnered? ]
    [set partnered? false
    set partner nobody
    rt 180        ;okreni se
```

```
    fd 1          ;pomakni se za jedan korak
    set label "" ;obriši brojku koja pokazuje isplatu zadnje partije PD
    ]
  ;;Neka agenti krenu u akciju:
   ask turtles [trazi-partnera ]      ; neka agenti traze partnere za PD
   ;Uvedi lokalnu varijablu partnered-turtles:
   let partnered-turtles turtles with [ partnered? ]
   ask partnered-turtles [ izaberi-potez ]  ;neka spareni agenti igraju PD
   ask partnered-turtles [ isplata ]        ;sparenim agentima daj isplatu
   izracun-zarade ;pokreni proceduru za izračun ukupne zarade strategije
   ask partnered-turtles [ history-update ] ;neka agenti ažuriraju memoriju
 tick
end

;;Nasumično hodanje i susretanje
to trazi-partnera
 if (not partnered?) [              ;;provjeri ima li agent partnera
    rt (random-float 90 - random-float 90) fd 1 ;korak u nasumičnom smjeru
    ;Tko uđe u "susjedstvo" neka bude partner:
    ifelse (veliko-susjedstvo?) ;na sučelju se nalazi prekidač koji
                                ;određuje veličinu susjedstva
      [set partner one-of (turtles-on neighbors) with [ not partnered?]]
      [set partner one-of (turtles-here) with [ not partnered?]]
    if partner = self [set partner nobody] ;isključi samog sebe
                                           ;iz skupa potencijalnih partnera
    if partner != nobody
       [
      set partnered? true              ;je li agent sparen? da
      set br-susreta br-susreta + 1 ;evidentiraj broj susreta
      set heading 270                  ;nek se agent okrene prema partneru
      ask partner [
        set br-susreta br-susreta + 1
        set partnered? true
        set partner myself
        set heading 90
      ]
      ]
  ]

 end

;;Biranje odgovarajućeg poteza:
to izaberi-potez
  if strategy = "RND" [ act-randomly ]
  if strategy = "ALLC" [ cooperate ]
  if strategy = "ALLD" [ defect ]
  if strategy = "TFT" [ tit-for-tat]
end

;;Dodavanje isplate prijašnjoj zaradi igrača:
to isplata
  set partner-defected? [defect-now?] of partner ;je li partner izabrao IZDAJU?
  ;Razmotri sve kombinacije DD,DC,CD,CC i daj isplatu.
  ;Prilikom isplate, nalijepi na agenta brojku da se vidi isplata
  ifelse partner-defected?
  [ ifelse defect-now? [ set score (score + 1) set label 1]
                       [ set score (score + 0) set label 0]
  ]
  [ ifelse defect-now? [ set score (score + 5) set label 5]
                       [ set score (score + 3) set label 3]
  ]
end
```

```
;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Strategije;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;

to act-randomly
  set num-RND-games num-RND-games + 1
  ifelse (random-float 1.0 < 0.5) [
    set defect-now? false
  ] [
    set defect-now? true
  ]
end

to cooperate
  set num-ALLC-games num-ALLC-games + 1
  set defect-now? false
end

to defect
  set num-ALLD-games num-ALLD-games + 1
  set defect-now? true
end

to tit-for-tat
  ;;Je li partner igrao defekciju u prethodnom potezu?
  set partner-defected? item ([who] of partner) partner-history
  ifelse (partner-defected?) [
    set defect-now? true
  ] [
    set defect-now? false
  ]
  set num-TFT-games num-TFT-games + 1
end

;;Ažuriranje memorije agenta
to history-update
  if strategy = "TFT" [
  set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?) ]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Izračunavanje ukupne zarade svake strategije;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

;Selekcija strategije
to izracun-zarade
  set RND-score   (Zbroj "RND" num-RND) ; pozivanje procedure "Zbroj"
  set ALLC-score  (Zbroj "ALLC" num-ALLC)
  set ALLD-score  (Zbroj "ALLD" num-ALLD)
  set TFT-score   (Zbroj "TFT" num-TFT)
end

;Sumiranje svih isplata za svaku strategiju posebno:
to-report Zbroj [strategy-type num-with-strategy]
  ifelse num-with-strategy > 0 [
    report (sum [ score ] of (turtles with [ strategy = strategy-type ]))
  ] [
    report 0
  ]
end
;;;;;;;;;;;;;;;;;KRAJ PROGRAMA "IPD BROWN" ;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
```

4.1.6 Izračunavanje uspješnosti strategije

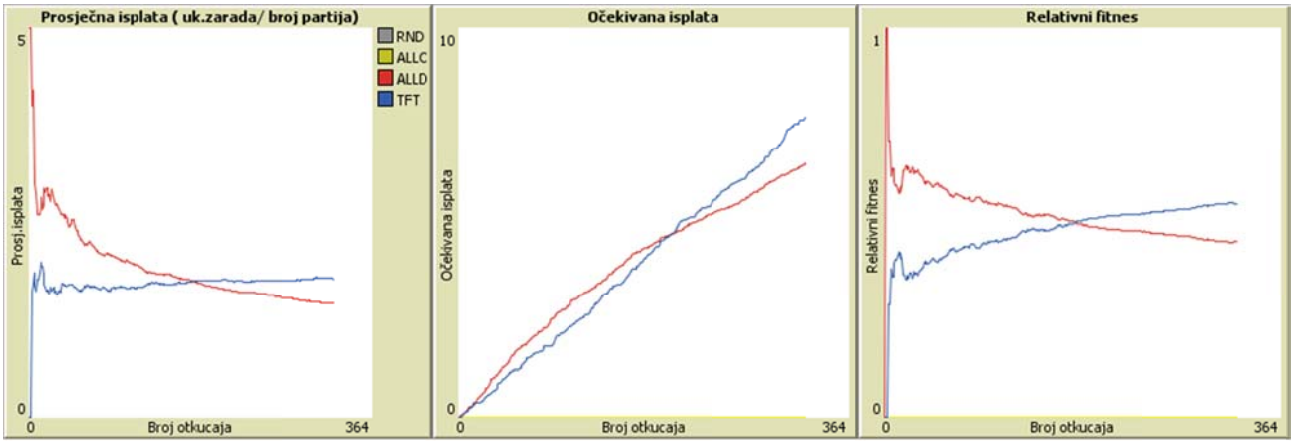
Ukoliko su strategije uspješne u igranju određene igre, one će prikupiti veliki broj bodova. Za strategiju koja ima veliku isplatu, kažemo da ima veliki fitnes. Nekoliko je uobičajenih mjera koje pokazuju uspješnost strategije. Navedimo tri najčešće:

- Isplata usrednjena po ukupnom broju odigranih partija
- Očekivana isplata (usrednjena po broju partija jedne runde)
- Relativni fitnes

Konceptualno gledano, nema razlike između ovih mjera –sve tri veličine otkrivaju koja je strategija moćnija. Međutim u praksi, neke se matematičke relacije čine zgodnije u jednom slučaju, a neke u drugom. Nije suvišno spomenuti da su isplata usrednjena po broju odigranih partija i očekivana isplata u round-robin sustavu praktički ista stvar ako se gleda samo jedna runda. Dok je prosječna isplata suradnika protiv izrabljivača E(ALLC,ALLD)=1.2 , očekivana isplata u 10 rundi je 12. Relativni fitnes je zgodno koristiti, osobito kad se agenti reproduciraju jer je ona, de facto, pokazatelj relativnog udjela strategije u sljedećoj generaciji.

Isplata usrednjena po broju odigranih partija (prosječna isplata, ponekad se naziva fitnes)	$f_{ALLC} = \frac{\sum E_{ALLC}}{m \cdot i(N-1)}$	$ALLC.fit = \frac{ALLC.score}{num.ALLC.games}$
Očekivana isplata	$E = \frac{\sum E_{ALLC}}{i(N-1)}$	$\frac{ALLC.score}{num.ALLC * (N-1)}$
Relativni fitnes	$r_{ALLC} = \frac{x_{ALLC}\, f_{ALLC}}{\sum x_i\, f_i}$	$ALLC.relnum * \frac{ALLC.fit}{tot.fit}$

TABLICA 21 MJERE USPJEŠNOSTI STRATEGIJE ALLC (I=BROJ ALLC AGENATA, M=BROJ RUNDI, X=I/N UDIO AGENATA)



SLIKA 23 USPOREDBA RAZLIČITIH MJERA USPJEŠNOSTI STRATEGIJA ALLD I TFT (10 PROTIV 10) NAKON 324 ITERACIJE

Odgovarajuće procedure za izračun očekivane isplate i relativnog fitnesa:

```
to izracun-ocekivane-isplate

ifelse num-RND > 1
  [set RND-exp-payoff RND-score / (num-RND * (N - 1))]
  [set RND-exp-payoff 0]

ifelse num-ALLC > 1
  [set ALLC-exp-payoff ALLC-score / (num-ALLC * (N - 1))]
  [set ALLC-exp-payoff 0]

ifelse num-ALLD > 1
  [set ALLD-exp-payoff ALLD-score / (num-ALLD * (N - 1))]
  [set ALLD-exp-payoff 0]

ifelse num-TFT > 1
  [set TFT-exp-payoff TFT-score / (num-TFT * (N - 1))]
  [set TFT-exp-payoff 0]


end
to izracun-relativnog-fitnesa
   ifelse num-ALLD-games != 0
     [set ALLD-fit precision (ALLD-score / num-ALLD-games ) 4] [set ALLD-fit 0]
   ifelse num-TFT-games != 0
     [set TFT-fit precision (TFT-score / num-TFT-games ) 4] [set TFT-fit 0]
   ifelse num-RND-games != 0
     [set RND-fit precision (RND-score / num-RND-games ) 4] [set RND-fit 0]
   ifelse num-ALLC-games != 0
     [set ALLC-fit precision (ALLC-score / num-ALLC-games ) 4] [set ALLC-fit 0]

 let relnum-ALLD  (num-ALLD  / N)
 let relnum-TFT (num-TFT  / N)
 let relnum-RND (num-RND / N )
 let relnum-ALLC (num-ALLC  / N)

  let tot-fit (  (relnum-ALLD * ALLD-fit) + (relnum-TFT * TFT-fit ) + (relnum-
ALLC * ALLC-fit ) + (relnum-RND * RND-fit))

ifelse tot-fit != 0 [set ALLD-relfit (relnum-ALLD * ALLD-fit / tot-fit)] [set
ALLD-relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set TFT-relfit (relnum-TFT * TFT-fit / tot-fit)] [ set TFT-
relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set RND-relfit (relnum-RND * RND-fit / tot-fit)] [ set RND-
relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set ALLC-relfit (relnum-ALLC * ALLC-fit / tot-fit)] [set
ALLC-relfit 0]
end
```

4.2 Simulacijski model stohastičke IPD s reaktivnim strategijama

Nowakov fascinantan model opisan u 3.2.10 pokazuje da populacija sebičnih jedinki evoluira prema suradnji, pa čak i opraštanju. Doduše, u početku u populaciji prevladavaju izrabljivačke strategije, ali nakon određenog broja generacija, prevlast preuzima suradničko-osvetnička strategija TFT (tit-for-tat eng. milo-za-drago) koja uspostavlja „red“ i otvara prostor za dobrodušne i opraštajuće strategije.

Treba primijetiti da se ovdje radi o tzv.diskretnoj replikatorskoj dinamici izvedenoj iz pretpostavke da su generacije nepreklapajuće (svi odrasli umiru prije nove generacije, slično insektima) i da je reprodukcija aseksualna, tako da je udio jedinki (prema 3.33) u sljedećoj generaciji $x_i' = x_i \frac{f_i}{\bar{f}}$. Cijeli model temelji se na pretpostavci da populacija sadrži jako velik broj jedinki koje koriste reaktivne strategije.

4.2.1 Simulacija stohastičke IPD u MatLabu

Ulazni parametri programa su broj strategija *N* i broj rundi odnosno broj generacija. Kad se definira broj strategija *N*, tada program kreira *N* nasumičnih vjerojatnosti *p* i *N* nasumičnih vjerojatnosti *q*. U Matlabu se to može riješiti na sljedeći način:

```
p=rand(1,N)
q=rand(1,N)
```

Na taj način računalo generira *N* reaktivnih strategija. Početna relativna frekvencija svake strategije je *x=1/N*. Budući da strategije igraju “svaka sa svakom”, to znači da će se u svakoj generaciji odigrati $N \times N$ duela. Dakle, ishod tih duela može se predstaviti $N \times N$ matricom E koja je uvijek ista, uz pretpostavku da je postignuto stacionarno stanje. Načelno, program se sastoji od dva dijela. U prvom dijelu programa kreira se matrica *E*, a u drugom dijelu petlja za izračunavanje isplata i frekvencija (broj iteracija petlje ovisi o tome koliko je zadanih generacija).

Npr. ako postoje samo dvije strategije (*N*=2), dobivamo matricu isplate

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

Svaki član matrice dobiva se iz relacije (3.77). Početne frekvencije su $x_1 = x_2 = 1/2$.

U drugom dijelu programa pokreće se petlja koja u svakoj iteraciji izračunava isplatu i novu relativnu frekvenciju za obje strategije. Budući da S_1 igra jednu igru sama sa sobom, a drugu rundu

sa S_2, njena očekivana isplata nakon prve runde je $f_1 = 0.5E_{11} + 0.5E_{12}$, a očekivana isplata druge strategije je $f_2 = 0.5E_{21} + 0.5E_{22}$. Taj se izračun u Matlabu elegantno rješava (matričnom) jednadžbom :

```
f=E*x
```

što zapravo u standardnom matričnom zapisu izgleda ovako

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Prosječna isplata populacije može se izračunati naredbom

```
prosj_isplata_pop=x'*f
```

koja provodi matrični račun

$$\bar{f} = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Kad se odigra jedna runda, potrebno je izračunati novu relativnu frekvenciju strategije. U slučaju dviju strategija, nova relativna frekvencija prve strategije prema relaciji (3.33):

$$x_1' = x_1 \frac{f_1}{\bar{f}}$$

Odnosno, za obje strategije:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{f}} \begin{bmatrix} x_1 f_1 \\ x_2 f_2 \end{bmatrix}$$

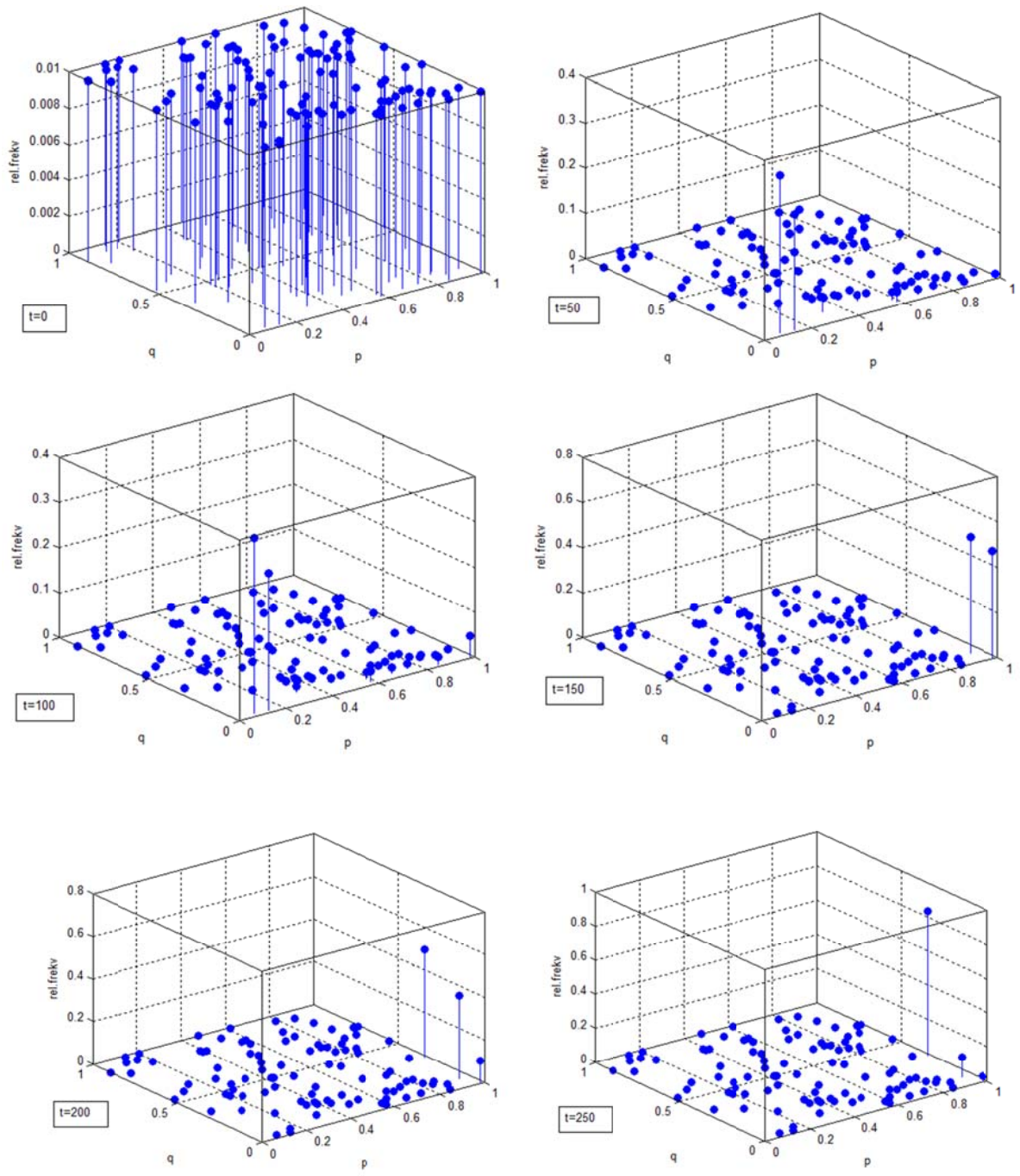
U Matlabu je moguće napraviti nestandardno množenje vektora tako da množimo i-ti član jednog vektora sa i-tim članom drugog (a da ne dođe do miješanja članova kao kod običnog matričnog množenja). To se vrši pomoću operacije „točka zvjezdica“

```
x=x.*f/prosj_isplata_pop
```

Nakon ovog izračuna program kreće u novu iteraciju s novom frekvencijom. Rezultati se mogu vizualizirati naredbom `stem3(p,q,x, 'filled')` koja daje prikladan 3D graf na kojem se vidi relativna frekvencija u ovisnosti o vjerojatnostima (p, q).

4.2.2 Program „Stohastička IPD“ i vizualni output

```
%Stohastička IPD
%Program simulira evoluciju nasumično zadanih reaktivnih strategija
%sukladno Nowak-Sigmundovom modelu IPD.
%Program je napisao Jurica Hižak, u Varaždinu, u proljeće 2015.
clear all
%Na početku je potrebno definirati broj strategija
N=100
%Potrebno je definirati broj generacija
br_gen=500
%Nasumični odabir strategija
p=rand(1,N)
q=rand(1,N)
%Ubacujemo TFT
p(N)=0.99
q(N)=0.01
%početna relativna frekvencija svih strategija je ista
for i=1:N
    freq(i)=1/N
end
%kreiranje jednostupčane matrice relativnih frekvencija
x=freq'
%graf početnih relativnih frekvencija u ovisnosti o (p,q)
figure
stem3(p,q,x, 'filled')
xlabel('p')
ylabel('q')
zlabel('rel.frekv')
%Kreiramo matricu isplate NxN
for i=1:N
        for j=1:N
        s1=(q(i)+(p(i)-q(i))*q(j))/(1-(p(i)-q(i))*(p(j)-q(j)))
        s2=(q(j)+(p(j)-q(j))*q(i))/(1-(p(j)-q(j))*(p(i)-q(i)))
        %isplata i-te strategije u duelu s j-tom strategijom
        E(i,j)=1+4*s2-s1-s1*s2
        end
end
%U drugom dijelu programa odvija se replikacija i evolucija.
%Potrebno je definirati kako se mijenja relativna frekvencija igrača
for k=1:br_gen
    %očekivana isplata za svaku strategiju u k-toj rundi
    f=E*x
    %Prosječna isplata populacije
    prosj_isplata_pop=x'*f
    %Nova relativna frekvencija i-te strategije
    x=x.*f/prosj_isplata_pop
    %Svakih 50 generacija generira se graf
    if mod(k,50)==0
    figure
    stem3(p,q,x, 'filled')
    xlabel('p')
    ylabel('q')
    zlabel('rel.frekv')
    end
end
```



Slika 24 Simulacija evolucije suradnje izvedena u Matlabu pomoću programa „Stohastička IPD“. Nakon 250 generacija, izrabljivačke strategije potpuno su poražene. Populacijom dominira GTFT (Generous Tit-for-tat) koja oprašta 30% izdaja

5 Simulacijski modeli IPD u sustavu agenata limitirane memorije

Kako bi se mogao nositi sa izrabljivačima, agent mora pamtiti tri vrste informacija koje se tiču njegovih interakcija s ostalim suigračima: (1) koji potez je odigran (*what*) (2) tko ga je odigrao (*who*) i (3) kada ga je odigrao (*when*) [68]. Što se tiče memoriranja trenutka (kada je agent igrao izdaju/suradnju), moguće je softverski modelirati agenta koji pamti n prethodnih interakcija s određenim suigračem – u tom slučaju govorimo o tzv. *memory-n* strategijama. Pretpostavimo li da u nekoj populaciji postoji agent tipa *memory-two* koji je doživio izdaju od strane agenta #5 u njihovom osmom susretu, tada on u desetom susretu, primjerice, može donijeti odluku na temelju tri pohranjene informacije:

(1) `defected? true`,

(2) `who? #5`,

(3) `when? t-2`.

Iako je provedeno relativno mnogo istraživanja koja su se bavila utjecajem memorije na evoluciju suradnje, ta istraživanja su više pažnje posvetila memorijskim ograničenjima agenta vezanim uz *broj prethodnih interakcija* koje on može pohraniti [69; 70; 71], nego ograničenjima po pitanju broja suigrača. Pritom se često zanemarivala banalna činjenica da agent ne međudjeluje samo s jednim suigračem već je uronjen u populaciju, stoga mora pohraniti mnogo više informacija nego što se čini. Unatoč prividnoj jednostavnosti *memory-one* strategije (kao što je TFT) koja uzima u obzir **samo jedan** prethodni potez suigrača, praćenje recipročnih obveza unutar velike grupe može predstavljati značajno kalkulacijsko opterećenje za memorijske sustave [68]. Međutim, klasični računalni model TFT-a ne uključuje memorijska ograničenja u pogledu broja zapamćenih sudionika IPD turnira. TFT-agenti opisani u 4.1.2 imaju savršenu memoriju – njihove se memorijske liste mogu protezati do u beskonačnost. Oni također *nikada* ne zaboravljaju tko su ALLD agenti u populaciji, što je očito nerealno. Kako bismo model učinili realnijim, potrebno je dizajnirati agenta koji ne može pamtiti iznad zadanog limita i koji postupno zaboravlja pohranjene informacije.

5.1 Model i realizacija zaboravljivog TFT agenta (OTFT)

OTFT (Oblivious tit-for-tat) odnosno zaboravljivi TFT agent ima sve on značajke TFT agenta navedene u 4.1.2 što naravno uključuje i memorijski popis prethodnih poteza (`partner-history`) . Uz ta svojstva, ugrađena su tri nova svojstva:

- Kapacitet memorije
- Brzina poluraspada memorije
- Cijena memorije

5.1.1 Memorijski kapacitet

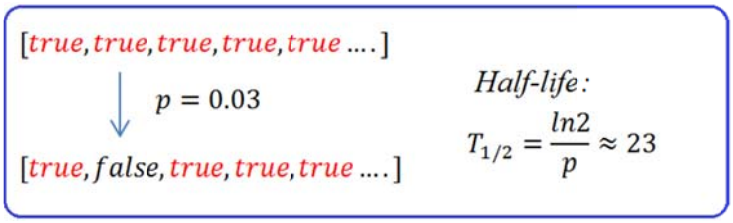
Kapacitet memorije m_c (u programskom kodu `mem-kap`) definiramo kao maksimalan broj elemenata koji mogu poprimiti vrijednost *true*. Kada broj elemenata *true* dođe do gornje granice (m_c), igrač više ne može mijenjati elemente popisa. On se i dalje kreće i dopušteno mu je igrati PD, ali čak i kad doživi izdaju od strane k-tog agenta, k-ti element popisa ne može ažurirati. Ključni dio programa tiče se procedure `history-update` (vidi 4.1.2) koja kontrolira ažuriranje memorije. U svakoj iteraciji potrebno je prebrojati broj elemenata koji nose vrijednost `true` i usporediti ih s maksimalno dozvoljenim brojem `mem-kap`. To se može učiniti kombinacijom naredbe filter (koja će iz `partner-history` izvući elemente `true` i sastaviti `popis-true`) i naredbe `length` koja će utvrditi veličinu popisa. Ako je broj elemenata (veličina popisa) manji od `mem-kap` tada je dozvoljeno uobičajeno ažuriranje. Gotova procedura za ažuriranje memorije izgleda ovako:

```
;; Ažuriranje memorije OTFT agenta

to OTFT-history-update
  set popis-true []   ;definiraj praznu listu "popis-true"
  ;filtriraj partner-history i neka filtrirana lista bude "popis-true"
  set popis-true filter [ [el] -> el = true ]  partner-history
  if length popis-true < mem-kap ;ako je veličina liste manja od
;maksimalno dozvoljene nastavi s ažuriranjem:                    ;
  [ set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?)
  ]
end
```

5.1.2 Vrijeme poluraspada memorije

Agenti koji mogu zapamtiti i na temelju upamćenog djelovati, dakako imaju prednost u odnosu na agente koji nose bezuvjetne strategije (poput ALLC). Ipak, besmisleno (i nerealno) bi bilo pamtiti izrabljivača kojeg smo davno susreli, a sad ga rijetko ili nikad ne srećemo. Prema principu *"use it or lose it"*, zaboravljamo ono što rijetko vidimo, a jačamo sjećanje na ono s čim se često susrećemo. Izrazom *"use it or lose it"* obično se opisuje odnos između vježbanja i mišićne mase – mišićne stanice postaju veće nakon fizičke stimulacije, a propadaju ako se ne stimuliraju dovoljno, međutim mnoga istraživanja pokazala su da se sličan proces odvija i u mozgu. Npr. mlade živčane stanice u hipokampusu (koji se dovodi u vezu s memorijom) odraslih osoba vjerojatnije će preživjeti i uključiti se u postojeće neuronske mreže ukoliko su potaknute novim i izazovnim iskustvima učenja. U suprotnom, većina mladih stanica propada unutar jednog tjedna [72]. Opetovanim izlaganjem određenom iskustvu produljuje se rok trajanja pohranjenih informacija i obrnuto. Stoga je razumno implementirati neku vrstu mehanizma koji će postupno uklanjati stare i nekorištene informacije. U svijetu neuroznanosti pamćenje i gubitak pamćenja i dalje su „vruća" tema, a uzroci zaboravljanja predmet su intenzivne rasprave – znanstvenici se ne slažu oko toga blijedi li sjećanje pukim protokom vremena (teorija raspadanja) ili zbog interferencije s novim informacijama (teorije smetnje) [73]. Proteklih godina upućeno je mnogo oštrih kritika na račun teorije raspadanja [74], međutim ona je i dalje aktualna i intuitivno privlačna, stoga je u OTFT agente ugrađen mehanizam koji funkcionira slično radioaktivnom raspadu. Za razliku od TFT agenata koji nikad ne gube informaciju o izdaji određenog ALLD agenta, OTFT agenti imaju „nestabilnu" memorijsku listu – svaki element `true` na popisu ima određenu vjerojatnost da „padne" u defaultno stanje `false`.



Slika 25 Raspad memorije može se izraziti vjerojatnošću mutacije elemenata ili vremenom poluraspada

U svakoj iteraciji programa, generator slučajnih brojeva daje broj između 1 i 100, za svaki element memorijske liste OTFT-igrača. Ako je dobiveni broj manji od zadane vjerojatnosti raspada (p), element `true` pretvara se u `false`. Taj postupak vrši se *za svaki* element na listi `partner-history` naredbom repeat tako da se u konačnici broj raspadnutih elemenata u jedinici vremena (u

jednom *tick*-u) aproksimativno pokorava Poissonovoj distribuciji. Kao mjera raspada, umjesto vjerojatnosti p koja je tipično vrlo mala, uzeto je vrijeme poluraspada τ (u programu `tau`). Vrijeme poluraspada dano je relacijom

$$\tau = \frac{ln2}{p}, \tag{5.1}$$

a u ovom slučaju može se interpretirati kao vrijeme potrebno da se broj elementa `true` memorijske liste raspolovi. Cijeli mehanizam softverski je riješen procedurom `zaboravljanje`:

```
;; PROCEDURA "Zaboravljanje"

to zaboravljanje
 set vjerojatnost-zaborava ((ln 2 / tau ) * 100 ) ;izračunaj vjerojatnost
 ask turtles with [strategy = "OTFT"]
[set polozaj-elementa -1
 Repeat N [set polozaj-elementa (polozaj-elementa + 1) ;za svaki element
             if random-float 100.0 < vjerojatnost-zaborava ;uvjet raspada
                [set partner-history
             (replace-item (polozaj-elementa) partner-history false )]
           ]
]
end
```

5.1.3 Cijena posjedovanja memorije

Treća važna značajka OTFT- igrača je cijena koju je on dužan platiti za posjedovanje memorije. U svijetu prirode, mozak nije samo organ koji daje prednost već, iz energetske perspektive, i veoma skupo trošilo [75; 76]. Mozak većih dimenzija troši više energije, stoga je razumno pretpostaviti da je trošak energije proporcionalan kapacitetu memorije s konstantom proporcionalnosti k (koja će se u daljnjem tekstu zvati jednostavno „k −vrijednost“). U svakom susretu, nakon odigrane runde Zatvorenikove dileme, od isplate igrača oduzima se djelić isplate (tj.energije) $\Delta E = k \cdot m_c$. Taj djelić isplate u programu je nazvan `cost`, a izračunava se u proceduri odredi-cijenu-memorije.

