Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela

Skoblar, Ante

Doctoral thesis / Disertacija

2012

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Rijeka, Faculty of Engineering / Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:188:619070

Rights / Prava: Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Image not found or type unknown

Repository / Repozitorij:

Repository of the University of Rijeka Library - SVKRI Repository

DIGITALNA KNJIŽNICA

Image not found or type unknown

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

ANALIZA AKUSTIČKOG ODZIVA PRAVOKUTNOG PANELA

Doktorska disertacija

Ante Skoblar

Mentor: Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić

Rijeka, 2012.

Sveučilište u Rijeci
TEHNIČKI FAKULTET
-Fakultetsko vijeće-
Klasa: 602-04/08-02/14
Ur. br.: 2170-57-43-08-4
Rijeka, 28. travnja 2008.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 14. (14.) sjednici u akad. god. 2007./08./09./10., održanoj 25. travnja 2008. donijelo je sljedeću

ODLUKU

Sukladno izvješću Stručnog povjerenstva, u sastavu: izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić dipl. ing., doc. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing., izv. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing. (FSB-Zagreb), utvrđuje se da pristupnik ***mr. sc. Ante Skoblar, dipl. ing. strojarstva*** ispunjava Zakonom propisane uvjete za prijavu i izradu teme doktorske disertacije naslovljene: ***"Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela".***

Mentorom se imenuje izv. prof. dr. sc. Roberta Žigulića, dipl. ing.

Dekan:

Red. prof. dr. sc. Tonči Mikac, dipl. ing.

REPUBLIKA HRVATSKA SVEUČILIŠTE U RIJECI TEHNIČKI FAKULTET RIJEKA

Dostaviti:
1. Mr. sc. Ante Skoblar, dipl. ing.
2. Mentor, izv. prof. dr. sc. Roberto Žigulić dipl. ing.
3. Služba studentske evidencije
4. Pismohrana FV

Sažetak

Stijenke prostorija raznih namjena u kojima ljudi svakodnevno borave često se izvode kao paneli s periodičkim ukrepama jer je cilj dobiti dovoljnu nosivost stijenki uz minimalan rast njezine mase. Takvi paneli imaju specifičan akustički odziv koji se modelira manje zahtjevnim metodama zbog ponavljanja rubnih uvjeta što omogućuje smanjivanje vremena izračuna uz odgovarajuću točnost. U slučaju kad na panel djeluje ravninsko akustičko polje i kad je visina perioda panela najmanje tri puta veća od njegove širine, beskonačni panel periodički oslonjen u jednom smjeru može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa se ona koristi za osnovni model. Akustički odziv izračunat je metodom virtualnog rada uz definiranje pomaka redom prostornih harmonijskih valova. S obzirom da se radi o beskonačnom modelu i da je cilj dobiti rezultate za konačni panel površina udarnog vala i radijacija zvuka ograničena je na konačne dimenzije panela koristeći metodu prostornog isječka.

U disertaciji je opisana teorija izračuna i dobiveni su numerički rezultati utjecaja prigušenja u periodičkim ukrepama na akustički odziv panela. Točnost izračunatog akustičkog odziva panela ali i slobodnih vibracija panela ovisi o brojnosti prostornih harmonijskih valova. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova za traženu točnost pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna kao što je i navedeno u literaturi, međutim ukoliko sustav nije dovoljno prigušen maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavit će se na nižoj frekvenciji. O prigušenju u sustavu ovisit će i granični broj prostornih harmonijskih valova do kojeg se amplitude prostornih harmonijskih valova kod slobodnih vibracija panela brže izračunavaju pomoću metode virtualnog rada nego s razvojem u red. Prostorni harmonijski valovi se u literaturi prikazuju dijagramima u kojima su njihove amplitude i fazne brzine definirane za jednu frekvenciju dok je u ovoj disertaciji predložen dijagram u kojem su amplitude i fazne brzine valova definirane za zadani frekventni pojas što se postiglo definiranjem amplitude vala bojom. S navedenim pristupom moguće je pratiti promjene u vibracijskom odzivu panela pri promjeni raznih utjecajnih parametara iz čega slijede jasni zaključci o prirodi akustičkog odziva panela. Nadalje, izvođenjem funkcije oblika slobodnih vibracija grede periodički oslonjene na jednostavne oslonce dobivena su rješenja čija je točnost verificirana primjenom metode virtualnog rada.

U skladu s rezultatima numeričkih simulacija i u okviru postojećih mogućnosti korištenih računala definirani su rubni uvjeti eksperimentalnog modela prema kojima su eksperimenti i izvršeni. Rezultati eksperimentalnog modela dobro se slažu s rezultatima numeričke simulacije.

Summary

Room walls in which people reside are often built as panels with periodical stiffeners because the aim is to have walls with sufficient rigidity and minimum mass. That kind of panels have specific acoustic response which can be modelled with simplified methods because of periodic repetition of boundary conditions which causes minimising of calculation time with optimal accuracy. In the case when the panel is excited with plane acoustic waves and when the height of the panel period is minimally three times larger than its width, infinite panel periodically supported in one direction can be modelled as infinite periodically supported beam which is the case in this dissertation. Acoustical response is calculated with the method od virtual work with displacement defined with series of space-harmonic waves. Concerning that the model is infinite and that a goal is to calculate finite panel the acoustic and structural coupling effects are limited to the area of finite panel using spatial windowing method.

In this dissertation a theoretical description and numerical results of influence of damping in periodical stiffeners on the panel acoustic response is given. The influence of the number of space-harmonic waves on the calculation accuracy of the panel acoustic response and panel free vibrations is analysed. When there is sufficient damping in the system the maximum number of space-harmonic waves for gaining an appropriate accuracy appear on the maximum frequency as it is published in the literature but if the damping is low, the maximum number of space-harmonic waves appear on lower frequency. Damping in the sistem also influences the number of space-harmonic waves bellow which there amplitudes of free vibrations are faster calculated with the method of virtual work than with the series expansion. Space-harmonic waves in the literature are presented in diagrams with amplitudes and phase velocities for one frequency. In this dissertation a diagram with amplitude and phase velocities for an frequency spectrum is used where wave amplitudes are defined with color. With this approach the changes in the frequency domain can be easily seen. Also, free vibrations of infinite periodically supported beam on simple supports are calculated where a new shape function is derived and its accuracy is confirmed with the method of virtual work.

In accordance with numerical simulation within the current computer possibilities experimental boundary conditions are chosen and the experiments where done. The results of eksperimental model are in a good agreement with the results of numerical simulation.

Predgovor

Doktorska disertacija pod nazivom *Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela* izrađena je u okviru znanstvenog projekta *Redukcija vibracija i buke strojeva mehatroničkim pristupom* (br. 069-0691736-1733) financiranog od strane Ministarstva znanosti Republike Hrvatske na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Zahvaljujem svojem mentoru red. prof. dr. sc. Robertu Žiguliću na stručnoj i znanstvenoj pomoći, sugestijama i usmjeravanju ovog istraživanja. Kolegama izv. prof. dr. sc. Sanjinu Brautu, izv. prof. dr. sc. Domagoju Lancu i izv. prof. dr. sc. Miroslavu Vrankiću te kolegici dr. sc. Goranki Štimac zahvaljujem se na pristupačnosti i korisnim savjetima vezanim uz nastanak ovog rada. Red. prof. dr. sc. Josipu Brniću posebno hvala na velikoj potpori.

Za pomoć u eksperimentalnom dijelu ove disertacije zahvaljujem Bernardu Badurini, Ivu Vičiću, Damiru Kustiću i Danijelu Roksandiću. Ujedno se zahvaljujem i poduzeću KnaufInsulation d.o.o. iz Novog Marofa koje je doniralo kamenu vunu Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Posebnu zahvalnost dugujem supruzi Gabrijeli i kćerkama Luciji i Veroniki, kao i roditeljima Stjepanu i Margariti na razumjevanju i podršci tijekom izrade ovog rada.

Autor

Sadržaj

1. Uvod 1
1.1. Značaj i primjena akustičkih panela za redukciju buke 1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja 3
1.3. Ciljevi i struktura disertacije 8
2. Teorijske osnove matematičkog modela 11
2.1. Diferencijalna jednadžba gibanja grede po Euler-Bernoulli-evoj teoriji 12
2.2. Slobodne vibracije beskonačne periodički oslonjene grede 14
2.2.1. Direktno rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja 14
2.2.1.1. Jednostavni oslonci 15
2.2.1.1.1. Karakteristike propagacijskih konstanti 15
2.2.1.1.2. Funkcija oblika vibriranja 23
2.2.1.1.3. Izračun propagacijskih konstanti 27
2.2.1.2. Elastični oslonci 29
2.2.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova 31
2.2.2.1. Opis metode propagacije valova 31
2.2.2.2. Opis metode virtualnog rada 32
2.2.2.3. Izračun propagacijskih konstanti 33
2.2.2.4. Određivanje amplituda prostornih harmonijskih valova 37
2.2.2.4.1. Rješavanje matrične jednadžbe slobodnih vibracija 38
2.2.2.4.2. Razvoj funkcije oblika u red 38
2.2.2.5. Smjer, amplituda i fazna brzina prostornih harmonijskih valova 39
2.2.2.5.1. Vektorski opis gibanja valova u gredi na jednostavnim osloncima 39
2.2.2.5.2. Ukupni val kao grupa prostornih harmonijskih 41
2.2.2.5.3. Dijagram prikaza grupe prostornih harmonijskih valova 45
2.2.2.5.4. Analiza prostornog harmonijskog vala s najvećom amplitudom 48
2.2.2.5.5. Efekt koincidencije 49
2.3. Akustički odziv beskonačnog nedeformabilnog panela na normalne ravninske valove 51
2.4. Akustički odziv beskonačne periodički oslonjene grede 55
2.4.1. Definiranje propagacijskih konstanti 55
2.4.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova 57
2.4.2.1. Rješavanje matrične jednadžbe prisilnih vibracija 62
2.4.2.2. Konvergencija rezultata 63
2.4.2.3. Koeficijent transmisije zvučne snage 64
2.5. Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela 65

2.5.1. Metoda prostornog isječka ... 65
2.5.2. Efikasnost radijacije ... 66
3. Numerička analiza ... 69
3.1. Opis programskog rješavača ... 69
3.1.1. Izračun akustičkog odziva (prisilnog gibanja) ... 70
3.1.2. Izračun slobodnog gibanja ... 71
3.2. Postprocesor - interpretacija rezultata izračuna ... 72
3.3. Numerički rezultati ... 74
3.3.1. Verifikacija konvergencije rezultata ... 74
3.3.2. Analiza utjecajnih parametara na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela 75
3.3.3. Brzina izračuna metode virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova za izračun slobodnih vibracija ... 83
3.3.4. Izračun vlastitih frekvencija slobodnih vibracija periodički oslonjene grede ... 85
3.3.5. Usporedba oblika vibriranja slobodnih vibracija ... 87
3.3.6. Dijagram za analizu slobodnih i prisilnih vibracija ... 88
3.3.7. Usporedba izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka konačnog panela s metodom virtualnog rada i metodom konačnih elemenata ... 90
4. Eksperimentalna analiza ... 93
4.1. Opis eksperimentalnog modela ... 93
4.1.1. Ječna komora ... 95
4.1.2. Gluha komora ... 95
4.1.3. Zid između ječne i gluhe komore ... 96
4.1.4. Okvir panela ... 97
4.2. Mjerna oprema ... 98
4.3. Rezultati mjerenja referentnih fizikalnih veličina ... 99
4.3.1. Panel ... 99
4.3.2. Brtva ... 103
4.3.3. Određivanje faktora korekcije ... 107
4.3.4. Analiza rezultata zvučnog transmisijskog gubitka ... 108
Zaključak ... 111
Popis literature ... 115
Popis oznaka i simbola ... 121
Popis slika ... 127
Popis tablica ... 131
Životopis ... 133

Poglavlje 1.

Uvod

Čovjek je često izložen utjecaju neželjenih izvora zvuka, tj. buci, što je danas jedan od najčešćih problema kako u industrijskom okolišu tako i u svakodnevnom životnom okruženju. Buka štetno djeluje na zdravlje čovjeka kako fizički, akustičkim tlakom koji može dovesti do oštećenja sluha, tako i psihički, jer ometa misli i komunikaciju, i time umara i smanjuje radnu efikasnost. Zato je kontrola buke i potreba i izazov.

1.1. Značaj i primjena akustičkih panela za redukciju buke

Širenje buke često se kontrolira ugradnjom panelne konstrukcije između izvora zvuka i slušača. Panelna konstrukcija izvodi se u obliku oklopa oko izvora zvuka (npr. stroja), oklopa oko slušača ili pregrade između navedenih. Akustički odziv panelne konstrukcije ključni je element u izračunu smanjenja buke za sva tri navedena rješenja.

Temelj akustičkog odziva je interakcija zrak-panel koja započinje u trenutku udara vala nošenog zrakom o panelnu konstrukciju i rezultira vibriranjem panela. Za vrijeme širenja novonastalih valova kroz panel kinetička energija panela pretvara se u potencijalnu energiju panela i obrnuto. Kinetička energija slijedi iz gibanja panela, a potencijalna energija iz normalnih i tangencijalnih naprezanja unutar strukture panela koja definiraju različite vrste valova koji postoje u tankostjenoj konstrukciji: uzdužni (longitudinalni), poprečni (transverzalni) i fleksijski valovi.

Fleksijski valovi imaju najveću ulogu pri transmisiji zvuka, te kasnije pri akustičkoj radijaciji, zbog svojih najvećih poprečnih amplituda gdje je vektor brzine površine panela usmjeren u smjeru širenja vala u zraku a što rezultira efektivnom izmjenom energije između panela i zraka. S druge strane u zraku postoje samo longitudinalni valovi koji slijede iz normalnih naprezanja pri promjeni akustičkog tlaka.

Pri interakciji zrak-panel dio energije zvuka se reflektira od panela, dio ostaje u strukturi panela a dio prolazi kroz panel. Ujedno dolazi do vibriranja panela pa nastaje i energija akustičke radijacije s obje strane panela.

Ukoliko se želi minimizirati akustička radijacija s druge strane panela potrebno je minimizirati transmisiju kroz strukturu panela. Postoje dva glavna principa smanjivanja transmisije zvučne energije. Prema prvom principu, zvučna se energija apsorbira pri prolasku kroz strukturu panela na način da se pretvori u toplinu, a prema drugom principu zvuk ne prolazi kroz panel već se odbija (reflektira) od panela.

U praksi se susreću tri vrste apsorbera zvučne energije koji rade po prvom principu: porozni, membranski i rezonatorski apsorber. U poroznom se apsorberu zvučna energija apsorbira na način da pri interakciji zraka i apsorbera, zrak u porama počne titrati pa se trenjem čestica zraka o stijenke pora zvučna energija pretvara u toplinsku energiju te prelazi sa zraka na stijenku materijala. Važno je napomenuti da se zrak zagrijava pri porastu njegove gustoće i obratno. U membranskom apsorberu zvučna se energija apsorbira u materijal membrane pri njezinom titranju jer materijal membrane ima veliko unutarnje prigušenje. U rezonatorskom apsorberu (npr. Helmholtz-ov apsorber) zvučna se energija pretvara u toplinsku pri trenju titrajućih čestica zraka o stijenke pora u apsorpcijskom materijalu koji se nalazi unutar apsorbera. Frekvencija povećane tzv. rezonantne apsorpcije definira se sustavom masa opruga gdje je masa zrak u perforaciji vanjske stijenke apsorbera a opruga zrak unutar apsorbera.

Prema drugom principu smanjivanja transmisije zvučne energije zvuk se reflektira zbog velike promjene u akustičkoj impedanci na transmisijskoj putanji.

Ukoliko zrakom prenešeni zvuk na panel ima valnu duljinu jednaku valnoj duljini slobodnih vibracija panela, dolazi do rezonancije i panel vibrira s višestruko većom amplitudom što dovodi do većeg prijenosa zvuka na drugu stranu panela. Najveća transmisija događa se na najnižoj vlastitoj frekvenciji panela, što se pokušava izbjeći optimizacijom inercije, krutosti i prigušenja u panelu. Kritična koincidentna frekvencija je najniža vlastita frekvencija slobodnog vala panela čija se valna duljina podudara s valnom duljinom vala prenešenog na okolni zrak. Na navedenoj frekvenciji dodatno je povećana akustička radijacija s druge strane panela.

Dizajn i konstruiranje efektivnih panelnih konstrukcija za prigušenje buke važan je element praktične kontrole buke za inženjere i arhitekte, te je znanje fizikalnih principa i iskustvo u dizajniranju od opće važnosti jer rezultira zdravijim okolišem, ugodnijim življenjem i boljim radnim uvjetima što čini temu ove disertacije aktualnom i primjenjivom.

1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

Mnoge inženjerske konstrukcije, kao npr. stijenke aviona, sastoje se od panela periodički ukrepljenih s raznim ukrepama. S druge strane ukrepa često se ugrađuje još jedan panel pa se dobije tzv. sendvič panel. Zbog njihove praktične važnosti, takve konstrukcije analizirane su u velikom broju znanstvenih i stručnih radova.

Najčešći pristupi analiziranju dinamičkog odziva periodički ukrepljenih panela su metode:
- vlastitih oblika vibriranja (eng. *normal modes*) [1], [2], [3] i [4],
- ortotropnog modela [5] i [6],
- propagacije valova (eng. *space-harmonics method*) [7], [8] i [9],
- prijenosnih matrica (eng. *transfer matrix method*) [10] i [11],
- konačnih spektralnih elemenata (eng. *spectral finite elements*) [12],
- statističke analize energije [13], [14] i [15],
- Rayleigh-Ritz-a [16] i [17],
- konačnih elemenata [18], [19], [20], [21] i
- rubnih elemenata [22].

U najranijim radovima vezanim uz analizu odziva ukrepljenog panela pobuđenog sa slučajnim poljem akustičkog tlaka korištena je metoda vlastitih oblika vibriranja. Odziv svakog vlastitog oblika vibriranja dobivao se odvojeno nakon čega se ukupni odziv odredio pomoću statističkog zbrajanja. Najsloženiji problemi koji su izračunati s ovom metodom imali su jednostavne rubne uvjete. Npr. Lin [1] u svojem radu zadaje ploču čija su dva nasuprotna

kraja jednostavno oslonjena i čije je tijelo oslonjeno na ukrepe oblika slova *U* (eng. *stringer*) paralelne s jednostavnim osloncima u cilju sprječavanja zakreta i poprečnog pomaka ploče. U radovima Lin [1-3] i Mercer [4] korišteno je nisko prigušenje i/ili niska gustoća vlastitih oblika vibriranja da bi se minimizirale poteškoće uzrokovane podudaranjem frekvencija vlastitih oblika vibriranja. Uključivanje prigušenja pri zvučnoj radijaciji kod navedene metode uzrokuje dugotrajne izračune.

Za razliku od vibro-akustičkog odziva jednostavnih kontinuiranih struktura kao što su grede i ploče koje su opisane u radovima autora Leissa [5] i Soedel [6], detaljna analiza gibanja valova kod periodički oslonjenih panelnih konstrukcija (npr. ukrepljenih panela) je često teško ostvariva zbog kompleksnosti panelne konstrukcije i nesigurnosti kod određivanja rubnih uvjeta. Vibracije periodički oslonjenih panelnih konstrukcija često se analiziraju koristeći ekvivalentni ortotropni panel koji se opisuje u radovima autora Leissa [5] i Sundara [76]. Heckl [7] je dokazao da se periodično ukrepljeni panel može tretirati kao ortotropni panel kad je udaljenost između susjednih ukrepa manja od četvrtine najkraće valne duljine valova u panelu iz čega je vidljivo da se isti može koristiti na nižim frekvencijama.

Heckl [24] je dokazao i da fleksijski valovi mogu propagirati bez smanjenja amplitude samo u određenim frekvencijskim pojasevima koja je nazvao propagacijskim frekvencijskim pojasevima što je temeljna karakteristika periodički oslonjenih panela.

Metoda propagacije valova za jako prigušen panel korištena je u radovima Mead i Wilby [25], Mead i Pujara [26] i Mead [33-34]. U navedenim radovima određen je relativno jednostavan izraz za pomak, zakret i naprezanje u bilo kojoj točki 1D strukture (grede). Velika prednost ove metode ja da ona uključuje efekte zvučne radijacije. U navedenoj metodi poprečni su pomaci definirani u obliku reda sinusnih putujućih valova tzv. prostornih harmonijskih valova (eng. *space-harmonics*), a panel se modelira kao greda oslonjena na elasične oslonce na jednakim udaljenostima koji mogu primiti poprečne pomake i zakrete. Odziv grede na homogeno slučajno polje akustičkog tlaka je rješen ali u radu nije unešena interakcija između zraka (akustičkog sustava) i panela (strukturnog sustava). Odzivi 2D strukture (ploča) s poprečnim i uzdužnim osloncima istraživali su Lin [2-3], Mercer [4], Ford [27] i Mercer i Seavey [28].

Maidanik [29] je procijenio odziv ukrepljenog panela pobuđenog s difuznim poljem. U njegovom radu je dokazano da ukrepe uzrokuju rast akustičke radijacijske otpornosti (eng. *radiation resistance*) panela i time povećavaju izmjenu energije između panela i zvučnog polja okolnog zraka. Na ovaj rad se nadovezuje Fahy [30] naglašavajući da refleksije od ukrepa mijenjaju disperziju na način da slobodni valovi koji imaju komponente vektora valnog broja nadzvučne fazne brzine mogu propagirati na frekvencijama nižim od kritične frekvencije panela. Ove komponente povećavaju efikasnost podkritične radijacije i mogu

uzrokovati da se panel pobudi na frekvencijama nižim od koincidentne, što smanjuje zvučni transmisijski gubitak panela.

Mathur [31] je predložio teorijski model baziran na metodi propagacije valova za izračun zvučnih transmisijskih gubitaka za periodički oslonjen panel i ukrućene dvostruke panelne strukture ali nije objavio numeričke rezultate. Interakcija između vibrirajućeg panela i akustičkih tlakova oko panela analizirana je u radu autora Lee i Kim [32] metodom propagacije valova za periodično oslonjenu beskonačnu gredu te je potvrđena konvergencija rješenja. U radu su ukrepe modelirane kao točkaste mase na poprečnim i fleksijskim oprugama iz čega slijedi da se geometrija ukrepa nije uzela u obzir. Nadalje, u radu su procijenjeni zvučni transmisijski gubici koristeći metodu propagacije valova ali dobiveni numerički rezultati nisu eksperimentalno potvrđeni. Desmet [36] je opisao metodu određivanja transmisije zvuka kroz konačne dvostruke panelne pregrade na niskim frekvencijama upotrebljavajući eksperimentalni i teorijski pristup baziran na Dowell-ovoj teoriji interakcije vlastitih oblika vibriranja. Bedair [37] i Mukherjee i Parthan [38] analizirali su dinamičko ponašanje panela ukrućenih sa sustavom međusobno povezanih greda ili ukrepa na prvoj vlastitoj frekvenciji. Maurys i Matte [39] dodali su ukrepe na ploču kao silu, ali nisu uzeli u obzir momente. Lin i Pan [40] i Lin [41] modelirali su ukrepe jednostavno oslonjenog panela kao sile i momente te su analizirali karakteristike prisilnih vibracija jednosmjerno ukrućenih ravnih panela u niskom frekvencijskom pojasu. Liu i drugi [42] koristili su metodu prijenosnih funkcija i metodu ekspanzije vlastitih oblika vibriranja za procjenu izolacije od zvuka koji se širi zrakom za korugirane panele s ukrepama oblika slova *U* (eng. *stringer*) i okvirom. Analiziran je i odziv ukrepljenog panela na akustičko difuzno polje.

Manji broj autora (npr. Cooper [43], Legault i Mejdi [44]) proučavali su odziv panela s nekontinuiranim krutostima oslonaca periodički oslonjenog panela.

Za izračun akustičkog odziva ukrepljenih panela u kontekstu metode statističke analize energije (SEA), Bremner [13] je opisao gibanje ravnih dvosmjerno ukrepljenih panela pomoću valnih brojeva. U njegovom radu zadane su dimenzije panela $a_D \times b_D$ i udaljenost između ukrepa L_x i L_y. U slučaju kad je polovica valne duljine vlastitog oblika vibriranja u x i y smjeru manja od a_D i b_D dimenzije panela, panel se iz globalnog ponašanja (a_D, b_D) započne ponašati lokalno (a_D, L_y) i (b_D, L_x) a kad ona postane manja od udaljenosti između ukrepa L_x i L_y, ponašanje je slično ponašanju jednog perioda panela ograničenog s ukrepama. Navedena četiri načina ponašanja panela predstavljaju četiri modela potrebna za definiranje vlastitih oblika vibriranja ukrepljenog panela u širokom frekvencijskom pojasu. Za ukrepljene panele karakteristično je nakupljanje vlastitih oblika vibriranja koje se opisuje faktorom brojnosti μ_p (eng. *multiplicity factor*). Faktor brojnosti je broj vlastitih oblika vibriranja koji nastaje na zadanoj frekvenciji. Cotoni [14] i drugi razvili su hibridnu metodu formulacije podsustava

(SAE) koja se bazira na konačnim elementima, sintezi vlastitih oblika vibriranja pojedine komponente i teorije periodičnosti s ciljem procjene gustoće vlastitih oblika vibriranja i interakcijskog faktora gubitka ukrepljenih panela. Sličan analitički model napravio je i Mejdi [15].

