Izračun gubitaka zbog vrtložnih struja u lameliranoj transformatorskoj jezgri otvorenoga tipa primjenom metode konačnih elemenata

Frljić, Stjepan

Doctoral thesis / Disertacija

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:593565

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**



Repository / Repozitorij:

FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repozitory







Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Stjepan Frljić

IZRAČUN GUBITAKA ZBOG VRTLOŽNIH STRUJA U LAMELIRANOJ TRANSFORMATORSKOJ JEZGRI OTVORENOGA TIPA PRIMJENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2023.



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Stjepan Frljić

IZRAČUN GUBITAKA ZBOG VRTLOŽNIH STRUJA U LAMELIRANOJ TRANSFORMATORSKOJ JEZGRI OTVORENOGA TIPA PRIMJENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA

DOKTORSKI RAD

Mentor: Prof. dr. sc. Bojan Trkulja

Zagreb, 2023.



University of Zagreb

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTING

Stjepan Frljić

CALCULATION OF EDDY CURRENT LOSSES IN A LAMINATED OPEN-TYPE TRANSFORMER CORE USING THE FINITE ELEMENT METHOD

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Professor Bojan Trkulja, PhD

Zagreb, 2023

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva, Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

Mentor: prof. dr. sc. Bojan Trkulja

Doktorski rad ima: 123 stranice

Doktorski rad br.: _____

O mentoru

Bojan Trkulja je rođen 1978. g. u Bjelovaru. Nakon završetka gimnazije upisao je Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu na kojem je diplomirao s izvrsnim uspjehom 2001.godine na smjeru Elektroenergetika. Iste se godine zaposlio kao znanstveni novak na Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja. 2004.g. je izradio i obranio magistarski rad s temom: „Proračun kvazistatičkog elektromagnetskog polja metodom momenata". Doktorsku disertaciju s temom „Proračun elektromagnetskog polja složenih elektroenergetskih objekata" obranio je 2008. godine. Dobitnik je godišnje nagrade Končar za doktorsku disertaciju koja sadrži istaknuta znanstvena dostignuća iz područja tehničkih znanosti s primjenom u industriji i nagrade „Roberto Giannini" za izvrsnost u nastavi i radu sa studentima 2014. godine. Njegovi glavni istraživački interesi uključuju primjenu numeričkih metoda u analizi elektromagnetskih polja.

About the Supervisor

Bojan Trkulja was born in Bjelovar, Croatia, in 1978. After graduating from high school, he enrolled in the Faculty of Electrical Engineering and Computing at the University of Zagreb where he graduated with excellent success in the field of electrical power engineering in 2001. That same year he was employed as a research fellow at the Department of Electrical Engineering Fundamentals and Measurements at the Faculty of Electrical Engineering and Computing. In 2004. he has defended his master's thesis: "Calculation of quasistatic electromagnetic field by the method of moments". In 2008. he defended his doctoral dissertation with the topic: "Electromagnetic field calculation of complex power system facilities". He is the winner of the annual Koncar award for the doctoral thesis, which is given for outstanding scientific achievements in the field of technical science with industry application and "Roberto Giannini" award for excellence in teaching and working with students in 2014. His main research interests include the use of numerical methods in the analysis of electromagnetic fields.

Zahvala

Najprije bih želio zahvaliti svom mentoru, prof. dr. sc. Bojanu Trkulji, na znalačkom usmjeravanju i pravim savjetima u pravo vrijeme te sveukupnoj pomoći tijekom mog doktorskog studija. Hvala za angažiranost i strpljenje tijekom brojnih razgovora koji su bili od iznimne važnosti za ovo istraživanje.

Zahvaljujem tvrtki Končar - Mjerni Transformatori, a posebno dr. sc. Igoru Žigeru, za korisne informacije i podatke, te iscrtavanje i nabavu lameliranih jezgri na kojima su provedena mjerenja. Hvala i tvrtki ENPAY na gratis izradi jezgri.

Zahvaljujem svim kolegama na ugodnoj, prijateljskoj atmosferi, pomoći kad god sam ju trebao i dobrim savjetima.

Zahvaljujem mojoj obitelji na moralnoj podršci tijekom studija, najbližim prijateljima koji su bili tu kad god zatreba i svim ostalim prijateljima na razumijevanju zbog mojih obaveza.

Najveće hvala Valentini na sveukupnoj podršci i ljubavi od prvog trenutka.

Za kraj, hvala mojoj mami koja nažalost nije dočekala ovaj trenutak, ali čija me podrška i ljubav pratila cijeli život.

Sažetak

Kako bi se minimizirali gubitci zbog vrtložnih struja, transformatorska jezgra se sastoji od velikog broja vrlo tankih feromagnetskih lamela međusobno odvojenih višestruko tanjim slojevima električne izolacije. Očekivano, konačna rješenja za elektromagnetska polja u tako heterogenom području su vrlo oscilatorne, samo po dijelovima kontinuirane prostorne funkcije. Kako bi aproksimacija rješenja bila valjana, izravna primjena metode konačnih elemenata na takav problem zahtijeva iznimno gustu mrežu konačnih elemenata, tj. prekomjeran broj konačnih elemenata iz perspektive raspoloživih računalnih resursa. Prema tome, nužno je provesti neki vid homogenizacije fizikalne slike.

U slučaju jezgre otvorenog tipa, situacija se dodatno komplicira zbog neravnomjerne razdiobe elektromagnetskih polja u volumenu jezgre. Značajan dio magnetskog toka prodire u jezgru okomito na plohe lamela, a tako inducirane vrtložne struje poprimaju značajne iznose. Kako bi se smanjio njihov iznos, jezgra otvorenog tipa se obično izvodi od više vitkijih dijelova, tj. laminacijskih paketa, međusobno odvojenih dodatnim slojevima električne izolacije. Sa stajalište računalnih simulacija, takvi slojevi izolacije kvare brzinu konvergencije, a njihova homogenizacija nije moguća korištenjem standardnih metoda.

Specifičnosti fizikalne slike kod jezgre otvorenog tipa moguće je uspješno uzeti u obzir korištenjem magnetskog vektorskog potencijala $\vec{A}$ i strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}$. U skladu s tim, najprije je izvedena Galerkinova slaba $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacija temeljena na izravnoj primjeni metode konačnih elemenata. Kako bi se znatno smanjila potrebna gustoća diskretizacije domene, unutar svakog pojedinog konačnog elementa su uvedene prikladne aproksimacije fizikalne slike u vidu raspregnutih, međusobno neovisnih elektromagnetskih polja. Na osnovu uvedenih aproksimacija, izvedena je modificirana slaba formulacija koja dopušta znatno veće dimenzije konačnog elementa, ali vrijedi samo lokalno, unutar volumena promatranog konačnog elementa. No, homogenizacijom takve modificirane formulacije dobiva se Galerkinova $\vec{A},\vec{T}_x-\vec{A}$-formulacija koja je valjana globalno, unutar cijele problemske domene. Kao posljedica postupka homogenizacije, u području jezgre se koriste nadomjesne homogene i anizotropne značajke materijala. Konačna $\vec{A},\vec{T}_x-\vec{A}$-formulacija omogućuje simultano modeliranje sveukupnih vrtložnih struja u jezgri. Dodatno, za razliku od početne slabe $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije, homogenizirana slaba $\vec{A},\vec{T}_x-\vec{A}$-formulacija pokazuje odličnu brzinu konvergencije. Pored analitičkog postupka homogenizacije, razvijen je i numerički pristup homogenizaciji temeljen na 2D formulaciji problema vrtložnih struja kojim se uspješno homogeniziraju i rubni efekti vrtložnih struja, tj. promjene smjera vrtložnih struja koje se javljaju na rubovima lamela. Napravljena je usporedba računalne simulacije temeljene na $\vec{A},\vec{T}_x-\vec{A}$-formulaciji s računalnom simulacijom temeljenom na $\vec{A},\varphi-\vec{A}$-formulaciji. Dobiveno je dobro slaganje rezultata računalnih simulacija, s tim da simulacija temeljena na $\vec{A},\vec{T}_x-\vec{A}$-formulaciji pokazuje bržu konvergenciju. Do-

datno, razvijena metoda je primijenjena za izračun gubitaka u realnoj jezgri otvorenoga tipa za koju su prethodno provedena mjerenja ukupnih gubitaka. Rezultati simulacije se dobro slažu s rezultatima dobivenim putem mjerenja, što dodatno potvrđuje valjanost razvijene metode.

Ključne riječi: vrtložne struje, gubitci zbog vrtložnih struja, lamele, homogenizacija, otvoreni tip jezgre, transformatori

Calculation of eddy current losses in a laminated open-type transformer core using the finite element method

Introduction

Total losses in a laminated ferromagnetic transformer core include several different mechanisms of interconnected phenomena that occur on different temporal and spatial scales. Therefore, the calculation of total losses in a laminated core is a very complex task. In the literature, a distinction is usually made between static hysteresis losses and dynamic losses, and the latter is further divided into losses due to classic eddy currents and additional losses. In the stationary state, it is possible to calculate losses due to eddy currents separately from the remaining two types of losses. However, the calculation of eddy current losses itself is an extremely demanding problem due to the heterogeneous and anisotropic characteristics of the core material. Direct application of the finite element method is not possible in the three-dimensional case due to the excessive discretization density. In the case of an open-type core, eddy currents are induced to a significant extent by the magnetic flux perpendicular to the lamination surfaces, so it is preferable to use a multi-part core in order to reduce their value. On the other hand, the existence of an additional transverse layer of insulation between parts of the core further increases the demands on the domain discretization density. Therefore, it is necessary to use some type of homogenization method.

Problem definition

The problem domain consists of the core region and the winding region within a bounded air-box. Therefore, it is necessary to define boundary and interface conditions. Due to the existence of symmetry surfaces, it is necessary to define the boundary conditions on the symmetry surfaces, which will significantly reduce the size of the problem. In addition, an open-type core is a region of heterogeneous and anisotropic material properties that are therefore defined as position-dependent tensors within the core. In accordance with the characteristics of the material within the domain, the relevant Maxwell's equations are defined. In the air region and winding region, the electrical conductivity is set to zero, so induced eddy currents are only possible in the core region. On the other hand, the source current exists only in the winding region. Eddy currents are modeled by a magnetoquasistatic set of macroscopic Maxwell's equations. Considering the non-trivial three-dimensional geometry of the problem domain and the highly heterogeneous and anisotropic core region, the mathematical model will be based on the finite element method.

Strong formulation

To ensure the continuity of the normal component of the magnetic induction vector at the air/core interface, it is preferable to use the magnetic vector potential $\vec{A}$ as a problem variable. Since open-type cores are usually made as multi-part cores, i.e. they contain transverse layers of electrical insulation between core parts, it is preferable to model eddy currents using the current vector potential $\vec{T}$. In this way, it is possible to set the interface condition $\vec{T} \times \vec{n} = 0$ on the surface between the parts of the core instead of explicitly modeling a very thin insulating layer. Therefore, the magnetic vector potential $\vec{A}$ and the current vector potential $\vec{T}$ will be used as problem variables. Using previously derived equations, including boundary and interface conditions, in combination with the magnetic vector potential $\vec{A}$ and the current vector potential $\vec{T}$, a strong formulation is derived. The strong formulation should allow eddy currents only in the core region. Therefore, the set of equations in the core region is different from the set of equations in the air and winding regions. Accordingly, strong $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulation over previously defined domain regions is derived, where the magnetic vector potential $\vec{A}$ and the current vector potential $\vec{T}$ are both used in the core region, while only the magnetic vector potential $\vec{A}$ is used in the winding and air regions. The source current is approximated using the impressed current vector potential $\vec{T}_u$ in the entire domain, but in the air and core regions $\nabla \times \vec{T}_u = 0$ holds. It is important to emphasize that the $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulation is applicable only under the condition that each lamination sheet is topologically simply connected, which is certainly the case for an open-type core.

Finite element approximation

Since the problem variables $\vec{A}$ and $\vec{T}$ are vectors, the so-called edge elements, which represent vector basis functions, can be used for the finite-dimensional approximation of the variables $\vec{A}$ and $\vec{T}$ in the space of finite elements. Such basis functions ensure only the continuity of the tangential component of the approximated vector potential, but they do not ensure the continuity of the normal component of the vector potential. Thus, by using edge elements, the discontinuity of the normal component of the vector potential at the interface between different materials is allowed. This property is very advantageous in order to enable and ensure the necessary discontinuities and continuities of the corresponding vector components of electromagnetic fields at the interfaces of regions with different material characteristics. On the other hand, the impressed current vector potential $\vec{T}_u$ is approximated by standard nodal basis functions of the lowest degree. Definitions and properties of nodal basis functions and edge basis functions are described in detail and illustrative examples are given for the case of triangular and rectangular finite elements.

Galerkin's weak formulation

Based on previously derived equations of the strong formulation, Galerkin's weak $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulation is derived. According to the Galerkin method, free vector basis functions are used as weighting functions. Due to the existence of problem symmetry, symmetry surfaces were also taken into account when deriving the weak formulation. Due to the heterogeneous characteristics of the material, it is necessary to satisfy the interface conditions between the ferromagnetic material and the insulation inside the core also. The derived $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulation is applicable only in the case of toy models, and for practical applications, it is necessary to derive a homogenized formulation. Through the homogenization process, the $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulation will be reduced to the $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulation, i.e. only the x-component of the $\vec{T}$ potential will be used. With the necessary use of the structural mesh, it will then be possible to eliminate the redundant degrees of freedom related to the y and z components of the current vector potential, which will significantly improve the convergence of the simulation. Since the final matrix of the system of equations is singular, only iterative methods are used in the simulations. In order to enable the use of the CG (conjugate gradient) solver, a corresponding symmetric $\vec{A}, \vec{T}' - \vec{A}$-formulation is also derived, where $-j\omega\vec{T}' = \vec{T}$.

Decoupled eddy currents in a finite element

In order to enable the process of homogenization of the core region, the magnetic induction vector and the eddy current density vector will first be decoupled inside every finite element within the core region into mutually independent, orthogonal components. Consequently, within a finite element, it is then possible to separate the relevant equations into mutually independent equations. In this way, the three-dimensional equations are transformed into three times as many mutually independent two-dimensional equations in each finite element within the core region. Thus, the eddy currents in each finite element are divided into three types of eddy currents, of which two types are induced by magnetic induction components tangential to the lamination surface, and the third type is induced by the magnetic induction component perpendicular to the lamination surface. Since the first two types of eddy currents, induced by the components of magnetic induction tangential to the lamination surfaces, flow in very narrow loops, it is possible to apply one-dimensional approximation to them. By using one-dimensional approximation, it will be possible to determine analytical solutions for the distribution of eddy current density and corresponding components of magnetic induction depending on the mean value of the magnetic induction inside the finite element.

Homogenization

By using one-dimensional approximation, analytical solutions were calculated for tangential components of magnetic induction with respect to the lamination surface and for one-dimensional eddy currents induced by the tangential components of the magnetic induction. It is important to emphasize that the one-dimensional approximation for narrow eddy current loops is a good approximation in all finite elements, except in the finite elements located at the edges of the lamination, because the edge effect occurs there, i.e. the change in the direction of the eddy current vector, so the one-dimensional approximation not applicable. In addition, the one-dimensional approximation assumes a symmetrical distribution of eddy currents within the lamination. The obtained analytical solutions within the finite element depend only on one degree of freedom which represents the mean value of the corresponding induction component. An analytical analysis of wide loops of eddy currents, induced by the magnetic induction component perpendicular to the lamination surfaces, was made, but due to their non-local nature, this type of eddy currents cannot be expressed using only the mean value of the magnetic induction within that finite element. By incorporating the analytical solutions into standard basis functions within each finite element, new basis functions are created. Based on the new basis functions, a new weak Galerkin formulation was obtained, which enables the use of a finite element of larger dimensions than in the case of approximation by standard edge basis functions. By homogenizing such a formulation within the finite element, all earlier modifications of the basis functions were transformed into new material characteristics. Additionally, using standard equations for averaging magnetic circuits, the heterogeneous core region composed of ferromagnetic laminations and electrical insulation layers is transformed into an equivalent region of homogeneous material characteristics. The obtained homogeneous characteristics of the material are necessarily anisotropic and have complex values. To describe homogeneous and anisotropic material characteristics in the core region, it is necessary to use tensors in the global coordinate system. Through the homogenization process only the standard basis functions remained, and the material characteristics were homogenized, therefore the obtained homogenized weak formulation is also applicable for the calculation of the global solution, i.e. a set of equations was obtained that are valid over the entire finite element mesh. The final weak $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulation requires the use of a structural finite element mesh in the core region and uses only $\vec{T}_x$ instead of $\vec{T}$ potential, i.e. the degrees of freedom associated with the edges that are tangential to the lamination surfaces are eliminated from the calculation. By using only degrees of freedom associated with edges that are perpendicular to the lamination surfaces, the convergence rate is significantly improved. Again, in order to enable the use of the CG (conjugate gradient) solver, a corresponding symmetric $\vec{A}, \vec{T}'_x - \vec{A}$-formulation is also derived, where $-j\omega\vec{T}' = \vec{T}$.

2D formulation for calculation of eddy currents in an open core

Analytical homogenization is based on a one-dimensional approximation of eddy currents, which results in the neglect of edge effects. In the case of a multipart open-type core, the error resulting from neglecting edge effects is greater than in the case of a one-part open-type core. The reason for this is that in the case of a multi-part open-type core, the edge effects of the current direction change occur at more places in the core than in the case of a single-part core. Edge effects can be taken into account through a numerical homogenization procedure based on a two-dimensional $\vec{A},\vec{T}$-formulation of the eddy current problem. The current vector potential $\vec{T}$ serves to model 2D narrow eddy currents, and the magnetic vector potential $\vec{A}$ ensures the zero mean value of the magnetic flux caused by eddy currents using homogeneous Dirichlet boundary conditions. As in the case of analytical homogenization, numerical homogenization is performed in the preprocessing phase of the final 3D simulation. In theory, 2D simulations are performed over the 2d projection of each finite element, but in reality it is sufficient to perform the simulation only for one finite element that belongs to the edge of the lamination, in order to take edge effects into account, and for one finite element that is not at the edge of the lamination. The process of numerical homogenization yields substitute material characteristics that necessarily have complex values. Also, in case the penetration depth of the magnetic fields is very small, the $\vec{A},\vec{T}$-formulation can be used in the postprocessing phase to correct to a certain extent the losses in the core.

Comparison of measured and computed losses

A comparison was made between the simulation based on the homogenized $\vec{A},\vec{T}'_x-\vec{A}$-formulation and the simulation based on the homogenized $\vec{A},\varphi-\vec{A}$-formulation for the example of a four-part open-type core. To make the comparison fair, the CAD model and finite element mesh are identical for both formulations, which means that in both cases the insulation layer between the core parts is modeled directly. In the case of $\vec{A},\vec{T}'_x-\vec{A}$-formulations could be used The simulation results show excellent agreement in the distribution of magnetic induction, and very good agreement in the distribution of eddy current density in the core between the two formulations. Regarding the convergence of the simulation, the $\vec{A},\vec{T}'_x-\vec{A}$-formulation requires two times significantly less number of iterations than the $\vec{A},\varphi-\vec{A}$-formulation. The convergence of the $\vec{A},\vec{T}'_x-\vec{A}$-formulation could be even better if, instead of the insulating layer, only the surface with the interface condition $\vec{T}_x\times\vec{n}=0$ is used. In addition, a comparison of the simulation results based on the $\vec{A},\vec{T}'_x-\vec{A}$-formulation with the measurement results was made for a real one-piece core. Given that the one-dimensional approximation is valid for narrow eddy current loops, there is a direct local connection between their losses and the magnetic induction at the observed point. Therefore, it is possible to consider them as losses of a local nature, as

is the case with hysteresis losses and additional losses. Consequently, the losses that have a local nature do not depend on the global distribution of the magnetic induction, that is, they can be estimated from the measurement of the losses in the homogeneous field inside the Epstein apparatus. Therefore, for the final solution of the numerical simulation, it is important to obtain the exact distribution of the magnetic induction and the exact losses due to eddy currents induced by the magnetic flux perpendicular to the lamination surface. From the distribution of the magnetic induction, it is then possible to compute all losses except the losses due to the wide eddy current loops, which on the other hand are calculated directly in the post-processing phase from the solution for the current vector potential $\vec{T}_x'$. The simulation results show a very good agreement with the measurement results.

Conclusion

Specific features related to the open-type core and their influence on the distribution of electromagnetic fields in the core region are described. Considering the mentioned features of the open-type core, it is preferable to use the magnetic vector potential $\vec{A}$ and the current vector potential $\vec{T}$ as problem variables. Given the emphasized three-dimensionality of the core and the typically large number of laminations, it is necessary to carry out the process of homogenization of the weak formulation. An analytical and numerical approach to homogenization is described. Homogenization results in the final Galerkin $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulation with alternate homogeneous and anisotropic material features within the individual lamination package. This ultimately enables the use of a finite element mesh of significantly lower density with simultaneous modeling of the total eddy currents in the open-type laminated core, which provides an accurate distribution of the average magnetic induction and eddy currents in the core.

Keywords: eddy currents, eddy current losses, lamination, homogenization, open-type core, transformers

Sadržaj

1. Uvod 1

1.1. Homogenizacijske metode 2

2. Definicija problema 4

2.1. Problemske jednadžbe 4

2.1.1. Magneto-kvazistatička aproksimacija 5

2.2. Opis problemske domene 5

2.2.1. Rubne plohe i rubne vrijednosti 6

2.3. Značajke materijala prema područjima domene 8

2.3.1. Lamelirana jezgra otvorenog tipa 9

2.3.2. Opis područja Ω_j 10

2.3.3. Značajke materijala u području Ω_j 11

2.4. Jednadžbe polja prema područjima domene 15

2.4.1. Jednadžbe polja u području Ω_u i Ω_p 15

2.4.2. Jednadžbe polja u području Ω_j 16

3. Jaka formulacija 18

3.1. Jaka $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija 19

3.1.1. Formulacija u Ω_p i Ω_u 19

3.1.2. Formulacija u Ω_j 21

4. Aproksimacija konačnim elementima 24

4.1. Čvorne bazne funkcije 25

4.1.1. Čvorne interpolacijske funkcije unutar konačnog elementa 27

4.2. Bridne bazne funkcije 29

4.2.1. Bridne interpolacijske funkcije unutar konačnog elementa 32

5. Galerkinova slaba formulacija 34

5.1. Jednadžbe jake $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacije 34

5.2. Razmatranje baznih i težinskih funkcija 36

5.3. Jednadžbe Galerkinove $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ slabe formulacije 37
5.3.1. Skup jednadžbi vezan za težinske funkcije $\vec{\alpha}_k$ 37
5.3.2. Skup jednadžbi vezan za težinske funkcije $\vec{\tau}_l$ 42
5.3.3. Simetrična slaba $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija 46

6. Raspregnute vrtložne struje u konačnom elementu 48
6.1. Jednadžbe polja u području Ω_{lam} 48
6.2. Vrtložne struje u području Ω_{lam} 49
6.3. Aproksimacija raspregnutim poljima 50
6.3.1. Rasprezanje vrtložnih struja 52
6.3.2. Amperov zakon u kontekstu raspregnutih vektorskih polja 54
6.3.3. Usporedba struja $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$ 58

7. Homogenizacija 60
7.1. Jednodimenzionalne vrtložne struje 61
7.1.1. Analitička rješenja jednodimenzionalnih vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ . . .62
7.1.2. Jednodimenzionalna aproksimacija gubitaka zbog $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ 65
7.2. Dvodimenzionalne vrtložne struje 66
7.2.1. Analitičko rješenje za dvodimenzionalne vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$ 66
7.3. Prilagođena slaba formulacija u $K_m \in \Omega_{lam}$ 67
7.3.1. Bazne funkcije unutar $K_m \in \Omega_{lam}$ 68
7.3.2. Jednadžbe Galerkinove slabe formulacije u $K_m \in \Omega_{lam}$ 71
7.4. Homogenizirana slaba formulacija u $K_m \in \Omega_{lam}$ 72
7.4.1. Homogenizacija značajki materijala 75
7.4.2. Homogenizirane jednadžbe slabe formulacije u $K_m \in \Omega_{lam}$ 79
7.5. Homogenizacija slabe formulacije u Ω_j 82
7.5.1. Konačna slaba $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacija u Ω 84

8. Numerička homogenizacija i korekcija pogreške temeljene na 2D formulaciji . . 85
8.1. Numerička homogenizacija 86
8.2. 2D slaba formulacija 89
8.3. Korekcija pogreške u fazi postprocesiranja 91

9. Primjeri računalnih simulacija i usporedba s mjerenjima 94
9.1. Izračun gubitaka zbog vrtložnih struja u četverodijelnoj jezgri otvorenog tipa .94
9.1.1. Model četverodijelne jezgre 95
9.1.2. Parametri simulacija 97
9.1.3. Rezultati simulacija 98
9.2. Metoda za izračun ukupnih gubitaka u jezgri 102

9.2.1. Jezgra i uzbudni namot 103
9.3. Izračun gubitaka u stvarnoj jezgri 104
9.4. Mjerenje gubitaka u stvarnoj jezgri 106
9.4.1. Nadomjesna shema 106
9.4.2. Rezultati mjerenja 108

10. Zaključak 112

Literatura 114

Životopis 121

Biography 123

Poglavlje 1

Uvod

Izračun vrtložnih struja u lameliranoj feromagnetskoj jezgri zahtijeva modeliranje svezanih fizikalnih fenomena koje se događaju na različitim prostornim i vremenskim skalama [1], [2], [3]. U kontekstu vremenske skale, ukupne gubitke je moguće razdvojiti na gubitke zbog histereze koji se događaju na vrlo kratkoj vremenskoj skali, čak 10^{-8} sekundi, zbog čega se mogu smatrati statičkim gubitcima, te na dinamičke gubitke čija vremenska skala ovisi o frekvenciji uzbudne struje, koja je u rasponu značajnih mrežnih harmonika [4], [5]. Što se tiče prostorne skale, statički histerezni gubitci se događaju na mikroskali, dok se dinamički gubitci događaju na većim prostornim skalama. Ako tranzijentna stanja nisu od interesa, odnosno ako je fokus izračuna samo na gubitcima u jezgri u stacionarnom radnom stanju, dinamičke gubitke je moguće rastaviti na klasične gubitke zbog vrtložnih struja koji se događaju na prostornoj makroskali definiranoj dimenzijama lamele i na dodatne (anomalijske) gubitke koji se događaju na prostornoj mezoskali [1]. Klasične vrtložne struje su dakle opisane standardnim setom makroskopskih Maxwellovih jednadžbi, dok fenomeni vezani za dodatne gubitke i statičke histerezne gubitke zahtijevaju matematički involviranije modeliranje utjecaja feromagnetskih materijala na makroskopska elektromagnetska polja.

Zbog velikog omjera dimenzija jezgre naspram debljine lamela, a pogotovo električne izolacije među lamelama, lamelirana feromagnetska jezgra u cjelini predstavlja područje iznimno heterogenih i anizotropnih značajki materijala. Stoga je i klasična makroskopska polja potrebno modelirati na relativno velikom rasponu prostornih skala, odnosno problem izračuna klasičnih vrtložnih struja u lameliranoj jezgri klasificiran je kao više-skalni problem [6], [7], [8], [9]. Takav tip problema u trodimenzionalnom slučaju nije moguće izravno modelirati primjenom metode konačnih elemenata, jer bi valjana diskretizacija domene rezultirala nedopustivo velikim brojem konačnih elemenata. Prema tome, neizbježna je primjena nekog vida homogenizacije fizikalne slike u jezgri.

U ovom će radu fokus razmatranja biti na izračunu gubitaka zbog klasičnih vrtložnih struja u jezgri naponskog transformatora velike snage koji predstavlja jednofazni energetski transfor-

mator s karakteristikama mjernih transformatora [10], [11]. Jezgra naponskog transformatora velike snage je lamelirana feromagnetska jezgra otvorenog tipa, izražene vitkosti, za koju je izračun gubitaka zbog vrtložnih struja još složeniji, primarno zbog toga što glavni magnetski tok poprima putanju rasipnog toka pa su vrtložne struje u velikoj mjeri inducirane i magnetskim tokom okomitim na plohe lamela. Iako je lamelirana jezgra otvorenog tipa razmatrana u literaturi [12], [13], [14], [15], njena vitkost je obično puno manja u odnosu na vitkost otvorenih jezgara prikazanih u [11], [16]. Smanjenjem vitkosti jezgre smanjuje se i udio magnetskog toka koji prodire okomito na plohe lamela, pa se smanjuje i njegov utjecaj na ukupne gubitke zbog vrtložnih struja. U slučaju jezgara otvorenoga tipa koje imaju izražen koeficijent vitkosti, kao što je slučaj s naponskim transformatorima velike snage, gubitci zbog vrtložnih struja induciranih magnetskim tokom okomitim na plohe lamela postaju značajni. Smanjenje takvih gubitaka postiže se slaganjem jezgre od još vitkijih dijelova koji imaju manju širinu lamela, čime se postiže efekt lameliranja jezgre i u poprečnom smjeru što dodatno naglašava trodimenzionalnost problema, komplicira matematički model i podiže zahtjeve na gustoću diskretizacije domene. Prema tome, primjena homogenizacijskih metoda je nužna.

1.1 Homogenizacijske metode

Osnovni cilj postupka homogenizacije jest modificirati početnu matematičku formulaciju problema u novu približnu formulaciju s nadomjesnom homogenom domenom čije konačno rješenje aproksimira anvelopu rješenja početne formulacije. Nakon što je proveden izračun i dobivena anvelopa konačnog rješenja, obično je moguće postupkom unazad odrediti i potpuno konačno rješenje početnog problema sa svim efektima heterogene domene.

U članku [13] je prikazana homogenizacijska metoda temeljena na jednodimenzionalnoj aproksimaciji vrtložnih struja, opisanoj u [17], koja omogućuje izračun analitičkog rješenja za vrtložne struje. Opisane su dvije verzije homogenizacije matematičke formulacije temeljene na magnetskom vektorskom potencijalu $\vec{A}$. Prva verzija zanemaruje utjecaj skin efekta na razdiobu magnetske indukcije po debljini lamele te je primjenjiva u vremenskoj domeni, ali samo u nisko-frekvencijskom području, dok je drugi pristup primjenjiv samo u harmoničkom slučaju, ali na velikom rasponu frekvencija. Obje verzije pretpostavljaju linearne značajke materijala i zanemaruju rubne efekte, tj. vrtloženje struja na rubovima lamela. Uz jednodimenzionalnu aproksimaciju vrtložnih struja induciranih glavnim magnetskim tokom, u [18] je opisan pristup modeliranju vrtložnih struja induciranih rasipnim magnetskim tokom pomoću spregnutih proračuna na različitim mrežama konačnih elemenata čime se značajno povećava točnost rješenja uz zadovoljavajuću brzinu konvergencije.

Korištenjem dodatnih ortogonalnih baznih funkcija, homogenizacijsku metodu temeljenu na 1D aproksimaciji moguće je primijeniti u vremenskoj domeni i za slučaj visokih frekvencija.

Takav pristup je primijenjen u [19] za slučaj linearnih značajki materijala te u [20] za slučaj nelinearnih značajki materijala.

U [21] je opisana je 2D verzija homogenizacijske metode koja se oslanja na informiranu pretpostavku rješenja u lameliranoj jezgri. Definiranjem mikro-funkcije, koja u prvoj aproksimaciji prati prostornu razdiobu gustoće vrtložnih struja u lameli, konačno rješenje za vrtložne struje u lameli moguće je aproksimirati uz samo jedan dodatni stupanj slobode koji predstavlja amplitudu mikro-funkcije. Budući da se amplituda mikro-funkcije sporo mijenja između susjednih lamela, može ju se valjano aproksimirati uz vrlo malu gustoću diskretizacije domene. Zatim, homogenizacijom slabe formulacije unutar lamele postiže se globalna aproksimacija rješenja bazirana na stupnjevima slobode kojima se aproksimiraju usrednjena polja te stupnjevima slobode kojima se modelira amplituda mirko-funkcije. Na tragu iste ideje, u [22] i [7] je opisana homogenizacijska metoda koja koristi veći broj ortogonalnih mikro-funkcija kako bi se točnije aproksimirala razdioba gustoće vrtložnih struja u lameli, pogotovo na višim frekvencijama, dok je u [15] i [23] sličan pristup primijenjen na trodimenzionalnu problemsku domenu. Homogenizacijska metoda bazirana na konstruiranju nesimetričnih mikro-funkcija prilagođenih razdiobi gustoće vrtložnih struja induciranih u značajnoj mjeri magnetskim tokom okomitim na plohe lamela opisana je u [24].

Za razliku od prethodno opisanih homogenizacijskih metoda koje rezultiraju nadomjesnim magnetskim značajkama materijala, u [25] i [26] je opisan izračun nadomjesne, homogene električne provodnosti koja omogućuje izračun vrtložnih struja uz znatno manju gustoću mreže konačnih elemenata.

Poglavlje 2

Definicija problema

2.1 Problemske jednadžbe

Standardni skup makroskopskih Maxwellovih jednadžbi u mirujućim materijalima čine sljedeće jednadžbe:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \vec{J} - \partial_t \vec{D} = \vec{J_u} \tag{2.4}$$

gdje se uz jakost električnog polja $\vec{E}$ i magnetsku indukciju $\vec{B}$ koriste i električna indukcija $\vec{D}$, jakost magnetskog polja $\vec{H}$, te gustoća struje $\vec{J}$. Polja $\vec{D}$ i $\vec{J}$ povezana su s $\vec{E}$ preko dielektrične permitivnosti ε i električne provodnosti κ, tj. $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ i $\vec{J} = \kappa\vec{E}$, dok je polje $\vec{H}$ povezano s $\vec{B}$ preko magnetske permeabilnosti μ, tj. $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ (o značajkama materijala će biti više riječi u poglavlju 2.3). Izvori polja zadani su na desnoj strani u 2.1 i 2.4, gdje ρ predstavlja gustoću slobodnih električnih naboja, a $\vec{J_u}$ predstavlja gustoću uzbudne struje unutar vodiča spojenih na strujni izvor, te je stoga unaprijed poznata.
Na graničnoj plohi između različitih materijala, Maxwellove jednadžbe prelaze u sljedeći oblik

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \tag{2.5}$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{2.6}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{2.7}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \tag{2.8}$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\partial_t \sigma \tag{2.9}$$

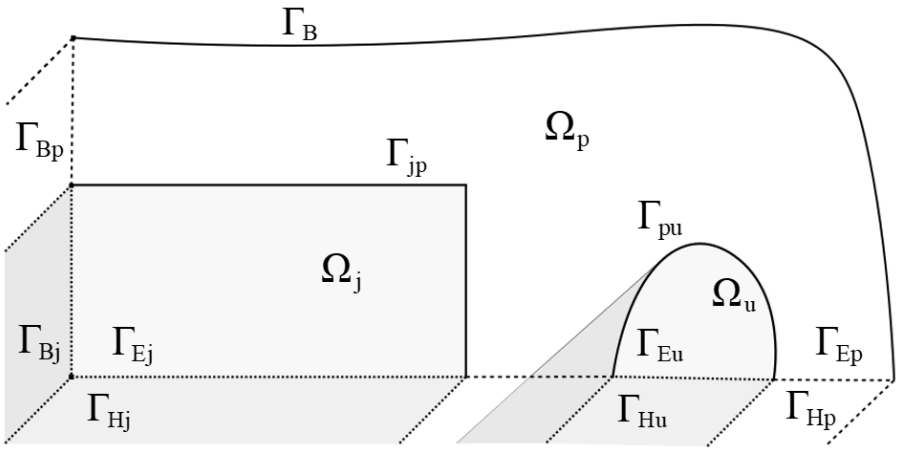
gdje $\vec{n}_{12}$ predstavlja vektor normale na graničnu plohu, usmjeren iz materijala 1 u materijal 2, σ predstavlja plošnu gustoću slobodnih naboja, a $\vec{K}$ predstavlja slobodne plošne struje na graničnoj plohi. Jednakost 2.9 predstavlja plošnu verziju jednadžbe kontinuiteta $\nabla \cdot \vec{J} = -\partial_t \rho$ (dobivena kombinacijom 2.1 i divergirane jednadžbe 2.4). Kako svaka uvjetuje jednakost za po jedno polje na promatranoj graničnoj plohi, jednadžbe 2.5-2.9 su u literaturi poznate pod nazivom "granični uvjeti".

2.1.1 Magneto-kvazistatička aproksimacija

Budući da je fokus rada isključivo na izračunu vrtložnih struja u području niskih frekvencija, standardni skup Maxwellovih jednadžbi 2.1-2.4 moguće je pojednostaviti. Naime, struje pomaka u transformatorskoj jezgri zanemarivog su iznosa u odnosu na provodne struje, tj. vrijedi da je $\frac{\kappa}{2\pi f \varepsilon} \gg 1$, jer je frekvencija uzbude f vrlo niska (u rasponu značajnih mrežnih harmonika). Također zbog niske frekvencije uzbude, valna duljina $\lambda = \frac{1}{2\pi f \mu \varepsilon_0}$ elektromagnetskog vala izvan jezgre (opisanog s 2.1-2.4) značajno je veća od maksimalne dimenzije problemske domene (problemska domena je unutar reda veličine dimenzija samog transformatora). Prema tome, kvazistatička aproksimacija je opravdana te će se u nastavku teksta zanemariti utjecaj struja pomaka, odnosno $\partial_t \vec{D} = 0$ u 2.4, u cijeloj problemskoj domeni Ω. Iz istog razloga zanemaruje se pojava slobodnih naboja plošne gustoće σ u 2.9. Također, kako vektor električne indukcije $\vec{D}$ ne sudjeluje u pojavi vrtložnih struja, u daljnjem tekstu se 2.1 i 2.5 neće uzimati u obzir.

2.2 Opis problemske domene

Problemska domena Ω, unutar koje će se provoditi izračuni, predstavlja prostor konačne veličine, a sastoji se od područja transformatorske jezgre Ω_j, područja uzbudnog namota Ω_u, te područja zraka (prazni prostor) Ω_p tj. $\Omega = \Omega_j \cup \Omega_p \cup \Omega_u$, gdje su sva tri područja međusobno disjunktna, tj. vrijedi da je $\Omega_j \cap \Omega_p = \emptyset$, $\Omega_j \cap \Omega_u = \emptyset$ te $\Omega_p \cap \Omega_u = \emptyset$, kao što je prikazano na Slici 2.1. U nastavku je fokus isključivo na transformatorskoj jezgri otvorenog tipa, tj. za područje Ω_j će se pretpostaviti da je topološki jednostavno povezano. Uz relevantna područja domene, potrebno je definirati i njihove granične i rubne plohe, prikazane na Slici 2.1. Iako se ponekad koriste kao sinonimi, ovdje je napravljena pojmovna distinkcija između graničnih ploha i rubnih ploha. Pojam graničnih ploha označavat će plohe koje čine granicu između dvaju područja domene različitih značajki materijala. Prema tome, plohe Γ_{jp} i Γ_{pu} predstavljaju granične plohe i na njima moraju vrijediti granični uvjeti (eng. *interface conditions*) 2.6-2.9.
S druge strane, rubne plohe će biti one plohe koje pripadaju rubu $\partial\Omega$ problemske domene Ω, i na njima vrijede rubni uvjeti (eng. *boundary conditions*), koji su specijalan slučaj graničnih



Slika 2.1: Problemska domena s područjima domene te graničnim i rubnim plohama

uvjeta 2.6-2.9. U općem slučaju prikazanom na 2.1, rubna ploha $\partial\Omega$ sastoji se od više distinktnih ploha, tj. $\partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_{Ej} \cup \Gamma_{Ep} \cup \Gamma_{Eu} \cup \Gamma_{Hj} \cup \Gamma_{Hp} \cup \Gamma_{Hu} \cup \Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Bp}$, gdje ploha Γ_B predstavlja *dovoljno daleku* rubnu plohu (u odnosu na Ω_u i Ω_j), a rubne plohe Γ_{Ej}, Γ_{Ep}, Γ_{Eu}, Γ_{Hj}, Γ_{Hp}, Γ_{Hu}, Γ_{Bj}, Γ_{Bp} obično predstavljaju *plohe simetrije*. Dakle, Ω je ograničen prostor (prostor konačne veličine) te se problemu izračuna vrtložnih struja pristupa kao Cauchyjevom problemu sa zadanim rubnim vrijednostima.

2.2.1 Rubne plohe i rubne vrijednosti

Zadavanja rubnih vrijednosti na cijelom rubu domene Ω nužno je kako bi se osigurala jedinstvenost rješenja u Ω. Jedinstvenost rješenja kvazistatičkih polja osigurana je za tri tipa rubnih vrijednosti, a to su *E*-tip i *H*-tip, te *BJ*-tip koji pak zahtijeva da je Ω topološki jednostavno povezan prostor [27], [14].

E-tip rubnih vrijednosti postiže se zadavanjem vrijednosti tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja $\vec{E}$ na rubnoj plohi. Slično tome, *H*-tip rubnih vrijednosti postiže se zadavanjem vrijednosti tangencijalne komponente vektora jakosti magnetskog polja $\vec{H}$ na rubnoj plohi. *BJ*-tip rubnih vrijednosti postiže se istovremenim zadavanjem vrijednosti okomitih komponenata vektora magnetske indukcije $\vec{B}$ i vektora gustoće struje $\vec{J}$ na rubnoj plohi. Naravno, jedinstvenost rješenja je osigurana i u slučaju disjunktne kombinacije navedenih tipova rubnih vrijednosti. Drugim riječima, na različitim dijelovima Γ_{Xy} rubne plohe $\partial\Omega$ moguće je zadati različite tipove rubnih vrijednosti, gdje slovo X (u indeksu naziva plohe Γ_{Xy}) sadrži informaciju o tipu rubnih vrijednosti koji je zadan na Γ_{Xy}, odnosno slovo X može poprimiti vrijednosti E, H i B. Da bi se izbjeglo gomilanje slova u indeksu, umjesto *BJ* koristit će se samo *B*. Prema tome, ploha Γ_{Xy} može imati jedan od sljedeća tri naziva (s obzirom na slovo X u indeksu naziva plohe Γ_{Xy}), a to su Γ_{Ey}, Γ_{Hy} ili Γ_{By}. Malo slovo y u indeksu naziva plohe Γ_{Xy} označava područje domene, odnosno slovo y može poprimiti vrijednosti j, u i p, kao što je prikazano na Slici 2.1.

Postoji jedan izuzetak u imenovanju rubnih ploha na Slici 2.1, a to je slučaj plohe Γ_B koja nema oznaku područja domene kojem pripada, iako pripada području Ω_p, kako bi se naglasilo da se radi o *dovoljno dalekoj* rubnoj plohi te kako bi se napravila distinkcija u odnosu na plohu simetrije Γ_{Bp}. Sve rubne plohe koje imaju naziv oblika Γ_{Xy} obično će predstavljati plohe simetrije.

Dovoljno daleku rubnu plohu (u odnosu na Ω_u i Ω_j), izvan koje smatramo da više ne postoji magnetski tok, označavamo s Γ_B jer na njoj vrijedi

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.10a}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.10b}$$

gdje je $\vec{n}$ vektor normale na plohu Γ_B. Naime, ako izvan neke zatvorene plohe koja obuhvaća sve postojeće izvore magnetskog polja ipak postoji magnetski tok, tada ne može vrijediti jednakost 2.10a u svim točkama te plohe zbog 2.2 (prema integralnoj verziji jednadžbe 2.2, polje može dospjeti izvan zatvorene plohe isključivo prolaskom kroz plohu). Međutim, ako je zatvorena ploha Γ_B dovoljno daleko od obuhvaćenih izvora polja, tako da izvan nje više ne postoji nikakav magnetski tok, tj. $\vec{B}_{izvan} = 0$, tada na njoj nužno vrijedi jednakost 2.10a, koja slijedi iz rubnog uvjeta $\vec{n} \cdot (\vec{B}_{izvan} - \vec{B}) = 0$, a koji je specijalni slučaj graničnog uvjeta 2.6. Prethodno razmatranje vrijedi isključivo uz pretpostavku da ploha Γ_B predstavlja zatvorenu rubnu plohu topološki jednostavno povezane domene Ω, što će u nastavku uvijek biti slučaj. S druge strane, 2.10b će biti automatski zadovoljena jer će po definiciji područja Ω_p vrijediti da je $\vec{J} = 0$ u Ω_p, a $\Gamma_B \subset \Omega_p$. Dakle, 2.10 predstavlja *BJ*-tip rubnih vrijednosti nultog iznosa.

U slučaju kada vrijedi $\partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_{Xy}$, gdje je Γ_B prethodno definirana dovoljno daleka rubna ploha, a Γ_{Xy} rubna ploha koja ne može biti klasificirana kao dovoljno daleka rubna ploha jer nije dovoljno daleko u odnosu na Ω_u i Ω_j da bi se fizikalno ispravno smjelo pretpostaviti 2.10, na Γ_{Xy} je nužno zadati rubne vrijednosti polja kako bi rješenje polja u Ω bilo jedinstveno. Ponovno, jedinstvenost rješenja je osigurana za rubne vrijednosti *E*-tipa ili *H*-tipa, ili *BJ*-tipa uz uvjet da je Ω jednostavno povezana domena. Međutim, fizikalno točan iznos polja, tj. rubnih vrijednosti polja u svakoj točki plohe Γ_{Xy} obično nije unaprijed poznat. Jedna od situacija u kojoj je moguće fizikalno ispravno pretpostaviti rubne vrijednosti polja u svakoj točki plohe Γ_{Xy} je u slučaju kada ploha Γ_{Xy} predstavlja plohu simetrije, budući da na plohama simetrije rubne vrijednosti *E*-tipa ili *H*-tipa, ili *BJ*-tipa u pravilu imaju nulti iznos.

Prema tome, rubne plohe Γ_{Ej}, Γ_{Eu} i Γ_{Ep} će u nastavku označavati plohe simetrije na kojima vrijedi da je

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0 \tag{2.11a}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.11b}$$

gdje je uz 2.11a potrebno zadati i 2.11b zbog 2.3, tj. projekcije 2.3 na plohu Γ_{Ey} s normalom $\vec{n}$ (y u indeksu je jednak ili j ili u ili b). Naime, na plohi Γ_{Ey} vrijedi $(\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) \cdot \vec{n} = 0$, odnosno $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{n}) + \partial_t (\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0$, a budući da vrijedi 2.11a onda mora vrijediti i 2.11b.
Analogno prethodnom, rubne plohe Γ_{Hj}, Γ_{Hu} i Γ_{Hp} predstavljaju plohe simetrije na kojima vrijedi da je

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \tag{2.12a}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.12b}$$

Kako bi se na rubnoj plohi zadovoljila jednadžba 2.4, uz 2.12a je potrebno zadati i 2.12b. Plošni oblik jednadžbe 2.4 dobiva se projiciranjem na plohu putem množenja 2.4 s normalom $\vec{n}$), tj. $(\nabla \times \vec{H} + \vec{J}) \cdot \vec{n} = 0$, odnosno $\nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{n}) + \vec{J} \cdot \vec{n} = 0$, pa zbog 2.12a mora vrijediti i 2.12b.
Ako je Ω topološki jednostavno povezana domena, što će u nastavku uvijek biti slučaj, moguće je za rubne plohe postaviti plohe simetrije Γ_{Bj} i Γ_{Bp} s rubnim vrijednostima

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.13a}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.13b}$$

Iako su rubne vrijednosti 2.13 na Γ_{Bp} identične rubnim vrijednostima 2.10 na Γ_B, ovdje je napravljena distinkcija između plohe simetrije Γ_{Bp} i dovoljno daleke rubne plohe Γ_B.
Postupnim uvođenjem novih pretpostavki, u nastavku će se fokus teorijske analize dodatno usmjeriti na specifičan problem izračuna gubitaka zbog vrtložnih struja u lameliranoj feromagnetskoj jezgri koja je isključivo otvorenog tipa [11].

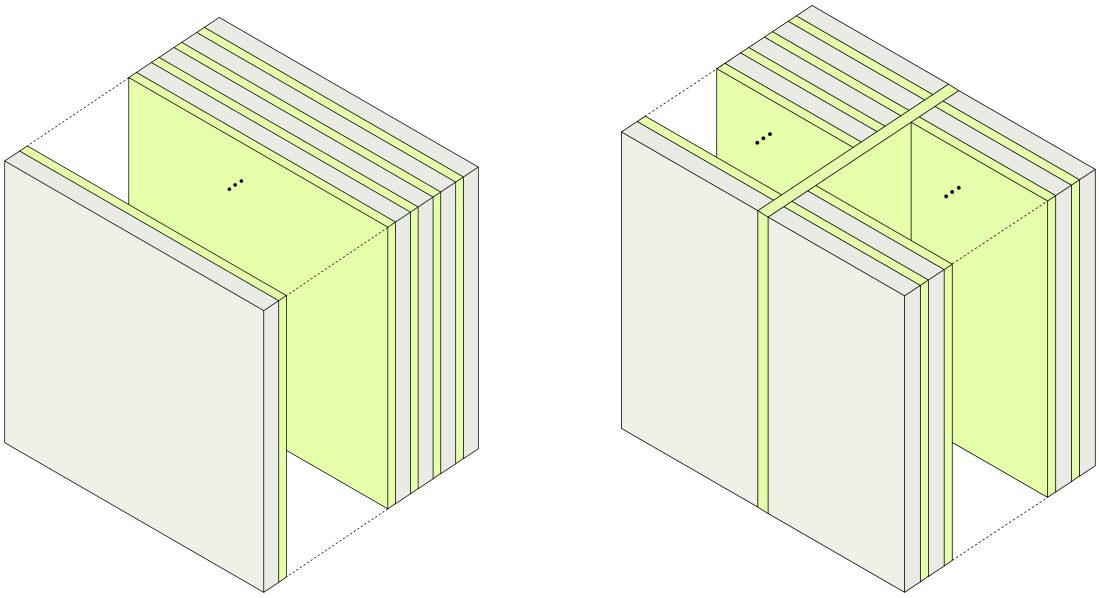
2.3 Značajke materijala prema područjima domene

S obzirom na to da će u nastavku fokus biti na izračunu vrtložnih struja u Ω_j, za električnu provodnost κ će se radi konciznosti, ali bez gubitka općenitosti, pretpostaviti da je $\kappa \neq 0$ moguće isključivo u Ω_j, odnosno $\kappa = 0$ u Ω_p i Ω_u (iako je u realnosti $\kappa \gg 0$ u Ω_u). Naime, formulacija jednadžbi u Ω_u ne utječe na samu formulaciju jednadžbi u Ω_j, jer je $\Omega_j \cap \Omega_u = \emptyset$, pa stoga u Ω_u smijemo zadati $\kappa = 0$. Prema tome, u Ω_u će postojati samo unaprijed zadana struja uzbude $\vec{J}_u$, bez mogućnosti pojave dodatnih induciranih struja, što je dovoljno dobra aproksimacija iz perspektive izračuna gubitaka u jezgri, s obzirom na to da na niskim frekvencijama i u standardnoj izvedbi uzbudnog namota struje inducirane u uzbudnom namotu imaju zanemariv utjecaj na iznos gubitaka u jezgri. Također, pri zadavanju rubnih vrijednosti 2.12b i 2.13b će zbog $\kappa = 0$ u Ω_u i Ω_p vrijediti da je $\vec{J} = 0$ na Γ_{Hp} i Γ_{Bp}, te $\vec{J} = \vec{J}_u$ na Γ_{Hu}, odnosno $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ isključivo na Γ_{Hj} i Γ_{Bj}. Analogno situaciji s električnom provodnošću κ, za magnetsku permeabilnost će

se jednako tako pretpostaviti da je $\mu \gg \mu_0$ moguće isključivo u Ω_j, dok će u Ω_p i Ω_u uvijek vrijediti da je $\mu = \mu_0$, gdje je μ_0 magnetska permeabilnost vakuuma.
Budući da će u nastavku uvijek vrijediti da je $\kappa = 0$ i $\mu = \mu_0$ u Ω_u i Ω_p, a kako bi se izbjeglo gomilanje znakova u indeksima simbola, u nastavku će slova κ i μ označavati električnu provodnost i magnetsku permeabilnost u Ω_j.