```
;; PROCEDURA "Odredi cijenu memorije"

to odredi-cijenu-memorije
  ask turtles with [strategy = "OTFT"] [set cost (k * mem-kap / 1000)]
end
```

Konstanta proporcionalnosti (odnosno k-vrijednost) je reda veličine 10^{-3}. Primjerice, najčešće vrijednosti korištene u simulacijama su unutar intervala $k = 4 \cdot 10^{-3}$ do $k = 6 \cdot 10^{-3}$, međutim u daljnjem tekstu kao i na većini grafova, radi jednostavnosti, stajat će oznake $k = 4, k = 5$ itd.

5.2 Simulacijski eksperimenti OTFT vs ALLD

5.2.1 Istraživačka pitanja

Kako bi se IPD između agenata učinila što realističnijom, osim svojstava koje imaju uobičajeni TFT agenti, u agente su implementirani memorijski kapacitet, zaboravljivost , ali i trošak energije koji ovisi o kapacitetu. Kao što je rečeno u poglavlju 1.2 (Definiranje problema) takva intervencija mogla bi rezultirati time da veliki memorijski kapacitet postane opterećenje u malim populacijama agenata. Prema tome, možda postoji optimalna veličina populacije u kojoj se agent zadanog kapaciteta najbolje snalazi i obrnuto, uz zadanu veličinu grupe možda postoji optimalna memorija. Prvo istraživačko pitanje dakle, glasi: kako se mijenja uspješnost OTFT strategije u ovisnosti o memorijskom kapacitetu u populaciji zadane veličine? Drugo pitanje, usko vezano uz prvo: Ako je memorija adaptivno svojstvo tj. ako je zaista optimizirana na veličinu populacije, kakva je veza između optimalnog memorijskog kapaciteta i veličine populacije?

5.2.2 Vrijeme dostizanja izrabljivača kao mjera uspješnosti

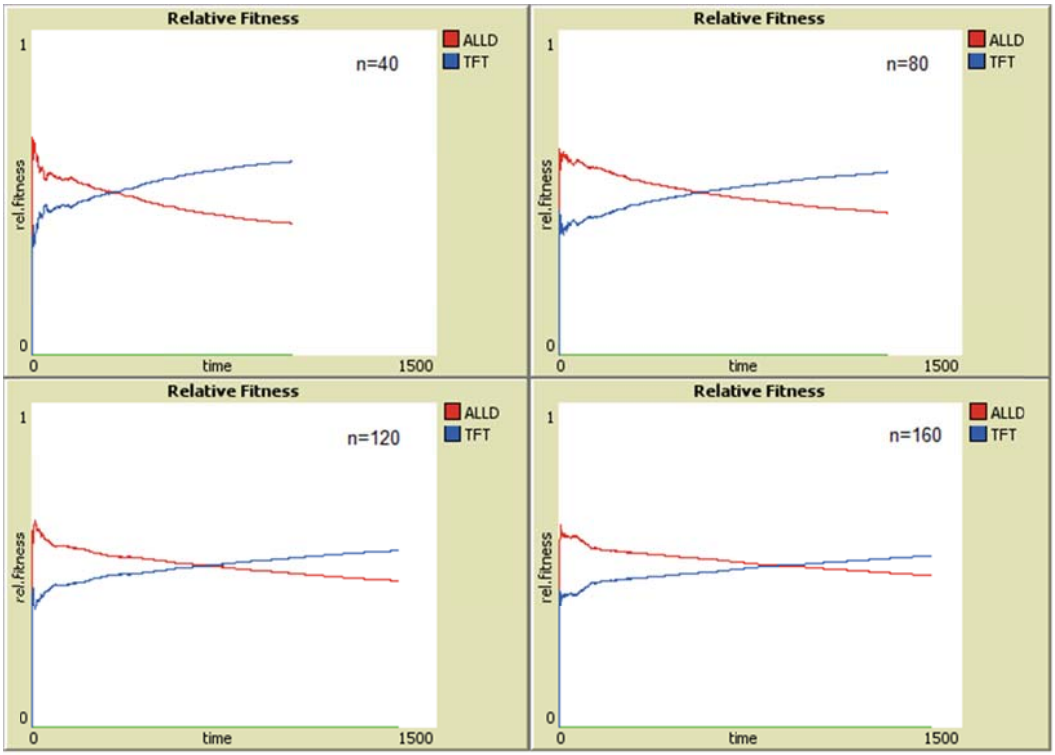
Na koji način mjeriti uspješnost strategije? U idealnom modelu moglo bi se simulirati evoluciju tako da uspješniji igrači imaju više potomaka, pa bi dovoljno bilo promatrati relativan broj suradnika u odnosu na relativan broj izrabljivača. Međutim, da bi se varirao memorijski kapacitet uz fiksnu veličinu populacije, morale bi se izjednačiti stope nataliteta i mortaliteta jedinki u sustavu. Jedna od mogućnosti jest da se prilikom rađanja jedinke istovremeno eliminira druga nasumično odabrana jedinka - dakle, rađanje jedinke ujedno predstavlja smrt druge jedinke. Ovaj proces, poznatiji kao Moranov proces, vrlo je stohastičan i podložan genetičkom klizanju (neki geni ispadaju iz igre naprosto zbog nasumičnosti odabira). Budući da u dosadašnjoj fazi istraživanja nije pronađen zadovoljavajući oblik reprodukcije igrača, izgrađen je model s „vječno živim igračima“, a kao mjera uspješnosti igrača uzet je relativni fitnes:

$$Relativni\ fitnes = \frac{udio\ strategije * fitnes\ strategije}{ukupni\ fitnes\ populacije}$$

$$r_k = \frac{x_k\, f_k}{\sum x_i\, f_i}. \tag{5.2}$$

gdje je x_k relativna frekvencija, a f_k fitnes k-te strategije.
Kako bi se otklonio utjecaj relativnog broja igrača, svaka simulacija provedena je na populacijama koje su bile načinjene od jednakog broja izrabljivača i suradnika.

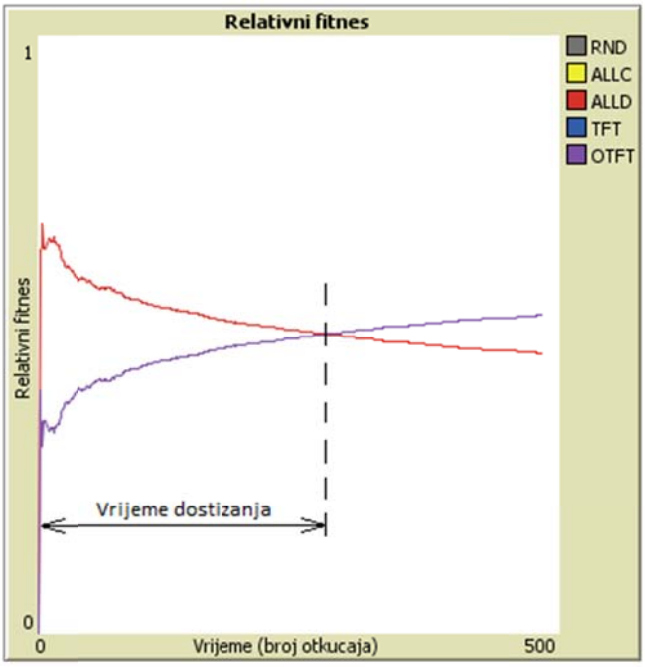
Da bi se moglo utvrditi je li neka strategija uspješnija od druge, potrebno je promatrati kako se igra razvija u vremenu i da li s vremenom njezin relativni fitnes nadmašuje relativni fitnes druge strategije. Kad je u pitanju čista TFT (savršene memorije) možemo vidjeti da ona uvijek svladava ALLD neovisno o veličini populacije. Međutim, što je veća populacija, suradnicima je potrebno više vremena.



Slika 26 Relativni fitnes TFT i ALLD u četiri populacije različitih veličina

Budući da suradnici prije ili kasnije dostižu izrabljivače, distinkciju između njih ne možemo vršiti na temelju pobjede ili poraza već na temelju brzine dostizanja. Stoga je razumno, kao mjeru ishoda, uzeti vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača.

Naravno, uvijek se može postaviti pitanje je li takva neortodoksna mjera ishoda zaista relevantna za evoluciju suradnje, odnosno je li kraće vrijeme dostizanja pokazatelj stabilnosti strategije. U poglavlju 3.3. opisana je ETI u konačno velikim populacijama i kao što je pokazano, ključno pitanje nije prelazi li inicijalna frekvencija TFT invazijsku barijeru (kao kod beskonačno velikih populacija) već koliki je prosječan broj rundi koji se odvija u jednom koraku Moranovog procesa. Međutim, iza zamršene matematike u suštini stoji brzina pabirčenja bodova. „Minimalan broj rundi“ samo je zgodan način da se izrazi „ potrebno je dovoljno vremena da strategija prikupi određen broj bodova“. Moranov se proces odvija u vremenu i njegova dinamika ovisi o stopi nataliteta, pa prema tome vjerojatnost fiksacije nužno ovisi o tome koja strategija je „brža“.



Slika 27 Vrijeme potrebno za dostizanje ALLD

Strategija koja prikupi relativno malen broj bodova između dviju uzastopnih iteracija Moranovog procesa ima manju vjerojatnost fiksacije od strategije koja prikupi više bodova.

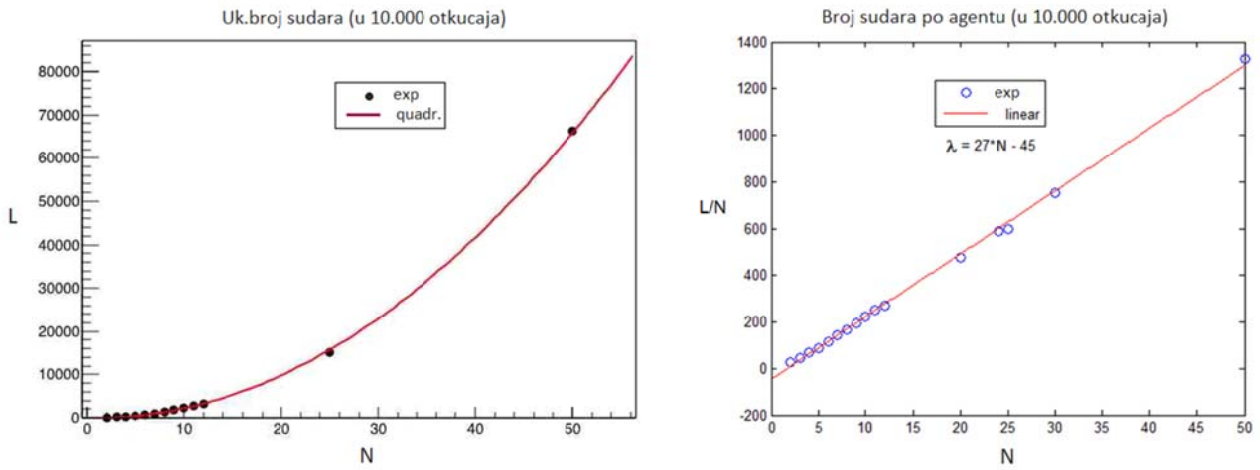
5.2.3 Problem gustoće agenata

Kako bi korisnik mogao pratiti dinamiku susretanja agenata, u sučelje NetLoga se, osim kontrolera (klizača i sl.) mogu staviti monitori različitih opservabli već prema želji i potrebi. Treba imati na umu da svaki agent vodi vlastitu evidenciju susreta – jedna od svojstvenih varijabli agenata je je upravo `br-susreta`. Kad se dva agenta sretnu, svaki od njih bilježi susret što znači da je ukupan broj susreta dva, iako se zapravo radi o jednom sudaru. Stoga se broj sudara može izračunati i prikazati na sučelju tako se sumira evidentirani broj susreta *svih* agenata i zatim podijeli s dva.



Slika 28 Podešavanje postavki monitora koji prikazuje broj sudara između agenata

Brzina kojom se agenti sudaraju i pritom igraju PD, ovisi o gustoći populacije, odnosno o broju agenata po jednom polju (*agents per patch*). Ako se ne mijenjaju postavke *svijeta* odnosno ako je broj polja uvijek isti dok se povećava populacija, broj sudara, sasvim očekivano, raste s kvadratom broja agenata (Sl.29).

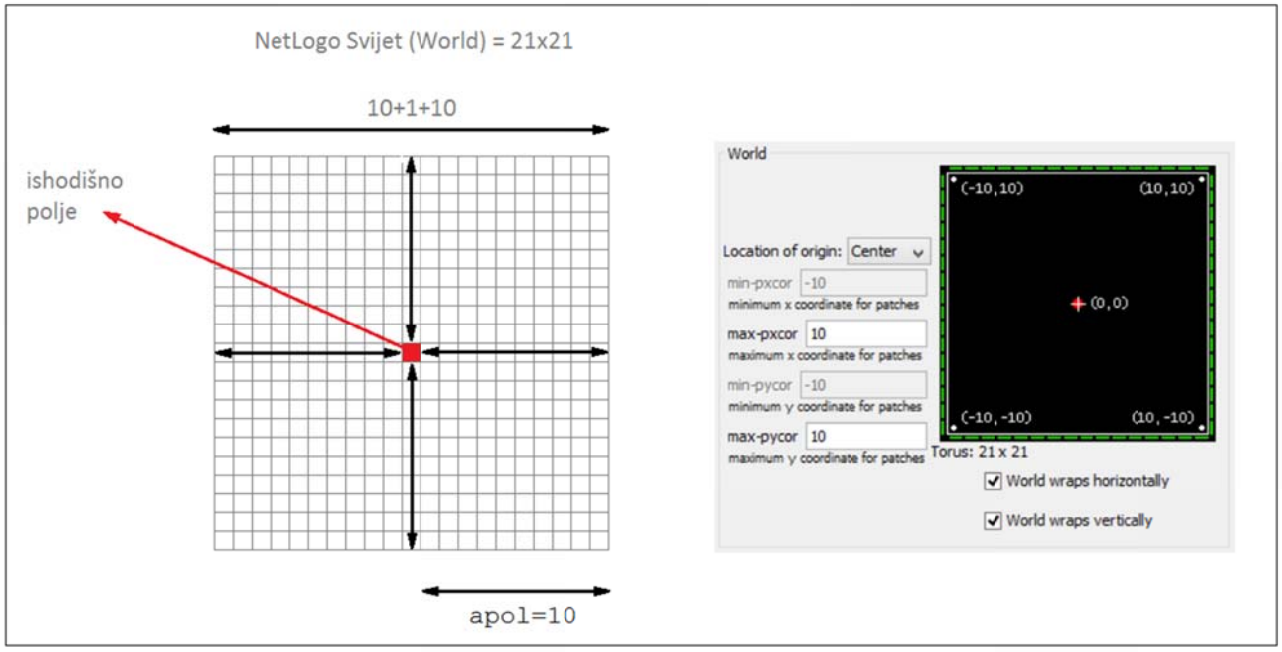


Slika 29 Broj susreta u ovisnosti o veličini populacije. Mjerenjem broja susreta u 10 tisuća iteracija (otkucaja) utvrđeno je da ukupan broj sudara raste s kvadratom, a broj sudara po agentu linearno. Veličina svijeta 33x33.

Veličina populacije	Uk. broj sudara (u 10^4 otk.)	Br.sudara po agentu
N	L	L/N
2	50	25
3	140	47
4	270	68
5	450	90
6	700	117
7	1025	146
8	1350	169
9	1740	193
10	2225	223
11	2775	252
12	3230	270
20	9550	478
24	14200	590
25	15200	600
30	22500	750
50	66336	1326

Tablica 22 Broj sudara u ovisnosti o veličini populacije

Kako bi se izbjegao utjecaj gustoće na vrijeme dostizanja prilikom variranja veličine populacije, potrebno je mijenjati i broj polja od kojih je građena ravnina po kojoj se agenti kreću. Iz tog razloga u proceduru `setup()` ugrađena je naredba `resize` .



Slika 30 Struktura "svijeta" u Netlogu i prozor za podašavanje broja polja od kojih se sastoji "svijet"

S obzirom da je centralno polje izabrano kao ishodišno, površina svijeta u NetLogu je

$$P = (1 + 2 \cdot \text{apol})^2, \tag{5.3}$$

gdje je `apol` polovica svijeta (bez centralnog polja).

Kako bi gustoću agenata ρ održali konstantnom, postavljamo uvjet

$$\rho = \frac{N}{(1 + 2 \cdot \text{apol})^2} = konst. \tag{5.4}$$

iz čega slijedi da je polumjer svijeta

$$apol = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{N}{\rho}} - 1\right). \tag{5.5}$$

Dakle, u simulaciju je uveden parametar gustoće ρ koji se po volji može mijenjati (ili održavati na istoj vrijednosti), pomoću kontrolnog klizača (slider) na sučelju. Parametar gustoće ρ (`density`) potom se koristi u proceduri `setup()` gdje se izračunava veličina svijeta prema jednadžbi (5.5):