Wei i drugi [16-17] analizirali su primjenu Rayleigh-Ritz i proširenih Rayleigh-Ritz energetskih metoda na konačne periodične konstrukcije sa sinusnim funkcijama pomaka te su analizirali i korelaciju između Rayleigh-Ritz metode za analiziranje konačnih periodičnih struktura i teoriju beskonačnih periodičnih struktura.

U slučaju beskonačnog periodički oslonjenog panela, kako je već rečeno, pokazano je da se polje pomaka panela sastoji od reda prostornih harmonijskih valova u radovima autora Mead [33, 48], Mead i Pujara [26] i Mace [45-47]. U navedenim radovima redovi se ograničavaju na konačan broj valova (tzv. grupu valova) koji je dovoljan da se osigura konvergencija i da se izračuna vibro-akustički odziv panela. Opisani broj ovisi o prirodi konstrukcije panela i u općem slučaju je relativno malen na referentnim frekvencijama (manji od 50 na frekvencijama nižim od 10kHz po autorima Lee i Kim [32], Wang [49] i Xin [50-53]). Slijedi da je veličina sustava jednadžbi vezana uz ovaj model relativno mala. Navedeno vrijedi i za tanke panele (npr. za aluminijske avionske stijenke od cca. 1 mm). Za usporedbu, kod metode konačnih ili rubnih elemenata potrebna je intenzivna kompjuterska analiza za veći broj stupnjeva slobode kod srednjih i visokih frekvencija.

Međutim, iako niski zahtjevi za kompjutersku analizu čine metodu propagacije valova primamljivom ona ima ograničenja u primjeni.

Prvo, stvarne konstrukcije nisu nikad idealno periodične pa i kod visoko preciznih primjena (npr. proizvodnja aviona) za vrijeme proizvodnje uvjek nastaju manja odstupanja od zadanih mjera. Sa ciljem smanjenja negativnog utjecaja takvih odstupanja na razumljivost prikaza akustičkih rezultata koriste se usrednjene skalarne veličine kao npr. efektivna vrijednost poprečne brzine panela (eng. *root mean square*) i radijacijska zvučna snaga usrednjena po površini polusfere oko izvora koje se usrednjavaju po frekvencijskom pojasu (npr. tercnom) kako bi se smanjili ekstremi u odzivu uzrokovani s karakterističnim frekvencijskim propusnim i nepropusnim pojasevima periodično oslonjenog panela. U radu Legault [54] odziv, usrednjen po frekvencijama, se dobro podudara s eksperimentalnim rezultatima, ali ne postoji formalni dokaz da opisani odziv odgovara i statističkom srednjem odzivu konstrukcije panela koja malo odstupa od savršene periodičnosti (eng. *ergodic hypothesis*). Male perturbacije (eng. *perturbations*) isto utječu na odziv periodične strukture zbog efekata lokalizacije po Hodges-u [55]. Stoga korištenje ovog pristupa nalaže iznimnu opreznost uz napomenu da je manja vjerojatnost pojavljivanja efekata lokalizacije u 2 D nego u 1 D konstrukciji.

Sljedeća negativnost metode propagacije valova je činjenica da stvarne konstrukcije nisu beskonačne. Za konstrukcije koje imaju veliki broj perioda, rezultati navedene metode su dovoljne točnosti ali za panele koji imaju manji broj perioda (npr. paneli testirani u laboratoriju) konačne dimenzije igraju uvelike mijenjaju rezultat. Pri izračunu konačnih periodičkih konstrukcija, osobito s manjim brojem perioda, potrebno je u izračun dodati i reflektirane valove od rubova kao dodatak na efekte koji se pojavljuju kod beskonačnih periodičkih konstrukcija. Izračun reflektiranih valova zahtjeva poznavanje elastičnih rubnih uvjeta koji postoje po rubu konačne periodičke konstrukcije (npr. panela s ukrepama) i koji se teško mogu odrediti u praksi čak i kad je konstrukcija ugrađena u reflektivnu ravninu u laboratoriju. Uobičajeno pojednostavljenje koje se u radovima uzima u obzir je pretpostavka da je panel pravokutan i jednostavno oslonjen.

Za rješavanje navedene negativnosti koristi se kombinacija izračuna polja pomaka beskonačnog panela i primjene metode prostornog isječka (eng. *spatial windowing*) kojom samo dio beskonačnog panela prima i stvara radijaciju. Drugim riječima, navedeno znači da se akustički dio izračuna odnosi na dio beskonačnog panela koji ima dimenzije jednake stvarnom konačnom panelu a vibracije na beskonačni panel. Navedenu strategiju su prvi predložili Villot i drugi [58] za slučaj pravokutnog panela oslonjenog po svojim rubovima. Na niskim frekvencijama, gdje rezonantno ponašanje vlastitih oblika vibriranja nižeg reda dominira, ovaj pristup nije povoljan jer se rezonantni odziv ne može točno izračunati jer reflektirani val od vanjskog ruba nije uzet u obzir. Međutim kako frekvencija raste krivulja zvučnog transmisijskog gubitka prelazi iz rezonantnog u nerezonantni frekventni pojas masenog zakona (eng. *mass law*) pa se dobiva dobro podudaranje s eksperimentalnim rezultatima i metodom konačnih i rubnih elemenata (npr. Villot i drugi [58], Villot [59], Ghinet [60] i Rhazi [61]). Razlog leži u tome što je promjena u efikasnosti radijacije koja nastaje pri promjeni beskonačne dimenzije panela u konačnu dimenziju panela dobro pretpostavljena s metodom prostornog isječka.

Slijedom te ideje nastaje rad autora Legault [44] u kojem se analizira utjecaj konačnih dimenzija na akustički odziv ortogonalno ukrepljenih panela kombiniranjem metode prostornog isječka i metode propagacije valova i uspoređujući rezultate s Rayleigh-Ritz-ovim pristupom koji se bazira na korištenju oblika vibriranja. U radu nije definirano do koje razine se beskonačni model može koristiti za modeliranje konačnog periodički oslonjenog panela koji se sastoji od manjeg broja perioda panela dok se u ostaloj literaturi navodi da će konačne dimenzije imati manje utjecaja na ukrepljene panele nego na obične panele, npr. rad autora Cotoni [14]. U radu Legaulta [44] navedeno je da se u slučaju kad valna duljina vala u panelu postane red veličine ili manja od udaljenosti između oslonaca, metodom prostornog isječka i definiranjem gibanja s redom prostornih harmonijskih valova može izračunati ponašanje konačnog jednostavno oslonjenog panela te se navodi da se beskonačni model može koristiti

na srednjim i visokim frekvencijama čak i za slučajeve kad broj perioda panela nije veći od 3 ili 4 po svakoj osi. Opisan pristup korišten je u ovoj disertaciji.

1.3. Ciljevi i struktura disertacije

U ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv pravokutnog panela koji je periodički oslonjen sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda panela najmanje 3 puta veća od njegove širine, beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa se ona i uzela za osnovni model. Navedeno je omogućilo da jednadžba gibanja grede bude svedena na jedan period grede za čije rješavanje se koristila metoda propagacije valova [26] i metoda prostornog isječka [57]. Ujedno je analizirano i slobodno gibanje beskonačne periodički oslonjene grede te je isto uspoređeno s prisilnim gibanjem.

Međukoraci koji vode do ostvarenja spomenitih ciljeva, a istovremeno do znanstvenog doprinosa ove disertacije su sljedeći:

- razviti opći numerički model akustičkog odziva pravokutnog panela s raznim rubnim uvjetima (posebno s periodičkim osloncima) koji uključuje definiranje utjecaja raznih parametara kao što su upadni kut ravninskog akustičkog vala, fazno prigušenje, prigušenje u materijalu panela, ostale karakteristike materijala panela, krutost i prigušenje poprečne i fleksijske opruge u osloncima, masa pomičnog dijela oslonca, debljina panela i udaljenost između oslonaca, te dokazati konvergenciju dobivenih numeričkih rezultata,

- razviti opći numerički model slobodnih vibracija pravokutnog panela s raznim rubnim uvjetima (posebno s periodičkim osloncima) koji uključuje analizu oblika vibriranja i definiranje utjecaja raznih parametara koji su već spomenuti,

- povezati prisilne i slobodne vibracije u jednu cjelinu definirajući njihovu korelaciju, i

- potvrditi numeričke rezultate s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima odgovarajućih komercijalnih programskih paketa.

U skladu s postavljenim ciljevima struktura ove disertacije je sljedeća:

- u 2. poglavlju je opisana teorija akustičkog odziva i slobodnih vibracija beskonačnih periodički oslonjenih panela te metoda koje se koriste za numeričko modeliranje. Detaljno su

opisani važni parametri izračuna, osobito oni uz koje je vezan doprinos ove doktorske disertacije,

- u 3. poglavlju je predstavljen i opisan numerički program za modeliranje i procjenu akustičkog odziva i slobodnih vibracija periodički oslonjenog pravokutnog panela. Programski alat obuhvaća i dodatne skripte koje služe za prikaz dijagrama i varijabli za vrijeme izvođenja programa kao i datoteke za praćenje razvoja rezultata. Navedeni su i rezultati numeričke analize,

- u 4. poglavlju opisan je eksperimentalni model i procedura mjerenja te su navedeni rezultati eksperimentalne analize, i

- u 5. poglavlju izveden je zaključak u kojem je dan pregled svih rezultata i doprinosa ovog istraživanja te prijedlozi za buduća istraživanja.

Poglavlje 2.

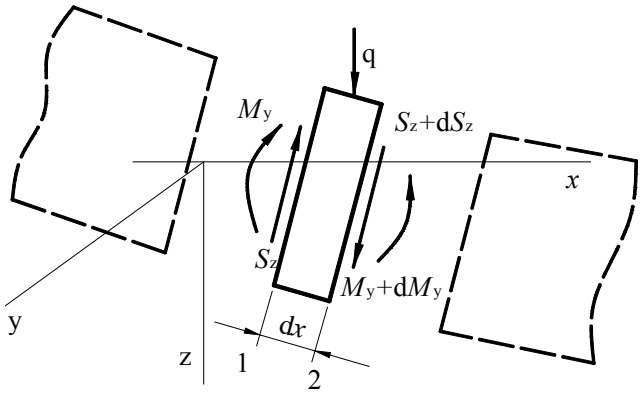
Teorijske osnove matematičkog modela

Kako je već navedeno u uvodu, u ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv periodički oslonjenog pravokutnog panela sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda jednosmjerno periodički oslonjenog panela najmanje tri puta veća od njegove širine [26] beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda koja čini osnovu numeričkog modela ove disertacije. Model beskonačne periodički oslonjene grede svodi se na model jedne grede koja se periodički ponavlja.

Model slobodnih vibracija riješen je na dva načina: direktnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe gibanja i primjenom metode virtualnog rada na diferencijalnu jednadžbu gibanja čije je rješenje definirano metodom propagirajućih valova, dok je model prisilnih vibracija (akustičkog odziva grede) riješen samo s drugom metodom. Pojedinačno su rješenja uspoređena s rješenjima metode konačnih elemenata koja su dobivena pomoću računalnih programa Femap i Actran.

2.1. Diferencijalna jednadžba gibanja grede po Euler-Bernoulli-evoj teoriji

Izvod jednadžbe gibanja za gredu s konstantnim poprečnim presjekom bazira se na Euler-Bernoulli-ovoj teoriji po kojoj se pretpostavlja da poprečni presjeci grede ostaju ravni za vrijeme fleksijskih vibracija i da je radijus zakrivljenosti savijene grede velik u odnosu na progib grede.



Slika 2.1. *Diferencijalni element grede s odgovarajućim silama i momentima*

Pretpostavlja se diferencijalna duljina presjeka dx te paralelnost ravnih stijenki 1 i 2 koje su u ravnotežnom položaju okomite na neutralnu liniju grede. Na slici 2.1 su prikazane poprečne sile, momenti savijanja i poprečno vanjsko opterećenje koji djeluju na diferencijalni element grede. Ukoliko je poprečni pomak grede malen, kao što se pretpostavlja po Euler-Bernoulli-ovoj teoriji, tada je zakretanje elementa grede iz nedeformiranog stanja isto maleno. Pod ovim uvjetima, jednadžba gibanja po poprečnoj osi grede glasi

$$S_z + \mathrm{d}S_z - S_z + q\mathrm{d}x = \left(\rho A_g \mathrm{d}x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

gdje je A_g površina poprečnog presjeka, ρ gustoća materijala a w poprečni pomak. Ukoliko se jednadžba podijeli sa dx jednadžba gibanja ima ovaj oblik

$$\frac{\mathrm{d}S_z}{\mathrm{d}x} + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

Ukoliko se, nadalje, zanemari djelovanje momenta inercije mase diferencijalnog elementa grede tada jednadžba za zakretanje diferencijalnog elementa glasi

$$-\left(S_z + \mathrm{d}S_z\right)\mathrm{d}x + M_y + \mathrm{d}M_y - M_y = 0\,. \tag{2.3}$$

Nakon skraćivanja i zanemarivanja člana izraza $\mathrm{d}S_z\mathrm{d}x$ izraz (2.3) dobiva novi oblik

$$S_z = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} \ . \tag{2.4}$$

Po klasičnoj Euler-Bernoulli-ovoj teoriji zakrivljenost na bilo kojem položaju x na gredi proporcionalna je momentu savijanja tj. vrijedi

$$M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

gdje je E modul elastičnosti materijala a I moment inercije površine poprečnog presjeka.

Iz izraza (2.4) i (2.5) i slijedi izraz za veličinu poprečne sile

$$S_z = -EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \ . \tag{2.6}$$

Ukoliko se zadnji izraz uvrsti u jednadžbu (2.2) dobiva se diferencijalna jednadžba gibanja grede

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{A_g \rho}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{A_g \rho} \ . \tag{2.7}$$

S navedenim izrazom može se pratiti gibanje dugih greda pri njihovom vibriranju na nižim oblicima vibriranja.

Hookov zakon linearne elastične teorije kod jednoosnog stanja naprezanja ima oblik

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.8}$$

dok se Hookov zakon za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacija koristi u slučajevima kad se gredom približno opisuje dugi pravokutni panel koji je oslonjen na svoje dvije uzdužne stijenke. U tom slučaju deformacija je spriječena u y-smjeru koja se nalazi u ravnini panela i poprečna je s obzirom na uzdužnu x-os:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \nu\sigma_x \ . \tag{2.9}$$

Uvrštavanje ovog naprezanja u Hookov zakon po x-osi daje izraz:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{E}\left(1-\nu^2\right) \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x \ . \tag{2.10}$$

Svi izračuni i rezultati koji slijede bazirani su na Hookovom zakonu (2.8), međutim, opcija s ravninskim naprezanjem se može koristiti u izračunu zamjenom modula elastičnosti E s $\frac{E}{1-\nu^2}$ (vidi poglavlje 4.2.1).

2.2. Slobodne vibracije beskonačne periodički oslonjene grede

Diferencijalna jednadžba slobodnog vibriranja Euler-Bernoulli-jeve grede [63] slijedi iz izraza (2.7) ako se poprečna vanjska sila izjednači s nulom q=0:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{EI}{A_g\rho}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\,. \tag{2.11}$$

2.2.1. Direktno rješavanje diferencijalne jednadžbe gibanja

Rješenje za diferencijalnu jednadžbu (2.11) imat će oblik

$$w=w(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{2.12}$$

Ukoliko se navedeno rješenje uvrsti u jednadžbu (2.11) dobiva se obična diferencijalna jednadžba iz koje se funkcija oblika $w(x)$ može odrediti iz jednadžbe:

$$\frac{d^4 w}{dx^4}-\frac{\omega^2 A_g\rho}{EI}w=0 \tag{2.13}$$

i opći oblik funkcije oblika $w(x)$ glasi

$$w(x)=C_1\sin(px)+C_2\cos(px)+C_3\sinh(px)+C_4\cosh(px) \tag{2.14}$$

gdje je

$$p^4=\frac{\omega^2 A\rho}{EI} \tag{2.15}$$

i gdje su C_1, C_2, C_3 i C_4 konstante koje se određuju iz rubnih uvjeta. Za običnu gredu rubni uvjeti vezani su uz poprečne pomake u osloncu w i nagib grede u osloncu $\frac{\partial w}{\partial x}$ te se za model periodički oslonjene beskonačne grede dijele na jednostavne oslonce i fleksijske oslonce. Za definiciju istih potrebno je definirati tzv. propagacijsku konstantu što je objašnjeno u sljedećem poglavlju.

2.2.1.1. Jednostavni oslonci

Propagaciju valova u periodički oslonjenim neprigušenim gredama opisali su Heckl [24] i Cremer [64]. Numerički je dokazano da valovi mogu propagirati slobodno (bez smanjivanja amplitude) samo u nekim frekvencijskim pojasevima dok se na frekvencijama izvan propagacijskih frekvencijskih pojaseva valu smanjuje amplituda dok se giba po gredi. Utvrđeno je da postoje frekvencijski pojasevi propagacije i smanjivanja amplitude koja se međusobno izmjenjuju kako frekvencija raste. Heckl [24] je definirao propagacijsku konstantu kao varijablu koja definira valno gibanje, kao mjera za promjenu amplitude i faze prilikom gibanja vala od oslonca do oslonca. Poznavanje propagacijske konstante je ključan korak za izračun odziva periodički oslonjenog panela. Slijedi određivanje propagacijske konstante za periodički oslonjenu gredu na jednostavne oslonce, tj. oslonce na kojima je omogućeno zakretanje a spriječeno je poprečno gibanje.

2.2.1.1.1. Karakteristike propagacijskih konstanti

Jednadžba za izračun propagacijske konstante daje par konstanti, jednakih amplituda i suprotnih predznaka (predznak slijedi iz smjera gibanja ukupnog vala). Slijedi da za svaku propagacijsku konstantu na zadanoj frekvenciji postoji jedinstvena grupa prostornih harmonijskih valova koja ima valne komponente s mnogo različitih valnih duljina i valnih brzina.

Jednostavni sinusni val koji propagira uzduž beskonačne prigušene neoslonjene grede može se definirati s valnim brojem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.16}$$

Navedena veličina je jednaka razlici u fazi između dvije točke koje su na jediničnoj udaljenosti. Kompleksni broj $\pm(\delta_a + \mathrm{j}k)$ je propagacijska konstanta koja opisuje promjenu u fazi i iznos smanjenja amplitude po jedinici duljine grede kod valnog gibanja pa izraz za određivanje amplitude u nekoj točki A_2 koja se nalazi na jediničnoj udaljenosti od točke A_1 glasi

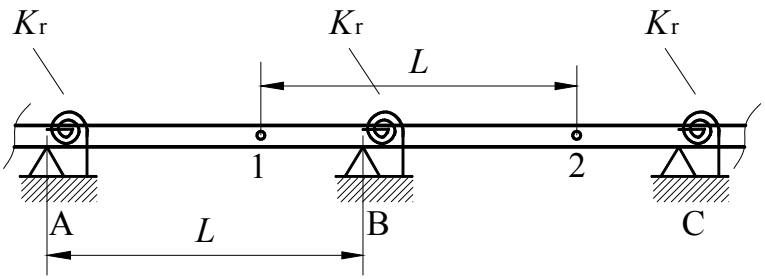
$$A_2 = \mathrm{e}^{\delta_a} A_1 .$$

Negativni predznak ispred kompleksnog broja definira pozitivan smjer propagacije i smanjenje amplitude u pozitivnom smjeru x-osi, a pozitivan predznak propagaciju u negativnom smjeru x-osi i rast amplitude.

Kod beskonačne periodički oslonjene grede vrijednost propagacijske konstante za slobodno gibanje valova mijenja se s frekvencijom vibriranja i njezin kompleksni oblik glasi:

$$\mu = \mu_r + \mathrm{i}\mu_i \,. \tag{2.17}$$

Realni dio propagacijske konstante μ_r predstavlja faktor smanjenja amplitude a imaginarni dio propagacijske konstante μ_i predstavlja faznu razliku između veličina odziva u točkama 1 i 2. Sve veličine vezane uz odziv na nekom položaju unutar promatranog perioda grede povezane su s istima u točki susjednog perioda grede koja se nalazi na udaljenosti L (udaljenost između oslonaca) od početne točke s kompleksnom propagacijskom konstantnom μ, koja je jednaka za cijelu beskonačnu gredu.

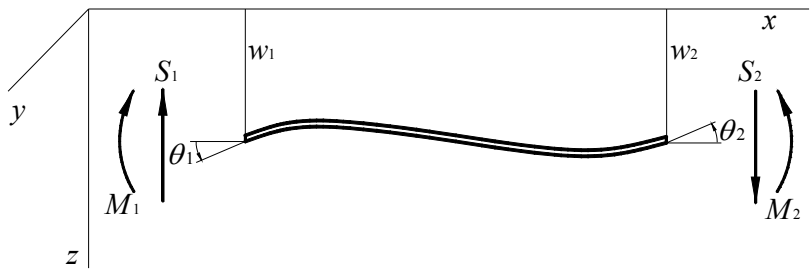


Slika 2.2. *Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce*

Navedena veza za zakret θ (kut nagiba tangente na elastičnu liniju) i moment M u dvije točke 1 i 2 u susjednim periodima glasi (slika 2.3):

$$\theta_2 = \mathrm{e}^{\mu}\theta_1 \quad \text{i} \tag{2.18}$$

$$M_2 = \mathrm{e}^{\mu} M_1 \,. \tag{2.19}$$



Slika 2.3. *Pozitivni pomaci i zakreti perioda grede*

Pseudo valna duljina propagacije u gredi definira se iz udaljenosti između oslonaca L:

$$\lambda = \frac{2\pi L}{\mu_i}. \tag{2.20}$$

S obzirom na navedenu valnu duljinu i na zadanu frekvenciju vibracija dobija se fazna brzina slobodnog fleksijskog vala s izrazom

$$c_n = \lambda f. \tag{2.21}$$

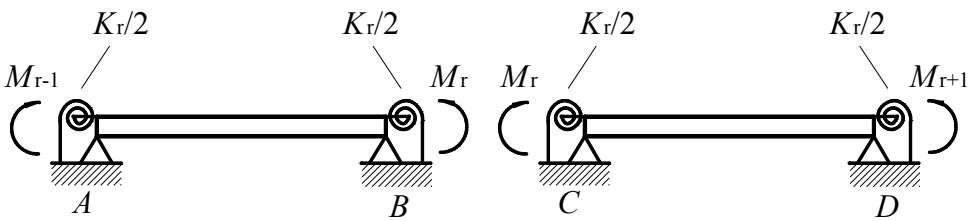
Izraz za broj fleksijskog pseudo vala u gredi jednak je valnom broju beskonačne neoslonjene grede:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\mu_i}{L}. \tag{2.22}$$

Broj vrijednosti propagacijskih konstanti jednak je broju stupnjeva sloboda gibanja u osloncima. Vrijednosti μ i iz njih valne duljine propagacije fleksijskih valova u gredi λ ovise jedino o prirodi strukture i zadanoj frekvenciji.

Obični sinusni valovi ne mogu propagirati u periodično oslonjenoj gredi jer dolazi do refleksija u osloncima kao i drugih efekata bliskog polja zbog kojih rješenje funkcije oblika vibriranja panela uključuje i trigonometrijske funkcije kosinus hiperbolni i sinus hiperbolni. Klasičnim rješenjem pomoću Fourierovog reda sinus i kosinus funkcija ne može se izraziti ukupni val.

Iz izračunate propagacijske konstante slijedi jedinstveni oblik poprečnih pomaka u slobodnom periodu grede. Svi slobodni periodi grede vibriraju u istom obliku vibriranja, ali s faznim i amplitudnom razlikom između njih. Svaka od konstanti je povezana s određenim oblikom poprečnih pomaka tj. s frekvencijom.



Slika 2.4. *Momenti koji djeluju na period grede*

Za slučaj dviju susjednih perioda grede *A-B* i *C-D* (slika 2.4) koje su na njihovim krajevima oslonjene na jednostavne oslonce sa fleksijskim oprugama krutosti $K_r/2$ ukupna fleksijska krutost u osloncu iznosi K_r.

Svaki period grede opterećen je i s njezinom poprečnom inercijalnom silom i harmonijskim momentima na rubovima perioda grede od susjednih perioda grede. Ovi momenti označeni su s M_{r-1}, M_r, M_{r+1} i potrebno je naglasiti da se radi o harmonijskim promjenjivim veličinama, koje imaju realne i imaginarne vrijednosti.

Zakreti u osloncima jednog perioda grede mogu se povezati s veličinom momenata M i prijenosne funkcije zakretanja β [63]. Prijenosne funkcije zakretanja ovise o frekvenciji vibracija. Zakret θ_B, na desnom kraju perioda grede *A-B*, može se opisati s izrazom

$$\theta_B = \beta_{BA} M_{r-1} + \beta_{BB} M_r \tag{2.23}$$

gdje je β_{BA} zakret u točki *B* zbog jediničnog momenta u točki *A* a β_{BB} zakret u točki *B* zbog jediničnog momenta u točki *B*.

Zakret θ_C na lijevom kraju perioda grede C-D može se definirati u sličnom obliku

$$\theta_C = \beta_{CC} M_r + \beta_{CD} M_{r+1} \tag{2.24}$$

gdje su β_{CC} i β_{CD} prijenosne funkcije zakretanja.