2.3.1 Lamelirana jezgra otvorenog tipa

Kako bi se postigao što veći iznos promjenjivog magnetskog toka u jezgri za što manju struju magnetiziranja poželjno je korištenje feromagnetskog materijala dobrih magnetskih svojstava. S druge strane, prema 2.3, promjenjivi magnetski tok u električki provodnom feromagnetskom materijalu inducira nepoželjne vrtložne struje velike gustoće. Jedan od ekonomičnih načina smanjenja gustoće vrtložnih struja je postupak lameliranja jezgre, kojim se ukupni volumen jezgre dijeli na veći broj međusobno električki izoliranih tankih limova (lamela), čime se kvare električna svojstva jezgre, ali i magnetska svojstva jezgre jer električna izolacija nije magnetski materijal. Optimalan postupak lameliranja temelji se na činjenici da su prema 2.3 magnetska indukcija i inducirane vrtložne struje prostorno ortogonalne pa je smjer lameliranja kojim se najjače kvare električna svojstva jezgre ujedno smjer u kojem se najmanje kvare magnetska svojstva jezgre. Drugim riječima, postavljanje vrlo tankog sloja električke izolacije okomito na smjer vektora $\vec{J}$, čime se maksimalno kvare električna svojstva jezgre, ujedno znači postavljanje sloja izolacije tangencijalno vektoru $\vec{B}$, čime se minimalno kvare magnetska svojstva jezgre. Prema tome, u nastavku će se razmatrati isključivo *lamelirani* tip jezgre koja dakle predstavlja jezgru sačinjenu od većeg broja vrlo tankih električki provodnih feromagnetskih limova (lamela) presvučenih višestruko, čak nekoliko desetaka puta, tanjim slojem električne izolacije, tako da su lamele međusobno električki izolirane. Na Slici 2.2 su prikazane lamelirane jezgre otvorenog tipa, ali s izolacijskim slojevima postavljenim isključivo između feromagnetskih limova budući da bi postavljanje izolacije prema zraku bilo suvišno sa stajališta matematičkog modela koji će ovdje biti opisan. Slika 2.2a prikazuje standardnu lameliranu jezgru otvorenog tipa koja je lamelirana uniformno te sadrži isključivo među-laminacijsku izolaciju. Kod jezgre otvorenog tipa pad magnetskog napona u zraku je dominantan, što znači da sama jezgra nema presudan utjecaj na putanju magnetskog toka u zraku. Posljedično, značajan udio magnetskog toka rasipa se u smjeru okomito na plohe lamela, inducirajući pritom vrtložne struje koje leže u ravnini lamele, tj. teku tangencijalno na sloj izolacije, te lako dosežu značajne iznose gustoće struje i gubitaka. Djelomično smanjenje njihovog iznosa tehnološki je jednostavno postići korištenjem višedijelne jezgre, jer je jezgra otvorenog tipa. Na Slici 2.2b prikazana je takva dvodijelna jezgra koja se sastoji od dva manja međusobno izolirana laminacijska paketa. Uvođenjem transverzalnog (među-paketnog) sloja izolacije sprječava se zbrajanje induciranih struja, tj. kvare se električna svojstva jezgre uz minimalan utjecaj na njena magnetska svoj-



(a) jednodijelna jezgra (b) dvodijelna jezgra

Slika 2.2: Simbolički prikaz lameliranih jezgara otvorenog tipa. Feromagnetski limovi su prikazani kao deblje ploče, dok tanje ploče predstavljaju izolacijske slojeve. Debljina izolacijskih slojeva je prenaglašena u odnosu na debljinu lamela zbog zornosti prikaza.

stva. Isplativost uvođenja dodatnih transverzalnih slojeva izolacije te njihovo pozicioniranje unutar jezgre nije jednostavno procijeniti. Pored određivanja konfiguracije, veličine, pozicije i orijentacije samih laminacijskih paketa višedijelne jezgre, ni izbor magnetskog materijala nije očigledan. Naime, dobra magnetska svojstava feromagnetskog materijala povlače za sobom veliku anizotropiju materijala, a s obzirom na značaj svih triju prostornih komponenata vektora $\vec{B}$ unutar otvorene jezgre zbog rasipanja magnetskog toka, konačna prosječna magnetska svojstva jezgre teško je procijeniti. Dakle, u slučaju jezgre otvorenog tipa, optimizacija dizajna lamelirane jezgre vrlo je složena i zahtijeva korištenje računalnog modeliranja.

2.3.2 Opis područja Ω_j

Područje Ω_j, uvedeno u poglavlju 2.2, dakle predstavlja matematičku apstrakciju lamelirane transformatorske jezgre otvorenog tipa. U ovom poglavlju će biti definirana sva relevantna područja unutar Ω_j radi njihovog lakšeg referenciranja u nastavku rada.

Primarno, područje Ω_j se sastoji od područja feromagnetskih lamela Ω_{fe} te područja električne izolacije Ω_{izol}, tj. vrijedi da je $\Omega_j = \Omega_{fe} \cup \Omega_{izol}$. Nadalje, za područje Ω_{fe} vrijedi da je $\Omega_{fe} = \Omega^1_{lam} \cup \ldots \cup \Omega^i_{lam} \cup \ldots \cup \Omega^{N_{lam}}_{lam}$, gdje je Ω^i_{lam} područje i-te lamele, a N_{lam} je broj lamela u jezgri. Budući da je lameliranu jezgru otvorenog tipa moguće jednostavno izvesti ne samo kao jedan laminacijski paket, nego od više vitkijih laminacijskih paketa (primjer na Slici 2.2b), za Ω_j onda u općem slučaju također vrijedi da je $\Omega_j = \Omega^1_{pak} \cup \ldots \cup \Omega^k_{pak} \cup \ldots \cup \Omega^M_{pak} \cup \Omega^{pak}_{izol}$, gdje Ω^k_{pak} označava k-ti laminacijski paket od ukupno M paketa, dok Ω^{pak}_{izol} označava područje među-

paketne izolacije. Za područje k-tog paketa Ω^k_{pak} vrijedi da je $\Omega^k_{pak} = \Omega^k_{fe} \cup \Omega^k_{izol}$, gdje je Ω^k_{fe} područje feromagnetskih lamela k-tog laminacijskog paketa koje se sastoji od N^k_{lam} lamela, dok je Ω^k_{izol} područje među-laminacijske električne izolacije k-tog laminacijskog paketa. Dakle, područje ukupne električne izolacije u jezgri Ω_{izol} sastoji se od područja među-paketne izolacije Ω^{pak}_{izol} i među-laminacijske izolacije Ω^{lam}_{izol}, odnosno $\Omega_{izol} = \Omega^{pak}_{izol} \cup \Omega^{lam}_{izol}$.

2.3.3 Značajke materijala u području Ω_j

Kao što se može vidjeti na Slici 2.2, Ω_j je heterogeno područje sa stajališta značajki materijala. U praktičnom slučaju lamelirane transformatorske jezgre heterogenost materijala je još više izražena budući da se unutar jezgre obično nalazi i po nekoliko stotina lamela, tj. debljina jedne lamele iznosi manje od 1% širine laminacijskog paketa. Radi zornosti prikaza, na Slici 2.2 su debljine lamela, a pogotovo debljine izolacijskih slojeva, uvećane u odnosu na dimenzije jezgre. Upravo zbog tog velikog omjera dimenzija jezgre naspram debljine lamela, izravno matematičko modeliranje svake pojedinačne lamele praktično nije moguće s obzirom na računalne i vremenske resurse, zbog čega će biti provedena homogenizacija značajki materijala u kasnijim poglavljima. Time će se izgubiti distinkcija između pojedinačnih lamela pa je korisno značajke materijala lamelirane jezgre izraziti u globalnom koordinatnom sustavu, na skali područja Ω_j. Posljedično, električna provodnost κ i magnetska permeabilnost μ su funkcije pozicije u Ω_j.
Za električnu provodnost κ u Ω_j vrijedi da je

$$\kappa(\vec{r}) = \begin{cases} \kappa_{fe}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \kappa_{izol}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{izol} \end{cases} \tag{2.14}$$

gdje je $\vec{r}$ radijvektor globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinatnog sustava, tj. $\vec{r} = x\vec{a}_\chi + y\vec{a}_\psi + z\vec{a}_\zeta$, a κ_{fe} je električna provodnost feromagnetskog materijala lamele za koju vrijedi da je $\kappa_{fe} \sim 10^6$ S/m, a κ_{izol} električna provodnost izolacije za koju vrijedi da je $\kappa_{izol} \approx 0$, ali $\kappa_{izol} \neq 0$, kako bi se izbjegli problemi s 0 u nazivniku. Ovdje će se radi konciznosti pretpostaviti da je κ_{fe} homogen unutar Ω_{fe}, tj. pretpostavlja se da su sve lamele izrađene od istog materijala, no korištenje različitog materijala za različite lamele ne zahtijeva posebne modifikacije buduće matematičke formulacije. Osim homogenosti, pretpostavit će se i linearnost κ_{fe} s obzirom na polja $\vec{E}$ i $\vec{J}$. Nelinearnost parametra κ_{fe} s obzirom na temperaturu materijala se zanemaruje; termička analiza je izvan fokusa ovog rada.
Analogno situaciji s κ, za magnetsku permeabilnost μ u Ω_j vrijedi da je

$$\mu(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_{fe}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \mu_0, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{izol} \end{cases} \tag{2.15}$$

gdje je μ_{fe} magnetska permeabilnost feromagnetskog materijala. Kao i u slučaju κ_{fe}, i za μ_{fe} se radi konciznosti matematičke formulacije pretpostavlja homogenost unutar Ω_{fe}. Za razliku od κ_{fe}, iznos μ_{fe} izravno i značajno ovisi o poljima $\vec{B}$ i $\vec{H}$. Međutim, fokus rada će ostati na linearnim značajkama materijala, iako je konačnu matematičku formulaciju moguće jednostavno prilagoditi nelinearnom slučaju.

Anizotropne značajke materijala

Lamele se obično izvode od orijentiranog lima koji se dobiva specijalnim postupkom hladnog valjanja i žarenja, kako bi se poboljšala magnetska svojstava materijala (i smanjili histerezni gubitci) u smjeru valjanja lamele. Pritom se povećava i κ_{fe} u smjeru valjanja, ali dolazi i do smanjenja κ_{fe} i μ_{fe} u poprečnom smjeru i smjeru okomito na plohe lamela. Prema tome, u lamelama je prisutna anizotropija za κ_{fe} i μ_{fe}, zbog čega opis značajki materijala korištenjem samo jednog skalara nije dovoljan, nego je potrebno koristiti više njih, koji će onda, smješteni u matrice, definirati tenzore $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$ i $\boldsymbol{\mu_{fe}}$. Iako se opet pretpostavlja da su sve lamele u jezgri izrađene od istog materijala, neće se pretpostaviti jednaka orijentacija svih lamela u jezgri. Primjerice, jedan od paketa u dvodijelnoj jezgri prikazanoj na slici 2.2b može biti zarotiran za 90° u odnosu na drugi paket. Prema tome, tenzor značajki materijala u globalnom koordinatnom sustavu nije konstantan u jezgri, no tenzor značajki materijala u lokalnom koordinatnom sustavu lamele jednak je za svaku lamelu u jezgri.

Ako se definira lokalni $(xyz)^i$-koordinatni sustav i-te lamele, tako da su y-smjer i z-smjer tangencijalni, a x-smjer okomit na plohu lamele, pri čemu se z-smjer podudara sa smjerom valjanja promatrane lamele, značajke materijala u toj lameli je moguće prikazati kao dijagonalne tenzore $\boldsymbol{\kappa^i_{lam}}$ i $\boldsymbol{\mu^i_{lam}}$. Prema tome, tenzor $\boldsymbol{\kappa^i_{lam}}$ glasi

$$\boldsymbol{\kappa^i_{lam}} = \begin{bmatrix} \kappa^i_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^i_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^i_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

odnosno kraće zapisano $\boldsymbol{\kappa^i_{lam}} = \text{diag}\begin{bmatrix} \kappa^i_{xx} & \kappa^i_{yy} & \kappa^i_{zz} \end{bmatrix}$. U lokalnom $(xyz)^i$-koordinatnom sustavu i-te lamele je $\vec{E} = E_x\vec{a}_x + E_y\vec{a}_y + E_z\vec{a}_z$ i $\vec{J} = J_x\vec{a}_x + J_y\vec{a}_y + J_z\vec{a}_z$ (gdje su $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ i $\vec{a}_z$ jedinični vektori u z, y i x smjeru), tj. vrijedi da je $J_x = \kappa^i_{xx}E_x$, $J_y = \kappa^i_{yy}E_y$ i $J_z = \kappa^i_{zz}E_z$, odnosno $\vec{J} = \boldsymbol{\kappa^i_{lam}}\vec{E}$. Kao što je već rečeno, radi konciznosti formulacije će se pretpostaviti jednake značajke materijala u svim lamelama u jezgri pa će se u nastavku izostaviti eksponent i u oznaci tenzora κ^i_{lam}, osim kad je potrebno naglasiti distinkciju između različitih lamela.

S druge strane, tenzor $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$ kojim se opisuje anizotropnost električne provodnosti u Ω_{fe} u globalnom $\chi\psi\zeta$-koordinatnom sustavu ovisi o $\vec{r} \in \Omega_{fe}$ jer različite lamele mogu biti različito orijentirane. Dodatno, ako osi lokalnog $(xyz)^i$-koordinantnog sustava i-te lamele nisu paralelne s osima

globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinantnog sustava, transformacija κ^i_{lam} tenzora iz $(xyz)^i$-koordinantnog sustava u $\chi\psi\zeta$-koordinantni sustav će rezultirati nedijagonalnim tenzorom. Prema tome, tenzor $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$ općenito nije dijagonalan, odnosno vrijedi da je

$$\boldsymbol{\kappa_{fe}}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \kappa_{\chi\chi} & \kappa_{\chi\psi} & \kappa_{\chi\zeta} \\ \kappa_{\psi\chi} & \kappa_{\psi\psi} & \kappa_{\psi\zeta} \\ \kappa_{\zeta\chi} & \kappa_{\zeta\psi} & \kappa_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

gdje su sve komponente ovisne o $\vec{r} \in \Omega_{fe}$. U nastavku rada će se osi globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinatnog sustav uvijek podudarati s osima svih lokalnih xyz-koordinatnih sustava, gdje će u pravilu ζ-os biti paralelna z-osi (smjer valjanja lima), dok će u ovisnosti o poziciji u Ω_{fe}, ψ-os biti paralelna ili sa y-osi ili sa x-osi, i isto tako χ-os paralelna s x-osi ili sa y-osi. Stoga će $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$ tenzor biti dijagonalni tenzor ovisan o $\vec{r} \in \Omega_{fe}$, tj. vrijedit će $\boldsymbol{\kappa_{fe}}(\vec{r}) = \text{diag}\begin{bmatrix} \kappa_{\chi\chi} & \kappa_{\psi\psi} & \kappa_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$.
Konačno, kao i električna provodnost κ, definirana za izotropni slučaj kao funkcija pozicije u Ω_j u izrazu 2.14, može se definirati i anizotropna električna provodnost cijele jezgre izražena kao tenzor

$$\boldsymbol{\kappa}(\vec{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\kappa_{fe}}(\vec{r}), & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \boldsymbol{\kappa_{izol}}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{izol} \end{cases} \tag{2.18}$$

gdje je, radi matematičke konzistentnosti, i skalar κ_{izol}, definiran u 2.14, potrebno izraziti kao tenzor drugog reda, tj. $\boldsymbol{\kappa_{izol}} = \text{diag}\begin{bmatrix} \kappa_{izol} & \kappa_{izol} & \kappa_{izol} \end{bmatrix}$.
Kako bi se u budućim matematičkim formulacijama izbjeglo postavljanje tenzora $\boldsymbol{\kappa}$ u nazivnik, definirat će se i njemu recipročan tenzor električne otpornosti $\boldsymbol{\rho}$.
Najprije, za tenzor električne otpornosti u Ω_{lam} vrijedi da je

$$\boldsymbol{\rho_{lam}} = \begin{bmatrix} 1/\kappa_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\kappa_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\kappa_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Zatim, tenzor $\boldsymbol{\rho}$ kojim se opisuje anizotropnost električne otpornosti u Ω_j glasi

$$\boldsymbol{\rho}(\vec{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\rho_{fe}}(\vec{r}), & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \boldsymbol{\rho_{izol}}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{izol} \end{cases} \tag{2.20}$$

gdje je $\boldsymbol{\rho_{fe}}(\vec{r}) = \text{diag}\begin{bmatrix} 1/\kappa_{\chi\chi} & 1/\kappa_{\psi\psi} & 1/\kappa_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{\rho_{izol}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 1/\kappa_{izol} & 1/\kappa_{izol} & 1/\kappa_{izol} \end{bmatrix}$. Ovdje se radi konciznosti pretpostavlja da je $\boldsymbol{\rho_{fe}}$ dijagonalni tenzor, no i opći oblik tenzora $\boldsymbol{\rho_{fe}}$ analogno slijedi iz 2.17.

Slično situaciji s κ_{fe}, i parametar μ_{fe} ima različit iznos u smjeru valjanja (z-smjer) u odnosu na poprečni smjer (y-smjer), a pogotovo u odnosu na smjer okomito na plohu lamele

(x-smjer) pa je potrebno definirati tenzor magnetske permeabilnosti. Dakle, u lokalnom $(xyz)^i$-koordinatnom sustavu neke i-te lamele, vrijedi da je $B_x = \mu^i_{xx} H_x$, $B_y = \mu^i_{yy} H_y$ i $B_z = \mu^i_{zz} H_z$, gdje je $\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$ i $\vec{H} = H_x\vec{a}_x + H_y\vec{a}_y + H_z\vec{a}_z$, pa tenzor $\boldsymbol{\mu^i_{lam}}$ glasi

$$\boldsymbol{\mu^i_{lam}} = \begin{bmatrix} \mu^i_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^i_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^i_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

odnosno kompaktnije zapisano $\boldsymbol{\mu^i_{lam}} = \text{diag}\begin{bmatrix} \mu^i_{xx} & \mu^i_{yy} & \mu^i_{zz} \end{bmatrix}$. Kao što je navedeno za slučaj tenzora $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$, u nastavku rada će uvijek biti zadovoljen uvjet paralelnosti između $(xyz)^i$-koordinatnog sustava bilo koje i-te lamele te globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinantnog sustava. Stoga će i $\boldsymbol{\mu_{fe}}$ biti dijagonalni tenzor ovisan o $\vec{r} \in \Omega_{fe}$, tj. $\boldsymbol{\mu_{fe}}(\vec{r}) = \text{diag}\begin{bmatrix} \mu_{\chi\chi} & \mu_{\psi\psi} & \mu_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$. Dakako, kada taj uvjet ne bi bio zadovoljen u nekoj i-toj lameli, transformacija tenzora $\boldsymbol{\mu^i_{lam}}$ u globalni $\chi\psi\zeta$-koordinantni sustav bi rezultirala nedijagonalnim tenzorom $\boldsymbol{\mu_{fe}}$ u području promatrane i-te lamele, analognim tenzoru $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$ u 2.17.

Konačno, magnetska permeabilnost u Ω_j je definirana kao složeni tenzor $\boldsymbol{\mu}$ ovisan o poziciji unutar Ω_j, tj. vrijedi da je

$$\boldsymbol{\mu}(\vec{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\mu_{fe}}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \boldsymbol{\mu_0}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{izol} \end{cases} \tag{2.22}$$

gdje je radi matematičke konzistentnosti bilo potrebno konstantu μ_0 izraziti kao tenzor drugog reda $\boldsymbol{\mu_0} = \text{diag}\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_0 & \mu_0 \end{bmatrix}$.

Dodatno, kako bi se u budućim matematičkim formulacijama izbjeglo postavljanje tenzora $\boldsymbol{\mu}$ u nazivnik, definirat će se i njemu recipročan tenzor magnetske reluktivnosti $\boldsymbol{\nu}$.

Najprije, za tenzor magnetske reluktivnosti u Ω_{lam} vrijedi da je

$$\boldsymbol{\nu_{lam}} = \begin{bmatrix} 1/\mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Zatim, za tenzor magnetske reluktivnosti $\boldsymbol{\nu}$ u Ω_j će onda će vrijediti da je

$$\boldsymbol{\nu}(\vec{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{\nu_{fe}}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_{fe} \\ \boldsymbol{\nu_0}, & \text{za } \vec{r} \in \Omega_0 \end{cases} \tag{2.24}$$

gdje je $\boldsymbol{\nu_{fe}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 1/\mu_{\chi\chi} & 1/\mu_{\psi\psi} & 1/\mu_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{\nu_0} = \text{diag}\begin{bmatrix} 1/\mu_0 & 1/\mu_0 & 1/\mu_0 \end{bmatrix}$.

Dakle, u svim budućim izrazima će se podrazumijevati da su značajke materijala anizotropne, tj. $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$ su tenzori u Ω_j, osim ako nije drugačije navedeno. Iako će u nastavku globalnog

$\chi\psi\zeta$-koordinatni sustav uvijek biti paralelan s lokalnim $(xyz)^i$-koordinatnim sustavom za svih N_{lam} lamela, tj. $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$ će biti dijagonalni tenzori, sve matematičke formulacije će biti kompatibilne i sa tenzorima $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$ izraženima nedijagonalnim matricama.

2.4 Jednadžbe polja prema područjima domene

Kao što je ranije navedeno u poglavlju 2.1.1, opravdanom primjenom kvazistatičke aproksimacije dobiva se da je $\partial_t \vec{D} = 0$ u 2.4 i $\partial_t \sigma = 0$ u 2.9 u cijeloj Ω, dok su 2.1 i 2.5 posljedično suvišne. Dakle, slobodni naboji (volumni naboji gustoće ρ ili plošni naboji gustoće σ) u nastavku su isključeni iz razmatranja, a slobodne struje uzbude, gustoće $\vec{J}_u$, teku isključivo u Ω_u. Radi konciznosti, za slobodne plošne struje $\vec{K}_u$ će se pretpostaviti da je $\vec{K}_u = 0$ u cijeloj Ω. Prema tome, umjesto 2.1-2.9, u nastavku će se koristiti reducirani i prilagođeni skup jednadžbi polja. Za razliku od Ω_j, u područjima Ω_p i Ω_u isključivo vrijedi $\kappa = 0$, pa je skup potrebnih jednadžbi u Ω_j različit u odnosu na skup potrebnih jednadžbi u Ω_p i Ω_u.

2.4.1 Jednadžbe polja u području Ω_u i Ω_p

Budući da je $\kappa = 0$ u Ω_p i Ω_u, slijedi da je $\vec{J} = 0$, odnosno vrtložne struje se ne induciraju. Prema tome, relevantan skup jednadžbi u Ω_p i Ω_u glasi

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_u \tag{2.25}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.26}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{2.27}$$

gdje za struju izvora $\vec{J}_u$ vrijedi da je $\vec{J}_u = 0$ u Ω_p. Prethodni skup jednadžbi dakle ne sadrži Faradayevu jednadžbu, pa ni vektorsko polje $\vec{E}$ nije izravno definirano, iako fizikalno postoji. Budući da $\vec{E}$ u Ω_p i Ω_u izravno slijedi iz $\vec{B}$, prema Faradayevoj jednadžbi, suvišno ga je računati jer nema nikakav sekundarni efekt na polja u Ω_j.
Također, za struju izvora smije biti zadano samo solenoidalno polje, odnosno vrijedi da je

$$\nabla \cdot \vec{J}_u = 0 \tag{2.28}$$

Kao što je ranije navedeno, za magnetsku permeabilnost će se radi konciznosti pretpostaviti da je $\mu = \mu_0$ u Ω_p i Ω_u, gdje je μ_0 permeabilnost vakuuma. Također, relevantni granični uvjeti u Ω_p i Ω_u glase

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{2.29}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \tag{2.30}$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{J}_{u2} - \vec{J}_{u1}) = 0 \tag{2.31}$$

gdje za struju izvora vrijedi da je $\vec{J}_u = 0$ u Ω_p. Područja Ω_p i Ω_u se u pravilu modeliraju kao homogena područja pa će skup jednadžbi 2.29-2.31 morati vrijediti samo na granici Γ_{pu} između Ω_p i Ω_u te na Γ_{jp} između Ω_p i Ω_j.
Dodatno, područjima Ω_p i Ω_u pripada dovoljno daleka rubna ploha Γ_B s rubnim vrijednostima 2.10 te rubne plohe (plohe simetrije na Slici 2.1) Γ_{Ep}, Γ_{Eu}, Γ_{Hp}, Γ_{Hu}, Γ_{Bp} s pripadnim rubnim vrijednostima 2.11, 2.12 i 2.13. Budući da je $\kappa = 0$ u Ω_p i Ω_u, a $\vec{E}$ se izostavlja iz proračuna, na rubnoj plohi Γ_{Ep} je dovoljno propisati samo rubni uvjet 2.11b, odnosno

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.32}$$

dok na Γ_{Eu} postoji i dodatno ograničenje na vektor gustoće uzbudne struje, tj. na Γ_{Eu} se zadaje

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.33a}$$

$$\vec{J}_u \times \vec{n} = 0, \tag{2.33b}$$

gdje dakle 2.33b nije rubni uvjet na nepoznanicu, nego predstavlja ograničenje na oblik zadanog uzbudnog polja $\vec{J}_u$. Ponovno, budući da je $\vec{J} = 0$ u Ω_p, na Γ_{Bp} je (umjesto 2.13) dovoljno samo zadati uvjet

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.34}$$

Kako je $\vec{J} = 0$ u Ω_p i Ω_u (uz $\vec{J}_u \neq 0$ u Ω_u), na plohi Γ_{Hp} je (umjesto 2.12) dovoljno zadati

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \tag{2.35}$$

jer je 2.12b automatski zadovoljen, dok je slično tome na plohi Γ_{Hu} potrebno zadati

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \tag{2.36a}$$

$$\vec{J}_u \cdot \vec{n} = 0, \tag{2.36b}$$

gdje uvjet 2.36b na $\vec{J}_u$ nije rubni uvjet na nepoznanicu, nego predstavlja ograničenje na oblik zadanog uzbudnog polja $\vec{J}_u$.

2.4.2 Jednadžbe polja u području Ω_j

Uzimajući u obzir razmatranja s početka poglavlja 2.4, relevantan skup jednadžbi u području Ω_j, za koji je vezan globalni pravokutni $\chi\psi\zeta$-koordinantni sustav, glasi

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \tag{2.37}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{2.38}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.39}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{2.40}$$

Dodatno, polja $\vec{B}$ i $\vec{H}$ povezana su preko značajki materijala (relacije građe), tj. vrijedi da je

$$\vec{B} = \boldsymbol{\mu}\vec{H} \tag{2.41a}$$

$$\vec{H} = \boldsymbol{\nu}\vec{B}, \tag{2.41b}$$

gdje su magnetska permeabilnost $\boldsymbol{\mu}$ i magnetska reluktivnost $\boldsymbol{\nu}$ definirani u 2.22 i 2.24. Također, veza između polja $\vec{E}$ i $\vec{J}$ glasi

$$\vec{J} = \boldsymbol{\kappa}\vec{E} \tag{2.42a}$$

$$\vec{E} = \boldsymbol{\rho}\vec{J}, \tag{2.42b}$$

gdje su $\boldsymbol{\kappa}$ i $\boldsymbol{\rho}$ definirani u 2.18 i 2.20. Kao što je objašnjeno u 2.3.3, Ω_j predstavlja vrlo heterogeno područje, odnosno značajke materijala $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\kappa}$ i $\boldsymbol{\rho}$ ovise o poziciji unutar Ω_j.
Budući da je $\vec{J}_u = 0$ u Ω_j, 2.4 prelazi u 2.38. Jednadžba 2.40 je eksplicitno navedena radi lakšeg referenciranja, iako je implicitno sadržana u 2.38, tj. slijede iz 2.38 primjenom operatora divergencije. Također, relevantni granični uvjeti u Ω_j su

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{2.43}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{2.44}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \tag{2.45}$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \tag{2.46}$$

gdje $\vec{n}_{12}$ predstavlja vektor normale na graničnu plohu između dvaju različitih materijala unutar jezgre, usmjeren iz materijala 1 u materijal 2. Navedeni granični uvjeti 2.43-2.46 moraju vrijediti na svakoj granici između Ω_{fe}, tj. isprekidanog područja feromagnetskih lamela, i Ω_{izol}, tj. područja izolacije. Osim toga, 2.43-2.46 moraju vrijediti i na granici Γ_{jp}.
Također, području Ω_j pripadaju i rubne plohe (plohe simetrije) Γ_{E_j}, Γ_{H_j} i Γ_{B_j} s pripadnim rubnim vrijednostima 2.11, 2.12 i 2.13.

Poglavlje 3

Jaka formulacija

U prethodnom poglavlju su definirane problemske jednadžbe, definirana je omeđena problemska domena s pripadnim distinktnim područjima, granice među područjima, te značajke materijala prema područjima. Dakle, definirani problem pripada klasi problema opisanih diferencijalnim jednadžbama s rubnim vrijednostima. S obzirom na složenost geometrije, heterogenost i anizotropiju problemske domene, problem je pogodno riješiti primjenom metode konačnih elemenata. Kako bi se definirala Galerkinova slaba formulacija, najprije je potrebno definirati prikladnu jaku formulaciju problema. Dakako, konačni izrazi iz prethodnog poglavlja već predstavljaju jaku formulaciju definiranog problema u kojoj je, za zadanu uzbudnu struju, značajke materijala te rubne uvjete, potrebno odrediti nepoznata vektorska polja $\vec{E}$, $\vec{J}$, $\vec{B}$ i $\vec{H}$. Međutim, takva formulacija nije povoljna za računalno modeliranje u vidu metode konačnih elemenata, o kojoj će biti više riječi u sljedećem poglavlju, odnosno moguće je definirati ekonomičnije i numerički stabilnije formulacije s manjim brojem nepoznatih problemskih varijabli i posljedično manjim brojem stupnjeva slobode.

Usporedbu formulacija i izbor konačne formulacije potrebno je provesti s obzirom na svojstva njihovih numeričkih simulacija primjenom metode konačnih elemenata. Ovisno o tipu problema, različite formulacije su favorizirane u različitim slučajevima modeliranja problema vrtložnih struja. $\vec{E}$-formulacija i $\vec{H}$-formulacija imaju prednost u vidu manjeg broja stupnjeva slobode, ali nisu prikladne za modeliranju problema koji uključuju različite materijale unutar problemske domene zbog loše konvergencije rješenja na granicama između različitih materijala. Problemi vezani uz prethodne formulacije donekle se zaobilaze korištenjem kombinacije električnih ($\vec{T}$ ili φ) i magnetskih ($\vec{A}$ ili φ_m) potencijala kao problemskih varijabli, gdje se obično koristi kombinacija jednog vektorskog i jednog skalarnog potencijala. Iako se korištenjem dodatnog skalarnog polja povećava broj stupnjeva slobode, konvergencija numeričkih simulacija je stabilnija i brža [28].

Kao što je opisano u prethodnom poglavlju, lamelirana transformatorska jezgra otvorenog tipa predstavlja vrlo heterogenu problemsku domenu, pogotovo u slučaju višedijelne jezgre gdje vrlo

tanki sloj među-paketne izolacije znatno kvari brzinu konvergencije, ponajviše zbog zadovoljenja graničnog uvjeta 2.46. Korištenjem strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}$ moguće je potpuno zaobići taj problem, što će biti pokazano u sljedećim poglavljima. Osim toga, u slučaju jezgre otvorenog tipa sav magnetski tok iz jezgre prelazi granicu jezgra/zrak, tj. graničnu plohu Γ_{jp}, pa pogreška u zadovoljenju graničnog uvjeta 2.43 ima značajan utjecaj na konačni izračun vrtložnih struja. Stoga je poželjno korištenje magnetskog vektorskog potencijala $\vec{A}$ kojim se može egzaktno osigurati zadovoljenje graničnog uvjeta 2.43. Prema tome, u nastavku rada će se modeliranju vrtložnih struja pristupiti korištenjem formulacije temeljene na $\vec{A}$ i $\vec{T}$ potencijalima. Dakako, korištenjem i $\vec{A}$ i $\vec{T}$ potencijala značajno se povećava broj stupnjeva slobode što je vrlo nepovoljno iz perspektive memorijskih resursa te vremenskog trajanja simulacije. Kako bi se riješili navedeni problemi, ali uz zadržavanje benefita koje nosi korištenje $\vec{A}$ i $\vec{T}$ nepoznanica, moguće je provesti postupak eliminacija dijela redundantnih stupnjeva slobode čime se konvergencija simulacije temeljene na $\vec{A}$ i $\vec{T}$ nepoznanicama značajno poboljšava. U kasnijim poglavljima eliminacija dijela redundantnih stupnjeva slobode će se implicitno provesti u kontekstu postupka homogenizacije. Ovdje će se $\vec{A}$ i $\vec{T}$ nepoznanice aproksimirati bridnim baznim funkcijama koje će biti detaljno opisane u sljedećem poglavlju. Korištenjem bridnih baznih funkcija dopušta se diskontinuitet normalne komponente vektorskog potencijala na granici između različitih materijala. Ovo svojstvo je vrlo povoljno kako bi se omogućili i potrebni diskontinuiteti odgovarajućih vektorskih komponenti elektromagnetskih polja na granicama područja s različitim značajkama materijala, a pogotovo u vrhovima jezgre [29].

3.1 Jaka $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija

U ovom poglavlju će se jednadžbe problema vrtložnih struja definiranog u poglavlju 2 izraziti u obliku $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulacije koja predstavlja spregnutu formulaciju jednadžbi iz područja Ω_j navedenih u 2.4.2, s jednadžbama iz područja Ω_p i Ω_u navedenih u 2.4.1, što je i naznačeno crticom između $\vec{A}, \vec{T}$ i $\vec{A}$ u izrazu $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$. Dakle, "$\vec{A}, \vec{T}$" označava nepoznanice iz područja Ω_j, dok "$\vec{A}$" označava nepoznanicu koja se koristi u područjima Ω_p i Ω_u.

3.1.1 Formulacija u Ω_p i Ω_u

Prema jednadžbama 2.26 i 2.28, polje magnetske indukcije $\vec{B}$ i polje gustoće uzbudne struje $\vec{J}_u$ su solenoidalna pa ih se može izraziti preko vektorskih potencijala

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3.1}$$

$$\vec{J}_u = \nabla \times \vec{T}_u \tag{3.2}$$

gdje $\vec{A}$ predstavlja magnetski vektorski potencijal, a $\vec{T}_u$ predstavlja uzbudni strujni vektorski potencijal. Uvrštavanjem 3.1 i 3.2 zajedno s 2.27 u jednadžbu 2.25 slijedi konačna prostorna jednadžba formulacije u Ω_p i Ω_u

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{T}_u \tag{3.3}$$

gdje je $\nabla \times \vec{T}_u = 0$ u Ω_p. Jednadžba 3.3 dakle uključuje informacije od sve četiri prostorne jednadžbe 2.25-2.28.

Preostaje još formulirati jednadžbe na pripadnim graničnim i rubnim plohama korištenjem uvedenih vektorskih potencijala. Budući da će se područja Ω_p i Ω_u u nastavku modelirati isključivo kao homogena područja jednakih značajki materijala, granični uvjeti unutar Ω_p i Ω_u te također granični uvjeti na graničnoj plohi Γ_{pu} između Ω_p i Ω_u biti će automatski zadovoljeni, osim graničnog uvjeta 2.31 koji je potrebno uvažiti na Γ_{pu}. Naime, zbog 2.31 i $\vec{J}_u = 0$ u Ω_p, slijedi da je $\vec{J}_u \cdot \vec{n}_{pu} = 0$ u Ω_u na granici Γ_{pu}. Međutim, korištenje uzbudnog strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}_u$ umjesto $\vec{J}_u$ ima dodatne implikacije budući da u području Ω_p jednakost $\nabla \times \vec{T}_u = 0$ ne zahtijeva da je $\vec{T}_u = 0$, nego samo da je $\vec{T}_u = \nabla f$ gdje je f neko skalarno polje različito od nule. Dakle, uvrštavanjem 3.2 u 2.31 dobiva se

$$\vec{n}_{pu} \cdot (\nabla \times \vec{T}_u(2) - \nabla \times \vec{T}_u(1)) = \nabla \cdot (\vec{n}_{pu} \times \vec{T}_u(2) - \vec{n}_{pu} \times \vec{T}_u(1)) = 0\,,$$

odakle slijedi da je

$$\vec{n}_{pu} \times \vec{T}_u(2) = \vec{n}_{pu} \times \vec{T}_u(1)\,,$$

gdje je $\vec{T}_u(1)$ iznos $\vec{T}_u$ na Γ_{pu} na strani Ω_p dok je $\vec{T}_u(2)$ iznos $\vec{T}_u$ na Γ_{pu} na strani područja Ω_u. Budući da u općem slučaju $\vec{T}_u(1) \neq 0$ na Γ_{pu}, slijedi da će i vektor $\vec{T}_u$ općenito biti različit od nule u Ω_p (i u Ω_j), tj. vrijedi da je

$$\begin{aligned} &\nabla \times \vec{T}_u = 0 \\ &\vec{T}_u \neq 0 \quad \text{u dijelu područja } \Omega_p \\ &\vec{T}_u \times \vec{n} \text{ je kontinuiran na } \Gamma_{pu} \text{ i } \Gamma_{jp} \end{aligned} \tag{3.4}$$

što nije slučaj s vektorom $\vec{J}_u$.

Preostaje još odrediti izraze za rubne vrijednosti za $\vec{A}$ i $\vec{T}_u$ na rubnim plohama područja Ω_p i Ω_u. Uvrštavanjem 3.1 u prvu jednakost rubnog uvjeta za plohu Γ_B (izraz 2.10a) dobiva se izraz $\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$, odnosno korištenjem pravila $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$ iz vektorske analize slijedi $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{n}) = 0$ pa na dovoljno dalekoj rubnoj plohi Γ_B vrijedi da je

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0 \tag{3.5}$$

Uvrštavanjem 3.1 u 2.34 i 2.32 dobiva se izraz za rubne vrijednosti plohe Γ_{Bp} i Γ_{Ep}, tj. na Γ_{Bp} i Γ_{Ep} je (analogno prethodnom) potrebno zadati

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0 \tag{3.6}$$

Na plohi Γ_{Eu} je prema 2.33 potrebno zadati

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0 \tag{3.7a}$$

$$(\nabla \times \vec{T}_u) \times \vec{n} = 0, \tag{3.7b}$$

gdje uvjet 3.7b nije pravi granični uvjet na problemsku nepoznanicu nego ukazuje na nužnost zadavanja uzbudne struje okomito na plohu simetrije Γ_{Eu} (inače ta ploha ne bi bila ploha simetrije Γ_{Eu}).
Ponovno, uvrštavanjem 3.1 u 2.35 za rubnu plohu Γ_{Hp} dobiva se rubni uvjet na Γ_{Hp} koji glasi

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = 0 \tag{3.8}$$

Slično tome, uvrštavanjem 3.1 i 3.2 izraza u 2.36 za rubnu plohu Γ_{Hu} dobiva se rubni uvjet

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = 0 \tag{3.9a}$$

$$\vec{T}_u \times \vec{n} = 0, \tag{3.9b}$$

gdje uvjet 3.9b nije pravi granični uvjet na problemsku nepoznanicu nego ukazuje na zabranu zadavanja uzbudne struje koja bi imala i komponentu okomitu na plohu simetrije Γ_{Hu}.

3.1.2 Formulacija u Ω_j

Prema jednadžbama 2.39 i 2.40, polje magnetske indukcije $\vec{B}$ i polje gustoće struje $\vec{J}$ su solenoidalna polja pa ih se može izraziti preko vektorskih polja

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3.10}$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T} \tag{3.11}$$

gdje $\vec{A}$ predstavlja magnetski vektorski potencijal, a $\vec{T}$ predstavlja strujni vektorski potencijal. Uvrštavanjem 3.10 i 3.11 zajedno s 2.42b u jednadžbu 2.37 slijedi

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho} \nabla \times \vec{T} + \partial_t \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{3.12}$$

Prethodna jednadžba predstavlja prvu prostornu jednadžbu jakog oblika $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije u području Ω_j. S obzirom na to da je Ω_j heterogeno područje, tj. $\boldsymbol{\rho}$ nije kontinuirana funkcija nego po dijelovima kontinuirana funkcija za koju vrijedi složeni izraz 2.20, jednadžbu 3.12 je potrebno dalje rastaviti na dvije jednadžbe

$$\nabla\times\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}+\partial_t\nabla\times\vec{A}=0 \quad \text{u } \Omega_{fe} \tag{3.13a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}+\partial_t\nabla\times\vec{A}=0 \quad \text{u } \Omega_{izol} \tag{3.13b}$$

Druga prostorna jednadžba jakog oblika $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije u Ω_j dobiva se uvrštavanjem 3.10 i 3.11 zajedno s 2.41b u jednadžbu 2.38, iz čega slijedi

$$\nabla\times\boldsymbol{\nu}\nabla\times\vec{A}-\nabla\times\vec{T}=\nabla\times\vec{T}_u \tag{3.14}$$

gdje je, zbog graničnog uvjeta na $\vec{T}_u$, prema izrazu 3.4 s desne strane dodan član $\nabla\times\vec{T}_u$ za koji će dakle uvijek vrijediti da je $\nabla\times\vec{T}_u=0$ u Ω_j pa njegovo dodavanje ne utječe na 3.14. Kao i u slučaju jednadžbe 3.12, i jednadžbu 3.14 je potrebno izraziti kao složenu jednadžbu s obzirom na to da je tenzor $\boldsymbol{\nu}$ prema izrazu 2.24 definiran kao složeni tenzor koji skokovito mijenja vrijednost u različitim dijelovima područja Ω_j, tj. vrijedi da je

$$\nabla\times\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}-\nabla\times\vec{T}=\nabla\times\vec{T}_u \quad \text{u } \Omega_{fe} \tag{3.15a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\nu_0}\nabla\times\vec{A}-\nabla\times\vec{T}=\nabla\times\vec{T}_u \quad \text{u } \Omega_{izol} \tag{3.15b}$$

Uvođenjem aproksimacija vezanih za vrtložne struje u lameliranoj jezgri u poglavljima 6 i 7, ostvarit će se preduvjeti za provedbu postupka homogenizacije značajki materijala u području Ω_j, čime će se omogućiti izravno korištenje jednadžbi 3.12 i 3.14 bez rastavljanja na Ω_{fe} i Ω_{izol} dio.

Preostaje još formulirati rubne uvjete te zatim granične uvjete korištenjem uvedenih vektorskih potencijala $\vec{A}$ i $\vec{T}$. Uvrštavanjem izraza 3.10 i 3.11 u 2.13, rubni uvjeti za $\vec{A}$ i $\vec{T}$ na rubnoj plohi Γ_{Bj} glase

$$\vec{A}\times\vec{n}=0 \tag{3.16a}$$

$$\vec{T}\times\vec{n}=0, \tag{3.16b}$$

gdje se korištenjem pravila iz vektorske analize iz $\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{A}=0$ dobiva $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{n})=0$, odnosno iz izraza $\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{T}=0$ slijedi $\nabla\cdot(\vec{T}\times\vec{n})=0$. Slično tome, rubni uvjeti za uvedene potencijale

na plohi Γ_{Ej} glase

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0, \tag{3.17a}$$

$$(\boldsymbol{\rho} \nabla \times \vec{T}) \times \vec{n} = 0 \tag{3.17b}$$

gdje se uvjet 3.17b dobiva kombinacijom 3.11, 2.42 i 2.11a, dok se uvjet 3.17a dobiva istim postupkom kao i u slučaju uvjeta 3.16a. Analogno izvođenju prethodnih rubnih uvjeta, rubni uvjeti na plohi Γ_{Hj} glase

$$(\boldsymbol{\nu} \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} = 0 \tag{3.18a}$$

$$\vec{T} \times \vec{n} = 0, \tag{3.18b}$$

Budući da je Ω_j heterogeno područje, granične uvjete 2.43-2.46 je potrebno zadovoljiti na svakoj granici između materijala u Ω_{fe} i materijala u Ω_{izol}, tj. između područja feromagentskih lamela te područja električne izolacije, koju će se ovdje jednokratno označiti kao Γ_g. Izraženi preko potencijala $\vec{A}$ i $\vec{T}$, granični uvjeti na Γ_g glase

$$\vec{A}(2) \times \vec{n}_g = \vec{A}(1) \times \vec{n}_g \tag{3.19a}$$

$$(\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}(2)) \times \vec{n}_g = (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T}(1)) \times \vec{n}_g \tag{3.19b}$$

$$(\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}(2)) \times \vec{n}_g = (\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}(1)) \times \vec{n}_g \tag{3.19c}$$

$$\vec{T}(2) \times \vec{n}_g = \vec{T}(1) \times \vec{n}_g \tag{3.19d}$$

gdje $\vec{n}_g$ predstavlja vektor normale na graničnu plohu Γ_g usmjeren iz Ω_{izol} prema Ω_{fe}. Vektori $\vec{A}(1)$ i $\vec{T}(1)$ označavaju $\vec{A}$ i $\vec{T}$ na granici Γ_g, na strani koja pripada području izolacije, dok vektori $\vec{A}(2)$ i $\vec{T}(2)$ označavaju $\vec{A}$ i $\vec{T}$ na granici Γ_g, na strani koja pripada području feromagnetskog materijala.

Slično prethodnom, granični uvjeti na plohi Γ_{jp} izraženi preko $\vec{A}$ i $\vec{T}$ glase

$$\vec{A}(2) \times \vec{n}_{jp} = \vec{A}(1) \times \vec{n}_{jp} \tag{3.20a}$$

$$(\boldsymbol{\nu} \nabla \times \vec{A}(2)) \times \vec{n}_{jp} = (\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{A}(1)) \times \vec{n}_{jp} \tag{3.20b}$$

$$\vec{T} \times \vec{n}_{jp} = 0 \tag{3.20c}$$

gdje $\vec{n}_{jp}$ predstavlja vektor normale na graničnu plohu Γ_{jp} usmjeren iz Ω_j prema Ω_p. Vektor $\vec{A}(1)$ označava $\vec{A}$ na granici Γ_{jp} na strani Ω_j, dok vektor $\vec{A}(2)$ označava $\vec{A}$ na granici Γ_{jp}, na strani od Ω_p. Vektor $\vec{T}$ postoji samo u području Ω_j, odnosno $\vec{T} = 0$ u Ω_p, pa se stoga i $\vec{T}$ u 3.20c nalazi u Ω_j.

Poglavlje 4

Aproksimacija konačnim elementima

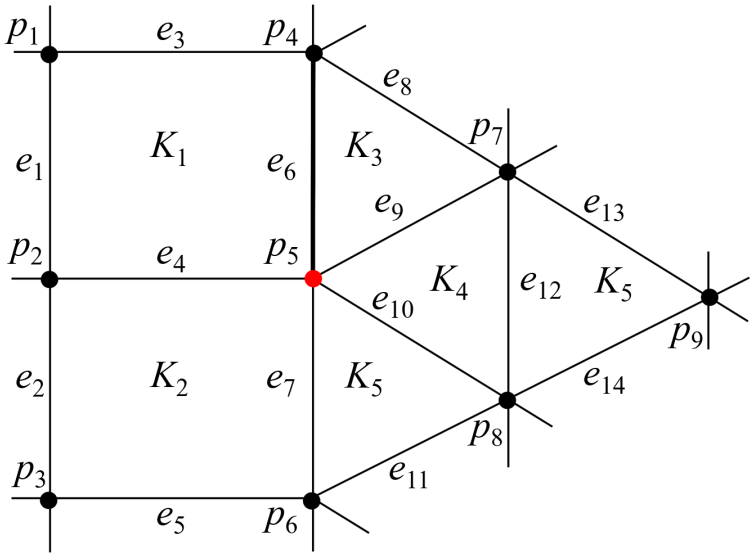
Rješenja za nepoznate vektorske potencijale $\vec{A}$ i $\vec{T}$ u jakoj $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulaciji postavljenoj u poglavlju 3.1 tražit će se numerički, rješavanjem slabe formulacije pomoću metode konačnih elemenata. Neće se izvoditi beskonačnodimenzionalni slabi oblik $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije nego će se odmah prijeći na izvođenje Galerkinovog slabog oblika $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije (konačnodimenzionalna projekcija) metodom težinskih ostataka [27]. Prema tome, konačnodimenzionalna rješenja $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ za vektorske potencijale $\vec{A}$ i $\vec{T}$, gdje vrijedi da je $\vec{A}\approx\vec{A}_h$ i $\vec{T}\approx\vec{T}_h$, tražit će se u prostorima konačnih elemenata $U_h(\Omega)$ i $V_h(\Omega_j)$, tj. $\vec{A}_h\in U_h$ i $\vec{T}_h\in V_h$, gdje indeks h označava parametar gustoće diskretizacije domene Ω.

Dakle, najprije je potrebno diskretizirati (podijeliti) Ω na N poddomena (konačnih elemenata) K_m, čime se Ω nadomješta mrežom konačnih elemenata $M_h(\Omega)$, to jest

$$\begin{aligned} M_h(\Omega) &= \bigcup_{i=1}^{N} K_m\,, \text{ gdje je } \operatorname{diam}(K_m)\leq h \\ K_l\cap K_m &= \begin{cases} C, & K_l \text{ i } K_m \text{ susjedni} \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases} \qquad \forall l\neq m \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdje je m-ti element K_m zatvoreni poliedar, a C može predstavljati zajedničku stranicu, brid ili vrh [30]. Prema tome, vrhovi i bridovi konačnih elemenata u $M_h(\Omega)$ konstruiraju povezani trodimenzionalni graf u kojem vrhovi konačnih elemenata predstavljaju čvorove grafa, a bridovi predstavljaju grane grafa. Skup svih čvorova u $M_h(\Omega)$ označit će se s P_Ω, a skup svih bridova u $M_h(\Omega)$ označit će se s E_Ω. Kao i u slučaju konačnih elemenata, svakom čvoru u P_Ω i svakom bridu u E_Ω također je potrebno dodijeliti jedinstveni globalni indeks. Na slici 4.1 prikazan je dio mreže konačnih elemenata s naznačenim globalnim indeksima konačnih elemenata K_m, te njima pripadnih čvorova p_i i bridova e_i.