```
set apol round ( 0.5 * (sqrt ( N / density ) - 1))
resize-world -1 * apol apol -1 * apol apol
```

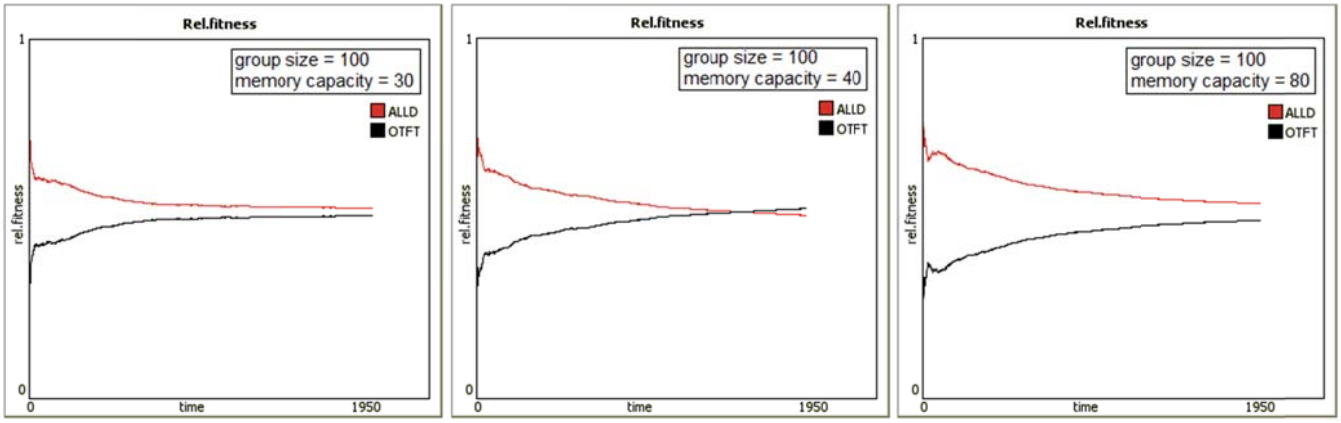
Uz fiksirani parametar gustoće, s povećavanjem broja agenata automatski se podešava broj polja od kojih je građen *svijet*. Takva modifikacija trebala bi prosječan broj sudara po jedinici vremena održavati konstatnim. Radi provjere, izvršen je niz mjerenja broja sudara agenata uz fiksnu gustoću. U tabl.22 prikazan je broj sudara unutar 10.000 otkucaja, te zatim broj sudara po jedinici vremena (po jednom otkucaju), te u zadnjem stupcu koliko partija u jednom otkucaju odigra jedan agent.

Veličina populacije	Svijet	Ukupan broj sudara (u 10^4 otkucaja)	Broj sudara po agentu	Broj partija/ agentu (u jednom otk)
N	$Broj\ polja$	L	L/N	λ
20	21×21	26164	1308	0.262
30	25×25	41823	1394	0.279
50	31×31	76342	1527	0.305
80	41×41	111336	1392	0.278
100	45×45	144059	1441	0.288
120	49×49	175278	1461	0.292
150	55×55	217450	1450	0.289

Tablica 23 Broj sudara u ovisnosti o veličini populacije uz stalnu gustoću agenata

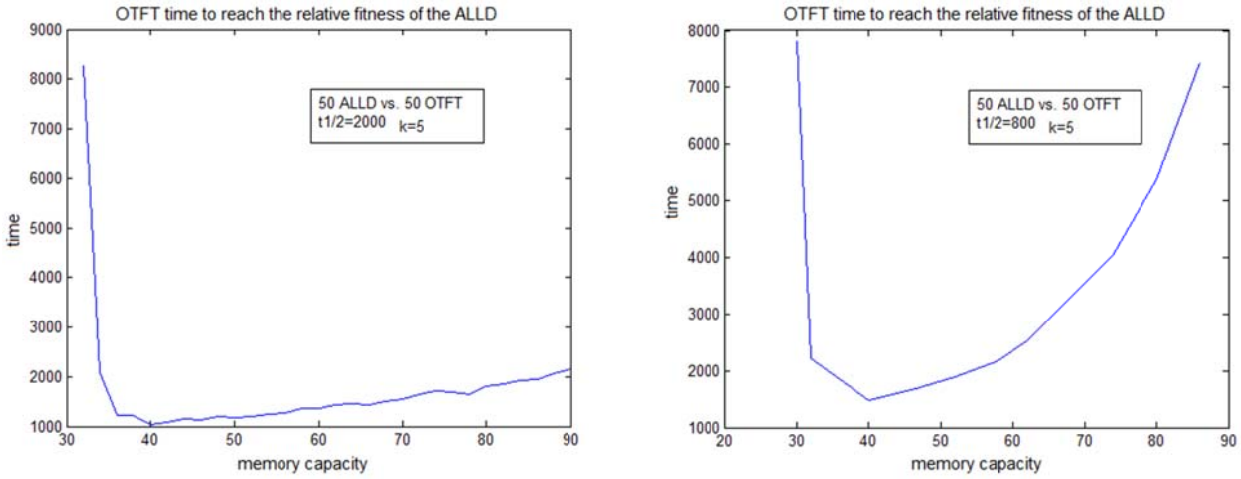
5.2.4 Ovisnost brzine dostizanja o memorijskom kapacitetu

Nakon što su u agente ugrađeni memorijski limit i zaboravljivost, izveden je niz simulacija s različitim k-vrijednostima i različitim vremenima poluraspada. Relativan broj izrabljivača (ALLD) i zaboravljivih osvetnika (OTFT) bio je **jednak** u svim simulacijama. Mjereno je vrijeme potrebno da relativni fitnes OTFT igrača dosegne vrijednost fitnesa ALLD, uz različit memorijski kapacitet OTFT-a. Najreprezentativniji rezultati dobiveni su uz k-vrijednosti $k = 5 \cdot 10^{-3}$ i vrijeme poluraspada $T_{1/2} = 800\ ticks$. Simulacije su pokazale očiglednu razliku između igrača koji imaju različit kapacitet memorije. Kad se fiksira veličina populacije, igrači s većim kapacitetom pamćenja brže dostižu relativni fitnes izrabljivača kao što i očekujemo od pametnijih igrača; ali samo do određene mjere jer s povećanjem kapaciteta postupno raste i gubitak energije. Nastavimo li povećavati kapacitet memorije, cijena postaje toliko visoka da suradnici uopće ne mogu doseći relativni fitnes izrabljivača (sl. 31).



Slika 31 Relativni fitnes strategija ALLD i OTFT. Povećanje memorije OTFT ne vodi nužno većem uspjehu u IPD

Vrijeme potrebno za dostizanje relativne podobnosti strategije ALLD ne smanjuje se linearno s povećanjem memorije, već pokazuje oblik U-krivulje, koja ovisi o vremenu poluraspada i k-vrijednostima.



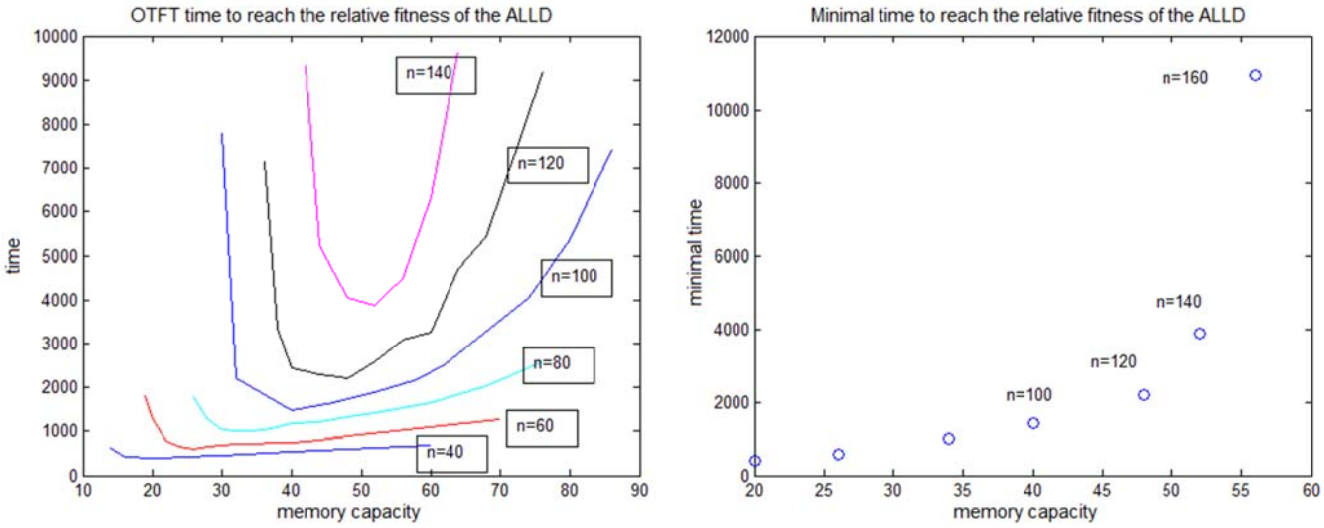
Slika 32 Vrijeme dostizanja izrabljivača ne pada linearno s memorijskim kapacitetom već prati oblik U-krivulje.

Minimalno vrijeme koje je zaboravljivim OTFT agentima potrebno za dostizanje relativnog fitnesa ALLD korespondira memorijskom kapacitetu optimalno prilagođenom zadanoj veličini grupe. Kad je broj igrača $n = 100$ može se primijetiti da vrijeme dostizanja izrabljivača postiže minimum pri kapacitetu $m_c = 40$, što otprilike odgovara broju izrabljivača u populaciji (sl. 32). Međutim, kasniji eksperimenti pokazali su da se raskorak između broja izrabljivača i optimalne memorije s povećanjem populacije postaje sve veći.

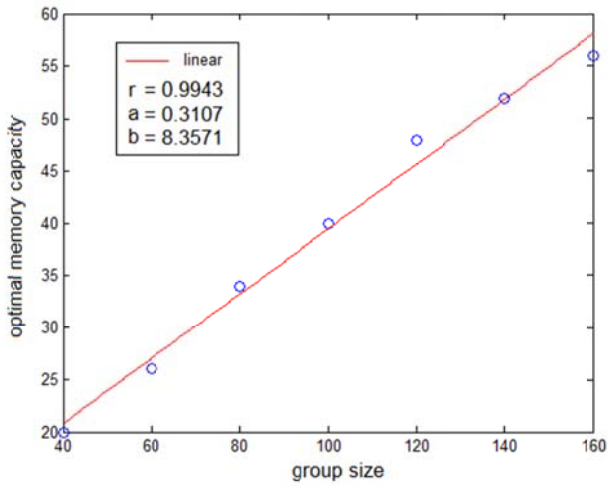
5.2.5 Optimalni memorijski kapacitet u ovisnosti o veličini populacije

U sljedećoj fazi projekta, istraženo je kako se optimalni kapacitet memorije mijenja s veličinom populacije. Nakon što se fiksira k-vrijednost, vrijeme poluraspada i gustoća populacije ($\rho = 0.05\ agent/patch$), varirane su dvije varijable, veličina grupe n i memorijski kapacitet m_c, a mjereno je vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača. Budući da je sustav stohastičan (što je rezultat nasumičnog hoda agenata), za svaki par (n, m_c) provedene su tri simulacije, a vrijeme dostizanja usrednjeno. Omjer suradnika i izrabljivača u svim eksperimentima bio je „fifti-fifti".

U preliminarnoj fazi istraživanja provedeno je oko 200 simulacija na različitim veličinama populacije i dobiven je niz U-krivulja koje su prezentirane na kvalifikacijskom ispitu. Kao što se vidi na grafovima (sl.33) minimalno vrijeme potrebno za svladavanje izrabljivača rapidno raste s veličinom grupe. Graf sugerira da *možda* postoji asimptota odnosno granična veličina populacije.



Slika 33(a) Vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača u populacijama različitih veličina (40-140 jedinki), (b) minimalno vrijeme dostizanja u populaciji do 160 jedinki.



Slika 34 Optimalni memorijski kapacitet linearno raste s veličinom grupe

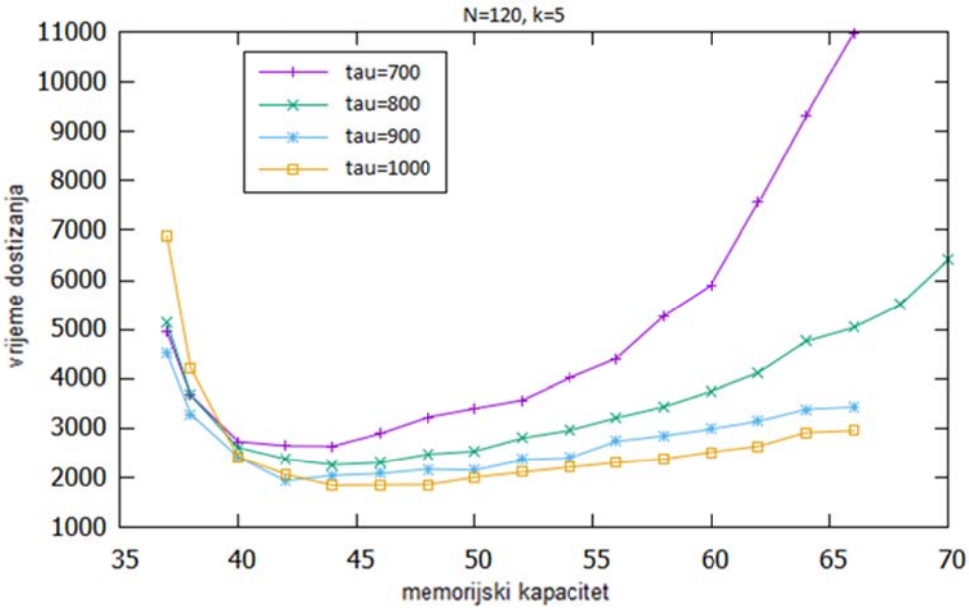
Snažna korelacija između optimalnog kapaciteta i veličine grupe ($r = 0.9943$) sugerira da ovaj model OTFT vjerno opisuje mehanizam DR i pokazuje upravo ono što je Robin Dunbar empirijski utvrdio u istraživanju primata –veličina grupe korelirana je s kognitivnim sposobnostima vrste. Time je potvrđena **Hipoteza H1** navedena u poglavlju 1.3 koja kaže da je optimalni memorijski kapacitet agenta potreban za održanje suradnje

putem DR-a proporcionalan veličini grupe. Opisani preliminarni eksperimenti provedeni su na populacijama veličine $40 \leq N \leq 160$ jedinki uz k-vrijednost $k = 5 \cdot 10^{-3}$. Kasniji eksperimenti provedeni uz neke druge k-vrijednosti također su potvrdili **Hipotezu H1** (vidi Sl.41).

Preliminarni razultati provedeni u prvoj fazi istraživanja su, također, upućivali na eventualno postojanje barijere iznad koje se ne može uspostaviti suradnja recipročnim interakcijama. U kasnijoj fazi istraživanja proveden je veći broj simulacija (Poglavlje 5.2.7) i pronađen je tip matematičke funkcije koji najbolje odgovara eksperimentalnim podacima. Međutim, prije toga ispitan je utjecaj zaboravljivosti (vremena poluraspada) na uspješnost OTFT, kao i utjecaj k-vrijednosti (odnosno cijene posjedovanja memorije).

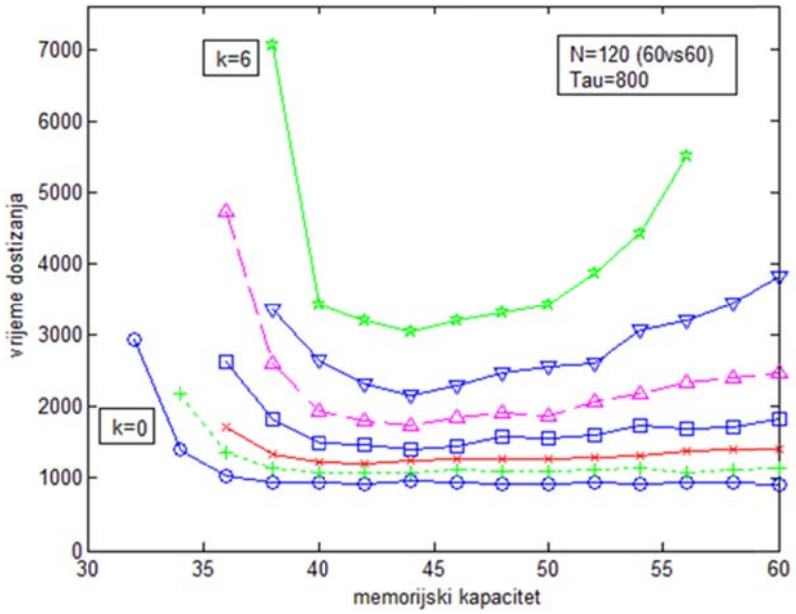
5.2.6 Utjecaj zaboravljivosti i cijene memorije na vrijeme dostizanja

Većina simulacijskih eksperimenata opisanih u poglavljima 5.2.5 i 5.2.7 provedena je uz parametre $\tau = 800, k = 5$. Moglo bi se postaviti pitanje – zašto su odabrani baš takvi parametri? Odgovor bi mogao biti – zato što se takvi parametri nalaze *negdje na pola puta* između ekstrema uočenih u pripremnoj fazi. Naime, u toj „pretprodukcijskoj“ fazi bilo je provedeno mnoštvo probnih simulacija po principu „nabadanja“; s velikim i malim faktorima zaboravljivosti, s velikim i malim cijenama posjedovanja memorije itd. U nekim kombinacijama nije bilo potpuno jasno kakav je trend ponašanja (dok se povećava populacija), a kod nekih kombinacija je povećanje populacije izazivalo esktremno produljenje vremena koje je OTFT agentima potrebno da bi dostigli ALLD. Naposljetku, odabrani su parametri koji daju vrlo jasne efekte, ali ipak uz umjeren trend odnosno umjeren gradijent, matematičarski rečeno. Treba napomenuti da takvi parametri nisu odviše specifični – kad se provedu simulacije uz variranje vremena poluraspada ili uz variranje k-vrijednosti jasno se vidi da model ima isti odziv, odnosno ne pokazuje suštinski različito ponašanje. Što su agenti zaboravljiviji tj. što je kraće vrijeme poluraspada memorije, to su krivulje dostizanja uže. Odnosno, na istoj vrijednosti memorijskog kapaciteta, manji τ rezultira većom derivacijom (većim nagibom) .



Slika 35 Utjecaj zaboravljivosti na vrijeme dostizanja

Do sličnih zaključaka dolazimo i razmatranjem skupoće memorije. Što je memorija skuplja to su krivulje uže, odnosno brzina porasta vremena s memorijom je veća.



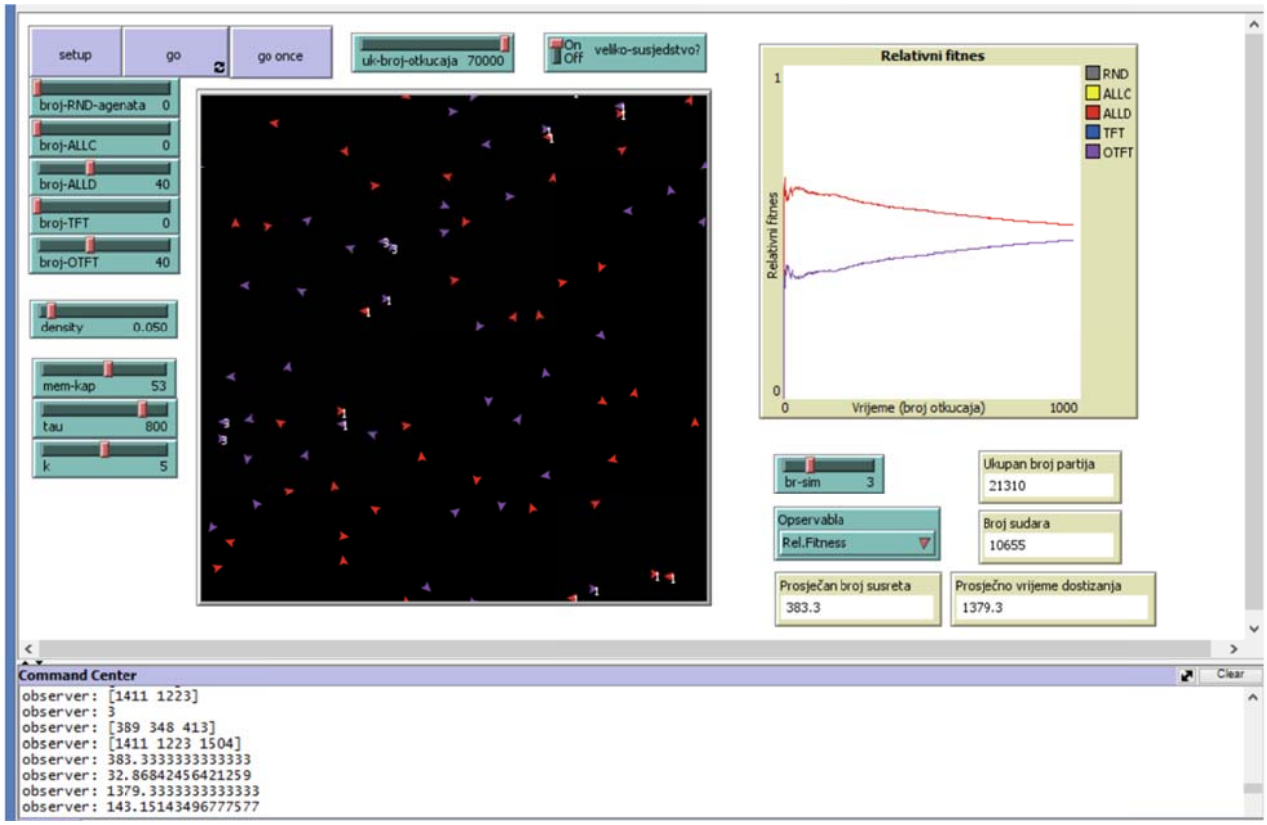
Slika 36 Utjecaj k-vrijednosti (cijene memorije) OTFT na vrijeme dostizanja izrabljivača

Da zaključimo, krivulje dostizanja sužavaju se i s porastom cijene i sa smanjenjem vremena poluraspada. Budući da klasičan TFT igrač ima besplatnu memoriju i beskonačno dugo vrijeme poluraspada, moglo bi se reći da je OTFT u tolikoj mjeri različit od TFT agenta u kolikoj mjeri mu je krivulja dostizanja izrabljivača konkavnija.

5.2.7 Empirijsko određivanje asimptotske granice

Radi pomnije analize izrađen je program za izvođenje simulacijskih eksperimenata „IPD BROWN SIMEX“ čije sučelje je prikazano na Sl.37. Program je vrlo sličan „IPD BROWN OTFT“ s tom razlikom što ima opciju ponavljanja simulacija zadani broj puta. Također moguće je izabrati opservablu koja će predstavljati promatranu mjeru uspješnosti; (1)relativni fitnes ili (2) očekivanu isplatu. Program funkcionira tako da automatski pokreće novu simulaciju nakon što mjerena opservabla suradničke strategije (TFT ili OTFT) dostigne vrijednost opservable strategije ALLD. Nakon što odvrti zadani broj simulacija, program izbacuje *broj susreta* i *vrijeme dostizanja* usrednjeno po broju simulacija, te pripadne standardne devijacije. Program je u cijelosti ispisan u prilogu B disertacije.

Kako bi se ispitalo eventualno postojanje asimptotske granice izveden je vrlo veliki broj simulacija pri čemu su varirani parametri veličine populacije, memorijskog kapaciteta i k-vrijednosti. Osobita je pažnja posvećena onom skupu parametra koji su bili razmatrani i u preliminarnoj fazi istraživanja.



Slika 37 Sučelje programa „IPD BROWN SIMEX“ za izvođenje simulacijskih eksperimenata

U tablici 24 prikazano je vrijeme potrebno zaboravljivim agentima da dostignu izrabljivače uz pripadne standardne devijacije. Simulacije su izvedene uz veliko susjedstvo (Large) i parametre $k = 5,\ \tau = 800,\ \rho = 0.05$, gdje je k konstanta proporcionalnosti između memorije i cijene memorije, τ vrijeme poluraspada memorije (zaboravljivost) i ρ gustoća agenata.

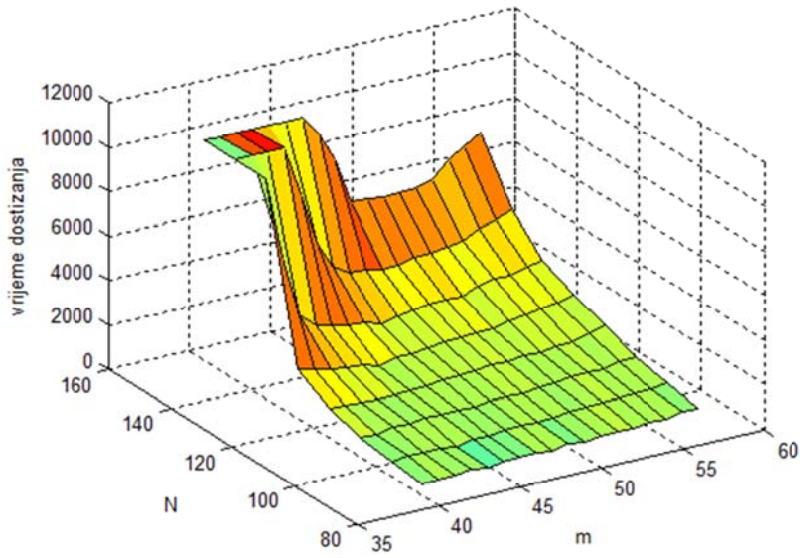
N=60										
20 855 200	N=80									
22 685 54		N=90								
24 670 41	26 2061 333									
26 636 57	28 1144 107		N=100							
30 658 27	30 1046 153		31 4089 498							
32 674 28	32 997 83		32 2484 594	N=110						
34 717 48	34 1016 75	34 1257 53	34 1793 150							
36 724 55	36 1046 77	36 1215 51	36 1519 141	36 2665 660	N=120					
	37 1040 27	37 1187 48	37 1495 180	37 2109 136	37 3750 1225					
38 749 36	38 1152 82	38 1311 33	38 1521 57	38 1885 97	38 3669 467	N=130				
	39 1092 23	39 1259 112	39 1495 42	39 1892 116	39 2797 364	39 10494 1483				
40 797 35	40 1167 117	40 1342 104	40 1458 49	40 1859 75	40 2605 318	40 6811 1093	N=140			
	41 1167 48	41 1349 100	41 1595 24	41 1839 80	41 2446 212	41 4044 375				
42 806 48	42 1254 75	42 1393 64	42 1562 142	42 1776 96	42 2370 153	42 3406 508		N=150		
	43 1212 112	43 1281 101	43 1659 77	43 1848 121	43 2321 73	43 3255 267	43 8218 832			
44 811 86	44 1291 50	44 1410 93	44 1676 119	44 1869 98	44 2110 50	44 3079 297	44 5853 632		N=160	
	45 1314 42	45 1420 19	45 1660 94	45 1888 124	45 2299 152	45 3055 140	45 4661 615			
46 864 18	46 1321 88	46 1521 102	46 1678 117	46 1994 52	46 2301 84	46 2809 136	46 4232 465	46 9596 1131		N=170
	47 1284 100	47 1532 31	47 1736 125	47 2036 69	47 2381 141	47 2959 99	47 4212 184	47 8333 931		
48 840 40	48 1418 73	48 1522 87	48 1769 130	48 2084 132	48 2469 167	48 3078 152	48 4037 171	48 6214 842		
	49 1323 76	49 1512 86	49 1772 51	49 2153 87	49 2563 152	49 3160 334	49 4067 267	49 6178 931		
50 921 59	50 1406 78	50 1640 44	50 1877 108	50 2122 101	50 2571 96	50 3163 200	50 4227 116	50 6050 648	50 15638 1224	
	51 1433 84	51 1696 99	51 1918 94	51 2258 125	51 2613 85	51 3189 94	51 4272 248	51 6069 248	51 13266 718	
52 873 72	52 1414 80	52 1681 189	52 1973 91	52 2210 83	52 2798 80	52 3442 222	52 4374 311	52 6140 382	52 10989 1190	
	53 1505 49	53 1766 105	53 1998 180	53 2329 84	53 2874 210	53 3609 180	53 4492 192	53 6372 597	53 11510 890	m=53, t>60000
54 997 41	54 1502 61	54 1753 19	54 2010 159	54 2336 42	54 2956 151	54 3627 403	54 4825 410	54 7114 504	54 12390 1562	
	55 1652 68	55 1815 35	55 2133 103	55 2567 151	55 3087 199	55 3811 219	55 5076 527	55 7553 739	55 14351 1040	m=55,t=57000
56 935 43	56 1632 118	56 1908 84	56 2182 69	56 2726 116	56 3210 167	56 3933 196	56 5398 229	56 7983 857		
	58 1610 113		58 2373 159		58 3436 173	58 4367 187	58 6177 467	58 9138 989		

memorijski kapacitet

vrijeme dostizanja

standardna devijacija

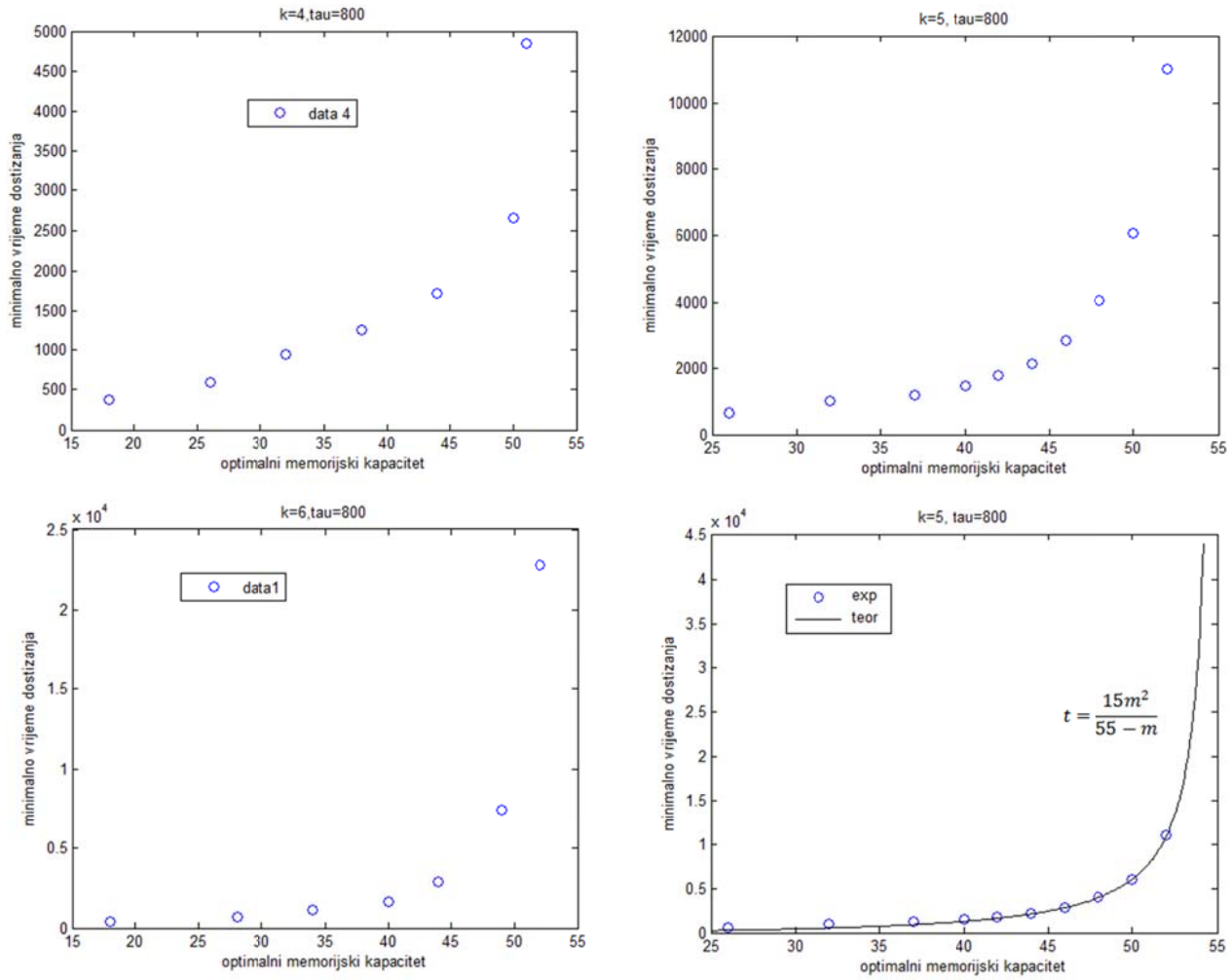
Tablica 24 Vrijeme dostizanja izrabljivača u ovisnosti o memoriji i veličini populacije



Slika 38 Vrijeme dostizanja izrabljivača u ovisnosti o memoriji m i veličini populacije N

Bilježene su i vrijednosti broja susreta koji je potreban da bi došlo do izjednačavanja isplata. Primjerice u tablicama 24 i 25 (PRILOG C) vidi se i vrijeme dostizanja i broj susreta te pripadne standardne devijacije. Mjerenja su napravljena uz k-vrijednosti $k = 4, k = 5$ i $k = 6$. Može se uočiti da minimalno vrijeme dostizanja korespondira minimalnom broju susreta. S obzirom da je u simulacijama fiksirana gustoća agenata to je zapravo i očekivano (vidi poglavlje Problem gustoće). Omjer broja susreta i vremena dostizanja ugrubo odgovara $\lambda \approx 0.28$.

Ipak, u fokusu interesa je uspješnost agenata odnosno minimalno vrijeme potrebno za dostizanje izrabljivača u populaciji zadane veličine. Svakoj veličini populaciji pripada odgovarajući optimalni memorijski kapacitet uz koji agenti najbrže dostižu izrabljivače. Što je veća populacija to je optimalni kapacitet veći i taj porast je linearan, međutim vrijeme dostizanja ne raste linearno nego mnogo brže od očekivanog. Na sl.39 prikazana je veza između optimalnog kapaciteta memorije i minimalnog vremena dostizanja izrabljivača.



Slika 39 Povezanost minimalnog vremena dostizanja i optimalnog memorijskog kapaciteta za tri različite k-vrijednosti. Na posljednjem grafu prikazana je teorijska krivulja provučena kroz empirijske točke za k=5

Radi određivanja povezanosti optimalne memorije i minimalnog vremena, te formuliranja matematičkog opisa, kroz dobivene točke provučene su mnoge krivulje, od višestupanjskih polinoma do eksponencijalnih funkcija, no najprikladnijom se pokazala funkcija oblika

$$f(x) = \frac{ax^2}{b - x}. \tag{5.6}$$

Radi se o racionalnoj funkciji koja ima asimptotu u $x = b$ tj. rapidno raste kako se vrijednosti varijable približavaju graničnoj vrijednosti b. Matematički rečeno – funkcija ide u beskonačnost kad x ide u b

$$\lim_{x \to b} \frac{ax^2}{b - x} = \infty. \tag{5.7}$$

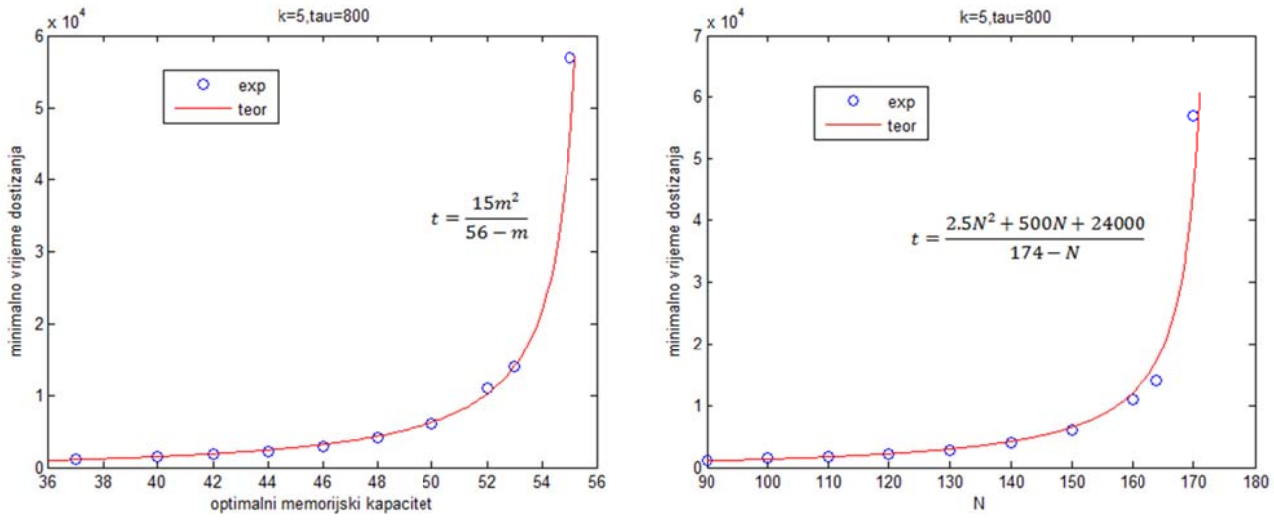
Na sl.39(d) prikazane su vrijednosti minimalnog vremena dostizanja uz $k = 5$ i $\tau = 800$ i kroz njih je provučena krivulja funkcije (5.6) uz $a = 15, b = 55$, što znači da vrijeme dostizanja raste prema funkciji

$$t = \frac{15m^2}{55 - m}, \tag{5.8}$$

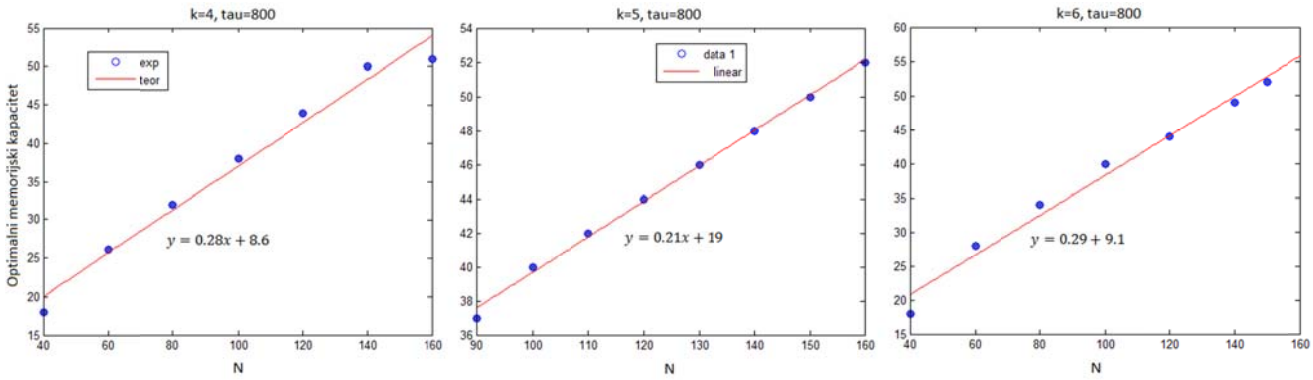
međutim uz dodatna mjerenja na populacijama veličine N=164 i N=170 utvrđeno je da optimalni memorijski kapacitet može ići čak i do $m = 55$, ali ne i preko toga. Prema tome, cijena memorije pri kapacitetu $m > 55$ je toliko visoka da anulira benefit memoriranja prisutnih izrabljivača.

Uz parametre $k = 5$ i $\tau = 800$ OTFT agenti ni u jednom mjerenju nisu uspjeli dostići ALLD agente kad je populacija bila veća od N=172. Metodom pokušaja i pogrešaka utvrđeno je da eksperimentalno dobivenim točkama najbolje odgovara funkcija (5.9) prikazana na sl.40(a)

$$t = \frac{15m^2}{56 - m}. \tag{5.9}$$



Slika 40 Teorijske krivulje provučene kroz eksperimentalno dobivene vrijednosti



Slika 41 Regresijski pravci interpolirani između točaka optimalne memorije OTFT agenata u ovisnosti o veličini populacije za tri različite k-vrijednosti

S obzirom da između veličine populacije N i optimalnog memorijskog kapaciteta m postoji linearna veza (sl. 41) koja se može prikazati općenitim izrazom

$$m(N) = \gamma N + \delta, \tag{5.10}$$

funkciju (5.6) moguće je transformirati na sljedeći način:

$$f(N) = \frac{a(\gamma N + \delta)^2}{b - (\gamma N + \delta)} \tag{5.11}$$

$$f(N) = a\frac{\gamma N^2 + 2N + \frac{\delta^2}{\gamma}}{\frac{(b-\delta)}{\gamma} - N} \tag{5.12}$$

gdje $\frac{(b-\delta)}{\gamma}$ predstavlja asimptotu funkcije $f(N)$ čime smo dokazali da zaista postoji **granična veličina** populacije koju OTFT agenti ne mogu preći!

Eksperimentalni podaci (uz $k = 5$) nam pokazuju linearnu vezu između optimalnog kapaciteta i veličine populacije (Sl.41b) s parametrima regresijskog pravca su $\gamma = 0.21,\ \delta = 19.$ Uzmemo li u obzir da koeficijent $b = 56$ predstavlja granični memorijski kapacitet (relacije 5.9 i 5.11) dobiva se granična veličina populacije

$$N_{max} = \frac{(b-\delta)}{\gamma} = 176$$

Uz $a = 15,\ b = 56,\ \gamma = 0.21,\ \delta = 19$ relacija (5.12) daje funkciju minimalnog vremena dostizanja

$$f(N) \approx \frac{3N^2 + 570N + 25800}{176 - N}, \tag{5.13}$$

međutim konačan oblik funkcije koja najbolje povezuje eksperimentalne podatke dobiven je dodatnim variranjem koeficijenata. Pokazalo se da uz parametar $k = 5$ i vrijeme poluraspada memorije $\tau = 800$, **minimalno vrijeme dostizanja izrabljivača najbolje opisuje funkcija** prikazana na sl.40 dana izrazom

$$f(N) \approx \frac{2.5N^2 + 500N + 2400}{174 - N}. \tag{5.14}$$

Vrijednost singulariteta u nazivniku funkcije predstavlja nevidljivu granicu koja se ne može preći – ako veličina grupe premašuje 174 jedinki, suradnicima je nemoguće postići bolju izvedbu bez obzira koliki bio njihov kapacitet pamćenja. **Hipoteza H2** navedena u poglavlju 1.3. glasila je: „Postoji granična veličina populacije iznad koje direktni reciprocitet nije dostatan za održanje suradnje između jedinki u populaciji.“ Ovdje prikazani rezultati mjerenja koji u konačnici sugeriraju matematički izraz 5.14, ukazuju da je **hipoteza H2 potvrđena**.

Treba napomenuti da konkretni brojevi i koeficijenti zapravo i nisu toliko značajni u široj slici ovog istraživanja. Najznačajnija je spoznaja da realistični odnosno zaboravljivi agenti ne mogu surađivati u proizvoljno velikim populacijama. Implementacija skupe i limitirane memorije uz mehanizam postupnog zaboravljanja neizbježno rezultira kolapsom suradnje u (pre)velikoj populaciji. U konačnici, možemo sumirati –simulacijski eksperimenti pokazali su da:

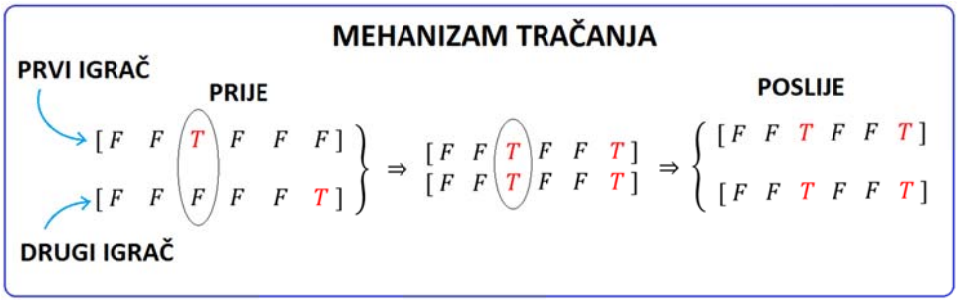
- uspješnost OTFT strategije ovisi o memorijskom kapacitetu
- vrijeme dostizanja izrabljivača ima oblik konkavne krivulje – s povećanjem memorije vrijeme pada, potom dostiže minimum, da bi opet počelo rasti kad vrijednost memorijskog kapaciteta postane veća od optimalne
- memorija jest adaptivno svojstvo tj. postoji optimalan iznos memorijskog kapaciteta koji ovisi o veličini populacije
- između optimalnog memorijskog kapaciteta i veličine populacije postoji linearna veza
- minimalno vrijeme dostizanja asimptotski raste s veličinom populacije

Što se tiče polaznih hipoteza, preostaje još jedino dokazati hipotezu **H3** da je iznad granične veličine populacije suradnja moguća ukoliko postoji horizontalni transfer informacija. Tom problemu posvećeno je sljedeće poglavlje.

5.3 Model GossipTFT

Upoznavanje agenata, odnosno detekcija izrabljivača može se smatrati vrstom *učenja*. OTFT agenti „na vlastitoj koži“ kroz direktne interakcije uče tko je tko u populaciji. Međutim učenje kroz direktne interakcije je opasno i nezgodno jer odnosi bodove u prvoj interakciji s ALLD agentom. Bezbolnija metoda učenja je tzv. *opservacijsko učenje* (u stranoj se literaturi naizmjenice koriste nazivi *vicarious learning* i *observational learning*) gdje subjekt nazoči ponašanju drugih jedinki i usvaja modele ponašanja na temelju tuđih iskustava [77]. Ova metoda učenja primijećena je kod mnogih životinjskih vrsta od vinske mušice do miševa [78]. Zahvaljujući jeziku opservacijsko se učenje kod ljudi odvija i neizravnim putem kroz mnoštvo kanala koji uključuju razgovor, čitanje priča i slušanje tračeva. Kad je u pitanju realizacija suradnje u populaciji, jeftiniji i bezbolniji način detektiranja izrabljivača mogao bi se ostvariti kad bi OTFT agenti također mogli učiti neizravnim putem. U prethodnom poglavlju pokazano je da agenti putem direktnog reciprociteta ne mogu ostvariti suradnju iznad tzv. asimptotske granice (kad je populacija prevelika). Može li se u takvim populacijama suradnja ostvariti neizravnim učenjem, bit će tema ovog poglavlja.

Kako bi se omogućila suradnja u populaciji iznad asimptotske granice, dizajniran je još jedan tip TFT igrača – igrač koji s drugima može razmjenjivati podatke pohranjene u svojoj memorijskoj listi. Dakle, za razliku od dosadašnjih modela indirektnog reciprociteta, ovaj model se ne temelji na *ad hoc* uvedenoj reputaciji, već na ažuriranju memorije. Novi tip igrača koji će se u daljnjem tekstu nazivati GossipTFT ili jednostavnije „tračer“ može promijeniti booleove vrijednosti svog memorijskog popisa (`partner-history`) kada dođe u dodir s drugim tračerom. Procedura je sljedeća: Kad se dva tračera sretnu, oba ažuriraju svoje liste prema jednostavnom pravilu –ako jedan od njih ima vrijednost *true* na nekoj poziciji u memorijskoj listi, tada *obojica* na toj poziciji liste stavljaju vrjednost *true*. Primjerice ako prvi tračer na 3.mjestu memorijske liste ima *true* (jer je doživio izdaju od trećeg agenta), a drugi na šestom mjestu (jer je doživio izdaju od šestog agenta), tada će nakon susreta obojica imati vrijednosti *true* i na trećem i na šestom mjestu memorijske liste kao što je prikazano na sl.40.



Slika 42 Shematski prikaz tračanja

Drugim riječima, svi tračeri koji stupe u fizički kontakt uskladit će liste i etiketirati istog „zločestog“ agenta čak i ako je s njim samo jedan tračer imao loše iskustvo. Ovo se pravilo može smatrati mjerom predostrožnosti koja se, iz evolucijske perspektive, lako može opravdati – „Ako je moj prijatelj imao loše iskustvo s dotičnom osobom, možda je bolje biti oprezan". Naime, asimetrija između teških posljedica u slučaju stvarne nedetektirane opasnosti i eventualnog utroška energije u slučaju lažne uzbune najčešće je tjerala evoluciju u smjeru postavljanja vrlo niskog praga uzbunjivanja [79]. Mnoga istraživanja provedena na ovom području pokazala su da većina organizama „puše i na hladno“ jer je, evolucijski gledano, bolje imati osjetljivi alarmni sustav koji često griješi (i pritom utrošiti energiju na bijeg) nego biti pojeden.

Procedura koja omogućuje razmjenu informacija nazvana je `tracanje` i bazira se na logičkoj operaciji OR.