Ako su pozitivni smjerovi momenata definirani kao na slici 2.3 tj. ako pozitivni momenti gledaju u suprotnom smjeru od gibanja kazaljke na satu onda su zakreti θ_A i θ_B oba pozitivna i onda vrijedi $\beta_{BB} = -\beta_{CC}$. Isto tako, iz recipročne vrijednosti prijenosnih funkcija zakretanja slijedi $\beta_{BA} = -\beta_{AB}$ pa iz sličnosti perioda grede slijedi $\beta_{BA} = -\beta_{CD}$.

Zakreti u osloncima perioda grede θ_B i θ_C moraju biti vezani izrazom (2.18) da bi kontinuitet pomaka i zakreta u osloncima bio održiv. Iz izraza (2.23) i (2.24) te odnosa između prijenosnih funkcija dolazi se do izraza:

$$M_{r-1} + 2\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} M_r + M_{r+1} = 0\,. \tag{2.25}$$

Identična jednadžba može se primjeniti za sve oslonce periodički oslonjene grede. Opisani skup jednadžbi bit će zadovoljen s ponavljajućim odnosom između momenata u osloncima:

$$\begin{aligned} M_{r+1} &= \mathrm{e}^{\mu} M_r \quad \text{i} \\ M_r &= \mathrm{e}^{\mu} M_{r-1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Uvrštavajući zadnje izraze (2.26) u jednadžbu (2.25) dolazi se do jednadžbe

$$\mathrm{e}^{\mu} + \mathrm{e}^{-\mu} = -2\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \tag{2.27}$$

ili

$$\cosh \mu = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \tag{2.28}$$

što je izraz za određivanje propagacijske konstante μ.

Desna strana izraza (2.28) ovisi o zadanoj frekvenciji i bit će kompleksna ukoliko postoji prigušenje u gredi stoga je propagacijska konstanta μ kompleksna veličina i ovisi o frekvenciji.

Prijenosne funkcije β_{BB} i β_{BA} izračunavaju se iz frekvencije, mase grede, krutosti i prigušenje grede i krutosti fleksijske opruge K_r u osloncima. Izračun ovih funkcija sastoji se u primjeni metoda opisanih u literaturi [63]. Omjer između prijenosnih funkcija β_{BB} i β_{BA} može se izračunati i s jednostavnijom metodom koja uzima u obzir osnovne karakteristike gibanja vala. Karakteristika ovog oblika gibanja valova je da su sve vektorske veličine koje slijede iz gibanja vala u jednoj točki perioda grede (pomak, zakret, moment i poprečna sila) vezane s odgovarajućim veličinama u točki susjednog perioda grede na udaljenosti L od početne točke jednakoj udaljenosti između oslonaca. Navedene veličine su vezane s izrazima istog oblika kao i momenti u jednadžbi (2.26). S obzirom da se krajevi perioda grede (npr. točke A i B) nalaze na udaljenosti L navedene vektorske veličine su u istoj vezi. Slijedi, da za promatrani period grede vrijede izrazi jednaki izrazima (2.18) i (2.19) i za oslonce A i B:

$$\theta_B = \mathrm{e}^{\mu}\theta_A \tag{2.29}$$

i

$$M_{r-1} = \mathrm{e}^{\mu} M_r \tag{2.30}$$

pa iz izraza za zakret u točkama B i A slijedi

$$\begin{aligned} &\theta_B = \beta_{BB} M_r + \beta_{BA} M_{r-1} \quad \text{i} \\ &\theta_A = \beta_{AB} M_r + \beta_{AA} M_{r-1} = -\beta_{BA} M_r - \beta_{BB} M_{r-1}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Iz jednadžbi (2.29), (2.30) i (2.31) slijedi izraz

$$M_r\left(\beta_{BB} + \mathrm{e}^{\mu}\beta_{BA}\right) = -\mathrm{e}^{\mu} M_r\left(\beta_{BA} + \mathrm{e}^{-\mu}\beta_{BB}\right)$$

koji nakon skraćivanja ima oblik

$$\mathrm{e}^{\mu} = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \tag{2.32}$$

iz kojeg se vidi veza između e^{μ} i $\cosh(\mu)$ (izrazi 2.28 i 2.32) koja je karakteristična za zadane rubne uvjete te će se koristiti u daljnjem izvodu

$$\cosh(\mu) = \frac{\mathrm{e}^{\mu} + \mathrm{e}^{-\mu}}{2} = \mathrm{e}^{\mu}. \tag{2.33}$$

U slučaju kad je greda neprigušena, omjer između prijenosnih funkcija $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}$ ima realnu vrijednost pa za gredu na jednostavnim osloncima propagacijske konstante imaju ove vrijednosti u ovisnosti o vrijednosti omjera $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}$:

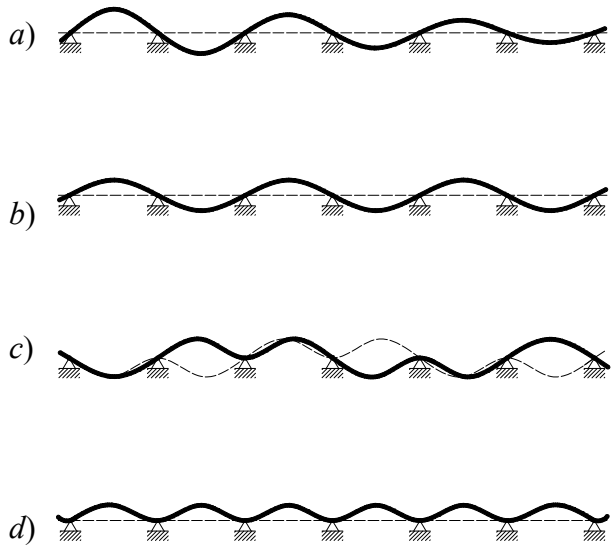
- u slučaju kad je $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} > +1$ propagacijska konstanta ima realnu vrijednost (μ_r) i postoji konstantno eksponencijalno smanjivanje amplitude pri širenju vala iz jednog perioda grede u drugi. S obzirom da propagacijska konstanta μ nema imaginarnu komponentu ne postoji fazna razlika između valova u susjednim periodima grede tj. val ne propagira pa nema niti propagacije valne energije,
- u slučaju kad je $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < -1$ propagacijska konstanta ima oblik $\mu_r + i\pi$, imaginarni dio definira gibanje susjednih perioda grede u protufazi i smanjuje mu se amplituda ali val još uvijek ne propagira, i
- u slučaju kad je $-1 < -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < 1$ onda je propagacijska konstanta imaginarna ($i\mu_i$) i definirana je s jednadžbom

$$\cos\mu_i = -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} \tag{2.34}$$

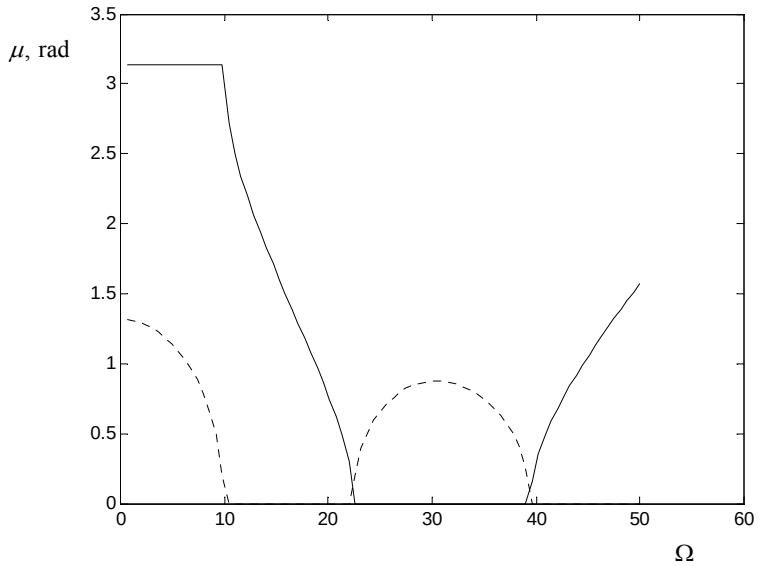
tj. vidljivo je da imaginarna propagacijska konstanta ima više vrijednosti za zadanu frekvenciju što slijedi iz trigonometrijske funkcije $\cos\mu_i$. Iz činjenice da imaginarna komponenta propagacijske konstante μ_i ima vrijednost koja nije jednaka π ili 0 slijedi da postoji razlika u fazi između gibanja susjednih perioda grede, što znači da val propagira te da se valna energija giba po gredi. S druge strane realna propagacijska konstanta jednaka je 0 što znači da se amplituda ne smanjuje pri gibanju vala kroz oslonce.

Na slici 2.5 prikazani su oblici vibriranja za pojedine vrijednosti omjera $\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}$. Za najniže frekvencije vrijedi $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < -1$ pa u tom frekvencijskom pojasu valovi ne propagiraju (slika 2.5 a) već nastaju stojni valovi. Pri rastu frekvencije smanjenje amplitude opada sve do frekvencije za koju je $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} = -1$ (slika 2.5 b) na kojoj su amplitude vibracija u susjednim periodima jednake. Propagacija slobodnih valova započinje kad je $-1 < -\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}} < 1$. Brzina širenja vala opisuje se s imaginarnom propagacijskom konstantom μ_i (slika 2.5 c). Na

frekvenciji za koju je $-\frac{\beta_{BB}}{\beta_{BA}}=+1$ imaginarna propagacijska konstanta je opet jednaka nuli pa propagacija prestaje i započinje frekvencijski pojas u kojem se smanjuje amplituda valova i gdje nema propagacije (slika 2.5 d). Pri daljnjem rastu frekvencija izmjenjuju se pojasevi s propagacijskim i stojnim valovima (slika 2.6) kako su prvi opisali Cremer i Leilich [65].



Slika 2.5. *Realni _____ i imaginarni _ _ _ _ _ dio oblika vibriranja kad je frekvencija: a) niža od donje granične frekvencije, b) jednaka donjoj graničnoj frekvenciji, c) na sredini ($\mu_i=\pi/2$) i d) na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog frekventnog pojasa*



Slika 2.6. *Vrijednosti kompleksnih propagacijskih konstanti (imaginarni dio _____ i realni dio --------) u funkciji o bezdimenzijskom frekvencijskom parametru Ω*

Imaginarne i realne komponente kompleksnih propagacijskih konstanti prikazane su na slici 2.6 u funkciji o bezdimenzijskom parametaru frekvencije koji se definira s izrazom

$$\Omega = \omega\sqrt{\frac{m_g L^4}{EI}} \tag{2.35}$$

gdje je ω kružna frekvencija vibriranja, $m_g = A_g\rho$ je specifična mase grede gdje je A_g površina poprečnog presjeka grede a ρ gustoća materijala grede, L je udaljenost između oslonaca i $EI=D$ je fleksijska krutost grede.

Granične frekvencije propagacijskih pojaseva imaju veliku važnost u analizi akustičkog odziva periodički oslonjene grede.

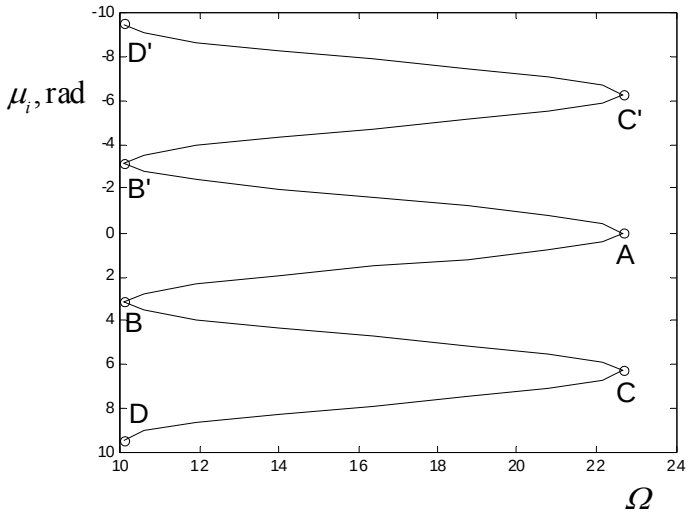
Donja granična frekvencija prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa jednaka je po iznosu prvoj vlastitoj frekvenciji grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je jednostavno oslonjena na oba ruba (na slici 2.6, $\Omega \approx 10$) te se u oba slučaja pojavljuju jednaki oblici vibriranja. Susjedni periodi grede vibriraju u protufazi ($\mu_i = \pi$) i nema propagacije vala niti smanjivanja amplitude vibriranja između susjednih perioda grede ($\mu_r = 0$). Trenutni stojni val na navedenoj frekvenciji prikazan je na slici 2.5 b.

Na frekvencijama nižim od donje granične frekvencije susjedni periodi grede vibriraju u protufazi ($\mu_i = \pi$) i nema propagacije vala (slika 2.5 a) ali dolazi do smanjivanja amplitude vibriranja između susjednih perioda grede ($\mu_r > 0$).

Gornja granična frekvencija prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa jednaka je po iznosu prvoj vlastitoj frekvenciji grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je uklještena na oba ruba (na slici 2.6, Ω=22,4) te se u oba slučaja pojavljuju jednaki oblici vibriranja. Susjedni periodi grede vibriraju u fazi ($\mu_i = 0$) i nema propagacije vala (slika 2.5 d) niti smanjivanja amplitude vibriranja između susjednih perioda grede ($\mu_r = 0$).

Između donje i gornje vlastite frekvencije dolazi do propagacije ($-\pi < \mu_i < 0$) valova s konstantnom amplitudom ($\mu_r = 0$) čiji je oblik kombinacija oblika na slikama 2.5 b i d, a prikazan je na slici 2.5 c.

Izraz (2.34) upućuje da imaginarna propagacijska konstanta ima više vrijednosti. Njezine vrijednosti za 1. propagacijski pojas su prikazane u dijagramu na slici 2.7.



Slika 2.7. *Sekundarne vrijednosti imaginarne propagacijske konstante za 1. propagacijski frekvencijski pojas*

Sve vrijednosti propagacijskih konstanti koriste se u krajnjem izrazu (2.63) za izračun poprečnih pomaka po metodi propagacije valova te su one prikazane na slici 2.15 dok se u funkciji oblika dobivenoj s direktnim rješavanjem direfencijalne jednadžbe gibanja koristi jedna vrijednost realne i imaginarne komponente propagacijske konstante koja se izračunava iz izraza (2.48).

2.2.1.1.2. Funkcija oblika vibriranja

Oblik slobodnog vibriranja periodički oslonjene grede rješenje je ranije definirane diferencijalne jednadžbe (2.13) koja nakon uvrštavanja izraza (2.15) ima ovaj oblik

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - p^4 w = 0 \,. \tag{2.36}$$

Opće rješenje jednadžbe (2.36) opisano je izrazom (2.14)

$$w(x) = C_1 \sin(px) + C_2 \cos(px) + C_3 \sinh(px) + C_4 \cosh(px)$$

pri čemu je potrebno zadovoljiti sljedeće rubne uvjete:

na x=0, w=w_1=0, w'=θ_1,

a na x=L, w=w_2=0, w'=θ_2=e$^{\mu}\theta_1$.

Pozitivni pomaci i zakreti definirani su na slici 2.3 po literaturi [66].

Matrični zapis općeg rješenja s uvrštenim rubnim uvjetima glasi

$$\mathbf{u}=\mathbf{Bc} \tag{2.37}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 \\ w_2 = e^{\mu} w_1 = 0 \\ e^{\mu}\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(p\cdot 0) & \cos(p\cdot 0) & \sinh(p\cdot 0) & \cosh(p\cdot 0) \\ p\cos(p\cdot 0) & -p\sin(p\cdot 0) & p\cosh(p\cdot 0) & p\sinh(p\cdot 0) \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p\cos(pL) & -p\sin(pL) & p\cosh(pL) & p\sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

koji nakon skraćivanja ima oblik

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ e^{\mu}\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 0 & p & 0 \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p\cos(pL) & -p\sin(pL) & p\cosh(pL) & p\sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

Vrijednosti koeficijenata C_i računaju se pomoću matričnog izraza

$$\mathbf{c}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y} \tag{2.39}$$

iz kojeg slijede izrazi za koeficijente C_i, pojednostavljeni pomoću funkcija F_1, ..., F_{10} [63] :

$$C_1 = \underbrace{\frac{\theta_1}{2p}}_{K} \frac{(e^{\mu}\overbrace{(\cosh(pL)-\cos(pL))}^{-F_{10}} + \overbrace{\cos(pL)\cosh(pL)-1}^{F_3} + \overbrace{\sin(pL)\sinh(pL)}^{F_1}))}{\underbrace{\cos(pL)\cosh(pL)-1}_{F_3}}$$

$$C_1 = K\frac{F_1 + F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_3}, \tag{2.40}$$

$$C_2 = -\underbrace{\frac{\theta_1}{2p}}_{K} \frac{(e^{\mu}\overbrace{(\sin(pL) - \sinh(pL))}^{F_8} + \overbrace{\cos(pL)\sinh(pL) - \cosh(pL)\sin(pL)}^{F_5})}{\underbrace{(1-\cos(pL)\cosh(pL))}_{-F_3}}$$

$$C_2 = K\frac{F_5 + e^{\mu}F_8}{F_3}, \tag{2.41}$$

$$C_3 = -\underbrace{\frac{\theta_1}{2p}}_{K} \frac{(e^{\mu}\overbrace{(\cosh(pL) - \cos(pL))}^{-F_{10}} - \overbrace{(\cos(pL)\cosh(pL)-1)}^{F_3} + \overbrace{\sin(pL)\sinh(pL)}^{F_1})}{\underbrace{\cos(pL)\cosh(pL) - 1}_{F_3}}$$

$$C_3 = -K\frac{F_1 - F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_3} \quad \text{i} \tag{2.42}$$

$$C_4 = \underbrace{\frac{\theta_1}{2p}}_{K} \frac{(e^{\mu}\overbrace{(\sin(pL) - \sinh(pL))}^{F_8} + \overbrace{\cos(pL)\sinh(pL) - \cosh(pL)\sin(pL)}^{F_5})}{\underbrace{(1 - \cos(pL)\cosh(pL))}_{-F_3}}$$

$$C_4 = K\frac{F_5 + e^{\mu}F_8}{-F_3} \tag{2.43}$$

pa funkcija oblika definirana izrazom (2.14) poprima novi izgled

$$w(x) = C_4\left(\cosh(px) + \frac{C_2}{C_4}\cos(px) + \frac{C_3}{C_4}\sinh(px) + \frac{C_1}{C_4}\sin(px)\right)$$

gdje za omjere koeficijenata C_i vrijede sljedeći izrazi

$$\frac{C_2}{C_4} = \frac{K\dfrac{F_5 + e^{\mu}F_8}{F_3}}{K\dfrac{F_5 + e^{\mu}F_8}{-F_3}} = -1\,,$$

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{-K\dfrac{F_1 - F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_3}}{K\dfrac{F_5 + e^{\mu}F_8}{-F_3}} = \frac{F_1 - F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_5 + e^{\mu}F_8} \quad \text{i}$$

$$\frac{C_1}{C_4} = \frac{K\dfrac{F_1 + F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_3}}{K\dfrac{F_5 + e^{\mu}F_8}{-F_3}} = \frac{-F_1 - F_3 + e^{\mu}F_{10}}{F_5 + e^{\mu}F_8}$$

pa konačni izraz za funkciju oblika slobodnih vibracija periodički oslonjene grede glasi

$$w(x) = C_4\left(\cosh(px) - \cos(px) + \sinh(px)\frac{F_1 - F_3 - e^{\mu}F_{10}}{F_5 + e^{\mu}F_8} + \sin(px)\frac{-F_1 - F_3 + e^{\mu}F_{10}}{F_5 + e^{\mu}F_8}\right). \tag{2.44}$$

Točnost dobivenih konstanti C_i provjerit će se s njihovim uvrštavanjem u izraz (2.38)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ e^{\mu}\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 0 & p & 0 \\ \sin(pL) & \cos(pL) & \sinh(pL) & \cosh(pL) \\ p\cdot\cos(pL) & -p\cdot\sin(pL) & p\cdot\cosh(pL) & p\cdot\sinh(pL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

pa iz množenja matrice slijede ove jednakosti

- za 1. redak $0 = C_2 + C_4 = \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{-F_3} = 0$

- za 2. redak $\theta_1 = pC_1 + pC_3 = p\left(\frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_1 + F_3 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{-F_1 + F_3 + \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} \right)$

$$= \frac{\theta_1}{2F_3} \left(F_1 + F_3 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10} - F_1 + F_3 + \mathrm{e}^{\mu} F_{10} \right) = \theta_1$$

- za 3. redak $0 = C_1 \sin(pL) + C_2 \cos(pL) + C_3 \sinh(pL) + C_4 \cosh(pL)$

$$= \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_1 + F_3 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} \sin(pL) + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} \cos(pL)$$

$$+ \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{-F_1 + F_3 + \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} \sinh(pL) + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{-F_3} \cosh(pL)$$

$$= \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \underbrace{\left(\sin(pL) + \sinh(pL) \right)}_{F_7} + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_1 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} \underbrace{\left(\sin(pL) - \sinh(pL) \right)}_{F_8} +$$

$$+ \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} \underbrace{\left(\cos(pL) - \cosh(pL) \right)}_{F_{10}}$$

$$= \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \left(F_7 + \frac{F_1 F_8 + F_5 F_{10}}{F_3} \right) = 0$$

i

- za 4. redak $\mathrm{e}^{\mu} \theta_1 = C_1 p \cdot \cos(pL) - C_2 p \cdot \sin(pL) + C_3 p \cdot \cosh(pL) + C_4 p \cdot \sinh(pL)$

$$= \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_1 + F_3 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} p \cos(pL) - \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} p \sin(pL) +$$

$$+ \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{-F_1 + F_3 + \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} p \cdot \cosh(pL) + \frac{\theta_1}{2\mathrm{p}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{-F_3} p \cdot \sinh(pL)$$

$$= \frac{\theta_1}{2\cancel{\mathrm{p}}} \cancel{p} \underbrace{\left(\cos(pL) + \cosh(pL) \right)}_{F_9} + \frac{\theta_1}{2\cancel{\mathrm{p}}} \frac{F_1 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} \cancel{p} \underbrace{\left(\cos(pL) - \cosh(pL) \right)}_{F_{10}} -$$

$$- \frac{\theta_1}{2\cancel{\mathrm{p}}} \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} \cancel{p} \underbrace{\left(\sin(pL) + \sinh(pL) \right)}_{F_7}$$

$$= \frac{\theta_1}{2} \left(F_9 + \frac{F_1 - \mathrm{e}^{\mu} F_{10}}{F_3} F_{10} - \frac{F_5 + \mathrm{e}^{\mu} F_8}{F_3} F_7 \right) = \mathrm{e}^{\mu} \theta_1$$

čime je dokazana točnost izračunate funkcije oblika (2.44).

U literaturi [33] određena je sljedeća funkcija oblika

$$w(x) = A\left\{\cosh px - \cos px + \sinh px\left(\frac{F_1 - F_2 - \mathrm{e}^{\mu}F_{10}}{F_5 - \mathrm{e}^{\mu}F_7}\right) + \right.$$
$$\left. + \sin px\left(\frac{2F_{10}}{F_7 + F_8} - \frac{(F_7 - F_8)(F_1 - F_2 - \mathrm{e}^{\mu}F_{10})}{(F_7 + F_8)(F_5 - \mathrm{e}^{\mu}F_7)}\right)\right\}. \tag{2.45}$$

Podudarnost navedene funkcije bit će uspoređena s funkcijom oblika (2.44) u poglavlju 3.3.5. Slijedi zapis svih funkcija F_i po literaturi [63] koje su korištene za izračun funkcije oblika slobodnih vibracija periodički oslonjene beskonačne grede na jednostavne oslonce

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sin(pL)\sinh(pL),\\
F_2 &= \cos(pL)\cosh(pL),\\
F_3 &= \cos(pL)\cosh(pL) - 1 = F_2 - 1,\\
F_5 &= \cos(pL)\sinh(pL) - \sin(pL)\cosh(pL),\\
F_7 &= \sin(pL) + \sinh(pL),\\
F_8 &= \sin(pL) - \sinh(pL),\\
F_9 &= \cos(pL) + \cosh(pL) \quad \text{i}\\
F_{10} &= \cos(pL) - \cosh(pL).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

2.2.1.1.3. Izračun propagacijskih konstanti

Za izračun propagacijskih konstanti potrebno je poprečne pomake i zakrete povezati s vanjskim harmonijskim poprečnim silama (S_1 i S_2, slika 2.3) i momentima savijanja (M_1 i M_2) na krajevima perioda grede pomoću mehaničke impedance grede (matrica krutosti). Ukoliko je smjer navedenih sila i momenata isti kao i pozitivan smjer definiran na slici 2.3 one su pozitivne i obratno, ukoliko je suprotan one su negativne. Matrični oblik jednadžbi s kojima se povezuju sile i pomaci glasi,

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{F_3}\begin{bmatrix} -p^3F_6 & -p^2F_1 & p^3F_7 & p^2F_{10} \\ & pF_5 & -p^2F_{10} & pF_8 \\ & & -p^3F_6 & p^2F_1 \\ \text{simetrično} & & & pF_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}=\mathbf{Zu} \tag{2.47}$$

gdje je matrica **Z** mehanička impedanca grede, **f** vektor poprečnih sila i momenata savijanja i **u** vektor pomaka i zakreta na rubovima grede.