Nakon što je provedena diskretizacija domene na konačne elemente, preostaje definirati bazne funkcije iz prostora U_h i V_h kojima će se aproksimirati $\vec{A}$ i $\vec{T}$, te standardne čvorne bazne funkcije



Slika 4.1: Primjer dijela mreže konačnih elemenata. Radi jasnoće prikaza za primjer je uzeta mreža dvodimenzionalnih konačnih elemenata. Čvor p_5 i brid e_6 dodatno su istaknuti radi njihovog lakšeg referenciranja u nastavku

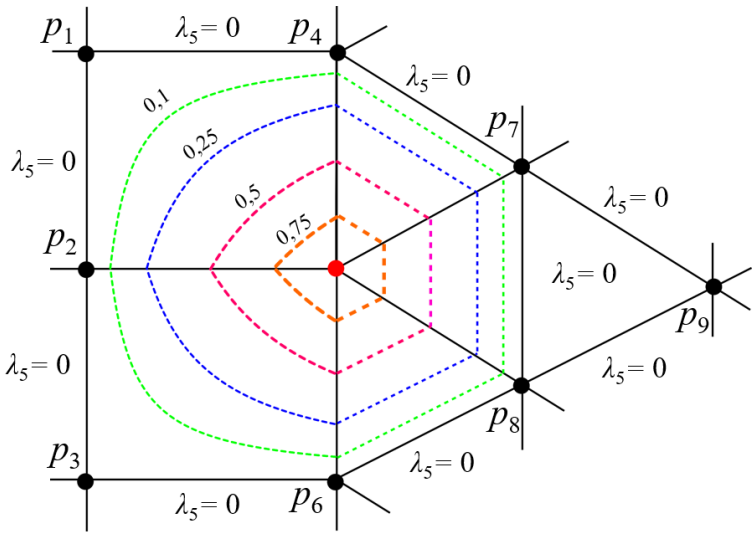
kojima će se interpolirati pobuda $\vec{T}_u$. Dakle, svakom čvoru $p_i \in P_\Omega$ pridružit će se jedinstvena, tzv. čvorna bazna funkcija najnižeg mogućeg polinomskog stupnja definirana u skladu s mrežom konačnih elemenata, što će biti detaljnije opisane u nastavku. S druge strane, aproksimacija za nepoznanice $\vec{A}$ i $\vec{T}$ ostvarit će se korištenjem tzv. bridnih baznih funkcija iz U_h i V_h, koje će biti opisane u odjeljku 4.2. Fokus će najprije biti na čvornim baznim funkcijama, budući da će se na osnovu njih kasnije izvesti bazne funkcije iz prostora U_h i V_h.

4.1 Čvorne bazne funkcije

Za čvorne bazne funkcije će se koristiti skalarne polinomne funkcije najnižeg stupnja koje će pripadati konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $W_h \subset H^1(\Omega)$ definiranom s obzirom na mrežu konačnih elemenata $M_h(\Omega)$, gdje je $H^1(\Omega)$ Hilbertov prostor kontinuiranih funkcija nad problemskom domenom Ω, odnosno

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L_2(\Omega) : \nabla\varphi \in L_2(\Omega)\} \tag{4.2}$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, skalarna funkcija φ je opći element od $H^1(\Omega)$, a $L_2(\Omega)$ predstavlja vektorski prostor kvadratno-integrabilnih funkcija [31], [32]. Čvorne bazne funkcija nad trodimenzionalnim konačnim elementima analogne su čvornim baznim funkcijama nad dvodimenzionalnim konačnim elementima. Stoga će se radi jednostavnosti u nastavku opisati samo slučaj dvodimenzionalnih konačnih elemenata kao na slici 4.1.



Slika 4.2: Primjer čvorne bazne funkcije λ_5 pridružene čvoru p_5 sa slike 4.1. Crtkane linije predstavljaju konture konstantnog (naznačenog) iznosa bazne funkcije λ_5. Potrebno je uočiti da je $\lambda_5 = 0$ u svim ostalim konačnim elementima osim u onima kojima pripada čvor p_5

Jedinstvena čvorna bazna funkcija $\lambda_i \in W_h$ pridružena je svakom čvoru $p_i \in P_\Omega$ i vrijedi da je

$$\lambda_i(p_j) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } p_j = p_i \\ 0, & \text{ako je } p_j \neq p_i \end{cases} \quad \forall p_i, p_j \in P_\Omega \tag{4.3}$$

Pritom za funkciju λ_i vrijedi da je jednaka nuli nad svim konačnim elementima, osim za konačne elemente kojima pripada čvor p_i, odnosno

$$\begin{aligned} &\lambda_i(K_m) \neq 0 \text{ ako je } p_i \text{ vrh od } K_m \\ &\lambda_i(K_m) = 0 \text{ ako } p_i \text{ nije vrh od } K_m \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dakle, bazna funkcija $\lambda_i \in W_h$ mora biti kontinuirana, barem po dijelovima glatka, skalarna funkcija, jer je $W_h \subset H^1$, takva da zadovoljava uvjete 4.3 i 4.4. Prema tome, aproksimacija $\varphi \approx \varphi_h$ nekog skalarnog polja φ baznim funkcijama $\lambda_i \in W_h$ nad domenom Ω glasi

$$\varphi_h = \sum_i^{N_P} \varphi_h^i \lambda_i \tag{4.5}$$

gdje je φ_h^i iznos skalarnog polja φ_h u i-tom čvoru, tj. $\varphi_h^i = \varphi_h(p_i)$, a λ_i bazna funkcija pridružena čvoru p_i, dok broj N_P predstavlja ukupan broj čvorova u M_h, odnosno u skupu P_Ω.

Na slici 4.2 prikazan je konkretan primjer čvorne bazne funkcije λ_5 pridružene čvoru p_5, označenom na slici 4.1 [33], [34]. Kao što je prikazano na slici 4.1, p_5 pripada konačnim elementima K_1, K_2, K_3 i K_4 pa prema 4.4 vrijedi da je $\lambda_5(K_m) = 0 \ \forall K_m \in M_h \backslash \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, odnosno λ_5 je skalarna funkcija različita od 0 u konačnim elementima K_1, K_2, K_3 i K_4, kao što

se i vidi na slici 4.2. Također, za baznu funkciju λ_5 sa slike 4.2 vrijedi da je $\lambda_5(p_5) = 1$, te $\lambda_5(p_j) = 0,\ \forall p_j \in P_\Omega \backslash \{p_5\}$, čime je zadovoljen uvjet 4.3. Osim toga, vrijedi da je $\lambda_5(e_j) = 0,\ \forall e_j \in E_\Omega \backslash \{e_4, e_6, e_7, e_9, e_{10}\}$. Na slici 4.2 su crtkanim linijama prikazane konture na kojima λ_5 poprima konstantnu naznačenu vrijednost. Zbog različitog tipa, pozicije i oblika konačnih elemenata K_1, K_2, K_3 i K_4, u svakom od njih λ_5 ima drugačiju funkcionalnu ovisnost o koordinatama pozicije. Budući da su konačni elementi K_3 i K_4 trokutni, u svakom od njih je moguće zadovoljiti uvjet 4.3 korištenjem linearne funkcije (ravnina), dok je u pravokutnim konačnim elementima K_1 i K_2 funkcija λ_5 konstruirana korištenjem standardnih Lagrangeovih funkcija s 4 interpolacijske točke, tj. 4 vrha pravokutnog elementa. Očigledno, funkcija λ_5 je kontinuirana, ali ne i glatka na bridovima e_4, e_6, e_7, e_9 i e_{10}. Točnije, na bridovima e_4, e_6, e_7, e_9 i e_{10} funkcija λ_5 opada linearno, od iznosa $\lambda_5 = 1$, koji ima u čvoru p_5, do iznosa $\lambda_5 = 0$, koji poprima u preostalim čvorovima bridova e_4, e_6, e_7, e_9 i e_{10}.

Analogno čvornoj baznoj funkciji λ_5 pridruženoj čvoru p_5, svakom čvoru $p_i \in P_\Omega$ pridružuje se jedinstvena čvorna bazna funkcija λ_i koja ovisi o broju, poziciji, tipu i dimenzijama konačnih elemenata kojima čvor p_i pripada. Dakle, čvorna bazna funkcija λ_i, pridružena čvoru p_i, također će biti kontinuirana skalarna funkcija, glatka unutar konačnih elemenata, ali ne nužno i na granici među konačnim elementima.

4.1.1 Čvorne interpolacijske funkcije unutar konačnog elementa

S obzirom na to da je čvorna bazna funkcija λ_i zapravo složena funkcija definirana različito nad različitim konačnim elementima, moguće ju je promatrati kao zbroj disjunktnih čvornih interpolacijskih funkcija (*eng. nodal shape functions*), takvih da je osigurana kontinuiranost među njima na granicama među konačnim elementima [35], [36], odnosno $\lambda_i = \sum_m^N \lambda_i^{(m)}$, gdje $\lambda_i^{(m)}$ predstavlja restrikciju bazne funkcije λ_i nad konačnim elementom K_m uz $i = 1, ..., N_P$ i $m = 1, ..., N$, odnosno $\lambda_i^{(m)} = 0$ u svim konačnim elementima različitim od K_m. Dakako, prema uvjetu 4.4 vrijedi da je $\lambda_i^{(m)} \neq 0$ u konačnom elementu K_m samo ako čvor p_i pripada K_m.

Stoga, interpolacijske funkcije je moguće promatrati kao bazne funkcije lokalne aproksimaciji $\varphi(K_m) \approx \varphi_h(K_m)$ unutar konačnog elementa K_m, tj. analogno izrazu 4.5 vrijedi da je

$$\varphi_h(K_m) = \sum_l^{n_p} \varphi_h^l \lambda_l^{(m)}, \quad \forall K_m \in M_h \tag{4.6}$$

gdje je $l = 1, ..., n_p$ lokalni indeks čvora konačnog elementa K_m, u fazi predprocesiranja jednoznačno svezan s globalnim indeksom i toga čvora čime je osigurano da je $\lambda_l^{(m)} \neq 0$, dok je n_p broj čvorova konačnog elementa K_m. Primjerice, za trokutni konačni element je $n_p = 3$.

Sa stajališta računalne implementacije metode konačnih elemenata, znatno je jednostavnije fokusirati se najprije na lokalnu aproksimaciju $\varphi(K_m) \approx \varphi_h(K_m)$ korištenjem 4.6, a tek naknadno,

sumiranjem doprinosa svih pojedinačnih elemenata K_m zbog 4.5, ostvariti globalnu aproksimaciju $\varphi(\Omega) \approx \varphi_h(\Omega)$ baznim funkcijama $\lambda_i \in W_h$ [37].

Funkcionalnu ovisnost interpolacijskih funkcija $\lambda_i^{(m)}$ u konačnom elementu K_m moguće je odrediti izravno, s obzirom na tip konačnog elementa i koordinate njegovih vrhova u globalnom koordinatnom sustavu [27]. Međutim, značajno pojednostavljenje u određivanju interpolacijskih funkcija $\lambda_i^{(m)}$ postiže se korištenjem *referentnih interpolacijskih funkcija* $\lambda^{(k)}$, uz $k = 1, ..., n_p$, definiranih jednokratno nad referentnim, kanonskim konačnim elementom u lokalnom koordinatom sustavu referentnog konačnog elemenata, te njihovim preslikavanjem u konkretne konačne elemente globalnog koordinatnog sustava pomoću jednostavnih geometrijskih transformacija [36], [38]. Također, broj i funkcijska ovisnost referentnih interpolacijskih funkcija unutar referentnog konačnog elementa isključivo ovisi o tipu konačnog elementa, točnije o broju čvorova referentnog konačnog elementa.
Dakle, bilo koja interpolacijska funkcija $\lambda_i^{(m)}$ iz 4.6 određuje se preslikavanjem odgovarajuće referentne interpolacijske funkcije $\lambda^{(k)}$, s referentnog u konkretni konačni element. Za primjer bazne funkcije λ_5 prikazane na slici 4.2, interpolacijske funkcije $\lambda_5^{(1)}$ i $\lambda_5^{(2)}$ dobile bi se preslikavanjem predefinirane interpolacijske funkcije referentnog pravokutnog konačnog elementa. Analogno tome, interpolacijske funkcije $\lambda_5^{(3)}$ i $\lambda_5^{(4)}$ bi se dobile preslikavanjem predefinirane interpolacijske funkcije referentnog tokutnog konačnog elementa. Pritom se svaki put preslikava referentna interpolacijska funkcija vezana za onaj lokalni čvor referentnog konačnog elementa koji je svezan s globalnim čvorom p_5.
U nastavku će se samo ukratko opisati referentne čvorne bazne funkcije nad referentnim trokutom i pravokutnikom. Postupak transformacije čvorne bazne funkcije s referentnog u konkretni konačni element opisan je u [36], [38], [39].

Čvorne referentne interpolacijske funkcije nad trokutnim konačnim elementom

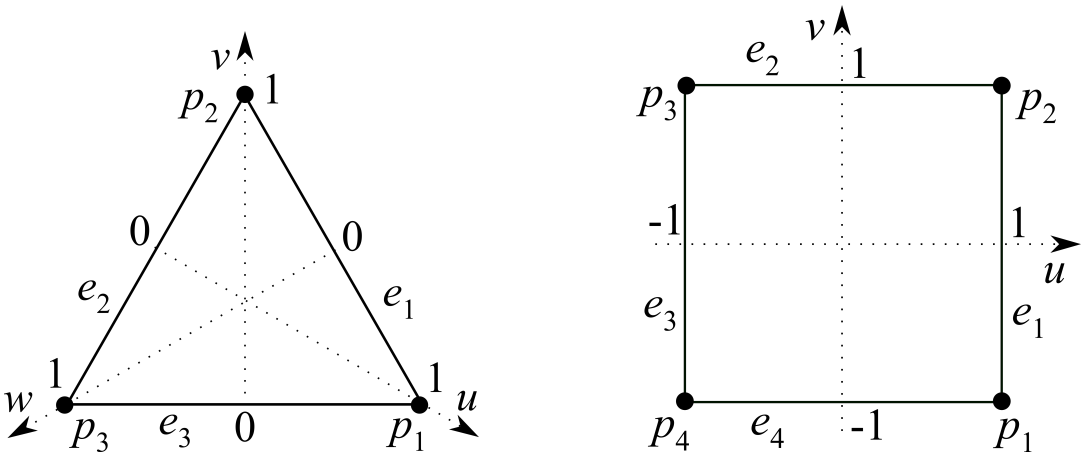
Referentni trokutni konačni element prikazan je na slici 4.3a. Referentne čvorne interpolacijske funkcije $\lambda^{(k)}$, gdje je $k = 1, 2, 3$ u referentnom trokutnom konačnom elementu, izrazit će se u lokalnom baricentričnom u, v, w-koordinatnom sustavu naznačenom na slici 4.3a i glase

$$\lambda^{(1)} = u \tag{4.7a}$$

$$\lambda^{(2)} = v \tag{4.7b}$$

$$\lambda^{(3)} = w \tag{4.7c}$$

gdje je redni broj referentne interpolacijske funkcije vezan za lokalni indeks čvora koji je u fazi predprocesiranja potrebno svezati s konkretnim globalnim čvorom $p_i \in P_\Omega$. Za čvorne interpolacijske funkcije vrijedi da je $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 1$, a isti izraz također vrijedi i za čvorne bazne funkcije.



(a) trokutni konačni element (b) pravokutni konačni element

Slika 4.3: Prikaz referentnih konačnih elemenata u njihovom lokalnom koordinatnom sustavu. Indeksi čvorova i rubova su također lokalni indeksi.

Dijelovi čvorne bazne funkcije λ_5 nad trokutnim konačnim elementima K_3, K_4 i K_5, prikazani na Slici 4.2, dobiveni su upravo korištenjem izraza 4.7.

Čvorne referentne interpolacijske funkcije nad pravokutnim konačnim elementom

Referentni pravokutni konačni element prikazan je na slici 4.3b. Referentne čvorne interpolacijske funkcije $\lambda^{(k)}$, gdje je $k = 1,2,3,4$ u referentnom pravokutnom konačnom elementu, izrazit će se u lokalnom u,v-koordinatnom sustavu naznačenom na slici 4.3b i glase

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) \tag{4.8a}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) \tag{4.8b}$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) \tag{4.8c}$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) \tag{4.8d}$$

gdje je redni broj referentne interpolacijske funkcije vezan za lokalni indeks čvora koji je u fazi predprocesiranja potrebno svezati s konkretnim globalnim čvorom $p_i \in P_\Omega$. Za čvorne interpolacijske funkcije vrijedi da je $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} + \lambda^{(4)} = 1$.
Dijelovi čvorne bazne funkcije λ_5 nad pravokutnim konačnim elementima K_1 i K_2, prikazani na Slici 4.2, dobiveni su korištenjem izraza 4.8.

4.2 Bridne bazne funkcije

Nad elementima K_m mreže konačnih elemenata $M_h(\Omega)$, definirat će se bazne funkcije vektorskih prostora $U_h(\Omega)$ i $V_h(\Omega_j)$, pri čemu će dakle gustoća diskretizacije (parametar h), odnosno broj

konačnih elemenata N, imati izravan utjecaj na dimenzije prostora $U_h(\Omega)$ i $V_h(\Omega_j)$, a time i na točnost aproksimacije $\vec{A} \approx \vec{A}_h$ i $\vec{T} \approx \vec{T}_h$, jer je $\vec{A}_h \in U_h$ i $\vec{T}_h \in V_h$. S obzirom na to da jaka formulacija opisana u poglavlju 3.1 sadrži $\nabla \times \nabla \times (\cdot)$ član, za vektorske prostore U_h i V_h mora vrijediti $U_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$ i $V_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$, gdje je $H(\text{curl}, \Omega)$ Hilbertov prostor tangencijalno kontinuiranih funkcija nad problemskom domenom Ω, odnosno

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\vec{v} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \times \vec{v} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)\} \tag{4.9}$$

gdje je $\vec{v}$ opći element od $H(\text{curl}, \Omega)$, dok $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ predstavlja vektorski prostor kvadratno-integrabilnih funkcija [31], [32] [40], [41].

Dakle, budući da je $U_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$ i $V_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$, bazne funkcije $\vec{\alpha}_i \in U_h$ i $\vec{\tau}_i \in T_h$ će biti vektorske funkcije definirane s obzirom na mrežu konačnih elemenata $M_h(\Omega)$, takve da im je pri prijelazu preko brida i stranice između dva susjedna konačna elementa osigurana kontinuiranost samo tangencijalne komponente, ali ne nužno i kontinuiranost okomite komponente vektora. Kako bi se egzaktno osigurala takva kontinuiranost, bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i $\vec{\tau}_i$ moraju biti konstruirane u odnosu na bridove konačnih elemenata.

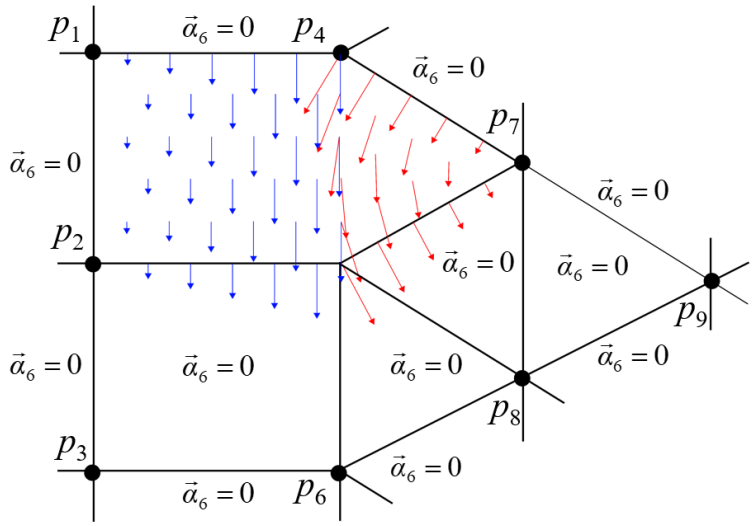
Najjednostavnija bazna funkcija koja zadovoljava prethodne uvjete bila bi ona vektorska funkcija čija bi tangencijalna komponenta bila kontinuirana nad samo jednim bridom, a iščezavala na svim ostalim bridovima. Upravo takva bazna funkcija, pridružena bridu e_6, označenom na slici 4.1, prikazana je na slici 4.4. Na slici je potrebno uočiti kontinuiranost tangencijalne komponente vektorske bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$ na bridu e_6, dok na svim ostalim bridovima tangencijalna komponenta od $\vec{\alpha}_6$ iščezava. Što se tiče okomite komponente vektorske bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$, ona nije kontinuirana na bridu e_6, a ni na bridovima e_3, e_4, e_8 i e_9.

Dakle, svakom bridu $e_i \in E_\Omega$ uz $i = 1, ..., N_E$, gdje je N_E broj bridova u skupu E_Ω, pridružit će se jedinstvena bridna bazna funkcija (*eng. edge basis function*) $\vec{\alpha}_i$ najnižeg polinomskog stupnja za koju vrijedi da je

$$\int_{e_j} \vec{\alpha}_i \cdot \vec{t}_j \, dl = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.10}$$

gdje $\vec{t}_i$ predstavlja jedinični vektor tangente, a dl diferencijal dužine brida e_i. Analogan izraz vrijedi i za bridnu baznu funkciju $\vec{\tau}_i$, uz $i = 1, ..., N_{Ej}$, gdje je N_{Ej} broj bridova u skupu E_{Ω_j} koji pripadaju $M_h(\Omega_j)$ (dio mreže konačnih elemenata nad područjem Ω_j).

Pritom za bridnu baznu funkciju $\vec{\alpha}_i$ vrijedi da je jednaka nuli nad svim konačnim elementima,



Slika 4.4: Primjer bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$ pridružene bridu e_6 sa slike 4.1. Radi zornosti situacije na slici brid e_6 ovdje nije prikazan. Plavom bojom su obojani vektori $\vec{\alpha}_6$ nad pravokutnim konačnim elementom K_1, a crvenom bojom vektori $\vec{\alpha}_6$ nad trokutnim konačnim elementom K_3. Duljina vektora je proporcionalna amplitudi vektora $\vec{\alpha}_6$. Potrebno je uočiti da je $\vec{\alpha}_6 = 0$ u svim ostalim konačnim elementima osim u onima kojima pripada brid e_6

osim u konačnim elementima kojima pripada brid e_i, odnosno

$$\begin{aligned} &\vec{\alpha}_i(K_m) \neq 0 \text{ ako je } e_i \text{ brid od } K_m \\ &\vec{\alpha}_i(K_m) = 0 \text{ ako } e_i \text{ nije brid od } K_m \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ponovno, analogan izraz vrijedi i za bridnu baznu funkciju $\vec{\tau}_i$, gdje je $i = 1, ..., N_{Ej}$.
Dakle, vrijedi da je $U_h = \text{span}(\vec{\alpha}_1, ..., \vec{\alpha}_{N_E})$ i $V_h = \text{span}(\vec{\tau}_1, ..., \vec{\tau}_{N_{Ej}})$, odnosno aproksimacije $\vec{A} \approx \vec{A}_h$ i $\vec{T} \approx \vec{T}_h$ vektorskih potencijala $\vec{A}$ i $\vec{T}$ glase

$$\vec{A}_h = \sum_{i=1}^{N_E} A_h^i \, \vec{\alpha}_i \tag{4.12}$$

$$\vec{T}_h = \sum_{i=1}^{N_{Ej}} T_h^i \, \vec{\tau}_i \tag{4.13}$$

gdje A_h^i i T_h^i predstavljaju stupnjeve slobode bridnih baznih funkcija $\vec{\alpha}_i$ i $\vec{\tau}_i$ koji su definirani nad i-tim bridom e_i kao

$$A_h^i = \int_{e_i} \vec{A}_h \cdot \vec{t}_i \, dl \tag{4.14}$$

$$T_h^i = \int_{e_i} \vec{T}_h \cdot \vec{t}_i \, dl \tag{4.15}$$

gdje $e_i \in E_\Omega$ u 4.14, a $e_i \in E_{\Omega_j}$ u 4.15. Izrazi 4.14 i 4.15 očigledno slijede kombinacijom 4.12 i 4.10 (i analogno 4.13 u 4.10). Prema tome, za razliku od situacije kod čvornih baznih funkcija gdje broj čvorova u mreži konačnih elemenata $M_h(\Omega)$ određuje broj stupnjeva slobode, u slučaju bridnih bazni funkcija broj rubova u mreži konačnih elemenata $M_h(\Omega)$, odnosno $M_h(\Omega_j)$, određuje broj stupnjeva slobode. Problem linearne zavisnosti i baždarenja u kontekstu bridnih baznih funkcija jasno je objašnjen u [29]. Singularna matrica zahtijeva korištenje isključivo iterativnih solvera, no dok god je osigurana konzistentnost lijeve i desne strane formulacije, konvergencija je osigurana i vrlo dobra [42].

4.2.1 Bridne interpolacijske funkcije unutar konačnog elementa

Analogno situaciji s čvornim baznim funkcijama λ_i u 4.1, i bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i $\vec{\tau}_i$ su složene funkcije, s različitim funkcijskim pravilom nad različitim konačnim elementima, kao što se vidi i na primjeru bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$ na slici 4.4. Prema tome, moguće ih je promatrati kao zbroj disjunktnih bridnih interpolacijskih funkcija, pod uvjetom da je osigurana tangencijalna kontinuiranost među njima na granicama među konačnim elementima, odnosno $\vec{\alpha}_i = \sum_m^N \vec{\alpha}_i^{(m)}$, gdje $\vec{\alpha}_i^{(m)}$ predstavlja restrikciju bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ na konačni element K_m uz $i = 1,...,N_E$ i $m = 1,...,N$. Pritom zbog 4.11 vrijedi da je $\vec{\alpha}_i^{(m)} \neq 0$ u konačnom elementu K_m samo ako brid e_i pripada K_m. Ekvivalentan izraz vrijedi i za baznu funkciju $\vec{\tau}_i$, gdje je $i = 1,...,N_{Ej}$.
Dakle, kao i u slučaju 4.6, i bridne interpolacijske funkcije je moguće promatrati kao bazne funkcije lokalnih aproksimacija $\vec{A}(K_m) \approx \vec{A}_h(K_m)$ i $\vec{T}(K_m) \approx \vec{T}_h(K_m)$ unutar konačnog elementa K_m, tj. analogno izrazu 4.12 vrijedi da je

$$\vec{A}_h(K_m) = \sum_{l=1}^{n_e} A_h^l \, \vec{\alpha}_l^{(m)}, \quad \forall K_m \in M_h(\Omega) \tag{4.16}$$

$$\vec{T}_h(K_m) = \sum_{l=1}^{n_e} T_h^l \, \vec{\tau}_l^{(m)}, \quad \forall K_m \in M_h(\Omega_j) \tag{4.17}$$

gdje je $l = 1,...,n_e$ lokalni indeks brida konačnog elementa K_m, u fazi predprocesiranja jednoznačno svezan s globalnim indeksom tog brida, a n_e je ukupni broj bridova promatranog konačnog elementa K_m koji je npr. $n_e = 3$ u slučaju trokutnog konačnog elementa.
I u slučaju bridnih baznih funkcija, računalna implementacija je znatno jednostavnija ako se relevantne jednadžbe pišu samo lokalno u K_m, korištenjem 4.16 i 4.17, a tek naknadno, sumiranjem doprinosa svih pojedinačnih elemenata K_m ostvari 4.12 i 4.13 te globalna aproksimacija $\vec{A}(\Omega) \approx \vec{A}_h(\Omega)$ i $\vec{T}(\Omega_j) \approx \vec{T}_h(\Omega_j)$ baznim funkcijama $\vec{\alpha}_i \in U_h$ i $\vec{\tau}_i \in V_h$. [37].

Kao i u slučaju čvornih interpolacijskih funkcija u odjeljku 4.1.1, i bridne interpolacijske funkcije $\vec{\alpha}_i^{(m)}$ i $\vec{\tau}_i^{(m)}$ je poželjno odrediti korištenjem predefiniranih bridnih *referentnih interpolacijskih funkcija* $\vec{\alpha}^{(k)}$ i $\vec{\tau}^{(k)}$, gdje je $k = 1,...,n_e$, odnosno njihovim preslikavanjem s jednog referentnog u različite konkretne konačne elemente globalnog koordinatnog sustava [43]. Bridne

referentne interpolacijske funkcije je potrebno unaprijed definirati nad referentnim, kanonskim konačnim elementom u lokalnom koordinatom sustavu referentnog konačnog elementa. Primjeri takvih funkcija za referentni trokutni i pravokutni konačni element navedeni su u nastavku. Naravno, za svaki tip konačnog elementa (trokut, pravokutnik, tetraedar, piramida,...) potrebno je definirati posebne referentne interpolacijske funkcije, pri čemu će broj funkcija biti jednak broju bridova referentnog konačnog elementa; u slučaju korištenja baznih funkcija većeg polinomskog stupnja ta jednakost ne vrijedi. Postupak transformacije čvorne bazne funkcije s referentnog u konkretni konačni element opisan je u [43], [44].

Čvorne referentne interpolacijske funkcije nad trokutnim konačnim elementom

Referentni trokutni konačni element prikazan je na slici 4.3a. Referentne čvorne interpolacijske funkcije $\vec{\alpha}^{(k)}$, gdje je $k = 1,2,3$ u referentnom trokutnom konačnom elementu, izrazit će se u lokalnom baricentričnom u,v,w-koordinatnom sustavu i glase

$$\vec{\alpha}^{(1)} = u\nabla v - v\nabla u \tag{4.18a}$$

$$\vec{\alpha}^{(2)} = v\nabla w - w\nabla v \tag{4.18b}$$

$$\vec{\alpha}^{(3)} = w\nabla u - u\nabla w \tag{4.18c}$$

Bridne referentne interpolacijske funkcije $\vec{\tau}^{(k)}$, gdje je $k = 1,2,3$, za trokutni konačni element su identične izrazima 4.18. Dio bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$ nad trokutnim konačnim elementom K_3, prikazan na Slici 4.4, dobiven je korištenjem izraza 4.18.

Čvorne referentne interpolacijske funkcije nad pravokutnim konačnim elementom

Referentni pravokutni konačni element prikazan je na slici 4.3b. Referentne čvorne interpolacijske funkcije $\vec{\alpha}^{(k)}$, gdje je $k = 1,2,3,4$ u referentnom pravokutnom konačnom elementu, izrazit će se u lokalnom u,v-koordinatnom sustavu i glase

$$\vec{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{4}(1+u)\vec{a}_v \tag{4.19a}$$

$$\vec{\alpha}^{(2)} = \frac{-1}{4}(1+v)\vec{a}_u \tag{4.19b}$$

$$\vec{\alpha}^{(3)} = \frac{-1}{4}(1-u)\vec{a}_v \tag{4.19c}$$

$$\vec{\alpha}^{(4)} = \frac{1}{4}(1-v)\vec{a}_u \tag{4.19d}$$

Bridne referentne interpolacijske funkcije $\vec{\tau}^{(k)}$, gdje je $k = 1,2,3,4$, za pravokutni konačni element su identične izrazima 4.19. Dio bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_6$ nad pravokutnim konačnim elementom K_1, prikazan na Slici 4.4, dobiven je korištenjem izraza 4.19.

Poglavlje 5

Galerkinova slaba formulacija

Korištenjem jednadžbi jake formulacije 3.3-3.9 u području Ω_p i Ω_u, te 3.12-3.20 u području Ω_j, izvest će se Galerkinov slabi oblik $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulacije. Radi jednostavnijeg referenciranja, sve jednadžbe jake formulacije navedene su ponovno u nastavku.

5.1 Jednadžbe jake $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacije

Volumne jednadžbe glase:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{T}_u \quad \text{u } \Omega_u \text{ i } \Omega_p \tag{5.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{T} = \nabla \times \vec{T}_u \quad \text{u } \Omega_{fe} \subset \Omega_j \tag{5.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_0} \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{T} = \nabla \times \vec{T}_u \quad \text{u } \Omega_{izol} \subset \Omega_j \tag{5.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T} + \partial_t \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \text{u } \Omega_{fe} \subset \Omega_j \tag{5.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T} + \partial_t \nabla \times \vec{A} = 0 \quad \text{u } \Omega_{izol} \subset \Omega_j \tag{5.5}$$

Jednadžbe na rubnim plohama glase:

$$\vec{A} \times \vec{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_B, \Gamma_{Bp}, \Gamma_{Ep} \text{ i } \Gamma_{Eu} \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{Hp} \text{ i } \Gamma_{Hu} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{n} &= 0 \\ \vec{T} \times \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_{Bj} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{n} &= 0 \\ (\boldsymbol{\rho} \nabla \times \vec{T}) \times \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_{Ej} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nu} \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} &= 0 \\ \vec{T} \times \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{na } \Gamma_{Hj} \tag{5.10}$$

Jenadžbe na graničnim plohama glase:

$$\begin{aligned} \vec{A}(2)\times\vec{n}_{jp} &= \vec{A}(1)\times\vec{n}_{jp} \\ (\boldsymbol{\nu}\nabla\times\vec{A}(2))\times\vec{n}_{jp} &= (\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{A}(1))\times\vec{n}_{jp} \quad \text{na } \Gamma_{jp} \\ \vec{T}\times\vec{n}_{jp} &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(2)\times\vec{n}_{g} &= \vec{A}(1)\times\vec{n}_{g} \\ (\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}(2))\times\vec{n}_{g} &= (\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}(1))\times\vec{n}_{g} \\ (\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}(2))\times\vec{n}_{g} &= (\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}(1))\times\vec{n}_{g} \quad \text{na } \Gamma_{g} \\ \vec{T}(2)\times\vec{n}_{g} &= \vec{T}(1)\times\vec{n}_{g} \end{aligned} \tag{5.12}$$

gdje je s (1) naznačena vrijednost polja na granici u materijalu 1, dok je s (2) naznačena vrijednost polja na granici u materijalu 2. Okomica $\vec{n}_{jp}$ je usmjerena iz područja Ω_j u Ω_p, a okomica $\vec{n}_g$ je usmjerena iz područja Ω_{fe} u Ω_{izol}. Postupak izvođenja svih jednadžbi jake forumalacije detaljno je opisan u odjeljku 3.1.

Što se tiče rubnih uvjeta 5.6-5.10 na rubnim plohama prikazanima na slici 2.1, važno je uočiti da su 5.6, 5.8, prva jednadžba u 5.9 te druga jednadžba u 5.10 zapravo Dirichleteovi rubni uvjeti. S druge strane, 5.7, druga jednadžba u 5.9 i prva jednadžba u 5.10 predstavljaju Neumannove rubne uvjete.

Uz prethodne jednadžbe jake $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacije, potrebno je paziti i na određene rubne uvjete vezane za uzbudni vektor $\vec{T}_u$. Naime, pri zadavanju vektora $\vec{T}_u$ mora vrijediti

$$(\nabla\times\vec{T}_u)\times\vec{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{Eu} \tag{5.13}$$

$$\vec{T}_u\times\vec{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{Hu} \tag{5.14}$$

kako bi se osigurala konvergencija rješenja.

Osim toga, pri zadavanju vektora $\vec{T}_u$ važno je paziti i na njegovu tangencijalnu kontinuiranost u cijeloj domeni Ω jer je općenito $\vec{T}_u \neq 0$ barem u dijelu Ω_u, a u određenim situacijama i u Ω_j, kao što je objašnjeno u odjeljku 3.1 za jednadžbu 3.4, pri čemu u području Ω_p i Ω_j vrijedi da je $\nabla\times\vec{T}_u = 0$, tj. $\nabla\times\vec{T}_u \neq 0$ samo u Ω_u, odnosno vrijedi granični uvjet

$$\vec{T}_u(1)\times\vec{n}_{pu} = \vec{T}_u(2)\times\vec{n}_{pu} \quad \text{na } \Gamma_{pu} \tag{5.15}$$

$$\vec{T}_u(1)\times\vec{n}_{jp} = \vec{T}_u(2)\times\vec{n}_{jp} \quad \text{na } \Gamma_{jp} \tag{5.16}$$

Ipak, vektor uzbude $\vec{T}_u$ se obično može jednostavno interpolirati i čvornim baznim funkcijama λ_i prema 4.5, odnosno $\vec{T}_u = \sum_i^{N_P} \vec{T}_u^i\lambda_i$, gdje je $\vec{T}_u^i$ iznos zadanog strujnog vektorskog potencijala uzbudne struje u i-tom čvoru, λ_i je čvorna bazna funkcija i-tog čvora, dok je N_P broj čvorova u mreži konačnih elemenata.

5.2 Razmatranje baznih i težinskih funkcija

Kao što je objašnjeno u poglavlju 4, nepoznanice $\vec{A}$ i $\vec{T}$ su aproksimirane konačnodimenzionalnim vektorima $\vec{A}_h \in U_h(\Omega)$ i $\vec{T}_h \in V_h(\Omega_j)$, tj. $\vec{A} \approx \vec{A}_h$ i $\vec{T} \approx \vec{T}_h$, gdje za $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ vrijede izrazi 4.12 i 4.13. S obzirom na to da jaka $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija sadrži Dirichleteove rubne uvjete $\vec{A} \times \vec{n} = 0$ i $\vec{T} \times \vec{n} = 0$, broj nepoznanica, tj. broj stupnjeva slobode je manji od ukupnog broja bridova N_E u Ω za 4.12, odnosno broja bridova N_{Ej} u Ω_j za 4.13. Točnije, izraze 4.12 i 4.13 za $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ je moguće dalje zapisati kao

$$\vec{A}_h = \sum_{i=1}^{N_A} A_h^i \, \vec{\alpha}_i + \underbrace{\sum_{i=N_A+1}^{N_E} A_D^i \, \vec{\alpha}_i}_{=\vec{A}_D} \tag{5.17}$$

$$\vec{T}_h = \sum_{j=1}^{N_T} T_h^j \, \vec{\tau}_j + \underbrace{\sum_{j=N_T+1}^{N_{Ej}} T_D^j \, \vec{\tau}_j}_{=\vec{T}_D} \tag{5.18}$$

gdje su A_D^i i T_D^j poznate Dirichleteove vrijednosti vektora $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ na odgovarajućim rubovima rubnih ploha, određene u skladu s 4.14 i 4.15 te zadanim Dirichleteovim rubnim uvjetima [29], [45]. U izrazu 5.17 se pretpostavlja da su indeksi bridova dodijeljeni takvim redoslijedom da se na e_i, gdje je $i \in [1, N_A]$, nalaze nepoznate vrijednosti stupnjeva slobode A_h^i, dok se na preostalim bridovima e_i, gdje je $i \in [N_A + 1, N_E]$ nalaze poznate vrijednosti $A_h^i = A_D^i$ određene iz zadanih Dirichleteovih uvjeta. Isto tako, i u izrazu 5.18 se pretpostavlja da su indeksi bridova dodijeljeni takvim redoslijedom da se na e_j, gdje je $j \in [1, N_T]$, nalaze nepoznate vrijednosti stupnjeva slobode T_h^j, dok se na preostalim bridovima e_j, gdje je $j \in [N_T + 1, N_{Ej}]$ nalaze poznate vrijednosti $T_h^j = T_D^j$ određene iz zadanih Dirichleteovih uvjeta. Dodatno, kao što je i naznačeno u 5.17 i 5.18, linearnom kombinacijom svih poznatih vrijednosti A_D^i i T_D^j, pomnoženih pripadnim baznim funkcijama $\vec{\alpha}_i$ i $\vec{\tau}_j$, gdje je $i = N_A + 1, ..., N_E$, a $j = N_T + 1, ..., N_{Ej}$, interpoliraju se vektorska polja $\vec{A}_D$ i $\vec{T}_D$ kojima se osigurava zadovoljenje Dirichleteovih rubnih uvjeta za konačna rješenja $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$. Dakle, N_A i N_T u 5.17 i 5.18 predstavljaju stvarni broj nepoznanica, odnosno stupnjeva slobode vektora $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$. U skladu s tim, samo su $\vec{\alpha}_1, ..., \vec{\alpha}_{N_A}$ i $\vec{\tau}_1, ..., \vec{\tau}_{N_T}$, bazne funkcije prostora U_h i V_h, vezane za nepoznate vrijednosti A_h^i i T_h^j u 5.17 i 5.18, gdje je $i = 1, ..., N_A$, a $j = 1, ..., N_T$.

Prema Galerkinovoj metodi, bazne funkcije vezane uz stupnjeve slobode se koriste i kao težinske funkcije pri izvođenju Galerkinovog slabog oblika $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulacije. Pritom će se dakle samo bazne funkcije $\vec{\alpha}_1, ..., \vec{\alpha}_{N_A}$ i $\vec{\tau}_1, ..., \vec{\tau}_{N_T}$ koristiti kao težinske funkcije. Kako bi se u jednadžbama napravila distinkcija između baznih i težinskih funkcija, bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i $\vec{\tau}_j$ će i dalje imati indeks i i j, gdje je $i = 1, ..., N_E$ i $j = 1, ..., N_{Ej}$, dok će težinske funkcije imati indekse k i l, tj. $\vec{\alpha}_k$ i $\vec{\tau}_l$, gdje je $k = 1, ..., N_A$ i $l = 1, ..., N_T$.

5.3 Jednadžbe Galerkinove $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ slabe formulacije

Korištenjem težinskih funkcija $\vec{\alpha}_k$ i $\vec{\tau}_l$, gdje je $k = 1, ..., N_A$ i $l = 1, ..., N_T$, na jednadžbe jake formulacije 5.1-5.12, uz aproksimaciju nepoznanica $\vec{A}$ i $\vec{T}$ prema 5.17 i 5.18, u nastavku će se izvesti Galerkinova slaba $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulacija.
Općenito, Ω_{fe} i Ω_{izol} predstavljaju skup više odvojenih područja, tj. Ω_{fe} je skup N_{lam} područja feromagnetskih lamela, dok je Ω_{izol} skup odgovarajućeg broja odvojenih izolacije slojeva. U nastavku će se pretpostaviti da su Ω_{fe} i Ω_{izol} jednostavno povezana područja, tj. pretpostavit će se da Ω_{fe} čini samo jedna feromagnetska lamela, a Ω_{izol} samo jedan sloj izolacije, uz graničnu plohu Γ_g između njih. Dakako, konačne jednadžbe slabe formulacije neće ovisiti o uvedenoj pretpostavci, što će biti vidljivo na kraju poglavlja.

5.3.1 Skup jednadžbi vezan za težinske funkcije $\vec{\alpha}_k$

Budući da jednadžbe 5.1, 5.2 i 5.3 sadrže član $\nabla \times \nu \times \vec{A}$, pomnožit će ih se težinskim funkcijama $\vec{\alpha}_k$, gdje je $k = 1, ..., N_A$, pa integriranjem dobivenih izraza nad cijelom domenom Ω slijedi N_A jednadžbi [29]

$$\int_{\Omega_p \cup \Omega_u} \nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{fe}} \nabla \times (\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} \nabla \times (\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V$$
$$- \int_{\Omega_{fe}} (\nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V - \int_{\Omega_{izol}} (\nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{T}_u) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., N_A \tag{5.19}$$

Budući da četvrti i peti integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.19 imaju istu podintegralnu funkciju, te pored toga na granici između Ω_{fe} i Ω_{izol} vrijedi četvrta jednakost u 5.12, navedeni integrali se mogu spojiti u jedan integral koji će se koristiti u nastavku, odnosno vrijedi da je

$$- \int_{\Omega_{fe}} (\nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V - \int_{\Omega_{izol}} (\nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V = - \int_{\Omega_j} (\nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V \tag{5.20}$$

U nastavku će više puta biti korišteno sljedeće pravilo iz vektorske algebre pa ga se radi lakšeg referenciranja navodi kao posebnu jednadžbu. Naime, za dva općenita vektorska polja $\vec{X}$ i $\vec{Y}$ vrijedi jednakost

$$\nabla \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}) = (\nabla \times \vec{X}) \cdot \vec{Y} - \vec{X} \cdot (\nabla \times \vec{Y}) \tag{5.21}$$

Zatim, primjenom izraza 5.21 na vektorska polja $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h$ i $\vec{\alpha}_k$ u prvom integralu, vektorska polja $\boldsymbol{\nu} \nabla \times \vec{A}_h$ i $\vec{\alpha}_k$ u drugom integralu te vektorska polja $\nabla \times \vec{T}_u$ i $\vec{\alpha}_k$ u prvom integralu s desne

strane znaka jednakosti, dobiva se

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_p\cup\Omega_u} \nabla\cdot((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_p\cup\Omega_u} (\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&+\int_{\Omega_{fe}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&+\int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&-\int_{\Omega_j} (\nabla\times\vec{T}_h)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega} \nabla\cdot(\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&+\int_{\Omega} \vec{T}_u\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V, \quad k=1,...,N_A
\end{aligned} \tag{5.22}$$

gdje radi simetričnosti buduće matrice konačnog sustava jednadžbi slabe formulacije, izraz 5.21 nije primijenjen na vektorska polja $\nabla\times\vec{T}_h$ i $\vec{\alpha}_k$ u četvrtom i petom integralu s lijeve strane znaka jednakosti u jednadžbi 5.19, odnosno na integrale u 5.20.

Primjenom Gaussovog zakona o divergenciji vektorskog polja na prvi, treći i četvrti integral s lijeve strane znaka jednakosti, te prvi integral s desne strane znaka jednakosti dobit će se plošni integrali po zatvorenim plohama na kojima će morati vrijediti rubni i granični uvjeti 3.5-3.9 jake formulacije.

Prema tome, u slučaju prvog integrala s lijeve strane znaka jednakosti, primjenom Gaussovog zakona slijedi plošni integral vektorskog polja po zatvorenoj plohi $\partial(\Omega_p\cup\Omega_u)=\Gamma_{Bp}\cup\Gamma_{Ep}\cup\Gamma_{Eu}\cup\Gamma_{Hp}\cup\Gamma_{Hu}\cup\Gamma_B\cup\Gamma_{jp}$, odnosno

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_p\cup\Omega_u} \nabla\cdot((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V = \int_{\Gamma_B\cup\Gamma_{Bp}\cup\Gamma_{Ep}\cup\Gamma_{Eu}} ((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma \\
&+\int_{\Gamma_{Hp}\cup\Gamma_{Hu}} ((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{jp}} ((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma, \quad k=1,...,N_A
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Budući da su na Γ_B, Γ_{Bp}, Γ_{Ep} i Γ_{Eu} zadani Dirichletovi rubni uvjeti 5.6, prvi plošni integral s desne strane znaka jednakosti u 5.23 je jednak nuli. Naime, bridne bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ svih bridova $e_i\in\Gamma_B$, Γ_{Bp}, Γ_{Ep} i Γ_{Eu} pripadaju vektoru $\vec{A}_D$ u 5.17, odnosno nijedna bazna funkcija vezana uz bridove na plohama Γ_B, Γ_{Bp}, Γ_{Ep} i Γ_{Eu} nije težinska funkcija. Dakle, za sve težinske funkcije vrijedi da je $\vec{\alpha}_k=0$ na plohama Γ_B, Γ_{Bp}, Γ_{Ep} i Γ_{Eu}, gdje je $k=1,...,N_A$ pa je i integral jednak nuli u slučaju svih N_A jednadžbi.

Pravilo o zamjeni mjesta vektora u mješovitom produktu glasi $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}$, pa primjenom tog pravila na vektore podintegralnih funkcija u integralima s desne strane znaka jednakosti

izraz 5.23 prelazi u

$$\int_{\Omega_p \cup \Omega_u} \nabla \cdot ((\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V = \int_{\Gamma_{Hp} \cup \Gamma_{Hu}} -((\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{jp}} ((\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma, \quad k = 1, ..., N_A \tag{5.24}$$

Prvi plošni integral s desne strane znaka jednakosti je jednak nuli jer je na rubnim plohama Γ_{Hp} i Γ_{Hu} zadan Neumannov rubni uvjet 5.7, odnosno $(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n} = 0$ na Γ_{Hp} i Γ_{Hu}, što je upravo jednako njegovoj podintegralnoj funkciji.
Budući da je u 5.24 okomica $\vec{n}$ na plohi Γ_{jp} usmjerena iz Ω_p u Ω_j, prema 5.11 vrijedi da je $\vec{n} = -\vec{n}_{jp}$ pa iz 5.24 konačno slijedi

$$\int_{\Omega_p \cup \Omega_u} \nabla \cdot ((\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V = \int_{\Gamma_{jp}} ((\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_{jp}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma, \quad k = 1, ..., N_A \tag{5.25}$$

Dakle prvi integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.22 je u svih N_A jednadžbi potrebno zamijeniti plošnim integralom iz 5.25.
Analogno prethodnom slučaju, primjenom Gaussovog zakona o divergenciji vektorskog polja na treći integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.22 dobiva se plošni integral po zatvorenoj plohi $\partial\Omega_{fe} = \Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Ej} \cup \Gamma_{Hj} \cup \Gamma_{jp} \cup \Gamma_g$, odnosno

$$\int_{\Omega_{fe}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V = \int_{\Gamma_{Bj}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Ej}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Hj}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma \quad k = 1, ..., N_A \tag{5.26}$$

Na rubnim plohama Γ_{Bj} i Γ_{Ej} su zadani Dirichleteovi rubni uvjeti, pa vrijedi da je $\vec{\alpha}_k = 0$ za svaki $k = 1, ..., N_A$, jer nijedna težinska funkcija $\vec{\alpha}_k$ nije bazna funkcija nekog od bridova $e_i \in \Gamma_{Bj}$ i Γ_{Ej}. Posljedično, i prvi i drugi integral s desne strane znaka jednakosti u 5.26 su jednaki nuli za svaki $k = 1, ..., N_A$. Zamjenom mjesta vektorima u mješovitim umnošcima vektora u podintegralnim funkcijama preostala tri plošna integrala u 5.26 slijedi

$$\int_{\Omega_{fe}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V = -\int_{\Gamma_{Hj}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \quad k = 1, ..., N_A \tag{5.27}$$

Izraz u zagradi podintegralne funkcije prvog plošnog integrala s desne strane znaka jednakosti, tj. plošnog integrala po plohi Γ_{Hj}, jednak je Neumannovom rubnom uvjetu u 5.10 za plohu Γ_{Hj}, jer je $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu_{fe}}$ u Ω_{fe}. Budući da je rubni uvjet jednak nuli i plošni integral će onda biti jednak nuli za svaki $k = 1, ..., N_A$.