```
to tracanje
  let PPH []
  ask partner [ set PPH partner-history]
  let new-history []
  set new-history (map [ [?1 ?2] -> ?1 or ?2 ] partner-history PPH)
  if  partner-history != new-history [set informed? true  set partner-
history new-history]
  ]
end
```

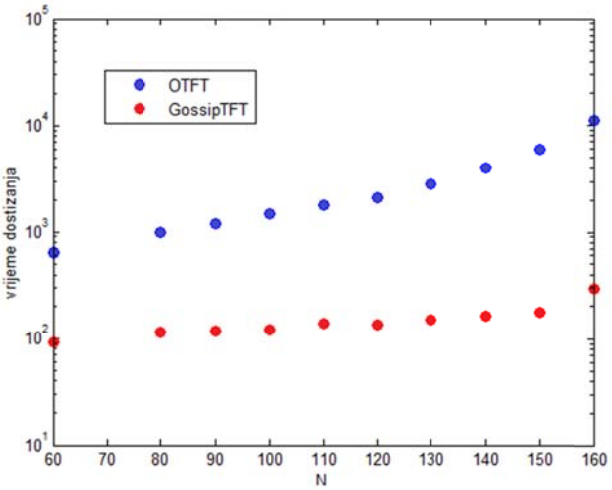
Kako bismo lakše vizualno pratili širenje informacija kroz populaciju u agente GossipTFT ugrađeno je svojstvo `informed?`. Kad je vrijednost varijable `informed?` jednaka **`true`**, tada agent mijenja nijansu boje. Ovo svojstvo nije osobito značajno u istraživačkom smislu – kad ima mnogo ALLD agenata u populaciji ne znamo *o kojem* izrabljivaču je pojedini tračer informiran, ali zgodno je promatrati širenje tračeva kad je u populaciji svega nekoliko ALLD agenata.

Valja napomenuti – po pitanju ostalih performansi tračeri su vrlo slični običnim OTFT igračima; posjeduju iste značajke, kao i OTFT; ograničenu memoriju, zaboravljivost i potrošnju energije sukladno memorijskim sposobnostima. Međutim, postoji razlika u cijeni koju plaćaju. Jasno je da igrači koji ujedno *i pamte i tračaju*, troše više energije od onih koji *samo pamte* (poznato je da sposobnost govora, primjerice, iziskuje znatno ulaganje energije). Iz tog razloga korištene su k-vrijednosti znatno veće nego u slučaju OTFT ($k > 5 \cdot 10^{-3}$).

5.4 Usporedba OTFT i GossipTFT

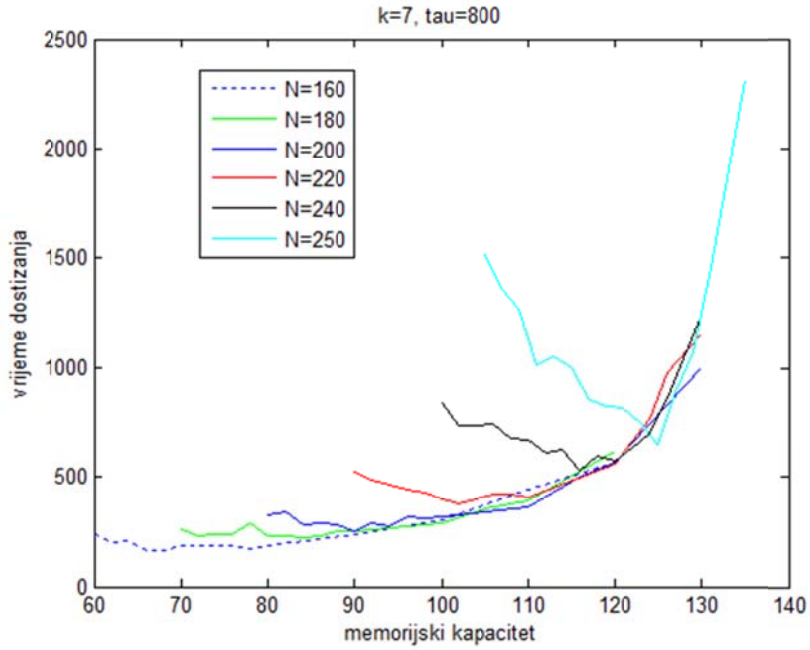
Tračeri „bačeni u arenu“ protiv ALLD igrača, pokazuju izuzetnu brzinu i sposobnost. Čak i uz visoku k-vrijednost $k = 7 \cdot 10^{-3}$, njihova brzina je neusporediva s OTFT; u malim skupinama mogu doseći relativnu podobnost izrabljivača četiri puta brže od šutljivih OTFT. U velikim skupinama brži su čak četrdesetak puta. Radi usporedbe provedene su simulacije uz onaj isti memorijski kapacitet koji se u slučaju OTFT pokazao kao optimalan. Iako te vrijednosti kapaciteta u populacijama zadanih veličina nisu optimalne za GossipTFT, razlika je svejedno drastična. Na običnoj vremenskoj skali vrijeme dostizanja izrabljivača u slučaju strategije GossipTFT praktički se ne može prikazati; vrijeme je sićušno u odnosu na OTFT i eksperimentalne točke su priljubljene uz apscisu. Stoga je na sl.41 vrijeme dostizanja prikazano na logaritamskoj skali.

Tip strategije		OTFT		GossipTFT	
Vrijeme poluraspada		$\tau = 800$		$\tau = 800$	
k-vrijednost		$k = 5 \cdot 10^{-3}$		$k = 7 \cdot 10^{-3}$	
N	m	t	σ	t	σ
60	26	636	57	93	10
80	32	997	83	113	21
90	37	1187	48	119	18
100	40	1458	49	121	16
110	42	1776	96	137	35
120	44	2110	50	136	20
130	46	2809	136	148	25
140	48	4037	171	163	26
150	50	6050	648	178	33
160	52	11000	1190	297	59



Slika 43 Brzina OTFT (k=5) u usporedbi s tračerima (k=7)

Kao što je spomenuto, vrijednosti memorijskog kapaciteta u tablici (sl.40) nisu optimalne za GossipTFT. To znači da tračeri u svakoj od tih populacija mogu postići još bolje rezultate. Primjerice u populaciji veličine $N = 160$, uzeta je vrijednost kapaciteta $m_c = 52$, te je vrijeme dostizanja izrabljivača $t = 297$, međutim simulacijski eksperimenti pokazuju da je za populaciju te veličine optimalan kapacitet $m_c = 66$ i uz takav kapacitet tračeri dostižu izrabljivače za $t = 164$ otkucaja. Pomoću programa IPD SIMEX proveden je cijeli niz simulacija na populacijama GossipTFT agenata različitih veličina (sličnim postupkom kao što je to učinjeno za OTFT). Rezultati su prikazani grafički na sl.42, i tablično u PRILOGU C na kraju disertacije.



Slika 44 Vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača u populacijama različitih veličina (160-250 jedinki)

Kao što se može vidjeti na sl.42, krivulje vremena dostizanja u slučaju tračera također imaju konkavan oblik, međutim za razliku od OTFT, imaju više oscilacija i pritom se preklapaju. Analiza podataka (PRILOG C) otkriva veliko vrludanje podataka (velike standardne devijacije) što nam govori da bi možda trebalo primijeniti drugačiju metodologiju. S obzirom na takva velika odstupanja, pitanje je smijemo li uopće govoriti o minimalnom vremenu – da je provedena analiza varijance, između mnogih izmjerenih vrijednosti vjerojatno ne bi bilo značajne razlike.

Napokon, treba reći da GossipTFT agenti bez problema prelaze asimptotsku granicu direktnog reciprociteta i bez problema dostižu izrabljivače u populacijama do 250 agenata. Ipak, uz $k = 7 \cdot 10^{-3}$ i $\tau = 800$ tračeri ne mogu dostići izrabljivače kad populacija broji više od 260 agenata. Moglo bi se reći da suradnja putem DR funkcionira do $N = 174$, a putem „tračanja“ i do $N = 260$. Bilo bi zanimljivo istražiti matematiku kojoj se pokoravaju GossipTFT agenti, ali taj posao nadilazi okvire ove disertacije.

Kao **hipoteza H3** (u poglavlju 1.3 o ciljevima i hipotezama disertacije) navedena je tvrdnja da je suradnja iznad granične veličine populacije moguća ukoliko postoji mehanizam horizontalnog širenja informacije kroz populaciju. Rezultati simulacija s agentima koji mogu „tračati“ i dostizati izrabljivače iznad $N = 174$ potvrđuju hipotezu **H3.** Ovime su potvrđene sve tri hipoteze doktorske disertacije.

6 Teorijski pristup populaciji agenata u nasumičnom hodu

S obzirom na činjenicu da *vrijeme dostizanja* (tj. vrijeme koje je suradnicima potrebno da dostignu izrabljvače) asimptotski raste s veličinom populacije postavlja se pitanje je li moguće teorijski izvesti jednadžbe koje bi opisale takav porast[4]. Prije nego što se krene u razmatranje uspješnosti OTFT agenata, možda bi trebalo smanjiti ambicije i postaviti malo jednostavniji zadatak: Kako uopće izvesti egzaktnu formulu za vrijeme koje je potrebno klasičnim TFT agenatima da dostignu ALLD?

Pokazalo se da je taj problem teži od očekivanog, ali ne samo to – pokazalo se da matrica isplate (3.107) , a posljedično i uvjet (3.109) pogrešno opisuju populaciju u kojoj agenti izvode Brownovo gibanje.

Kad se razmatra miješana dvokomponentna populacija, uobičajeno se smatra da se matrica isplate između TFT i ALLD može izraziti u obliku

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \bar{m}R & S+(\bar{m}-1)P \\ T+(\bar{m}-1)P & \bar{m}P \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{6.1}$$

gdje je $\bar{m}$ prosječan broj rundi između TFT i ALLD [59]. Prema relaciji (3.99) očekivane isplate strategija su:

$$E_{TFT} = a\frac{i-1}{N-1} + b\frac{N-i}{N-1}, \tag{6.2}$$

$$E_{ALLD} = c\frac{i}{N-1} + d\frac{N-i-1}{N-1}, \tag{6.3}$$

gdje je i broj TFT agenata, a $N-i$ broj ALLD agenata. Valja primijetiti da matrica (6.1) zapravo opisuje turnirski sustav „svaki-sa-svakim“, s prosječnim brojem umjesto stvarnog broja rundi. Takav matematički pristup nalazimo u mnogim publikacijama, primjerice u [77; 78] gdje se pretpostavlja da se dobro miješana populacija (*well-mixed population*) ponaša otprilike kao skup u kojem prije ili kasnije svaki agent sretne svakog. Elementi matrice se, zatim, množe s

[4] Ovo se pitanje nametnulo kroz raspravu s prof.dr.sc.Alenom Lovrenčićem na kvalifikacijskom ispitu. Njegovo pitanje je bilo na koji način ćemo dokazati da vrijeme dostizanja izrabljivača zaista raste asimptotski u slučaju zaboravljivih agenata. U tom momentu činilo mi se da je prikladnije i jednostavnije izvesti teorijsku formulu nego tražiti krivulju koja se može provući kroz eksperimentalne podatke.

vjerojatnostima susreta kao što se vidi u jednadžbama (6.2) i (6.3), npr. u prvom članu jednadžbe (6.2) izraz $(i-1)/(N-1)$ je zapravo vjerojatnost jedan TFT agent sretne drugog TFT agenta. Svaka runda takve (dobro miješane) populacije uključuje približno $N(N-1)/2 \approx N^2/2$ susreta od čega na svakog agenta otpada $(N-1)$ susreta. Prema tome, ukupan broj susreta po jednom agentu bio bi

$$\mu = \overline{m}\,(N-1). \tag{6.4}$$

Izjednačimo li očekivane isplate (6.2) i (6.3) dobit ćemo

$$a\frac{i-1}{N-1} + b\frac{N-i}{N-1} = c\frac{i}{N-1} + d\frac{N-i-1}{N-1}. \tag{6.5}$$

Uvrštavanjem elemenata matrice (6.1) u identitet (6.5) dobiva se prosječan broj rundi potreban da se očekivane isplate ALLD i TFT izjednače

$$\overline{m} = \frac{Ti - S(N-i) + P(N-2i)}{(R-P)(i-1)} \tag{6.6}$$

odnosno uz Axelrodove parametre isplate $(S=0, P=1, R=3, T=5)$

$$\overline{m} = \frac{3i+N}{2(i-1)}. \tag{6.7}$$

Neka μ_0 bude broj susreta koji će jedan prosječan agent doživjeti do momenta kad se isplate izjednače. Uvrštavanjem (6.7) u (6.4) dobiva se

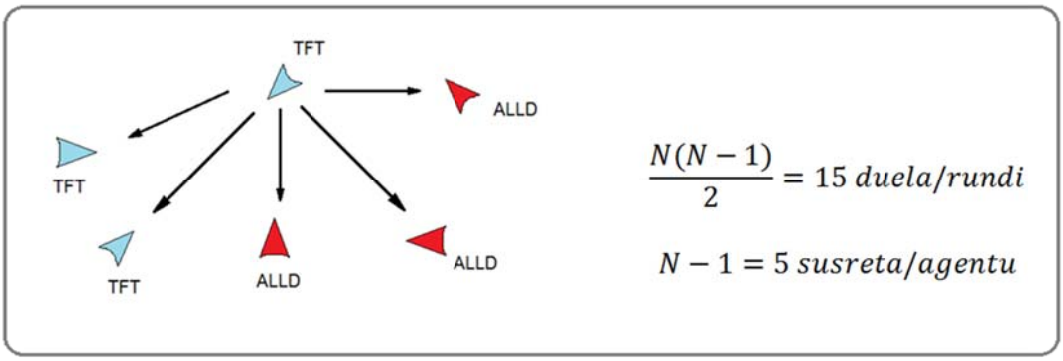
$$\mu_0 = \frac{3i+N}{2(i-1)}(N-1). \tag{6.8}$$

Radi jednostavnosti uzmimo da je broj TFT agenata jednak broju ALLD agenata. U tom slučaju, očekivani broj susreta potreban za izjednačavanje isplata je

$$\mu_0 = \frac{5N}{2}\cdot\frac{N-1}{N-2} \tag{6.9}$$

Međutim simulacijski eksperimenti provedeni pomoću „IPD BROWN SIMEX“ konzistentno pokazuju odstupanja od relacije (6.9). Primjerice, u populaciji koja se sastoji od 50 TFT i 50 ALLD agenata očekivalo bi se da će do izjednačavanja isplata doći nakon što svaki agent doživi 253 interakcije, međutim simulacije pokazuju da je taj broj znatno niži – u prosjeku agent doživi oko 200 interakcija. Prema tome, TFT je uspješnija od očekivanog. Također, očekivalo bi se da će se svi agenti međusobno „upoznati“. Broj mješovitih dijada kad se prvi put susreću suradnici i izrabljivači

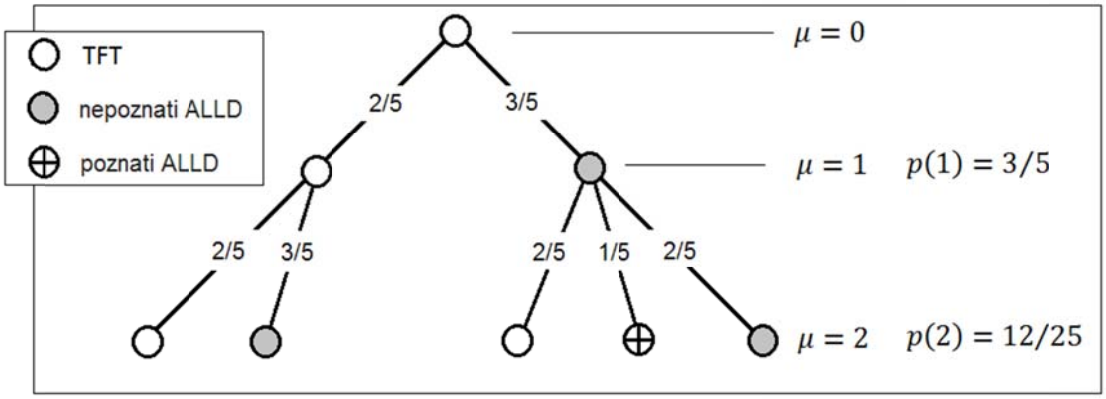
u takvoj populaciji je $50 \times 50 = 2500$, međutim eksperimenti pokazuju da u trenutku izjednačenja zarade, broj mješovitih susreta s nepoznatim agentima rijetko kada prelazi 1900.



Slika 45 U sustavu svaki-sa-svakim jedan TFT agent u svakoj rundi igra N-1partija

Ključ za razumijevanje ovog odstupanja od eksperimenta je postupno smanjivanje vjerojatnosti susreta *nepoznatog* ALLD agenta. Pretpostavimo da se populacija sastoji od 3 TFT i 3 ALLD agenta. U prvoj rundi turnira „svaki-sa-svakim“ , svaki TFT agent bi susreo sve članove populacije uključujući sve ALLD agente, što znači da bi prvih 5 susreta bilo rezervirano za igranje s nepoznatim agentima. Dakle, vjerojatnost sretanja novih izrabljivača je stopostotna. S druge strane u brownovskoj populaciji vjerojatnost pada postupno. U slučaju $N = 6$, gdje se 3 TFT i 3 ALLD agenta nasumično gibaju, vjerojatnost da će agent sresti nepoznatog izrabljivača u prvom susretu je 3/5 , ali ako u prvom susretu ($\mu = 1$) on *zaista* sretne izrabljivača, tada u drugom susretu ($\mu = 2$), vjerojatnost sretanja nepoznatog izrabljivača pada na 2/5. Ako ga ne sretne u prvom susretu tada je vjerojatnost 3/5. Ukupna vjerojatnost je sretanja nepoznatog izrabljivača u drugom susretu je

$$p(2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$$



Slika 46 Vjerojatnost da TFT agent u μ-tom susretu sretne nepoznatog ALLD agenta

Vjerojatnost sretanja novih izrabljivača u round-robin sustavu, primjerice u šestom susretu je nula, ali u brownovskoj populaciji to nije slučaj –vjerojatnost da TFT agent sretne nepoznatog izrabljivača u šestom susretu je gotovo 20 posto! Naime, u slučaju nasumičnog hoda uvijek postoji šansa da TFT agent sretne istog izrabljivača dva puta zaredom i uvijek postoji mogućnost da neke izrabljivače nikad neće susresti. Ovo se može činiti zanemarivim, ali u velikoj brownovskoj populaciji koja broji 200 članova, isplate će se izjednačiti iako prosječni TFT agent nikad neće susresti barem pet ALLD agenata. Očigledno IPD u ovakvoj populaciji ne možemo aproksimirati round-robin turnirom.

U poglavlju 6.1 ovaj problem je detaljno istražen – izvedene su egzaktne formule za očekivani broj dijada između svih agenata. Na temelju tih formula u poglavlju 6.2 izvedene su jednadžbe za očekivanu isplatu, kao i formula za izračunavanje očekivanog broja susreta koji je potreban da bi došlo do izjednačenja isplata. U poglavlju 6.3. izvedene relacije komparirane su s eksperimentalnim podacima.

Iako se ne može zanemariti značaj Axelrodovih turnira, određene, kritički nastrojene studije pokazale su da format IPD turnira jako utječe na uspješnost strategija i u konačnici na pobjednika [79]. U našem slučaju, pobjednik je izvjestan, ali način odvijanja IPD utječe na brzinu kojom se mijenja razlika između isplata. Kao što je već navedeno, u ovakvoj realističnoj populaciji gdje se agenti slobodno gibaju, TFT je uspješnija nego što relacije (6.1-6.9) predviđaju, što znači da se razlika u isplatama smanjuje brže od očekivanog. Kad bi se članovi ovakve populacije razmnožavali kontinuiranom replikatorskom dinamikom, tad bi razlika između isplata bila proporcionalna razlici između fitnesa sukladno jednadžbi (3.50) što bi se odrazilo i na otpornost TFT u odnosu na ALLD u Moranovom procesu. Suparništvo između strategija u Moranovom procesu obično se izražava fiksacijskom vjerojatnošću (vidi poglavlje 3.3), a kao što je pokazano u [67] u slučaju jake selekcije TFT ima veću vjerojatnost preuzimanja populacije ako vrijedi

$$a(N-2)+b(2N-1)>c(N+1)+d(2N-4). \tag{6.10}$$

što vodi na već spomenuti uvjet

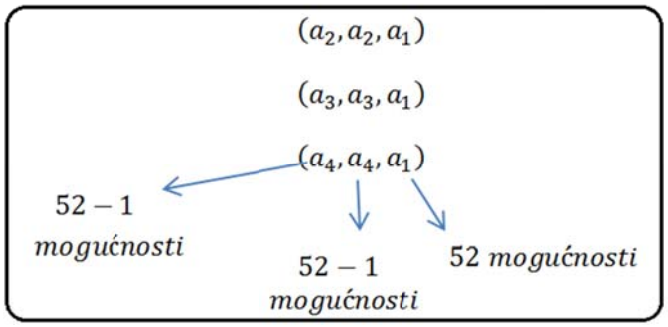
$$\bar{m}>\frac{3}{2}\frac{2N+1}{N-2}, \tag{6.11}$$

koji nam govori da u velikim populacijama jedan jedini TFT agent može preuzeti cijelu populaciju ako je prosječan broj rundi $\bar{m}>3$. U poglavlju 6.4 pokazano je da se taj uvjet mora modificirati i da je prosječan broj rundi ipak nešto manji.

6.1 Očekivani broj susreta

Kako bismo došli do općenite formule za vjerojatnost sretanja novog (nepoznatog) izrabljivača nakon μ susreta, pojednostavnit ćemo problem i pretpostavit ćemo da se u populaciji od N agenata nalazi samo jedan TFT agent. Tada je problem ekvivalentan sljedećem problemu: „Imamo špil karata. Izvučemo jednu kartu i vratimo u špil. Taj postupak ponavljamo. Kolika je vjerojatnost da u μ-tom izvlačenju izvučemo kartu koju još nismo izvukli?“

Osnovni skup iz kojeg izvlačimo elemente je $S_{52} = \{a_1, a_2, \dots, a_{52}\}$. Ako izvlačimo 3 puta, tada postoji 52^3 varijacija s vraćanjem. Nama su zanimljive varijacije kod kojih se u zadnjem izvlačenju pojavljuje „nova“ karta.



Slika 47 Tročlane varijacije iz špila karata pri čemu je treća karta „nova“

Vjerojatnost izvlačenja nove karte u trećem izvlačenju je:

$$p(3) = \frac{(52-1)^2 \cdot 52}{52^3}$$

Ako izvlačimo (i vraćamo) μ puta, tada ukupno postoji 52^{μ} varijacija s vraćanjem.

$$p(\mu) = \frac{(52-1)^{\mu-1} \cdot 52}{52^{\mu}} = \left(\frac{52-1}{52}\right)^{\mu-1}$$

Ako u populaciji od N agenata postoji samo jedan TFT agent među ALLD agentima, tada je vjerojatnost da u μ-tom susretu sretne nepoznatog izrabljivača jednaka:

$$p(\mu) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{\mu-1}. \tag{6.12}$$

Ali ako je populacija od $N = 6$ agenata miješana u jednakom omjeru (3 TFT vs. 3 ALLD) tada postoji konstantna vjerojatnost da TFT agent sretne drugog TFT agenta 2/5 i konstantna vjerojatnost 3/5 da sretne ili poznatog ili nepoznatog ALLD agenta. Agent koji sreće druge agente ima ulogu pokeraša koji izvlači karte iz špila $N' = N - 1 = 5$.

Vjerojatnost da sretne nepoznatog agenta je:

$$p(\mu) = \frac{3}{5}\left(\frac{N'-1}{N'}\right)^{\mu-1} ; N' = N-1 = 5$$

ili općenitije

$$p(\mu) = \frac{N-i}{N'}\left(\frac{N'-1}{N'}\right)^{\mu-1}. \tag{6.13}$$

Prema tome, vjerojatnost da TFT agent sretne nepoznatog ALLD agenta u μ-tom susretu:

$$p_{TA}(\mu) = \frac{N-i}{N-1}\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu-1} \tag{6.14}$$

μ	$p_{TA}(\mu)$
1	$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{3}{5} = \frac{375}{625}$
2	$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{25} = \frac{300}{625}$
3	$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125} = \frac{240}{625}$
4	$\frac{3}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{192}{625}$

Tablica 25 Vjerojatnost sretanja nepoznatog ALLD agenta u μ-tom susretu

Očekivani broj susreta između TFT i nepoznatih ALLD tj. očekivani broj *gubitničkih* dijada od početka nasumičnog gibanja do μ-tog susreta:

$$\delta_{TA} = i\sum_{k=1}^{\mu} p(k) \tag{6.15}$$

S obzirom da se radi o sumi geometrijskog niza, lako dolazimo da formule:

$$\delta_{TA} = i(N-i)\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right] \tag{6.16}$$

S druge strane, vjerojatnost da TFT agent sretne drugog TFT agenta konstantna je u vremenu (u zadanoj populaciji) $p_{TT} = (i-1)/(N-1)$, stoga je očekivani broj TT dijada:

$$\delta_{TT} = i\sum_{k=1}^{\mu} p_{TT} = i\mu\frac{i-1}{N-1} \tag{6.17}$$

Vjerojatnost sretanja *poznatih* izrabljivača možemo dobiti koristeći koncept suprotne vjerojatnosti:

$$p'_{TA} = 1 - p_{TA} - p_{TT} \tag{6.18}$$

iz čega slijedi da je očekivani broj osvetničkih dijada :

$$\delta'_{TA} = \mu i - \delta_{TA} - \delta_{TT}. \tag{6.19}$$

Sličnim postupkom možemo dobiti i očekivani broj dijada između ALLD agenata i svih ostalih. Rezultati su prikazani u tablici:

Vrsta dijade	Vjerojatnost	Očekivani broj dijada
TT	$p_{TT} = \frac{i-1}{N-1}$	$\delta_{TT} = i\mu\frac{i-1}{N-1}$
TA	$p_{TA} = \frac{N-i}{N-1}\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu-1}$	$\delta_{TA} = i(N-i)\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right]$
TA'	$p'_{TA} = 1 - p_{TA} - p_{TT}$	$\delta'_{TA} = \mu i - \delta_{TA} - \delta_{TT}$
AA	$p_{AA} = \frac{N-i-1}{N-1}$	$\delta_{AA} = \mu(N-i)\frac{N-i-1}{N-1}$
AT	$p_{AT} = \frac{i}{N-1}\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu-1}$	$\delta_{AT} = i(N-i)\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right]$
AT'	$p'_{AT} = 1 - p_{AT} - p_{AA}$	$\delta'_{AT} = (N-i)\mu - \delta_{AT} - \delta_{AA}$

Tablica 26 Vrste dijada, pripadne vjerojatnosti i očekivani broj dijada

6.2 Očekivana isplata

Prosječna zarada strategije može se dobiti tako da se ukupna zarada strategije podijeli s brojem nositelja strategije. Prema tome:

$$\langle E_{TFT} \rangle = \frac{1}{i}\left(\delta_{TT}R + \delta_{TA}S + \delta'_{TA}P\right) \tag{6.20}$$

$$\langle E_{ALLD} \rangle = \frac{1}{N-i}\left(\delta_{AT}T + \delta'_{AT}P + \delta_{AA}P\right) \tag{6.21}$$

Očekivanu isplatu možemo shvatiti kao prosječnu zaradu normaliziranu po broju suparnika $N-1$.

Prema tome, očekivane isplate strategija su

$$E_{TFT} = \frac{\delta_{TT}R + \delta_{TA}S + \delta'_{TA}P}{i(N-1)}, \tag{6.22}$$

$$E_{ALLD} = \frac{\delta_{AT}T + \delta'_{AT}P + \delta_{AA}P}{(N-i)(N-1)}. \tag{6.23}$$

Valja primijetiti da se i (6.22) i (6.23) mogu razbiti na parcijalne isplate odgovarajućih dijada. Primjerice, parcijalna isplata između TFT i TFT je

$$E_{TT} = \frac{\delta_{TT}R}{i(N-1)} = \frac{\mu}{N-1}\frac{i-1}{N-1}R. \tag{6.24}$$

U sljedećim izrazima, koristit ćemo supstituciju

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right]. \tag{6.25}$$

Prema izrazima (6.22) i (6.23), parcijalne isplate su

$$E_{TT} = \frac{\mu}{N-1}\frac{i-1}{N-1}R, \tag{6.26}$$

$$E_{TA} = \frac{N-i}{N-1}\xi S, \tag{6.27}$$

$$E'_{TA} = \frac{N-i}{N-1}\left(\frac{\mu}{N-1} - \xi\right)P, \tag{6.28}$$

$$E_{AT} = \frac{i}{N-1}\xi T, \tag{6.29}$$

$$E'_{AT} = \frac{i}{N-1}\left(\frac{\mu}{N-1} - \xi\right)P, \tag{6.30}$$

$$E_{AA} = \frac{\mu}{N-1}\frac{N-i-1}{N-1}P. \tag{6.31}$$

Pojednostavnimo li izraze (6.26-6.31) pomoću izraza (6.7) dobivamo jednadžbe za očekivanu isplatu izražene kao funkciju prosječnog broja rundi

$$E_{TFT} = \bar{m}R\frac{i-1}{N-1} + [S\xi + (\bar{m} - \xi)P]\frac{N-i}{N-1}, \tag{6.32}$$

$$E_{ALLD} = [T\xi + (\bar{m} - \xi)P]\frac{i}{N-1} + \bar{m}P\frac{N-i-1}{N-1}. \tag{6.33}$$

Izjednačavanjem izraza (6.32) i (6.33) dobivamo prosječan broj rundi potreban da strategija TFT dostigne ALLD

$$\bar{m} = \frac{3i+N}{2(i-1)}\xi \tag{6.34}$$

što je upravo klasičan rezultat (6.7) pomnožen faktorom ξ. Jednadžba se može, naravno, zapisati i bez supstitucije, pa u tom slučaju ima sljedeći oblik

$$\bar{m} = \frac{3i+N}{2(i-1)}\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right]. \tag{6.35}$$

Uzmemo li u obzir (6.4) i (6.8) možemo zaključiti da je broj susreta koje agent doživi do izjednačavanja isplata jednak

$$\mu = \mu_0\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right], \tag{6.36}$$

gdje je μ_0 očekivani broj susreta u slučaju turnira „svaki-sa-svakim".

Jednadžba (6.36) ne može biti riješena analitički, ali rješenje se može izraziti uporabom Lambertove W-funkcije koja se definira kao inverz funkcije xe^x. Može se pokazati (vidi Prilog 8.2) da je očekivani broj susreta

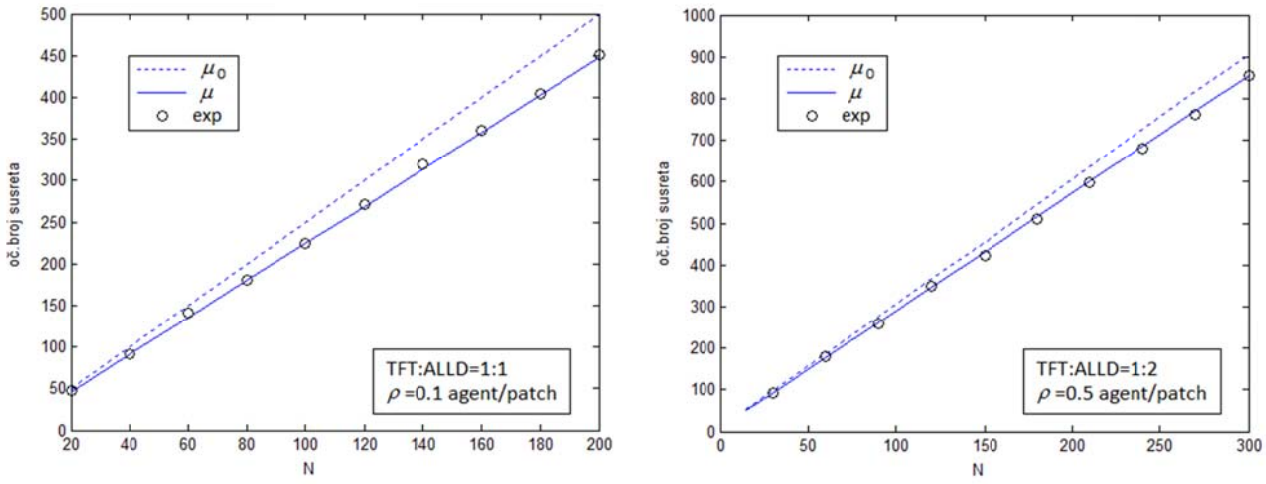
$$\mu = \mu_0\left[1-\frac{W_{-1}(a\,lna)}{lna}\right], \tag{6.37}$$

gdje je $a = \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu_0}$.

Mora se spomenuti da za $x < 0$ Lambertova W funkcija ima dva rješenja, koja se obično nazivaju grana W_0 i grana W_{-1} .U našem slučaju, jednadžba (6.36) također ima dva rješenja; prvo je trivijalno i daje $\mu = 0$ s obzirom da TFT i ALLD imaju jednake isplate na početku IPD. Drugo rješenje je netrivijalno i opisuje moment kad TFT dostiže ALLD. U Poglavlju 6.3 ovo rješenje je podvrgnuto eksperimentalnoj provjeri.

6.3 Eksperimentalni rezultati

Kako bi se utvrdila ispravnost jednadžbe (6.37) proveden je niz simulacijskih eksperimenata s različitim parametrima gustoće agenata u rasponu od 0.05 do 0.5 agenata po jednom polju (*agents per patch*) . Program napisan u Netlogu „IPD Brown SIMEX" prilagođen je tako da se zaustavi kad se isplate TFT i ALLD izjednače i cijeli postupak ponovi pet puta zaredom uz iste parametre. Broj susreta je usrednjen i prikazan grafički. Uz eksperimentalne podatke, na sl.48 vidimo teorijsko predviđanje koje daje klasična formula za round-robin (μ_0)i predviđanje koje daje Lambertova funkcija. Ponuđene su dvije varijante; prva s omjerom strategija 1:1 i druga s omjerom 1:2.

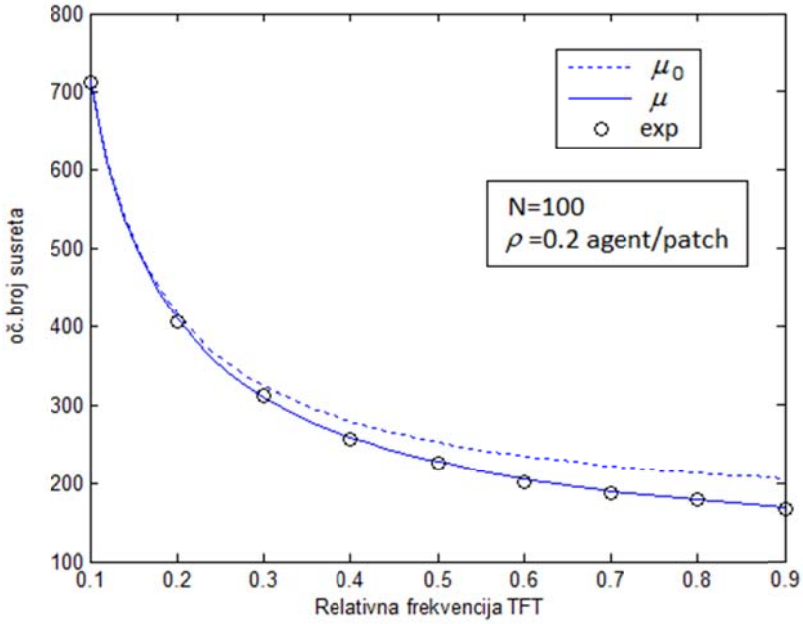


Slika 48 Očekivani broj susreta do izjednačavanja isplata TFT i ALLD

	Komentar	Broj susreta potreban da prosj.isplata TFT dostigne prosj.isplatu ALLD. Omjer strategija: pola-pola Rezultat je usrednjena vrijednost izmjerenih vremena u 5 provedenih simulacija za redom. Veličina susjedstva:mala (Neigh: S)									
	N	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Teor.	Oč.br. susr. (round-robin)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Teor.	Oč.broj susr. (brownian)	46	91	135	180	224	269	314	358	403	448
$\rho = 0.05$ $\lambda = 0.04$	μ_{TFT}	48	93	137	181	227	275	316	350	408	442
	SD	6	7	12.5	8.5	10	9	9	9	11	7.6
$\rho = 0.1$ $\lambda = 0.08$	μ_{TFT}	47	92	141	180	225	271	320	360	404	451
	SD	4	9	4	4	13	7	11	4	7	3
$\rho = 0.2$ $\lambda = 0.15$	μ_{TFT}	49	92	133	189	226	271	315	359	405	442
	SD	6	6	8	7	8	8	8	8	13	8
$\rho = 0.3$ $\lambda = 0.22$	μ_{TFT}	49	91	136	182	225	271	311	365	399	453
	SD	6	13	9	8	8	7	10	5	9	6
$\rho = 0.4$ $\lambda = 0.28$	μ_{TFT}	51	90	142	179	225	268	307	350	406	440
	SD	6	4	5	6	8	7	10	9	9	4
$\rho = 0.5$ $\lambda = 0.3$	μ_{TFT}	46	93	138	181	223	274	317	352	408	454
	SD	10	14	4	4	7	9	8	12	5	17
Neigh: L $\rho = 0.5$ $\lambda = 0.3$	μ_{TFT}	47	82	113	152	175	196	227	263	261	288
	SD	10	8	3	11	14	18	23	23	22	16

Tablica 27 Broj susreta potreban za dostizanje ALLD

Eksperimenti su napravljen na različitim gustoćama agenata i s različitim omjerima broja agenata. Na sl.49 prikazan je očekivani broj susreta do dostizanja isplata TFT i ALLD u populaciji fiksne veličine 100 agenata pri čemu je varirani omjer između broja TFT agenata i broja ALLD agenata.



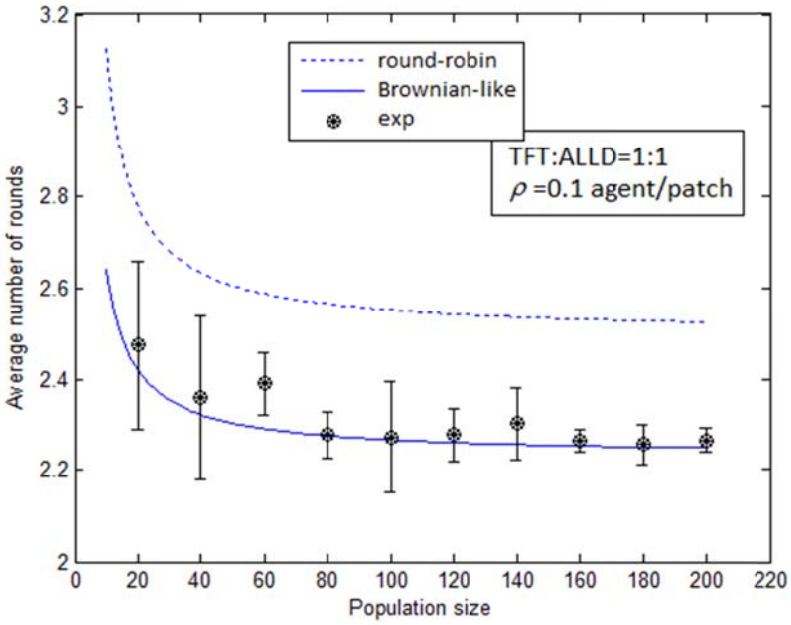
Slika 49 Očekivani broj susreta u ovisnosti o relativnoj frekvenciji TFT

Kao što se vidi rezultati simulacijskih eksperimenata izuzetno se dobro slažu s teorijskim rezultatima koje predviđa jednadžba (6.37) i prilično su robusni s obzirom na promjenu gustoće populacije (podaci su dani u PRILOGU E). Razlika između round-robin sustava i brownovske populacije još je vidljivija kad se broj susreta predstavi kroz efektivan broj rundi (Slika 50). Ako su TFT i ALLD jednako zastupljene u populaciji, broj rundi u dobro miješanoj populaciji („svaki-sa-svakim“) dan je relacijom

$$\bar{m}_0 = \frac{\mu_0}{N-1} = \frac{5N}{2(N-2)} \tag{6.38}$$

što je prikazano isprekidanom linijom. S druge strane, puna linija predstavlja broj rundi koji proizlazi iz jednadžbe (6.37). Kad se (6.37) podijeli s $(N-1)$, broj rundi je

$$\bar{m} = \frac{\mu_0}{N-1}\left[1 - \frac{W_{-1}(a\ lna)}{lna}\right]. \tag{6.39}$$



Slika 50 Efektivan broj rundi do izjednačavanja u ovisnosti o veličini populacije

6.4 Diskusija

Broj rundi potreban da jedna strategija dostigne drugu jedna je od najvažnijih veličina u gotovo svakoj analizi Zatvorenikove dileme. Ponekad se stabilnost strategije izvodi upravo tako da se izjednače očekivane isplate. Primjerice, često se ističe da je u slučaju beskonačno velike populacije TFT stabilna u odnosu na invaziju ALLD ako je broj rundi IPD barem $m = \frac{T-P}{R-P} = 2$, uz pretpostavku da se populacija većinski sastoji od TFT. Ovaj zaključak lako se može izvesti tako da se izjednače očekivane isplate, a zatim se jednadžba (3.68) aproksimira uz uvjet $x_2 \ll x_1$ (relativna frekvencija ALLD zanemariva u odnosu na TFT). Ako pak je udio ALLD u populaciji značajan, Taylor-Jonkerova jednadžba (3.54) upućuje da TFT može preuzeti populaciju ako je inicijalna frekvencija veća od invazijske barijere [67]

$$x^* = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}. \tag{6.40}$$

Ovaj se uvjet može ispuniti ako je broj rundi dovoljno velik – ako je x relativna frekvencija TFT tada broj rundi mora biti $m > (3x+1)/2x$.

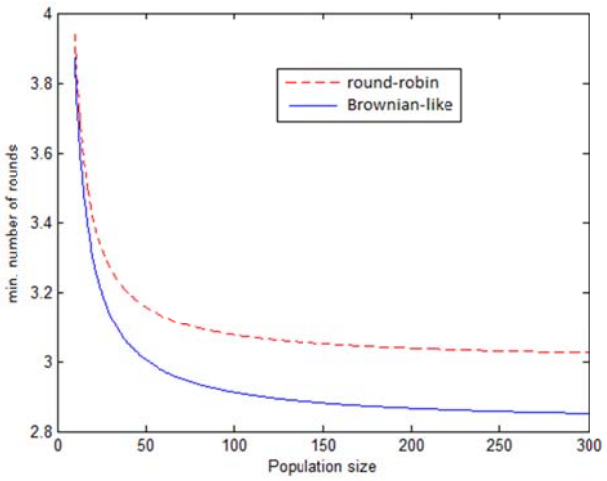
U konačno velikim populacijama prosječan broj rundi također igra veliku ulogu, iako je matematička analiza znatno kompliciranija, osobito kad se uvede replikacija. Naime, zahtjev za konstantnom veličinom populacije neizbježno vodi k analizi unutar okvira Moranovog procesa. Treba posebno naglasiti da svakom koraku Moranovog procesa (koji uključuje istovremenu kreaciju

i likvidaciju agenata) prethodi opetovana Zatvorenikova dilema čiji broj iteracija će odrediti sudbinu populacije. Nedovoljan broj rundi IPD-a omogućuje izrabljivačima da preuzmu populaciju, ali kao što je rečeno, nije svejedno na koji način je sprovedena IPD. U literaturi se obično spominju dva ekstremna pristupa modeliranju IPD; prvi pristup je da se agentima dozvoli interakcija jedino sa susjednim agentima (u predefiniranoj mreži) –tada govorimo o *strukturiranoj populaciji* (područje MTI koje proučava takve igre naziva se *games on graphs*); drugi pristup je da pretpostavimo kako između svih agenata cijelo vrijeme postoje poveznice koje im omogućuju igranje Zatvorenikove dileme –takva populacija obično se naziva dobro miješana (*well-mixed population).* Matematičke relacije (6.1-6.9) opisuju upravo potonji pristup. Nedavna istraživanja pokazala su da *stirred* populacije (u kojima se čestice ili jedinke kaotično kreću) nisu nužno i dobro miješane kao što nas pogrešno upućuje intuicija [80]. Populacija u kojoj agenti izvode Brownovo gibanje samo *nalikuje* dobro miješanoj populaciji. Ipak, treba reći jednu bitnu stvar – kad su u pitanju dijade između bezuvjetnih strategija (ALLD-ALLD) takva pretpostavka ne vodi pogrešnoj kalkulaciji jer bezuvjetnim strategijama svi suigrači su potpuno jednaki. Problem postaje akutan kad se pretpostavka o dobroj miješanosti primijeni na strategije koje imaju sposobnost prepoznavanja i memoriranja. Iz takve pretpostavke tada slijedi zaključak da TFT agenti upoznaju sve izrabljivače u ranoj fazi igre, a kao što smo vidjeli to nije slučaj u brownovskoj populaciji. Naposljetku, treba zaključiti da matrica (6.1) nije prikladna za matematički opis IPD u brownovskoj populaciji. Usporedbom jednadžbi (6.2.-6.3) s jednadžbama (6.32-6.33) dolazimo do nove matrice isplate

$$\begin{array}{c} \\ \text{TFT} \\ \text{ALLD} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{TFT} & \text{ALLD} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{m}R & S\xi + (\bar{m} - \xi)P \\ T\xi + (\bar{m} - \xi)P & \bar{m}P \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.41}$$

gdje je

$$\xi = \left[1 - \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right].$$



Slika 51 Minimalan broj rundi potreban da jedan TFT agent preuzme cijelu populaciju

Uzimajući matricu isplate u obzir, uvjet preuzimanja populacije (6.10) poprima sljedeći oblik

$$\bar{m} > \frac{3}{2}\frac{2N+1}{N-2}\xi. \tag{6.42}$$

To znači da veliki N, u slučaju slabe selekcije, jedan jedini TFT agent može preuzeti cijelu populaciju čak i kad je prosječan broj rundi $\bar{m} < 3$.

7 Zaključak

Općeprihvaćeno mišljenje je da mehanizam direktnog reciprociteta dobro funkcionira u malim skupinama gdje se jedinke susreću često i gdje prevaranti ne mogu proći nekažnjeno [12], ali nigdje do sad nije kvantitativno objašnjeno kako i zašto točno mehanizam DR-a prestaje funkcionirati u velikim skupinama. Za razliku od prethodnih modela koji su zanemarili ulogu memorije, predloženi modeli u ovom istraživanju uzimaju u obzir memorijske sposobnosti jedinki, kao i cijenu takvih sposobnosti. Doduše, u proteklih nekoliko godina proveden je određen broj studija vezanih uz utjecaj memorije na suradnju, ali te studije bile su fokusirane uglavnom na memorijska ograničenja glede vremenske udaljenosti poteza. U publikacijama se tako mogu pronaći usporedbe između agenata koji mogu pamtiti dvije prethodne interakcije (*memory-two*) i agenata koji mogu pamtiti samo jedan korak unazad (*memory-one*) i sl. [69; 70; 71]. Pritom je zanemarena činjenica da u svijetu prirode ne postoje organizmi koji bi mogli pratiti recipročne interakcije s *neograničenim* brojem suigrača. Unatoč tome, ako izuzmemo modele s reaktivnim strategijama, recipročni agenti u dosadašnjim istraživanjima bili su programirani tako da pamte prethodne poteze *svih* suigrača ubačenih u simulaciju. Novitet ovog istraživanja su agenti koji *ne mogu* pamtiti poteze svih suigrača. Kako bi se simulacijski model približio stvarnosti, TFT agentima ugrađena su tri svojstva: (1) memorijski kapacitet, (2) mehanizam zaboravljanja i (3) cijena posjedovanja memorije. Kao što je opisano u petoj glavi disertacije, pokazalo se da čak i za takve jednostavne *memory-one* strategije, kao što je Zaboravljivi TFT koji pamti samo jedan potez po oponentu, memoriranje jednog poteza velikog broja agenata predstavlja značajno opterećenje. Takvi igrači nazvani su „OTFT agenti“. Simulacijski eksperimenti provedeni u NetLogu pokazali su da s povećanjem memorije OTFT agenata vrijeme dostizanja relativnog fitnesa izrabljivača do određene mjere pada, a zatim, nakon postignutog minimuma opet počinje rasti. Drugim riječima graf vremena dostizanja izrabljivača u populaciji fiksne veličine ima oblik konkavne pseudoparabole čija konkavnost ovisi o parametrima zaboravljivosti i cijene. Simulacije uz zadane parametre zaboravljivosti i cijene pokazale su da svakoj veličini populacije pripada jedna takva krivulja dostizanja i da je položaj minimuma krivulje određen memorijskim kapacitetom koji se može smatrati optimalnim za zadanu veličinu populacije.