Nakon uvrštavanja rubnih uvjeta u izraz (2.47)

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ M_1 \\ S_1 \mathrm{e}^{\mu} \\ -M_1 \mathrm{e}^{\mu} \end{bmatrix} = \frac{EI}{F_3} \begin{bmatrix} -p^3 F_6 & -p^2 F_1 & p^3 F_7 & p^2 F_{10} \\ -p^2 F_1 & pF_5 & -p^2 F_{10} & pF_8 \\ p^3 F_7 & -p^2 F_{10} & -p^3 F_6 & p^2 F_1 \\ p^2 F_{10} & pF_8 & p^2 F_1 & pF_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 \\ w_1 \mathrm{e}^{\mu} = 0 \\ \theta_1 \mathrm{e}^{\mu} \end{bmatrix}$$

izraz za određivanje propagacijskih konstanti slijedi iz jednakosti u 4. redu matrice

$$-M_1 \mathrm{e}^{\mu} = \frac{EI}{F_3} \left(pF_8 \theta_1 + pF_5 \theta_1 \mathrm{e}^{\mu} \right)$$

koja nakon preuređivanja ima oblik

$$\mathrm{e}^{-\mu} = -\frac{F_5}{F_8} - \frac{K_r L}{EI} \frac{\left(F_8^2 - F_5^2 \right)}{4pF_1 F_8} .$$

Konačni izraz za određivanje propagacijskih konstanti (2.46) dobiva se uzimajući u obzir jednakost (2.33) i glasi

$$\cosh \mu = -\frac{F_5}{F_8} - \frac{\kappa}{4p} \frac{\left(F_8^2 - F_5^2 \right)}{F_1 F_8} \tag{2.48}$$

gdje je

$$\kappa = \frac{K_r L}{EI} . \tag{2.49}$$

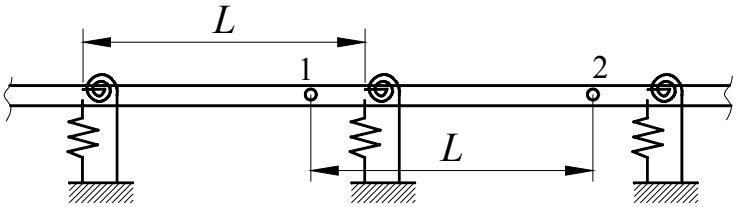
Iz činjenice da sve funkcije F_i ovise o parametru p (tj. kružnoj frekvenciji ω, izraz (2.15)) i da u izrazu (2.48) osim parametra p postoje samo konstante vezane uz karakteristike grede i rubne uvjete slijedi da je funkcija oblika definirana u cijelosti s propagacijskom konstantom. S obzirom da je za zadane jednostavne oslonce određena jedna vrijednost propagacijske konstante μ za svaku frekvenciju postoji jedan oblik vibriranja na jednoj frekvenciji. Potrebno je primjetiti i da propagacijska konstanta ima jednake pozitivne i negativne vrijednosti. Negativna vrijednost odgovara valu koji se giba u pozitivnom smjeru $w_+(x)$ dok pozitivna vrijednost odgovara valu koji se giba u negativnom smjeru $w_-(x)$. Uvrštavajući prvo pozitivnu pa negativnu vrijednosti propagacijske konstante u izraz (2.44) slijedi jednakost

$$w_+ \left(x \right) = w_- \left(L - x \right) .$$

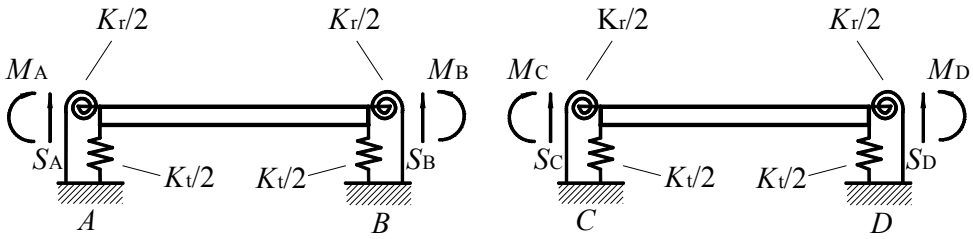
Uspješnim izračunom funkcije oblika i propagacijskih konstanti u potpunosti je definirano slobodno vibriranje beskonačne periodički oslonjene grede.

2.2.1.2. Elastični oslonci

Kod elastičnih oslonaca mogući su zakreti i poprečni pomaci u osloncima. U osloncima sad djeluje i poprečna opruga, slike 2.8 i 2.9.



Slika 2.8. *Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima*



Slika 2.9. *Dva susjedna perioda grede s poprečnim pomacima i zakretima u osloncima*

Greda je oslonjena na oslonce koji imaju poprečnu krutost K_t (slika 2.9). Kontinuitet poprečnih pomaka mora biti osiguran u svakom osloncu kao i kontinuitet zakreta. Poprečne sile S_A, S_B koje djeluju na oba kraja perioda grede sada su dio jednadžbe gibanja modela s elastičnim osloncima.

Uzimajući u obzir karakteristike gibanja vala kroz periodički oslonjenu gredu i činjenicu da sada postoji više propagacijskih konstanti na jednoj frekvenciji veze između zakreta i pomaka, te sila i momenata na krajevima perioda grede glase

$$\theta_B = \mathrm{e}^{\mu}\theta_A \quad \text{i} \qquad w_B = \mathrm{e}^{\mu} w_A, \text{ te} \tag{2.50}$$

$$S_B = \mathrm{e}^{\mu} S_A \quad \text{i} \qquad M_B = \mathrm{e}^{\mu} M_A. \tag{2.51}$$

Vrijede izrazi

$$\begin{aligned} \theta_A &= \beta_{AA}M_A + \beta_{AB}M_B + \gamma_{AA}S_A + \gamma_{AB}S_B, \\ \theta_B &= \beta_{BA}M_A + \beta_{BB}M_B + \gamma_{BA}S_A + \gamma_{BB}S_B, \\ w_A &= \delta_{AA}M_A + \delta_{AB}M_B + \alpha_{AA}S_A + \alpha_{AB}S_B \quad \text{i} \\ w_B &= \delta_{BA}M_A + \delta_{BB}M_B + \alpha_{BA}S_A + \alpha_{BB}S_B \end{aligned} \tag{2.52}$$

gdje prijenosne funkcije α, β, δ i γ imaju ova značenja:

- γ_{AB} je zakret u točki A zbog jedinične promjene sile u točki B,
- δ_{AB} je poprečni pomak u točki A zbog jediničnog promjene momenta u točki B i
- α_{AB} je poprečni pomak u točki A zbog jedinične promjene sile u točki B.

U izrazu (2.52) pojavljuju se novi odnosi između prijenosnih funkcija koji glase

$$\beta_{BB} = -\beta_{BA};\ \beta_{AB} = -\beta_{BA};\ \gamma_{AA} = \gamma_{BB};\ \delta_{AA} = \delta_{BB};$$
$$\alpha_{AA} = -\alpha_{BB};\ \alpha_{AB} = -\alpha_{BA};\ \delta_{AB} = \delta_{BA} = \gamma_{AB} = \gamma_{BA}\,. \tag{2.53}$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (2.52) u jednadžbe (2.50) i upotrebljavajući odnose između prijenosnih funkcija (2.53) dolazi se do izraza

$$\left(\beta_{BA} + \mathrm{e}^{\mu}\beta_{BB}\right)M_A + \left(\beta_{BB} + \mathrm{e}^{\mu}\beta_{BA}\right)M_B + \left(\gamma_{BA} - \mathrm{e}^{\mu}\gamma_{BB}\right)S_A + \left(\gamma_{BB} - \mathrm{e}^{\mu}\gamma_{BA}\right)S_B = 0 \text{ i}$$
$$\left(\gamma_{BA} - \mathrm{e}^{\mu}\delta_{BB}\right)M_A + \left(\beta_{BB} - \mathrm{e}^{\mu}\gamma_{BA}\right)M_B + \left(\alpha_{BA} + \mathrm{e}^{\mu}\alpha_{BB}\right)S_A + \left(\alpha_{BB} + \mathrm{e}^{\mu}\alpha_{BA}\right)S_B = 0\,.$$

Uvrštavajući jednadžbe (2.51) u zadnja dva izraza i skraćivanjem varijabli S_B i M_B dobiva se izraz

$$\begin{bmatrix} \left(\beta_{BA} + 2\mathrm{e}^{\mu}\beta_{BB} + \mathrm{e}^{2\mu}\beta_{BA}\right) & \gamma_{BA}\left(1 - \mathrm{e}^{2\mu}\right) \\ \gamma_{BA}\left(1 - \mathrm{e}^{2\mu}\right) & \left(\alpha_{BA} + 2\mathrm{e}^{\mu}\alpha_{BB} + \mathrm{e}^{2\mu}\alpha_{BA}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ S_A \end{bmatrix} = 0\,. \tag{2.54}$$

Determinanta matrice s koeficijentima mora biti jednaka nuli za netrivijalna rješenja. Svaki član determinante može se podijeliti s e^{μ} i onda, iz jednakosti

$$\mathrm{e}^{\mu} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mu}} = 2\cosh\mu; \qquad \mathrm{e}^{\mu} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\mu}} = 2\sinh\mu \tag{2.55}$$

slijedi uvjet

$$\begin{bmatrix} \beta_{BA}\cosh\mu + \beta_{BB} & -\gamma_{BA}\sinh\mu \\ -\gamma_{BA}\sinh\mu & \alpha_{BA}\cosh\mu + \alpha_{BB} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{2.56}$$

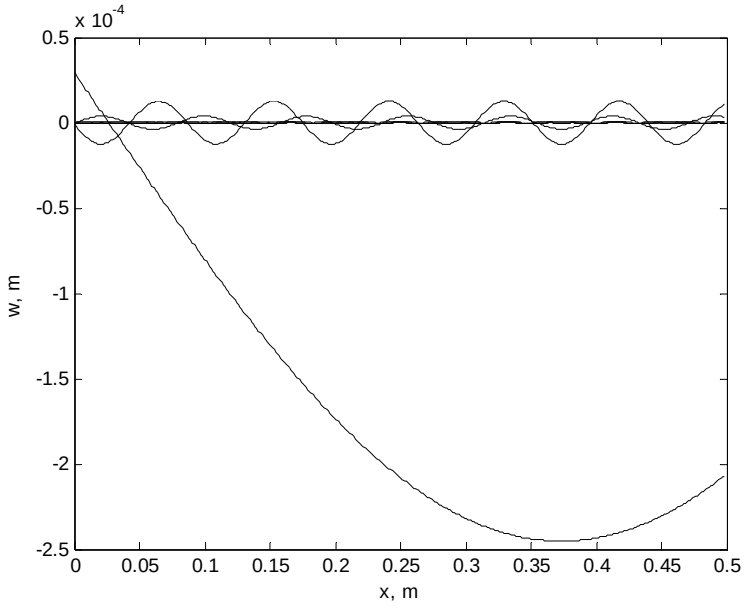
Razvojem determinante slijedi izraz

$$\left(\beta_{BA}\alpha_{BA} - \gamma_{BA}^2\right)\cosh^2\mu + \left(\alpha_{BA}\beta_{BB} + \alpha_{AB}\beta_{BA}\right)\cosh\mu + \left(\alpha_{BB}\beta_{BB} + \gamma_{BA}^2\right) = 0\,. \tag{2.57}$$

Time je dobivena kvadratna jednadžba za $\cosh\mu$ pa slijedi da postoje dvije vrijednosti μ za svaku frekvenciju. Funkcija oblika perioda grede definirana je izrazom koji ima isti oblik kao i izraz (2.44), ali je definicija koeficijenata propagacije μ složenija. Koeficijent propagacije μ ima dvije različite vrijednosti za sve zadane frekvencije ($\pm\mu_1$ i $\pm\mu_2$) iz čega slijede dva različita oblika slobodnog vibriranja. Prijenosne funkcije koje se koriste u jednadžbama (2.52) mnogo su složenije nego one u jednadžbi (2.23) međutim standardna metoda određivanja prijenosnih funkcija [63] može se primjeniti i za ove rubne uvjete.

2.2.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova

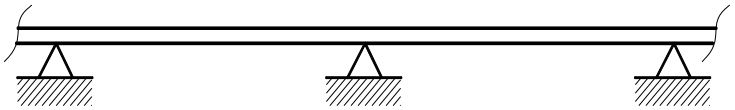
Za određivanje jednadžbe gibanja (2.14) koristi se metoda propagacije valova koju su razvili Mead i Pujara [26], u kojoj se odziv sustava opisuje pomoću prostornih harmonijskih valova koji su harmonici udaljenosti između oslonaca i čija suma predstavlja ukupni val, slika 2.10.



Slika 2.10. *Prikaz prostornih harmonijskih valova na beskonačnoj periodički oslonjenoj gredi*

2.2.2.1. Opis metode propagacije valova

Glavna prednost metode propagacije valova je što se poprečni pomaci opisuju pomoću grupe prostornih harmonijskih valova iz kojih se efekti pri radijaciji zvuka mogu relativno jednostavno izračunati. Navedena metoda koristi se zbog jednostavnijeg rješavanja za beskonačne periodički oslonjene panele koji se mogu modelirati kao greda oslonjena na jednako udaljene oslonce (slika 2.11).



Slika 2.11. *Beskonačna periodički oslonjena greda na jednostavnim osloncima*

Slobodno vibracijsko harmonijsko gibanje neprigušene beskonačne grede na jednako udaljenim jednakim osloncima opisuje se grupom prostornih harmonijskih valova koji putuju u raznim smjerovima i s različitim brzinama. Valne duljine i valne brzine prostornih harmonijskih valova slijede iz imaginarne komponente propagacijske konstante.

Vibracijska energija se širi na različite načine kroz razne strukture panela. Dok jednostavne strukture prenose vibracijsku energiju pomoću jednog tipa valnog gibanja (npr. fleksijskih valova), kod složenijih konstrukcija oni prenose vibracijsku energiju kao kombinaciju longitudinalnih, torzijskih i dvosmjernih fleksijskih valova. Kad valovi dođu na prepreku oni međusobno djeluju i mijenjaju svoje oblike.

Greda na jednostavnim osloncima ima jednu propagacijsku konstantu za svaku frekvenciju i jednu definiranu slobodnu grupu prostornih harmonijskih valova. Vibracijska energija grupe u tom slučaju propagirati će samo u određenim frekvencijskim pojasevima. Izvan ovih frekvencijskih pojaseva, valovima opada amplituda po gredi i nema propagiranja. Greda na elastičnim osloncima ima dvije propagacijske konstante za svaku frekvenciju, i dvije odgovarajuće grupe prostornih harmonijskih valova.

2.2.2.2. Opis metode virtualnog rada

Ako se uzme u razmatranje čestica na koju djeluje *n* sila $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ [62] i pretpostavi da je čestica izvršila mali pomak $\delta\mathbf{r}$ iz jedne točke u drugu, veličina $\delta\mathbf{r}$ je mogući mali pomak koji veze dozvoljavaju, te je zamišljen pa se zato naziva virtualnim pomakom stoga simbol $\delta\mathbf{r}$ predstavlja varijaciju prvog reda.

Rad učinjen s jednom od *n* sila $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ na virtualnom pomaku $\delta\mathbf{r}$ naziva se virtualni rad. Ukupan virtualni rad svih sila koje djeluju na česticu iznosi

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{f}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{f}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \ldots + \mathbf{f}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= \left(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n\right) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned} \tag{2.58}$$

ili

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{2.59}$$

gdje je $\mathbf{f}$ rezultantna sila tj. suma *n* sila $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$. Ukupni virtualni rad sila $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ jednak je virtualnom radu njihove rezultante $\mathbf{f}$.

Metoda virtualnog rada za česticu navodi da je ukupni rad svih sila koje djeluju na česticu jednak nuli za svaki virtualni pomak čestice ako je čestica u statičkoj ravnoteži, pa vrijedi izraz

$$\delta W = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{r} = 0 . \tag{2.60}$$

Ovaj uvjet je očito neophodan jer je rezultantna sila **f** jednaka nuli za česticu u statičkoj ravnoteži po 2. Newton-ovom zakonu, pa slijedi da je ukupni virtualni rad δW jednak nuli. Navedeni uvjet je ujedno i dovoljan jer nulti virtualni rad, $\delta W = 0$ ujedno i znači da je $\mathbf{f}^T \delta \mathbf{r} = 0$, što navodi na jednakost **f** = 0 za sve virtualne pomake δ**r**.

Na sličan način koncept virtualnog rada može se proširiti i na dinamički slučaj. Prema 2. Newton-ovom zakonu rezultanta svih sila koje djeluju na česticu jednaka je inercijalnoj sili čestice pa slijedi jednakost

$$\mathbf{f} - m_M \ddot{\mathbf{r}} = 0 . \tag{2.61}$$

Za opisani slučaj kaže se da se čestica nalazi u dinamičkoj ravnoteži, pa vrijedi izraz

$$\left\{ \mathbf{f} - m_M \ddot{\mathbf{r}} \right\}^T \delta \mathbf{r} = 0 . \tag{2.62}$$

Princip virtualnog rada za česticu koja se nalazi u dinamičkoj ravnoteži glasi: ukoliko je čestica u dinamičkoj ravnoteži, ukupan virtualni rad svih sila koje djeluju na česticu jednak je virtualnom radu kojeg učini inercijalna sila za svaki virtualni pomak materijalne čestice pa je ukupan virtualni rad jednak nuli.

2.2.2.3. Izračun propagacijskih konstanti

Rješenje za diferencijalnu jednadžbu slobodnog gibanja periodički oslonjene grede (2.11) može se izraziti kao red prostornih harmonijskih valova [26], s obzirom da se zbog periodične prirode sustava pretpostavlja da će i odziv sustava biti periodičan pa izraz za poprečne pomake perioda grede glasi:

$$w(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.63}$$

gdje je $w(x,t)$ gibanje grede, koeficijenti A_n su amplitude oblika vibriranja grede, L je udaljenost između oslonaca i μ je karakteristična propagacijska konstanta.

Pretpostavljena periodičnost odziva unešena je u rješenje, tj. jednadžbu (2.63), sa sumom po članu n pa je strukturni val definiran kao grupa prostornih harmonijskih valova označenih s indeksom $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...$ za pozitivno i negativno usmjerene valove koji predstavljaju refleksije od oslonaca. Svaki od prostornih harmonijskih valova zasebno ne zadovoljava rubne uvjete ali njihova suma da.

Princip virtualnog rada se primjenjuje na slobodno gibanje na način da se definiraju sile koje djeluju na gredu tj. dobije se jednadžba gibanja grede (2.13) koja se može napisati i u obliku

$$D\frac{d^4w}{dx^4} - m_p\omega^2 w = 0 \tag{2.64}$$

gdje je $D=EI$ fleksijska krutost, I moment inercije površine presjeka grede, E Young-ov modul elastičnosti materijala grede u vakumu a $m_g=A_p\rho$ specifična masa grede, A_p površina poprečnog presjeka i ρ gustoća materijala grede. Ukoliko se beskonačna greda koristi za modeliranje beskonačnog panela koji je konačan u poprečnoj ravnini u nazivnik izraza (2.10) dodaje se $\left(1-\nu^2\right)$ gdje je ν Poissonov koeficijent. Ukoliko je potrebno, strukturno prigušenje u gredi može se uključiti definirajući fleksijsku krutost izrazom

$$D = EI\left(1+\mathrm{i}\eta\right) \tag{2.65}$$

gdje je η faktor strukturnog prigušenja u materijalu grede.

Sile iz izraza za jednadžbu gibanja grede (2.64) zajedno s elastičnim silama u osloncima ne smiju činiti virtualni rad (2.71) pri postojanju virtualnog pomaka

$$\delta w = \delta A_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x-\omega t\right)}. \tag{2.66}$$

Nakon definicije virtualnog pomaka pomoću reda prostornih harmonijskih valova u obliku (2.66) princip virtualnog rada vodi do niza jednadžbi iz kojih se mogu izračunati koeficijenti A_n. S obzirom da je struktura prostorno periodična, u izračun je potrebno uzeti u obzir virtualni rad sila na jednom periodu grede i osloncima. Kao što je uobičajeno u kompleksnoj algebri za izračun virtualnog rada koristi se konjugirana kompleksna vrijednost virtualnog pomaka

$$\delta w^* = \delta A_m^* \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}.$$

Virtualni rad sila u gredi može se prikazati izrazom

$$\delta W_p = \int_{x=0}^{L}\left(D\frac{d^4w}{dx^4} - m_g\omega^2 w\right)\delta w^* \tag{2.67}$$

a nakon uvrštavanja jednadžbe (2.63) u jednadžbu (2.67), virtualni rad grede se izračunava izrazom

$$\delta W_p = \delta A_m^* \left\{\int_0^L D\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)^4 A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. -\int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_g\omega^2 A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}\mathrm{d}x\right\}.$$

Virtualni rad poprečne opruge po jednom periodu grede jednak je

$$\delta W_t = K_t\left(1+\mathrm{i}\mu_t\right)w\left(0\right)\delta w^* = K_t\left(1+\mathrm{i}\mu_t\right)w\left(0\right)\delta A_m^* = K_t\left(1+\mathrm{i}\mu_t\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta A_m^* \quad (2.68)$$

za x=0, tj. za prvi oslonac u ishodištu koordinatnog sustava.

Virtualni rad fleksijske opruge po jednom periodu grede jednak je

$$\begin{aligned}\delta W_r &= K_r\left(1+\mathrm{i}\mu_r\right)\frac{dw}{dx}\frac{d\left(\delta w^*\right)}{dx}\\ &= K_r\left(1+\mathrm{i}\mu_r\right)w'\left(0\right)\mathrm{i}A_m^*\frac{\mu+2m\pi}{L}\\ &= K_r\left(1+\mathrm{i}\mu_r\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\left(-1\right)\frac{\mu+2n\pi}{L}\mathrm{i}\delta A_m^*\frac{\mu+2m\pi}{L}\\ &= K_r\left(1+\mathrm{i}\mu_r\right)\delta A_m^*\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\frac{\mu+2n\pi}{L}\frac{\mu+2m\pi}{L}.\end{aligned} \quad (2.69)$$

U izrazima za virtualni rad poprečne i fleksijske opruge koristi se i koeficijent prigušenja kroz imaginarnu krutost poprečne i fleksijske opruge [67].

Virtualni rad točkaste mase na koordinatama oslonca po jednom periodu grede je

$$\delta W_M = -\omega^2 m_M w\left(0\right)\delta A_m^* = -\omega^2 m_M \delta A_m^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\,. \quad (2.70)$$

Princip virtualnog rada zahtjeva da suma svih virtualnih radova bude jednaka nuli

$$\delta W_p + \delta W_t + \delta W_r + \delta W_M = 0\,. \quad (2.71)$$

Nakon uvrštavanja virtualnih radova u izraz (2.71) dobiva se izraz

$$\left[D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2\right]A_m + \left(\frac{K_t}{L}-\frac{\omega^2 m_M}{L}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n + \frac{K_r}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right) = 0. \quad (2.72)$$

Postupak određivanja koeficijenata A_n i propagacijskih konstanti uključuje definiranje izraza (2.72) u matričnom obliku i rješavanje determinante matrice i matričnog izraza (2.73). U ovom radu opisati će se rješenje sa 5 prostornih harmonijskih valova kad su indeksi pojedinih prostornih harmonijskih valova u jednadžbi (2.72) n i m=-2, -1, 0, 1, 2, tj. njihove amplitude A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2. Matrice imaju ovaj oblik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ & F' & G' & H' & I' \\ & & J' & K' & L' \\ & & & M' & N' \\ \textit{simetrično} & & & & O' \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{VR}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{-2} \\ A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = [0] \tag{2.73}$$

dok se članovi matrice $\mathbf{M}_{VR}$ definiraju po ovim izrazima

$$A' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right)^2,$$

$$B' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right),$$

$$C' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right),$$

$$D' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right),$$

$$E' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-2)\pi}{L} \right),$$

$$F' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^2,$$

$$G' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right),$$

$$H' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right),$$

$$I' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right),$$

$$J' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^2,$$

$$K' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right),$$

$$L' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right),$$

$$M' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^2 ,$$

$$N' = \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right) \text{ i}$$

$$O' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^4 - m_g \omega^2 \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^2 .$$

Determinanta matrice $\mathbf{M}_{VR}$ mora biti jednaka nuli za netrivijalna rješenja

$$\det \begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ & F' & G' & H' & I' \\ & & J' & K' & L' \\ & & & M' & N' \\ simetrično & & & & O' \end{bmatrix} = 0 \tag{2.74}$$

iz čega slijede vrijednosti propagacijskih konstanti. Dobivena rješenja propagacijskih konstanti mogu se smatrati točnim ukoliko ona konvergiraju. Iz navedenog slijedi potreba korištenja dovoljnog broja prostornih harmonijskih valova. Usporedba zahtjeva za konvergencijom veličine propagacijske konstante i konvergencijom veličine zvučnog transmisijskog gubitka, koji je referentan u članku [32], komentirana je u poglavlju 3.3.1 u analizi rezultata.

Nakon definiranja propagacijskih konstanti slijedi izračun koeficijenata A_n (amplituda prostornih harmonijskih valova) iz izraza (2.73).

2.2.2.4. Određivanje amplituda prostornih harmonijskih valova

Amplitude prostornih harmonijskih valova moguće je izračunati na dva načina: direktnim rješavanjem matrične jednadžbe slobodnih vibracija i razvojem funkcije oblika u redove prostornih harmonijskih valova.

2.2.2.4.1. Rješavanje matrične jednadžbe slobodnih vibracija

Amplitude prostornih harmonijskih valova A_n odrede se rješavanjem matrične jednadžbe (2.73) nakon što su određene propagacijske konstante i time svi članovi matrice $\mathbf{M}_{VR}$.