S obzirom na to da je okomica $\vec{n}$ na plohi Γ_{jp} u 5.27 usmjerena iz Ω_j u Ω_p, prema 5.11 vrijedi da je $\vec{n} = \vec{n}_{jp}$. Također, okomica $\vec{n}$ na plohi Γ_g u 5.27 je usmjerena iz Ω_{fe} u Ω_{izol} pa prema 5.12 vrijedi da je $\vec{n} = \vec{n}_g$ Prema tome, izraz 5.27 prelazi u

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{fe}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k)\, \mathrm{d}V = &- \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_{jp}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_g) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \quad k = 1, ..., N_A\end{aligned} \tag{5.28}$$

Potpuno analogno prethodnom postupkom, za četvrti integral u 5.22 dobiva se izraz sličan 5.27, odnosno vrijedi da je

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{izol}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k)\, \mathrm{d}V = &- \int_{\Gamma_{Hj}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \\ - \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_{jp}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma &- \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_g) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \quad k = 1, ..., N_A\end{aligned} \tag{5.29}$$

Analogno 5.27, plošni integral po Γ_{Hj} iščezava zbog Neumannovog rubnog uvjeta u 5.10, jer je $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu_{izol}}$ u Ω_{izol}. S obzirom na to da je okomica $\vec{n}$ na plohi Γ_{jp} u 5.29 usmjerena iz $\Omega_{izol} \subset \Omega_j$ ka Ω_p, prema 5.11 vrijedi da je $\vec{n} = \vec{n}_{jp}$. Također, okomica $\vec{n}$ na plohi Γ_g u 5.29 je usmjerena iz Ω_{izol} u Ω_{fe} pa prema konvenciji za 5.12 vrijedi da je $\vec{n} = -\vec{n}_g$. Konačno, 5.27 prelazi u

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{izol}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{\alpha}_k)\, \mathrm{d}V = &- \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_{jp}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{izol}} \nabla \times \vec{A}_h) \times \vec{n}_g) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}\Gamma \quad k = 1, ..., N_A\end{aligned} \tag{5.30}$$

Dakle treći i četvrti integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.22 je u svih N_A jednadžbi potrebno zamijeniti plošnim integralima iz 5.28 i 5.30.

Konačno, primjenom Gaussovog zakona o divergenciji vektorskog polja na prvi integral s desne strane znaka jednakosti u 5.22 eliminirat će se posljednji integral u 5.22 koji sadrži operator divergencije. Pritom se dobiva plošni integral po zatvorenoj plohi $\partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_{Bp} \cup \Gamma_{Ep} \cup \Gamma_{Eu} \cup \Gamma_{Hp} \cup \Gamma_{Hu} \cup \Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Ej} \cup \Gamma_{Hj}$, uz napomenu da je $\vec{T}_u$ zadan tako da je zadovoljen 5.15 na Γ_{pu},

Γ_{jp} i Γ_g, odnosno slijedi

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V = \int_{\Gamma_B\cup\Gamma_{Bp}\cup\Gamma_{Ep}\cup\Gamma_{Eu}\cup\Gamma_{Bj}\cup\Gamma_{Ej}} (\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Hu}} (\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Hj}} (\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma \quad k=1,...,N_A \tag{5.31}$$

Ponovno, kao što je bio slučaj za 5.23 i 5.26, plošni integral po rubnim plohama Γ_B, Γ_{Bp}, Γ_{Eu}, Γ_{Ep}, Γ_{Bj} i Γ_{Ej} je jednak nuli jer su na tim rubnim plohama zadani Dirichleteovi rubni uvjeti pa je $\alpha_k = 0$ za svaki $k = 1,...,N_A$, odnosno 5.31 prelazi u

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V = \int_{\Gamma_{Hu}} -(\vec{T}_u\times\vec{n})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Hj}} -(\vec{T}_u\times\vec{n})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma \quad k=1,...,N_A \tag{5.32}$$

gdje je u preostalim plošnim integralima napravljena zamjena mjesta vektora u mješovitom produktu vektora. Budući da uzbudni vektor $\vec{T}_u$ mora biti zadan tako da je na plohi Γ_{Hu} uvažena druga jednakost u 5.13, odnosno vrijedi da je $\vec{T}_u\times\vec{n} = 0$ na Γ_{Hu}, plošni integral po Γ_{Hu} je jednak nuli. Također, i plošni integral po Γ_{Hj} će uvijek biti jednak nuli. Naime, $\vec{T}_u$ je obično moguće zadati tako da je $\vec{T}_u = 0$ u Ω_j, pa je plošni integral automatski jednak nuli. S druge strane, ako je $\vec{T}_u$ zadan tako da je $\vec{T}_u \neq 0$ u Ω_j, zbog tangencijalne kontinuiranosti vektora $\vec{T}_u$ će druga jednakost u 5.13 morati vrijediti i na Γ_{Hj}, tj. $\vec{T}_u\times\vec{n} = 0$ na Γ_{Hj} pa je plošni integral po Γ_{Hj} opet jednak nuli. Dakle, izraz 5.32 je uvijek jednak nuli, tj.

$$\int_\Omega \nabla\cdot(\vec{T}_u\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V = 0 \quad k=1,...,N_A \tag{5.33}$$

Uzimajući u obzir 5.25, 5.28, 5.30 i 5.33, jednadžba 5.22 glasi

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_{jp}} \left(\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h\right)\times\vec{n}_{jp}\right)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_p\cup\Omega_u} \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h\right)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&- \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_{jp})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma \\
&+ \int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V \\
&- \int_{\Omega_j} (\nabla\times\vec{T}_h)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V = \int_\Omega \vec{T}_u\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V, \quad k=1,...,N_A
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Zbrajanjem triju plošnih integrala po plohi Γ_{jp} u 5.34 dobiva se jedan plošni integral s podintegralnom funkcijom koja je jednaka nuli u svih N_A jednadžbi zbog Neumannovog tipa graničnog uvjeta na plohi Γ_{jp}, tj. zbog druge jednakosti u 5.11. Dakle, vrijedi da je

$$\int_{\Gamma_{jp}} ((\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_{jp} - (\boldsymbol{\nu}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_{jp})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma = 0, \quad k = 1,...,N_A \tag{5.35}$$

gdje je $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{fe}$ u Ω_{fe} i $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{izol}$ u Ω_{izol}.
Slično prethodnom, zbrajanjem dvaju plošnih integrala po plohi Γ_g u 5.34 dobiva se jedan plošni integral čija je podintegralna funkcija jednaka nuli u svih N_A jednadžbi zbog Neumannovog tipa graničnog uvjeta na plohi Γ_g, odnosno treće jednakosti u 5.12, to jest

$$\int_{\Gamma_g} (-(\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_g + (\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}\Gamma = 0, \quad k = 1,...,N_A \tag{5.36}$$

Konačno, uzimajući u obzir 5.35 i 5.36, iz jednadžbe 5.34 slijedi prvi skup jednadžbi Galerkinove $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$ slabe formulacije vezanih za težinske funkcije $\vec{\alpha}_k$ koji glasi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p\cup\Omega_u} (\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \\ \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V - \int_{\Omega_j} (\nabla\times\vec{T}_h)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega} \vec{T}_u\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V, \quad k = 1,...,N_A\end{aligned} \tag{5.37}$$

Svi integrali u 5.37 su volumni integrali. Plošni integral po plohi Γ_g iščezava prema 5.36, što znači da postojanje većeg broja ploha Γ_g unutar Ω_j ne utječe formalno na 5.37. Prema tome, izraz 5.37 vrijedi i u općem slučaju, kada su Ω_{fe} i Ω_{izol} sačinjeni od većeg broja lamela i izolacijskih slojeva.

5.3.2 Skup jednadžbi vezan za težinske funkcije $\vec{\tau}_l$

Preostaje još izvesti Galerkinov slabi oblik za jednadžbe 5.4 i 5.5, te preostale Neumannove rubne i granične uvjete jake formulacije. Preostali Dirichleteovi rubni i granični uvjeti su uzeti u obzir izborom skupa težinskih funkcija $\vec{\tau}_l$ iz skupa baznih funkcija $\vec{\tau}_j$, gdje je $l = 1,...N_T$ dok je $j = 1,...N_{Ej}$.
Dakle, množenjem jednadžbi 5.4 i 5.5 težinskim funkcijama $\vec{\tau}_l$, gdje je $l = 1,...N_T$, dobiva se

N_T jednadžbi

$$\int_{\Omega_{fe}} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{fe}} \partial_t \nabla \times \vec{A}_h \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} \partial_t \nabla \times \vec{A}_h \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \tag{5.38}$$

Budući da treći i četvrti integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.38 imaju istu podintegralnu funkciju, te pored toga na granici između Ω_{fe} i Ω_{izol} vrijedi prva jednakost iz graničnog uvjeta 5.12, navedeni integrali se mogu spojiti u jedan integral, odnosno 5.38 prelazi u

$$\int_{\Omega_{fe}} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_j} \partial_t \nabla \times \vec{A}_h \cdot \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \tag{5.39}$$

Primjenom pravila iz vektorske algebre o divergenciji vektorskog umnoška, navedenog u 5.21, na sve integrale u 5.39 slijedi

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{fe}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V \\ &+ \int_{\Omega_{izol}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times \vec{T}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V \\ &+ \int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega_j} \partial_t \vec{A}_h \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \end{aligned} \tag{5.40}$$

Zatim, primjenom Gaussovog zakona o divergenciji vektorskog polja na prvi integral s lijeve strane znaka jednakosti dobiva se plošni integral vektorskog polja po zatvorenoj plohi $\partial\Omega_{fe} = \Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Ej} \cup \Gamma_{Hj} \cup \Gamma_{jp} \cup \Gamma_g$, odnosno

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{fe}} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \, \mathrm{d}V = &\int_{\Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Hj}} ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Ej}} ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{jp}} ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{\tau}_l) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\Gamma, \quad l = 1, ..., N_T \end{aligned} \tag{5.41}$$

Zbog Dirichleteovih rubnih uvjeta $\nabla \times \vec{T} = 0$ zadanih na Γ_{Bj} i Γ_{Hj} prema 5.8 i 5.10, plošni integral po $\Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Hj}$ je jednak nuli za svih N_T jednadžbi jer je $\vec{\tau}_l = 0$ na Γ_{Bj} i Γ_{Hj} za svaki $l = 1, ..., N_T$. Također, i na plohu Γ_{jp} se zadaje granični uvjet $\nabla \times \vec{T} = 0$ prema 5.11 pa je i

plošni integral po Γ_{jp} u 5.41iz istog razloga jednak nuli.
Dakle, izraz 5.41 prelazi u

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{fe}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = &\int_{\Gamma_{Ej}} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma \\ &+\int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l=1,...,N_T\end{aligned} \tag{5.42}$$

Zamjenom mjesta vektora u mješovitom umnošku vektora u podintegralnim funkcijama plošnih integrala u 5.42 slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{fe}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = &-\int_{\Gamma_{Ej}} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n})\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma \\ &-\int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n})\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l=1,...,N_T\end{aligned} \tag{5.43}$$

Prema 5.9, na plohi Γ_{Ej} je zadan homogeni Neumannov rubni uvjet pa je i plošni integral nad Γ_{Ej} jednak nuli u svih N_T jednadžbi. U posljednjem integralu u 5.43, okomica $\vec{n}$ na plohu Γ_g usmjerena je iz Ω_{fe} ka Ω_{izol} pa je $\vec{n}=\vec{n}_g$, jer je prema definiciji i $\vec{n}_g$ usmjerena iz Ω_{fe} ka Ω_{izol}. Konačno, izraz 5.43 prelazi u

$$\int_{\Omega_{fe}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = -\int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l=1,...,N_T \tag{5.44}$$

Potpuno analogno postupku dobivanja 5.43, iz trećeg integrala s lijeve strane znaka jednakosti u 5.40 dobiva se izraz

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{izol}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = &-\int_{\Gamma_{Ej}} ((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n})\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma \\ &-\int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n})\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l=1,...,N_T\end{aligned} \tag{5.45}$$

Ponovno, prema 5.9, na plohi Γ_{Ej} je zadan homogeni Neumannov rubni uvjet pa je i plošni integral nad Γ_{Ej} jednak nuli u svih N_T jednadžbi. U posljednjem integralu s desne strane znaka jednakosti u 5.45, okomica $\vec{n}$ na plohu Γ_g usmjerena je iz Ω_{izol} ka Ω_{fe} pa je stoga $\vec{n}=-\vec{n}_g$, jer je prema definiciji $\vec{n}_g$ usmjerena iz Ω_{fe} ka Ω_{izol}. Dakle, iz 5.45 konačno slijedi

$$\int_{\Omega_{izol}} \nabla\cdot((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\times\vec{n}_g)\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l=1,...,N_T \tag{5.46}$$

Nadalje, primjenom Gaussovog zakona o divergenciji vektorskog polja na peti integral s lijeve strane znaka jednakosti u 5.40 dobiva se plošni integral vektorskog polja po zatvorenoj plohi $\partial\Omega_j = \Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Ej} \cup \Gamma_{Hj} \cup \Gamma_{jp}$, to jest

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = &\int_{\Gamma_{Bj}\cup\Gamma_{Hj}} (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{Ej}} (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{jp}} (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l = 1,...,N_T\end{aligned} \tag{5.47}$$

Ponovno, zbog Dirichleteovog rubnog uvjeta $\nabla \times \vec{T} = 0$ zadanog na Γ_{Bj} i Γ_{Hj} prema 5.8 i 5.10, plošni integral po $\Gamma_{Bj} \cup \Gamma_{Hj}$ je jednak nuli za svih N_T jednadžbi. Također, i na plohi Γ_{jp} je zadan Dirichleteov granični uvjet $\nabla \times \vec{T} = 0$, kao što se vidi u 5.11 pa je i plošni integral po Γ_{jp} u 5.47 jednak nuli. Što se tiče plošnog integrala po Γ_{Ej}, provest će se zamjena mjesta vektora u mješovitom produktu podintegralne funkcije. Prema tome, 5.47 prelazi u

$$\int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = \int_{\Gamma_{Ej}} (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{n})\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma, \quad l = 1,...,N_T \tag{5.48}$$

Budući da je na Γ_{Ej} zadan rubni uvjet $\nabla \times \vec{A} = 0$, kao što se vidi u 5.9, svi koeficijenti A_D^i u 5.17 vezani uz bridove e_i koji leže na plohi Γ_{Ej} moraju biti jednaki nuli na Γ_{Ej}. S druge strane, tangencijalna komponenta svih preostalih baznih funkcija $\vec{\alpha}_i$, vezanih uz bridove e_i koji ne leže na Γ_{Ej}, svakako je jednaka nuli na Γ_{Ej}. Prema tome, i plošni integral po Γ_{Ej} će biti jednak nuli u 5.48, pa konačno slijedi da je

$$\int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\partial_t \vec{A}_h \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = 0, \quad l = 1,...,N_T \tag{5.49}$$

Uzimajući u obzir 5.44, 5.46 i 5.49, izraz 5.40 prelazi u

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{n}_g)\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma + &\int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla \times \vec{T}_h)\cdot(\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma_g} ((\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{n}_g)\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla \times \vec{T}_h)\cdot(\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_j} \partial_t \vec{A}_h \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = 0, \quad l = 1,...,N_T\end{aligned} \tag{5.50}$$

Zbrajanjem plošnih integrala po Γ_g u 5.50 dobiva se podintegralna funkcija koja je prema drugoj jednakosti u 5.12 jednaka nuli, to jest

$$\int_{\Gamma_g} (-(\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{n}_g + (\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla \times \vec{T}_h) \times \vec{n}_g)\cdot\vec{\tau}_l\,\mathrm{d}\Gamma = 0, \quad l = 1,...,N_T \tag{5.51}$$

Konačno, dobiva se drugi skup jednadžbi Galerkinove $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$ slabe formulacije vezanih za težinske funkcije $\vec{\tau}_l$, gdje je $l=1,...,N_T$, koji glasi

$$\int_{\Omega_{fe}}(\boldsymbol{\rho_{fe}}\nabla\times\vec{T}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_{izol}}(\boldsymbol{\rho_{izol}}\nabla\times\vec{T}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_j}\partial_t\vec{A}_h\cdot(\nabla\times\vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V=0,\quad l=1,...,N_T \tag{5.52}$$

Kao i u slučaju 5.37, svi integrali u 5.52 su volumni integrali. Budući da plošni integral po plohi Γ_g iščezava prema 5.51, postojanje većeg broja ploha Γ_g unutar Ω_j neće utjecati formalno na 5.52. Prema tome, i skup jednadžbi 5.52 kao i skup jednadžbi 5.37 vrijedi i u općem slučaju, kada su Ω_{fe} i Ω_{izol} sačinjeni od N_{lam} lamela i odgovarajućeg broja izolacijskih slojeva.
Izravno korištenje prethodno izvedene Galerkinove $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$ slabe formulacije koju čini sustav jednadžbi 5.37 i 5.52 u praktičnom slučaju zahtijeva nedopustivo gustu mrežu konačnih elemenata, tj. prevelik broj stupnjeva slobode s obzirom na dostupne računalne resurse. Naime, u praktičnom slučaju se lamelirana jezgra sastoji od velikog broja vrlo tankih lamela međusobno odvojenih nekoliko desetaka puta tanjim slojevima izolacija, a prema 5.37 i 5.52 područja Ω_{fe} i Ω_{izol} se moraju posebno modelirati pa je valjana diskretizacija nedopustivo gusta. Prema tome, nužno je u matematički model uvesti dodatna približenja koja će u konačnici omogućiti korištenje znatno manjeg broja konačnih elementa uz minimalan gubitak na točnosti rješenja. U sljedećim poglavljima će između ostaloga biti detaljno opisane sve modifikacije matematičkog modela te njihove posljedice na slabu formulaciju.

5.3.3 Simetrična slaba $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$ formulacija

S obzirom na to da je slaba formulacija 5.37, 5.52 nesimetrična, matrica sustava jednadžbi se rješava korištenjem primjerice GMRES ili BiCGSTAB algoritma. Međutim, moguće je jednostavno izvesti i simetričnu formulaciju, za harmonički slučaj, čija će matrica sustava jednadžbi biti simetrična kako bi se omogućilo korištenje CG algoritma. U tom slučaju je umjesto strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}$ potrebno koristiti njemu primitivno polje $\vec{T}'$ za koje vrijedi da je $-j\omega\vec{T}'=\vec{T}$ [46]. Dakle, konačna simetrična Galerkinova slaba $\vec{A},\vec{T}'-\vec{A}$-formulacija glasi

$$\int_{\Omega_p\cup\Omega_u}(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_{fe}}(\boldsymbol{\nu_{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_{izol}}(\boldsymbol{\nu_{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_j}(\nabla\times j\omega\vec{T}'_h)\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V = \int_{\Omega}\vec{T}_u\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V,\quad k=1,...,N_A \tag{5.53}$$

$$-\int_{\Omega_{fe}} (\boldsymbol{\rho_{fe}} \nabla \times j\omega \vec{T}_h') \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V - \int_{\Omega_{izol}} (\boldsymbol{\rho_{izol}} \nabla \times j\omega \vec{T}_h') \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V + \int_{\Omega_j} j\omega \vec{A}_h \cdot (\nabla \times \vec{\tau}_l)\,\mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \tag{5.54}$$

Zbog svojstava konačne matrice sustava jednadžbi 5.535.54, numerička stabilnost i konvergencija simulacije je primjetno lošija nego u slučaju konvencionalnih formulacija $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ ili $\vec{T}, \varphi_m - \varphi_m$ [47]. Iz tog razloga, $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija je u rijetkim slučajevima povoljan izbor za modeliranje vrtložnih struja [48], [49]. Međutim, neovisno o izboru formulacije, kod modeliranja vrtložnih struja u lameliranoj jezgri nužna je homogenizacija fizikalne slike u jezgri. Upravo u kontekstu homogenizacije u poglavlju 7, $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$-formulacija će biti transformirana u $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciju koja pak pokazuje znatno bolju brzinu konvergencije nego alternativne formulacije, pogotovo u slučaju višedijelne jezgre.

Poglavlje 6

Raspregnute vrtložne struje u konačnom elementu

Kako bi se na ispravan način modelirale vrtložne struje u heterogenoj lameliranoj jezgri uz izravno modeliranje heterogenih značajki materijala potrebna je vrlo gusta mreža konačnih elemenata koja u praktičnom slučaju rezultira daleko većim brojem stupnjeva slobode nego što je dopustivo s obzirom na dostupne računalne resurse. Štoviše, prostorna ovisnost relevantnih polja općenito nije monotona ni unutar same lamele te je za njihovo ispravno aproksimiranje uvedenim baznim funkcijama potreban značajan broj konačnih elemenata po širini i visini lamele te čak nekoliko slojeva konačnih elemenata po debljini lameli. U ovom poglavlju će se uvesti aproksimacije u analitičkom opisu vrtložnih struja u općoj, i-toj lameli, kako bi se najprije omogućilo reduciranje broja potrebnih konačnih elemenata unutar same lamele. Na temelju toga, u kasnijim poglavljima će se napraviti dodatni korak ka smanjenju broja potrebnih stupnjeva slobode postupkom homogenizacije cijele lamelirane jezgre.

Zasad će se dakle analiza ograničiti na i-tu lamelu pa je stoga najprije potrebno napraviti osvrt na jednadžbe u Ω_{lam}, gdje je Ω_{lam} omeđeno područje jedne lamele za koju je vezan njen lokalni (xyz)-koordinatni sustav, gdje su y-smjer i z-smjer tangencijalni, a x-smjer okomit na plohu promatrane lamele.

6.1 Jednadžbe polja u području Ω_{lam}

Polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ i $\vec{H}$ isti su fizikalni entiteti neovisno o području promatranja i neovisno o koordinantnom sustavu u kojem su izraženi. Dakle, polja $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ i $\vec{H}$ izražena u lokalnom (xyz)-koordinatnom sustavu bilo koje lamele imaju iste oznake $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{J}$ i $\vec{H}$ kao i kad su izražena u globalnom $\chi\psi\zeta$-koordinatnom sustavu. Prema tome, jednadžbe definirane za Ω_j 2.37-2.40, skupa s graničnim uvjetima 2.43-2.46, formalno će imati isti zapis u Ω_{lam} kao i u Ω_j pa ih nije potrebno iznova navoditi.

Za razliku od njih, značajke materijala *i*-te lamele ograničene su isključivo na tu lamelu i njihov iznos je fizikalno neovisan o značajkama materijala u $i+1$-oj lameli. Ipak, kao što je ranije spomenuto, pretpostavit će se da su sve lamele izrađene od istog materijala i imaju istu debljinu pa se izostavlja eksponent i u oznakama $\boldsymbol{\kappa}_{\boldsymbol{lam}}^{\boldsymbol{i}}$, $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{lam}}^{\boldsymbol{i}}$, $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{lam}}^{\boldsymbol{i}}$ i $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{lam}}^{\boldsymbol{i}}$, gdje je $i = 1,2,...N_{lam}$. Međutim, značajke materijala $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\nu}$ definirane nad cijelim područjem Ω_j te značajke materijala $\boldsymbol{\kappa_{fe}}$, $\boldsymbol{\rho_{fe}}$, $\boldsymbol{\mu_{fe}}$ i $\boldsymbol{\nu_{fe}}$ definirane u području Ω_{fe} različiti su fizikalni entiteti u odnosu na značajke materijala $\boldsymbol{\kappa_{lam}}$, $\boldsymbol{\rho_{lam}}$, $\boldsymbol{\mu_{lam}}$ i $\boldsymbol{\nu_{lam}}$ definirane u Ω_{lam}. Prema tome, relacije građe u području Ω_{lam} formalno se razlikuju u odnosu na relacije građe 2.41 i 2.42 u Ω_{fe} i Ω_j.
Relacije građe za $\vec{B}$ i $\vec{H}$ u Ω_{lam} glase

$$\vec{B} = \boldsymbol{\mu_{lam}}\vec{H} \tag{6.1a}$$

$$\vec{H} = \boldsymbol{\nu_{lam}}\vec{B}, \tag{6.1b}$$

gdje su magnetska permeabilnost $\boldsymbol{\mu_{lam}}$ i magnetska reluktivnost $\boldsymbol{\nu_{lam}}$ definirani u 2.21 i 2.21. Analogno prethodnom izrazu, relacije građe za $\vec{E}$ i $\vec{J}$ u Ω_{lam} glase

$$\vec{J} = \boldsymbol{\kappa_{lam}}\vec{E} \tag{6.2a}$$

$$\vec{E} = \boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{J}, \tag{6.2b}$$

gdje su električna provodnost $\boldsymbol{\kappa_{lam}}$ i električna otpornost $\boldsymbol{\rho_{lam}}$ definirani u 2.16 i 2.19. U relacijama građe 6.1 i 6.2 vrijedi da je $\vec{B} = B_z\vec{a}_z + B_y\vec{a}_y + B_x\vec{a}_x$ i $\vec{H} = H_z\vec{a}_z + H_y\vec{a}_y + H_x\vec{a}_x$, te $\vec{E} = E_z\vec{a}_z + E_y\vec{a}_y + E_x\vec{a}_x$ i $\vec{J} = J_z\vec{a}_z + J_y\vec{a}_y + J_x\vec{a}_x$, gdje su $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ i $\vec{a}_z$ jedinični vektori u x, y i z smjeru područja Ω_{lam}.

6.2 Vrtložne struje u području Ω_{lam}

Prisutnost promjenjivog magnetskog toka u nekom području stvara električno polje u tom području kao što je opisano s 2.37. Posljedično, u području feromagnetske lamele će se prema 6.2 pojaviti vrtložne struje, tj. vrijedi da je

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{J} = -\partial_t\vec{B} \tag{6.3}$$

gdje u lokalnom (xyz)-koordinatnom sustavu lamele vrijedi da je $\vec{J} = J_z\vec{a}_z + J_y\vec{a}_y + J_x\vec{a}_x$ i $\vec{B} = B_z\vec{a}_z + B_y\vec{a}_y + B_x\vec{a}_x$. Kao što je spomenuto u poglavlju 2.3.1, otvorena jezgra ima minimalan utjecaj na putanju magnetskog polja izvan jezgre, tj. u području Ω_u i Ω_p, pa magnetski tok uzrokovan uzbudnom strujom $\vec{J}_u$ podjednako prodire u jezgru u svim smjerovima. Posljedica toga je da sve tri prostorne komponente vektora magnetske indukcije $\vec{B}$ u 6.3 s podjednakim značajem sudjeluju u induciranju vrtložnih struja koje zbog toga poprimaju komplicirane, nepravilne

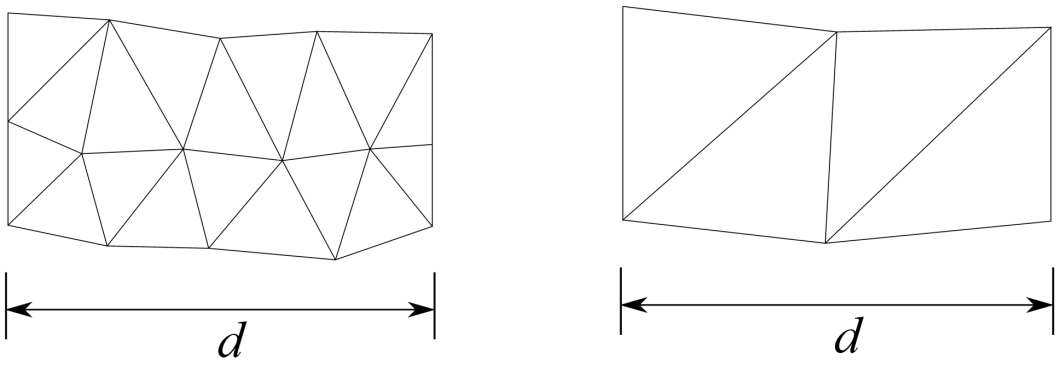
oblike prostornih petlji unutar lamele. Takve vrtložne struje prema Ampereovom zakonu 2.38 stvaraju dodatno magnetsko polje unutar lamele zbog čega vektor magnetske indukcije $\vec{B}$ unutar lamele poprima prostornu razdiobu koja nije monotona (skin efekt). Drugim riječima, unutar lamele su prisutne sve tri komponente vektora $\vec{B}$ i svaka od njih ovisi o sve tri prostorne koordinate, čime se dodatno naglašava trodimenzionala priroda jednadžbe 6.3 i značajno komplicira pristup homogenizaciji fizikalne slike, što uključuje i usrednjavanje značajki materijala unutar područja Ω_{lam}.

S druge strane, fizikalna slika je znatno jednostavnija ako se područje promatranja ograniči na volumen samo jednog m-tog konačnog elementa $K_m \in \Omega_{lam}$, umjesto na cijeli Ω_{lam}. Dimenzije konačnog elementa K_m su takve da je vektor $\vec{B}$ sa zadovoljavajućom točnošću aproksimiran konstantnim vektorom $\nabla \times \vec{A}_h$, gdje je $\vec{A}_h \in U_h$. Naime, kako su onda i komponente vektora $\nabla \times \vec{A}_h$ konstantne unutar konačnog elementa, svaka od njih pojedinačno zadovoljava jednadžbu 2.39 pa ih se može promatrati kao međusobno neovisne vektore. Međutim, da bi pogreška aproksimacije vektora $\vec{B}$ konstantnim vektorom $\nabla \times \vec{A}_h$ bila dovoljno mala, veličina konačnog elementa K_m mora biti dovoljno mala, što rezultira prekomjernim brojem potrebnih konačnih elemenata, nedopustivim s obzirom na dostupne računalne resurse.

Ipak, komponente vektora $\vec{B}$ ne moraju biti isključivo konstantne unutar K_m da bi ih se moglo promatrati kao međusobno neovisne u kontekstu Maxwellovih jednadžbi. U nastavku će se upravo analizirati uvjeti koje je potrebno zadovoljiti kako bi se mogla uvesti aproksimacija u vidu međusobne neovisnosti prostornih komponenti relevantnih vektorskih polja [50]. U konačnici, vektorske komponente relevantnih polja, koje su općenito ovisne o sve tri prostorne koordinate, aproksimirat će se novim vektorskim poljima ovisnim o samo dvije prostorne koordinate. Time će se dosad korištene trodimenzionalne jednadžbe svesti na veći broj dvodimenzionalnih jednadžbi unutar volumena konačnog elementa.

6.3 Aproksimacija raspregnutim poljima

Neka je veličina volumena promatranog konačnog elementa K_m takva da je stvarne komponente vektora magnetske indukcije $\vec{B} = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + B_z\vec{a}_z$ moguće s dovoljnom točnošću aproksimirati s tri međusobno neovisna jednosmjerna vektorska polja $\vec{b}_x(x,y,z)$, $\vec{b}_y(x,y,z)$ i $\vec{b}_z(x,y,z)$, koja raspisana po komponentama glase $\vec{b}_x = b_x\vec{a}_x$, $\vec{b}_y = b_y\vec{a}_y$ i $\vec{b}_z = b_z\vec{a}_z$, odnosno vrijedi aproksimacija $B_x \approx b_x$, $B_y \approx b_y$ i $B_z \approx b_z$, tj. $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$. Aproksimacija je pretpostavljena kao valjana samo unutar volumena promatranog konačnog elementa K_m, pa vektor $\vec{b} = \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ mora zadovoljiti Maxwellove jednadžbe 2.37-2.40 unutar K_m. Bitno je naglasiti da su za svaki konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$ definirana posebna polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ koja su jednaka nuli izvan konačnog elementa za koji su definirana. S obzirom na ekvivalentnost svih konačnih elemenata, dovoljno je promatrati samo jedan m-ti konačni element K_m. Po istom principu, kako su sve



(a) aproskimacija s $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ (b) aproksimacija s $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ te $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$

Slika 6.1: Usporedba gustoće konačnih elemenata u dijelu lamele debljine d pri aproksimaciji temeljenoj na $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ te pri aproksimaciji pomoću $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ te $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$. Pritom je pogreška aproksimacije jednaka za oba slučaja.

lamele ekvivalentne, dovoljno je promatrati samo područje jedne lamele Ω_{lam}, a svi rezultati onda vrijede u ostalim lamelama, tj. u cijelom području Ω_{fe}.
Budući da su međusobno neovisna, sva tri uvedena vektorska polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ moraju pojedinačno zadovoljiti jednadžbu 2.39, odnosno vrijedi da je

$$\nabla \cdot \vec{b}_x = 0 \implies \partial_x b_x = 0 \tag{6.4a}$$

$$\nabla \cdot \vec{b}_y = 0 \implies \partial_y b_y = 0 \tag{6.4b}$$

$$\nabla \cdot \vec{b}_z = 0 \implies \partial_z b_z = 0 \tag{6.4c}$$

Pojedinačni uvjeti u 6.4 znatno su stroži od uvjeta 2.39, jer zadovoljenjem 6.4 automatski je zadovoljen i 2.39, dok obratno ne vrijedi. Dakle, prestpostavka o međusobnoj neovisnosti vektorskih polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ implicira njihov konstantan iznos samo u smjeru dotičnog vektora, kao što se vidi iz 6.4c, 6.4b i 6.4a. Drugim riječima, vektorska polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ ne moraju biti konstantna u ovisnosti o preostale dvije prostorne koordinate, tj. $\vec{b}_x(y,z)$, $\vec{b}_y(x,z)$ i $\vec{b}_z(x,y)$, pa primjerice za $\vec{b}_x$ u općem slučaju vrijedi da je $\partial_y b_x \neq 0$ i $\partial_z b_x \neq 0$.
Stoga, budući da su $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ funkcije dviju koordinata, volumen konačnog elementa unutar kojeg vrijedi aproksimacija $B_x \approx b_x$, $B_y \approx b_y$ i $B_z \approx b_z$ može biti znatno veći nego u slučaju aproksimacije konstantnim vektorom $\nabla \times \vec{A}_h$, gdje je $\vec{A}_h \in U_h$. Upravo će taj blaži zahtjev na veličinu konačnog elementa na kraju omogućiti korištenje većih konačnih elemenata unutar lamele, odnosno mreže konačnih elemenata manje gustoće, kao što je prikazano na slici 6.1.

6.3.1 Rasprezanje vrtložnih struja

Budući da su $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ međusobno neovisna vektorska polja, odnosno zadovoljavaju 6.4, jednadžba 6.3 prelazi u tri nova izraza

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{yz} = -\partial_t \vec{b}_x \tag{6.5a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{xz} = -\partial_t \vec{b}_y \tag{6.5b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{xy} = -\partial_t \vec{b}_z \tag{6.5c}$$

gdje $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ onda označavaju tri međusobno neovisno inducirane struje. Dakle, prema 6.5, svaka komponenta magnetske indukcije će, neovisno o druge dvije komponente, inducirati struje čiji je vektor gustoće okomit na smjer indukcijske komponente. Rastav struja $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ po komponentama glasi

$$\vec{j}_{xy} = j^x_{xy}\vec{a}_x + j^y_{xy}\vec{a}_y \tag{6.6a}$$

$$\vec{j}_{xz} = j^x_{xz}\vec{a}_x + j^z_{xz}\vec{a}_z \tag{6.6b}$$

$$\vec{j}_{yz} = j^y_{yz}\vec{a}_y + J^z_{yz}\vec{a}_z \tag{6.6c}$$

gdje primjerice komponenta j^y_{xy} označava y-komponentu struje $\vec{j}_{xy}$ kao što je naznačeno eksponentom y (analogno vrijedi i za ostale komponente). Potrebno je također uočiti da je skup triju neovisnih izraza u 6.5 različit i stroži od tri jednadžbe koje se dobiju raspisom izraza 6.3 na vektorske komponente. Dakle, svako realno polje $\vec{B}$ zadovoljava 6.3, ali ne zadovoljava 6.5, odnosno svako polje $\vec{b}$ koje zadovoljava 6.5, zadovoljava i 6.3. Naime, rastavljanjem operatora rotacije u 6.5 dobiju se tri sustava po tri jednadžbe (ukupno devet jednadžbi) koje osiguravaju kompatibilnost izraza u 6.5 s izrazima u 6.4 te automatski impliciraju da su vektori gustoće struje $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ ovisni o samo dvije prostorne koordinate, tj. $\vec{j}_{yz}(y,z)$, $\vec{j}_{xz}(x,z)$ i $\vec{j}_{xy}(x,y)$. Radi budućeg referenciranja te jasnijeg uvida u navedene implikacije, izrazi u 6.5 će se rastaviti na tri sustava po tri jednadžbe.

Korištenjem 6.6a, jednadžba 6.5c se rastavlja na tri jednadžbe

$$(\partial_y j^x_{xy}/\kappa_{xx} - \partial_x j^y_{xy}/\kappa_{yy})\vec{a}_z = -\partial_t b_z \vec{a}_z \tag{6.7a}$$

$$(-\partial_z j^x_{xy}/\kappa_{xx})\vec{a}_y = 0 \tag{6.7b}$$

$$(\partial_z j^y_{xy}/\kappa_{yy})\vec{a}_x = 0 \tag{6.7c}$$

Slično, korištenjem 6.6b, jednadžba 6.5b rastavljena na tri vektorske komponente glasi

$$(\partial_y j^x_{xz}/\kappa_{xx})\vec{a}_z = 0 \tag{6.8a}$$
$$(\partial_x j^z_{xz}/\kappa_{zz} - \partial_z j^x_{xz}/\kappa_{xx})\vec{a}_y = -\partial_t b_y \vec{a}_y \tag{6.8b}$$
$$(-\partial_y j^z_{xz}/\kappa_{zz})\vec{a}_x = 0 \tag{6.8c}$$

Također, korištenjem 6.6c, jednadžba 6.5a rastavljena je na tri vektorske komponente

$$(-\partial_x j^y_{yz}/\kappa_{yy})\vec{a}_z = 0 \tag{6.9a}$$
$$(\partial_x j^z_{yz}/\kappa_{zz})\vec{a}_y = 0 \tag{6.9b}$$
$$(\partial_z j^y_{yz}/\kappa_{yy} - \partial_y j^z_{yz}/\kappa_{zz})\vec{a}_x = -\partial_t b_x \vec{a}_x \tag{6.9c}$$

Nadalje, korištenjem triju, prema 6.5 neovisno induciranih struja $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ moguće je aproksimirati vektor vrtložnih struja $\vec{J}$, čime se značajno pojednostavljuje modeliranje vrtložnih struja $\vec{J}$. Dakle, zbrajanjem 6.5a, 6.5b i 6.5c formalno slijedi 6.3, odnosno vrijedi da je

$$\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz} \tag{6.10}$$

unutar jednog konačnog elementa. Ponovno, kao u slučaju $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, za svaki konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$ su definirane posebne struje $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$, koje postoje samo unutar tog konačnog elementa za koji su definirane. Dovoljno je analizirati samo jedan konačni element.
Kao što je ranije opisano, u slučaju jezgre otvorenog tipa iznos svake komponente vektora $\vec{J}$ općenito ovisi o sve tri prostorne koordinate unutar lamele. Ipak, kombiniranje tri tipa prethodno izvedenih vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ trebalo bi moći barem približno rekonstruirati ovisnost svake komponente vektora $\vec{J}$ o sve tri prostorne koordinate. Uvrštavanjem 6.6 u 6.10 dobiva se

$$\begin{aligned}\vec{J} &\approx \overbrace{j^y_{xy}\vec{a}_y + J^z_{xy}\vec{a}_x}^{\vec{j}_{xy}} + \overbrace{j^z_{xz}\vec{a}_z + j^x_{xz}\vec{a}_x}^{\vec{j}_{xz}} + \overbrace{j^z_{yz}\vec{a}_z + J^y_{yz}\vec{a}_y}^{\vec{j}_{yz}} \\ &\approx \underbrace{(j^z_{yz} + j^z_{xz})}_{\approx J_z}\vec{a}_z + \underbrace{(j^y_{yz} + j^y_{xy})}_{\approx J_y}\vec{a}_y + \underbrace{(j^x_{xz} + j^x_{xy})}_{\approx J_x}\vec{a}_x \,,\end{aligned} \tag{6.11}$$

što znači da se korištenjem $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$, svaka komponenta vektora ukupne vrtložne struje $\vec{J} = J_x\vec{a}_x + J_y\vec{a}_y + J_z\vec{a}_z$ rastavlja na po dvije nove komponente, od kojih svaka ovisi o samo dvije prostorne koordinate, no njihov zbroj ipak ovisi o sve tri prostorne koordinate. Primjerice, komponenta J_z je rastavljena na $j^z_{yz}(y,z)$ i $j^z_{xz}(x,z)$, odnosno uvodi se aproksimacija $J_z(x,y,z) \approx j^z_{yz}(y,z) + j^z_{xz}(x,z)$. Dakle, korištenjem tri tipa vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ moguće je modelirati ovisnost vrtložnih struja $\vec{J}$ o tri prostorne koordinate.

6.3.2 Amperov zakon u kontekstu raspregnutih vektorskih polja

Nadalje, prema 2.38, vrtložne struje stvaraju vlastito magnetsko polje, odnosno za vektor magnetske indukcije unutar feromagnetske lamele, prema 6.1, vrijedi

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{lam}} \vec{B} = \vec{J} \tag{6.12}$$

gdje je $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{lam}}$ definiran u 2.23. Ako se u konačnom elementu $K_m \in \Omega_{lam}$ vektor magnetske indukcije $\vec{B}$ aproksimira s tri međusobno neovisna vektorska polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ koja zadovoljavaju uvjete 6.4, a vrtložne struje $\vec{J}$, prema 6.10, aproksimiraju s tri međusobno neovisne struje $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$, izraz 6.12 prelazi u

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{lam}} (\vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z) = \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz} \tag{6.13}$$

Radi jasnijeg uvida u relacije među svim uključenim vektorskim poljima, izraz 6.13 je potrebno zapisati u matričnom obliku uz korištenje 2.23 i 6.6, tj. dobiva se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \partial_y b_x/\mu_{xx} - \partial_x b_y/\mu_{yy} \\ \partial_x b_z/\mu_{zz} - \partial_z b_x/\mu_{xx} \\ \partial_z b_y/\mu_{yy} - \partial_y b_z/\mu_{zz} \end{bmatrix}}_{\nabla \times \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{lam}} (\vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ j^y_{xy} \\ j^x_{xy} \end{bmatrix}}_{\vec{j}_{xy}} + \underbrace{\begin{bmatrix} j^z_{xz} \\ 0 \\ j^x_{xz} \end{bmatrix}}_{\vec{j}_{xz}} + \underbrace{\begin{bmatrix} j^z_{yz} \\ j^y_{yz} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{j}_{yz}} \tag{6.14}$$

U Ampereovoj jednadžbi 6.13, odnosno 6.14, sve veličine su spregnute unutar jedne zajedničke vektorske jednadžbe, točnije tri komponentne jednadžbe. Ipak, i Ampereovu jednadžbu 6.13 (odnosno 6.14) moguće je raspregnuti kao Faradayevu jednadžbu u 6.5, ponovnim korištenjem istih pretpostavki o konstantnosti vektorskih polja b_x, b_y i b_z, te $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ u smjeru svog vektora, kao što je zapisano u implikacijama izraza 6.4 te homogenim izrazima u 6.28, 6.24, 6.19. Pretpostavke o vektorskim poljima b_x, b_y i b_z, te $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ uključuju se u 6.14 na način da se provede opetovano parcijalno deriviranje redaka u jednadžbi 6.14. Budući da su u prvom retku matrične jednadžbe 6.14 prisutna samo polja b_x i b_y, na njemu je potrebno provesti parcijalno deriviranje po y, te ponovno parcijalno deriviranje po x. Slično tome, nad drugim retkom jednadžbe potrebno je provesti parcijalno deriviranje po z i po x, dok je nad trećim retkom potrebno provesti parcijalno deriviranje po z i po y. Dakle, potrebno je provesti ukupno šest neovisnih parcijalnih deriviranja, čime će se u konačnici dobiti tri međusobno neovisne, raspregnute Ampereove jednadžbe za $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$. Redoslijed deriviranja će biti prilagođen redoslijedu struja u 6.14. Prema tome, najprije će se izvesti Ampereova jednadžba za $\vec{j}_{xy}$, što znači da je potrebno provesti parcijalnu derivaciju drugog retka u jednadžbi 6.14 po x, a zatim derivaciju trećeg retka po y.

Izvod neovisne Ampereove jednadžbe za $\vec{j}_{xy}$

Parcijalnim deriviranjem drugog retka jednadžbe 6.14 po x slijedi

$$\begin{aligned} \partial_x b_z/\mu_{zz} - \partial_z b_x/\mu_{xx} &= j^y_{xy} + j^y_{yz} \quad \backslash \partial_x \\ \partial_x \partial_x b_z/\mu_{zz} - \partial_z \underbrace{\partial_x b_x}_{=0}/\mu^i_{xx} &= \partial_x j^y_{xy} + \underbrace{\partial_x j^y_{yz}}_{=0} \\ \partial_x^2 b_z/\mu_{zz} &= \partial_x j^y_{xy} \end{aligned} \tag{6.15}$$

gdje je $\partial_x b_x = 0$ prema 6.4a, a $\partial_x j^y_{yz} = 0$ prema 6.9a.
Analogno prethodnom, parcijalnim deriviranjem trećeg retka jednadžbe 6.14 po y slijedi

$$\begin{aligned} \partial_z b_y/\mu_{yy} - \partial_y b_z/\mu_{zz} &= j^x_{xy} + j^x_{xz} \quad \backslash \partial_y \\ \partial_z \underbrace{\partial_y b_y}_{=0}/\mu_{yy} - \partial_y \partial_y b_z/\mu_{zz} &= \partial_y j^x_{xy} + \underbrace{\partial_y j^x_{xz}}_{=0} \\ -\partial_y^2 b_z/\mu_{zz} &= \partial_y j^x_{xy} \end{aligned} \tag{6.16}$$

gdje je $\partial_y b_y = 0$ prema 6.4b, a $\partial_y j^x_{xz} = 0$ prema 6.8a. Dakle, uvrštavanjem početnih pretpostavke o međusobnoj neovisnosti između b_x, b_y i b_z, a time i $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$, unutar promatranog volumena K_m, u standardnu Ampereovu jednadžbu 6.14 slijede jednadžbe 6.15 i 6.16. Konačno, uvrštavanjem jednadžbi 6.15 i 6.16 u Faradayevu jednadžbu za b_z 6.7a dobiva se

$$\partial_y^2 b_z \frac{1}{\kappa_{xx}\mu_{zz}} + \partial_x^2 b_z \frac{1}{\kappa_{yy}\mu_{zz}} = \partial_t b_z \tag{6.17}$$

Ista jednadžba 6.17 dobije se ako se uz Faradayevu jednadžbu za b_z 6.5c (odnosno 6.7a) koristi Ampereova jednadžba sljedećeg oblika

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_z = \vec{j}_{xy} \tag{6.18}$$

koja onda dakle predstavlja neovisnu, raspregnutu Ampereovu jednadžbu za struju $\vec{j}_{xz}$. Drugim riječima, sustav jednadžbi 6.5c i 6.18 ekvivalentan je jednadžbi 6.17.
Dodatno, rastavljanjem 6.18 na komponente

$$\partial_x b_z/\mu_{zz} = j^y_{xy} \tag{6.19a}$$

$$-\partial_y b_z/\mu_{zz} = j^x_{xy} \tag{6.19b}$$

može se uočiti da su jednadžbe 6.19a i 6.19b gotovo ekvivalentne jednadžbama 6.16 i 6.15. Dakle, korištenjem međusobno neovisnih polja b_x, b_y, b_z, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$, unutar konačnog elementa K_m, iz standardne Faradayeve 6.3 i Ampereove jednadžbe 6.12 se dobije "dvodimenzi-

onalna" Faradayeva 6.5c i Ampereova jednadžba 6.18.

Izvod neovisne Ampereove jednadžbe za $\vec{j}_{xz}$

Analogno prethodnom, Ampereova jednadžba za $\vec{j}_{xz}$ izvest će se parcijalnim deriviranjem prvog retka u jednadžbi 6.14 po x, te trećeg retka po z. Dakle, parcijalnim deriviranjem prvog retka po x slijedi

$$\begin{aligned} \partial_y b_x/\mu_{xx} - \partial_x b_y/\mu_{yy} &= j^z_{xz} + j^z_{yz} \quad \backslash\partial_x \\ \partial_y \underbrace{\partial_x b_x}_{0}/\mu_{xx} - \partial_x\partial_x b_y/\mu_{yy} &= \partial_x j^z_{xz} + \underbrace{\partial_x j^z_{yz}}_{0} \\ -\partial_x^2 b_y/\mu_{yy} &= \partial_x j^z_{xz} \end{aligned} \tag{6.20}$$

gdje je $\partial_x b_x = 0$ prema 6.4a, a $\partial_x j^z_{yz} = 0$ prema 6.9b.
Analogno prethodnom, parcijalnim deriviranjem trećeg retka jednadžbe 6.14 po z slijedi

$$\begin{aligned} \partial_z b_y/\mu_{yy} - \partial_y b_z/\mu_{zz} &= j^x_{xy} + j^x_{xz} \quad \backslash\partial_z \\ \partial_z\partial_z b_y/\mu_{yy} - \partial_y \underbrace{\partial_z b_z}_{=0}/\mu_{zz} &= \underbrace{\partial_z j^x_{xy}}_{=0} + \partial_z j^x_{xz} \\ \partial_z^2 b_y/\mu_{yy} &= \partial_z j^x_{xz} \end{aligned} \tag{6.21}$$

gdje je $\partial_z b_z = 0$ prema 6.4c, a $\partial_z j^x_{xy} = 0$ prema 6.7b. Izrazi 6.20 i 6.21 opisuju dakle vezu između komponenata struje $\vec{j}_{xz}$ te magnetske indukcije $\vec{b}_y$. Iste veličine su sadržane i u komponentnoj Faradayevoj jednadžbi 6.8b pa uvrštavanjem u nju dobiva se konačna jednadžba s jednom nepoznanicom

$$\partial_x^2 b_y \frac{1}{\kappa_{zz}\mu_{yy}} + \partial_z^2 b_y \frac{1}{\kappa_{xx}\mu_{yy}} = \partial_t b_y \tag{6.22}$$

Ista jednadžbe dobije se ako se uz komponentnu Faradayevu jednadžbu 6.8b koristi jednadžba

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_y = \vec{j}_{xz} \tag{6.23}$$

koja stoga predstavlja raspregnutu Ampereovu jednadžbu za struju $\vec{j}_{xz}$, neovisnu o strujama $\vec{j}_{yz}$ i $\vec{j}_{xy}$ te poljima $\vec{b}_z$ i $\vec{b}_x$. Dodatno, rastavljanjem 6.18 na komponente dobiva se

$$-\partial_x b_y/\mu_{yy} = j^z_{xz} \tag{6.24a}$$

$$\partial_z b_y/\mu_{yy} = j^x_{xz} \tag{6.24b}$$

Dakle, jednadžbe 6.5b i 6.23 čine sustav neovisne Faradayeve i Ampereove jednadžbe koji povezuje struju $\vec{j}_{xz}$ i magnetsku idukciju $\vec{b}_y$. Poseban sustav ekvivalentnih diferencijalnih jed-

nadžbi definiran je lokalno za svaki konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$.