Na samom početku ove disertacije, u poglavlju 1.3. iznesena je **hipoteza H1 „**Ako se suradnja u grupi ostvaruje isključivo putem direktnog reciprociteta, optimalna memorija agenta proporcionalna je veličini grupe“. Simulacijski eksperimenti opisani u poglavljima 5.2.5.-5.2.7 **potvrdili su ovu hipotezu**. Linearnom regresijom pronađeni su pravci i nedvojbena korelacija između optimalne

memorije i veličine grupe. Ovi nalazi idu u prilog Dunbarovoj hipotezi o društvenom mozgu (SBH) o kojoj je bilo riječi u poglavlju 2.3.2.

Nakon što je utvrđeno da je optimalan memorijski kapacitet proporcionalan veličini grupe, postavljeno je pitanje može li se veličina grupe (a samim time i optimalna memorija) povećavati u beskonačnost? Kao što je opisano u poglavlju 5.2.7., svakoj veličini populacije pripada optimalna memorija, a uz takvu optimalnu memoriju OTFT agentima potrebno je tzv. *minimalno vrijeme* kako bi dosegli relativni fitnes izrabljivača. Drugim riječima za svaku veličinu populacije postoji karakteristično minimalno vrijeme. Simulacijskim eksperimentima koji su opisani u 5.2.7. utvrđeno je da minimalno vrijeme dostizanja s veličinom populacije raste vrlo naglo, a u velikim populacijama raste praktički u beskonačnost, što je izazvalo spekulacije o postojanju asimptotske granice. Postavljeno je pitanje o kakvom se porastu radi – je li zaista u pitanju asimptotski rast ili se naprosto radi o brzorastućoj funkciji poput kvadratne ili eksponencijalne? Interpolacijom kroz eksperimentalne točke utvrđeno je da podatke najbolje opisuje racionalna funkcija oblika

$$t(N) = \frac{a_0 + a_1 N + a_2 N^2}{b - N}.$$

Budući da interpolirana funkcija zaista ima asimptotu u točki b, zaključeno je da OTFT agenti ne mogu dostići izrabljivače kad je $N > b$. Na taj način **potvrđena je hipoteza H2 o postojanju granične veličine populacije**. Konkretna vrijednost granične veličine nije utvrđena sa sigurnošću, ali brojke upućuju da je $N_{max} \approx 175$ agenata i čini se da iznad te granice mehanizam DR ne može osigurati etabliranje suradnje.

Rezultati opisanih simulacija sugeriraju da je agentima potrebno omogućiti učenje indirektnim putem, a ne samo direktnim izlaganjem izrabljivačima i učenjem na vlastitim greškama. Radi omogućavanja horizontalnog prijenosa informacija o izrabljivačima prisutnim u populaciji uveden je mehanizam tračanja, odnosno mehanizam pomoću kojeg agenti usklađuju svoje memorijske liste. Kao što je opisano u 5.3.3. agenti nazvani GossipTFT, kao i obični igrači, s vremenom zaboravljaju dobivene informacije, ali čini se da ti kognitivni nedostaci ne umanjuju njihovu izvedbu. Oni se učinkovito nose s izrabljivačima u skupinama iznad asimptotske granice čak i kada je cijena tračanja za četrdeset posto veća od cijene pukog pamćenja. **Simulacijski eksperimenti su, prema tome, potvrdili i hipotezu H3** postavljenu u poglavlju 1.3. **da je suradnja između jedinki u populacijama iznad granične veličine, moguća ukoliko postoji mehanizam horizontalnog širenja informacija**. Dobrobit razmjene informacija očito nadilazi cijenu komunikacije, sve dok populacija opet ne dosegne kritičnu veličinu. Slično OTFT agentima i GossipTFT agenti imaju pojas unutar kojeg mogu svladati ALLD, no činjenica je da se taj pojas prostire preko asimptotske granice OTFT agenata.

U fokusu ovog istraživanja bilo je pitanje zašto suradnja zasnovana na *direktnom reciprocitetu* prestaje funkcionirati u *velikim* grupama, a polazna pretpostavka bila je da DR postupno kolabira ako agenti ne mogu popamtiti prethodne interakcije sa svim članovima populacije. Moglo bi se reći da je ovo pitanje ekvivalentno pitanju zašto direktni reciprocitet ustupa mjesto indirektnom reciprocitetu, ili još općenitije –zašto se uopće pojavljuje *razmjena informacija*? Iako evolucija jezika izlazi iz okvira ove disertacije, možda je zgodno, barem na trenutak osvrnuti se na to zanimljivo znanstveno područje. Neki znanstvenici smatraju da je evoluciju ljudskog jezika potaknula upravo evolucija suradnje [12], odnosno da je povećanje grupe ključni evolucijski pritisak koji je pokrenuo pojavu jezika. **Ovaj rad podupire tu tezu – suradnja u velikoj grupi je moguća, kao što smo vidjeli, jedino ako postoji komunikacija koja omogućuje razotkrivanje izrabljivača.** Zahvaljujući jeziku ljudi su u stanju prevladati ograničenja direktnog reciprociteta, razmjenjivati informacije o drugima i zahvaljujući vrijednim saznanjima izolirati prevarante, odnosno birati suradnički nastrojene partnere [84]. Dok pojedinac promatra svijet oko sebe, informacije dobiva direktno iz vlastitog iskustva, ali dok razgovara s drugima, svijet gleda tuđim očima – jezik mu omogućuje da informaciju sazna iz *tuđeg* iskustva i da proširi vidike kroz prostor i vrijeme. Jezik nam također omogućuje gomilanje znanja i uputa. Riječima dobivamo iskustva, ne samo naših vršnjaka, nego i naših predaka. Njihova iskustva pamtimo i ponavljamo kroz anegdote, viceve, junačke spjevove, poslovice i sve ono što nazivamo kulturnom baštinom. Bez jezika, svaka bi generacija počinjala od nule ili gotovo od nule; mogli bi učiti samo primjerom (kao mačići od mame mačke) ili uvjetovanim refleksom. Kad se spomene *kultura*, mnogi ljudi imaju asocijacije na kazališne predstave i uštogljeno tzv. kulturno ponašanje (bonton) na domjencima i izložbama, no u žargonu prirodoslovaca pojam *kultura* označava svaku informaciju koja se, s jedinke na jedinku, prenosi *ne-genetskim* putem, primjerice oponašanjem, usmenom predajom itd. Dakle, kulturom možemo smatrati narodne mudrosti, poslovice, tehnologiju klesanja kamenja, lovačku taktiku i sve što god jedno biće zna i umije, a nije steklo genetski. Kao što je Donald T. Cambell primijetio, a Richard Dawkins kasnije razradio, darvinistička se teorija može primijeniti i na proces nasljeđivanja kulture; neke vještine i informacije se prenose i bivaju unaprijeđene, a neke zauvijek nestaju. Ova analogija između kulturne i biološke evolucije, Richarda Dawkinsa je toliko snažno nadahnula da je skovao termin *mem* koji predstavlja jedan djelić informacije koji se oponašanjem prenosi s jedinke na jedinku. Mem je dakle općeniti naziv za bilo kakvu ne-genetsku informaciju kao što je primjerice melodija ili vještina paljenja vatre. I memi i geni su replikatori, odnosno informacije koje se u određenim okolnostima mogu množiti i koje zadovoljavaju tri evolucijska preduvjeta (varijaciju, selekciju i nasljeđivanje), međutim, za razliku od gena, memi se mogu prenositi i horizontalno, s brata na brata, a ne samo s roditelja na djecu [25]. Širenje tračeva između agenata u provedenim

simulacijama, također možemo smatrati memetičkim prijenosom, stoga se u slučaju GossipTFT može govoriti ne samo o evoluciji suradničkih strategija već i o koevoluciji gena i kulture. Naime dobiveno znanje povećava vjerojatnost preživljavanja one jedinke *koja može usvojiti* to znanje tj. sama informacija favorizira strategiju koja ima sposobnost usvajanja te iste informacije. Zahvaljujući tome, povećava se vjerojatnost širenja informacije, a pozitivnom povratnom spregom još više raste raste fitnes strategije i tako u krug. **U budućim istraživanjima** bilo bi zanimljivo uvesti komunikacijski šum kao analogiju mutiranim genima ili možda čak izrabljivačke strategije koje šire dezinformacije o suradnicima. U tom slučaju mogli bi govoriti ne samo o rivalskim strategijama, već i o rivalskim informacijama, odnosno suparničkim memima.

Filozofski rečeno, u evolucijskoj paradigmi glavni igrač koji vuče poteze zapravo je *prirodna selekcija*. Strategije u evolucijskoj teoriji igara jesu analogija racionalnim odlukama klasične teorije igara, međutim iz perspektive biologije strategija je naprosto evolucijsko rješenje koje donosi priroda metodom pokušaja i pogrešaka. Svako evolucijsko rješenje odražava se u specifičnim značajkama i sposobnostima organizma. Ukoliko je rješenje povoljno, organizam će se uspješno nositi sa zahtjevima životnog okoliša, imat će dovoljno resursa za preživljavanje i reprodukciju. Takvo rješenje u evolucijskoj biologiji i evolucijskoj psihologiji nazivamo *adaptacijom*, dok u teoriji igara preferiramo naziv s*trategija*. Neuspješno evolucijsko rješenje manifestira se kao nesposobnost organizma da izbjegava predatore, da pronađe hranu i partnera, te da u konačnici prenese svoje gene u narednu generaciju. Izumiranje takve strategije možemo smatrati nužnim (neki bi rekli mudrim) potezom prirode, odnosno prirodnom selekcijom. S obzirom da je prirodna selekcija odlična supstitucija za racionalnost, moglo bi se ustvrditi da je ponašanje životinja inteligentnije i ekonomičnije modelirano evolucijom nego ljudsko ponašanje ograničenim i pristranim ljudskim rasuđivanjem. Budući da neki znanstvenici inteligenciju definiraju kao sposobnost jedinke ili vrste da se prilagođava promjenjivom okolišu možemo očekivati da ćemo modelirajući proces evolucije, doći do inteligentnog rješenja [68]. Sukladno tome, na polju istraživanja umjetne inteligencije (AI), uz neuronske mreže, razvilo se i evolucijsko računalstvo [57], koje traga za optimalnim matematičkim i/ili tehnološkim rješenjima oponašajući evoluciju. Prema L.J.Fogelu imitiranje bihevioralnih osobina osnovna je karakteristika evolucijskog programiranja [86], a OTFT i GossipTFT kao imitacije zaboravljivih organizama mogu predstavljati pokušaj iznalaženja inteligentnog, a opet realnog rješenja života u grupi i možda će pronaći neku svoju primjenu u svijetu umjetne inteligencije. Vjerujem da ovaj rad daje svoj doprinos ne samo evolucijskom računalstvu i evolucijskoj teoriji igara, već i informacijskim znanostima općenito, kroz određene programske inovacije u višeagentnom simuliranju Iterirane zatvorenikove dileme.

Superiornost višeagentnih simulacija osobitom se pokazala prilikom mjerenja brzine kojom TFT agenti dostižu ALLD. Naime, relativno mala odstupanja eksperimenta od klasičnih relacija ETI moguće je zamijetiti tek uzastopnim simuliranjem IPD kod velikog broja agenata. Klasične jednadžbe koje se mogu naći primjerice u Nowakovom udžbeniku [59] upućuju na to da svaki TFT agent mora doživjeti oko $5N/2$ susreta kako bi se isplata strategije TFT izjednačila s isplatom strategije ALLD. Međutim, prilikom izvođenja simulacija u kojima se agenti nasumično kreću u 2D ravnini primijećeno je da **TFT agenti dostižu ALLD agente brže od očekivanog**. Rezultati su u takvoj (brownovskoj) populaciji konzistentno bivali dvadesetak posto ispod očekivanog. Kako objasniti ovu devijaciju?

Kako bi se razjasnila devijacija, u šestoj Glavi disertacije napravljena je pomna eksperimentalna i teorijska analiza, mimo okvira postavljenih hipoteza. Kao što je elaborirano u poglavljima 6.1.-6.4, populacija u kojoj agenti izvode Brownovo gibanje *nalikuje* dobro miješanoj populaciji, a iz takve intuitivne i naivne pretpostavke slijedi zaključak da TFT agenti upoznaju sve izrabljivače u ranoj fazi igre. Međutim, precizna mjerenja pokazala su da TFT agenti u takvom kaotičnom sustavu, zbog nasumičnosti kretanja neke izrabljivače nikad ni ne sretnu. Posljedično, TFT može dostići ALLD brže i lakše nego što se mislilo.

Radi boljeg razumijevanja ovog fenomena uvedena je distinkcija između novih (nepoznatih) ALLD agenata i starih (već viđenih) ALLD agenata. Pronađene su matematičke relacije koje nisu bile izvedene do sada, čime je također ostvaren dodatni doprinos. Primjerice, izvedena je formula za očekivani broj susreta do izjednačavanja isplata između TFT i ALLD (6.37). Na temelju toga modificirana je i matrica isplate (6.41). Kad se na takvu, brownovsku populaciju primijeni matematički formalizam Moranovog procesa (istovremene reprodukcije i eliminacije agenata), otkriva se da je minimalan broj rundi potreban da jedan jedini TFT agent preuzme populaciju manji od 3 što je također jedan mali korak naprijed u razumijevanju evolucije suradnje. Nadamo se da ćemo u nekim budućim istraživanjima nadograditi model i da ćemo ovaj nalaz potkrijepiti mjerenjem vjerojatnosti preuzimanja u sustavima agenata koji se zaista reproduciraju.

Naposljetku, možda se potrebno i sasvim općenito osvrnuti na problematiku i budućnost evolucije u kontekstu informacijskih znanosti. Za razliku od fizike s kojom je matematika neraskidivo povezana od samih početaka (još od Galileovog opisa ubrzanog gibanja), biologija je bila posve lišena matematike sve do 1925. kad je **Alfred Lotka** objavio knjigu *Elements of Physical Biology*. U Lotkinoj knjizi pojavljuju se matematičke relacije, danas poznatije kao Lotka-Volterrine jednadžbe pomoću kojih je moguće predvidjeti kako će se u vremenu mijenjati omjer lisica i zečeva na izoliranom otoku. Jednadžbe koje opisuju odnos između plijena i grabežljivaca, ujedno otvaraju i novo poglavlje u odnosu biologije i matematike, a znakovito je da taj početni flert između dvije

velike znanstvene discipline započinje upravo problemom *evolucijske dinamike*. Naime, matematička biologija svoj će najveći procvat doživjeti upravo na području genetike i evolucijske teorije igara. Međutim, da bi taj procvat bio moguć, trebalo je pričekati razvoj računala. Naravno, između Lotkine knjige i Axelrodovog računalnog turnira, ugnijezdilo se pola stoljeća razvoja matematike, ali razina kompleksnosti bioloških sustava uglavnom ne dozvoljava klasični analitički pristup jer je broj faktora i odgovarajućih jednadžbi prevelik da bi takvi sustavi bili riješivi u realnom vremenu bez uporabe računala. Današnja biologija i ekologija toliko su isprepletene računalnim znanostima da i sami nazivi nekih područja biologije u sebi sadržavaju riječ *informatika*. Primjerice, sekvencioniranje genoma nezamislivo je bez *bioinformatike* unutar koje se razvijaju softverske metode za prepoznavanje, izdvajanje i spajanje nizova nuleotidnih baza. Nužnost računala u biologiji reflektira se i u nazivima poput *ekoinformatike* i *računalnih neuroznanosti*. S druge strane nužnost primjene bioloških načela u računalnim znanostima odražava se u nazivima područja kao što su *evolucijsko računalstvo* i *genetski algoritam*. Očigledno je da biologija i informacijske znanosti dijele istu sudbinu koju ćemo jednog dana promatrati iz aspekta razvoja kibernetičkih organizama i umjetne inteligencije. Umjetna inteligencija možda će nam pokazati i način na koji treba ostvarivati suradnju ili barem koje uvjete treba zadovoljiti kako bi se izbjegla tragedija (*Tragedy of the commons*) o kojoj je bilo riječ u poglavlju 2.3.1. Ponekad se čini da između sofisticirane tehnologije i društvenih zbivanja postoji veliki raskorak – kad su u pitanju međuljudski i međudržavni odnosi čini se kao da se nismo pomakli stoljećima. U nikad gorem povijesnom trenutku, barem što se tiče globalne klime, znanstvenici bi trebali uprijeti svim silama kako bi se pronašla rješenja i kako bi se postigla suradnja između svih subjekata koji utječu na trenutno stanje. Preskripcija, dakako, nije primjerena jednom znanstvenom radu, ali iza svake deskripcije stoji neka potajna čežnja znanstvenika da pronađeni i objašnjeni fenomeni ipak nađu svoju primjenu. U tom smislu nadamo se da će simulacijsko modeliranje IPD i primjena računala na evoluciju suradnje općenito, možda rasvijetliti dio puta kojim koračamo dok tražimo modus zajedničkog suživota.

8 Literatura

1. **Maria, Anu.** Introduction to modeling and simulation. *Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference.* 1997.
2. **Božikov, Jadranka.** Modeliranje i simulacija. [ur.] Josipa Kern. *Medicinskoinformatičke metode.* Zagreb : Medicinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu i Medicinska Naklada, 2007, str. 85-108.
3. **Schwendimann, Beat.** s.l. : https://proto-knowledge.blogspot.com/2010/12/what-is-difference-between-simulation.html, 2010.
4. **Edmonds, Bruce i Meyer, Ruth.** *Simulating Social Complexity.* s.l. : Springer, 2013.
5. **Gardner, Martin.** The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American.* October 1970, str. 120-123.
6. **Ostrom, Thomas.** Computer Simulation: The Thirds Symbol System. *Journal of Experimental Social Psychology.* 1988, Svez. 24, str. 381-392.
7. **Jurišić, M., Kermek, D. i Konecki, M.** A Review of IPD strategies. *Proceedings of the 35th International Convention MIPRO.* 2012.
8. **Trivers, Robert L.** The Evolution of Reciprocal Altruism. *The Quarterly Review of Biology.* 1971, Svez. 46.
9. **Alexander, R.D.** *The Biology of moral systems.* New York : an., 1987.
10. **Axelrod, Hamilton.** The Evolution of Cooperation. *Science.* 1981.
11. **Nowak, Martin i Sigmund, Karl.** Tit for tat in heterogeneous populations. *Nature.* 1992, Svez. Vol. 355.
12. **Nowak, Highfield.** *Supercooperators.* Edinburgh : Canongate, 2011.
13. **Nowak M., Sigmund K.** Evolution of indirect reciprocity by image scoring. *Nature.* 393, 1998.
14. **Roberts, Gilbert.** Evolution of direct and indirect reciprocity. *Proc.R.Soc.B.* 275, 2008.
15. **Panchanathan K., Boyd R.** A tale of two defectors: the importance of standing for evolution of indirect reciprocity. *J.Theor.Biol.* 224, 2003.
16. **Pollock G.B, Dugatkin L.A.** Reciprocity and the evolution of reputation. *J. Theor. Biol.* 1992, Svez. 159.
17. **Giardini F., Vilone D.** Evolution of gossip-based indirect reciprocity on a bipartite network. *Scientific Reports.* 2016, Svez. 6.
18. **Dunbar, Robin.** Neocortex size as a constraint on group-size in primates. *J. Hum. Evol.* 1992, Svez. 22.
19. **Čerić, Vlatko.** *Simulacijsko modeliranje.* s.l. : Školska knjiga, 1993.
20. **Kleijnen, Jack P.C.** *Design and Analysis of Simulation.* s.l. : Springer, 2008.
21. **Jack P.C. Kleijnen, S.M. Sanchez, T.W. Lucas, T.M. Cioppa.** User's Guide to the Brave New World of Designing Simulation Experiments. *INFORMS Journal on Computing.* 17, 2005, Svez. 3.
22. **Waal, Frans de.** *Good Natured.* London : Harvard University Press, 1996.
23. **Evans, Dylan.** *Evolucijska psihologija za početnike.* Zagreb : Jesenski i Turk, 2005.
24. **Darwin, Charles.** *The Descent of Man.* New York : Appleton, 1871.
25. **Dawkins, Richard.** *Sebični gen.* s.l. : Oxford University Press, 1976.
26. **Ball, Philip.** *Kritična Masa (Critical Mass: How One Thing Leads To Another).* Zagreb : Algoritam, 2004. ISBN 978-953-220-462-9.
27. **Nowak, Sigmund.** How populations cohere: five rules for cooperation. *Theoretical Ecology: Principles and Applications.* Oxford : Oxford University Press, 2007.
28. **Nowak, Martin i Sigmund, Karl.** Tit for tat in heterogeneous populations. *Nature.* 1992, Svez. 355.
29. **Axelrod, Robert.** Chapter 5. Društvena struktura suradnje (preveo D.Polšek). *The Evolution of Cooperation.* NY : Basic Books, 1984.

30. **Broom, Mark i Rychtar, Jan.** *Game-Theoretical Models in Biology.* s.l. : Chapman&Hall/CRC, 2013.
31. **Majolo, Bonaventura i Huang, Pengzhen.** Group living. [aut. knjige] J. Vonk i T. Shackelford. *Encyclopedia of Animal Cognition and Behavior.* s.l. : Springer International Publishing, 2018.
32. **Keverne, E.B., Martensz, N.D. i Tuite, B.** Beta-endorphin concentrations in cerebrospinal fluid of monkeys are influenced by grooming relationships. *Psychoneuroendocrinology.* 1989.
33. **Wilkinson, Gerald S.** Social grooming in the common vampire bat, Desmodus rotundus . *Animal Behaviour.* 1986, Svez. 34(6).
34. **Dunbar, R. I. M.** The social role of touch in humans and primates: Behavioural function and neurobiological mechanisms. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews. Touch, Temperature, Pain/Itch and Pleasure.* 2010.
35. **Tadić, Zoran.** Kako i zašto životinje žive u skupinama? [aut. knjige] Josip Hrgović i Darko Polšek. *Evolucija društvenosti.* s.l. : Jesenski i Turk, 2004.
36. **Shultziner, Doron i Dattner, Arnon.** The Puzzle of Altruism Reconsidered: Biological Theories of Altruism and One-Shot Altruism. *Ratio Working Papers.* 2006.
37. **Schino, Gabriele i Aureli, Filippo.** A few misunderstandings about reciprocal altruism. *Communicative & Integrative Biology.* 2010.
38. **Noe, Ronald.** Cooperation experiments: coordination through communication. *Animal Behaviour.* 2006.
39. **Axelrod, Robert.** *The Evolution of Cooperation.* NY : Basic Books, 1984.
40. **Ahn, T. i Lee, M., Ruttan, L.** Asymmetric Payoffs in Simultaneous and Sequential Prisoner's Dilemma Games . *Public Choice.* 2007.
41. **Barcelo, Helene i Capraro, Valerio.** Group size effect on cooperation in one-shot social dilemmas. *Scientific Reports.* 5, 2015.
42. **Bokulić, Marko.** Socijalna projekcija kao rješenje Zatvorenikove dileme. *Human (https://humanmag.wordpress.com/2012/05/19/socijalna-projekcija-kao-rjesenje-zatvorenikove-dileme/.* 2012.
43. **Andreoni, J., Harbaugh, W. i Vesterlund, L.** The Carrot or the Stick: Rewards, Punishments, and Cooperation. *The American Economic Review.* 93(3), 2003.
44. **Mink, JW, Blumenschine, RJ i Adams.** Ratio of central nervous system to body metabolism in vertebrates: its constancy and functional basis. *American Journal of Physiology .* 1981.
45. **Byrne, R. W. i & Whiten, A.** *Machiavellian intelligence.* Oxford : Oxford University Press, 1988.
46. **Dunbar, R.I.M.** The Social Brain Hypothesis and Human Evolution. [aut. knjige] Oliver Braddick. *Oxford Research Encyclopedias.* s.l. : oxfordre.com.
47. **Joffe, T. i Dunbar, R. I. M.** Visual and socio-cognitive information processing in primate brain evolution. *Proceedings of the Royal Society.* 1997.
48. **Shultz, S. i Dunbar, R. I. M.** The evolution of the social brain: Anthropoid primates contrast with other vertebrates. *Proceedings of the Royal Society.*
49. **Healy, Susan D. i Rowe, Candy.** A critique of comparative studies of brain size. *Proceedings of The Royal Society B.* 2006.
50. **Acedo-Carmona, C. i Gomila, A.** A critical review of Dunbar's social brain hypothesis. *Revista Internacional de Sociología.* 2016.
51. **Zhou, W., i dr.** Discrete hierarchical organization of social group sizes. *Proceedings of the Royal Society B.* 2005.
52. **Mac Carron, P., Kaski, K. i Dunbar, R.I.M.** Calling Dunbar's numbers. *Social Networks.* 2016.
53. **Gibbons, R.** *Game Theory for Applied Economists.* New Jersey : Princeton University, 1992.
54. **Lewontin, R.C.** Evolution and the theory of games. *Journal of Theoretical Biology.* 1961, str. 382-403.

55. **Maynard Smith, J. i Price, G.R.** The Logic of Animal Conflict. *Nature.* 1973.
56. **Arsuaga, Juan Luis.** *Ogrlica neandertalca.* s.l. : Izvori, 2004.
57. **Gondra, Iker.** Parallelizing Genetic Algorithms. [aut. knjige] Dimitris Vrakas. *Artificial Intelligence for Advanced Problem Solving Techniques.* Hershey : Information Science Reference, 2008.
58. **Gittleman, John L.** Are the Pandas Successful Specialists or Evolutionary Failures? *BioScience.* str. 456-464.
59. **Nowak, Martin.** *Evolutionary Dynamics- Exploring the Equations of Life.* London : Belknap Press, 2006.
60. **Hrgović, Josip i Polšek, Darko.** *Evolucija društvenosti.* Zagreb : Jesenski i Turk, 2004. ISBN 953-222-182-4.
61. **Golub, Marin.** *Genetski algoritam.* Zagreb : FER, 1997.
62. **Jonker, Peter D. Taylor and Leo B.** Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences.* 1978, str. 145--156.
63. **Umbhauer, Gisele.** *Game Theory and Excercises.* New York : Routledge, 2016.
64. **Sigmund, Karl i Nowak, Martin.** The evolution of stochastic strategies in the Prisoner's Dilemma. *Acta Applicandae Mathematica.* September 1990, str. 247–265.
65. **Nowak, Martin.** Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma. *Theoretical Population Biology.* 1990, str. 93-112.
66. **Moran, Patrick A. P.** *The Statistical Processes of Evolutionary Theory.* Oxford : Clarendon Press, 1962.
67. **Fudenberg, D., i dr.** *Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations.* s.l. : Nature, 2004.
68. **Hertwig, Ralph.** *Simple heuristics in a social world.* New York : Oxford University Press, 2013. ISBN 978-0-19-538843-5.
69. **Baek, S.K., i dr.** Comparing reactive and memory-one strategies of direct reciprocity. *Scientific Reports.* 2016.
70. **Hilbe, C., i dr.** Memory-n strategies of direct reciprocity . *Proceedings of the National Academy of Sciences.* April 2017, Svez. 114(18), str. 4715–4720.
71. **Stewart, A.J. i Plotkin, Joshua B.** Small groups and long memories promote cooperation. *Scientific Reports.* 2016, Svez. 6(1).
72. **Shors, T. J., i dr.** Use it or lose it: How neurogenesis keeps the brain fit for learning. *Behavioural Brain Research .* Feb 2012, Svez. 227(2), str. 450-458.
73. **Barrouillet, P., i dr.** Further evidence for temporal decay in working memory: Reply to Lewandowsky and Oberauer (2009). *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition.* 2011., Svez. 37(5), str. 1302-1317.
74. **Jonides, J., i dr.** The mind and brain of short-term memory. *Annual Review of Psychology.* 2008, Svez. 59(1), str. 193-224.
75. **Dukas, Reuven.** Costs of memory: Ideas and predictions. *Journal of Theoretical Biology.* 1999, Svez. 197(1), str. 41-50.
76. **Burns, J. G., Foucaud, J. i Mery, F.** Costs of memory: lessons from mini brains. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences.* 2010, Svez. 278.
77. **Bandura, Albert.** Vicarious processes: A case of no-trial learning. *Advances in experimental social psychology.* 1965.
78. **Mobbs, D., i dr.** The ecology of human fear: survival optimization and the nervous system. *Frontiers in Neuroscience.* 2015.
79. **Adolphs, Ralph.** The Biology of Fear. *Current Biology.* 2013.

80. **Imhof, L. A., Fudenberg, D. i Nowak, M.** From The Cover: Evolutionary cycles of cooperation and defection. *Proceedings of the National Academy of Sciences.* 2005.
81. **Han, T. A., Pereira, L. M. i Santos, F. C.** The Role of Intention Recognition in the Evolution of Cooperative Behavior. *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence.* 2011.
82. **Rapoport, Amnon, Seale, D. i M., Colman A.** Is Tit-for-Tat the Answer? On the Conclusions Drawn from Axelrod's Tournaments. *PLOS ONE.* 2015.
83. **Herrerias-Azcue, F., V., Perez i Galla, T.** Stirring does not make populations well mixed. *Scientific Reports.* 2018.
84. **Giardini, F. i Conte, R.** Gossip for social control in natural and artificial societies. *SIMULATION.* 2011.
85. **Negnevitsky, Michael.** *Artificial Intelligence- A Guide to Intelligent Systems.* Harlow : Addison-Wesley, 2005. ISBN 0-321-20466-2.
86. **Magušić-Dumančić, Iva.** *Genetski algoritmi.* Osijek : Sveučilište J. J. Strossmayera, 2014.
87. **Nowak.** Stochastic strategies in the Prisoner's Dilemma. *Theoretical Population Biology.* 1990, Svez. 38.

PRILOG A
Axelrodova vjerojatnost susreta i očekivani broj susreta

Kad se uvede *vjerojatnost susreta* prosječna isplata TFT između ALLC i TFT nije

$$E(ALLC, TFT) = nR \tag{A.1}$$

, nego je dana kao suma geometrijskog niza:

$$E(ALLC, TFT) = R + \omega R + \omega^2 R + \cdots = R\frac{1-\omega^n}{1-\omega} \tag{A.1}$$

TFT je evolucijski stabilna strategija samo ako postoji dovoljno velika vjerojatnost ponovne interakcije kako bi se osiguralo da isplata $E\,(TFT, TFT)$ sigurno bude veća od isplate $E(ALLD, TFT)$ i zarade tzv.alternirajuće strategije $E(ALT, TFT)$ [30]. Dakle:

$$E\,(TFT, TFT) > E(ALLD, TFT) \tag{A.2}$$

$$E\,(TFT, TFT) > E(ALT, TFT) \tag{A.3}$$

Očekivane isplate su:

$$E(TFT, TFT) = R + \omega R + \omega^2 R + \cdots \tag{A.4}$$

$$E(ALLD, TFT) = T + P\omega + P\omega^2 + \cdots \tag{A.5}$$

$$E(ALT, TFT) = T + S\omega + T\omega^2 + S\omega^3 + T\omega^4 + \cdots = (T + S\omega)(1 + \omega^2 + \omega^4 + \cdots) \tag{2.6}$$

Uz beskonačni broj iteracija, sume ovih geometrijskih nizova (A.5),(A.6) i (A.7) su:

$$E(TFT, TFT) = \frac{R}{1-\omega} \tag{A.7}$$

$$E(ALLD, TFT) = T + \frac{P\omega}{1-\omega} \tag{A.8}$$

$$E(ALT, TFT) = \frac{T + S\omega}{1-\omega^2} \tag{2.9}$$

Iz uvjeta (A.2) i (A.3) slijede dvije važne nejednakosti:

$$T\omega - P\omega > T - R \tag{A.10}$$

$$R\omega - S\omega > T - R \tag{A.11}$$

Iz tih nejednakosti slijedi da tražena vjerojatnost mora biti veća od $\frac{T-R}{T-P}$ i od $\frac{T-R}{R-S}$, odnosno :

$$\omega > \max\left(\frac{T-R}{T-P}, \frac{T-R}{R-S}\right) \tag{A.12}$$

Uz parametre korištene na Axelrodovom turniru ($S = 0, P = 1, R = 3, T = 5$) slijedi:

$$\omega > \max\left(\frac{2}{4}, \frac{2}{3}\right) \tag{A.13}$$

Dakle, da bi se osigurala pobjeda TFT, uz Axelrodove parametre isplate, vjerojatnost igranja sljedeće runde mora biti veća od 66%.

PRILOG B

Program „IPD BROWN SIMEX“