2.2.2.4.2. Razvoj funkcije oblika u red

Ukoliko je funkcija oblika određena pomoću izraza (2.44) i (2.48) amplitude prostornih harmonijskih valova mogu se izračunati pomoću izraza sličnog izrazu za Fourier-ov razvoj u red uz preinaku u eksponentu $(\mu + 2n\pi)\frac{x}{L}$ (2.75). U izraz (2.75) uvrštava se propagacijska konstanta μ s primarnom vrijednosti i ostali prostorni harmonijski valovi te se na temelju izraza:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu+2n\pi)\frac{x}{L}} \tag{2.75}$$

definira izraz za izračun koeficijenata A_n

$$A_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu+2n\pi)\frac{x}{L}}\mathrm{d}x\,. \tag{2.76}$$

Standardna Fourierova analiza po kojoj krajnji oblik vibriranja ima ovaj oblik

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$$

i po kojoj se rješenja za koeficijente H_n odrede iz izraza

$$H_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\,.$$

Standardna Fourierova analiza nije primjenjiva za slučaj periodički oslonjene beskonačne grede kod koje su valne duljine prostornih harmonijskih valova djelitelji osnovne valne duljine. Pri njezinoj primjeni dobivaju se koeficijenti H_n jednaki nuli.

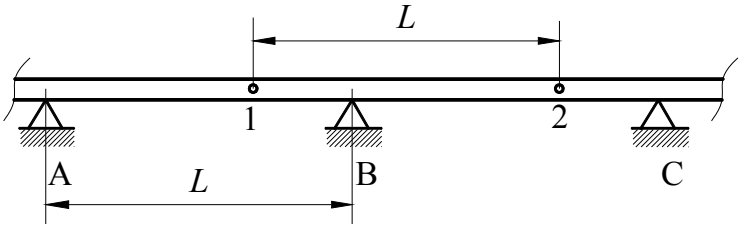
U poglavlju 3.3.5 izračunate su funkcije oblika i uspoređeni njihovi oblici.

2.2.2.5. Smjer, amplituda i fazna brzina prostornih harmonijskih valova

U ovom poglavlju definirati će se smjer, amplituda i fazna brzina grupe prostornih harmonijskih valova s kojom se definira krajnje gibanje grede.

2.2.2.5.1. Vektorski opis gibanja valova u gredi na jednostavnim osloncima

Neka vektor $\mathbf{w}_1$ predstavlja harmonijski vektor pomaka točke 1 u jednom periodu grede (slika 2.12), a vektor $\mathbf{w}_2$ harmonijski vektor pomaka točke 2 u susjednom periodu grede uz uvjet da su točke 1 i 2 na udaljenosti L jednakoj udaljenosti oslonaca.

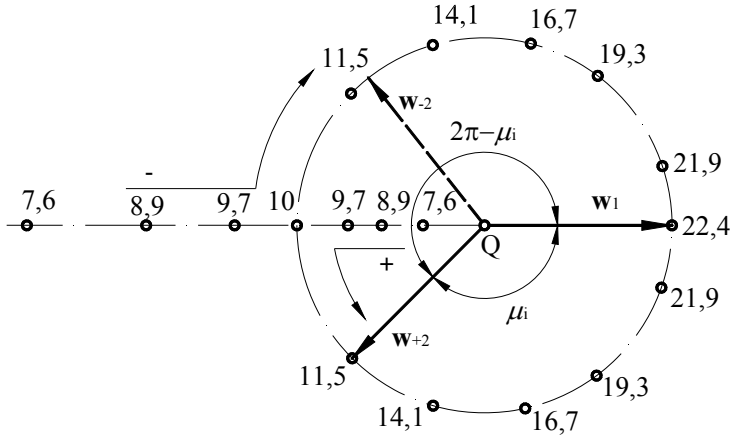


Slika 2.12. *Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce*

Pomaci $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ povezani su jednako kao i zakreti (2.29) ili momenti (2.30) pa vrijedi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \, e^{\mu} . \tag{2.77}$$

Na slici 2.13 prikazani su vektori $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ kao dvije dužine koje započinju u točki Q.



Slika 2.13. *Prikaz vektora pomaka* $\mathbf{w}_1$ *i* $\mathbf{w}_2$ *u susjednim periodima grede*

Referentni vektor $\mathbf{w}_1$ ima istu amplitudu i smjer za sve frekvencije. Smisao je u uspoređivanju položaja vektora $\mathbf{w}_2$ u odnosu na vektor $\mathbf{w}_1$ na zadanoj frekvenciji. Vektor $\mathbf{w}_1$ se mijenja kako se mijenja propagacijska konstanta μ. Različite veličine po kružnici definiraju položaj vrha vektora $\mathbf{w}_2$ za zadani parametar frekvencije koja se izračunava s izrazom (2.35).

Ukoliko vrijedi da je parametar frekvencije manji od parametra frekvencije na 1. graničnoj frekvenciji, $\mu_1 = -\pi$, vektor $\mathbf{w}_2$ je 180° izvan faze u odnosu na vektor $\mathbf{w}_1$. Na slici 2.13 vidljive su dvije točke koje su označene s veličinom parametra frekvencije Ω= 9,7 i točka označena parametrom frekvencije Ω=10 donje granične frekvencije prvog propagacijskog pojasa. Točka unutar kruga predstavlja vektor $\mathbf{w}_2$ manji od vektora $\mathbf{w}_1$, tj. val čija se amplituda smanjuje pri gibanju u pozitivnom smjeru grede dok točka izvan kruga predstavlja vektor $\mathbf{w}_2$ veći od vektora $\mathbf{w}_1$ tj. val čija se amplituda smanjuje pri gibanju u negativnom smjeru. Opisane dvije točke dobivene su koristeći -μ i +μ po jednadžbi (2.77).

S obzirom da negativna vrijednost propagacijske konstante odgovara valu koji se giba u pozitivnom smjeru, odgovarajući vektor $\mathbf{w}_2$ se označava $\mathbf{w}_{2+}$. Val koji se giba u negativnom smjeru i odgovara pozitivnoj propagacijskoj konstanti se označava s $\mathbf{w}_{2-}$.

Za vrijednost parametra frekvencije Ω =10 $\mathbf{w}_2$ je jednak $\mathbf{w}_1$ i ostaje jednak do parametra frekvencije Ω=22,4 kroz propagacijski frekvencijski pojas. Međutim kako imaginarna komponenta propagacijske konstanta raste $\mathbf{w}_2$ rotira na način kako je označeno na slici 2.13. Pozitivno usmjeren val tj. vektor $\mathbf{w}_{2+}$ rotira po donjem polukrugu i postaje koncidentan s $\mathbf{w}_1$ na parametru frekvencije Ω=22,4, dok negativno usmjeren val, tj. vektor $\mathbf{w}_{2-}$ rotira po gornjem polukrugu i na istom parametru frekvencije postaje koincidentan s $\mathbf{w}_1$.

Ako se promatra vektor $\mathbf{w}_{2+}$ na parametru frekvencije Ω=11,5 vidljivo je da on kasni za $\mathbf{w}_1$ s faznim kutem od μ_i. Međutim, po uobičajenoj terminologiji koja se koristi kod opisivanja faznih kuteva, navedeno kašnjenje može se prikazati i kao kašnjenje u iznosu $\mu_i + 2\pi$, $\mu_i + 4\pi$ tj. $\mu_i + 2n\pi$. S druge strane navedeni vektor može se smatrati vektorom koji prethodi referentni vektor $\mathbf{w}_1$ za fazni kut $2\pi - \mu_i$, $4\pi - \mu_i$ tj. $2n\pi - \mu_i$.

Slijedi da se $\mathbf{w}_2$ može definirati sa sumom beskonačno mnogo prostornih harmonijskih valova, ili komponenata, od kojih neke kasne za vektorom $\mathbf{w}_1$ za $\mu_i + 2n\pi\,(n = 0 \div \infty)$, i drugih koji prethode ispred referentnog vektora $\mathbf{w}_1$ za $2n\pi - \mu_i\,(n = 1 \div \infty)$. Vektori koji kasne predstavljaju prostorne harmonijske valove koji putuju u pozitivnom smjeru, dok vektori koji prethode predstavljaju prostorne harmonijske valove koji putuju u negativnom smjeru. Sve ove komponente zajedno čine ukupni pozitivno usmjereni val koji se predstavlja s vektorom $\mathbf{w}_{2+}$.

Za vektore koji prethode za $2n\pi - \mu_i$ može se reći da kasne za $-\left(2n\pi - \mu_i\right) = \mu_i - 2n\pi$ pa se zbog jednostavnosti matematičkog prikaza (a ne zbog boljeg fizikalnog razumjevanja) kaže da svi vektori kasne za $\mathbf{w}_1$ za $\mu_i + 2n\pi$, gdje je *n* cijeli broj.

Slijedi dodatni opis značenja dijelova krivulje na slici 2.7. Segment *AB* odgovara pozitivno usmjerenoj valnoj komponenti vala $\mathbf{w}_{2+}$ koja je definirana s faznim kašnjenjem μ_i. Segment *CD* odgovara pozitivno usmjerenoj valnoj komponenti s faznim kašnjenjem $\mu_i + 2\pi$. S druge strane, segment $B'C'$ odgovara negativno usmjerenoj valnoj komponenti $\mathbf{w}_{2+}$ koja prethodi za $2\pi - \mu_i$. Crtkani dijelovi dijagrama odgovaraju raznim valnim komponentama (prostornim harmonijskim valovima) vektora $\mathbf{w}_{2-}$. Rezultantni vektor je usmjeren u negativnom smjeru i ima negativno usmjerene valne komponente kojima odgovara segment AB', ali i pozitivno usmjerene valne komponente kojima odgovaraju segmenti *BC*, *DE*, itd.

2.2.2.5.2. Ukupni val kao grupa prostornih harmonijskih valova

Funkcija oblika pozitivno usmjerenog prostornog harmonijskog vala koji ima fazno kašnjenje $\mu_i + 2n\pi$ ima oblik

$$w_n\left(x\right) = A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\mu_i + 2n\pi\right)x/L\right)}. \tag{2.78}$$

Ukoliko se navedeni izraz želi definirati s faznom brzinom prostornog harmonijskog vala potrebno je prvo definirati njezinu veličinu. Fazna brzina vala definira kojom brzinom se val širi prostorom te se ona definira iz valne duljine vala λ i vremenskog perioda vala *T* izrazom

$$c_n = \frac{\lambda}{T}. \tag{2.79}$$

S obzirom da kružna frekvencija ω slijedi iz izraza

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.80}$$

i da broj vala *k* slijedi iz izraza

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.81}$$

slijedi da se fazna brzina može definirati izrazom

$$c_n = \frac{\omega}{k} . \qquad (2.82).$$

Izraz koji povezuje broj vala i imaginarnu propagacijsku konstantu glasi

$$k = \frac{\mu_i + 2n\pi}{L} \qquad (2.83)$$

pa krajnji izraz za faznu brzinu ima oblik

$$c_n = \frac{\omega L}{\mu_i + 2n\pi} . \qquad (2.84)$$

Nakon uvrštavanja izraza (2.84) u izraz (2.78) slijedi novi izraz za funkciju oblika prostornog harmonijskog vala

$$w_n(x) = A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(c_n t - x)(\mu_i + 2n\pi)/L} . \qquad (2.85)$$

Val opisan izrazom (2.85) ne zadovoljava rubne uvjete na osloncima perioda grede. Međutim slobodno gibanje pozitivno usmjerenog vala se može smatrati sumom komponenata vala sa svim mogućim kašnjenjima $\mu_i + 2n\pi$ ($n = 1 \div \pm\infty$) i kada one djeluju zajedno u odgovarajućim odnosima rubni uvjeti će biti zadovoljeni.

Ukupna funkcija oblika vala koji putuje u pozitivnom smjeru w_+(x) izračunava se iz izraza

$$w_+(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - (\mu_i + 2n\pi)x/L)} . \qquad (2.86)$$

Negativna vrijednost veličine n odgovara negativnoj faznoj brzini koja odgovara komponentama vala koje putuju u negativnom smjeru. Ukupna funkcija oblika vala koji putuje u negativnom smjeru w_-(x) može se definirati sa sličnim izrazom

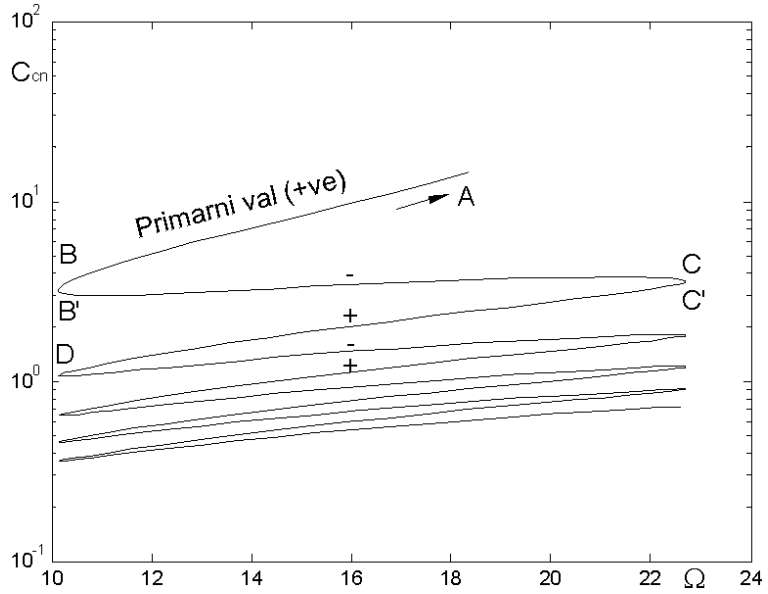
$$w_-(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n-} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + (\mu_i + 2n\pi)x/L)} \qquad (2.87).$$

koji isto ima komponente koji se gibaju u pozitivnom i negativnom smjeru.

Slobodni val sastoji se od valne grupe prostornih harmonijskih valova, u kojoj svaka sinusna komponenta vala ima različite fazne brzine. Neke komponente putuju u pozitivnom a neke u negativnom smjeru. Postojanje negativno usmjerenih valnih komponenti u pozitivno usmjerenoj grupi valova može se objasniti s refleksijama od oslonaca, koje pretvaraju pozitivan smjer gibanja energije u negativan smjer.

Na slici 2.14 prikazane su fazne brzine prostornih harmonijskih valova zamišljenog pozitivno usmjerenog vala te se na istoj koristi veličina parametar fazne brzine C_n koja se izračunava po izrazu:

$$C_{cn} = \sqrt{\frac{m_g}{EI}} L c_n = \frac{\Omega}{\mu_i + 2n\pi} . \tag{2.88}$$



Slika 2.14. *Vrijednosti faznih brzina komponenta pozitivno usmjerenog vala u prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu*

Krivulja na slici 2.14 sastoji se od segmenata koji odgovaraju segmentima na slici 2.7 uz nadopunu da su u cilju prikaza negativno i pozitivno usmjerenih faznih brzina na istom logaritamskom dijagramu uzete apsolutne vrijednosti negativnih faznih brzina te se odgovarajući segmenti točno nadovezuju između pozitivnih segmenata. Segmenti koji definiraju negativno usmjerene komponente vala označeni su s "-" na dijagramu.

Iz izraza (2.81) i (2.83) slijedi izraz za valnu duljine jedne komponente vala:

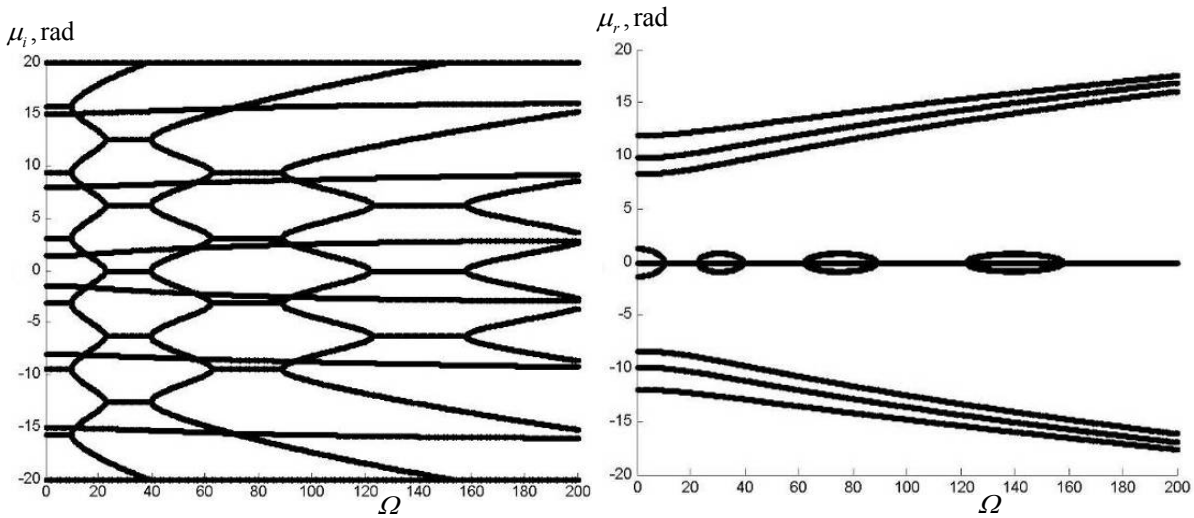
$$\lambda_n = \frac{L}{n + \frac{\mu_i}{2\pi}} \tag{2.89}$$

dok se tzv. pseudo valna duljina (2.20), ili valna duljina prostornog harmonijskog vala za kojeg je n=0 dobija iz izraza

$$\lambda_{n=0} = \frac{L}{0 + \frac{\mu_i}{2\pi}} = \frac{2\pi L}{\mu_i} . \tag{2.90}$$

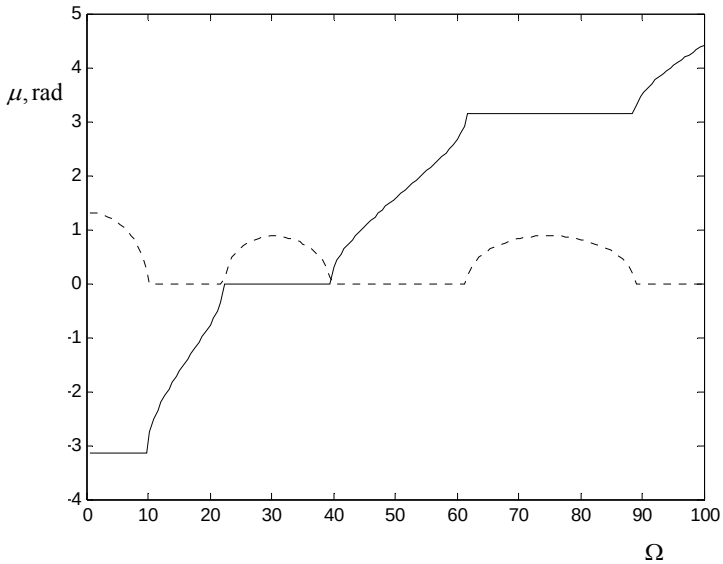
Potrebno je naglasiti da valne duljine komponenata vala ne moraju biti točni višekratnik ili djelitelj udaljenosti između oslonaca L, niti je jedna valna duljina višekratnik od druge. Navedeno se jedino događa kad je μ_i=0, 2π, 4π, itd.

Na slici 2.15 prikazane su sve vrijednosti propagacijskih konstanti koje zadovoljavaju izraz (2.74) po metodi propagacije valova.



Slika 2.15. *Realne i imaginarne vrijednosti propagacijskih konstanti (metoda propagacije valova)*

S obzirom da u 2. propagacijskom pojasu prostorni harmonijski val ima unutar jednog perioda grede jedan brijeg više nego u 1. propagacijskom pojasu i da se navedeno ponavlja u sljedećim propagacijskim pojasevima uvodi se tzv. primarna imaginarna propagacijska konstanta čije su vrijednosti prikazane na slici 2.16.



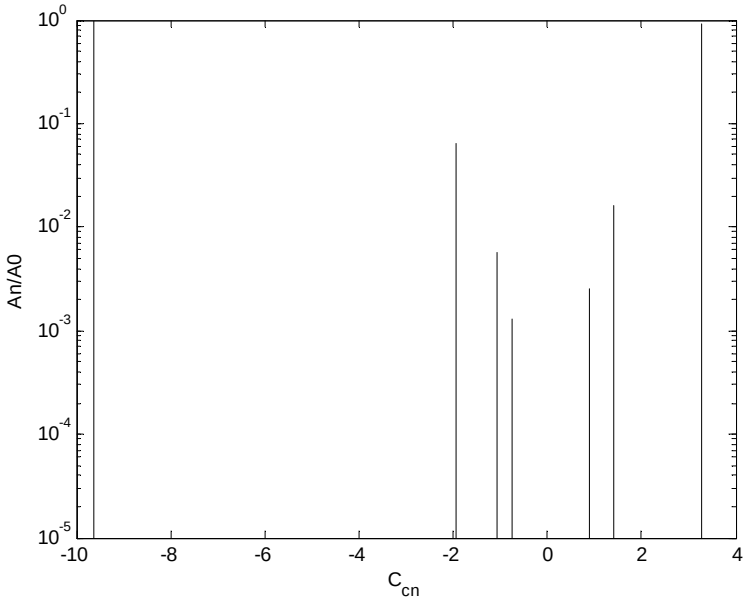
Slika 2.16. *Vrijednosti primarne imaginarne_____ i realne ..... komponente propagacijske konstante μ u funkciji parametra frekvencije*

Iz dijagrama je vidljivo da u svakom sljedećem propagacijskom pojasu dolazi do promjene faznog kuta za + π što odgovara povećanju broja brijegova za jedan unutar jednog perioda grede. Na frekvencijama koje se nalaze između frekvencijskih propagacijskih pojaseva nema propagacije valova, tj. nastaju stojni valovi, pa se ista mogu nazivati stojnim frekvencijskim pojasevima. Negativna vrijednost propagacijske konstante μ_i = -π vrijedi za prvi stojni frekvencijski pojas. U prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu imaginarna propagacijska konstanta mijenja svoju vrijednost od -π do 0, te ostaje na vrijednosti 0 unutar drugog stojnog frekvencijskog pojasa. U drugom propagacijskom frekvencijskom pojasu imaginarna propagacijska konstanta raste od 0 do π, itd.

Vrijednosti μ_i koje su prikazane na slici 2.16 nazivaju se primarnim imaginarnim vrijednostima dok su sve imaginarne vrijednosti (primarne i sekundarne) prikazane na slici 2.7.

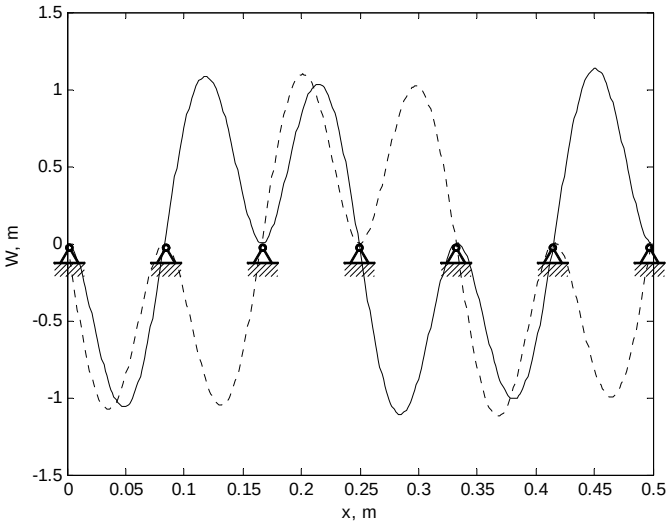
2.2.2.5.3. Dijagram prikaza grupe prostornih harmonijskih valova

Na slici 2.17 prikazani su omjeri amplituda prostornih harmonijskih valova $\frac{|A_n|}{|A_0|}$ koji čine u sumi ukupni val koji se giba u pozitivnom smjeru s parametrom frekvencije Ω=15,5 pri kojem je imaginarna propagacijska konstanta jednaka $\mu_i = \frac{\pi}{2}$.



Slika 2.17. *Omjer amplituda slobodne grupe prostornih harmonijskih valova (Ω=15.5)*

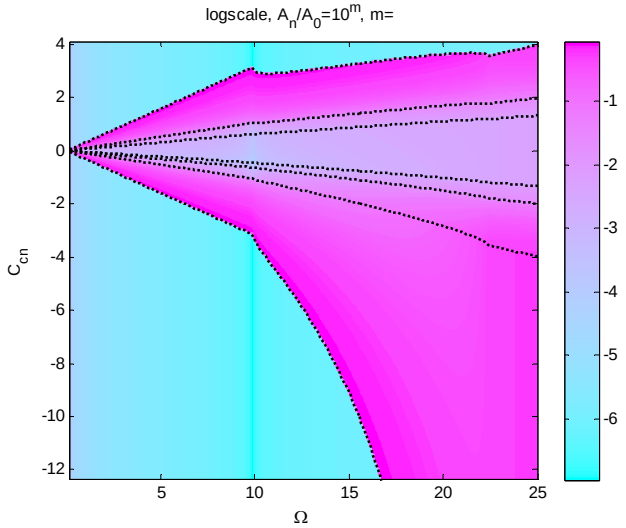
Omjer amplituda prostornih harmonijskih valova nalazi se na ordinati dijagrama a na apscisi nalaze se amplitude bezdimenzijske fazne brzine. Plus ili minus znak na dijagramu označavaju smjer prostornog harmonijskog vala (pozitivan ili negativan) grupe valova koja se zajedno giba u pozitivnom smjeru. Na slici 2.18 je prikazan trenutni oblik vibriranja na tom parametru frekvencije.