Izvod neovisne Ampereove jednadžbe za $\vec{j}_{yz}$

Ampereova jednadžba za $\vec{j}_{yz}$ izvest će se parcijalnim deriviranjem prvog retka u jednadžbi 6.14 po y, te drugog retka po z. Parcijalnim deriviranjem prvog retka u 6.14 po y slijedi

$$\begin{aligned} \partial_y b_x/\mu_{xx} - \partial_x b_y/\mu_{yy} &= j^z_{xz} + j^z_{yz} \quad \backslash \partial_y \\ \partial_y \partial_y b_x/\mu_{xx} - \partial_x \underbrace{\partial_y b_y}_{=0}/\mu_{yy} &= \underbrace{\partial_y j^z_{xz}}_{=0} + \partial_y j^z_{yz} \\ \partial_y^2 b_x/\mu_{xx} &= \partial_y j^z_{yz} \end{aligned} \tag{6.25}$$

gdje je $\partial_y b_y = 0$ prema 6.4b, a $\partial_y j^z_{xz} = 0$ prema 6.8c.
Zatim, parcijalnim deriviranjem drugog retka po z slijedi

$$\begin{aligned} \partial_x b_z/\mu_{zz} - \partial_z b_x/\mu_{xx} &= j^y_{xy} + j^y_{yz} \quad \backslash \partial_z \\ \partial_x \underbrace{\partial_z b_z}_{=0}/\mu_{zz} - \partial_z \partial_z b_x/\mu_{xx} &= \underbrace{\partial_z j^y_{xy}}_{=0} + \partial_z j^y_{yz} \\ -\partial_z^2 b_x/\mu_{xx} &= \partial_z j^y_{yz} \end{aligned} \tag{6.26}$$

gdje je $\partial_z b_z = 0$ prema 6.4c, a $\partial_z j^y_{xy}$ prema 6.7c. Izrazi 6.20 i 6.21 povezuju komponenate struje $\vec{j}_{yz}$ s magnetskom indukcijom $\vec{b}_x$. Njihovim uvrštavanjem u jednadžbu 6.9c slijedi konačna jednadžba za izračun aproksimacijskog vektorskog polja $\vec{b}_x$ u kontekstu kvazistatičkog izračuna, tj. dobiva se

$$\partial_z^2 b_x \frac{1}{\kappa_{yy}\mu_{xx}} + \partial_y^2 b_x \frac{1}{\kappa_{zz}\mu_{xx}} = \partial_t b_x \tag{6.27}$$

Ista jednadžba dobije se ako se u Faradayevu jednadžbu 6.9c, umjesto 6.25 i 6.26, uvrste slični izrazi za struje

$$\partial_y b_x/\mu_{xx} = j^z_{yz} \tag{6.28a}$$

$$-\partial_z b_x/\mu_{xx} = j^y_{yz} \tag{6.28b}$$

koje onda dakle predstavljaju komponente Ampereovog zakona za struju $\vec{j}_{yz}$. Prema tome, zapisan u vektorskom obliku, Ampereov zakon za struju $\vec{j}_{yz}$, raspregnut od struja $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ te vektorskih polja $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, glasi

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_x = \vec{j}_{yz} \tag{6.29}$$

Drugim riječima, sustav jednadžbi 6.5a i 6.29 ekvivalentan je jednadžbi 6.27 te kao takav potpuno definira izračun struje $\vec{j}_{yz}$ unutar volumena konačnog elementa K_m. Kao i u slučaju 6.18 i 6.23, i jednadžba 6.29 vrijedi unutar konačnog elementa K_m uz aproksimacijsku pogrešku vezanu za $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ te $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$.

6.3.3 Usporedba struja $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$

Iz prethodno izvedenih Ampereovih jednadžbi 6.18, 6.23 i 6.29 slijedi da su struje $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$ solenoidalna vektorska polja, pa za svako od njih vrijedi

$$\nabla \cdot \vec{j}_{xy} = 0 \tag{6.30a}$$

$$\nabla \cdot \vec{j}_{xz} = 0 \tag{6.30b}$$

$$\nabla \cdot \vec{j}_{yz} = 0 \tag{6.30c}$$

Dakako, rješenja za $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ će zadovoljavat i jednadžbu 2.40, odnosno vrijedi da je

$$\nabla \cdot (\vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}) = 0 \tag{6.31}$$

što također slijedi i iz spregnute Ampereove jednadžbe 6.13. Budući da za struje $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ vrijede izrazi u 6.30, može ih se promatrati kao vrtložne struje. S obzirom na geometriju lamele, odnosno velik omjer širine i visine lamele naspram debljine lamele, tri navedena tipa vrtložnih struja imaju različite oblike strujnih petlji unutar lamele.
Dakle, zbog 6.30a, 6.30b te graničnog uvjeta 2.46, vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ teku u vrlo uskim petljama sa najčešće zanemarivim iznosom x-komponente struje, osim u području samih rubova lamela. S druge strane, za vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$ se ne može napraviti slična generalizacija, jer teku unutar yz ravnine lamele. Upravo zbog prostorne ortogonalnosti tri tipa vrtložnih struja te gotovo jednodimenzionalnog oblika vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ uzrokovanog lameliranjem jezgre, dobra će aproksimacija biti i ukupne gubitke P zbog vrtložnih struja $\vec{J}$ računati kao zbroj gubitaka uzrokovanih svakim od tri tipa vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ posebno, tj. $P = P_{yz} + P_{xz} + P_{xy}$, što će biti opisano u odjeljku 7.1.2. U slučaju jezgre otvorenog tipa sve tri komponente gubitaka imaju značajan iznos, što nije slučaj s jezgrom zatvorenog tipa gdje su gubitci zbog $\vec{j}_{yz}$ vrtložnih struja, inducirane u tom slučaju isključivo rasipnim magnetskim tokom, praktično zanemarivi u ukupnom iznosu gubitaka zbog vrtložnih struja.

Dakle, korištenjem vektorskih polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, te $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$, kao aproksimirajućih funkcija u m-tom konačnom elementa K_m, relaksiraju se zahtjevi na gustoću diskretizacije unutar Ω_{lam}, jer veličina m-tog konačnog elementa $K_m \in \Omega_{lam}$ mora biti takva da vrijede aproksimacije $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ te $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$, što je znatno blaži zahtjev na veličinu konačnog elementa nego u slučaju izravne aproksimacije konstantnim vektorima $\vec{B} \approx \nabla \times \vec{A}_h$ i $\vec{J} \approx \nabla \times \vec{T}_h$,

gdje su $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$ definirani u 4.12 i 4.13. Simbolička usporedba gustoće mreže konačnih elemenata za prvi i drugi tip aproksimacije prikazana je na slici 6.1.
Iako je aproksimacija magnetske indukcije $\vec{B}$ i vrtložnih struja $\vec{J}$ s po tri međusobno neovisna, ortogonalno orijentirana polja ostvarena lokalno, tj. za svaki konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$ posebno, provođenjem postupka homogenizacije slabe formulacije unutar svakog $K_m \in \Omega_{lam}$ omogućit će se globalna aproksimacija, tj. jedna globalna homogenizirana formulacija. Postupak homogenizacije će biti detaljnije opisan u sljedećem poglavlju 7. Pored toga, mogućnost izračuna ukupnih gubitaka zbog vrtložnih struja zbrajanjem pojedinačnih doprinosa gubitaka od $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ dodatan je razlog za aproksimaciju vrtložnih struja $\vec{J}$ strujama $\vec{j}_{yz}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$.

Poglavlje 7

Homogenizacija

U poglavlju 6.2 uvedena je aproksimacija za magnetsku indukciju $\vec{B}$ u konačnom elementu $K_m \in \Omega_{lam}$ u vidu međusobno neovisnih vektorskih polja $\vec{b}_x = b_x\vec{a}_x$, $\vec{b}_y = b_y\vec{a}_y$ i $\vec{b}_z = b_z\vec{a}_z$, gdje je $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$. Kao što je pokazano, za $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ moraju vrijediti uvjeti 6.4 kako bi vrijedila pretpostavka o njihovoj međusobnoj neovisnosti. Dakle, takva vektorska polja su stoga ovisna o samo dvije prostorne koordinate unutar K_m. Također, i vrtložne struje gustoće struje $\vec{J}$ moguće je onda aproksimirati vrtložnim strujama $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$, odnosno $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$ u konačnom elementu $K_m \in \Omega_{lam}$, koje su inducirane upravo vremenski promjenjivim vektorskim poljima $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ prema izrazima u 6.5. Pritom je i nadomjesne vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ moguće promatrati kao međusobno neovisna vektorska polja koja su onda također funkcije dviju prostornih koordinata, jer je $\partial_x\vec{j}_{yz} = 0$, $\partial_y\vec{j}_{xz} = 0$ i $\partial_z\vec{j}_{xy} = 0$ prema 6.5.
Dakle, stvarna magnetska indukcija $\vec{B}$ i vrtložne struje $\vec{J}$, koje su u volumenu konačnog elementa K_m funkcije triju prostornih varijabli, aproksimirane su tako sa po tri vektorska polja koja su funkcije dviju prostornih varijabli unutar volumena K_m. Pritom je važno ponovno naglasiti da je $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ moguće promatrati kao neovisna vektorska polja samo lokalno unutar volumena pojedinih konačnih elemenata $K_m \in M_h(\Omega_{lam})$, dok je za aproksimaciju globalnih rješenja nužno njihovo međusobno sprezanje na rubnim plohama konačnog elementa K_m, tj. stranicama poliedra K_m, kako bi se zadovoljili granični uvjeti 2.43-2.46 za polja $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{E}$ i $\vec{J}$ na granicama prema svim susjednim konačnim elementima.
Dakle, aproksimacijska polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$, $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ nisu namijenjena za izravnu aproksimaciju globalnih rješenja. Pravi razlog zbog kojeg su uvedeni $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ jest rasprezanje relevantnih trodimenzionalnih jednadžbi na međusobno neovisne dvodimenzionalne jednadžbe unutar volumena općeg konačnog elementa K_m. Za neke od dvodimenzionalnih jednadžbi je zatim moguće pronaći analitička ili numerička rješenja unutar K_m, u fazi predprocesiranja, ovisna o samo jednom stupnju slobode (npr. srednjoj vrijednost indukcije u K_m). Korištenjem dobivenih rješenja moguće je konstruirati nove bazne funkcije prilagođene ovom problemu te izvesti pripadnu slabu formulaciju, ograničenu na K_m. Konačno, homogenizacijom takve slabe formu-

lacije unutar K_m osigurava se globalna aproksimacija rješenja unutar cijele lamele.
Dakle, $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ zadovoljavaju raspregnute jednadžbe unutar K_m, tj. standardna trodimenzionalna Faradayeva jednadžba 6.3 i Ampereovo jednadžba 6.12 raspregnute su na tri međusobno neovisne Faradayeve jednadžbe 6.5 te tri međusobno neovisne Ampereove jednadžbe 6.29, 6.23 i 6.18. Radi preglednosti i lakšeg budućeg referenciranja u nastavku je svih šest raspregnutih vektorskih jednadžbi zapisano u obliku sustava jednadžbi definiranih za područje konačnog elementa $K_m \in \Omega_{lam}$, pri čemu su sve jednadžbe međusobno neovisne osim jednadžbi koje se nalaze u istom retku jer sadrže ista vektorska polja

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{yz} = -\partial_t \vec{b}_x \qquad (7.1a) \qquad \nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_x = \vec{j}_{yz} \qquad (7.1d)$$

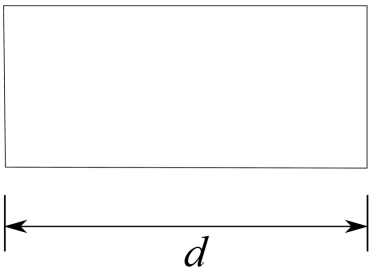
$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{xz} = -\partial_t \vec{b}_y \qquad (7.1b) \qquad \nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_y = \vec{j}_{xz} \qquad (7.1e)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{j}_{xy} = -\partial_t \vec{b}_z \qquad (7.1c) \qquad \nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \vec{b}_z = \vec{j}_{xy} \qquad (7.1f)$$

gdje su $\boldsymbol{\rho_{lam}}$ i $\boldsymbol{\nu_{lam}}$ definirane u 2.19 i 2.23. Također, važno je uočiti da za svih šest uvedenih vektorskih polja u 7.1 očigledno vrijedi i da su solenoidalna.
Nakon što se provede homogenizacija slabe formulacije unutar $K_m \in \Omega_{lam}$, pristupit će se i homogenizaciji slabe formulacije u području Ω_j, čime će se omogućiti dodatna relaksacija na gustoću diskretizacije domene uz aproksimaciju baznim funkcija iz prostora $U_h(\Omega)$ i $V_h(\Omega_j)$, tj. dodatno povećanje parametra h. Inače, kako bi se bitno smanjio broj stupnjeva slobode, neki vid homogenizacije je neizbježan u slučaju problema koji sadrže vrlo heterogenu problemsku domenu, kao što je slučaj s lameliranom feromagnetskom jezgrom. U literaturi postoji popriličan broj različitih pristupa homogenizaciji fizikalne slike, a veći broj njih je opisan u uvodnom poglavlju. U nastavku će se najprije odrediti analitička rješenja za dio vektorskih polja iz 7.1. Na temelju dobivenih analitičkih rješenja će se zatim odrediti slaba formulacija unutar $K_m \in \Omega_{lam}$ koja će u konačnici biti homogenizirana.

7.1 Jednodimenzionalne vrtložne struje

Iako je prema 7.1 broj jednadžbi u K_m porastao tri puta u odnosu na standardne jednadžbe 6.3 i 6.12, reducirana dimenzionalnost jednadžbi u 7.1 omogućuje pronalazak analitičkih rješenja uz zadovoljenje određenih uvjeta [13], [51], [52]. Dakle, u ovom odjeljku će se odrediti analitička rješenja jednadžbi 7.1c i 7.1f, te 7.1b i 7.1e, odnosno vektorskih polja $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$, te vektorskih polja $\vec{b}_y$ i $\vec{j}_{xz}$ za slučaj linearnih karakteristika materijala te sinusne vremenske ovisnosti uzbudne struje $\vec{J}_u$ (odnosno $\vec{T}_u$). Kao što je opisano u odjeljku 6.3.3, vrtložne struje $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ teku u vrlo tankim petljama unutar lamele zbog velikog omjera visine i širine naspram debljine pojedine lamele. Drugim riječima, x-komponenta struja $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ ima zanemariv iznos pa se za obje struje može pretpostaviti jednodimenzionalnost u velikom dijelu lamele. Jednodimenzionalnost rje-



Slika 7.1: Primjer konačnog elementa u lameli debljine d. Prikazan je tlocrt 3D elementa.

šenja u promatranom K_m nije točna samo ako se K_m nalazi uz rubove lamele jer se tamo javljaju takozvani rubni efekti. Točnije, vrtložne struje $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ zbog promjene smjera struje poprimaju oblik zavijene petlje, a ne beskonačne strujnice u konačnim elementima uz rub lamele. Izuzev njihove različite orijentacije, vrtložne struje $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{xy}$ su ekvivalentne pa je stoga dovoljno analizirati samo vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$.
U nastavku će se pretpostaviti da je aproksimacijska pogreška za $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ i $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$ dovoljno mala da se može zadati točno jedan konačni element po debljini lamele kao što je prikazano na slici, što je vrlo blaga pretpostavka u niskofrekvencijskom pojasu kojem pripadaju značajni harmonici elektroenergetske mreže.

7.1.1 Analitička rješenja jednodimenzionalnih vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$

U skladu s ranije navedenim, detaljno će se analizirati samo vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$, a svi dobiveni izrazi će analogno vrijediti i za $\vec{j}_{xz}$. Dakle, u konačnim elementima u kojima vrtložne struje poprimaju gotovo jednodimenzionalni oblik zanemarit će se J^x_{xy} komponenta, odnosno vrijedi da je $\vec{j}_{xy} = j^y_{xy}\vec{a}_y$. Prema tome, jednadžbe 7.1c i 7.1f prelaze u

$$\partial_x j^y_{xy} \frac{1}{\kappa_{yy}} = -\partial_t b_z \tag{7.2a}$$

$$-\partial_x b_z \frac{1}{\mu_{zz}} = j^y_{xy} \tag{7.2b}$$

gdje se 7.2a može jasnije uočiti iz raspisa 6.7a, a 7.2b iz raspisa 6.19a. Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu jednadžbu, parcijalno deriviranu po x, dobiva se

$$\partial_x^2 b_z \frac{1}{\kappa_{yy}\mu_{zz}} = \partial_t b_z \tag{7.3}$$

koja dakako predstavlja jednadžbu 6.17 bez doprinosa komponente J^x_{xy}. Parcijalna diferencijalna jednadžba 7.3 u frekvencijskoj domeni poprima jednostavan oblik homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda. Dakle, u slučaju vremenski sinusnog oblika uzbudne struje, te linearnih

značajki materijala (tj. $\kappa_{yy}\mu_{zz}$ linearni), jednadžba 7.3 prelazi u

$$\partial_x^2 b_z \frac{1}{\kappa_{yy}\mu_{zz}} = j\omega b_z \tag{7.4}$$

gdje j predstavlja imaginarnu jedinicu, a ω predstavlja kružnu frekvenciju uzbudne struje. Rješenje diferencijalne jednadžbe 7.4 glasi

$$b_z = b_{z1}e^{\gamma_z x} + b_{z2}e^{-\gamma_z x} \tag{7.5}$$

gdje konstante b_{z1} i b_{z2} ovise o rubnim uvjetima zadanog problema, a konstanta γ_z slijedi iz karakterističnog polinoma diferencijalne jednadžbe 7.4, odnosno vrijedi da je

$$\gamma_z^2 = j\omega\kappa_{yy}\mu_{zz} \implies \gamma_z = \sqrt{\omega\kappa_{yy}\mu_{zz}/2} + j\sqrt{\omega\kappa_{yy}\mu_{zz}/2} = \delta_z^{-1} + j\delta_z^{-1} \tag{7.6}$$

gdje se konstanta δ_z naziva dubina prodiranja.

Ako za m-ti konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$, unutar kojeg vrijedi aproksimacija $B_x \approx b_x$, $B_y \approx b_y$ i $B_z \approx b_z$, vrijedi da mu je širina u smjeru $\vec{a}_x$ jednaka debljini lamele d, kao što je prikazano na slici 7.1, tada 7.5 predstavlja rješenje po cijeloj debljini lamele u volumenu obuhvaćenom s K_m. Nadalje, kako se dvije stranice konačnog elementa K_m podudaraju s dvjema rubnim plohama promatrane lamele, uvrštavanjem specifičnih rubnih uvjeta vezanih za promatrani djelić lamele moguće je odrediti konstante b_{z1} i b_{z2} u jednadžbi 7.5.

Najprije, lokalni $(xyz)^i$-koordinatni sustav će se postaviti simetrično unutar lamele, na način da se centar koordinatnog sustava nalazi na pola debljine lamele. Zatim, prvi ulazni podatak ka određivanju konstanti b_{z1} i b_{z2} je pretpostavka o simetričnosti rubnih uvjeta u promatranom djeliću i-te lamele (debljine d), tj. pretpostavlja se da je tu b_z parna funkcija pa vrijedi da je $b_z\left(x = \frac{-d}{2}\right) = b_z\left(x = \frac{d}{2}\right)$, iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} b_{z1}e^{-\gamma_z\frac{d}{2}} + b_{z2}e^{\gamma_z\frac{d}{2}} &= b_{z1}e^{\gamma_z\frac{d}{2}} + b_{z2}e^{-\gamma_z\frac{d}{2}} \\ b_{z1} &= b_{z2} \end{aligned} \tag{7.7}$$

odnosno za konstante b_{z1} i b_{z2} vrijedi da su $b_{z1} = b_{z2} = C$ (gdje je C naziv konstante) pa izraz 7.5 prelazi u

$$\begin{aligned} b_z &= Ce^{\gamma_z x} + Ce^{-\gamma_z x} \\ b_z &= C\cosh(\gamma_z x) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Kao drugi ulazni podatak za određivanje konstanti b_{z1} i b_{z2}, odnosno konstante C, pretpostavit će se poznat iznos prosječne magnetske indukcije po debljini lamele $\bar{b}_z$ (naime, $\bar{b}_z$ će indirektno

biti nezavisna varijabla u MKE simulaciji te će kao takva biti ulazni podatak). Prema tome, iz izračuna prosječne indukcije po debljini lamele slijedi veza između konstante C i $\bar{b}_z$, to jest

$$\bar{b}_z = \frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} b_z \,\mathrm{d}x = \frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} C\cosh(\gamma_z x)\,\mathrm{d}x = \frac{2C\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})}{\gamma_z d} \tag{7.9}$$

Kombinacijom 7.9 i 7.8 dobiva se konačno rješenje (jednodimenzionalna aproksimacija) za magnetsku indukciju $b_z(x)$ kao funkciju od x koje glasi

$$b_z(x) = \bar{b}_z \frac{\gamma_z d\cosh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \tag{7.10}$$

Zatim, uvrštavanjem rješenja za $b_z(x)$ u jednadžbu 7.2b slijedi i konačno rješenje (jednodimenzionalna aproksimacija) za struju $J^y_{xy}(x)$ kao funkciju od x koje glasi

$$j^y_{xy}(x) = \bar{b}_z \frac{-j\omega\kappa_{yy} d\sinh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \tag{7.11}$$

Važno je uočiti da su u izrazima 7.10 i 7.11 parametri γ_z, d, j, ω i κ_{yy} svi konstante unutar cijelog volumena lamele (područje Ω_{lam}), dok je $\bar{b}_z$ također konstanta ali unutar konačnog elementa K_m, odnosno $\bar{b}_z$ ovisi o koordinatama z i y (o poziciji konačnog elementa K_m) unutar Ω_{lam}. Dakle, za vektorska polja $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ (gdje je $j^x_{xy} = 0$) izvedena su analitička rješenja ovisna o funkciji $\bar{b}_z$ koja je pak konstantna unutar svakog volumena $K_m \in M_h(\Omega_j)$ pa ju je stoga moguće izraziti pomoću $A_h \in U_h$.

Analogno izrazu 7.10, konačno rješenje (jednodimenzionalna aproksimacija) za magnetsku indukciju $b_y(x)$ kao funkciju od x glasi

$$b_y(x) = \bar{b}_y \frac{\gamma_y d\cosh(\gamma_y x)}{2\sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \tag{7.12}$$

gdje za konstantu γ_y vrijedi da je

$$\gamma_y^2 = j\omega\kappa_{zz}\mu_{yy} \implies \gamma_y = \sqrt{\omega\kappa_{zz}\mu_{yy}/2} + j\sqrt{\omega\kappa_{zz}\mu_{yy}/2} = \delta_y^{-1} + j\delta_y^{-1} \tag{7.13}$$

Isto tako, analogno izrazu 7.11, konačno rješenje (jednodimenzionalna aproksimacija) za struju $j^z_{xz}(x)$ kao funkciju od x glasi

$$j^z_{xz}(x) = \bar{b}_y \frac{j\omega\kappa_{zz} d\sinh(\gamma_y x)}{2\sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \tag{7.14}$$

Kao i u slučaju 7.10 i 7.11, izrazi s desne strane u 7.12 i 7.14 predstavljaju analitička rješenja za vektorska polja $\vec{b}_y$ i $\vec{j}_{xz}$. $\bar{b}_y$ je po dijelovima konstantna funkcija (konstantna unutar svakog

volumena $K_m \in M_h(\Omega_j)$, te kao takva predstavlja stupanj slobode unutar K_m kojim se množe bazne funkcije iz 7.12 i 7.14. Nakon homogenizacije slabe formulacije, konstantu $\bar{b}_z$ se može izraziti pomoću $A_h \in U_h$.
U nastavku će se iz prethodno izvedenih izraza odrediti i pripadni gubitci zbog vrtložnih struja za slučaj jednodimenzionalne aproksimacije.

7.1.2 Jednodimenzionalna aproksimacija gubitaka zbog $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$

Ponovno će se raditi detaljna analiza samo za vrtložnu struju $\vec{j}_{xy}$, a svi dobiveni izrazi će analogno vrijediti i za $\vec{j}_{xz}$. Korištenjem prethodno uvedene jednodimenzionalne aproksimacije, izračunat će se prosječni gubitci u konačnom elementu sa slike 7.1 uzrokovani vrtložnim strujama gustoće $\vec{j}_{xy} = j^y_{xy}\vec{a}_y$. Općenito, za fazor gustoće struje j^y_{xy} prosječni gubitci se računaju kao

$$P_{xy} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} |j^y_{xy}|^2 \frac{1}{2\kappa_{yy}}\,\mathrm{d}x \tag{7.15}$$

gdje je 2 u nazivniku potrebno jer j^y_{xy} nije efektivna vrijednost. Uvrštavanjem 7.11 dalje slijedi

$$P_{xy} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \left|\bar{b}_z \frac{-j\omega\kappa_{yy} d \sinh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})}\right|^2 \frac{1}{2\kappa_{yy}}\,\mathrm{d}x \tag{7.16}$$

$$= \bar{b}_z^2 \frac{\kappa_{yy}\omega^2 d}{8}\int_{-d/2}^{d/2} \left|\frac{\sinh(\gamma_z x)}{\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})}\right|^2 \mathrm{d}x \tag{7.17}$$

Raspisivanjem podintegralne funkcije, uz pomoću identiteta o sinusu hiberbolnom od zbroja, dobiva se

$$\left|\frac{\sinh(\gamma_z x)}{\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})}\right|^2 = \left|\frac{\sinh((1+j)\delta_z^{-1}x)}{\sinh((1+j)\delta_z^{-1}\frac{d}{2})}\right|^2 = \frac{\cosh(2\delta_z^{-1}x) - \cos(2\delta_z^{-1}x)}{\cosh(\delta_z^{-1}d) - \cos(\delta_z^{-1}d)} \tag{7.18}$$

Konačno, uvrštavanjem 7.18 nazad u 7.16 te integriranjem u navedenim granicama dobivaju se prosječni gubitci u konačnom elementu širine d sa slike 7.1 koji iznose

$$P_{xy} = \bar{b}_z^2 \frac{\kappa_{yy}\omega^2\delta_z d}{8}\left(\frac{\sinh(\delta_z^{-1}d) - \sin(\delta_z^{-1}d)}{\cosh(\delta_z^{-1}d) - \cos(\delta_z^{-1}d)}\right) \tag{7.19}$$

Analognim postupkom dobivaju se i gubitci P_{xz} uzrokovani vrtložnim strujama $\vec{j}_{xz} = j^z_{xz}\vec{a}_z$.

7.2 Dvodimenzionalne vrtložne struje

Za razliku od vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ čije strujnice poprimaju predvidive oblike tankih petlji unutar tankih lamela, za strujnice vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$ nije moguće iskoristiti sličnu generalizaciju jer njihove petlje leže unutar široke plohe lamele. Drugim riječima, u konačnom elementu K_m nije poznat omjer iznosa komponenti vektora $\vec{j}_{yz}$, tj. nije poznat smjer vektora $\vec{j}_{yz}$. Prema tome, za izračun $\vec{j}_{yz}$ neizbježno je korištenje 6.27 u punom obliku. Pored nepoznatog smjera vektorskog polja $\vec{j}_{yz}$ u m-tom konačnom elementu K_m, veći problem predstavlja to što rubni uvjeti na stranicam konačnog elementa K_m nisu unaprijed poznati, odnosno imaju globalni karakter jer su ovisni o rješenjima jednadžbe 6.27 u susjednim konačnim elementima. Kao i u prethodnom slučaju, rješenje za 6.27 će se tražiti za harmonički slučaj.

7.2.1 Analitičko rješenje za dvodimenzionalne vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$

U slučaju sinusne vremenske ovisnosti uzbudne struje J_u te linearnih karakteristika materijala, jednadžba 6.27 poprima sljedeći oblik

$$\partial_z^2 b_x \frac{1}{\kappa_{yy}\mu_{xx}} + \partial_y^2 b_x \frac{1}{\kappa_{zz}\mu_{xx}} = j\omega b_x \tag{7.20}$$

gdje j opet predstavlja imaginarnu jedinicu, a ω predstavlja kružnu frekvenciju uzbudne struje. Analitičko rješenje jednadžbe 7.20 postoji, i bit će samo skicirano u nastavku. Kako bi skica rješenja bila jednostavnija, pogodno je koristiti izotropni oblik jednadžbe 7.20 koji glasi

$$\partial_z^2 b_x \frac{1}{\kappa\mu_{xx}} + \partial_y^2 b_x \frac{1}{\kappa\mu_{xx}} = j\omega b_x \tag{7.21}$$

gdje zbog pretpostavljene izotropije električne provodnosti vrijedi da je $\kappa_{yy} = \kappa_{zz} = \kappa$.
Jednadžbu 7.21 moguće je riješiti pomoću metode separacije varijabli, odnosno korištenjem pretpostavke da je $b_x(y,z)$ kao funkcija koordinata z i y umnožak dviju međusobno neovisnih funkcija jedne varijable, tj.

$$b_x = f(y) \cdot g(z) \tag{7.22}$$

gdje je $f(y)$ funkcija isključivo y koordinate, a $g(z)$ funkcija isključivo z koordinate [17]. U tom slučaju jednadžba 7.21 prelazi u

$$(\partial_y^2 f) \cdot g \frac{1}{\kappa\mu_{xx}} + (\partial_z^2 g) \cdot f \frac{1}{\kappa\mu_{xx}} = j\omega b_x \tag{7.23}$$

pa dijeljenjem cijelog izraza s b_x slijedi jednadžba

$$\frac{1}{f}(\partial_y^2 f) + \frac{1}{g}(\partial_z^2 g) = k \tag{7.24}$$

gdje konstanta k iznosi $k = j\omega\kappa\mu_{xx}$. Budući da su funkcije f i g međusobno neovisne, oba pribrojnika s lijeve strane u 7.24 moraju imati konstantan iznos, odnosno konačno slijede separirane jednadžbe

$$\frac{1}{f}(\partial_y^2 f) = k_f \tag{7.25a}$$

$$\frac{1}{g}(\partial_z^2 g) = k_g \tag{7.25b}$$

gdje vrijedi da je $k = k_f + k_g$. Separirane jednadžbe 7.25 predstavljaju obične homogene diferencijalne jednadžbe drugog stupnja čija rješenja ovise o predznaku i iznosu konstanti k_f i k_g, a njihov je opći oblik:

$$f(y) = C_{f1}e^{k_f y} + C_{f2}e^{-k_f y} \tag{7.26a}$$

$$g(z) = C_{g1}e^{k_g z} + C_{g2}e^{-k_g z} \tag{7.26b}$$

Konačno rješenje za magnetsku indukciju b_x je prema 7.22 jednako umnošku rješenja za f i g. U slučaju izračuna vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$ korištenjem 7.26, rubni uvjeti ovise o poziciji promatranog konačnog elementa K_m. Dakle, za razliku od rješenja 7.10, 7.12 za slučaj jednodimenzionalnih struja, rješenja za slučaj dvodimenzionalnih struja nemaju lokalni karakter, jer rubni uvjeti iz kojih bi se trebale odrediti konstante u 7.26 značajno ovise o rješenjima u ostatku lamele, tj. imaju globalni karakter. Dodatno, jednadžba $k = k_f + k_g$, ovisno o rubnim uvjetima područja izračuna, u općem slučaju može imati beskonačno rješenja, što znači da i jednadžbe 7.26 imaju beskonačno rješenja. No, kao što je ranije navedeno, čak i u slučaju postojanja samo jedne valjane kombinacije konstanti k_f i k_g u izrazu $k = k_f + k_g$, ona ne bi bila unaprijed poznata, tj. ovisila bi o rješenjima u ostatku lamele. Prema tome, vektorsko polje $\vec{b}_x$ i vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$ u budućim izračunima (računalnim simulacijama) će se uvijek modelirati izravno, bez oslanjanja na analitičko rješenje 7.26, odnosno korištenjem isključivo metode konačnih elemenata kojom se zadovoljavajuća aproksimacija postiže ili pomoću gušće diskretizacije ili pomoću baznih funkcija većeg stupnja.

7.3 Prilagođena slaba formulacija u $K_m \in \Omega_{lam}$

U slučaju linearnih značajki materijala, te sinusne vremenske ovisnosti uzbudne struje J_u, za vektorska polja $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$, $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ su izračunata analitička rješenja ovisna o ulaznim podacima $\bar{b}_y$ ili $\bar{b}_z$ koji predstavljaju prosječnu vrijednost indukcije $\vec{b}_y$ ili $\vec{b}_z$ u konačnom elementu sa slike 7.1, kao što je objašnjeno u odjeljku 7.1.1. Dakle, čim su poznati $\bar{b}_y$ i $\bar{b}_z$ u K_m, odmah su poznata rješenja za $\vec{b}_y$ i $\vec{b}_z$ u K_m. S druge strane, za $\vec{b}_x$ i $\vec{j}_{yz}$ nisu izračunata lokalna analitička rješenja, jer nije pronađena izravna veza između rješenja za $\vec{b}_x$ i rješenja za $\vec{j}_{yz}$ unutar K_m, zbog njihove

ovisnosti o rješenjima u ostatku domene. Rješenja za $\vec{b}_x$ i $\vec{j}_{yz}$ unutar konačnog elementa se stoga dobivaju na temelju $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_h$, tj. aproksimacijom pomoću baznih funkcija iz U_h i V_h.
Dakle, vektorska polja $\vec{b}_x$, $\vec{b}_y$, $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ i $\vec{j}_{yz}$ u općem konačnom elementu $K_m \in M_h(\Omega_{lam})$ sa slike 7.1 za linearni i harmonički slučaj glase

$$\vec{b}_x = \sum_i^{n_e} A_h^i (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \cdot \vec{a}_x \tag{7.27a}$$

$$\vec{b}_y = \bar{b}_y \frac{\gamma_y d \cosh(\gamma_y x)}{2\sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \cdot \vec{a}_y \tag{7.27b}$$

$$\vec{b}_z = \bar{b}_z \frac{\gamma_z d \cosh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \cdot \vec{a}_z \tag{7.27c}$$

$$\vec{j}_{yz} = \sum_j^{n_e} T_h^j (\nabla \times \vec{\tau}_{jx}) \tag{7.27d}$$

$$\vec{j}_{xz} = \bar{b}_y \frac{j\omega\kappa_{zz} d \sinh(\gamma_y x)}{2\sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \cdot \vec{a}_z \tag{7.27e}$$

$$\vec{j}_{xy} = \bar{b}_z \frac{-j\omega\kappa_{yy} d \sinh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \cdot \vec{a}_y \tag{7.27f}$$

gdje je n_e broj bridova konačnog elementa K_m, a $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x$ predstavlja iznos x-komponente vektora $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)$ u konačnom elementu K_m. Pretpostavlja se da je $j_{xy}^x = 0$ i $j_{xz}^x = 0$.
Zatim, budući da su $\bar{b}_y$ i $\bar{b}_z$ po definiciji konstante unutar volumena konačnog elementa K_m, moguće je ostvariti njihovu egzaktnu aproksimaciju unutar K_m upravo korištenjem baznih funkcija iz vektorskog prostora U_h i s njima svezanih stupnjeva slobode A_h^i, to jest

$$\bar{b}_y = \sum_i^{n_e} A_h^i \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y} \tag{7.28a}$$

$$\bar{b}_z = \sum_i^{n_e} A_h^i \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} \tag{7.28b}$$

gdje $\overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y}$ i $\overline{(\nabla \times \vec{\tau}_i)_z}$ označavaju prosječni iznos y i z komponente vektora $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)$ i $(\nabla \times \vec{\tau}_i)$, unutar $K_m \in M_h(\Omega_{lam})$. Očigledno, rješenja za $\vec{b}_y$, $\vec{b}_z$, $\vec{j}_{xy}$, $\vec{j}_{xz}$ izražena pomoću funkcija u 7.27b, 7.27c, i 7.27f i 7.27e vrijede unutar konačnog elementa koji ima znatno veće dimenzije nego u slučaju interpolacije rješenja korištenjem samo baznih funkcija iz U_h i V_h. Dakle, korištenjem izraza iz 7.27 moguće je ostvariti bolju aproksimaciju globalnih rješenja uz isti broj stupnjeva slobode, što u konačnici omogućuje manju gustoću diskretizacije domene.

7.3.1 Bazne funkcije unutar $K_m \in \Omega_{lam}$

Korištenjem izraza iz 7.27 kao aproksimacijskih funkcija za $\vec{B}$ i $\vec{J}$ unutar konačnog elementa K_m, na način da je $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ i $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$, ostvaraju se bolja pretpostavka konačnog

rješenja za $\vec{B}$ i $\vec{J}$ u konačnom elementu koja glasi

$$\vec{B} \approx \underbrace{\sum_i^{n_e} (A_h^i (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \cdot \vec{a}_x)}_{\vec{b}_x} + \underbrace{\bar{b}_y F_y \vec{a}_y}_{\vec{b}_y} + \underbrace{\bar{b}_z F_z \vec{a}_z}_{\vec{b}_z} \tag{7.29}$$

$$\vec{J} \approx \underbrace{\sum_j^{n_e} (T_h^j (\nabla \times \tau_{jx} \vec{a}_x))}_{\vec{j}_{yz}} + \underbrace{\bar{b}_z G_y \vec{a}_y}_{\vec{j}_{xy}} + \underbrace{\bar{b}_y G_z \vec{a}_z}_{\vec{j}_{xz}} \tag{7.30}$$

gdje su radi bolje preglednosti umjesto razlomaka u 7.27 definirane funkcije

$$F_y(x) = \frac{\gamma_y d \cosh(\gamma_y x)}{2 \sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \qquad F_z(x) = \frac{\gamma_z d \cosh(\gamma_z x)}{2 \sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \tag{7.31a}$$

$$G_z(x) = \frac{j\omega\kappa_{zz} d \sinh(\gamma_y x)}{2 \sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \qquad G_y(x) = \frac{-j\omega\kappa_{yy} d \sinh(\gamma_z x)}{2 \sinh(\gamma_z \frac{d}{2})} \tag{7.31b}$$

Za uvedene funkcije vrijede sljedeće relacije, dobivene iz 7.1e i 7.1f

$$\begin{aligned} G_z \vec{a}_z &= \frac{1}{\mu_{yy}} \nabla \times (F_y \vec{a}_y) & G_y \vec{a}_y &= \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla \times (F_z \vec{a}_z) \\ &= \frac{1}{\mu_{yy}} \partial_x F_y \vec{a}_z & &= \frac{-1}{\mu_{zz}} \partial_x F_z \vec{a}_y \end{aligned} \tag{7.32}$$

Također, zbog 7.1b i 7.1c vrijede i sljedeće dvije relacije

$$\begin{aligned} F_y \vec{a}_y &= \frac{j}{\omega\kappa_{zz}} \nabla \times (G_z \vec{a}_z) & F_z \vec{a}_z &= \frac{j}{\omega\kappa_{yy}} \nabla \times (G_y \vec{a}_y) \\ &= \frac{-j}{\omega\kappa_{zz}} \partial_x G_z \vec{a}_y & &= \frac{j}{\omega\kappa_{yy}} \partial_x G_y \vec{a}_z \end{aligned} \tag{7.33}$$

Budući da je $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ i $\vec{J} = \nabla \times \vec{T}$, izraze 7.29 i 7.30 se može zapisati kao

$$\nabla \times \vec{A} \approx \sum_i^{n_e} (A_h^i (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \cdot \vec{a}_x) + \bar{b}_y F_y \vec{a}_y + \bar{b}_z F_z \vec{a}_z \tag{7.34}$$

$$\nabla \times \vec{T} \approx \sum_j^{n_e} (T_h^j (\nabla \times \tau_{jx} \vec{a}_x)) + \bar{b}_z G_y \vec{a}_y + \bar{b}_y G_z \vec{a}_z \tag{7.35}$$

Na kraju, uvrštavanjem 7.28 u 7.34, slijedi potpuno definirana konačnodimenzionalna aproksimacija $\nabla \times \vec{A} \approx \nabla \times \vec{A}_h^*$ u K_m, uz stupnjeve slobode A_h^i definirane prema 4.14, to jest

$$\nabla \times \vec{A}_h^* = \sum_i^{n_e} A_h^i \underbrace{\left((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \vec{a}_x + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y} \, F_y \vec{a}_y + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} \, F_z \vec{a}_z \right)}_{= \nabla \times \vec{\eta}_i} \tag{7.36}$$

gdje $\vec{\eta}_i$ onda predstavlja baznu funkciju aproksimacije unutar konačnog elementa, a i označava lokalni indeks brida e_i za koji su bazna funkcija $\vec{\eta}_i$ i njen stupanj slobode A_h^i vezani. U skladu s tim, zvjezdica u $\vec{A}_h^*$ naznačava aproksimaciju baznim funkcijama $\vec{\eta}_i$. Dakle, aproksimacija za vektorski potencijal $\vec{A}$ u konačnom elementu K_m onda glasi

$$\vec{A}_h^*(K_m) = \sum_i^{n_e} A_h^i \vec{\eta}_i \tag{7.37a}$$

$$\nabla \times \vec{A}_h^*(K_m) = \sum_i^{n_e} A_h^i \nabla \times \vec{\eta}_i \tag{7.37b}$$

$$\nabla \times \vec{\eta}_i = ((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \vec{a}_x + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y}\, F_y \vec{a}_y + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z}\, F_z \vec{a}_z) \tag{7.37c}$$

Eksplicitan izraz za $\vec{\eta}_i$ slijedi iz 7.37c korištenjem relacija iz 7.33, to jest

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{\eta}_i =& ((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \vec{a}_x + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y} F_y \vec{a}_y + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} F_z \vec{a}_z) \\
=& \nabla \times (\alpha_{iy} \vec{a}_y + \alpha_{iz} \vec{a}_z) + \\
& \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y}\, \frac{j}{\omega \kappa_{zz}} \nabla \times (G_z \vec{a}_z) + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z}\, \frac{j}{\omega \kappa_{yy}} \nabla \times (G_y \vec{a}_y) \\
=& \nabla \times \left((\alpha_{iy} \vec{a}_y + \alpha_{iz} \vec{a}_z) + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y}\, \frac{j}{\omega \kappa_{zz}} G_z \vec{a}_z + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z}\, \frac{j}{\omega \kappa_{yy}} G_y \vec{a}_y \right)
\end{aligned} \tag{7.38}$$

pa iz posljednjeg izraza slijedi bazna funkcija $\vec{\eta}$ koja glasi

$$\vec{\eta}_i = (\alpha_{iy} \vec{a}_y + \alpha_{iz} \vec{a}_z) + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y}\, \frac{j}{\omega \kappa_{zz}} G_z \vec{a}_z + \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z}\, \frac{j}{\omega \kappa_{yy}} G_y \vec{a}_y \tag{7.39}$$

uz napomenu da se konstanta integracije, koja postoji prema $\nabla \times (\vec{\eta}_i + \vec{c}) = \nabla \times \vec{\eta}_i$, ovdje izostavlja jer bi polje $\vec{c}$ svakako bilo eliminirano tijekom homogenizacije zbog množenja neparnom funkcijom G_z ili G_y.

Što se tiče aproksimacije za $\nabla \times \vec{T}$ unutar K_m, izraz 7.35 je moguće zapisati na drugačiji način, uvrštavanjem relacija 7.32, pa izraz 7.35 prelazi u

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{T} &\approx \sum_j^{n_e} (T_h^j (\nabla \times \tau_{jx} \vec{a}_x)) + \bar{b}_z \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla \times (F_z \vec{a}_z) + \bar{b}_y \frac{1}{\mu_{yy}} \nabla \times (F_y \vec{a}_y) \\
&\approx \nabla \times \left(\sum_j^{n_e} (T_h^j \tau_{jx} \vec{a}_x) + \bar{b}_z \frac{1}{\mu_{zz}} (F_z \vec{a}_z) + \bar{b}_y \frac{1}{\mu_{yy}} (F_y \vec{a}_y) \right) \\
&\approx \nabla \times \left(\sum_j^{n_e} (T_h^j \tau_{jx} \vec{a}_x) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \nabla \times \vec{A}_h^* \right)
\end{aligned} \tag{7.40}$$

gdje je treći redak dobiven iz drugog retka korištenjem jednakosti iz 7.34. Zatim, uvrštavanjem izraza 7.37b umjesto $\nabla \times \vec{A}_h^*$, dobiva se potpuno definirana konačnodimenzionalna aproksima-

cija $\nabla \times \vec{T} \approx \nabla \times \vec{T}_h^*$ u konačnom elementu koja glasi

$$\nabla \times \vec{T}_h^* = \nabla \times \left(\sum_j^{n_e} T_h^j \tau_{jx} \vec{a}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \sum_i^{n_e} A_h^i \nabla \times \vec{\eta}_i \right) \tag{7.41}$$

Iz 7.41 se može izračunati i konačnodimenzionalna aproksimacija $\vec{T} \approx \vec{T}_h^*$

$$\vec{T}_h^* = \sum_j^{n_e} T_h^j \tau_{jx} \vec{a}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \sum_i^{n_e} A_h^i \nabla \times \vec{\eta}_i \tag{7.42}$$

Dakle, kao što se vidi iz 7.37, 7.41 i 7.42, za aproksimaciju u konačnom elementu koristit će se bazne funkcije $\vec{\eta}_i$ i $\tau_{jx}\vec{a}_x$, a njima pridruženi stupnjevi slobode označeni su s A_h^i i T_h^j. Što se tiče bazne funkcije $\tau_{jx}\vec{a}_x$, nju je moguće koristiti izravno, eksplicitnim postavljanjem y i z komponente vektora $\vec{T}_h$ u nulu u vidu Dirichleteovih volumnih uvjete, ili postavljanjem x-komponente električne provodnosti na vrijednost blisku nuli, tj. $\kappa_{xx} \approx 0$, zbog čega će prvi element u tenzoru $\boldsymbol{\rho_{lam}}$ poprimiti jako veliku vrijednost te će x-komponenta struje, odnosno y i z komponente vektora $\vec{T}_h$, težiti u nulu.
Prema Galerkinovoj metodi, bazne funkcije $\vec{\eta}_i$ i $\tau_{jx}\vec{a}_x$ će se koristiti kao težinske funkcije, što efektivno znači da su samo $\vec{A}$ i $\vec{T}_x$, odnosno $\vec{B}$ i $\vec{j}_{yz}$, problemske nepoznanice. Radi distinkcije u odnosu na bazne funkcije, težinske funkcije $\vec{\eta}_k$ i $\tau_{lx}\vec{a}_x$ će imati indeks k i l.

7.3.2 Jednadžbe Galerkinove slabe formulacije u $K_m \in \Omega_{lam}$

Jednadžbe 6.3 i 6.12 za $\vec{B}$ i $\vec{J}$ unutar konačnog elementa $K_m \in \Omega_{lam}$ glase

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{T} = \nabla \times \vec{T}_u \tag{7.43}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times \vec{T} + j\omega \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{7.44}$$

gdje su iskorištene jednakosti $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ i $\vec{J} = \nabla \times \vec{T}$. Zatim, korištenjem konačnodimenzinalnih aproksimacija $\vec{A} \approx \vec{A}_h^*$ i $\vec{T} \approx \vec{T}_h^*$, odnosno $\nabla \times \vec{A} \approx \nabla \times \vec{A}_h^*$ i $\nabla \times \vec{T} \approx \nabla \times \vec{T}_h^*$ navedenih u 7.37, 7.39 i 7.41, uz težinske funkcije $\vec{\eta}_k$ i $\tau_{lx}\vec{a}_x$, slijedi slaba formulacija

$$\begin{aligned} \int_{K_m} \nabla \times (\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{A}_h^*) \cdot \vec{\eta}_k \, \mathrm{d}V - \int_{K_m} (\nabla \times \vec{T}_h^*) \cdot \vec{\eta}_k \, \mathrm{d}V \\ = \int_{K_m} (\nabla \times \vec{T}_u) \cdot \vec{\eta}_k \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, \ldots, n_A \end{aligned} \tag{7.45}$$

$$\int_{K_m} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times \vec{T}_h^*) \cdot (\tau_{lx}\vec{a}_x) \, \mathrm{d}V + \int_{K_m} j\omega (\nabla \times \vec{A}_h^*) \cdot (\tau_{lx}\vec{a}_x) \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, \ldots, n_T \tag{7.46}$$

za m-ti konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$, gdje n_A i n_T predstavljaju broj slobodnih stupnjeva slobode u konačnom elementu K_m.
Analogno postupku opisanom u poglavlju 5, iz 7.45 i 7.46 dobivaju se konačne jednadžbe Galerkinove slabe formulacije koje glase

$$\int_{K_m} (\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{A}_h^*) \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V - \int_{K_m} (\nabla \times \vec{T}_h^*) \cdot \vec{\eta}_k \, \mathrm{d}V = \int_{K_m} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.47}$$

$$\int_{K_m} (\boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times \vec{T}_h^*) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V + \int_{K_m} j\omega \vec{A}_h^* \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., n_T \tag{7.48}$$

za svaki konačni element $K_m \in \Omega_{lam}$.
Kako bi se omogućila globalna aproksimacija rješenja, homogenizirat će se prethodna slaba formulacija u svakom konačnom elementu iz Ω_{lam}, tj. u općem m-tom elementu $K_m \in \Omega_{lam}$.