```
;;Program "IPD BROWN SIMEX (s ponavljanjem)"
;;Program napisao Jurica Hižak 2017
globals [
   ;varijable za ponavljanje simulacije:
   niz-mjerenja ; popis izmjerenih vrijednosti
   niz-mjerenja-vremena
   x ; redni broj simulacije
   prosjek ; prosječna vrijednost broja susreta
   prosjecno-vrijeme; prosječno vrijeme dostizanja
   ;broj agenata:
   num-RND
   num-ALLC
   num-ALLD
   num-TFT
   num-OTFT
   N ; ukupan broj
  ;Broj odigranih partija:
   num-RND-games
   num-ALLC-games
   num-ALLD-games
   num-TFT-games
   num-OTFT-games
  ;Ukupna zarada svake strategije:
   RND-score
   ALLC-score
   ALLD-score
   TFT-score
   OTFT-score
   ;Očekivana isplata
   RND-exp-payoff
   ALLC-exp-payoff
   ALLD-exp-payoff
   TFT-exp-payoff
   OTFT-exp-payoff
   ;varijable važne za OTFT:
   vjerojatnost-zaborava ; vjerojatnost raspada true-->false
   polozaj-elementa ;unutar popisa partner-history
   ;Fitnes
   RND-fit
   ALLC-fit
   ALLD-fit
   TFT-fit
   OTFT-fit
   ;Relativni fitnes
   RND-relfit
   ALLC-relfit
   ALLD-relfit
   TFT-relfit
   OTFT-relfit
   ;polovica svijeta
   apol
   ;opservable
   ALLD-ops
   TFT-ops
   OTFT-ops
```