Slika 2.18. *Oblik vibriranja pri Ω=15.5: realna _____ i imaginarna komponenta -------*

Pomaci u prvom periodu grede su cca. za 90° izvan faze u odnosu na drugi period grede. Navedeni oblik se ponavlja svaka 4 perioda grede iz čega slijedi da je temeljna valna duljina grupe valova 4*L*. Valna duljina A_{-1} prostornog harmonijskog vala je 4*L*/5 kako je definirano s izrazom (2.89). Na slici 2.17 se može primjetiti da prostorni harmonijski valovi A_0 i A_{-1} imaju najveće amplitude i time nose najveću energiju i najviše oblikuju krajnji val. Navedeni prostorni harmonijski valovi putuju u suprotnim smjerovima s različitim faznim brzinama. Druge amplitude prostornih harmonijskih valova su prilično manje (na ordinati je logaritamsko mjerilo) te je potrebno primjetiti da se prostorni harmonijski valovi sličnih amplituda pojavljuju u parovima (A_{+1} i A_{-2}, A_{+2} i A_{-3}, itd.) od kojih pozitivno usmjerene komponente imaju nešto veću amplitudu.

Za prikaz grupe valova slobodnih vibracija periodički oslonjene beskonačne grede u zadanom frekvencijskom pojasu moguće je koristiti i dijagram na slici 2.19 na kojem se na apscisi nalazi frekvencija a na ordinati fazna brzina. Navedeni dijagram ima prednost u smislu da se na jednom dijagramu vide fazne brzine i amplitude grupe valova za odabrani frekvencijski pojas. U dijagramu se lako uoče valovi s povećanom amplitudom te ih se može povezati s granicama propagacijskih područja. Posebna prednost opisanog dijagrama je u usporedbi slobodnih i prisilnih vibracija koja slijedi u poglavlju 3.3.6.



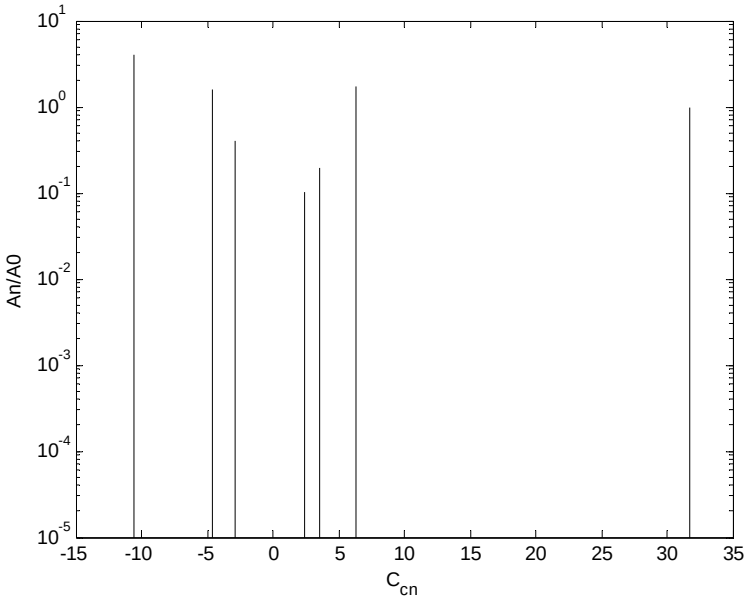
Slika 2.19. *Amplitude i fazne brzine prostornih harmonijskih valova u zadanom frekvencijskom pojasu*

Grupa slobodnih prostornih harmonijskih valova sa parametrom frekvencije Ω=12,8, sastoji se od specifične grupe valova pa ju je potrebno detaljnije analizirati. Navedeni parametar frekvencije nalazi se na donjoj granici propagacijskog frekvencijskog pojasa na kojoj imaginarna propagacijska konstanta ima veličinu $\mu_i = \pi$. Fazna brzina A_0 komponente iznosi $\frac{\omega L}{\pi}$, a fazna brzina A_{-1} komponente iznosi $-\frac{\omega L}{\pi}$, tj. radi se o faznim brzinama iste amplitude ali su valovi usmjereni u suprotnom smjeru što se vidi u predznaku fazne brzine. Isto se ponavlja i za druge parove prostornih harmonijskih valova (A_1 i A_{-2}, A_2 i A_{-3}, itd.) pa slijedi da se ukupni val sastoji od grupe parova prostornih harmonijskih valova jednakih amplituda ali suprotnih smjerova, čije su valne duljine djelitelji dvostruke udaljenosti između oslonaca ($2L$, $2L/3$, $2L/5$, itd.). Rezultatno gibanje je stojni val koji je prikazan na slici 2.5 b.

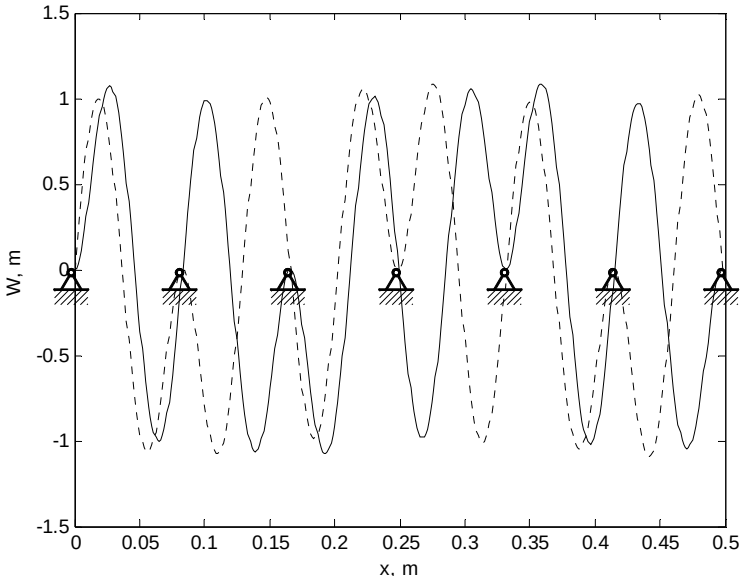
Grupa slobodnih valova na parametru frekvencije Ω= 22,4 koja se nalazi na gornjoj granici propagacijskog frekvencijskog pojasa sastoji se također od specifične grupe prostornih harmonijskih valova pa ju je potrebno detaljnije analizirati. S obzirom da je imaginarna propagacijska konstanta jednaka 0 valna duljina temeljnog vala jednaka je ∞ i takvo gibanje odgovara poprečnom pomaku krutog tijela cijele grede. Ostali prostorni harmonijski valovi imaju valne duljine L, $L/2$, $L/3$, itd. I u ovom slučaju postoje parovi prostornih harmonijskih valova jednakih amplituda i valnih duljina koji putuju u suprotnim smjerovima s jednakim faznim brzinama. Slijedi da se opet radi o stojnim valovima te je oblik vibriranja svakog perioda grede identičan prvom vlastitom obliku vibriranja jednostruke grede uklještene na oba kraja. Amplituda prostornog harmonijskog vala A_0 (poprečno gibanje grede kao krutog tijela) proporcionalna je pomaku oblika vibriranja usrednjenog u jednom periodu grede. Njezino gibanje se pretvara u nulti pomak u osloncima nakon zbrajanja svih prostornih harmonijskih valova.

2.2.2.5.4. Analiza prostornog harmonijskog vala s najvećom amplitudom

U prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu prostorni harmonijski val s najvećom amplitudom je uvjek onaj s najvećom faznom brzinom. Navedeno se mijenja u drugom propagacijskom frekvencijskom pojasu gdje je za primjer uzet val s parametrom frekvencije Ω=50,2 kod kojeg je μ_i=+π/2 (slika 2.20) dok je na slici 2.21 prikazan oblik vibriranja takvog vala.



Slika 2.20. *Omjer amplituda prostornih harmonijskih valova slobodne valne grupe (Ω=50,2)*



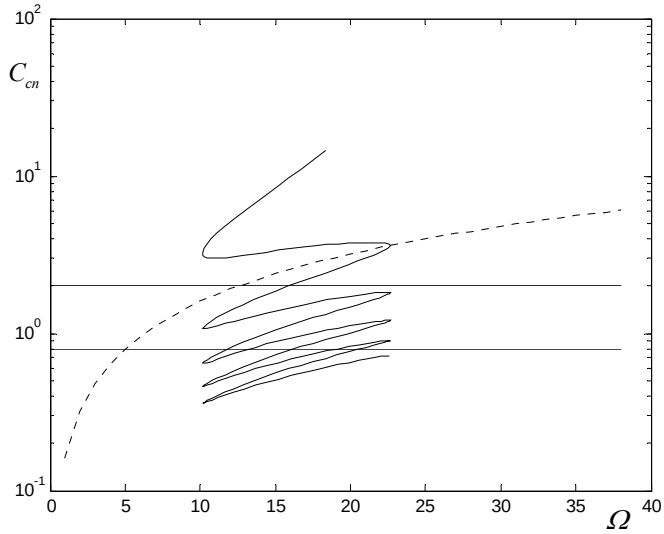
Slika 2.21. *Oblik vibriranja na Ω=50,2*

Očito je da drugi prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu tako da taj val nosi i najveću energiju. Navedeno se događa kod svih frekvencija u navedenom propagacijskom frekventnom pojasu.

U trećem propagacijskom frekventnom pojasu treći prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu. Slijedi opće pravilo da u *n*-tom propagacijskom frekvencijskom pojasu *n*-ti prostorni harmonijski val po faznoj brzini ima najveću amplitudu. Navedeno slijedi iz pripadne vrijednosti imaginarne propagacijske konstante $\pm\mu_i$ i nazivati će se primarni val valne grupe.

2.2.2.5.5. Efekt koincidencije

Ukoliko je fazna brzina prisile na zadanoj frekvenciji jednaka faznoj brzini prostornog harmonijskog vala *n* na istoj frekvenciji (horizontalna linija na dijagramu 2.22) dolazi do efekta koincidencije [74]. Efekt koincidencije može se pojaviti s bilo kojim valom iz grupe slobodnih valova, međutim, iz analize u prethodnom poglavlju slijedi da se najveći efekt koincidencije tj. najveći odziv pri postojanju efekta koincidencije pojavljuje kad primarni prostorni harmonijski val grupe sudjeluje u koincidenciji [33]. Frekvencija na kojoj se pojavljuje koincidencija može biti niža kod periodički oslonjene negoli kod neoslonjene grede. Na slici 2.22 su prikazane fazne brzine prostornih harmonijskih valova beskonačne neoslonjene i periodički oslonjene grede.



Slika 2.22. *Fazna brzina slobodnih valova u neoslonjenoj gredi --------- i u periodički oslonjenoj gredi _____ (horizontalne linije predstavljaju faznu brzinu prisile C_{cn1}=0,8 i C_{cn2}=2)*

Uz pretpostavku da fazna brzina pobude odgovara nedimenzionalnom parametru fazne brzine C_{cn}=2 akustička koincidencija bi se u neoslonjenom panelu pojavila na parametru frekvencije Ω=12,5, a u periodički oslonjenom panelu na parametru frekvencije Ω=16.

S druge strane na niskoj faznoj brzini prisilnog vala (C_{cn}=0,8) moguća je koincidencija sa šest različitih prostornih harmonijskih valova valne grupe (horizontalni pravac se siječe s krivuljom raznih brzina slobodnog odziva u šest točaka). Tri od navedenih šest prostornih harmonijskih valova pripadaju grupi pozitivno usmjerenih prostornih harmonijskih valova (Ω_1=12, Ω_2=15,5 i Ω_3=18,5) a tri grupi negativno usmjerenih valova (Ω_4=13, Ω_5=19 i Ω_6=21). Ovi valovi su samo slabo pobuđeni pod zadanim uvjetima s obzirom da se ne radi o primarnom valu, međutim nepovoljne velike promjene pojaviti će se u odzivu.

Uz opisan glavni efekt koincidencije pojavljuje se i dodatno pobuđena koincidencija ostalih prostornih harmonijskih valova iz grupe valova jer je događaj glavne koincidencije unio u sustav energiju koja se manifestira u pojavljivanju povećanih amplituda vibracija ostalih prostornih harmonijskih valova u grupi. Očito je da amplituda postojećeg fleksijskog vala u panelu raste ukoliko je frekvencija pobude bliska frekvenciji na kojoj postoji povećan slobodni odziv ali isto tako raste i amplituda prostornih harmonijskih valova koji su dio slobodnog odziva s time da se frekvencije takvog odziva udaljavaju od frekvencija slobodnog odziva pri rastu upadnog kuta.

Slijedi da se faznom brzinom prisile jednog iznosa može pobuditi prostorni harmonijski val odziva koji ima faznu brzinu drugog iznosa, veću ili manju od fazne brzine prisile što negativno utječe na zvučne transmisijske gubitke kroz takve pregrade.

Fazna brzina prisilnog prostornog harmonijskog vala može biti puno veća nego fazna brzina slobodnog fleksijskog vala u neoslonjenoj gredi na istoj frekvenciji. Navedeno omogućuje da se efekt koincidencije može dogoditi na puno nižoj frekvenciji kod periodički oslonjene grede nego kod neoslonjene grede.

Sporiji val može biti pobuđen prisilnim poljem jednake fazne brzine ali isti će ujedno pobuditi brže prostorne harmonijske valove u njegovoj valnoj grupi. Iz toga je moguće izvesti zaključak da prisilna akustička polja faznih brzina nižih od faznih brzina slobodnih valova u strukturi mogu pobuditi prostorne harmonijske valove viših faznih brzina koji imaju veliku radijaciju zvuka što smanjuje zvučne transmisijske gubitke i time je nepovoljno.

2.3. Akustički odziv beskonačnog nedeformabilnog panela na okomite ravninske valove

Kako je opisano u uvodu, jedna od osnovnih metoda za smanjenje transmisije zvuka kroz panel je postizanje refleksije od iste pomoću unosa velike promjene u akustičkoj impedanci na putu transmisije.

Akustička impedanca Z_a (ili zvučna impedanca) je parametar koji ovisi o frekvenciji f i definira se izrazom

$$Z_a = \frac{p_a}{vA_a} \tag{2.91}$$

gdje je p_a akustički tlak, v brzina čestice medija a A_a površina kroz koju akustički val frekvencije f prolazi i na koju je brzina čestice okomita.

Specifična akustička impedanca z je omjer akustičkog tlaka p_a i brzine čestice v na zadanoj frekvenciji

$$z = \frac{p_a}{v} = Z_a A_a \,. \tag{2.92}$$

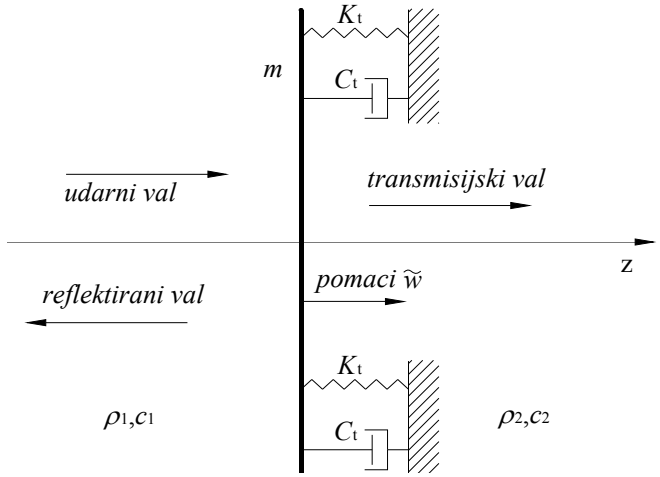
U literaturi se pojavljuje još i karakteristična specifična akustička impedanca z_0 koja je karakteristika medija kroz koji prolazi val i izračunava se iz izraza

$$z_0 = \rho c \tag{2.93}$$

gdje je ρ gustoća medija a c brzina širenja longitudinalnog vala kroz medij.

Idealizirani model transmisije zvuka kroz panel [30] sastoji se od kontinuiranog beskonačnog nedeformabilnog panela s definiranom masom po jedinici površine m_p koji leži na viskozno prigušenom elastičnom ovjesu po cijeloj svojoj površini (slika 2.23). Za elastični ovjes su definirane veličine krutosti K_t i prigušenja C_t po jedinici površine. Navedeni model predstavlja približno rješenje za transmisiju zvuka kroz ploču (gredu) koji vibrira u 1. vlastitom obliku vibriranja.

Efekti koji nastaju pri transmisiji zvuka kroz panel uzrokuju promjene u okolnom mediju koje su uključene u model. Panel odvaja fluide različitih karakterističnih specifičnih akustičkih impedanci, $\rho_1 c_1$ i $\rho_2 c_2$.



Slika 2.23. *Idealizirani model normalne transmisije zvuka kroz jednostruki panel*

Spomenuti model pretpostavlja ravninski zvučni val okomit na panel koji se može opisati izrazom

$$p_u\left(z,t\right)=\tilde{A}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_1 z)} \tag{2.94}$$

gdje je $k_1=\omega/c_1$ broj udarnog vala.

Akustičko polje tlakova vala koji se reflektira od panela definira se izrazom

$$p_r\left(z,t\right)=\tilde{B}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+k_1 z)}. \tag{2.95}$$

Amplitude $\tilde{A}_1$ i $\tilde{B}_1$ su povezane s normalnom brzinom čestice zraka na lijevoj strani panela, koja je jednaka normalnoj brzini panela $\mathrm{i}\omega\tilde{w}$ pa slijedi jednakost

$$\tilde{A}_1-\tilde{B}_1=\mathrm{i}\omega\rho_1 c_1\tilde{w}. \tag{2.96}$$

Polje akustičkog tlaka nastalo pri radijaciji u negativnom smjeru osi z zbog pomaka $\tilde{w}$ definira se izrazom

$$p_r^-\left(z,t\right)=\tilde{C}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+k_1 z)} \tag{2.97}$$

gdje je $\tilde{C}_1=-\mathrm{i}\omega\rho_1 c_1\tilde{w}$.

Odgovarajući val nastao pri radijaciji u pozitivnom smjeru osi z definira se izrazom

$$p_r^+\left(z,t\right)=\tilde{C}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-k_2 z)} \tag{2.98}$$

gdje je

$$\tilde{C}_2=-\mathrm{i}\omega\rho_2 c_2\tilde{w} \tag{2.99}$$

i $k_2=\omega/c_2$. Ova polja nazivaju se poljima radijacije.

Na temelju jednadžbi (2.94), (2.95) i (2.96) polje ukupnog akustičkog tlaka s lijeve strane panela izračunava se iz izraza

$$\begin{aligned} p^{-}(z,t) &= \tilde{A}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)} + \left(\tilde{A}_1 - \mathrm{i}\omega\rho_1 c_1 \tilde{w}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 z)} \\ &= 2\tilde{A}_1 \cos(k_1 z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}\omega\rho_1 c_1 \tilde{w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 z)}. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Jednadžba (2.100) može se napisati koristeći jednadžbu (2.97) pa onda glasi

$$p^{-}(z,t) = 2\tilde{A}_1 \cos(k_1 z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \tilde{C}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 z)}. \tag{2.101}$$

Prvi član u prethodnom izrazu predstavlja stojno interferentno polje nastalo prilikom udara o nepomični panel te refleksije od njega pa se isto može nazvati zaustavljeno akustičko polje. Drugi član predstavlja akustičko polje nastalo pri gibanju panela. Ukupno polje s transmisijske strane panela u pozitivnom smjeru definirano je izrazom (2.98).

Jednadžba gibanja panela glasi

$$m_p \ddot{w} + C_t \dot{w} + K_t w = p\left(z = 0^{-}, t\right) - p\left(z = 0^{+}, t\right) \tag{2.102}$$

gdje se $z = 0^{-}$ i $z = 0^{+}$ referiraju na akustičke tlakove s lijeve i desne strane panela. Uvrštavanjem jednadžbi (2.98) i (2.100) u prethodni izraz dobiva se slijedeći oblik jednadžbe gibanja panela

$$\left(-\omega^2 m_p + \mathrm{i}\omega C_t + K_t\right)\tilde{w} = 2\tilde{A}_1 - \mathrm{i}\omega\rho_1 c_1 \tilde{w} - \mathrm{i}\omega\rho_2 c_2 \tilde{w}. \tag{2.103}$$

Član koji slijedi iz radijacije u ukolni fluid čija masa utječe na gibanje samog panela (eng. *fluid-loading*) nalazi se s desne strane jednadžbe (2.103) i može se priključiti lijevoj strani u kojoj su članovi koji opisuju panel u vakumu pa se dobiva izraz

$$\left(-\omega^2 m_p + \mathrm{i}\omega\left(C_t + \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2\right) + K_t\right)\tilde{w} = 2\tilde{A}_1. \tag{2.104}$$

Član koji predstavlja prigušenje zbog radijacije dodaje se mehaničkom prigušenju. Ukoliko se lijevi dio izraza (2.104) izrazi pomoću brzine čestice

$$\tilde{v} = \mathrm{i}\omega\tilde{w} \tag{2.105}$$

umjesto s pomakom $\tilde{w}$ izraz (2.104) može se napisati u obliku

$$\left(\mathrm{i}\left(\omega m_p - \frac{K_t}{\omega}\right) + \left(C_t + \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2\right)\right)\tilde{v} = 2\tilde{A}_1 \tag{2.106}$$

ili

$$\left(\tilde{z}_p + \tilde{z}_f\right)\tilde{v} = 2\tilde{A}_1 \tag{2.107}$$

gdje je $\tilde{z}_p$ specifična akustička impedanca u vakumu (eng. *in-vacuo impedance*) a $\tilde{z}_f$ specifična akustička impedanca zbog gibanja u fluidu (eng. *fluid-loading impedance*).

Član s desne strane jednakosti $2\tilde{A}_1$ u izrazu (2.107) je amplituda prisile na nepomični panel u obliku polja akustičkog tlaka. Izraz (2.107) upućuje da se odziv panela $\tilde{v}$ iz kojeg slijedi transmisija normalnih ravninskih valova kroz beskonačni nedeformirani panel može izračunati iz akustičkog tlaka udarnog akustičkog polja uz zaustavljenu površinu panela, karakteristika medija s obje strane panela i karakteristika ovjesa panela. Takvo rastavljanje ukupnog polja je primjenjivo za sve elastične strukture uronjene u fluid (eng. *fluid-loaded*), međutim u većini praktičnih slučajeva analiza je mnogo složenija od ovog jednostavnog jednodimenzionalnog modela. Iz jednadžbi (2.99), (2.105) i (2.107) slijedi

$$\tilde{C}_2 = \rho_2 c_2 \tilde{v} = \frac{2\tilde{A}_1 \rho_2 c_2}{\tilde{z}_p + \tilde{z}_f} = \frac{2\tilde{A}_1}{\mathrm{i}\left(\omega m_p - \frac{K_t}{\omega}\right)\rho_2 c_2 + \left(\frac{C_t}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + 1\right)}. \tag{2.108}$$

Koeficijent transmisije zvučne snage τ definira se kao omjer transmisijske Π_t i udarne zvučne snage Π_u. Zvučna snaga se u slučaju okomitog udara izračunava iz umnoška zvučnog intenziteta I i površine na koju zvuk djeluje A a s obzirom da obje strane panela imaju jednake površine one se pokrate dok se intenziteti definiraju iz amplituda akustičkog tlaka ($\tilde{A}_1$ i $\tilde{C}_2$) i karakteristika medija s obje strane panela ρ i c pa slijedi krajnji izraz

$$\tau = \frac{\Pi_t}{\Pi_u} = \frac{I_t \cancel{A}}{I_u \cancel{A}} = \frac{\frac{\left|\tilde{C}_2\right|^2}{2\rho_2 c_2}}{\frac{\left|\tilde{A}_1\right|^2}{2\rho_1 c_1}} = \frac{4\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}{\left(\frac{\omega m_p - \frac{K_t}{\omega}}{\rho_2 c_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_1 m_p \eta_V}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + 1\right)^2}. \tag{2.109}$$

Prigušenje C_t definira se izrazom

$$C_t = \omega_1 m_p \eta_V \tag{2.110}$$

gdje je η_V koeficijent gubitaka u vakumu (eng. *in-vacuo loss factor*) a $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_t}{m_p}}$ je vlastita frekvencija vibriranja neprigušenog panela.

Zvučne transmisijske gubitke definira se s veličinom *TL* (ponekad se naziva i STL, eng. *sound transmission loss*) koja se definira izrazom

$$TL = 10\log_{10}\left(\frac{1}{\tau}\right), \text{ dB}. \tag{2.111}$$

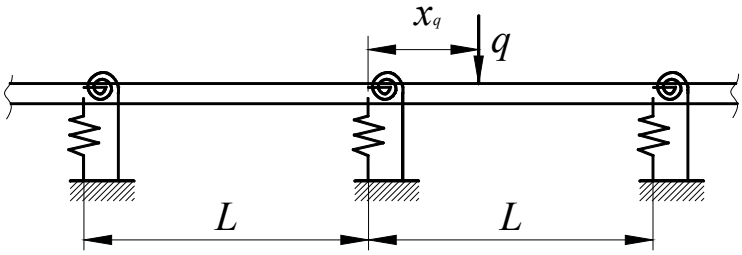
U slučaju kad se zvučni transmisijski gubici *TL* odnose na transmisiju zvuka između dvije sobe onda se on naziva indeks zvučne izolacije *R* (eng. *sound reduction index*). U praksi se koriste i pojmovi izolacijska moć pregrade i prigušenje zvuka.