7.4 Homogenizirana slaba formulacija u $K_m \in \Omega_{lam}$

S obzirom na to da se u baznoj funkciji $\vec{\eta}_i$ i težinskoj funkciji $\vec{\eta}_k$ nalaze funkcije F_y i F_z čija je funkcionalna ovisnost unaprijed poznata, kao što se vidi u 7.31, moguće je provesti njihovo usrednjavanje, tj. homogenizaciju podintegralnih funkcija u konačnom elementu.
Eksplicitnim uvrštavanjem izraza 7.37b u prvi integral u 7.47, dobiva se

$$\int_{K_m} (\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{A}_h^*) \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V = \int_{K_m} (\boldsymbol{\nu_{lam}} \sum_i^{n_e} A_h^i \nabla \times \vec{\eta}_i) \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.49}$$

Daljnji raspis podintegralne funkcije dobiva se uvrštavanjem izraza 7.37c u prethodnu jednadžbu. Budući da su $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y$ i $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z$ svakako konstante unutar K_m (zbog niskog stupnja interpolacijskog polinoma), u nastavku će se izostaviti oznaka za srednju vrijednost nad vektorima $(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y$ i $(\nabla \times \vec{\tau}_i)_z$ u 7.37c. Dakle, i-ti član sume iz 7.49, bez A_h^i, glasi

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{\eta}_i) \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) &= \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y F_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z F_z \end{bmatrix}^\mathsf{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_y F_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z F_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z \end{bmatrix}^\mathsf{T} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_y^2}{\mu_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_z^2}{\mu_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.50}$$

Slično tome, uvrštavanjem izraza 7.37b u drugi integral u 7.47, dobiva se

$$
\begin{aligned}
-\int_{K_m}(\nabla\times\vec{T}_h^*)\cdot\vec{\eta}_k\,\mathrm{d}V &= -\int_{K_m}\nabla\times\left(\sum_j^{n_e}T_h^j\tau_{jx}\vec{a}_x+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{\mu_{zz}}&0\\0&0&\frac{1}{\mu_{yy}}\end{bmatrix}\cdot\sum_i^{n_e}A_h^i\nabla\times\vec{\eta}_i\right)\cdot\vec{\eta}_k\,\mathrm{d}V\\
&= -\int_{K_m}\sum_j^{n_e}T_h^j\nabla\times(\tau_{jx}\vec{a}_x)\cdot\vec{\eta}_k \qquad (7.51)\\
&\quad -\int_{K_m}\sum_i^{n_e}A_h^i((\nabla\times\vec{\alpha}_i)_zG_y\vec{a}_y+(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_yG_z\vec{a}_z)\cdot\vec{\eta}_k\,\mathrm{d}V,\quad k=1,...,n_A
\end{aligned}
$$

gdje se konačni izraz u 7.51 zapravo može odmah iščitati iz 7.35. Zatim, potrebno je uvrstiti i izraz 7.39, pa se za j-ti član prve sume u podintegralnoj funkciji dobije

$$
\begin{aligned}
-\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x\cdot\vec{\eta}_k &= \begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\-\alpha_{ky}-(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_z\,\frac{j}{\omega\kappa_{yy}}G_y\\-\alpha_{kz}-(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_y\,\frac{j}{\omega\kappa_{zz}}G_z\end{bmatrix}\\
&= -\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\\alpha_{ky}\\\alpha_{kz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_z\,\frac{-j}{\omega\kappa_{yy}}G_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_y\,\frac{-j}{\omega\kappa_{zz}}G_z\end{bmatrix} \qquad (7.52)\\
&= -\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{kx}\\\alpha_{ky}\\\alpha_{kz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{jx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{-jG_y}{\omega\kappa_{yy}}\\0&\frac{-jG_z}{\omega\kappa_{zz}}&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_x\\(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_z\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Slično tome, uvrštavanjem 7.39, za i-ti član druge sume u jednadžbi 7.51 slijedi

$$
\begin{aligned}
-((\nabla\times\vec{\alpha}_i)_zG_y\vec{a}_y+(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_yG_z\vec{a}_z)\cdot\vec{\eta}_k &= \begin{bmatrix}(0\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_zG_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_yG_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\-\alpha_{iy}-(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\,\frac{jG_y}{\omega\kappa_{yy}}\\-\alpha_{iz}-(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\,\frac{jG_z}{\omega\kappa_{zz}}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_x\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-G_y&0\\0&0&-G_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{ix}\\\alpha_{iy}\\\alpha_{iz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_x\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac{-jG_z^2}{\omega\kappa_{yy}}&0\\0&0&\frac{-jG_y^2}{\omega\kappa_{zz}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_x\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\end{bmatrix} \qquad (7.53)
\end{aligned}
$$

Kao što je objašnjeno u 5, komponente vektora uzbude $\vec{T}_u = T_{ux}\vec{a}_x + T_{uy}\vec{a}_y + T_{uz}\vec{a}_z$ će biti interpolirane čvornim baznim funkcijama unutar konačnog elementa prema 4.6, uz izostavljanje ekponenta (j) kojim se naznačava redni broj konkretnog konačnog elementa. Pritom će se moći

postaviti y i z komponentu vektora $\vec{T}_u$ u nulu, tj. vrijedit će $\vec{T}_u = T_{uz}\vec{a}_z$, gdje je $T_{uz} = \text{konst.}$ u Ω_j kako bi vrijedilo da je $\nabla \times \vec{T}_u = 0$ u Ω_j. Prema tome, za posljednji integral u 7.47 dobiva se

$$\int_{K_m} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k)\,\mathrm{d}V = \int_{K_m} \sum_{p}^{n_p} T_{uz}^{p}\, \lambda_p \vec{a}_z \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k)\,\mathrm{d}V, \quad k = 1,...,n_A \tag{7.54}$$

Zatim, uvrštavanjem punog izraza za $\nabla \times \vec{\eta}_k$ iz 7.37c, za p-ti član sume prethodnog integrala, uz izostavljanje stupnja slobode T_{uz}^{p}, slijedi

$$\lambda_p \vec{a}_z \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_p \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_y F_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_p \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & F_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_x \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_y \\ (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z \end{bmatrix} \tag{7.55}$$

Što se tiče drugog seta jednadžbi 7.48 Galerkinove slabe formulaciji, uvrštavanjem izraza 7.41 u prvi integral u 7.48, kao i u slučaju 7.51 dobit će se konačni izraz

$$\begin{aligned} \int_{K_m} (\boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times \vec{T}_h^{*}) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V &= \int_{K_m} \boldsymbol{\rho_{lam}} \sum_{j}^{n_e} T_h^{j} (\nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x)) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) \\ + \int_{K_m} \boldsymbol{\rho_{lam}} \sum_{i}^{n_e} A_h^{i} ((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z G_y \vec{a}_y + (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y G_z \vec{a}_z) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V, &\quad l = 1,...,n_T \end{aligned} \tag{7.56}$$

Zatim, kao i prethodnim jednadžbama provest će se potpuni raspis jednog člana sume kako bi se dobio bolji uvid u podintegralnu funkciju.
Prema tome, za j-ti član prve sume, bez stupnja slobode T_h^{j}, dobiva se

$$(\boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x)) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla \times \tau_{jx}\vec{a}_x)_y \\ (\nabla \times \tau_{jx}\vec{a}_x)_z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa_{zz}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ (\nabla \times \tau_{lx}\vec{a}_x)_y \\ (\nabla \times \tau_{lx}\vec{a}_x)_z \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

Nadalje, za i-ti član druge sume u 7.56, bez stupnja slobode A_h^i, dobiva se

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho_{lam}}((\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z G_y\vec{a}_y+(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y G_z\vec{a}_z)\cdot\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x)= \\
&\qquad=\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z G_y\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y G_z\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\kappa_{xx}}&0&0\\0&\frac{1}{\kappa_{yy}}&0\\0&0&\frac{1}{\kappa_{zz}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix} \\
&\qquad=\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\kappa_{xx}}&0&0\\0&\frac{G_y}{\kappa_{yy}}&0\\0&0&\frac{G_z}{\kappa_{zz}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{7.58}$$

Preostaje još razmotriti posljednji integral u 7.48, pa se uvrštavanjem 7.37a dobiva

$$\int_{K_m} j\omega\vec{A}_h^*\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V=\int_{K_m}\sum_i^{n_e} j\omega A_h^i\vec{\eta}_i\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V,\quad l=1,...,n_T \tag{7.59}$$

Konačno, i-ti član sume u podintegralnoj funkciji, bez stupnja slobode A_h^i, glasi

$$\begin{aligned}
j\omega\vec{\eta}_i\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))&=j\omega\cdot\begin{bmatrix}0\\\alpha_{iy}+(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\,\frac{jG_y}{\omega\kappa_{yy}}\\\alpha_{iz}+(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\,\frac{jG_z}{\omega\kappa_{zz}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix} \\
&=j\omega\begin{bmatrix}0\\\alpha_{iy}\\\alpha_{iz}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z\\(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_y\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{G_y}{\kappa_{yy}}&0\\0&0&\frac{G_z}{\kappa_{zz}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_y\\(\nabla\times\tau_{lx}\vec{a}_x)_z\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{7.60}$$

Značajke materijala izražene tenzorima u prethodnim jednadžbama 7.50, 7.52, 7.53, 7.55, 7.57, 7.58 i 7.60 će biti usrednjene po debljini lamele d. Time će se u konačnici automatski ostvariti globalna aproksimacija baznim funkcijama iz U_h i V_h ali uz korištenje mreže konačnih elemenata manje gustoće.

7.4.1 Homogenizacija značajki materijala

Tenzor značajki materijala u izrazu 7.50 glasi

$$\boldsymbol{\nu^a}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu_{xx}}&0&0\\0&\frac{F_y^2}{\mu_{yy}}&0\\0&0&\frac{F_z^2}{\mu_{zz}}\end{bmatrix} \tag{7.61}$$

U tenzoru $\boldsymbol{\nu^a}$ prvi element $\nu^a_{xx} = \frac{1}{\mu_{xx}}$ je već konstanta, dok su drugi i treći element funkcije ovisne o x pa ih je potrebno usrednjiti po debljini lamele d. Srednja vrijednost drugog dijagonalnog elementa glasi

$$\begin{aligned}\bar{\nu}^a_{yy} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{F_y^2}{\mu_{yy}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{\mu_{yy}}\left(\frac{\gamma_y^2 d^2\cosh^2(\gamma_y x)}{4\sinh^2(\gamma_y\frac{d}{2})}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{j\omega\kappa_{zz}d}{8\sinh^2(\gamma_y\frac{d}{2})}\left(\frac{(1-j)}{2}\delta_y\sinh((1+j)d\delta_y^{-1})+d\right)\end{aligned} \tag{7.62}$$

gdje su γ_y i δ_y definirani u 7.13. Slično tome, srednja vrijednost trećeg dijagonalnog elementa u tenzoru $\boldsymbol{\nu^a}$ glasi

$$\begin{aligned}\bar{\nu}^a_{zz} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{F_z^2}{\mu_{zz}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{\mu_{zz}}\left(\frac{\gamma_z^2 d^2\cosh^2(\gamma_z x)}{4\sinh^2(\gamma_z\frac{d}{2})}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{j\omega\kappa_{yy}d}{8\sinh^2(\gamma_z\frac{d}{2})}\left(\frac{(1-j)}{2}\delta_z\sinh((1+j)d\delta_z^{-1})+d\right)\end{aligned} \tag{7.63}$$

gdje su γ_z i δ_z^{-1} definirani u 7.6. Prema tome, konačni homogenizirani tenzor $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$ glasi

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\nu}^a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu}^a_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

gdje je μ_{xx} magentska permeabilnost lamele u x-smjeru, a konstante $\bar{\nu}^a_{yy}$ i $\bar{\nu}^a_{zz}$ se računaju prema izrazima 7.62 i 7.63 i njihov iznos ovisi o svojstvima lamele kao što su značajke materijala i debljina lamele, te o promatranoj radnoj točki u smislu frekvencije uzbude.

Tenzor značajki materijala u 7.52 glasi

$$\boldsymbol{\nu^b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{jG_y}{\omega\kappa_{yy}} \\ 0 & \frac{jG_z}{\omega\kappa_{zz}} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.65}$$

U tenzoru $\boldsymbol{\nu^b}$ šesti i osmi element su funkcije ovisne o x pa ih je potrebno usrednjiti u x-smjeru, po debljini lamele d. Srednja vrijednost šestog elementa glasi

$$\bar{\nu}^b_{yz} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{j}{\omega\kappa_{yy}}G_y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{j}{\omega\kappa_{yy}}\left(\frac{-j\omega\kappa_{yy}d\sinh(\gamma_z x)}{2\sinh(\gamma_z\frac{d}{2})}\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{7.66}$$

Analogno prethodnom, i za srednju vrijednost osmog člana u tenzoru vrijedi da je $\bar{\nu}^b_{yz} = 0$.

Konačno, za srednju vrijednost cijelog tenzora vrijedi da je

$$\bar{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{b}} = 0 \tag{7.67}$$

Prvi tenzor značajki materijala u 7.53 glasi

$$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_y & 0 \\ 0 & 0 & -G_z \end{bmatrix} \tag{7.68}$$

Ponovno, budući da je srednja vrijednost funkcija G_y i G_z jednaka nuli po debljini lamele, kao što se vidi u 7.66, homogenizacijom tenzora $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}}$ dobiva se

$$\bar{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{c}} = 0 \tag{7.69}$$

Drugi tenzor značajki materijala u 7.53 glasi

$$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-jG_z^2}{\omega\kappa_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-jG_y^2}{\omega\kappa_{zz}} \end{bmatrix} \tag{7.70}$$

U tenzoru $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{d}}$ drugi i treći dijagonalni element su funkcije ovisne o x pa ih je potrebno usrednjiti po debljini lamele d. Za srednju vrijednost drugog dijagonalnog člana slijedi

$$\begin{aligned} \bar{v}_{yy}^{d} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{-jG_z^2}{\omega\kappa_{zz}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{-j}{\omega\kappa_{zz}}\left(\frac{-\omega^2\kappa_{zz}^2 d^2\sinh^2(\gamma_y x)}{4\sinh^2(\gamma_y\frac{d}{2})}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{j\omega\kappa_{zz}d}{8\sinh^2(\gamma_y\frac{d}{2})}\left(\frac{(1-j)}{2}\delta_y\sinh((1+j)d\delta_y^{-1}) - d\right) \end{aligned} \tag{7.71}$$

gdje su γ_y i δ_y definirani u 7.13. Analogno prethodnom, usrednjavanjem trećeg dijagonalnog člana u $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{d}}$ dobiva se

$$\begin{aligned} \bar{v}_{zz}^{d} = \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{-jG_y^2}{\omega\kappa_{yy}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{-j}{\omega\kappa_{yy}}\left(\frac{-\omega^2\kappa_{yy}^2 d^2\sinh^2(\gamma_z x)}{4\sinh^2(\gamma_z\frac{d}{2})}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{j\omega\kappa_{yy}d}{8\sinh^2(\gamma_z\frac{d}{2})}\left(\frac{(1-j)}{2}\delta_z\sinh((1+j)d\delta_z^{-1}) - d\right) \end{aligned} \tag{7.72}$$

gdje su γ_z i δ_z^{-1} definirani u 7.6. Prema tome, konačni homogenizirani tenzor $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}}$ glasi

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\nu}_{yy}^{d} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu}_{zz}^{d} \end{bmatrix} \tag{7.73}$$

gdje se konstante $\bar{\nu}_{yy}^{d}$ i $\bar{\nu}_{zz}^{d}$ računaju prema izrazima 7.72 i 7.71 i njihov iznos također ovisi značajkama materijala i debljini lamele, te o promatranoj radnoj točki u smislu frekvencije uzbudne struje.

Tenzor značajki materijala u 7.55 glasi

$$\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & F_z \end{bmatrix} \tag{7.74}$$

U tenzoru $\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{e}}$ drugi i treći dijagonalni element su funkcije ovisne o x pa je u homogeniziranju tenzora potrebno odrediti njihovu srednju vrijednost po debljini lamele d. Za srednju vrijednost drugog dijagonalnog člana vrijedi

$$\bar{\nu}_{yy}^{e} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} F_y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{\gamma_y d \cosh(\gamma_y x)}{2 \sinh(\gamma_y \frac{d}{2})} \right) \mathrm{d}x = 1 \tag{7.75}$$

gdje je γ_y definiran u 7.13. Slično tome, i za srednju vrijednost trećeg dijagonalnog člana vrijedi da je $\bar{\nu}_{zz}^{e} = 1$. Dakle, homogenizirani tenzor $\boldsymbol{\nu}^{\boldsymbol{e}}$ glasi

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.76}$$

Time su hmogenizirane značajke materijala vezane za prvu jednadžbu slabe formulacije 7.47. Preostaje još homogenizirati značajke materijala vezane za jednadžbu 7.48.

Tenzor značajki materijala $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{lam}}$ u 7.57 je već konstantan tenzor pa ga nije potrebno homogenizirati, odnosno

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{lam}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\kappa_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa_{zz}} \end{bmatrix} \tag{7.77}$$

Tenzor značajki materijala u 7.58 glasi

$$\boldsymbol{\rho^a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_y}{\kappa_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_z}{\kappa_{zz}} \end{bmatrix} \tag{7.78}$$

Kao što je prikazano u izrazu 7.66, srednja vrijednost funkcija G_y i G_z po debljini lamele d jednaka je nuli pa se homogenizacijom tenzora $\boldsymbol{\rho^a}$ dobiva tenzor

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.79}$$

Tenzor značajki materijala u 7.60 glasi

$$\boldsymbol{\rho^b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_y}{\kappa_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_z}{\kappa_{zz}} \end{bmatrix} \tag{7.80}$$

Ponovno, s obzirom na to da je srednja vrijednost funkcija G_y i G_z po debljini lamele d jednaka nuli, homogenizacijom tenzora $\boldsymbol{\rho^b}$ dobiva se tenzor

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

Time je završena homogenizacija svih značajki materijala vezanih za jednadžbe slabe formulacije 7.47 i 7.48. Uvrštavanjem dobivenih homogeniziranih značajki materijala u početne jednadžbe dobit će se homogenizirana slaba formulacija.

7.4.2 Homogenizirane jednadžbe slabe formulacije u $K_m \in \Omega_{lam}$

Homogenizacijom tenzora $\boldsymbol{\nu^a}$ dobiven je $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$ prema 7.64. U skladu s tim, homogenizacijom člana $\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{\eta}_i \cdot \nabla \times \vec{\eta}_k$ iz 7.50 dobiva se $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} \nabla \times \vec{\alpha}_i \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k$, pa stoga prvi član jednadžbe 7.47 prema 7.49 prelazi u

$$\int_{K_m} (\boldsymbol{\nu_{lam}} \nabla \times \vec{A}_h^*) \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V \longrightarrow \int_{\bar{K}_j} (\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.82}$$

gdje je $\vec{A}_h$ aproksimiran baznim funkcijama iz U_h u K_m, tj.

$$\nabla \times \vec{A}_h(K_m) = \sum_i^{n_e} A_h^i \nabla \times \vec{\alpha}_i \tag{7.83}$$

Slično tome, homogenizacijom člana $\nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x) \cdot \vec{\eta}_k$ u izrazu 7.52 dobiva se $\nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x) \cdot \vec{\alpha}_k$ zbog 7.67, dok se homogenizacijom člana $((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z G_y \vec{a}_y + (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y G_z \vec{a}_z) \cdot \vec{\eta}_k$ u izrazu 7.53 dobiva $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}} \nabla \times \vec{\alpha}_i \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k$ zbog 7.69 i 7.73. Dakle, drugi integral u jednadžbi 7.47 prelazi u

$$-\int_{K_m} \nabla \times \vec{T}_h^* \cdot \vec{\eta}_k \, \mathrm{d}V \longrightarrow -\int_{\bar{K}_j} \nabla \times \vec{T}_{hx} \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V + \int_{\bar{K}_j} (\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.84}$$

gdje je $\vec{T}_{hx}$ aproksimiran baznim funkcijama iz U_h u K_m, tj.

$$\nabla \times \vec{T}_{hx}(K_m) = \sum_j^{n_e} T_h^j \nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x) \tag{7.85}$$

Homogenizacijom člana $\lambda_p \vec{a}_z \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k)$ u 7.55 dobiva se $\lambda_p \vec{a}_z \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k)$ zbog 7.76 pa integral s desne strane u 7.47 prelazi u

$$\int_{K_m} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\eta}_k) \, \mathrm{d}V \longrightarrow \int_{\bar{K}_j} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.86}$$

Analognim postupkom kao u prethodnim jednadžbama odredit će se homogenizirani oblik svih integrala u jednadžbi 7.48. Budući da član $(\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{lam}} \nabla \times (\tau_{jx}\vec{a}_x)) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))$ iz 7.57 pri homogenizaciji ostaje isti kao što se vidi u 7.77, dok član $(\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{lam}}((\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z G_y \vec{a}_y + (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_y G_z \vec{a}_z)) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))$ iz 7.58 iščezava zbog 7.79, prvi integral u 7.48 prelazi u

$$\int_{K_m} (\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{lam}} \nabla \times \vec{T}_h^*) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V \longrightarrow \int_{\bar{K}_j} (\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{lam}} \nabla \times \vec{T}_{hx}) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V, \quad l = 1, ..., n_T \tag{7.87}$$

Nadalje, član $j\omega\vec{\eta}_i \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))$ u izrazu 7.60 prelazi u $j\omega\vec{\alpha}_i \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))$ zbog 7.81, pa se homogenizacijom drugog integrala u 7.48 dobiva

$$\int_{K_m} j\omega\vec{A}_h^* \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V \longrightarrow \int_{\bar{K}_j} j\omega\vec{A}_h \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V, \quad l = 1, ..., n_T \tag{7.88}$$

Dakle, korištenjem prethodnih izraza dobiva se homogenizirana Galerkinova slaba $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$

formulacija koja glasi

$$\int_{\bar{K}_j} (\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}})(\nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V - \int_{\bar{K}_j} (\nabla \times \vec{T}_{hx}) \cdot \vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V = \int_{\bar{K}_j} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., n_A \tag{7.89}$$

$$\int_{\bar{K}_j} (\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{lam}} \nabla \times \vec{T}_{hx}) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V + \int_{\bar{K}_j} j\omega\vec{A}_h \cdot (\nabla \times (\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., n_T \tag{7.90}$$

u homogeniziranom konačnom elementu $\bar{K}_j \in \Omega_{lam}$. Rješavanjem prethodnih jednadžbi dobivaju se stupnjevi slobode A_h^i i T_h^j koji uvrštavanjem u 7.37b i 7.41 daju rezultat za aproksimacije $\vec{B} \approx \nabla \times \vec{A}_h^*$ i $\vec{J} \approx \nabla \times \vec{T}_h^*$ u konačnom elementu, a u kombinaciji s baznim funkcijama $\vec{\alpha}_i$ i $\tau_{jx}\vec{a}_x$ aproksimiraju srednju vrijednost za $\vec{B}$ i $\vec{j}_{yz}$ u konačnom elementu.
U prethodnim jednadžbama su dakle prisutne samo bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i $\tau_{jx}\vec{a}_x$, te težinske funkcije $\vec{\alpha}_k$ i $\tau_{lx}\vec{a}_x$, koje su već u poglavlju 4.2 konstruirane za globalnu aproksimaciju. Prema tome, jednadžbe 7.89 i 7.90 je moguće izravno proširiti na globalnu aproksimaciju rješenja u Ω_{lam}, koji je time transformiran u $\bar{\Omega}_{lam}$. Globalno rješenje za A_h^i i T_h^j u tom slučaju aproksimira srednju vrijednost vektora $\vec{B}$ i $\vec{J}_{yz}$, gdje se korištenjem velikog slova J u $\vec{J}_{yz}$ pravi distinkcija između jedne globalno definirane struje $\vec{J}_{yz}$ i većeg broja međusobno neovisnih vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$ definiranih samo lokalno unutar konačnog elementa, po jedna za svaki konačni element u Ω_{lam}.
Kao što je više puta spomenuto, radi konciznosti formulacija pretpostavit će se da su sve lamele izrađene od istog materijala i imaju istu debljinu pa homogenizirani tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{lam}}$ izraženi u lokalnom koordinatnom sustavu lamela imaju jednak iznos u svih N_{lam} lamela. Nadalje, ako se tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{lam}}$ izraze u globalnom $\chi\psi\zeta$-koordinatnom sustavu automatski se dobivaju homogenizirani tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{fe}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{fe}}$ čiji su nehomogenizirani oblici definirani u 2.23 i 2.19. Pritom vrijede sljedeće transformacije

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}} \Longrightarrow \bar{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{fe}} \tag{7.91}$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}^{\boldsymbol{lam}} \Longrightarrow \bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{fe}} \tag{7.92}$$

Konačno, korištenjem homogeniziranih tenzora $\bar{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{fe}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{fe}}$ moguće je onda jednadžbe 7.89 i 7.90 izraziti u globalnom $\chi\psi\zeta$-koordinatnom sustavu te ugraditi u jednadžbe 5.37 i 5.52 Galerkinove $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ slabe formulacije.

7.5 Homogenizacija slabe formulacije u Ω_j

Zamjenom integrala vezanih za područje Ω_{fe} u jednadžbama slabe formulacije 5.37 i 5.52 za integrale iz jednadžbi 7.89 i 7.90 dobiva se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p\cup\Omega_u}(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_{fe}}(\bar{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{fe}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V\\+\int_{\Omega_{izol}}(\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{izol}}\nabla\times\vec{A}_h)\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V-\int_{\Omega_{fe}}(\nabla\times\vec{T}_{hx})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V-\int_{\Omega_{izol}}(\nabla\times\vec{T}_{hx})\cdot\vec{\alpha}_k\,\mathrm{d}V\\=\int_{\Omega}\vec{T}_u\cdot(\nabla\times\vec{\alpha}_k)\,\mathrm{d}V,\quad k=1,...,N_A\end{aligned}\tag{7.93}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{fe}}(\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{fe}}\nabla\times\vec{T}_{hx})\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_{izol}}(\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{izol}}\nabla\times\vec{T}_{hx})\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V\\+\int_{\Omega_{fe}}j\omega\vec{A}_h\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_{izol}}j\omega\vec{A}_h\cdot(\nabla\times(\tau_{lx}\vec{a}_x))\,\mathrm{d}V=0,\quad l=1,...,N_T\end{aligned}\tag{7.94}$$

gdje se i u području Ω_{izol} modelira samo vektorski potencijal $\vec{T}_{hx}$ što je nevažna modifikacija budući da se radi o području električne izolacije, a $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{izol}}$ i $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{izol}}$ su definirani u 2.24 i 2.20.
U prethodnim jednadžbama se dakle samo vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$ modeliraju strujnim vektorskim potencijalom kao $\vec{j}_{yz}=\nabla\times\vec{T}_{hx}$, dok su $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ uzete u obzir preko srednje vrijednosti magnetske indukcije $\nabla\times\vec{A}_h$ u konačnom elementu prema 7.27f i 7.27e. Budući da su i $\vec{T}_{hx}$ i $\nabla\times\vec{A}_h$ monotone funkcije u x-smjeru po većim dijelovima jezgre, moguće je provesti daljnju homogenizaciju značajki materijala u x-smjeru po principu silocijevi, unutar cijelog Ω_j, čime će se omogućiti korištenje znatno rjeđe mreže konačnih elemenata u Ω_j. Pored toga, sloj izolacije je u pravilu nekoliko desetaka puta tanji od debljine lamele pa homogenizacija značajki materijala unosi zanemarivu pogrešku u konačno rješenje za $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_{hx}$.
Dakle, u skladu s 2.24, tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{fe}}$ i $\boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{izol}}$ će onda definirati homogenizirani tenzor magnetske reluktivnosti $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ za područje cijele jezgre koje je stoga homogenizirano te se označava s $\bar{\Omega}_j$. Slično tome, u skladu s 2.20, tenzori $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{fe}}$ i $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{izol}}$ će onda definirati homogenizirani tenzor električne otpornosti $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ za područje $\bar{\Omega}_j$. Posljedično, gustoća konačnih elemenata je značajno reducirana. Ovisno o značajkama materijala i frekvenciji uzbudne struje, jedan kockasti konačni element K_m u $\bar{\Omega}_j$ može imati dimenzije u rasponu od čak $10\cdot d$, gdje je d debljina lamele. Naravno, $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ omogućuju i korištenje puno jednostavnijeg CAD modela koji dopušta da se laminacijski paket modelira kao jedan homogeni entitet, tj. nije potrebno izravno 3D modeliranje lamela i izolacija između lamela.
Kao što je objašnjeno u poglavlju 2.3.3, u radu će se pretpostaviti paralelnost osi svih lokalnih xyz-koordinatnih sustava u odnosu na osi globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinatnog sustava pa će i ma-

trice tenzora $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ biti dijagonalne. U slučaju višedijelne jezgre otvorenog tipa, $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ će biti konstantni unutar svakog laminacijskog paketa, a u slučaju da su različiti paketi međusobno zarotirani za 90°, i tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ će biti različito transformirani iz lokalnog *xyz*-koordinatnog sustava u globalni $\chi\psi\zeta$-koordinatni sustav pa će imati različite iznose elemenata u različito orijentiranim paketima. Dakle, unutar laminacijskog paketa, elementi tenzora $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ će se računati standardnim pristupom temeljenim na principu silocijevi.

Tenzor $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ stoga glasi

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \bar{\nu}_{\chi\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\nu}_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \tag{7.95}$$

gdje se elementi $\mu_{\chi\chi}$, $\mu_{\psi\psi}$ i $\mu_{\zeta\zeta}$ računaju kao [16] [53]

$$\nu_{\chi\chi} = \frac{(1-k_p)}{\mu_0} + \frac{k_p}{\mu_{xx}} \tag{7.96a}$$

$$\frac{1}{\nu_{\psi\psi}} = (1-k_p)\mu_0 + \frac{k_p}{\bar{\nu}^a_{yy} - \bar{\nu}^d_{yy}} \tag{7.96b}$$

$$\frac{1}{\nu_{\zeta\zeta}} = (1-k_p)\mu_0 + \frac{k_p}{\bar{\nu}^a_{zz} - \bar{\nu}^d_{zz}} \tag{7.96c}$$

U izrazima 7.96, k_p predstavlja faktor punjenja, μ_{xx} je magnetska permeabilnost lamele u smjeru okomito na lamelu, $\bar{\nu}^a_{yy}$ i $\bar{\nu}^a_{zz}$ se računaju prema izrazima 7.62 i 7.63, a $\bar{\nu}^d_{yy}$ i $\bar{\nu}^d_{zz}$ se računaju prema izrazima 7.72 i 7.71.

Tenzor $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ glasi

$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_{\chi\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \tag{7.97}$$

Elementi $\bar{\rho}_{\chi\chi}$, $\bar{\rho}_{\psi\psi}$ i $\bar{\rho}_{\zeta\zeta}$ se računaju kao

$$\frac{1}{\bar{\rho}_{\chi\chi}} = \kappa_{izol} \tag{7.98a}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}_{\psi\psi}} = k_p \kappa_{yy} \tag{7.98b}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}_{\zeta\zeta}} = k_p \kappa_{zz} \tag{7.98c}$$

gdje $\kappa_{izol} \approx 0$ predstavlja vrlo mali broj blizak nuli ali različit od nule, k_p predstavlja faktor punjenja, a κ_{yy} i κ_{zz} predstavljaju električnu provodnost lamele u *y*-smjeru i *z*-smjeru.

Pritom se za 7.96 i 7.98 pretpostavlja da je u promatranom laminacijskom paketu χ-smjer paralelan s *x*-smjerom njegovih lamela, ψ-smjer paralelan s *y*-smjerom njegovih lamela, tj. poprečan na smjer valjanja, a ζ-smjer paralelan sa *z*-smjerom njegovih lamela, tj. paralelan sa smjerom

valjanja. Unutar laminacijskog paketa koji je zarotiran za 90° oko ζ-osi, elementi vezani za χ-smjer će zamijeniti iznos s elementima vezanima za ψ-smjer.

7.5.1 Konačna slaba $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacija u Ω

Korištenjem homogeniziranih značajki materijala u vidu tenzora $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ dobiva se konačna homogenizirana Galerkinova slaba $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulacija u Ω koja glasi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p \cup \Omega_u} (\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V + \int_{\bar{\Omega}_j} (\bar{\boldsymbol{\nu}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V \\ - \int_{\bar{\Omega}_j} (\nabla \times \vec{T}_{hx}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., N_A\end{aligned} \tag{7.99}$$

$$\int_{\bar{\Omega}_j} (\bar{\boldsymbol{\rho}} \nabla \times \vec{T}_{hx}) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V + \int_{\bar{\Omega}_j} j\omega \vec{A}_h \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \tag{7.100}$$

Prethodna slaba formulacija rezultira nesimetričnim matricama sustava jednadžbi pa se rješenje može pronaći pomoću GMRES ili BiCGSTAB algoritma. Kao i u slučaju heterogene slabe formulacije u 5.53-5.54, moguće je izvesti i simetričnu formulaciju kako bi se omogućilo korištenje CG algoritma [46]. Zamjenom strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}_{hx}$ s vremenski primitivnim strujnim vektorskim potencijalom $\vec{T}'_{hx}$ za koje vrijedi relacija $-j\omega\vec{T}'_{hx} = \vec{T}_{hx}$ slijedi konačna simetrična Galerkinova slaba $\vec{A}, \vec{T}'_x - \vec{A}$-formulacija

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p \cup \Omega_u} (\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V + \int_{\bar{\Omega}_j} (\bar{\boldsymbol{\nu}} \nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V \\ + \int_{\bar{\Omega}_j} (\nabla \times j\omega \vec{T}'_{hx}) \cdot \vec{\alpha}_k \, \mathrm{d}V = \int_{\Omega} \vec{T}_u \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \, \mathrm{d}V, \quad k = 1, ..., N_A\end{aligned} \tag{7.101}$$

$$-\int_{\bar{\Omega}_j} (\bar{\boldsymbol{\rho}} \nabla \times j\omega \vec{T}'_{hx}) \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V + \int_{\bar{\Omega}_j} j\omega \vec{A}_h \cdot (\nabla \times (\tau_{lx} \vec{a}_x)) \, \mathrm{d}V = 0, \quad l = 1, ..., N_T \tag{7.102}$$

Ako se u prethodnim formulacijama 7.99-7.100, te 7.101-7.102 umjesto $\vec{T}_{hx}$ koristiti $\vec{T}_h$, dobiva se jednak rezultat jer je $\kappa_{izol} \approx 0$. Međutim, sa stajališta numeričke simulacije, konvergencija rješenja s $\vec{T}_{hx}$ je više nego dva puta brža nego s $\vec{T}_h$, te značajno brža nego kod standardne $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$-formulacije. Implementacija vektora $\vec{T}_{hx}$ ostvaruje se postavljanjem stupnjeva slobode vezanih za $\vec{T}_{hy}$ i $\vec{T}_{hz}$ u nulu. Pritom se koristi strukturna mreža konačnih elemenata čiji su bridovi paralelni s osima lokalnih *xyz*-koordinatnih sustava. No, korištenje strukturne mreže konačnih elemenata je svakako nužno, neovisno o izboru formulacije, kako bi se osiguralo točno rješenje te izbjegla loša konvergencija rješenja [54].

Poglavlje 8

Numerička homogenizacija i korekcija pogreške temeljene na 2D formulaciji

Jednadžbe 6.3 i 6.12 za $\vec{B}$ i $\vec{J}$ unutar volumena m-tog konačnog elementa $K_m \in \Omega_{lam}$, uz aproksimacije $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ i $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$, glase

$$\nabla \times \boldsymbol{\nu_{lam}}(\vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z) = \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz} \tag{8.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}}(\vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}) = -\partial_t(\vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z) \tag{8.2}$$

Kao što je objašnjeno u poglavljima 6 i 7, prethodne dvije jednadžbe predstavljaju zbroj tri neovisna para jednadžbi, tj. ukupno šest jednadžbi. Svih šest jednadžbi su zapisane u 7.1.
Ako se uvede jednodimenzionalna aproksimacija za $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$, tj. $j^x_{xy} = 0$ i $j^x_{xz} = 0$, u harmoničkom slučaju je za 7.1b i 7.1e te 7.1c i 7.1f moguće pronaći analitička rješenja unutar K_m, kao što je pokazano u 7.1.1. Dobivena rješenja je dalje moguće ugraditi u bazne funkcije kako bi se u vidu dobre pretpostavke rješenja poboljšala sama aproksimacija rješenja unutar K_m i u konačnici smanjio broj potrebnih stupnjeva slobode. Provedene modifikacije baznih funkcija u konačnom elementu moguće je izraziti kao značajke materijala te ih potom homogenizirati. Preostale bazne funkcije su onda standardne bridne bazne funkcije, što znači da je izvedena slaba formulacija unutar konačnog elementa K_m automatski primjenjiva za globalnu aproksimaciju rješenja. Daljnim postupkom homogenizacije značajki materijala u Ω_j po principu silocjevi dobiva se poboljšana globalna aproksimacija rješenja temeljena na modificiranim značajkama materijala. No, cijeli postupak homogenizacije je moguće provesti i numeričkim putem kao što će biti opisano u nastavku ovog poglavlja.
Pored toga, dobivena slaba formulacija iz odjeljka 7.5 pretpostavlja da je $j^x_{xy} = 0$ i $j^x_{xz} = 0$, što nije slučaj u konačnim elementima uz bridove lamela jer tamo struje mijenjaju smjer, tj. javljaju se tzv. rubni efekti. Pogreška jednodimenzinalne aproksimacije još je veća u slučaju višedijelne jezgre otvorenog tipa. Zahvaljujući dobroj lokalnoj svezanosti struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ i prosječne induk-

cije po debljini lamele, rubne efekte je moguće uzeti u obzir ako se koristi numerički postupak homogenizacije značajki materijala koji se dakle temelji na 2D simulaciji vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$, odnosno $\vec{j}_{xz}$ unutar K_m^{2D}, gdje K_m^{2D} predstavlja projekciju trodimenzionalnog m-tog konačnog elementa K_m na xy-ravninu, odnosno na xz-ravninu u slučaju struje $\vec{j}_{xz}$. U nastavku će biti opisan postupak numeričke homogenizacije, a zatim će se izvesti 2D slaba formulacija za izračun vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$, odnosno $\vec{j}_{xz}$, na kojoj će se temeljiti postupak numeričke homogenizacije značajki materijala.

8.1 Numerička homogenizacija

Numerički postupak homogenizacije će biti opisan samo na primjeru struje $\vec{j}_{xy}$ jer je postupak analogan u slučaju struje $\vec{j}_{xz}$. Zbog malog omjera debljine d u odnosu na širinu i visinu lamele, vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$ imaju svojevrsnu lokalnu prirodu, tj. iznos struje $\vec{j}_{xy}$ u konačnom elementu K_m moguće je vrlo dobro estimirati iz srednje vrijednosti indukcije $\vec{b}_z$, koja će kao i u poglavlju 7 biti označena s $\bar{b}_z$. Prema tome, za $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ se stoga pretpostavljaju sljedeći izrazi,

$$\vec{b}_z = \bar{b}_z Q(x,y) \tag{8.3}$$

$$\vec{j}_{xy} = \bar{b}_z \vec{S}(x,y) \tag{8.4}$$

gdje su funkcije Q i $\vec{S}$ analogne funkcijama F_z i G_y u 7.29 i 7.30, ali ovisne o x i y u K_m, za razliku od F_z, G_y koje su ovisne samo o x. Nadalje, za razliku od F_z i G_y koje su određene analitički, funkcije Q i $\vec{S}$ će biti izračunate numeričkim postupkom. Izračun je u principu potrebno provesti u poprečnom presjeku K_m^{2D} svakog 3D konačnog element K_m uzduž lamele, no u praktičnom slučaju će biti dovoljna samo dva izračuna, jedan u području K_m^{2D} uz rub lamele gdje se javljaju rubni efekti, a drugi u bilo kojem poprečnom presjeku K_m^{2D} preostalog dijela lamele.
Uvrštavanjem 8.3 i 8.4 u jednadžbu 7.1c dobiva se veza između Q i $\vec{S}$, tj.

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \bar{b}_z \vec{S} = -\partial_t \bar{b}_z Q \quad \Rightarrow \quad Q = -\int \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{S}) \, \mathrm{d}t \tag{8.5}$$

Fokus rada je samo na linernim značajkama materijala i sinusnoj uzbudi pa prethodni izraz u harmoničkom slučaju glasi

$$Q = \frac{-1}{j\omega} \nabla \times (\boldsymbol{\rho_{lam}} \vec{S}) \tag{8.6}$$

Dakle, sve funkcije u nastavku predstavljaju fazore, ali se radi bolje čitljivosti izraza neće posebno naglašavati da se radi o fazorima.
Budući da je $\vec{b}_z = \nabla \times \vec{A}$, iz 8.3 slijedi

$$\nabla \times \vec{A} = \bar{b}_z Q(x,y) \tag{8.7}$$

Zatim, korištenjem 8.7 i 8.6 dobiva se i izraz za $\vec{A}$, odnosno

$$\vec{A} = \bar{b}_z \frac{-1}{j\omega}(\boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{S}) \tag{8.8}$$

Za aproksimaciju $\bar{b}_z$ u K_m koriste se bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ kao i u 7.28b, to jest

$$\bar{b}_z = \sum_i^{n_e} A_h^i \overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} \tag{8.9}$$

gdje je A_h^i stupanj slobode, n_e predstavlja broj stranica poprečnog presjeka konačnog elementa K_m, tj. broj stranica područja K_m^{2D} koje će u pravilu biti pravokutnik, što znači da je $n_e = 4$. Kombinacijom 8.8 i 8.9 dobiva se bazna funkcija $\vec{\theta}_i$, gdje je $i = 1, ..., n_e$, koja je slična baznoj funkciji $\vec{\eta}_i$ u izrazu 7.39. Kombinacijom izraza 8.7, 8.8 i 8.9 slijede izrazi za $\vec{\theta}_i$, to jest

$$\vec{\theta}_i = \frac{-1}{j\omega}(\boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{S})\overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} \tag{8.10}$$

$$\nabla \times \vec{\theta}_i = Q\overline{(\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z} \tag{8.11}$$

Budući da je $\nabla \times \vec{\alpha}_i$ svakako konstantan vektor, u nastavku će se izostaviti ravna crta.
Uvrštavanjem 8.3 i 8.4 u jednadžbu 7.1f slijedi

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_{zz}}\bar{b}_z Q\right) - \bar{b}_z \vec{S} = 0 \tag{8.12}$$

Zatim, korištenjem bazne funkcije $\vec{\theta}_i$ kao težinske funkcije označene s $\vec{\theta}_k$ slijedi slaba formulacija prethodnog izraza

$$\int_{K_m^{2D}} \left(\frac{1}{\mu_{zz}}\bar{b}_z Q\right) \cdot \nabla \times \vec{\theta}_k \, \mathrm{d}S - \int_{K_m^{2D}} \bar{b}_z \vec{S} \cdot \vec{\theta}_k \, \mathrm{d}S = 0, \quad k = 1, ..., n_e \tag{8.13}$$

Prvi integral u prethodnoj jednadžbi glasi

$$\begin{aligned} \int_{K_m^{2D}} \left(\frac{1}{\mu_{zz}}\bar{b}_z Q\right) \cdot \nabla \times \vec{\theta}_k \, \mathrm{d}S &= \int_{K_m^{2D}} \left(\frac{1}{\mu_{zz}}\bar{b}_z Q\right) \cdot Q(\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z \, \mathrm{d}S \\ &= \int_{K_m^{2D}} \frac{Q^2}{\mu_{zz}} \cdot \sum_i^{n_e} A_h^i (\nabla \times \vec{\alpha}_i)_z \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k)_z \, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{8.14}$$

gdje je $k = 1, ..., n_e$.
Izraz 8.14 je ekvivalentan z-komponenti izraza u 7.50. Očigledno, na izraz $\frac{Q^2}{\mu_{zz}}$ se može gledati kao na prostorno ovisne značajke materijala, analogno izrazu $\frac{F_z^2}{\mu_{zz}}$ u 7.50, te će ga se stoga homogenizirati. Homogenizirani izraz $\frac{Q^2}{\mu_{zz}}$ se zatim može koristiti kao $\bar{\nu}_{zz}^a$ u K_m.

Drugi integral u 8.13 glasi

$$\begin{aligned}\int_{K_m^{2D}} \bar{b}_z\vec{S}\cdot\vec{\theta}_k \,\mathrm{d}S &= \int_{K_m^{2D}} \bar{b}_z\vec{S}\cdot\frac{1}{-j\omega}(\boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{S})\ (\nabla\times\vec{\alpha}_k)_z \,\mathrm{d}S \\ &= \int_{K_m^{2D}} \frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}}\sum_i^{n_e} A_h^i(\nabla\times\vec{\alpha}_i)_z(\nabla\times\vec{\alpha}_k)_z \,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.15}$$

gdje je $k = 1,...,n_e$.
Također, i izraz $\frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}}$ je moguće promatrati kao značajke materijala ovisne o x i y koordinatama, analogno izrazu $\frac{jG_y^2}{\omega\kappa_{zz}}$ u 7.53, odnosno homogenizirani izraz $\frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}}$ može se koristiti kao $\bar{\nu}_{zz}^d$ u konačnom elementu K_m.
Međutim, za razliku od funkcija F_z i G_y koje su određene analitički, funkcije Q i S nisu unaprijed poznate pa je homogenizaciju izraza $\frac{Q^2}{\mu_{zz}}$ i $\frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}}$ potrebno provesti numerički.
Uz 8.3, homogenizacija izraza $\frac{Q^2}{\mu_{zz}}$ provodit će se pomoću sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{zz}^a &= \frac{1}{\mathscr{P}(K_m^{2D})}\int_{K_m^{2D}} \frac{Q^2}{\mu_{zz}} \,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\mathscr{P}(K_m^{2D})\bar{b}_z^2}\int_{K_m^{2D}} \frac{\vec{b}_z^2}{\mu_{zz}} \,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.16}$$

gdje $\mathscr{P}(K_m^{2D})$ označava površinu područja K_m^{2D} za m-ti konačni element K_m. Budući da je $\vec{b}_z$ kompleksan broj, i $\bar{\nu}_{zz}^a$ će biti kompleksan broj.
Slično prethodnom, ali uz 8.4, homogenizacija izraza $\frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}}$ računa se kao

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{zz}^d &= \frac{1}{\mathscr{P}(K_m^{2D})}\int_{K_m^{2D}} \frac{j\vec{S}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}} \,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\mathscr{P}(K_m^{2D})\bar{b}_z^2}\int_{K_m^{2D}} j\frac{\vec{j}_{xy}^2}{\omega}\boldsymbol{\rho_{lam}} \,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.17}$$

gdje $\mathscr{P}(K_m^{2D})$ označava površinu područja K_m^{2D} za m-ti konačni element K_m. Budući da je $\vec{j}_{xy}$ vektor kompleksnih vrijednosti, i $\bar{\nu}_{zz}^d$ će u općem slučaju biti kompleksan broj.
Dakle, kako bi se provela homogenizacija, potrebno je izračunati $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ pomoću metode konačnih elemenata nad gusto diskretiziranim područjem K_m^{2D} korištenjem slabe formulacije koja će biti izvedena u nastavku. Analognim postupkom, iz $\vec{b}_y$ i $\vec{j}_{xz}$ se dobiva $\bar{\nu}_{yy}^a$ i $\bar{\nu}_{yy}^d$.

8.2 2D slaba formulacija

Formulacija će biti izvedena za vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$, ali analogni izrazi vrijede i za $\vec{j}_{xz}$ [55]. Prema 7.1c, vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$ su inducirane magnetskom indukcijom $\vec{b}_z = b_z\vec{a}_z$, tj. vrijedi

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{j}_{xy} = -\partial_t \vec{b}_z \tag{8.18}$$

Također, vrtložne struje $\vec{j}_{xy}$ uzrokuju promjenu magnetskog polja prema 7.1f, to jest

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_{zz}}\vec{b}_z = \vec{j}_{xy} \tag{8.19}$$

Kao što je objašnjeno u poglavlju 6, jedino svojstvo vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i magnetske indukcije $\vec{b}_z$ je njihova konstantnost u z-smjeru, tj. vrijedi da je $\partial_z\vec{j}_{xy} = 0$ i $\partial_z\vec{b}_z = 0$. Dakle, $\vec{b}_z$ može biti bilo kakva funkcija u ovisnosti o y i z koordinatama unutar konačnog elementa. Drugim riječima, nije potrebno uvoditi nikakve dodatne pretpostavke kao što je bio slučaj s jednodimenzionalnom aproksimacijom. Zatim, vektor $\vec{b}_z$ je moguće prikazati kao zbroj njegove srednje vrijednosti $\bar{b}_z\vec{a}_z$ i ostatka označenog s $\tilde{b}_z\vec{a}_z$, to jest

$$b_z = \bar{b}_z + \tilde{b}_z \tag{8.20}$$

gdje onda vrijedi da je

$$\iint_{K_m^{2D}} \tilde{b}_z \,\mathrm{d}S = 0 \tag{8.21}$$

Indukcija $\vec{b}_z$ je posljedica uzbudne struje $\vec{J}_u$ i svih vrtložnih struja $\vec{J}$ u cijeloj jezgri, ali jedino $\vec{j}_{xy}$ od svih njih teče kroz promatrani konačni element te uzrokuje lokalnu varijaciju za $\vec{b}_z$ pa se u promatranom konačnom elementu jednadžbu 8.19 može rastaviti na

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_{zz}}\tilde{b}_z\vec{a}_z = \vec{j}_{xy} \tag{8.22a}$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_{zz}}\bar{b}_z\vec{a}_z = 0 \tag{8.22b}$$

Dakle, iznos vektora $\bar{b}_z\vec{a}_z$ je neovisan o $\tilde{b}_z\vec{a}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ te se neće mijenjati tijekom simulacije pa ga se smije zadati unaprijed. S druge strane, vektor $\vec{j}_{xy}$, a onda i $\tilde{b}_z\vec{a}_z$, ovise o vektoru $\bar{b}_z\vec{a}_z$ zbog 8.18, tj. uvrštavanjem 8.20 u 8.18 slijedi

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{j}_{xy} + \partial_t\tilde{b}_z\vec{a}_z = \partial_t\bar{b}_z\vec{a}_z \tag{8.23}$$

gdje će se vektor $\bar{b}_z$ koristiti kao uzbuda u 2D formulaciji. U slučaju linearnih karakteristika materijala, $\bar{b}_z$ se može postaviti na neku proizvoljnu vrijednost jer nije potrebno unaprijed poz-

navati njegov točan iznos kako bi se odredila vrijednost homogeniziranih značajki materijala. Točnije, izrazi 8.16 i 8.17 sadrže $\bar{b}_z$ u nazivniku, tj. $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ su normalizirani s obzirom na $\bar{b}_z$. Dakle, $\tilde{b}_z\vec{a}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ predstavljaju nepoznata polja pa je potrebno riješiti sustav jednadžbi koji čine 8.23 i 8.22a. Prema 8.22a, vektor $\vec{j}_{xy}$ je solenoidalno polje unutar promatrane 2D domene K_m^{2D} pa se može uvesti sljedeća relacija

$$\vec{j}_{xy} = \nabla \times (T_z\vec{a}_z) \tag{8.24}$$

Inače bi se pomoću $T_z\vec{a}_z$ moglo modelirati i vektor $\tilde{b}_z\vec{a}_z$, no s obzirom na to da za $\tilde{b}_z\vec{a}_z$ mora vrijediti uvjet 8.21, za modeliranje $\tilde{b}_z\vec{a}_z$ će se koristiti dvodimenzionalni magnetski vektorski potencijal $\underset{\sim}{\vec{A}} = \tilde{A}_x\vec{a}_x + \tilde{A}_y\vec{a}_y$, to jest

$$\tilde{b}_z\vec{a}_z = \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}} \tag{8.25}$$

pa se postavljanjem Dirichleteovog rubnog uvjeta $\underset{\sim}{\vec{A}} \times \vec{n} = 0$ na svim rubovima konačnog elementa može jednostavno zadovoljiti uvjet 8.21, odnosno

$$\int_{K_m^{2D}} \tilde{b}_z \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial K_m^{2D}} \underset{\sim}{\vec{A}} \times \vec{n} \, \mathrm{d}l = 0 \tag{8.26}$$

Dakle, uvrštavanjem 8.24 i 8.25 u jednadžbe 8.22a i 8.23, dobiva se jaka formulacija

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_{zz}} \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}} - \nabla \times (T_z\vec{a}_z) = 0 \tag{8.27}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla \times (T_z\vec{a}_z) + \partial_t \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}} = -\partial_t \bar{b}_z\vec{a}_z \tag{8.28}$$

Za prethodne jednadžbe će se izvesti Galerkinova slaba formulacija. Pritom će aproksimacija $T_z \approx T_{hz}$ biti ostvarena čvornim baznim funkcijama λ_j, dok će se aproksimacija $\underset{\sim}{\vec{A}} \approx \underset{\sim}{\vec{A}}_h$ ostvariti rubnim baznim funkcijama $\vec{\alpha}_i$, odnosno

$$T_{hz} = \sum_j^{N_p} T_{hz}^j \lambda_j \tag{8.29}$$

$$\underset{\sim}{\vec{A}}_h = \sum_i^{N_e} \underset{\sim}{A}_h^i \vec{\alpha}_i \tag{8.30}$$

gdje N_p predstavlja broj čvorova, a N_e broj rubova 2D mreže konačnih elemenata unutar plohe K_m^{2D}. Očigledno, 2D mreža konačnih elemenata kojom se diskretizira ploha K_m^{2D} značajno je gušća u odnosu na originalnu 3D mrežu konačnih elemenata.