```
]

;;Svojstva agenata:
turtles-own [
  score              ;zarada
  br-susreta         ;broj-susreta
  strategy           ;strategija
  partnered?         ;je li agent sparen? (true ili false)
  partner            ;tko je partner (broj agenta ili nobody)
  partner-defected?  ;da li je partner varao?
  defect-now?        ;Hoću li ja sad varati?
  partner-history    ;popis poteza iz prethodne runde (MEMORIJA)
  popis-true         ;filtrirana lista
  cost               ;cijena posjedovanja memorije
]

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Početne postavke;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to setup
  clear-all
  pohrani-broj    ;snimanje broja agenata za svaku pojedinu strategiju
  postavi-agente ;pozivanje procedure koja će stvoriti i postaviti agente
  stvori-listu    ;stvori početnu memorijsku listu
  set apol round ( 0.5 * (sqrt ( N / density ) - 1)) ;izračunaj polovicu svijeta
  resize-world -1 * apol apol -1 * apol apol ;podesi veličinu svijeta
  set x 0
  set niz-mjerenja []
  set niz-mjerenja-vremena []
  reset-ticks
end

;;Broj agenata pojedine strategije.
;(vrijednosti klizača mogu se mijenjati pa je potrebno pohraniti njihovu vrijed-
nost)
to pohrani-broj
  set num-RND broj-RND-agenata
  set num-ALLC broj-ALLC
  set num-ALLD broj-ALLD
  set num-TFT broj-TFT
  set num-OTFT broj-OTFT
  set N (broj-RND-agenata + broj-ALLC + broj-ALLD + broj-TFT + broj-OTFT)
end

;;Kreiranje odgovarajućeg broja agenata za svaku strategiju
to postavi-agente
  create-turtles num-RND [ set strategy "RND" set color gray - 1 ]
  create-turtles num-ALLC [ set strategy "ALLC" set color yellow ]
  create-turtles num-ALLD [ set strategy "ALLD" set color red ]
  create-turtles num-TFT [set strategy "TFT" set color blue ]
  create-turtles num-OTFT [set strategy "OTFT" set color violet ]
  ; početne vrijednosti:
  ask turtles [
    set score 0
    set br-susreta 0
    set defect-now? false
    set partner nobody
    set partner-defected? false
    set partnered? false
    setxy random-xcor random-ycor ;nasumično rasporedi agente
    set cost 0
```

```
  ]
end



;; UGRAĐIVANJE MEMORIJE :)
to stvori-listu
  let default-history [] ;;initialize the DEFAULT-HISTORY variable to be a list
  ;;create a list with NUM-TURTLE elements for storing partner histories
  repeat count turtles [ set default-history (fput false default-history) ]
  ;;svakom agentu daj kopiju defaultne liste
  ask turtles [ set partner-history default-history ]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Pokretanje programa;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to go
  if ticks >= uk-broj-otkucaja [ stop] ;uvjet prekidanja simulacije
  if Opservabla = "Exp.Payoff" [ set ALLD-ops ALLD-exp-payoff set TFT-ops TFT-
exp-payoff set OTFT-ops OTFT-exp-payoff ]
  if Opservabla = "Rel.Fitness" [ set ALLD-ops ALLD-relfit set TFT-ops TFT-
relfit set OTFT-ops OTFT-relfit ]
  ;uvjet ponavljanja simulacije
  if ticks > 100 and ( ALLD-ops <= OTFT-ops or ALLD-ops <= TFT-ops )
  [
  pohrani-izmjerene-podatke
  pohrani-broj    ;snimanje broja agenata za svaku pojedinu strategiju
  postavi-agente ;pozivanje procedure koja će stvoriti i postaviti agente
  stvori-listu    ;stvori početnu memorijsku listu
  reset-ticks
  if x = br-sim [stop]
  ]

  ;;Ako ima sparenih agenata neka resetiraju varijable,
  ;neka se okrenu i razdvoje
    ask turtles with [ partnered? ]
    [set partnered? false
    set partner nobody
    rt 180        ;okreni se
    fd 1          ;pomakni se za jedan korak
    set label "" ;obriši brojku koja pokazuje isplatu zadnje partije PD
    ]
  ;;Neka agenti krenu u akciju:
   ask turtles [trazi-partnera ]      ; neka agenti traze partnere za PD
   ;Uvedi lokalnu varijablu partnered-turtles:
   let partnered-turtles turtles with [ partnered? ]
   ask partnered-turtles [ izaberi-potez ]  ;neka spareni agenti igraju PD
   odredi-cijenu-memorije
   ask partnered-turtles [ isplata ]         ;sparenim agentima daj isplatu
   izracun-zarade ;pokreni proceduru za izračun ukupne zarade strategije
   izracun-ocekivane-isplate
   izracun-relativnog-fitnesa
   ask partnered-turtles [ history-update ] ;neka agenti ažuriraju memoriju
   zaboravljanje
 tick
end

;PODACI
to pohrani-izmjerene-podatke
  let broj-mjerenja x + 1
```

```
  ;bilježimo broj susreta
  let podatak round( sum [ br-susreta ] of turtles / N )
  let lista-podataka lput podatak niz-mjerenja
  ;bilježimo vrijeme dostizanja
  let vrijeme-dostizanja ticks
  let lista-podataka2 lput vrijeme-dostizanja niz-mjerenja-vremena
  clear-all
  set x broj-mjerenja
  show x
  set niz-mjerenja lista-podataka
  show niz-mjerenja
  ;vrijeme:
  set niz-mjerenja-vremena lista-podataka2
  show niz-mjerenja-vremena
  if x = br-sim [
    set prosjek mean lista-podataka
    show prosjek
    show sqrt (variance niz-mjerenja)
    ;izračunaj prosječno vrijeme dostizanja:
    set prosjecno-vrijeme mean lista-podataka2
    show prosjecno-vrijeme
    show sqrt (variance niz-mjerenja-vremena )
    stop
    ;show tau

                ;set tau tau + 1000
                ;set podatak 0
                ;set suma-izmjerenih-podataka 0
                 ;set ukupno 0
                ; set niz-mjerenja []
                 ;set x 0
                 ;set broj-mjerenja 0
                 ;reset-ticks
                 ;if tau > 12000 [stop]