2.4. Akustički odziv beskonačne periodički oslonjene grede

S obzirom na prirodu prisilnih vibracija uobičajeno je očekivati da je odziv konstrukcije u potpunosti kontroliran sa tipom prisile, u smislu da će konstrukcija vibrirati s frekvencijom prisile uz razlike u amplitudi i fazi s obzirom na mjesto djelovanja sile. Kod beskonačne periodički oslonjene grede pri djelovanju prisile u jednom periodu grede zbog niza refleksija od oslonaca odziv u ostalim periodima grede jednak je slobodnom vibriranju grede. Tek ukoliko prisila djeluje na cijelu periodički oslonjenu gredu akustički odziv grede je pod kontrolom akustičkog polja što se vidi u načinu definiranja propagacijskih konstanti.

2.4.1. Definiranje propagacijskih konstanti

Neka je jedan od perioda grede (slika 2.24) opterećen sa silom $q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ u točki na udaljenosti x_q od lijevog oslonca. Navedena sila stvara polje pomaka u opterećenom periodu grede iz kojeg se mogu izračunati druge veličine odziva. U svim drugim neopterećenim periodima jedini pobuđeni odziv prenešen je kroz oslonce s valnom grupom koja se širi iz opterećenog perioda grede lijevo i desno, s karakterističnom propagacijskom konstantom μ koja ima različite vrijednosti na pojedinim frekvencijama koje ne ovise o rasporedu prisile u opterećenom periodu već o frekvenciji i fizikalnim karakteristikama grede i oslonaca. Oblik vibriranja ne ovisi o prirodi opterećenja u opterećenom periodu grede ali omjer amplituda susjednih oblika vibriranja da.



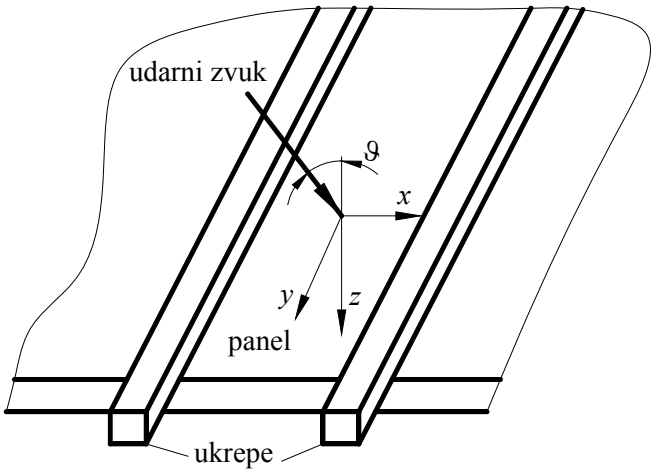
Slika 2.24. *Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima s harmonijskom prisilom u jednoj točki*

Nakon izračuna propagacijske konstante ($\mu=\mu_\mathrm{r}+\mu_\mathrm{i}i$), moguće je odrediti rubne uvjete za opterećeni period grede i odziv opterećenog perioda grede, zajedno s odzivom u svim točkama beskonačne periodički oslonjene grede. Izvan pobuđenog perioda grede gibanje valova je potpuno slobodno i određeno rubnim uvjetima u osloncima.

Ukoliko na cijelu beskonačnu periodično oslonjenu gredu djeluje ravninsko akustičko polje pod zadanim upadnim kutem propagacijska konstanta određuje se iz izraza

$$\mu = k_x(\omega)L - \mathrm{i}\psi(\omega)L \tag{2.112}$$

gdje je ω kružna frekvencija, Ψ je koeficijent faznog prigušenja a k_x je komponenta broja vala po x-osi.



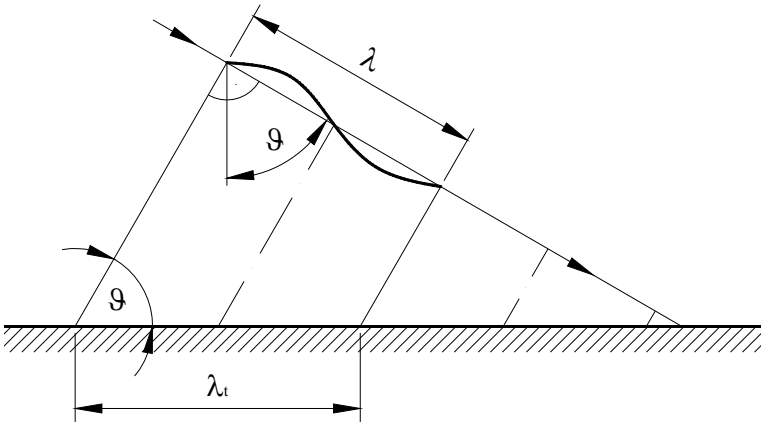
Slika 2.25. *Prostorni prikaz panela oslonjenog u jednom smjeru pod utjecajem ravninskog akustičkog vala s upadnim kutem* ϑ

Na temelju slike 2.25 komponente broja vala k_x i k_z mogu se odrediti iz izraza:

$$\begin{aligned} k_x &= k\sin\vartheta \quad \text{i} \\ k_z &= k\cos\vartheta \end{aligned} \tag{2.113}$$

gdje je $k=\omega/c$ broj vala udarnog vala, c je brzina zvuka a ϑ je upadni kut ravninskog vala u x-z ravnini. U ovom izračunu pretpostavlja se da je fronta vala okomita na ravninu x-z tj. da je vektor broja vala unutar ravnine x-z.

Upadni kut vala definira valnu duljinu vala u gredi (eng. *trace wave*) na slici 2.26.



Slika 2.26. *Definicija valne duljine tzv. trace vala pri zadanom upadnom kutu* ϑ

Valna duljina tzv. trace vala može se odrediti na temelju prikaza valnih fronti ravninskog vala na slici 2.26 po izrazu:

$$\lambda_t = \lambda_x = \frac{\lambda}{\sin \vartheta} \tag{2.114}$$

iz kojeg slijede izrazi za broj fleksijskog vala u panelu

$$k_x = k \sin \vartheta \tag{2.115}$$

i za faznu brzinu fleksijskog vala u panelu

$$c_x = \frac{c}{\sin \vartheta} . \tag{2.116}$$

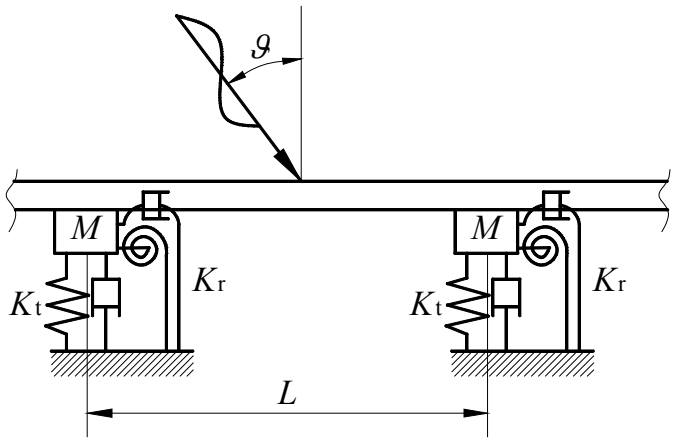
Preklapanje vrijednosti valne duljine slobodnog vala u gredi i valne duljine vlastitog oblika fleksijskih vibracija uzrokuje nastanak velike propusnosti panela (kaže se da je panel u tom slučaju akustički transparentan).

2.4.2. Rješavanje pomoću metode virtualnog rada i metode propagacije valova

Kako je već napomenuto u uvodu, u ovoj disertaciji cilj je izračunati akustički odziv pravokutnog panela koji je periodički oslonjen sa što jednostavnijim modelom da se dobije optimalna brzina izračuna i zadrži dovoljna točnost. U slučaju kad se radi o ravninskim prisilnim valovima akustičkog polja i kad je visina perioda panela najmanje 3 puta veća od njegove širine [26] beskonačni periodički oslonjen panel može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda pa je ona uzeta za osnovni model.

S obzirom da se prisilno akustičko polje smatra harmonijskim i ravninskim i da se analizira beskonačna periodički oslonjena greda koristit će se metoda propagacije valova za definiranje prisile i odziva. Pod djelovanjem jednog od navedenih valova odziv u jednoj točki perioda grede mora biti identičan odzivu u točki susjednog perioda grede koja se nalazi na udaljenosti jednakoj udaljenosti oslonaca od početne točke uz postojanje fazne razlike jednake faznoj razlici između akustičkih tlakova u tim točkama. Navedeni odziv može se prikazati s konačnom grupom prostornih harmonijskih valova. Relativne amplitude pojedinih valova u valnoj grupi procijenjene su u analizi i pokazano je da manji dio valova primjetno utječe na ukupni odziv na zadanoj frekvenciji.

Izračun propagacijske konstante slobodnog gibanja valova u periodično oslonjenoj gredi nije potreban kod određivanja prisilnog odziva za slučaj kad prisila djeluje na cijelu gredu (vidi poglavlje 2.4.1).



Slika 2.27. *Geometrijske karakteristike beskonačne periodički oslonjene grede*

Ravninski val udara o ravnu gredu periodično oslonjenu na oslonce, te stvara reflektirane valove, gibanje grede i transmisijske valove. Na transmisijskoj strani nema reflektiranih valova od okoline.

Zbog periodične prirode sustava očekuje se da će odziv sustava isto biti periodičan. Temeljem takvih pretpostavki poprečno se gibanje grede na slici 2.27 može opisati kao red prostornih harmonijskih valova s izrazom (2.63) [26]

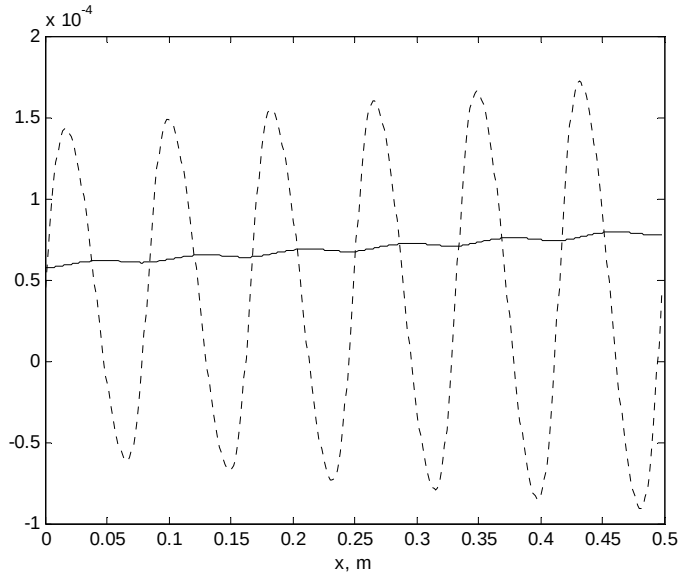
$$w(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

gdje je $w(x,t)$ poprečno gibanje grede, koeficijenti A_n su amplitude oblika vibriranja grede, L je udaljenost između oslonaca i μ je karakteristična propagacijska konstanta prisilnog akustičkog polja.

Periodičnost odziva unešena je u rješenje tj. jednadžbu (2.63) sa sumom po članu n pa je strukturni val definiran kao suma prostornih harmonijskih valova označenih s indeksom $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$, za naprijed i nazad usmjerene valove, koji predstavljaju refleksije od oslonaca. Svaki od prostornih harmonijskih valova ne zadovoljava rubne uvjete ali njihova suma da.

Na slici 2.28 prikazano je rješenje odziva s definiranim vrijednostima A_n, μ, n, L te tangens kuta nagiba tangente (zakreta) za sve prikazane točke grede po izrazu

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (-\mathrm{i})(\mu + 2n\pi)/L \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \quad . \tag{2.117}$$



Slika 2.28. *Nagib tangente na elastičnu liniju grede* ------- (θ, rad) *i oblik prisilnog vibriranja grede* _____ (w, m)

Iz slike 2.28 vidljivo je da se s prikazom zakreta jasnije vidi oblik vibriranja što je osobito važno kad se oslonci poprečno gibaju.

Iz upadnog kuta vala u zraku i iz reflektiranog vala koji se definira iz gibanja grede slijedi određivanje komponenata brzine i određivanje potencijala brzine. Potencijal brzine u nekoj točki s upadne strane grede sastoji se od potencijala upadnog i reflektiranog vala. Za reflektirani val se pretpostavlja da je prostorno periodičan pa je valni potencijal brzina $\Phi_1(x,z,t)$ opisan s ovim izrazom

$$\Phi_1\left(x,z,t\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left((\mu/L)x+k_{z0}z-\omega t\right)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x-k_{zn}z-\omega t\right)} \tag{2.118}$$

gdje prvi član izraza predstavlja potencijal upadnog vala jedinične amplitude a drugi član izraza predstavlja reflektirani val. Za $\Phi_2(x,z,t)$, potencijal brzine na transmitiranoj strani panela, se isto pretpostavlja periodičnost, pa se definira izrazom

$$\Phi_2\left(x,z,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x-k_{zn}z-\omega t\right)} \quad . \tag{2.119}$$

U jednadžbama (2.118) i (2.119), k_{zn} je broj vala (n-tog prostornog harmonijskog vala...2nπ) u z- smjeru, te se on može izračunati iz izraza

$$k_{zn}=\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}_{k^2}-\underbrace{\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)^2}_{k_{xn}^2}} \tag{2.120}$$

koji slijedi iz izraza za ukupni broj vala

$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 . \tag{2.121}$$

Koeficijenti B_n i C_n mogu se smatrati amplitudama oblika vibriranja reflektiranog i transmisijskog vala. Amplitude vlastitih oblika vibriranja reflektiranog i transmisijskog vala povezuju se s onima od strukturnog vala uzimajući u obzir rubne uvjete poprečnih brzina [68].

Na koordinati z=0 vrijedi

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \mathrm{i}\omega w \quad \text{i} \tag{2.122}$$

$$-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \mathrm{i}\omega w . \tag{2.123}$$

Uvrstivši jednadžbe (2.63), (2.118) i (2.119) u jednadžbe (2.122) i (2.123) dobijaju se izrazi

$$\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{zn} B_n \mathrm{e}^{\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} - k_{z0} \mathrm{e}^{-(\mu/L)x} = 0 \quad \text{i} \tag{2.124}$$

$$\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{zn} C_n \mathrm{e}^{\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x} = 0 . \tag{2.125}$$

Jednadžbe (2.124) i (2.125) vrijede za sve vrijednosti varijable x iz čega se izračunava odnos između amplituda oblika vibriranja.

Jednadžba (2.124) daje dva rješenja koeficijenta B_n

$$B_n = 1 - \omega \frac{A_n}{k_{zn}}, \text{ kad je } n = 0 \quad \text{i} \tag{2.126}$$

$$B_n = -\omega \frac{A_n}{k_{zn}}, \text{ kad je } n \neq 0 \tag{2.127}$$

dok iz jednadžbe (2.125) slijedi

$$C_n = \omega \frac{A_n}{k_{zn}} . \tag{2.128}$$

Iz izraza (2.126), (2.127) i (2.128) vidljivo je da se koeficijenti B_n i C_n mogu izračunati iz koeficijenta A_n pa se u nastavku opisuje postupak izračuna koeficijenta A_n.

Po principu virtualnog rada (vidi poglavlje 2.2.2.2) ukupan rad učinjen na jednom periodu grede mora biti jednak nuli za sve virtualne pomake (2.66) [26]

$$\delta w = \delta A_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x-\omega t\right)}$$

s time da u ovom slučaju jednadžba gibanja perioda grede iznosi

$$D\frac{d^4 w}{dx^4} - m_g \omega^2 w - \mathrm{i}\omega\rho_0\left(\Phi_1 - \Phi_2\right) = 0 \tag{2.129}$$

gdje je $D=EI$ fleksijska krutost grede (2.77, 2.65), m_g masa perioda grede po jedinici duljine a ρ_0 je gustoća zraka. Zadnji član u prethodnoj jednadžbi (2.129) je član koji omogućuje povezivanje akustičkih i strukturnih valova.

Virtualni rad kojeg vrši greda može se prikazati ovim izrazom:

$$\delta W_p = \int_{x=0}^{L}\left(D\frac{d^4 w}{dx^4} - m_g \omega^2 w - \mathrm{i}\omega\rho_0\left(\Phi_1 - \Phi_2\right)\right)\delta w^* \tag{2.130}$$

gdje δw^* predstavlja kompleksno konjugirani virtualni pomak iz jednadžbe (2.66)

$$\delta w^* = \delta A_m^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}. \tag{2.131}$$

Za slučaj kad je x=0 kompleksno konjugirani virtualni pomak δw^* jednak je δA_m^*.

Uvrštavanjem jednadžbi (2.118) i (2.119) u jednadžbu (2.130) može se odrediti izraz za virtualni rad učinjen s panelom

$$\begin{aligned}\delta W_p = \delta A_m^* \Bigg\{ & \int_0^L D\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)^4 A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}\mathrm{d}x \\ & - \int_0^L \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_g \omega^2 A_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}\mathrm{d}x \\ & - \int_0^L \mathrm{i}\omega\rho_0\Bigg[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mu/L)x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{z0}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{zn}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2n\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\mu+2m\pi)/L\right]x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{zn}z}\Bigg]\mathrm{d}x\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.132}$$

Virtualni rad poprečne i fleksijske opruge te točkaste mase na koordinatama oslonca već su izračunati pri rješavanju slobodnih vibracija što je rezultiralo s izrazima (2.68), (2.69) i (2.70) redom.

Prema principu virtualnog rada ukupnog sustava potrebno je da suma virtualnih radova bude jednaka 0

$$\delta W_p + \delta W_t + \delta W_r + \delta W_M = 0.$$

Izračunavši integrale u δW_p jednadžba (2.71) dobiva oblik

$$\left[D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2\right]A_m + \left(\frac{K_t}{L}-\frac{\omega^2 m_M}{L}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n + \frac{K_r}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)$$
$$= \mathrm{i}\omega\rho_0\left[B_m - C_m + 1\right], \quad \text{kad je } m=0 \text{ i}$$
$$= \mathrm{i}\omega\rho_0\left[B_m - C_m\right], \quad \text{kad je } m\neq 0. \tag{2.133}$$

Slijedom uvrštavanja odnosa između amplituda oblika vibriranja (A_n, B_n i C_n) definiranih u jednadžbama (2.126 i 2.127) i (2.128), jednadžba (2.133) dobiva novi oblik

$$\left[D\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\rho_0\omega^2\mathrm{i}}{k_{zm}}\right]A_m + \left(\frac{K_t}{L}-\frac{\omega^2 m_M}{L}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n + \frac{K_r}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\left(\frac{\mu+2n\pi}{L}\right)\left(\frac{\mu+2m\pi}{L}\right)$$
$$= 2\omega\rho_0\mathrm{i}, \quad \text{kad je } m=0 \text{ i}$$
$$= 0, \quad \text{kad je } m=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4... \tag{2.134}$$

Analiza virtualnog rada za bilo koji period grede dovela bi do identičnog skupa jednadžbi.

2.4.2.1. Rješavanje matrične jednadžbe prisilnih vibracija

Postupak rješavanja uključuje ispisivanje izraza (2.134) u matričnom obliku i određivanje koeficijenata A_n. Matrice imaju oblik (2.135) za slučaj kad je dokazano da rješenje konvergira s pet prostornih harmonijskih valova. Slijedi da su indeksi pojedinih harmonika n i m=-2, -1, 0, 1, 2 za jednadžbu (2.72) iz kojih će slijediti izračun koeficijenata A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1 i A_2. Oblik matrične jednadžbe prisilnih vibracija je

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' & E' \\ & F' & G' & H' & I' \\ & & J' & K' & L' \\ & & & M' & N' \\ \textit{simetrično} & & & & O' \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{VR}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{-2} \\ A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} \tag{2.135}$$

gdje se koeficijenti u matrici definiraju po izrazima

$$A' = \left[D\left(\frac{\mu+2(-2)\pi}{L}\right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0\mathrm{i}}{k_{z-2}}\right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu+2(-2)\pi}{L}\right)^2,$$

$$F' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0 \mathrm{i}}{k_{z-1}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(-1)\pi}{L} \right)^2,$$

$$J' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0 \mathrm{i}}{k_{z0}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(0)\pi}{L} \right)^2,$$

$$M' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0 \mathrm{i}}{k_{z1}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(1)\pi}{L} \right)^2,$$

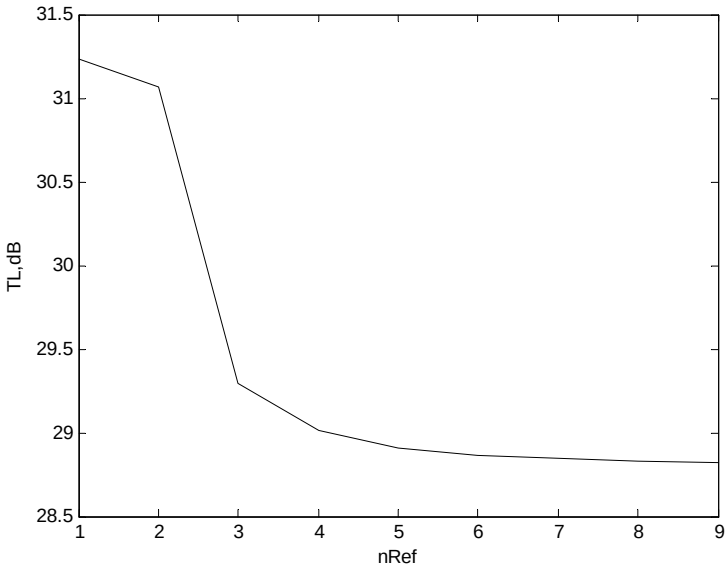
$$O' = \left[D\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^4 - m_g\omega^2 + \frac{2\omega^2\rho_0 \mathrm{i}}{k_{z2}} \right] + \frac{K_t}{L} - \frac{\omega^2 m_M}{L} + \frac{K_r}{L}\left(\frac{\mu + 2(2)\pi}{L} \right)^2 \quad \mathrm{i}$$

$$P' = \mathrm{i}2\omega\rho_0$$

dok su koeficijenti B', C', D', E', G', H', I', K', L' i N' već navedeni u poglavlju 2.2.2.3.

2.4.2.2. Konvergencija rezultata

S obzirom da je rješenje dobiveno u obliku reda, potrebno je upotrijebiti dovoljan broj prostornih harmonijskih valova da bi rješenje konvergiralo. Jednom kada rješenje počne konvergirati na zadanoj frekvenciji, može se pretpostaviti da će konvergirati na svim nižim frekvencijama po literaturi [32] (slika 2.29) ali konvergencija ovisi i o prigušenju u sustavu što je opisano u poglavlju 3.3.1. Navedeno vrijedi i za izračun slobodnih vibracija.



Slika 2.29. *Konvergencija rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka TL*

2.4.2.3. Koeficijent transmisije zvučne snage

Nakon izračuna koeficijenata A_n, B_n i C_n slijedi izračun udarnog okomitog intenziteta [32] po izrazu

$$I_u = \frac{\omega\rho_0 k_{z0}}{2} \tag{2.136}$$

i transmisijskog okomitog intenziteta po izrazu

$$I_t = \frac{\omega\rho_0}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2 \mathrm{Re}\left[k_{zn}\right] \tag{2.137}$$

iz kojih slijedi koeficijent transmisije zvučne snage po izrazu

$$\tau_b\left(\vartheta\right) = \left|\frac{I_t}{I_u}\right| \tag{2.138}$$

gdje je ϑ upadni kut.

Za izračun srednjeg zvučnog transmisijskog gubitka TL_{sr} za difuzno zvučno polje koeficijent transmisije zvučne snage $\tau(\vartheta)$ se usrednjuje po izrazu (2.139)[73]

$$\overline{\tau} = \frac{\int_0^{\vartheta_{\lim}} \tau_b\left(\vartheta\right)\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta}{\int_0^{\vartheta_{\lim}} \sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta} \tag{2.139}$$

gdje je $\vartheta_{\lim}$ upadni kut iznad kojeg se ne očekuje utjecaj upadnog vala na gredu. U literaturi [32] $\vartheta_{\lim}$=72° dok se u literaturi [73] navodi da $\vartheta_{\lim}$ može biti u rasponu od 70 do 85°. Analiza upadnog kuta $\vartheta_{\lim}$ nastavlja se u poglavljima 2.5.1 i 3.3.7.

Usrednjeni zvučni transmisijski gubitak TL_{sr} se dobiva iz izraza

$$TL_{sr} = 10\log_{10}\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right). \tag{2.140}$$

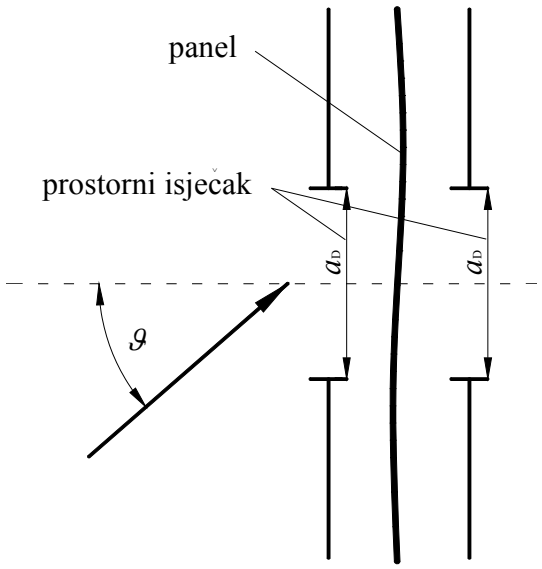
2.5. Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela

Akustički odziv konačnog periodički oslonjenog panela izračunati će se iz akustičkog odziva beskonačne periodički oslonjene grede koja predstavlja panel koristeći metodu prostornog isječka (eng. *spatial windowing*) [59].