Prema Galerkinovoj metodi, bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i λ_j koriste se kao težinske funkcije, pri čemu će zbog postojanja Dirichleteovih rubnih uvjeta na rubovima plohe K_m^{2D} broj težinskih funkcija biti manji od N_p, odnosno N_e. Radi distinkcije u odnosu na bazne funkcije $\vec{\alpha}_i$ i λ_j, težinske

funkcije su indeksirane drugim slovima, tj. $\vec{\alpha}_k$ i λ_l. Konačan oblik slabe 2D Galerkinove $\underset{\sim}{A}, T_z$-formulacije glasi

$$\int_{K_m^{2D}} \partial_t \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}}_h \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k \mathrm{d}S - \int_{K_m^{2D}} \partial_t \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}}_h \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k \mathrm{d}S = 0, \quad k = 1, ..., N_A \tag{8.31}$$

$$\int_{K_m^{2D}} \boldsymbol{\rho_{lam}} \nabla T_{hz} \cdot \nabla \lambda_l \mathrm{d}S + \int_{K_m^{2D}} \partial_t \nabla \times \underset{\sim}{\vec{A}}_h \cdot (\lambda_l \vec{a}_z) \mathrm{d}S = -\int_{K_m^{2D}} \partial_t \bar{b}_z \lambda_l \mathrm{d}S, \quad l = 1, ..., N_T \tag{8.32}$$

Na osnovu rješenja iz prethodnih jednadžbi dobit će se $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ te će se provesti postupak numeričke homogenizacije prema 8.16 i 8.17. Kao što se vidi iz prethodnih jednadžbi, polja $\vec{b}_z$ i $\vec{j}_{xy}$ je moguće izračunati i u frekvencijskoj ali i u vremenskoj domeni. U konačnici, i numerička homogenizacija se može provesti i u vremenskoj domeni, tj. nije nužno vezana samo uz harmoničko područje kao što je to bio slučaj s analitičkim pristupom u poglavlju 7. Također, uz linearizaciju značajki materijala oko promatrane radne točke, homogenizaciju je moguće provesti i u slučaju nelinearnih značajki materijala. Dakako, u tom slučaj rezultat homogenizacije ovisi o radnoj točki tako da je potrebno provesti veći set simulacija. Ipak, fokus analize će ovdje ostati na linearnim značajkama materijala i harmoničkom slučaju.

8.3 Korekcija pogreške u fazi postprocesiranja

Nakon što je provedena 3D simulacija, u fazi postprocesiranja se standardno provodi vrlo brza simulacija kojom se sva dobivena rješenja interpoliraju čvornim baznim funkcijama radi lakše vizualizacije dobivenih rješenja, ali i post-analize budući da se tako postiže aproksimacija rješenja za polja interpolacijskim funkcijama koje su po dijelovima linearne funkcije. U nastavku će fokus biti samo na z-komponenti indukcije, a analogni zaključci vrijede i za y-komponentu indukcije. Primjerice, aproksimacijom z-komponente konačnog rješenja $\nabla \times \vec{A}_h$ čvornim baznim funkcijama u fazi postprocesiranja, dobiva se komponenta indukcije $\mathring{B}_z \vec{a}_z$, gdje prsten iznad slova B naznačava čvornu interpolaciju. Ako se nakon toga utvrdi značajan gradijent indukcije $\mathring{B}$ u x-smjeru, moguće je provesti djelomičnu korekciju gubitaka zbog vrtložnih struja $\vec{J}_{xy}$, induciranih z-komponentom indukcije. Potreba za takvom korekcijom gubitaka gotovo je isključivo vezana za otvoreni tip jezgre. Korištenjem velikog slova J u $\vec{J}_{xy}$, naglašava se distinkcija između jedne globalne struje $\vec{J}_{xy}$ koja teče u području Ω_{lam} i n međusobno neovisnih struja $\vec{j}_{xy}$ definiranih unutar n konačnih elemenata $K_m \in \Omega_{lam}$ trodimenzionalne mreže konačnih elemenata, gdje je n ukupan broj konačnih elemenata u Ω_{lam}.

Ovisno o značajkama materijala jezgre te frekvenciji uzbudne struje, promjena y ili z komponente indukcije $\mathring{B}$ u x-smjeru može biti značajna na skali debljine lamele d. Preciznije rečeno, omjer $\Delta\mathring{B}_z/\bar{B}_z$ može biti značajan, gdje je $\Delta\mathring{B}_z = \frac{\mathrm{d}\mathring{B}_z}{\mathrm{d}x} \cdot d$, dok je $\bar{B}_z = (\nabla \times \vec{A}_h)$ srednja vrijednost

z-komponente magnetske indukcije po debljini lamele d. U tom slučaju, potrebno je provesti korekciju rješenja, odnosno vrijedi da je

$$B_z = \mathring{B}_z + \tilde{B}_z \tag{8.33}$$

gdje B_z predstavlja točno rješenje za z-komponentu magnetske indukcije, $\mathring{B}_z$ predstavlja ranije opisano rješenje 3D simulacije koje je aproksimirano čvornim baznim funkcijama, dok $\tilde{B}_z$ predstavlja njihovu razliku. U slučaju kada je omjer $\Delta\mathring{B}_z/\bar{B}_z$ jednak nuli, $\mathring{B}_z$ je konstantna unutar lamele pa će $\tilde{B}_z$ biti parna funkcija unutar lamele, s obzirom na ravninu $x = 0$ lokalnog $(xyz)^i$-koordinatnog sustava i-te lamele, kao što je i pretpostavljeno tijekom ranije opisanih postupaka homogenizacije pa korekcija rješenja nije potrebna. U slučaju kada je omjer $\Delta\mathring{B}_z/\bar{B}_z$ različit od nula, $\tilde{B}_z$ nije čista parna funkcija i homogenizirane značajke materijala odstupaju od točne vrijednosti. Stoga, iako je u fazi pretprocesiranja bila provedena homogenizacija slabe formulacije opisanim analitičkim ili numeričkim pristupom, postoji potreba za korekcijom dobivenih rješenja, poglavito za inducirane vrtložne struja i pripadne gubitke. Upravo korištenjem vektora $\mathring{B}_z$ kao uzbude, moguće je provesti potreban broj 2D simulaciju na poprečnom presjeku cijele jezgre ili samo dijelu poprečnog presjeka jezgre. 2D Faradayeva jednadžba tada glasi

$$\nabla \times \boldsymbol{\rho_{lam}}\vec{J}_{xy} + \partial_t \tilde{B}_z \vec{a}_z = \partial_t \mathring{B}_z \vec{a}_z \tag{8.34}$$

Kako struja $\vec{J}_{xy}$ teče unutar poprečnog presjeka cijele lamele, paralelnog s xy-ravninom, a inducirana je prema 8.34, vrijedi da je $\nabla \cdot \vec{J}_{xy} = 0$ unutar poprečnog presjeka cijele lamele.
U nastavku će se izračunati vektor $\tilde{B}_z$ putem dodatnih 2D simulacija na vrlo gustoj 2D mreži konačnih elemenata. Pritom vrijedi relacija

$$\iint_{\Omega_{lam}} \tilde{B}_z \, \mathrm{d}S = 0 \tag{8.35}$$

jer funkcija $\tilde{B}_z$ ne smije mijenjati srednju vrijednost indukcije u lameli nego samo njen oblik.
U konačnici, ni vrtložne struje gustoće $\vec{J}_{xy}$ ne smiju mijenjati anvelopu rješenja, tj. funkciju $\mathring{B}_z$, nego samo funkciju $\tilde{B}_z$ pa se koristi jednadžba

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_{zz}} \tilde{B}_z \vec{a}_z = \vec{J}_{xy} \tag{8.36}$$

Ako se polja $\tilde{B}_z$ i $\vec{J}_{xy}$ izraze preko potencijala tako da je $\tilde{B}_z\vec{a}_z = \nabla\times\vec{A}$ i $\vec{J}_{xy} = \nabla\times T_z\vec{a}_z$, iz 8.34 i 8.36 dobiva se sljedeća jaka formulacija

$$\nabla\times\frac{1}{\mu_{zz}}\nabla\times\vec{A} - \nabla\times(T_z\vec{a}_z) = 0 \tag{8.37}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\rho_{lam}}\nabla\times(T_z\vec{a}_z) + \partial_t\nabla\times\vec{A} = \partial_t\mathring{B}_z\vec{a}_z \tag{8.38}$$

koja je dakle ekvivalentna jednadžbama 8.27, s tom razlikom da $\mathring{B}_z$ općenito nije konstantna funkcija kao što je bio slučaj s $\bar{b}_z$. Također, ovdje je domena poprečni presjek cijele lamele ili više njih, što znači da se pretpostavlja valjanost izraza $\nabla\cdot\vec{J}_{xy}$ unutar poprečnog presjeka cijele lamele Γ_{2D}, a ne samo poprečnog presjeka konačnog elementa K_m^{2D}. Premda su razlike minimalne, ponovno će se navesti konačan oblik slabe formulacije.
Najprije, kao i u slučaju 8.29, konačnodimenzinalne aproksimaicije $T_z \approx T_{hz}$ i $\vec{A}\approx\vec{A}_h$ glase

$$T_{hz} = \sum_j^{N_p} T_{hz}^j\lambda_j \tag{8.39}$$

$$\vec{A}_h = \sum_i^{N_e} A_h^i\vec{\alpha}_i \tag{8.40}$$

gdje N_p predstavlja ukupan broj čvorova, a N_e ukupan broj rubova 2D mreže konačnih elemenata unutar plohe Γ_{2D}. Prema tome, slaba 2D Galerkinova A,T_z-formulacija glasi

$$\int_{\Gamma_{2D}}\partial_t\nabla\times\vec{A}_h\cdot\nabla\times\vec{\alpha}_k\mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{2D}}\partial_t\nabla\times\vec{A}_h\cdot\nabla\times\vec{\alpha}_k\mathrm{d}S = 0,\quad k=1,...,N_A \tag{8.41}$$

$$\int_{\Gamma_{2D}}\boldsymbol{\rho_{lam}}\nabla T_{hz}\cdot\nabla\lambda_l\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{2D}}\partial_t\nabla\times\vec{A}_h\cdot(\lambda_l\vec{a}_z)\mathrm{d}S = -\int_{\Gamma_{2D}}\partial_t\bar{B}_z\lambda_l\mathrm{d}S,\quad l=1,...,N_T \tag{8.42}$$

gdje N_A predstavlja broj A_h^i stupnjeva slobode, a N_T broj T_{hz}^j stupnjeva slobode.
Nakon što se putem 2D simulacije izračuna rješenje prethodne formulacije, gubitci u plohi Γ_{2D} se računaju izravno iz struje $\vec{J}_{xy} = \nabla\times T_z$ i značajki materijala $\boldsymbol{\rho_{lam}}$.

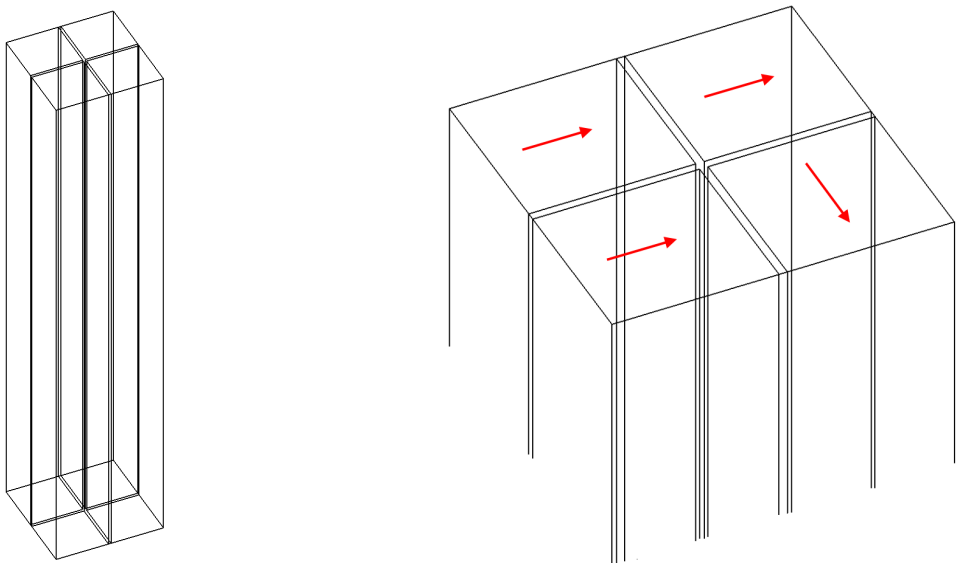
Poglavlje 9

Primjeri računalnih simulacija i usporedba s mjerenjima

Kako bi se validirala razvijena $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacija 7.101-7.102 te potvrdile prednosti njenog korištenja u odnosu na standardno korištenu $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciju, napravit će se usporedba računalnih simulacija za izračun gubitaka zbog vrtložnih struja korištenjem obiju formulacija. Usporedba će biti provedena na primjeru četverodijelne jezgre otvorenog tipa.
U drugom dijelu poglavlja će se razmotriti izračun gubitaka zbog vrtložnih struja u kontekstu ukupnih gubitaka u lameliranoj feromagnetskoj jezgri te će biti predložena metoda za izračun ukupnih gubitaka u jezgri. Na kraju će se korištenjem predložene metode izračunati ukupni gubitci za konkretnu jezgru otvorenog tipa za koju su prethodno provedena mjerenja ukupnih gubitaka.

9.1 Izračun gubitaka zbog vrtložnih struja u četverodijelnoj jezgri otvorenog tipa

Za problem izračuna gubitaka zbog vrtložnih struja u jezgri otvorenog tipa, simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji općenito pokazuje bolje performanse nego simulacija temeljena na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji, pogotovo u slučaju višedijelne jezgre otvorenog tipa. Jezgre otvorenog tipa često se izvode kao višedijelne jezgre, tj. kao jezgre sastavljene od više laminacijskih paketa međusobno odvojenih vrlo tankim slojem među-paketne izolacije, kako bi se smanjili gubitci u jezgri. Slaba $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacija je otporna na postojanje među-paketne izolacije, zahvaljujući korištenju graničnog uvjeta $\vec{T}_x \times \vec{n} = 0$ na plohama izolacijskog sloja. Štoviše, korištenjem uvjeta $\vec{T}_x \times \vec{n} = 0$, vrlo tanki izolacijski sloj je moguće modelirati kao plohu čime se pojednostavljuje CAD model, smanjuje gustoća diskretizacije i poboljšava brzina izračuna uz minimalnu računsku pogrešku. S druge strane, postojanje izolacijskog sloja značajno utječe na



(a) (b)

Slika 9.1: Prikaz četverodijelne jezgre otvorenog tipa: (a) 3D model cijele jezgre sastavljene od četiri homogena dijela. (b) odsječak gornjeg dijela jezgre radi boljeg prikaza homogeniziranih laminacijskih paketa i izolacijskih slojeva među njima. Crvene strelice označavaju x-smjer lokalnih koordinatnih sustava, tj. smjerove lameliranja unutar paketa.

performanse simulacije temeljene na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji. U nastavku će se zadati geometrija, značajke materijala i ostala svojstva četverodijelne jezgre.

9.1.1 Model četverodijelne jezgre

Kako bi usporedba simulacija bila što bolja, ista mreža konačnih elemenata će biti korištena u obje simulacije, a pripadni CAD model je prikazan na slici 9.1. Kao što je opisano u poglavlju 7, korištenjem $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacije 7.101-5.54 zaobilazi se potreba za izravnim modeliranjem lamela i izolacije. Što se tiče referentne formulacije $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$, koristit će se formulacija izvedena u [29], a homogenizirana prema postupku opisanom u [13]. Četverodijelna jezgra se sastoji od četiri jednaka laminacijska paketa. Visina jezgre je $h = 10$ cm. Laminacijski paketi su u poprečnom presjeku kvadrati širine $w = 1$ cm. Debljina izolacijskih slojeva je $d_{izol} = 0,5$ mm. Svaki laminacijski paket je sastavljen od 32 feromagnetske lamele debljine $d = 0,3$ mm te ima faktor punjenja $k_p = 0,96$.

Uzbudni namot ima oblik šupljeg cilindra unutarnjeg radijusa $r_{in} = 2,5$ cm, vanjskog radijusa $r_{out} = 4,5$ cm i visine $h_u = 5$ cm. Jezgra je postavljena unutar uzbudnog namota, pri čemu uzbudni namot obuhvaća donju polovicu jezgre. U obje formulacije se kao uzbuda koristi strujni vektorski potencijal $\vec{T}_u$ pa u CAD modelu nije potrebno izravno konstruirati uzbudni namot nego ga se može zadati indirektno, definiranjem uzbudnog vektora $\vec{T}_u$. Zbog jednostavne geometrije uzbudnog namota, vektor $\vec{T}_u$ će imati samo z-komponentu, tj. ζ-komponentu globalnog koordinatnog sustava koja je dakle usmjerena aksijalno prema visini jezgre pa vrijedi da je $\vec{T}_u = T_u \vec{a}_\zeta$.

Centar mase jezgre se nalazi u centru globalnog $\chi\psi\zeta$-koordinatnog sustava, pa u pripadnom cilindričnom $r\zeta$-globalnom koordinatom sustavu vektor $\vec{T}_u$ glasi

$$\vec{T}_u(r,\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{za } r < r_{in} \text{ ili } \zeta < \frac{-h}{2} \text{ ili } \zeta > \frac{h}{2} \\ J_u(r - r_{in})\vec{a}_\zeta & \text{za } r_{in} < r < r_{out} \text{ i } \frac{-h}{2} < \zeta < \frac{h}{2} \\ J_u(r_{out} - r_{in})\vec{a}_\zeta & \text{za } r > r_{out} \text{ i } \frac{-h}{2} < \zeta < \frac{h}{2} \end{cases} \tag{9.1}$$

gdje J_u predstavlja iznos gustoće uzbudne struje za koju je zadano $J_u = 2\sqrt{2}$ A. Frekvencija uzbudne struje iznosi $f = 50$ Hz.

Sve lamele imaju jednake dimenzije i jednake značajke feromagnetskog materijala koje iznose $\boldsymbol{\kappa_{lam}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 2\cdot 10^6 & 2\cdot 10^6 & 2\cdot 10^6 \end{bmatrix}$ S/m i $\boldsymbol{\mu_{lam}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 0.8\cdot 10^4\mu_0 & 0,9\cdot 10^4\mu_0 & 1\cdot 10^4\mu_0 \end{bmatrix}$. Značajke materijala za izolaciju u jezgri iznosit će $\kappa_{izol} = 0,1$ S/m i $\mu_{izol} = \mu_0$. Iz zadanih značajki materijala izračunati su homogenizirani tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{lam}}$ za $f = 50$ Hz, tj.

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 99,5 & 88,4 & 79,6 \end{bmatrix} \text{ m/H} \tag{9.2a}$$

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{d}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 0 & 0,1 + j4,7 & 0,1 + j4,7 \end{bmatrix} \text{ m/H} \tag{9.2b}$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{lam}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-7} & 5\cdot 10^{-7} & 5\cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \Omega/\text{m} \tag{9.2c}$$

Pritom je imaginarna komponenta drugog i trećeg elemenata u $\bar{\boldsymbol{\nu}}^{\boldsymbol{a}}$ približno jednaka 0. Zatim, uvrštavanjem dobivenih brojeva u 7.96 i 7.98 slijede homogenizirane značajke materijala cijele jezgre $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ koje će biti korištene u $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji. Za tri jednako orijentirana laminacijska paketa, čiji se poprečni presjeci nalaze u prvom, drugom i trećem kvadrantu $\chi\psi$-ravnine, tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ iznose

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 31907 & 85 + j4,51 & 76,5 + j4,51 \end{bmatrix} \text{ m/H} \tag{9.3a}$$

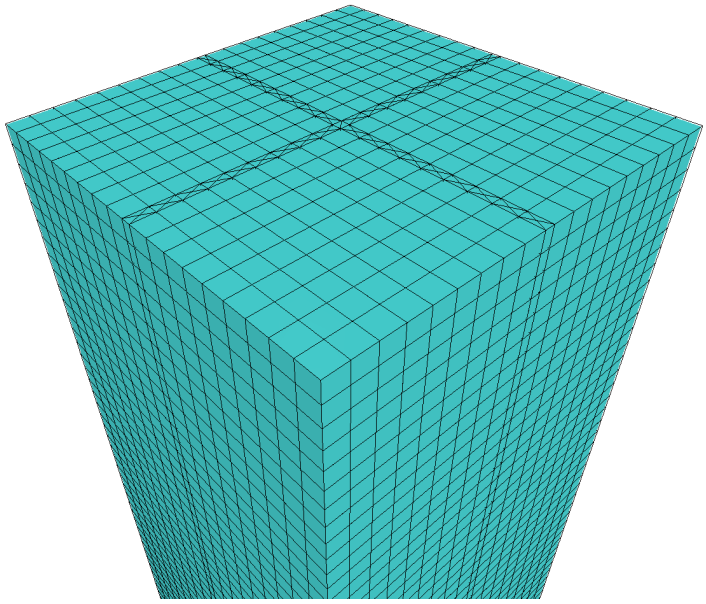
$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 10 & 4,8\cdot 10^{-7} & 4,8\cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \Omega/\text{m} \tag{9.3b}$$

dok za laminacijski paket čiji se poprečni presjek nalazi u četvrtom kvadrantu $\chi\psi$-ravnine, tenzori $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ i $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ iznose

$$\bar{\boldsymbol{\nu}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 85 + j4,51 & 31907 & 76,5 + j4,51 \end{bmatrix} \text{ m/H} \tag{9.4a}$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}} = \text{diag}\begin{bmatrix} 4,8\cdot 10^{-7} & 10 & 4,8\cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \Omega/\text{m} \tag{9.4b}$$

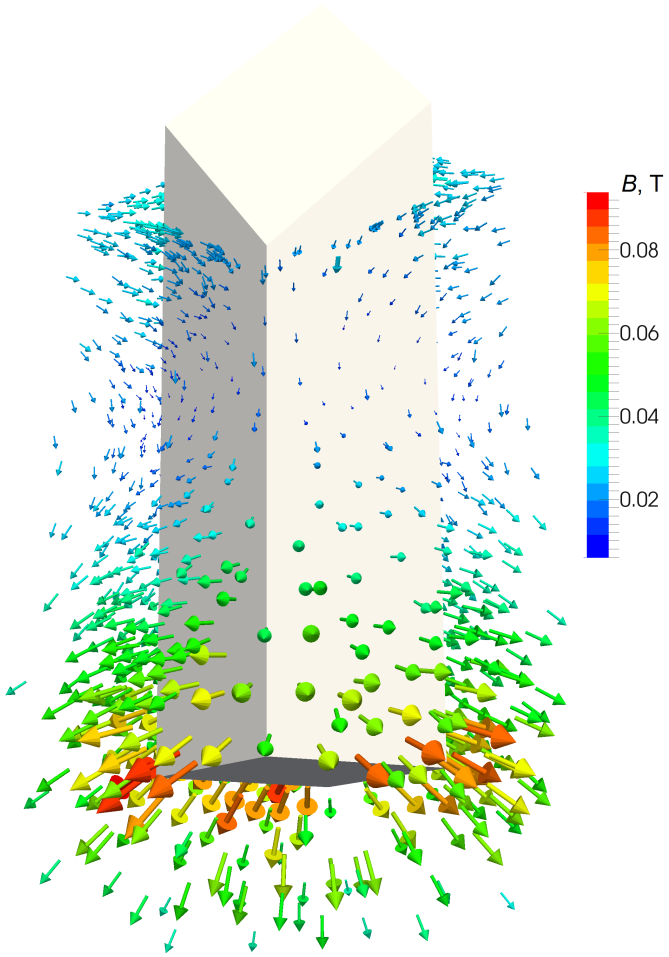
Iste značajke materijala 9.3 i 9.4 koristit će se za obje simulacije. Rezultati simulacija su prikazani u nastavku.



Slika 9.2: Prikaz mreže konačnih elemenata na gornjem odsječku 3D modela jezgre

9.1.2 Parametri simulacija

Provedene su dvije računalne simulacije, prva temeljena na slaboj $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji a druga na slaboj $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$-formulaciji. Vektor $\vec{A}$ je aproksimiran vektorom $\vec{A}_h$, gdje je $\vec{A}_h$ prema 4.12 interpoliran bridnim baznim funkcijama $\vec{\alpha}_i$ definiranim s obzirom na zadanu mrežu konačnih elemenata. Slično tome, $\vec{T}_x$ je aproksimiran vektorom $\vec{T}_h$, koji predstavlja x-komponentu vektora $\vec{T}_h$ interpoliranog bridnim baznim funkcijama $\vec{\tau}_j$ prema 4.13. U slučaju slabe $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$-formulacije, vektor $\vec{A}$ je aproksimiran istim vektorom $\vec{A}_h$ jer je korištena ista mreža konačnih elemenata, dok je skalarni potencijal φ aproksimiran s φ_h gdje je φ_h interpoliran čvornim baznim funkcijama kao u 4.5. Dakle, dimenzije od $\vec{A}_h$ i $\vec{T}_{hx}$ i φ_h ovise o gustoći mreže konačnih elemenata.
Kao generator mreže konačnih elemenata koristi se softver GMSH, verzija-4.1.0. Generirana mreža konačnih elemenata sadrži 201504 konačna elementa, od čega se u području svakog laminacijskog paketa nalazi po 8100 konačnih elemenata, u području među-paketne izolacije se nalazi ukupno 14600 konačnih elemenata, a u ostatku domene se nalazi 154504 konačna elementa. Zahvaljujući provedenoj homogenizaciji, mreža konačnih elemenata u području jezgre ne mora biti vrlo gusta, a njena gustoća naravno diktira i gustoću mreže konačnih elemenata u području zraka i uzbudnog namota, koji iako nije izravno konstruiran zahtjeva dovoljnu gustoću za ispravnu interpolaciju funkcije iz 9.1. Na slici 9.2 je prikazan dio mreže konačnih elemenata u području jezgre. U laminacijskim paketima je korištena strukturna heksahedralna mreža konačnih elemenata, a za područje među-paketne izolacije su kao konačni elementi korištene trostrane prizme. Očekivano, mreža konačnih elemenata u području među-paketne izolacije je najgušća i kvari brzinu konvergencije.
S obzirom na to da su konačne matrice postavljenog sustava jednadžbi velike i rijetko popu-



Slika 9.3: Vektori magnetske indukcije u području zraka oko jezgre. Radi zornosti prikaza, vizualizirano je samo polje oko donjeg odsječka jezgre. Prikazano vektorsko polje je praktično jednako za obje simulacije. Primjetan je značajan udio "rasipnog toka" okomitog na ravnine lamela.

njene, za njihovo rješavanje će se koristiti iterativni pristup. Obje formulacijama su simetrične pa će se koristiti CG algoritam (engl. *Conjugate Gradient*) uz toleranciju konvergencije postavljenu na vrijednost $1 \cdot 10^{-6}$. Obje simulacije su provedene u softveru Elmer, verzija 8.4 [43].

9.1.3 Rezultati simulacija

Iz rješenja za $\vec{A} \approx \vec{A}_h$ i $\vec{T}_x \approx \vec{T}_{hx}$ prve simulacije, u fazi postprocesiranja je izračunat vektor magnetske indukcije $\vec{B} \approx \nabla \times \vec{A}_h$, i vektor vrtložnih struja $\vec{J}_{xy} \approx \nabla \times \vec{T}_{hx}$, koji su zatim aproksimirani i čvornim baznim funkcijama radi bolje vizualizacije i analize rešenja. Njihova aproksimacija čvornim baznim funkcijama traje vrlo kratko, oko 10 sekundi. S druge strane, iz rješenja za $\vec{A} \approx \vec{A}_h$ i $\varphi \approx \varphi_h$ potencijale, u fazi postprocesiranja je izračunat vektor magnetske indukcije $\vec{B} \approx \nabla \times \vec{A}_h$, i vektor vrtložnih struja $\vec{J}_{xy} \approx -j\omega(\vec{A}_h - \nabla\varphi_h)$, koji su također aproksimirani i čvornim baznim funkcijama radi bolje vizualizacije i analize rešenja.

S obzirom na geometriju jezgre, pad magnetskog napona se gotovo u potpunosti javlja u zraku,

pa postojanje željezne jezgre minimalno utječe na putanju magnetskog toka u zraku. Rezultati simulacije u području zraka slažu se s tim teorijskim očekivanjem kao što se vidi na slici 9.3 na kojoj je prikazano rješenje za magnetsku indukciju u zraku oko donjeg odsječka jezgre. U području gornjeg dijela jezgre koje nije prikazano, putanja magnetskog toka ima sličan obrazac. Za obje simulacije je indukcija izračunata kao $\vec{B} \approx \nabla \times \vec{A}_h$ na identičnoj mreži konačnih elemenata pa je i konačno rješenje za magnetsku indukciju u zraku praktično jednako za obje simulacije.

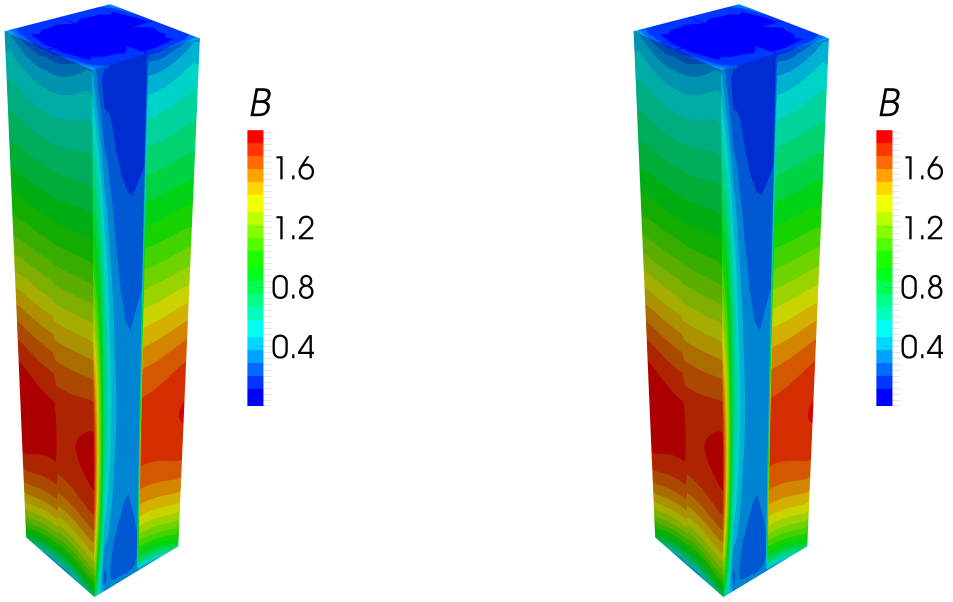
Usporedba apsolutne vrijednosti magnetske indukcije duž cijele jezgre prikazana je na slici 9.4. Rezultati su gotovo identični za obje simulacije. Na slici 9.5 se vidi jednako dobro slaganje magnetskih indukcija i u unutrašnjem dijelu jezgre. Na slikama se vidi utjecaj različitog smjera lameliranja četvrtog laminacijskog paketa u odnosu na preostala tri, kao što je zadano s 9.3 i 9.4. Specifično za jezgre otvorenog tipa, razdioba magnetske indukcije nije homogena. Očekivano, indukcija je maksimalna u vanjskim lamelama te na četvrtini visine jezgre jer je uzbudni namot pozicioniran oko donje polovice jezgre. Na slici 9.5 se vidi nehomogena razdioba magnetske indukcije po unutrašnjem dijelu jezgre otvorenog tipa. Iako amplituda od $\vec{B}$ opada prema unutrašnjosti lamele, diferencijal od $\vec{B}$ nije tako značajan po debljini lamele $d = 0,3$ mm pa pogreška aproksimacije $\vec{B} \approx \vec{b}_x + \vec{b}_y + \vec{b}_z$ nije velika.

Na slici 9.6 prikazana je usporedba apsolutnih vrijednosti gustoće vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$. Uočljivo je dobro slaganje rezultata za obje simulacije. U oba slučaju, vrtložne struje $\vec{J}_{yz}$ su koncentrirane u vanjskim lamelama. Očekivano, za razliku od "jednodimenzionalnih" vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$, gustoća vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$ ne korelira dobro s magnetskom indukcijom $\vec{B}$ u konačnim elementima, ali ni s x-komponentom magnetske indukcije, što se može zaključiti sa slike 9.3. Zbog toga je vrtložne struje $\vec{J}_{yz}$ potrebno izravno modelirati pomoću strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}_{hx}$.

Konačno, iz rješenja za magnetsku indukciju $\vec{B}$ i vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$, moguće je izračunati ukupne gubitke zbog vrtložnih struja. Rezultati izračuna su prikazani u tablici 9.1. Zbog malog relativnog odstupanja rezultata gubitaka, uz korištenje iste mreže konačnih elemenata, a značajno bolje konvergencije, $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacija je favorizirana za izračun gubitaka zbog vrtložnih struja u lameliranoj jezgri otvorenog tipa. Osim toga, kao što je već spomenuto, korištenjem $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacije moguće je potpuno homogenizirati područje jezgre, tj. ukloniti

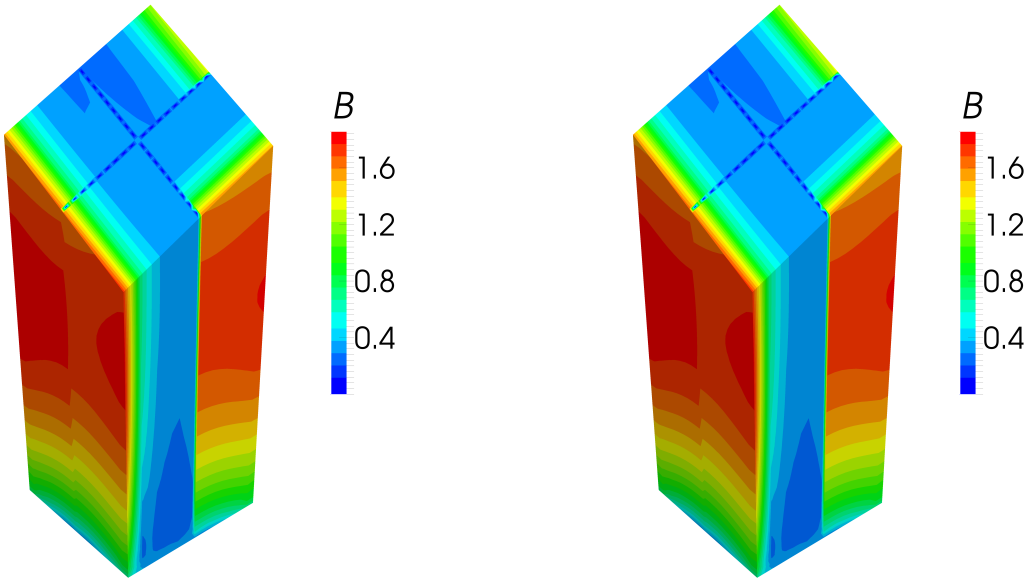
Tablica 9.1: Usporedba rezultata za ukupne gubitke P zbog vrtložnih struja u jezgri dobivene simulacijom temeljenom na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji te simulacijom temeljenom na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji. S $P_{xy} + P_{xz}$ su označeni gubitci zbog $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$, a s P_{yz} gubitci zbog $\vec{J}_{yz}$.

	$P_{xy} + P_{xz}$	P_{yz}	P	broj iteracija
$\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ simulacija	7,95 mW	5,7 mW	13,65 mW	4690
$\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ simulacija	7,95 mW	5,95 mW	13,9 mW	10750
relativno odstupanje	0%	-4,2%	-1,8%	-56%



(a) (b)

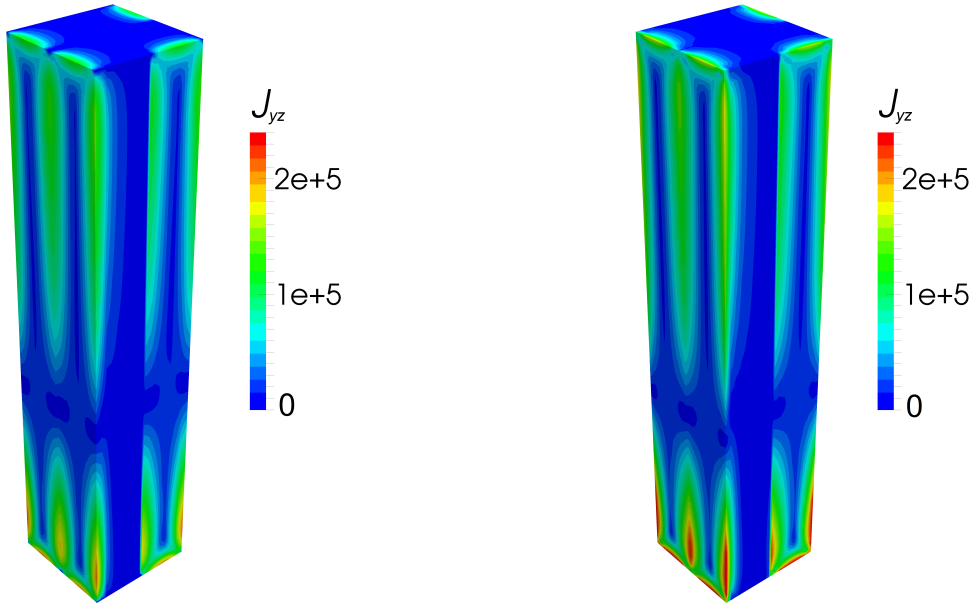
Slika 9.4: Prikaz apsolutne vrijednosti magnetske indukcije $\vec{B}$: (a) simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji. (b) simulacija temeljena na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji.



(a) (b)

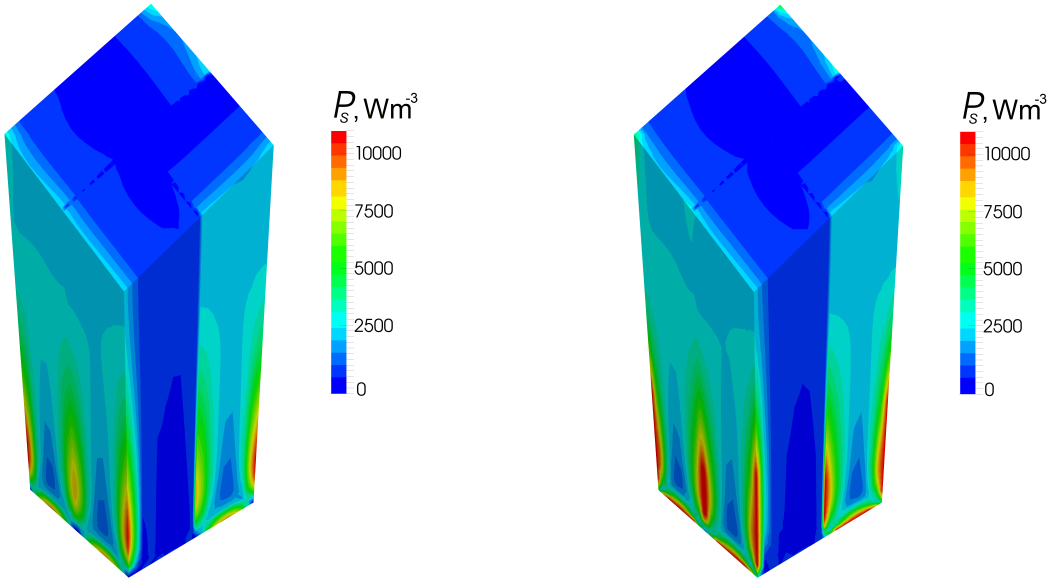
Slika 9.5: Prikaz apsolutne vrijednosti magnetske indukcije $\vec{B}$ na odsječku donjeg dijela jezgre: (a) simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji. (b) simulacija temeljena na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji.

slojeve među-paketne izolacije uz minimalnu računsku pogrešku. Time se pojednostavljuje CAD model i dodatno ubrzava konvergencija CG algoritma. Usporedbe radi, ako se umjesto $\vec{T}_x$ koristi $\vec{T}$, tj. ako se koristi homogenizirana $\vec{A}, \vec{T} - \vec{A}$ formulacija, svi rezultati za gubitke su identični kao i kod $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulacije u tablici 9.1, ali broj potrebnih iteracija iznosi 13800 iteracija, što je skoro 30% više nego kod $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulacije.



(a) (b)

Slika 9.6: Vizualizacija apsolutne vrijednosti vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$: (a) simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji. (b) simulacija temeljena na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji.



(a) (b)

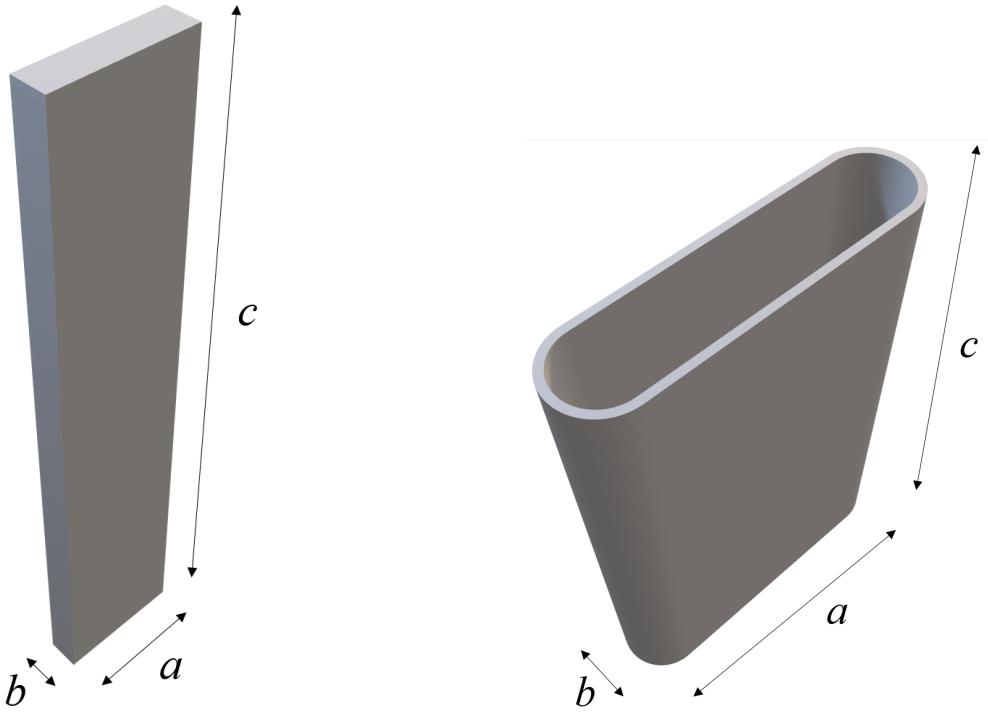
Slika 9.7: Prikaz razdiobe gustoće gubitaka P_s na odsječku donjeg dijela jezgre: (a) simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ formulaciji. (b) simulacija temeljena na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulaciji.

Na slici 9.7 je prikazana vizualna usporedba ukupnih gubitaka u jezgri dobivenih objema simulacijama. Očekivano, dobiva se dobro slaganje između razdioba gubitaka. Iako su prema tablici 9.1 gubitci $P_{xy} + P_{xz}$ veći nego P_{yz}, gubitci P_{yz} imaju veću gustoću. Specifično za jezgre otvorenog tipa, ukupni gubitci su općenito više koncentrirani u vanjskim lamelama.

9.2 Metoda za izračun ukupnih gubitaka u jezgri

Kao što je opisano u uvodnom poglavlju, ukupne gubitke u feromagnetskom materijalu se može rastaviti na gubitke zbog histereze, gubitke zbog klasičnih vrtložnih struja te dodatne gubitke. Po kriteriju prostorne skale na kojoj se događaju, gubitci zbog histereze i dodatni gubitci imaju mikroskopsku prirodu te njihova prostorna razdioba dobro korelira s razdiobom magnetske indukcije [1]. S druge strane, klasične vrtložne struje su makroskopski fenomen čija prostorna razdioba ovisi o ukupnom toku te obliku feromagntskog materijala. Posljedično, prostorna razdioba gubitaka zbog vrtložnih struja ne korelira dovoljno dobro s prostornom razdiobom magnetske indukcije. Međutim, kao što je ranije opisano, u slučaju feromagnetskih lamela, moguće je unutar bliskog okoliša bilo koje točke lamele rastaviti vrtložne struje na tri tipa vrtložnih struja, tj. $\vec{J} \approx \vec{j}_{xy} + \vec{j}_{xz} + \vec{j}_{yz}$, od kojih $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ vrlo dobro koreliraju s indukcijom $\vec{B}$ u toj točki. Posljedično, gubitci zbog vrtložnih struja $\vec{j}_{xy}$ i $\vec{j}_{xz}$ pokazuju lokalni karakter kakav imaju gubitci zbog histereze i dodatni gubitci tj. ih je moguće dobro estimirati iz razdiobe magnetske indukcije $\vec{B}$ u lameli, tj. u jezgri. S druge strane, vrtložne struje $\vec{j}_{yz}$ imaju globalni karakter i slabo koreliraju s magnetskom indukcijom $\vec{B}$.
Za zadani feromagnetski lim obično su dostupne krivulje ovisnosti specifičnih gubitaka o indukciji, dobivene pomoću Epsteinovog aparata. S obzirom na dobru korelaciju gubitaka i indukcije u točki lamele, iz razdiobe magnetske indukcije $\vec{B}$ u jezgri moguće je estimirati sve gubitke, osim gubitaka uzrokovanih vrtložnim strujama $\vec{j}_{yz}$. No, krivulja ovisnosti specifičnih gubitaka o indukciji svakako ne uključuje gubitke zbog vrtložnih struja $\vec{j}_{yz}$, jer mjerenje gubitaka u Epsteinovom aparatu eliminira rasipni magnetski tok. Prema tome, kombinacijom krivulje specifičnih gubitaka o indukciji s izračunatom razdiobom magnetskog toka u fazi post-procesiranja moguće je izračunati sumu svih gubitaka, osim gubitaka P_{yz} koje se onda može jednostavno izračunati u fazi postprocesiranja kao u prethodnom odjeljku 9.1.

Kako bi se utvrdila valjanost predložene metode za izračun ukupnih gubitaka u jezgri, provest će se izračun ukupnih gubitaka za konkretnu jezgru otvorenog tipa te će se dobiveni rezultati usporediti s rezultatima mjerenja ukupnih gubitaka. Najprije će biti opisane dimenzije, značajke materijala i ostale karakteristke lamelirane jezgre i uzbudnog namota. Zatim će se primjenom razvijenog matematičkog modela temeljenog na metodi konačnih elemenata izračunati gubitci zbog vrtložnih struja u zadanoj jezgri putem računalne simulacije. Nakon toga će se definirati mjerna shema i opisati mjerni postav te prikazat rezultati mjerenja snage u ovisnosti o indukciji, na rasponu frekvencija od 10 do 500 Hz. Analizom izmjerenih podataka estimirat će se udio različitih tipova gubitaka u jezgri.



(a) jezgra (b) kostur namota

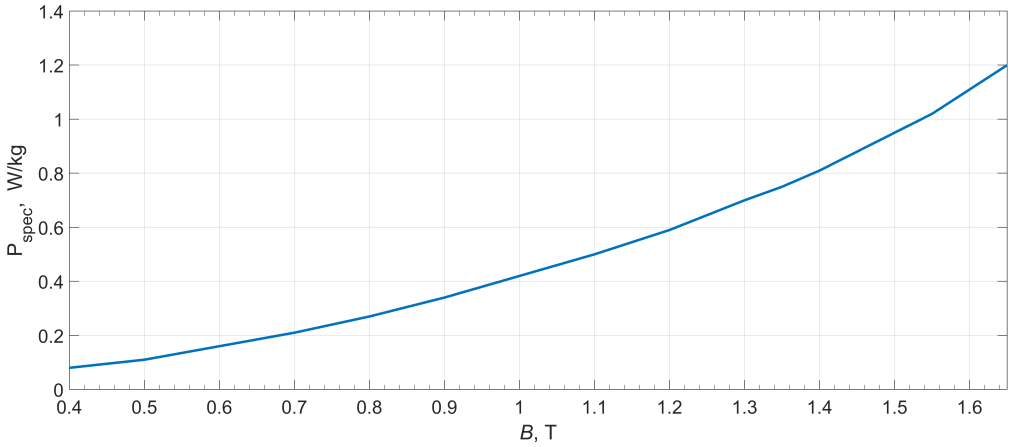
Slika 9.8: Prikaz 3D modela jednodijelne jezgre otvorenog tipa te 3D modela kostura namota s naznačenim nazivima dimenzija. Smjer lameliranja jezgre je u smjeru dimenzije b. Na slici nije prikazan uzbudni namot sačinjen od 447 zavoja bakrene žice ravnomjerno namotane na dio kostura namota.

Tablica 9.2: Vanjske dimenzije jezgre, kostura namota i uzbudnog namota.

	dužina a	širina b	visina c
jezgra	4 cm	1 cm	20 cm
kostur namota	9 cm	2,4 cm	12 cm
uzbudni namot	10,6 cm	4 cm	10 cm

9.2.1 Jezgra i uzbudni namot

Mjerenja i simulacije su provedene na lameliranoj jezgri otvorenog tipa postavljenoj unutar uzbudnog namota, pri čemu se centar mase jezgre nalazi u centru globalnog χ, ψ, ζ-koordinatnog sustava, dok je centar mase uzbudnog namota smješten u točku (0 cm, 0 cm, -3 cm). Uzbudni namot je namotan na plastični kostur namota. Na slici 9.8 su odvojeno prikazani 3D model jezgre i 3D model kostura namota radi zornijeg prikaza te kako bi se označile njihove dimenzije. Radijus zakrivljenosti kraćih stranica kostura namota jednak je $b/2$, odnosno u pitanju su dvije polokružnice. Iznosi vanjskih dimenzija jezgre, kostura namota i uzbudnog namota navedeni su u tablici 9.2. Izbor veličine jezgre i namota bio je diktiran mogućnostima naponskog izvora. Unatoč veličini jezgre, vrijednosti gubitaka su bile mjerljive dostupnom mjernom opremom.
Jezgra je sastavljena od 27 lamela orijentiranog feromagnetskog lima M140-35S. Debljina lamela je dakle $d = 0,35$ mm, a konačni faktor punjenja jezgre iznosi $k_p = 0,95$. Prema podacima o materijalu M140-35S, električna provodnost iznosi $\kappa = 2 \cdot 10^6$ S/m, a magnetska permeabil-



Slika 9.9: Krivulja ovisnosti specifičnih gubitaka P_{spec} o amplitudi indukcije $\vec{B}$ za lim M140-35S

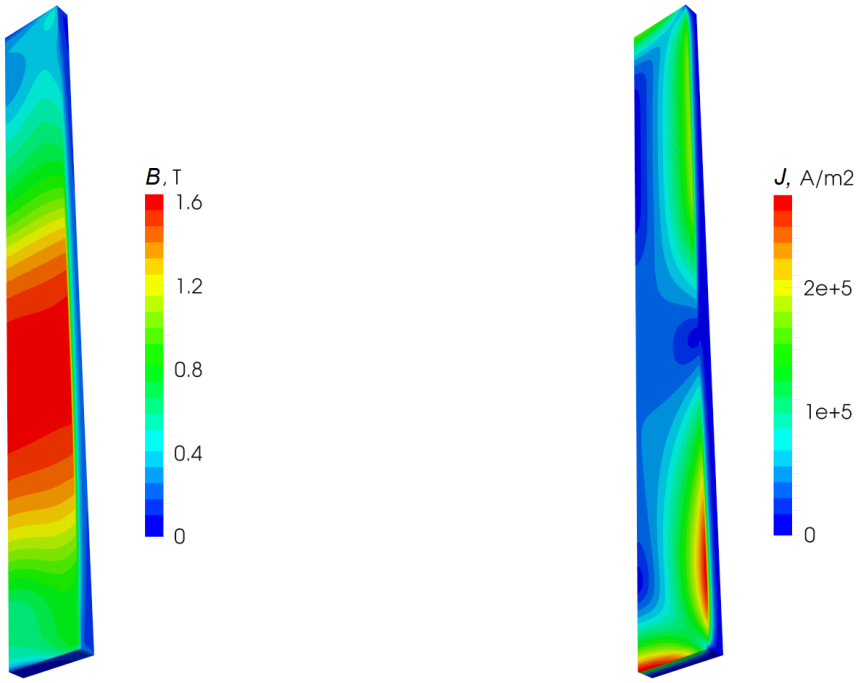
nost iznosi $\mu = 3 \cdot 10^4 \mu_0$. Pretpostavit će se izotropne značajke materijala unutar pojedine lamele jer nisu dostupna mjerenja anizotropnosti značajki materijala. Uzbudni namot se sastoji od 447 zavoja bakrene žice promjera $\phi = 1,2$ mm namotane u šest slojeva na kosturu od ABS plastike prikazanom na slici Krivulja ovisnosti specifičnih gubitaka o indukciji pri frekvenciji $f = 50$ Hz za lim M140-35S prikazana je na slici 9.9. Krivulja specifičnih gubitaka je dobivena od strane proizvođača lima te predstavlja ovisnost specifičnih gubitaka o prosječnoj indukciji u limu pri homogenoj razdiobi isključivo tangencijalnog magnetskog toka.