  ]
end

;;Nasumično hodanje i susretanje
to trazi-partnera
 if (not partnered?) [              ;;provjeri ima li agent partnera
    rt (random-float 90 - random-float 90) fd 1 ;korak u nasumičnom smjeru
    ;Tko uđe u "susjedstvo" neka bude partner:
    ifelse (veliko-susjedstvo?) ;na sučelju se nalazi prekidač koji
                                ;određuje veličinu susjedstva
      [set partner one-of (turtles-on neighbors) with [ not partnered?]]
      [set partner one-of (turtles-here) with [ not partnered?]]
    if partner = self [set partner nobody] ;isključi samog sebe
                                           ;iz skupa potencijalnih partnera
    if partner != nobody
       [
      set partnered? true              ;je li agent sparen? da
      set br-susreta br-susreta + 1 ;evidentiraj broj susreta
      set heading 270                  ;nek se agent okrene prema partneru
      ask partner [
        set br-susreta br-susreta + 1
        set partnered? true
        set partner myself
        set heading 90
      ]
      ]
  ]
```

```
 end


;;Biranje odgovarajućeg poteza:
to izaberi-potez
  if strategy = "RND" [ act-randomly ]
  if strategy = "ALLC" [ cooperate ]
  if strategy = "ALLD" [ defect ]
  if strategy = "TFT" [ tit-for-tat]
  if strategy = "OTFT" [ tit-for-tat]
end

;;Dodavanje isplate prijašnjoj zaradi igrača:
to isplata
  set partner-defected? [defect-now?] of partner ;je li partner izabrao IZDAJU?
  ;Razmotri sve kombinacije DD,DC,CD,CC i daj isplatu.
  ;Prilikom isplate, nalijepi na agenta brojku da se vidi isplata
  ifelse partner-defected?
  [ ifelse defect-now? [ set score (score + 1) set label 1]
                       [ set score (score + 0) set label 0]
  ]
  [ ifelse defect-now? [ set score (score + 5) set label 5]
                       [ set score (score + 3) set label 3]
  ]
  set score score - cost
end

;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Strategije;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;
to act-randomly
  set num-RND-games num-RND-games + 1
  ifelse (random-float 1.0 < 0.5) [
    set defect-now? false
  ] [
    set defect-now? true
  ]
end

to cooperate
  set num-ALLC-games num-ALLC-games + 1
  set defect-now? false
end

to defect
  set num-ALLD-games num-ALLD-games + 1
  set defect-now? true
end

to tit-for-tat
  ;;Je li partner igrao defekciju u prethodnom potezu?
  set partner-defected? item ([who] of partner) partner-history
  ifelse (partner-defected?) [
    set defect-now? true
  ] [
    set defect-now? false
  ]
  if strategy = "TFT" [set num-TFT-games num-TFT-games + 1]
  if strategy = "OTFT" [ set num-OTFT-games num-OTFT-games + 1]
end
```

```
;;Ažuriranje memorije agenta
to history-update
  if strategy = "TFT" [TFT-history-update]
  if strategy = "OTFT" [OTFT-history-update]
end

to TFT-history-update
  set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?)
end

;;;;;OTFT;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

 to OTFT-history-update
  set popis-true []
  set popis-true filter [ [el] -> el = true ]  partner-history
  if length popis-true < mem-kap
  [ set partner-history
    (replace-item ([who] of partner) partner-history partner-defected?)
  ]

end

to zaboravljanje
 set vjerojatnost-zaborava ((ln 2 / tau ) * 100 ) ;izračunaj vjerojatnost
 ask turtles with [strategy = "OTFT"]
[set polozaj-elementa -1
 repeat N [set polozaj-elementa (polozaj-elementa + 1) ;za svaki element
             if random-float 100.0 < vjerojatnost-zaborava ;uvjet raspada
                [set partner-history
             (replace-item (polozaj-elementa) partner-history false )]
          ]
]
end
to odredi-cijenu-memorije
  ask turtles with [strategy = "OTFT"] [ set cost (k * mem-kap / 1000)]
end


;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;;;Izračunavanje uspješnosti strategija;;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

;Selekcija strategije
to izracun-zarade
  set RND-score   (Zbroj "RND" num-RND) ; pozivanje procedure "Zbroj"
  set ALLC-score  (Zbroj "ALLC" num-ALLC)
  set ALLD-score  (Zbroj "ALLD" num-ALLD)
  set TFT-score   (Zbroj "TFT" num-TFT)
  set OTFT-score   (Zbroj "OTFT" num-OTFT)
end

;Sumiranje svih isplata za svaku strategiju posebno:
to-report Zbroj [strategy-type num-with-strategy]
  ifelse num-with-strategy > 0 [
    report (sum [ score ] of (turtles with [ strategy = strategy-type ]))
  ] [
    report 0
  ]
end

to izracun-ocekivane-isplate
```

```
ifelse num-RND > 1
  [set RND-exp-payoff RND-score / (num-RND * (N - 1))]
  [set RND-exp-payoff 0]

ifelse num-ALLC > 1
  [set ALLC-exp-payoff ALLC-score / (num-ALLC * (N - 1))]
  [set ALLC-exp-payoff 0]

ifelse num-ALLD > 1
  [set ALLD-exp-payoff ALLD-score / (num-ALLD * (N - 1))]
  [set ALLD-exp-payoff 0]

ifelse num-TFT > 1
  [set TFT-exp-payoff TFT-score / (num-TFT * (N - 1))]
  [set TFT-exp-payoff 0]

ifelse num-OTFT > 1
  [set OTFT-exp-payoff OTFT-score / (num-OTFT * (N - 1))]
  [set OTFT-exp-payoff 0]
end
to izracun-relativnog-fitnesa
   ifelse num-ALLD-games != 0
     [set ALLD-fit precision (ALLD-score / num-ALLD-games ) 4] [set ALLD-fit 0]
   ifelse num-TFT-games != 0
     [set TFT-fit precision (TFT-score / num-TFT-games ) 4] [set TFT-fit 0]
   ifelse num-RND-games != 0
     [set RND-fit precision (RND-score / num-RND-games ) 4] [set RND-fit 0]
   ifelse num-ALLC-games != 0
     [set ALLC-fit precision (ALLC-score / num-ALLC-games ) 4] [set ALLC-fit 0]
   ifelse num-OTFT-games != 0
     [set OTFT-fit precision (OTFT-score / num-OTFT-games ) 4] [set OTFT-fit 0]

 let relnum-ALLD  (num-ALLD  / N)
 let relnum-TFT (num-TFT  / N)
 let relnum-RND (num-RND / N )
 let relnum-ALLC (num-ALLC  / N)
 let relnum-OTFT (num-OTFT  / N)

  let tot-fit (  (relnum-ALLD * ALLD-fit) + (relnum-TFT * TFT-fit ) + (relnum-
ALLC * ALLC-fit ) + (relnum-RND * RND-fit) + (relnum-OTFT * OTFT-fit ))

ifelse tot-fit != 0 [set ALLD-relfit (relnum-ALLD * ALLD-fit / tot-fit)] [set
ALLD-relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set TFT-relfit (relnum-TFT * TFT-fit / tot-fit)] [ set TFT-
relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set RND-relfit (relnum-RND * RND-fit / tot-fit)] [ set RND-
relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set ALLC-relfit (relnum-ALLC * ALLC-fit / tot-fit)] [set
ALLC-relfit 0]
ifelse tot-fit != 0 [set OTFT-relfit (relnum-OTFT * OTFT-fit / tot-fit)] [ set
OTFT-relfit 0]
end
;;;;;;;;;;;;;;;;KRAJ PROGRAMA "IPD BROWN SIMEX" ;
```

PRILOG C

Utjecaj vremena poluraspada memorije OTFT na vrijeme dostizanja izrabljivača

$N = 120, \quad k = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \rho = 0.05, \quad Neigh: L$																
$\tau = 700$	m	37	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
	t	4958	3671	2728	2642	2634	2894	3225	3401	3569	4014	4412	5277	5896	7571	9331
	σ	512	423	356	228	171	340	221	298	390	606	621	340	784	375	787
$\tau = 800$	m	37	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
	t	5134	3669	2605	2370	2260	2300	2469	2529	2798	2956	3210	3436	3749	4121	4759
	σ	707	467	318	153	91	137	167	71	80	151	167	173	115	375	232
$\tau = 900$	m	37	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
	t	4511	3290	2411	1932	2043	2080	2169	2147	2360	2390	2733	2847	2983	3143	3385
	σ	560	257	248	65	102	134	124	120	110	91	107	131	190	173	231
$\tau = 1000$	m	37	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
	t	6887	4210	2413	2066	1847	1855	1857	2004	2111	2212	2301	2370	2514	2632	2915
	σ	1847	793	283	62	160	69	68	48	84	166	129	136	136	158	209

$N = 100, \quad k = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \rho = 0.05, \quad Neigh: L$										
$\tau = 600$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	630	543	590	600	628	663	714	847	821
	σ	11	28	41	15	37	27	61	144	18
	t	2186	1874	2040	2086	2178	2300	2510	2963	2851
	σ	55	89	151	72	95	90	206	525	83
$\tau = 800$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	530	463	446	424	437	488	501	512	538
	σ	33	35	27	20	15	33	57	19	25
	t	1844	1596	1549	1472	1501	1685	1731	1782	1866
	σ	125	122	101	72	70	137	221	73	73
$\tau = 1000$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	506	411	348	385	386	389	405	441	456
	σ	54	41	14	35	7	47	8	9	23
	t	1753	1442	1209	1338	1351	1344	1407	1546	1604
	σ	196	138	34	129	33	170	16	43	93
$\tau = 1200$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	483	388	345	348	350	380	367	369	394
	σ	71	18	29	24	22	3	19	3	9
	t	1673	1351	1202	1212	1216	1323	1280	1296	1370
	σ	261	60	114	81	66	15	73	16	41
$\tau = 1400$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	428	365	351	307	330	348	357	364	375
	σ	25	56	16	18	12	3	17	31	27
	t	1499	1276	1219	1067	1146	1211	1242	1267	1292
	σ	98	184	41	75	35	14	59	115	100

Utjecaj cijene na vrijeme dostizanja izrabljivača

$N = 100, \quad \tau = 800, \quad \rho = 0.05, \quad Neigh: L$										
$k = 4 \cdot 10^{-3}$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	419	365	361	372	385	395	408	415	464
	σ	33	16	21	15	14	13	38	19	4
	t	1461	1269	1248	1299	1339	1372	1412	1436	1602
	σ	127	57	68	70	57	45	141	57	17
$k = 5 \cdot 10^{-3}$	m	34	36	38	40	42	44	46	48	50
	μ	530	463	446	424	437	488	501	512	538
	σ	33	35	27	20	15	33	57	19	25
	t	1844	1596	1549	1472	1501	1685	1731	1782	1866
	σ	125	122	101	72	70	137	221	73	73
$k = 6 \cdot 10^{-3}$	m	34	36	38	40	41	42	44	46	50
	μ	582	545	512	476	509	548	564	616	671
	σ	70	18	36	15	13	33	8	13	43
	t	2018	1891	1791	1643	1770	1890	1977	2138	2335
	σ	251	66	124	62	51	138	41	37	153

Vrijeme dostizanja izrabljivača $k = 4 \cdot 10^{-3}, \tau = 800$

N=40	m	13	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	40	50
	μ	366	158	120	102	111	111	113	111	117	117	130	125	133	139
	σ	190	15	16	7	5	5	8	12	14	13	8	10	7	29
	t	1332	582	439	368	406	394	394	403	415	420	475	450	481	498
	σ	690	66	61	27	23	18	36	50	50	48	29	52	29	92
N=60	m	19	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	44	50	60
	μ	458	285	189	183	169	175	181	185	198	195	200	209	204	233
	σ	188	70	34	14	14	6	9	3	6	24	7	17	4	13
	t	1622	998	671	637	593	614	635	650	702	686	685	735	700	816
	σ	686	250	116	48	48	33	40	14	23	80	32	77	24	45
N=80	m	25	26	28	30	32	34	36	38	40	46	52	58	64	70
	μ	648	432	307	261	259	270	274	285	283	312	328	365	396	437
	σ	317	40	8	12	11	18	19	13	4	16	7	21	21	23
	t	2338	1561	1097	951	941	980	989	1025	1004	1127	1193	1311	1433	1571
	σ	1148	167	24	26	28	60	72	45	19	64	36	63	74	71
N=100	m	31	32	34	36	38	40	42	44	50	56	62	68	74	80
	μ	753	451	419	365	361	372	385	395	464	498	526	601	640	840
	σ	97	115	33	16	21	15	14	13	4	25	19	38	22	55
	t	2619	1568	1461	1269	1248	1299	1339	1372	1602	1742	1829	2091	2230	2913
	σ	333	408	127	57	68	70	57	45	17	83	57	120	73	185
N=120	m	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	60	66	72	78
	μ	949	690	576	524	504	508	550	590	611	626	722	781	1024	1190
	σ	137	124	85	9	13	20	15	13	31	35	66	21	42	20
	t	3277	2371	1986	1797	1714	1744	1896	2021	2094	2145	2482	2684	3515	4088
	σ	460	427	308	32	39	62	42	30	117	135	216	62	174	72
N=140	m	41	42	44	46	48	50	52	54	56	60	66	72	78	
	μ	2062	1356	951	848	809	771	819	873	911	1001	1262	1732	2558	
	σ	260	46	17	50	23	29	24	6	55	52	60	136	313	

	t	7105	4669	3288	2918	2778	2648	2820	3005	3131	3461	4340	5982	8816	
	σ	871	164	44	198	84	93	88	21	207	182	213	471	890	
N=160	m	46	48	50	51	52	54	56	58	60	62	64	66	68	
	μ	3948	2022	1430	1397	1437	1455	1542	1621	1688	2079	2528	2617	3171	
	σ	412	134	17	51	42	88	127	93	57	184	57	71	240	
	t	13764	7054	5015	4852	4986	5085	5360	5642	5881	7251	8826	9110	11051	
	σ	1392	453	73	183	142	316	456	338	203	644	230	245	865	

Vrijeme dostizanja izrabljivača $k = 6 \cdot 10^{-3}, \tau = 800$

N=40	m	13	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	40
	mi	316	150	125	110	119	129	134	129	134	140	137	156	150
	sd	53	35	7	6	7	10	11	5	7	8	15	12	18
	t	1129	549	450	395	424	480	494	471	483	517	484	565	545
	sd	216	130	21	14	33	40	51	14	54	29	61	38	62
N=60	m	20	21	22	24	26	28	30	32	34	36	38	44	50
	mi	434	265	225	204	198	196	202	216	215	234	247	257	326
	sd	40	36	27	4	9	12	14	14	5	12	13	3	13
	t	1500	925	788	716	695	687	711	764	753	823	873	900	1137
	sd	153	131	92	26	40	44	58	45	30	34	57	6	50
N=80	m	26	27	28	30	32	34	36	38	40	46	52	58	64
	mi	723	511	366	334	313	310	336	355	379	429	495	583	769
	sd	78	30	25	18	22	8	19	7	22	25	19	22	61
	t	2631	1842	1318	1200	1138	1115	1232	1292	1384	1557	1809	2124	2801
	sd	303	118	97	86	91	35	62	38	88	86	74	98	217
N=100	m	32	33	34	36	38	40	41	42	44	46	50	56	62
	mi	1042	848	582	545	512	476	509	548	564	616	671	851	1182
	sd	171	13	70	18	36	15	13	33	8	13	43	29	74
	t	3639	2948	2018	1891	1791	1643	1770	1890	1977	2138	2335	2971	4099
	sd	601	43	251	66	124	62	51	138	41	37	153	117	233
N=120	m	38	40	42	43	44	45	46	48	50	52	54	56	60
	mi	1625	1160	992	937	842	930	939	991	1016	1150	1322	1490	2343
	sd	89	84	61	54	49	12	76	53	28	41	80	144	188
	t	5560	3989	3401	3221	2888	3200	3226	3404	3487	3940	4525	5130	8040
	sd	296	265	223	179	178	43	288	202	84	152	268	497	679
N=140	m	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	56	
	mi	5478	2936	2809	2286	2256	2152	2359	2416	3057	3132	3417	4599	
	sd	899	551	291	132	234	160	281	187	204	270	320	411	
	t	18855	10126	9670	7876	7756	7430	8109	8289	10538	10769	11754	15889	
	sd	3481	1891	1014	445	807	555	953	638	714	932	1050	1198	
N=150	m		48	50	51	52	53	54						
	mi		∞	7996	6975	6586	8190	∞						
	sd		/	/	/	/	/	/						
	t		∞	27669	24194	22772	28271	∞						
	sd		/	/	/	/	/	/						

PRILOG D

Broj očekivanih susreta do izjednačavanja isplata TFT i ALLD

$$\mu = 5N_A\left[1-\left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{\mu}\right]$$

Ovaj izraz ne možemo analitički riješiti, pa ćemo se poslužiti specijalnom Lambertovom funkcijom koja se definira kao inverz funkcije xe^x.

$$W(z) = f^{-1}(z); \quad f(x) = xe^x$$

Uz $a = 5N_A,\ b = \frac{N-2}{N-1}$ dobivamo:

$$\mu = a(1-b^{\mu})$$

Uvedemo li supstituciju $y \equiv 1-\mu/a$ dobivamo

$$b^{-a}y = (b^{-a})^y$$

Definiramo $B \equiv b^{-a}$

$$By = B^y$$

$$By = e^{ylnB}$$

$$ye^{-ylnB} = B^{-1} \;/\cdot(-lnB)$$

$$-y\ln B\, e^{-ylnB} = -lnB/B$$

supst. x supst. z

$$xe^x = z$$

Ovdje možemo iskoristiti Lambertovu funkciju.

$$x = W(z)$$

$$-y\ln B = W\left(-\frac{lnB}{B}\right) \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{lnB}W(-lnB/B)$$

$$1-\frac{\mu}{a} = -\frac{1}{lnb^{-a}}W\left[-\frac{\ln(b^{-a})}{b^{-a}}\right]$$

$$1-\frac{\mu}{a} = \frac{1}{alnb}W(ab^a\ln b)$$

Iz čega, napokon, dobivamo očekivani broj susreta do izjednačenja zarada:

$$\mu = a - \frac{1}{lnb}W(ab^a\ln b)$$

gdje su parametri $a = 5N/2,\ b = \frac{N-2}{N-1}$.

PRILOG E

Utjecaj gustoće agenata na brzinu kojom TFT dostiže ALLD

1:1	**N**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**
	μ_0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
	$\boldsymbol{\mu}$	**46**	**91**	**135**	**180**	**224**	**269**	**314**	**358**	**403**	**448**
$\rho = 0.05$	μ_{exp}	48	93	137	181	227	275	316	350	408	442
	SD	6	7	11.5	8.5	10	9	9	9	11	7.5
$\rho = 0.1$	μ_{exp}	47	92	141	180	225	271	320	360	404	451
	SD	3.5	7	4	4	12	7	11	4	8	5
$\rho = 0.2$	μ_{exp}	49	92	133	189	226	271	315	359	405	442
	SD	6	5.5	8	7	8	7.5	8	8	13	8
$\rho = 0.3$	μ_{exp}	49	91	136	182	225	271	311	365	399	453
	SD	6	12.5	9	8	8	7	10	5	9	6
$\rho = 0.4$	μ_{exp}	51	90	142	179	225	268	307	350	406	440
	SD	6	4	5	6	8	7	10	9	9	4
$\rho = 0.5$	μ_{exp}	46	93	138	181	223	274	317	352	408	454
	SD	9	14	4.5	4	7	9	8	12	5	15

	i	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
1:3	**N**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**
	μ_0	83	152	221	291	361	431	501	571	641	711
	$\boldsymbol{\mu}$	**82**	**148**	**216**	**283**	**351**	**418**	**486**	**553**	**621**	**689**
$\rho = 0.05$	μ_{exp}	83	139	222	291	349	416	479	544	613	677
	SD	11	16	20	23	17	24	25	17	16	17
$\rho = 0.1$	μ_{exp}	87	133	224	289	352	415	478	551	619	694
	SD	21	11	15	20	14	17	16	24	7	19
$\rho = 0.2$	μ_{exp}	89	134	223	287	356	430	485	547	605	695
	SD	18	12	12	26	22	20	16	14	25	14
$\rho = 0.3$	μ_{exp}	81	135	225	279	348	417	486	554	636	687
	SD	14	13	35	13	22	14	13	25	13	17
$\rho = 0.4$	μ_{exp}	79	141	198	289	356	421	489	545	612	695
	SD	11	19	9	13	11	16	19	17	24	20
$\rho = 0.5$	μ_{exp}	96	144	214	271	360	418	481	557	629	694
	SD	25	9	15	10	11	4	17	11	10	16

	i	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
1:2	**N**	**30**	**60**	**90**	**120**	**150**	**180**	**210**	**240**	**270**	**300**
	μ_0	97	186	276	366	456	546	636	726	816	906
	$\boldsymbol{\mu}$	**93**	**177**	**262**	**346**	**431**	**516**	**600**	**685**	**770**	**854**
$\rho = 0.05$	μ_{exp}	87	177	261	344	430	519	606	684	772	847
	SD	11	15	9	14	10	12	17	12.5	11	10
$\rho = 0.1$	μ_{exp}	83	180	254	348	438	521	603	685	776	859
	SD	7	15	21	15	8	16	9	13	11	10
$\rho = 0.2$	μ_{exp}	94	184	253	340	430	516	591	676	767	851
	SD	15	23	14	18.5	12	9	9	8	10	10
$\rho = 0.3$	μ_{exp}	87	177	264	344	428	510	595	683	756	857
	SD	16	21	9	10.5	6	14	19	13	14	10
$\rho = 0.4$	μ_{exp}	92	176	259	338	431	508	605	684	764	859
	SD	17	15	14	7	9	16	6	8	7	16
$\rho = 0.5$	μ_{exp}	92	181	259	348	423	511	599	680	762	854
	SD	14	12	9	14	11	10	11	14	15	12

$N = 100$	**i**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
	μ_0	715	417	324	279	253	235	222	213	206
	$\boldsymbol{\mu}$	**714**	**410**	**310**	**259**	**227**	**206**	**190**	**178**	**169**
$\rho = 0.2$	μ_{exp}	713	405	312	256	226	202	186	179	167
	SD	39	16	9	7	8	8	6	2	6

ŽIVOTOPIS

Jurica Hižak, mr. sc., rođen 25. ožujka 1975., osnovnu i srednju školu završio je u Varaždinu. Diplomirao je 2002.g. na fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu, stekavši zvanje „Diplomirani inženjer fizike“. Nakon završenog studija fizike upisuje poslijediplomski studij na S.I.S.S.A./I.S.A.S. (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati/ International School for Advanced Studies) u Trstu gdje radi u grupi za istraživanje taktilne percepcije, u sektoru kognitivnih neuroznanosti. 2004. g. stekao je zvanje „Magister Philosophiae in Neuroscience“ obranivši magistarski rad “Perception and Learning of Tactile Vibrational Features ” pod mentorstvom prof. dr.sc. Mathew Diamonda. Nadležno tijelo (Agencija za znanost i visoko obrazovanje) magisterij priznaje 8.siječnja 2009.g.

Vrativši se u Varaždin, u periodu 2004.-2006.g. radi kao nastavnik fizike na Elektrostrojarskoj školi, te kao stručni suradnik iz kolegija Fizika i Tehnička mehanika na Visokoj elektrotehničkoj školi s pravom javnosti (kasnije Veleučilište u Varaždinu), a 14. svibnja 2007. stječe nastavno zvanje „Predavač“ na Veleučilištu u Varaždinu (danas Sveučilište Sjever) gdje trenutno radi. Nositelj je kolegija Fizika 1 i Fizika 2 na studiju Elektrotehnike. Na odjelu Tehničke i gospodarske logistike drži auditorne vježbe iz kolegija Osnove inžinjerske fizike 1 i Osnove inžinjerske fizike 2, te auditorne vježbe iz kolegija Statistika. Dana 29.03.2018. stječe nastavno zvanje „Viši predavač“ na interdisciplinarnom području fizike i informatike.

Područja interesa pristupnika su statistička fizika, evolucijska dinamika, evolucijski (genetički) algoritmi, multiagentni sustavi i matematička teorija igara. Godine 2014. upisao je doktorski studij na Fakultetu organizacije i informatike, Sveučilišta u Zagrebu, u sklopu kojeg se bavi računalnim modeliranjem evolucije suradnje na interdisciplinarnom području informatike, evolucijske dinamike i statističke fizike.

Publicirao je 6 znanstvenih i stručnih radova u znanstvenim časopisima ili na međunarodnim konferencijama u kojima je i aktivno sudjelovao. Autor je dviju zbirki zadataka iz fizike i jednog priručnika iz statistike. Aktivno je sudjelovao u organizaciji studentskih konferencija iz fizike (ICPS) i jedan je od osnivača udruge za popularizaciju znanosti Znanost.org.

Popis radova (kronološkim redom)

J.Hižak, R.Logožar: A derivation of the mean absolute distance in one-dimensional random walk, znanstveni rad, Tehnički glasnik, 1/2011.

J.Hižak, R.Logožar, Ploha diskontinuiteta udarnog vala, **stručni rad**, Tehnički glasnik 2/2011.

J.Hižak: „Auditorne vježbe iz fizike 1“, **zbirka zadataka**, 2012. (ISBN 978-953-7809-17-1)

J.Hižak**:** Evolucija suradnje u Nowak-Sigmundovom modelu iterirane zatvorenikove dileme, **stručni rad**, Tehnički glasnik, vol.9. 2/2015

J.Hižak, R.Logožar: An overview of the genetic algorithm and its use for finding extrema ─ with implementations in MATLAB, **znanstveni rad**, Tehnički glasnik, 2/2016

J.Hižak: Genetic Algorithm Applied to the Stochastic Iterated Prisoner's Dilemma, **konferencijski rad**, BASOTI 2016,Tallinn, Estonia

J.Hižak: „Auditorne vježbe iz fizike 2“, **zbirka zadataka**, 2017.(ISBN 978-953-7809-52-2)

J.Hižak, L.Gotal Dmitrović, D.Modrić: “ Priručnik za obradu podataka s riješenim problemima iz statistike i teorije vjerojatnosti“, **priručnik**, 2017, (ISBN 978-953-7809-61-4)

J.Hižak, L.Gotal Dmitrović: „Restrictions of direct reciprocity and the necessity of gossip in large groups“, **konferencijski rad** , Cambridge Summit 2018

J.Hižak, L.Gotal Dmitrović, M.Čubrilo: The role of memory in transition from direct to indirect reciprocity, **znanstveni rad,** u postupku recenzije, https://arxiv.org/pdf/1810.02536.pdf

J.Hižak: IPD in a Brownian-like population, **znanstveni rad,** u postupku recenzije