9.3 Izračun gubitaka u stvarnoj jezgri

Na računalnom modelu zadane jezgre i namota provedena je simulacija temeljena na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji kako bi se izračunali magnetska indukcija $\vec{B}$ i vrtložne struje $\vec{J}_{yz}$ te na kraju ukupni gubitci u jezgri P uz korištenje krivulje $P_{spec}(B)$ prikazane na slici 9.9. Budući da će mjerenja gubitaka biti dostupna samo za raspon prosječne indukcije u jezgri od 0 T do 0,5 T, zadane linearne značajke materijala su dovoljno dobra aproksimacija stvarnih, nelinearnih značajki materijala.

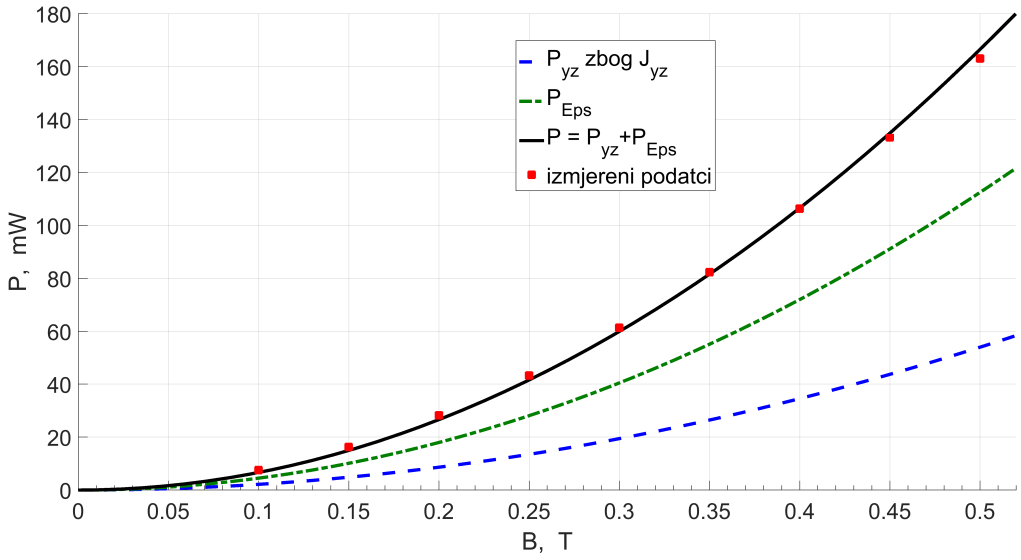
Rezultati simulacije za razdiobu magnetske indukciju u jezgri prikazani su na slici 9.10a. Iznos izračunate prosječne indukcije u jezgri dobro se slaže s izmjerenom prosječnom indukcijom u jezgri. Na slici 9.10b prikazana je razdioba gustoće vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$, induciranih magnetskim tokom okomitim na plohe lamela. Zbog prisutnosti sviju ploha simetrije, izračun je proveden samo za četvrtinu modela jezgre. Prikazane razdiobe indukcije i vrtložnih struja slične su razdiobama kod četerodijelne jezgre iz odjeljka 9.1.

Korištenjem rezultata numeričke simulacije za magnetsku indukciju u kombinaciji s krivuljom $P_{spec}(B)$ sa slike 9.9 izračunata je suma svih gubitaka koji dobro koreliraju s magnetskom indukcijom u konačnom elementu, a to su dakle gubitci zbog vrtložnih struja $\vec{J}_{xy}$ i $\vec{J}_{xz}$, te gubitci



(a) (b)

Slika 9.10: Vizualizacija rezultata simulacije temeljene na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji: (a) razdioba magnetske indukcije $\vec{B}$. (b) razdioba vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$. Zbog prisutnosti ploha simetrije Γ_B i Γ_E, simulacija je provedena nad četvrtinom modela.



Slika 9.11: Usporedba izmjerenih i izračunatih gubitaka pri frekvenciji $f = 50$ Hz.

zbog histereze i dodatni gubitci. Nakon toga preostaje još izračunati gubitke zbog vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$ što se jednostavno provodi u fazi postprocesiranja, integriranjem izraza $|\vec{J}_{yz}|^2/2\kappa$. Konačno, zbrajanjem gubitaka dobivenih uz "Epsteinovu krivulju" s gubitcima zbog vrtložnih struja $\vec{J}_{yz}$, izračunati su ukupni gubitci u jezgri koji bi trebali slagati s izmjerenim ukupnim gubitcima u jezgri. Usporedba izračunatih i izmjerenih gubitaka je napravljena za prosječne

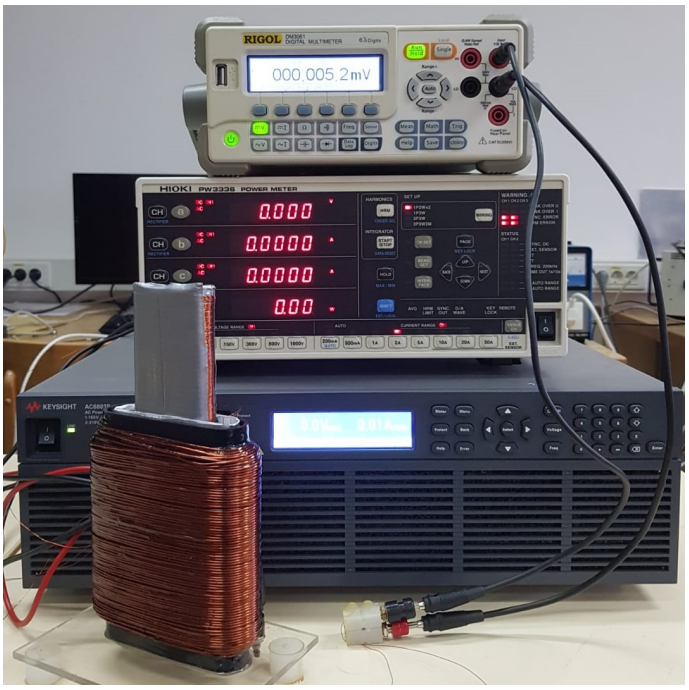
indukcije u jezgri od 0 T do 0,5 T, pri frekvenciji $f = 50$ Hz, a rezultati su prikazani na slici 9.11. Kao što se može vidjeti na slici 9.11, prisutno je jako dobro slaganje između izračunatih i izmjerenih gubitaka. "Epsteinove" gubitci, prikazani zelenim (crta točka) grafom čine oko $2/3$ ukupnih gubitaka, a preostala $1/3$ gubitaka otpada na gubitke zbog $\vec{J}_{yz}$, prikazane plavim (crta crta) grafom. Mjerni postav i mjerna metoda pomoću koje su izmjereni ukupni gubitci u jezgri, prikazani crvenim točkama na slici 9.11, opisani su u nastavku.

9.4 Mjerenje gubitaka u stvarnoj jezgri

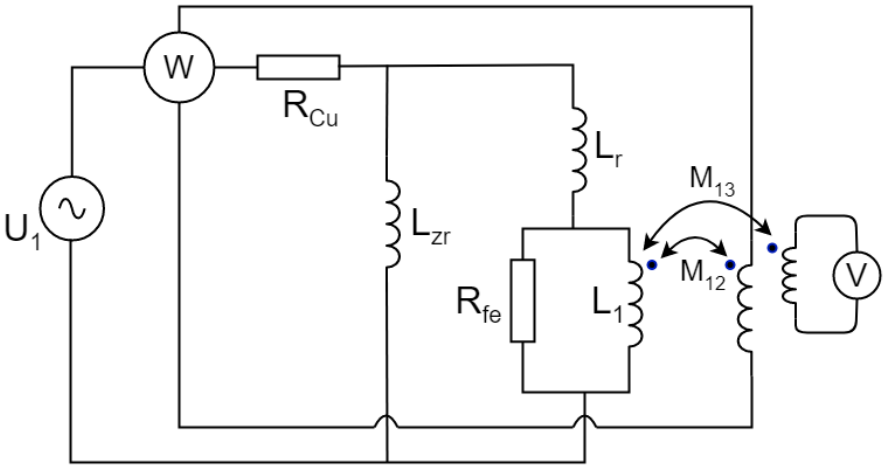
Uz mjerenje ukupnih gubitaka na frekvenciji $f = 50$ Hz, provedena su mjerenja na frekvencijskom rasponu od 10 Hz do 500 Hz kako bi se u konačnici estimirao udio gubitaka zbog histereze, te dinamičkih gubitaka koji uključuju gubitke zbog vrtložnih struja te dodatne gubitke. Dobiveni rezultati ukazuju na značajan udio gubitaka zbog histereze, i još veći udio dodatnih gubitaka u ukupnim gubitcima te ih treba uzeti u obzir prilikom optimiziranja transformatorske jezgre s obzirom na ukupne gubitke u jezgri.

9.4.1 Nadomjesna shema

U nastavku će biti opisana nadomjesna shema mjernog postava prikazana na slici 9.13. Primarni, energetski krug čine serijski spoj naponskog izvora U_1 i nadomjesnog modela uzbudnog namota sa feromagnetskom jezgrom. Otporom R_{Cu} modelira se radni otpor namota, dok se induktivitetom L_{zr} modelira pad magnetskog napona u zraku pa veći dio primarne struje predstavlja struju magnetizaranja zraka koja teče kroz L_{zr}. Preostali dio primarne struje otpada na struju magnetiziranja feromagnetske jezgre čiji se doprinos induktivitetu modelira s L_1 te na ukupne gubitke u feromagntskoj jezgri modelirane otporom R_{fe}. Manji dio ukupnog magnetskog toka pritom ne prolazi kroz jezgru nego se zatvara kroz preostali zrak pa predstavlja rasipni magnetski tok čiji se doprinos uzima u obzir pomoću rasipnog induktiviteta L_r.
Mjernu shemu čine sekundarni krug, prikazan serijskim spojem međuinduktiviteta M_{12} i naponskih stezaljki vatmetra W, te tercijarni krug sastavljen od serijski spojenih međuinduktiviteta M_{13} i voltmetra V. Sekundarni mjerni krug služi za mjerenje snage, dok tercijarni mjerni krug služi za simultano mjerenje prosječne indukcije u jezgri [56]. Nije potrebno modelirati samoinduktivitete sekundarnog i tercijarnog kruga budući da oba uključuju serijski spoj s voltmetrom, pa je struja u njima zanemarivog iznosa. Dakle, sekundarni i tercijarni krug su međuinduktivno vezani s primarnim strujnim krugom. Sekundarni namot ima 335 zavoja tanke bakrene žice promjera $\phi = 0,2$ mm i namotan je tako da bude što je moguće bliže unutarnjoj plohi kostura namota sa slike 9.8b. Visina sekundarnog namota je 10 cm. Posljedično, koeficijent međuinduktivne veze između primarnog i sekundarnog namota k_{12} ima visok iznos, točnije $k_{12} = 0,96$.



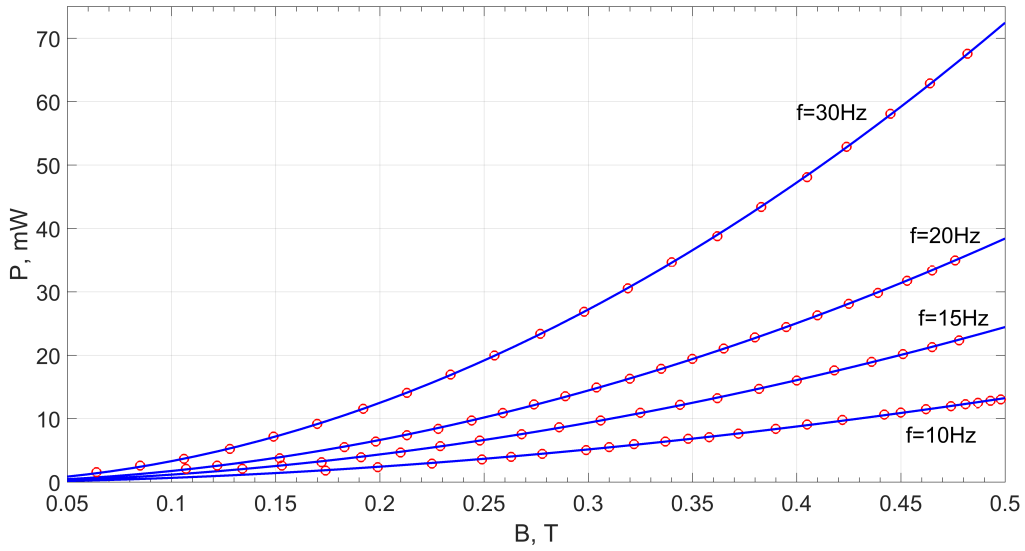
Slika 9.12: Fizički mjerni postav. U prvom planu se nalazi zadana jezgra smještena unutar crnog plastičnog kostura oko kojeg je namotan uzbudni namot. Duž jezgre je namotan tercijarni namot. Sekundarni namot se nalazi s unutarnje strane plastičnog kostura. Od prikazanih uređaja, na dnu je naponski izvor, iznad njega watmetar te na vrhu voltemetar.



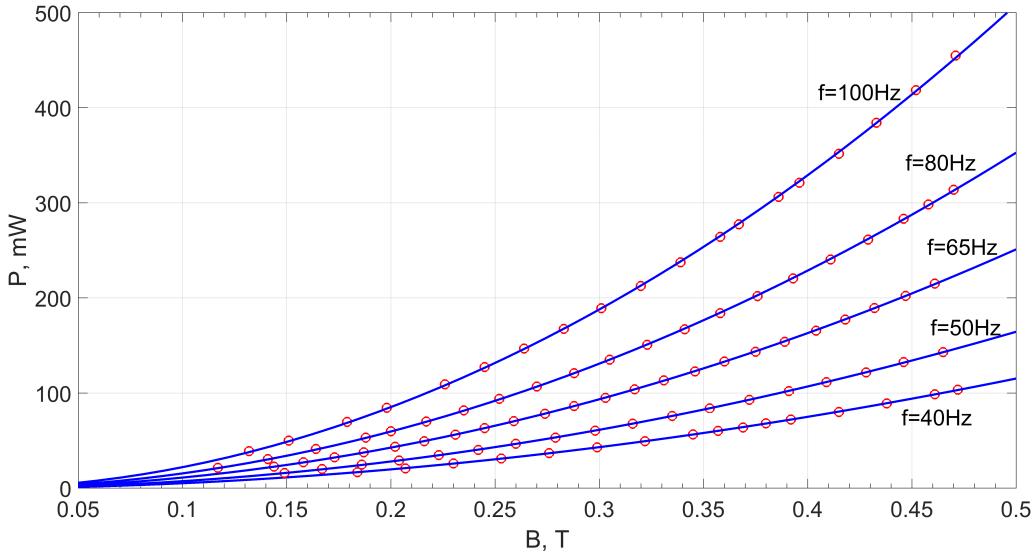
Slika 9.13: Nadomjesna shema energetskog i mjernog kruga

Tercijarni namot ima 550 zavoja bakrene žice promjera $\phi = 0,2$ mm ravnomjerno namotanih duž cijele jezgre kako bi se što točnije mjerila srednja vrijednost indukcije u jezgri. Dakle, visina tercijarnog namota iznosi 20 cm.

U realnom postavu se za naponski izvor koriste dva različita uređaja za dva različita frekvencijska raspona. Dakle, moguće je podešavati i amplitudu i frekvenciju izvora U_1. Na niskim frekvencijama, od 10 Hz do 50 Hz, koristi se TOE-7621, a na ostalim frekvencijama, od 40 Hz do 500 Hz, koristi se KEYSIGHT-AC6801B. Za vatmetar se koristi digitalni vatmetar HIOKI-PW3336, dok se kao voltmetar koristi digitalni multimetar RIGOL-DM3061.



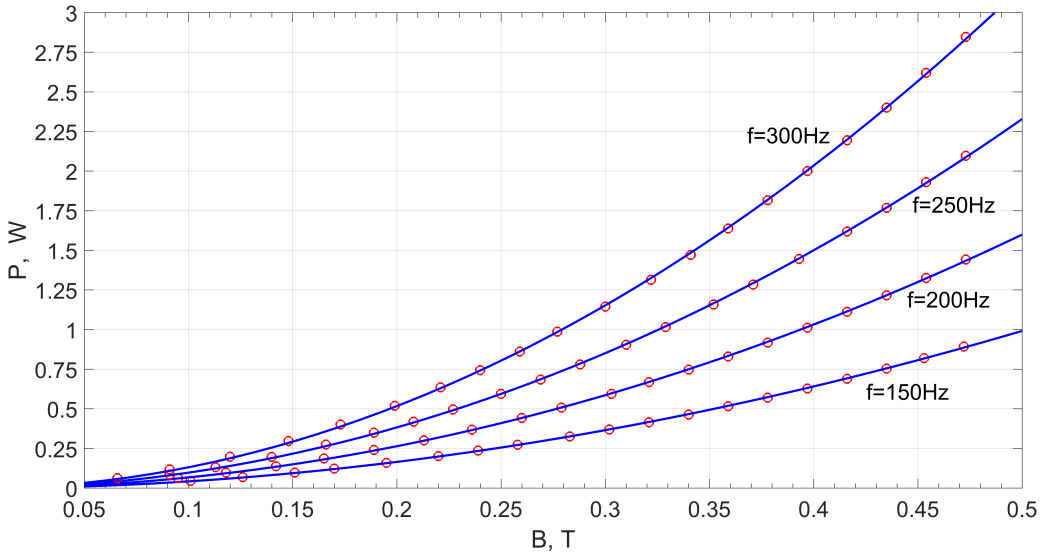
Slika 9.14: Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 10$ Hz, 15 Hz, 20 Hz i 30 Hz. Na apscisi se nalazi prosječna magnetska indukcija u jezgri, dok se na ordinati nalaze ukupni gubitci u jezgri.



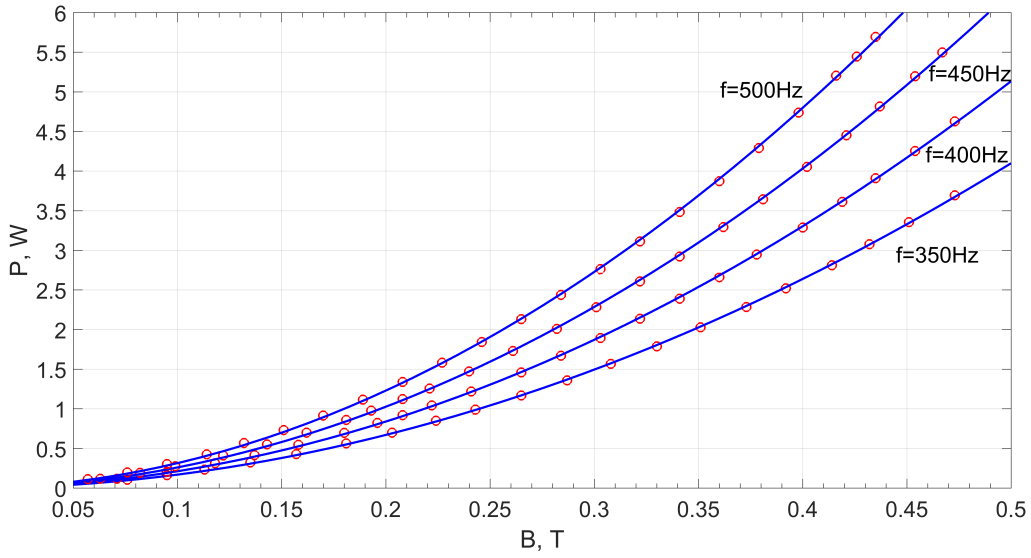
Slika 9.15: Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 40$ Hz, 50 Hz, 65 Hz, 80 Hz i 100 Hz. Na apscisi se nalazi prosječna magnetska indukcija u jezgri, dok se na ordinati nalaze ukupni gubitci u jezgri.

9.4.2 Rezultati mjerenja

Korištenjem prethodno opisane sheme i mjernog postava snimljene su diskretne točke indukcijskih krivulja, tj. krivulja ovisnosti snage o indukciji pri različitim frekvencijama. Točnije, izmjereno je 17 skupova točaka $(P(f,B),\ B(f))_{f=\text{konst.}}$, na 17 različitih frekvencija u rasponu od 10 do 500 Hz. Nakon što je naponski izvor postavljen na neku frekvenciju f, promjenom amplitude napona mijenja se iznos prosječne indukcije u jezgri B, a posljedično i ukupni gubitci u jezgri P, te se i B i P istovremeno očitavaju. Prije analaze podataka, potrebno je izmjerene gubitke preračunati sa sekundarnog namota na primarni namot. Koeficijent preračunavanja iz-



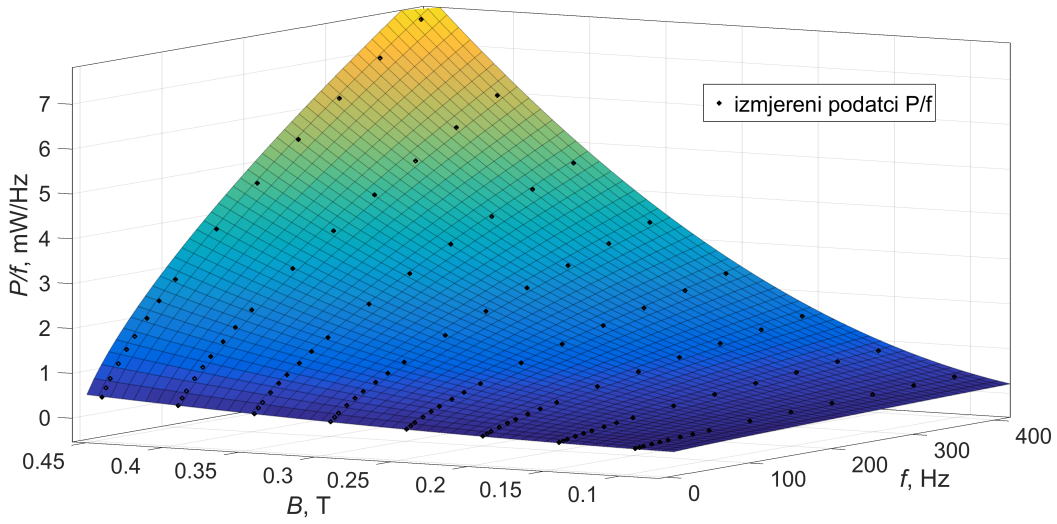
Slika 9.16: Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 150$ Hz, 200 Hz, 250 Hz i 300 Hz. Na apscisi se nalazi prosječna magnetska indukcija u jezgri, dok se na ordinati nalaze ukupni gubitci u jezgri.



Slika 9.17: Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 350$ Hz, 400 Hz, 450 Hz i 500 Hz. Na apscisi se nalazi prosječna magnetska indukcija u jezgri, dok se na ordinati nalaze ukupni gubitci u jezgri.

nosi 1,3. Dobiveni rezultati su zatim aproksimirani korištenjem nelinearne metode najmanjih kvadrata u MATLAB-u kako bi se dobile indukcijske krivulje. Za aproksimaciju je korištena funkcija oblika $P = kB^m$, gdje su k i m aproksimacijske nepoznanice.

Mjerne točke skupa s dobivenim aproksimacijskim krivuljama grupirane su u četiri frekvencijska raspona te prikazani na slikama. Za frekvencije $f = 10$ Hz, 15 Hz, 20 Hz i 30 Hz rezultati su prikazani na slici 9.14. Za frekvencije $f = 40$ Hz, 50 Hz, 65 Hz, 80 Hz i 100 Hz indukcijske krivulje su prikazane na slici 9.15. Treća grupa indukcijskih krivulja mjerenih za frekvencije $f = 150$ Hz, 200 Hz, 250 Hz i 300 Hz prikazana je na slici 9.16, a četvrta grupa za frekvencije



Slika 9.18: Grafički prikaz funkcije $\frac{P}{f} = 1,47B^{1,71} + 0,684B^{1,95} f^{0,71}$

$f = 350$ Hz, 400 Hz, 450 Hz i 500 Hz na slici 9.17.

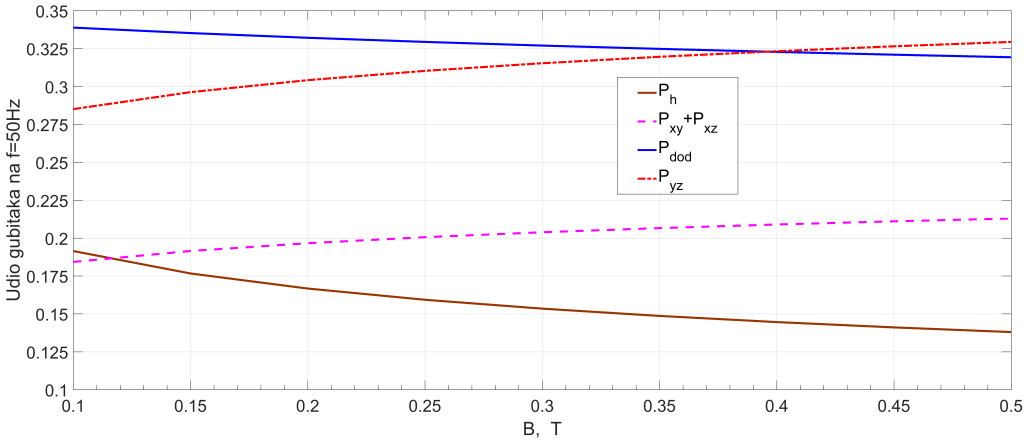
Kao što se može vidjeti na slikama 9.14, 9.15, 9.16 i 9.17, ostvarena je vrlo dobra aproksimacija mjernih točaka na svim frekvencijskim razinama. Što se tiče nepoznatog koeficijenata k i eksponenta m, i jedan i drugi ovise o frekvenciji što znači da jednostavni Steinmetzov model ovdje nije primjenjiv. Pritom je $k(f)$ jednostavna polinomska funkcija s dva stupnja slobode, dok za $m(f)$ nije moguće pronaći dobru aproksimaciju čak ni s pet stupnjeva slobode što ukazuje na prisutnost više tipova gubitaka u ukupnim gubitcima, a koji različito ovise i o frekvenciji i o magnetskoj indukciji. Takvi rezultati su u skladu s fizikalnim modelom koji razlikuje gubitke zbog histereze, za koje površina petlje histereze nije ovisna o frekvenciji pa ih se naziva statičkim gubitcima, te dinamičke gubitke kod kojih površina petlje histereze jako ovisi o frekvenciji.

U skladu s prethodnim rezultatima i teorijskim predviđanjima, provedena je aproksimacija prethodno izmjerenih podataka skalarnog polja $P(f,B)$ korištenjem nelinearne metode najmanjih kvadrata, uz pretpostavljenu aproksimacijsku funkciju oblika $\frac{P}{f} = k_h B^{m_h} + k_d B^{m_d} f^c$. Gubitci P su podijeljeni s frekvencijom f kako bi se dobili gubitci po ciklusu petlje histereze. Prema tome, konstantni član $k_h B^{m_h}$ predstavlja histerezne gubitke u jednom ciklusu magnetizacije, čiji je iznos dakle neovisan o frekvenciji te ih se naziva statičkim gubitcima, a drugi član $k_d B^{m_d} f^c$ onda predstavlja dinamičke gubitke.

Aproksimacijom u MATLAB-u dobivena je konačna funkcija

$$\frac{P}{f} = 1,47B^{1,71} + 0,684B^{1,95} f^{0,71} \tag{9.5}$$

prikazana grafički na slici 9.18. Očekivano, statički i dinamički član gubitaka po ciklusu magnetizacije različito ovise i o magnetskoj indukciji, kao što se vidi iz eksponenata m_h i m_d.



Slika 9.19: Udio histereznih gubitaka P_h, gubitaka $P_{xy} + P_{xz}$ zbog uskih vrtložnih struja, gubitaka P_{yz} zbog vrtložnih struja J_{yz} te dodatnih gubitaka P_{dod}, na frekvenciji $f = 50$ Hz, u ovisnosti o prosječnoj magnetskoj indukciji u jezgri

Unošenje trećeg člana u aproksimacijsku pretpostavku, kako bi se dinamički gubitci dalje rastavili na klasične gubitke zbog vrtložnih struja i dodatne gubitke nema efekt na rezultat aproksimacije, tj. ponovno se dobiva funkcija 9.5. Takav rezultat je donekle očekivan s obzirom na to da su gubitci zbog vrtložnih struja i dodatni gubitci statistički raspregnuti efekti istog pozadinskog mehanizma koji se zbiva na mikroskali unutar feromagnetske lamele [1], [2], [3].
Dakle, iz funkcije 9.5 dobivene analizom izmjerenih gubitaka izravno slijede gubitci zbog histereze. S druge strane, gubitke zbog vrtložnih struja moguće je dobro ocijeniti putem računalne simulacije temeljene na metodi konačnih elemenata. Ako se preostale gubitke iz funkcije 9.5 svrsta pod dodatne gubitke, dobiva se estimacija udjela svih spomenutih tipova gubitaka u ukupnim gubitcima, prikazana na slici 9.19. S obzirom na to da se radi o orijentiranom feromagnetskom materijalu, dodatni gubitci P_{dod} imaju značajan udio. Međutim, na višim prosječnim indukcijama se očekuje da gubitci P_{yz} zbog vrtložnih struja J_{yz} postanu dominantni, što ukazuje na benefite izrade višedijelnih tipova jezgara.

Poglavlje 10

Zaključak

U radu je opisana metoda za izračun gubitaka zbog klasičnih vrtložnih struja u lameliranoj transformatorskoj jezgri otvorenoga tipa. Opisane su specifičnosti vezane za jezgru otvorenog tipa te njihov utjecaj na razdiobu elektromagnetskih polja u području jezgre. Zbog velikog efektivnog zračnog raspora u magnetskom krugu jezgre otvorenoga tipa, magnetski tok je neravnomjerno raspoređen po poprečnom presjeku jezgre što značajno komplicira pristup matematičkom modeliranju problema. Štoviše, velik udio magnetskog toka prodire okomito na ravnine lamela zbog čega najčešće dominantan iznos u ukupnim gubitcima u jezgri imaju vrtložne struje inducirane takvim "rasipnim" tokom. Kako bi se smanjio njihov iznos, jezgru je moguće izvesti od većeg broja vitkijih dijelova, čime se u konačnici povećava efektivni otpor lamela. Međutim, takvi zahvati unose dodatne slojeve električne izolacije koje općenito nije moguće homogenizirati u slučaju korištenja standardnih matematičkih formulacija.
S obzirom na navedene specifičnosti jezgre otvorenoga tipa, pogodno je korištenje magnetskog vektorskog potencijala $\vec{A}$ i strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}$ kao problemskih varijabli. U skladu s tim izvedena je i slaba Galerkinova $\vec{A},\vec{T}-\vec{A}$-formulacija temeljena na metodi konačnih elemenata. S obzirom na naglašenu trodimenzionalnost jezgre i tipično velik broj lamela, razvijenu formulaciju nije bilo moguće koristiti izravno, osim u slučaju minijaturnih jezgara s relativno malim brojem lamela. Prema tome, bilo je nužno provesti postupak homogenizacije slabe formulacije. Kako bi se ostvario valjan homogenizirani matematički model važno je uvesti prikladna približenja u fizikalnoj slici vrtložnih struja. S obzirom na to da je geometrija svake lamele gotovo dvodimenzionalna, tj. debljina lamele je puno manja od širine i visine lamele, opravdano je u volumenu konačnog elementa unutar lamele rastaviti vektor gustoće vrtložnih struja i vektor magnetske indukcije na po tri ortogonalna, međusobno neovisna vektorska polja. Daljnjim razmatranjem uvedenih vektorskih polja unutar ograničenog volumena jednog konačnog elementa dobiva se modificirana Galerkinova slaba formulacija koja je valjana samo lokalno, unutar promatranog konačnog elementa. Homogenizacijom modificirane formulacije se takva lokalna formulacija transformira u globalnu formulaciju, tj. dobiva se konačna Ga-

lerkinova $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulacija koja vrijedi globalno, u području cijele jezgre s nadomjesnim homogenim i anizotropnim značajkama materijala unutar pojedinačnog laminacijskog paketa. Time se u na kraju omogućuje korištenje mreže konačnih elemenata znatno manje gustoće uz simultano modeliranje sveukupnih vrtložnih struja u lameliranoj jezgri otvorenog tipa čime se dobiva točna razdioba prosječne magnetske indukcije i vrtložnih struja u jezgri.

Osim toga, korištenjem strujnog vektorskog potencijala $\vec{T}_x$ umjesto $\vec{T}$, u kombinaciji sa strukturnom mrežom konačnih elemenata, eliminira se oko $1/3$ stupnjeva slobode u području jezgre, pa konvergencija $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulacije postoje brža nego u slučaju standardno korištene $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$-formulacije. Također, primjenom homogenih Dirichleteovih graničnih uvjeta $\vec{T} \times \vec{n} = 0$ na slojeve među-paketene izolacije, u slučaju višedijelnih jezgara, moguće je izostaviti njihovo eksplicitno konstruiranje u 3D modelu. Time se omogućuje potpuna homogenizacija područja jezgre, smanjuje gustoća diskretizacije i značajno podiže kvaliteta mreže konačnih elemenata te brzina konvergencije.

Rezultati simulacije temeljene na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji pokazuju dobro slaganje s rezultatima dobivenim simulacijom temeljenom na $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$-formulaciji. Proveden je i izračun ukupnih gubitaka u realnoj lameliranoj jezgri otvorenog tipa pomoću metode koja se temelji na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$-formulaciji, a dobiveni rezultati su uspoređeni s rezultatima mjerenja ukupnih gubitaka u jezgri. Utvrđeno je vrlo dobro slaganje gubitaka dobivenih putem računalne simulacije s gubitcima dobivenim mjerenjem, čime je razvijena metoda validirana. Analizom izmjerenih gubitaka estimiran je udio preostalih tipova gubitaka u jezgri.

U nastavku istraživanja, fokus će biti na naprednom modeliranju nelinearnih feromagnetskih materijala kako bi se uz gubitke zbog vrtložnih struja omogućio direktan izračun gubitaka zbog histereze te dodatnih (anomalijskih) dinamičkih gubitaka.

Literatura

[1]Bertotti, G., Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers. Gulf Professional Publishing, 1998.

[2]Pry, R. H., Bean, C. P., "Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model", Journal of Applied Physics, Vol. 29, 1958, str. 532-533.

[3]Zirka, S., Moroz, Y., Steentjes, S., Hameyer, K., Chwastek, K., Zurek, S., Harrison, R., "Dynamic magnetization models for soft ferromagnetic materials with coarse and fine domain structures", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 394, 2015, str. 229–236.

[4]Zirka, S. E., Moroz, Y. I., Marketos, P., Moses, A. J., "Evolution of the loss components in ferromagnetic laminations with induction level and frequency", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 320, No. 20, 2008, str. e1039–e1043.

[5]Zirka, S. E., Moroz, Y. I., Marketos, P., Moses, A. J., "Loss separation in nonoriented electrical steels", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, No. 2, 2010, str. 286–289.

[6]Hollaus, K., Schöberl, J., "Some 2-d multiscale finite-element formulations for the eddy current problem in iron laminates", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 54, No. 4, 2018, str. 1–16.

[7]Schöbinger, M., Schöberl, J., Hollaus, K., "Multiscale fem for the linear 2-d/1-d problem of eddy currents in thin iron sheets", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 55, No. 1, 2018, str. 1–12.

[8]Niyonzima, I., Sabariego, R., Dular, P., Henrotte, F., Geuzaine, C., "Computational homogenization for laminated ferromagnetic cores in magnetodynamics", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 49, No. 5, 2013, str. 2049–2052.

[9]Weinan, E., Engquist, B., Li, X., Ren, W., Vanden-Eijnden, E., "The heterogeneous multiscale method: A review", in Commun. Comput. Phys. Citeseer, 2007.

[10]Žiger, I., Bojani ć, B., Krajtner, D., "Open-core power voltage transformer: concept, properties, application", in 2014 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON). IEEE, 2014, str. 246–253.

[11]Žiger, I., "Metoda prora čuna gubitaka naponskih transformatora velike snage s otvorenom jezgrom", Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, Republika Hrvatska, 2018.

[12]Hollaus, K., Biro, O., "Estimation of 3-d eddy currents in conducting laminations by an anisotropic conductivity and a 1-d analytical model", COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, 1999.

[13]Dular, P., Gyselinck, J., Geuzaine, C., Sadowski, N., Bastos, J., "A 3-d magnetic vector potential formulation taking eddy currents in lamination stacks into account", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 39, No. 3, 2003, str. 1424–1427.

[14]Bíró, O., Preis, K., Ticar, I., "A fem method for eddy current analysis in laminated media", COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, 2005.

[15]Hollaus, K., Schöberl, J., "Multi-scale fem and magnetic vector potential a for 3d eddy currents in laminated media", COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2015.

[16]Žiger, I., Trkulja, B., Stih, Z., "Determination of core losses in open-core power voltage transformers", IEEE Access, Vol. 6, 2018, str. 29 426-29 435.

[17]Stoll, R. L., The analysis of eddy currents. Clarendon Press, 1974.

[18]de Gersem, H., Vanaverbeke, S., Samaey, G., "Three-dimensional–two-dimensional coupled model for eddy currents in laminated iron cores", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 48, 2012, str. 815-818.

[19]Gyselinck, J., Dular, P., "A time-domain homogenization technique for laminated iron cores in 3-d finite-element models", IEEE transactions on magnetics, Vol. 40, No. 2, 2004, str. 856–859.

[20]Gyselinck, J., Sabariego, R., Dular, P., "A nonlinear time-domain homogenization technique for laminated iron cores in three-dimensional finite-element models", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 42, No. 4, 2006, str. 763–766.

[21]Hollaus, K., Schöberl, J., "Homogenization of the eddy current problem in 2d", 14th International IGTE Symposium, 2010.

[22]Hollaus, K., Schöberl, J., “A higher order multi-scale fem with a for 2-d eddy current problems in laminated iron”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 51, No. 3, 2015, str. 1–4.

[23]Hollaus, K., “A msfem to simulate the eddy current problem in laminated iron cores in 3d”, COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, 2019.

[24]Hanser, V., Schöbinger, M., Hollaus, K., “Efficient computation of eddy current losses in laminated cores with air gaps by the multiscale fem”, IEEE Transactions on Magnetics, 2022, str. 1–4.

[25]Hahne, P., Dietz, R., Rieth, B., Weiland, T., “Determination of anisotropic equivalent conductivity of laminated cores for numerical computation”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, 1996, str. 1184-1187.

[26]Bermúdez, A., Gómez, D., Salgado, P., “Eddy-current losses in laminated cores and the computation of an equivalent conductivity”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 44, 2008, str. 4730-4738.

[27]Sadiku, M. N. O., Numerical Techniques in Electromagnetics. CRC Press, 1992.

[28]Meunier, G., The finite element method for electromagnetic modeling. John Wiley & Sons, 2010.

[29]Bíró, O., “Edge element formulations of eddy current problems”, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 169, No. 3-4, 1999, str. 391–405.

[30]Ceric, H., “Numerical techniques in modern tcad”, Doktorski rad, Technischen Universität Wien, 2005.

[31]Schöberl, J., “Scientific computing–software concepts for solving partial differential equations”, 2004.

[32]Sonnendrücker, E., Ratnani, A., “Advanced finite element methods”, 2015.

[33]Scholz, W., “Scalable parallel micromagnetic solvers for magnetic nanostructures”, Doktorski rad, Technischen Universität Wien, 2003.

[34]Netgen-NGSolve-team. (2017) Interactive NGSolve tutorial: H(curl) and H(div) function spaces, dostupno na: https://docu.ngsolve.org/nightly/i-tutorials/unit-2.3-hcurlhdiv/hcurlhdiv.html

[35]Whiteley, J., “Finite element methods”, A Practical Guide, Vol. 1, 2014.

[36]Zienkiewicz, O., RL Taylor The Finite Element Method: Its Basis And Fundamentals. MacGraw-Hill London, 1991.

[37]Råback, P., Malinen, M., Ruokolainen, J., Pursula, A., Zwinger, T., Elmer models manual, 2013.

[38]Haznadar, Z., Štih, Ž., Electromagnetic fields, waves and numerical methods. John Wiley & Sons, 2000, Vol. 20.

[39]Brenner, S. C., Scott, L. R., Scott, L. R., The mathematical theory of finite element methods. Springer, 2008, Vol. 3.

[40]Mayergoyz, I. D., Bossavit, A., Computational electromagnetism: variational formulations, complementarity, edge elements. Academic Press, 2017.

[41]Ern, A., Guermond, J.-L., "Analysis of the edge finite element approximation of the maxwell equations with low regularity solutions", Computers & Mathematics with Applications, Vol. 75, No. 3, 2018, str. 918–932.

[42]Ren, Z., "Influence of the rhs on the convergence behaviour of the curl-curl equation", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3, 1996, str. 655-658.

[43]Ruokolainen, J., Malinen, M., Råback, P., Zwinger, T., Pursula, A., Byckling, M., Elmersolver manual, 2016.

[44]Rognes, M. E., Kirby, R. C., Logg, A., "Efficient assembly of h(div) and h(curl) conforming finite elements", SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31, No. 6, 2010, str. 4130-4151.

[45]Kuczmann, M., "Potential formulations in magnetics applying the finite element method", 2009.

[46]Frlji ć, S., Trkulja, B., Žiger, I., "Calculation of the eddy current losses in a laminated open-type transformer core based on the a t-a formulation", Applied Sciences, Vol. 11, No. 23, 2021, str. 11543.

[47]Van Riesen, D., Kaehler, C., Henneberger, G., "Convergence behaviour of different formulations for time-harmonic and transient eddy-current computations in 3d", IEE Proceedings-Science, Measurement and Technology, Vol. 151, No. 6, 2004, str. 434–439.

[48]Albertz, D., Henneberger, G., "Calculation of 3D eddy current fields using both electric and magnetic vector potential in conducting regions", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 5 PART 1, 1998, str. 2644–2647.

[49]Albertz, D., Henneberger, G., “On the use of the new edge based a/spl i. oarr/-a/spl i. oarr/, t/spl i. oarr/formulation for the calculation of time-harmonic, stationary and transient eddy current field problems”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 4, 2000, str. 818–822.

[50]Frlji ć, S., Trkulja, B., “Two-step method for calculation of eddy current losses in a laminated transformer core”, IET Electric Power Applications, Vol. 14, No. 9, 2020, str. 1577–1583.

[51]Gyselinck, J., Vandevelde, L., Melkebeek, J., Dular, P., Henrotte, F., Legros, W., “Calculation of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 3, 1999, str. 1191–1194.

[52]Frlji ć, S., Trkulja, B., Štih, Ž., “Calculation of eddy current losses in iron core of transformer”, in 5th International Colloquium on Transformer Research and Asset Management. Springer, 2020, str. 263–273.

[53]Kaimori, H., Kameari, A., Fujiwara, K., “Fem computation of magnetic field and iron loss in laminated iron core using homogenization method”, 2006 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, 2006, str. 215-215.

[54]Liu, Y., Bondeson, A., Bergstrom, R., Larson, M., Samuelsson, K., “Edge element computations of eddy currents in laminated materials”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 39, No. 3, 2003, str. 1758-1765.

[55]Frlji ć, S., Trkulja, B., “Two-step method for the calculation of eddy current losses in an open-core transformer”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 57, No. 3, 2020, str. 1–8.

[56]Bego, V., Mjerenja u elektrotehnici. Graphis, 2003, Vol. 1.

Popis slika

2.1. Problemska domena s područjima domene te graničnim i rubnim plohama . . .6
2.2. Simbolički prikaz lameliranih jezgara otvorenog tipa 10

4.1. Primjer dijela mreže konačnih elemenata. 25
4.2. Primjer čvorne bazne funkcije 26
4.3. Referentni konačni elementi u njihovom lokalnom koordinatnom sustavu . . .29
4.4. Primjer bridne bazne funkcije. 31

6.1. Simbolična usporedba gustoće konačnih elemenata u dijelu lamele 51

7.1. Primjer konačnog elementa u lameli debljine d 62

9.1. Prikaz četverodijelne jezgre otvorenog tipa 95
9.2. Mreže konačnih elemenata za četverodijelnu jezgru 97
9.3. Vektori magnetske indukcije u području zraka oko jezgre. 98
9.4. Prikaz apsolutne vrijednosti magnetske indukcije 100
9.5. Vizualizacija apsolutne vrijednosti magnetske indukcije na odsječku jezgre . .100
9.6. Vizualizacija apsolutne vrijednosti vrtložnih struja u jezgri 101
9.7. Vizualizacija apsolutne vrijednosti vrtložnih struja u odsječku jezgre 101
9.8. Prikaz 3D modela jednodijelne jezgre otvorenog tipa te 3D modela kostura namota103
9.9. Krivulja ovisnosti specifičnih gubitaka P_{spec} o amplitudi magntske indukcije . .104
9.10. Vizualizacija magnetske indukcije i vrtložnih struja za realnu jednodijelnu jezgru105
9.11. Usporedba izmjerenih i izračunatih gubitaka pri frekvenciji $f = 50$ Hz. 105
9.12. Fizički mjerni postav 107
9.13. Nadomjesna shema energetskog i mjernog kruga 107
9.14. Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 10$ Hz, 15 Hz, 20 Hz i 30 Hz. 108
9.15. Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 40$ Hz, 50 Hz, 65 Hz, 80 Hz i 100 Hz. . .108
9.16. Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 150$ Hz, 200 Hz, 250 Hz i 300 Hz. . . .109
9.17. Indukcijske krivulje za frekvencije $f = 350$ Hz, 400 Hz, 450 Hz i 500 Hz. . . .109
9.18. Grafički prikaz funkcije $P(f,B)$ kojom su aproksimirani izmjereni podatci . . .110
9.19. Udio različitih tipova gubitaka u ukupnim gubitcima 111

Popis tablica

9.1. Usporedba rezultata simulacija temeljenih na $\vec{A}, \vec{T}_x - \vec{A}$ i $\vec{A}, \varphi - \vec{A}$ formulacijama99
9.2. Vanjske dimenzije jezgre, kostura namota i uzbudnog namota. 103

Životopis

Stjepan Frljić je rođen 1992. godine u Travniku, BiH, gdje je 2011. godine završio Opću gimnaziju. Nakon završetka gimnazije upisao je Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu na kojem je 2014. godine završio preddiplomski studij na smjeru „Elektroenergetika“, a 2016. diplomski studij na smjeru „Elektrotehnički sustavi i tehnologije“.
Zaposlen je 2016. godine kao projektant u tvrtki Končar-MES. Od 2017. godine je zaposlen kao asistent na Fakultetu elektrotehnike i računarstva, Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja. Sudjeluje u izvođenju nastave na kolegijima „Osnove elektrotehnike“ i „Elektromagnetska polja“. Od 2020. godine je suradnik na projektu „Gubici uslijed vrtložnih struja u otvorenoj jezgri transformatora“ Hrvatske zaklade za znanost. Uspješno je završio „Edukaciju iz temeljnih nastavničkih kompetencija za mlade nastavnike – OSMISLI“ na Filozofskom fakultetu u Zagrebu. U okviru znanstvene djelatnosti primarno se bavi modeliranjem elektromagnetskih polja primjenom numeričkih metoda.

Popis objavljenih djela

Radovi u časopisima iz teme doktorata

1.Frlji ć, S., Trkulja, B., Žiger, I., “Calculation of the eddy current losses in a laminated open-type transformer core based on the A,T-A formulation”, Applied Sciences, Vol. 11, No. 23, 2021, str. 11543.

2.Frlji ć, S., Trkulja, B., “Two-step method for the calculation of eddy current losses in an open-core transformer”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 57, No. 3, 2020, str. 1–8.

3.Frlji ć, S., Trkulja, B., “Two-step method for calculation of eddy current losses in a laminated transformer core”, IET Electric Power Applications, Vol. 14, No. 9, 2020, str.1577–1583.

Radovi na konferencijama

1.Frlji ć, S., Trkulja, B., Štih, Ž., “Calculation of eddy current losses in iron core of transformer”, in 5th International Colloquium on Transformer Research and Asset Management.

Springer, 2020, str. 263–273.

2.Frlji ć, S., Trkulja, B., Drandić, A., “Eddy current losses in open-type cores”, in 20th International IGTE Symposium 2022 on Computational Methods in Electromagnetics and Multiphysics, Graz, 2022.

3.Frlji ć, S., Trkulja, B., “2D Method for Calculation of Eddy Current Losses in Laminated Core of Transformer”, in Proceedings of 11 International Symposium on Electric and Magnetic Fields, Darmstadt, 2018.

Biography

Stjepan Frljić was born in Travnik, BiH, in 1992, where he also graduated from high school. He received his B.Sc, and M.Sc degrees from the University of Zagreb, Zagreb, Croatia, in 2014, and 2016 respectively.

He was employed in 2016 as a designer of electrical machines in Končar-MES. d.o.o. Since 2017, he is employed as a research assistant at the Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb, at the Department of Electrical Engineering Fundamentals and Measurements. He participates as an assistant in courses: “Fundamentals of Electrical Engineering” and “Electromagnetic Fields”. Since 2020, he is a collaborator on the project „Eddy current losses in open core of transformer“ funded by the Croatian Science Foundation. He completed "Education in basic teaching competencies for young teachers - OSMISLI" at the Faculty of Humanities and Social Sciences, University of Zagreb. His main research interests include modeling electromagnetic fields using numerical methods.