2.5.1. Metoda prostornog isječka

Cilj metode je iz izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka za beskonačnu periodički oslonjenu gredu koja predstavlja panel, valnom metodom dobiti rezultate veće točnosti s boljim podudaranjem s eksperimentalnim rezultatima kod konačnih periodički oslonjenih panela.

Najčešći način smanjenja razlika između eksperimentalnih rezultata i valne metode je ograničenje maksimalnog upadnog kuta difuznog akustičkog polja a što nakon usrednjavnja daje bolje podudaranje sa eksperimentalnim rezultatima (2.139) [73], međutim, navedena metoda ne uključuje konačne dimenzije panela u svoj izračun što ju čini nekompletnom za temu disertacije.



Slika 2.30. *Shematski prikaz metode prostornog isječka*

Metoda prostornog isječka sastoji se iz isjecanja dijela prisilnog akustičkog polja koji se nalazi uz konačni panel (gredu), izračuna vibracijskog polja brzina beskonačnog panela te isjecanja dijela dobivenog vibracijskog polja iz kojeg se izračunava radijacijsko polje s druge strane panela (slika 2.30).

Po metodi prostornog isječka slijedi da se koeficijent transmisije zvučne snage za konačni panel τ_k može izračunati iz koeficijenta transmisije zvučne snage za beskonačni panel τ_b, efikasnosti radijacije konačnog panela σ_{ef} i upadnog kuta ravninskog vala ϑ po izrazu:

$$\tau_k = \tau_b \left(\sigma_{ef} \cos\vartheta\right)^2 . \tag{2.141}$$

Nakon izračuna koeficijenta transmisije zvučne snage za sve upadne kuteve [0-90°] slijedi usrednjavanje po izrazu (2.139) gdje je ϑ_{lim}=90°.

Metodu prostornog isječka može se primjeniti za srednji i visoki frekvencijski pojas što je definirano sa valnom duljinom odziva panela. U slučaju kad valna duljina vala u panelu postane red veličine ili manja od udaljenosti između oslonaca, metodom prostornog isječka i uz definiranje gibanja s redom prostornih harmonijskih valova može se izračunati ponašanje konačnog jednostavno oslonjenog panela te se beskonačni model može koristiti na srednjim i visokim frekvencijama čak i za slučajeve kad broj perioda panela jednak 3 ili 4.

2.5.2. Efikasnost radijacije

Efikasnost radijacije σ_{ef} omjer je radijacijskog otpora R_{mn} i raznih konstanti vezanih uz karakteristike panela i okolnog medija [78,81]:

$$\sigma_{ef} = \frac{R_{mn}}{\rho_0 c a_D b_D} \tag{2.142}$$

tj. gustoće zraka ρ_0, brzine zvuka u okolnom mediju c i dimenzija panela $a_D \times b_D$. Navedena veličina nastala je iz veličine akustičkog otpora a s ciljem da impedanca akustičkog okolnog medija $\rho_0 c$ i dimenzije panela $a_D \times b_D$ ne utječu na referentnu vrijednost efikasnosti radijacije. Radijacijski otpor R_{mn} izračunava se iz omjera akustičke snage radijacije konačnog panela Π i usrednjene vibracijske brzine (eng. *mean-square velocity*)

$$R_{mn} = \frac{\Pi}{\left\langle v^2 \right\rangle} . \tag{2.143}$$

Usrednjena vibracijska brzina izračunava se iz izraza

$$\left\langle \overline{v}^2 \right\rangle = \frac{1}{a_D b_D} \int_A |v|^2 \, \mathrm{d}A \tag{2.144}$$

u kojem su a_D i b_D dimenzije pravokutnog panela a v amplitude vibracijskih brzina u pojedinim točkama panela. S obzirom da su do sada izračunate vibracijske brzine beskonačne grede $\mathrm{d}w(x)/\mathrm{d}t$, transformacija u vibracijske brzine konačnog panela je izvršena množenjem

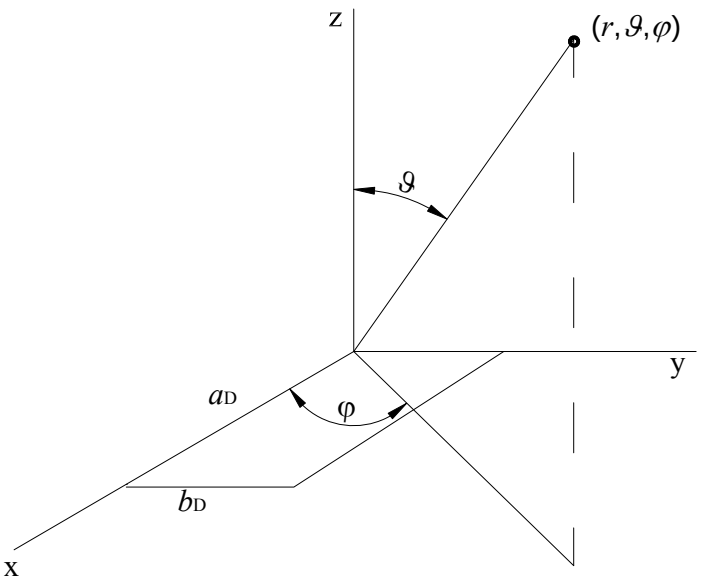
iste sa $\sin(\pi x/a_D)$ $\sin(\pi y/b_D)$ kako bi se vibracije približile jednostavnim rubnim uvjetima iz eksperimenta gde je elasična brtva na svim vanjskim rubovima, pa slijedi izraz

$$v(x,y)=\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}t}\sin\left(\frac{\pi x}{a_D}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b_D}\right). \tag{2.145}$$

Usrednjena akustička snaga Π radijacije panela izračunava se iz izraza

$$\Pi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|p_\omega|^2}{\rho_0 c}r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \tag{2.146}$$

gdje je ρ_0 gustoća zraka, c brzina zvuka u zraku, r polumjer polusfere do daljnjeg polja a φ i ϑ su kutevi sfernog koordinatnog sustava koji se nalazi u kutu pravokutnog panela, slika 2.31. Polumjer polusfere do daljnjeg polja r minimalno je za red veličine veći od najveće dimenzije panela.



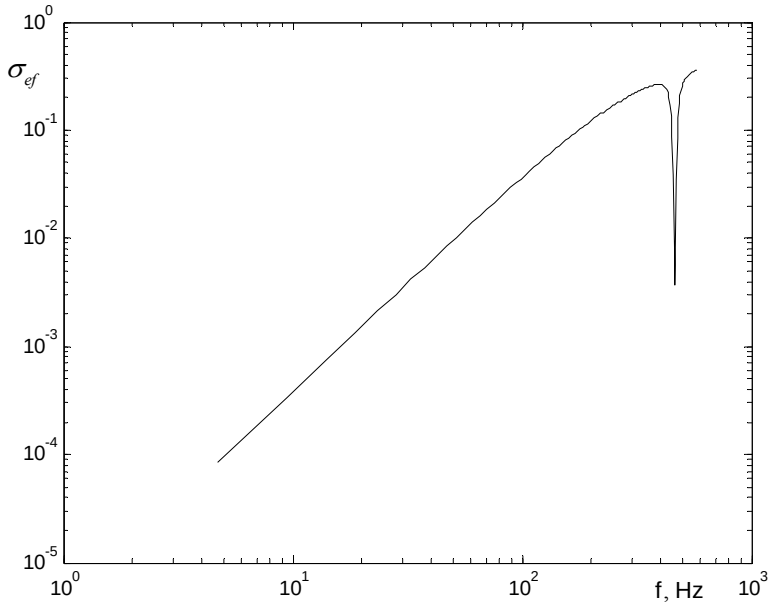
Slika 2.31. *Pravokutni panel u beskonačnoj ravnini*

Akustički tlak u daljnjem polju p_ω dobija se pomoću Rayleigh-ovog integrala definiranog izrazom

$$p_\omega=-\mathrm{i}k\rho_0 c\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{2\pi r}\int_0^{b_D}\int_0^{a_D}v(x,y)\mathrm{e}^{\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\alpha' x}{a_D}\right)-\mathrm{i}\left(\frac{\beta' y}{b_D}\right)\right]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.147}$$

gdje je k broj vala u okolnom zraku a varijable α' i β' se određuju izrazima $\alpha'=ka_D\sin\vartheta\cos\varphi$ i $\beta'=kb_D\sin\vartheta\sin\varphi$.

Postoje dva glavna utjecajna faktora zbog kojih se efikasnost radijacije σ_{ef} stvarnog konačnog panela unutar ravnine zida razlikuje od teorijskog izračuna beskonačnog panela: 1) postojanje vlastitih oblika vibriranja koji slijede iz ukupnih dimenzija i 2) efekt difrakcije koji nastaje zbog manje dimenzije panela od valne duljine akustičkih valova na radijacijskoj strani panela. Dodatne razlike nastaju zbog utjecaja akustike prostorija između kojih se nalazi panel. Najveće razlike pojavljuju se na niskim frekvencijama dok su vrijednosti iznad koincidentne frekvencije red veličine 1 što je vidljivo na slici 2.32.



Slika 2.32. *Primjer dijagrama efikasnosti radijacije konačnog periodički oslonjenog panela*

Jednostruki i dvostruki integrali u izrazima (2.144), (2.146) i (2.147) izvršeni su pomoću numeričke integracije koristeći Simpsonovo pravilo [79].

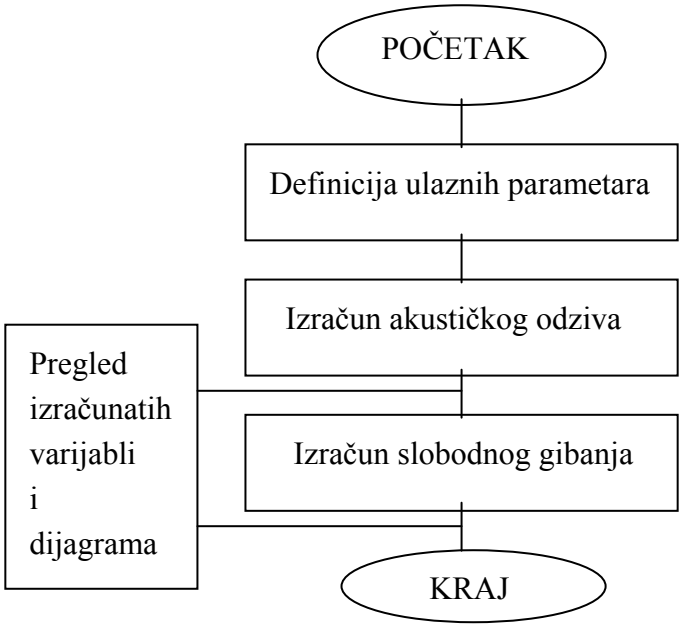
Poglavlje 3.

Numerička analiza

U ovom je poglavlju predstavljeno vlastito programsko rješenje "AKUPAN" koje je izrađeno na temelju teorijskih postavki iznesenih u 2. poglavlju. Opisan je slijed izračunavanja referentnih veličina i osnovne značajke funkcionalnosti programskog rješenja "AKUPAN" napisanog u programu "MATLAB". Na kraju poglavlja navedeni su dobiveni numerički rezultati.

3.1. Opis programskog rješavača

Programski rješavač sastoji se iz dvije funkcionalne podcjeline: izračunavanja akustičkog odziva i slobodnog gibanja. Na slici 3.1 prikazan je pojednostavljen dijagram toka programskog rješenja "AKUPAN" s ciljem naglašavanja da je tijekom izračuna moguće pregledavati sve dijagrame i varijable koje su izračunate do trenutka pregledavanja.



Slika 3.1. *Dijagram toka numeričkog modela*

3.1.1. Izračun akustičkog odziva (prisilnog gibanja)

Na početku koda definirane su karakteristike materijala panela: gustoća ρ, modul elastičnosti E, Poissonov koeficijent ν, faktor prigušenja η i debljine panela h. Nakon toga izračunate su specifična masa po duljini grede m_g, moment inercije poprečnog presjeka grede I i fleksijska krutost grede D. Definirane su i karakteristike oslonaca: udaljenost između oslonaca L, masa pomičnog dijela oslonaca m_M, krutost fleksijske opruge K_r, prigušenje fleksijske opruge η_r, krutost poprečne opruge K_t i prigušenje poprečne opruge η_t te karakteristike prisilnog vala u zraku: gustoća zraka ρ_0, fazna brzina vala u zraku c, upadni kut ravninskog vala ϑ, fazna brzina fleksijskog vala u gredi c_x i koeficijent faznog prigušenja ψ.

Odabran je frekvencijski pojas izračuna s parametrom maksimalne frekvencije Ω_{MAX}, brojem frekvencija u 1. propagacijskom pojasu n_Ω, maksimalnom frekvencijom izračuna f_{MAX}, maksimalnom kružnom frekvencijom ω_{MAX}, frekventni pojas između susjednih frekvencija Δf, brojem frekvencija izračuna n_f i minimalnom frekvencijom izračuna f_{MIN} nakon čega su za maksimalnu frekvenciju izračunate vrijednosti broja prisilnog vala u zraku k_{pris}, broja prisilnog vala u gredi po x-osi k_{xPris}, broja prisilnog vala u gredi po y-osi k_{y0Pris} i prisilna propagacijska konstanta μ_{Pris}.

Nakon toga odabran je dovoljan broj prostornih harmonijskih valova n_{RefPris} u sklopu dokaza konvergencije rezultata koeficijenta transmisije zvučne snage TL_{konv}.

U nastavku su izračunate sljedeće varijable za zadani frekvencijski pojas: udarni normalni intenzitet I_{u}, transmisijski normalni intenzitet I_{t}, koeficijent transmisije zvučne snage τ i zvučni transmisijski gubici TL.

S dobivenim rezultatima izračunato je rezultantno gibanje grede pri zadanom prisilnom valu u zraku za odabrani broj perioda za prikaz vibriranja n_{P} i broj točaka po svakom periodu n_{T} za koje su izračunate x koordinate. U nastavku je izračunat oblik vibriranja ukupnog vala w_{xPris} te fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede φ_{Pris}, oblici vibriranja prostornih harmonijskih valova $w_{n\mathrm{xPris}}$, fazni kutevi prostornih harmonijskih valova po duljini grede $\varphi_{n\mathrm{qPris}}$ i fazne brzine prostornih harmonijskih valova c_{nPris}.

U nastavku je definirana diskretizacija modela konačnog panela dimenzija: duljina panela $a_{\mathrm{D}}=n_{\mathrm{p}}L$, širina panela b_{D} i diskretizacija površine polusfere u daljnjem polju polumjera r na jednake površine definirajući odgovarajuće kuteve ϑ i φ točaka koje se nalaze u kutevima površina.

Pripremljene su i matrice za numeričku integraciju jednostrukog i dvostrukog integrala po Simpsonovom pravilu.

Definiran je vibracijski odziv po diskretiziranoj površini panela $\overline{v}$ te je izračunat akustički tlak po diskretiziranoj površini polusfere u daljnjem polju p_{ω} koristeći numeričku integraciju. Izračunata je tada akustička snaga izvora i iz nje usrednjena efikasnost radijacije. Uslijedio je izračun koeficijenta transmisije zvučne snage za konačni panel usrednjen po izrazu (2.139) za sve upadne kuteve. Iz usrednjenog koeficijenta transmisije zvučne snage izračunati su zvučni transmisijski gubici TL za prisilno difuzno polje.

3.1.2. Izračun slobodnog gibanja

Na početku 2. dijela koda određene su propagacijske konstante μ_{Slob} i oblici vibriranja ukupnog vala w_1, fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede $\varphi_{\mathrm{q1Slob}}$ koristeći novu funkciju oblika (2.44) i oblici vibriranja ukupnog vala w_2, fazni kutevi ukupnog vala po duljini perioda grede $\varphi_{\mathrm{q2Slob}}$ koristeći funkcije oblika (2.45).

Nakon toga izračunate su amplitude prostornih harmonijskih valova w_{n1}, te njihovi fazni kutevi $\varphi_{nq1\mathrm{Slob}}$ i fazne brzine c_{nSlob} koristeći razvoj funkcije oblika u red s prostornim harmonijskim valovima.

Na kraju koda napravljen je izračun propagacijskih konstanti μ, amplituda w_3, faznih kuteva $\varphi_{q3\mathrm{Slob}}$ i faznih brzina prostornih harmonijskih valova c_{nSlob} rješavanjem matrice slobodnih vibracija dobivene s metodom virtualnih pomaka i prostornim harmonijskim valovima.

3.2. Postprocesor - interpretacija rezultata izračuna

Sa ciljem veće preglednosti razvoja koda i kasnijeg pregledavanja dobivenih rezultata razvijene su pomoćne skripte "PLOT" i "RADNA" i datoteka "SADRZAJ".

Skripta "PLOT" služi za prikaz dobivenih dijagrama. Nakon pokretanja skripte pojavljuje se izbornik iz kojeg se bira potrebni dijagram. Nakon prikaza dijagrama ponovno se pojavljuje izbornik što daje slobodu daljnje analize dobivenih rezultata (npr. promjene frekvencijskih pojasa po osima, itd.). Slijedi ispis izbornika:

```
display('Odabrati broj pokraj imena naziva dijagrama:')
display('PRISILNO VIBRIRANJE:')
display('Dijagram TLkonv(nRef) (1)')
display('Dijagram TL(f) (2)')
display('Dijagram max.min. real.imag. komponente prisilnog odziva(f) (3)')
display('Dijagram 3D real.oblik.vibr.(f,x) (4)')
display('Dijagram contourf.real.oblik.vibr(f) (5)')
display('Dijagram  real.imag.  oblika  vibriranja  ukupnog  vala  na  jednoj
frekvenciji (6)')
display('Dijagram A(ci,f) (7)')
display('Dijagram real.imag. oblika vibriranja prostornog harmonijskog vala
na jednoj frekvenciji (8)')
display('Dijagram  prostornog  harmonijskog  vala  u  vremenu  na  jednoj
frekvenciji (9)')
display('SLOBODNO VIBRIRANJE:')
display('Dijagram 3D real.oblik.vibr(f,x) (10)')
display('Dijagram  max.min.  real.imag.  komponente  slobodnih  vibracija(f)
(11)')
display('Dijagram coshm(f) (12)')
display('Dijagram mBISHOP 0-pi(f) (13)')
display('Dijagram  A(ci,f)  +  kontrola  A(f=konst,ci)  i  A(f=konst,cn)
slobodnih vibracija (14)')
display('Dijagram w1(x)-fOBLIKA1 s funkcijama Fi na fMAX(15)')
```

```
display('Dijagram w2(x)-fOBLIKA0 s funkcijama Fi na fMAX(16)')
display('Dijagram mVIRT(an) i mBISH(an)(17)')
display('Dijagram real mPRIM1Virt(f) sve vrijednosti (18)')
display('Dijagram imag mPRIM1Virt(f) sve vrijednosti (19)')
display('Dijagram fje OBLIKA iz det(Meq)=0 I Meq*An=0 (20)')
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz fOBLIKA1 s funkcijama Fi na
fMAX(21)');
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz fOBLIKA0 s funkcijama Fi na
fMAX(22)');
display('Prikaz realnog vibriranja u vremenu iz det(Meq)=0 I Meq*An=0
(23)');
odabir=input('br. []= ');
if isempty(odabir)
    break;
end
```

Skripta "RADNA" služi za provjeru vrijednosti izračunatih matrica za vrijeme trajanja izračuna s glavnim kodom. Uz provjeru samog izračunatog broja u pojedinoj matrici moguće je istu pregledati u odgovarajućem dijagramu.

Datoteka "SADRZAJ" služi za praćenje razvoja koda u smislu pregleda broja linije u kodu gdje je izračunata pojedina varijabla ili matrica. Datoteka raste kako se glavni kod izvršava tako da je moguće u svakom trenutku vidjeti koja je zadnja varijabla izračunata i koji je broj linije pored nje. U datoteci su navedene i vrijednosti nekih referentnih varijabli.

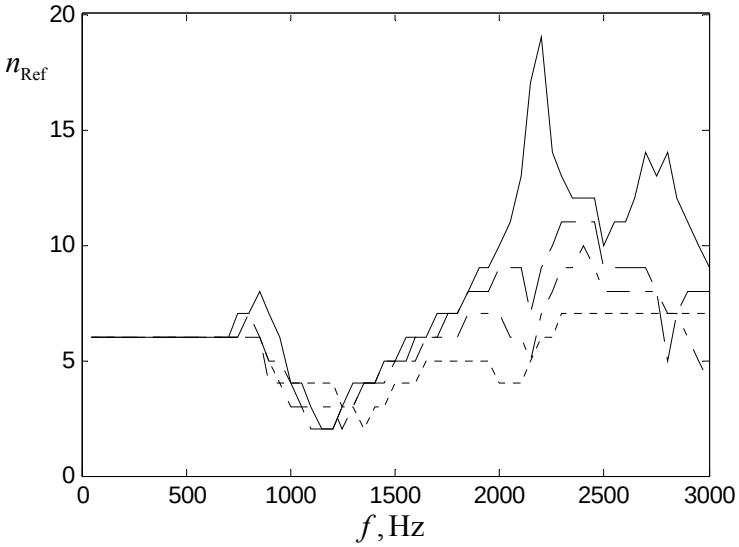
```
45    SADRŽAJ KODA: Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela
49    IZRAČUN PRISILNOG GIBANJA (TL)
53
      Definicija ulaznih varijabli
57
      Materijal panela:
66    ro =   2700
76    E = 7.10e+010
85    ni = 0.00e+000
94    eta = 0.00e+000
98
      Dimenzije panela:
107   h = 1.27e-003
116   L = 2.00e-001
120
      Karakteristike panela
125   mp = 3.43e+000
131   I = 1.71e-010
136   DPris = 1.21e+001
...
```

3.3. Numerički rezultati

Slijedi opis numeričkih rezultata dobivenih s programskim rješenjem "AKUPAN" te usporedba pojedinih rezultata s rezultatima Rayleigh-Ritz i metode konačnih elemenata.

3.3.1. Verifikacija konvergencije rezultata

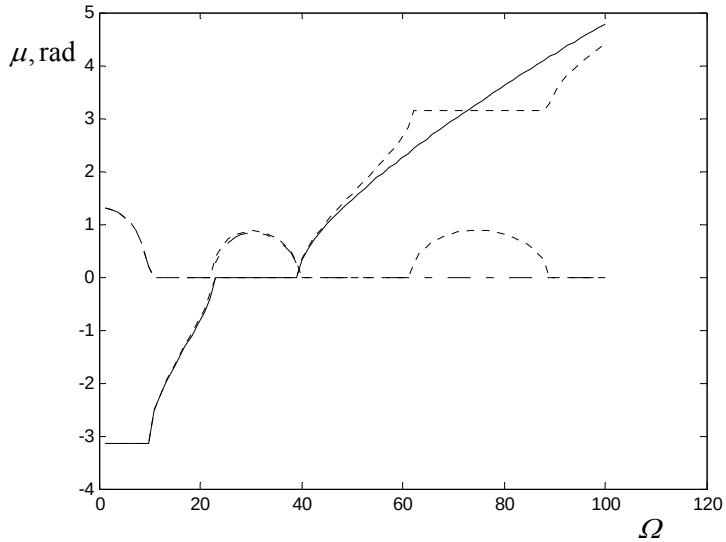
U numeričkom izračunu koristi se suma prostornih harmonijskih valova za definiranje odziva. Točnost rezultata je veća s rastom broja prostornih harmonijskih valova te je potrebno odrediti njihov dovoljan broj da bi se rezultat smatrao točnim (slika 2.29). Po autorima Lee i Kim [32] konvergencija rezultata je potvrđena ako se vrijednost izračunatog *TL*-a na najvišoj frekvenciji izračuna promijeni za 0,01 dB pri dodavanju dva prostorna harmonijska vala. Prilikom analize opisanog uvjeta primjećeno je da se na nižim frekvencijama od maksimalne pojavljuje potreba za većim brojem prostornih harmonijskih valova da bi se dobila zahtjevana točnost. Navedeni efekt vezan je uz veličinu prigušenja sustava kako je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2. *Utjecaj prigušenja u panelu* η *na potreban broj prostornih harmonijskih valova* (n_{Ref}*2+1) *za periodički oslonjen panel*: η =0 ———, η =0,1 -------, η =0,2 -.-.-.-.- i η =0,4 .....

Iz slike 3.2 vidljivo je da je sustav bez prigušenja puno nestabilniji što se u ovom slučaju manifestira u potrebi povećane veličine n_{Ref} da bi se sa sumom prostornih harmonijskih valova mogao izračunati točan zvučni transmisijski gubitak. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna, međutim, ukoliko sustav nema dovoljno prigušenja maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojaviti će se na nižoj frekvenciji.

Ukupan broj prostornih harmonijskih valova (n_{Ref}*2+1) mora biti dovoljan i za definiranje slobodnih valova u periodički oslonjenom panelu što se provjerava s konvergencijom propagacijske konstante. Ukoliko je na najvišoj frekvenciji izračuna propagacijska konstanta konvergirala smatra se da će konvergirati i na nižim frekvencijama (slika 3.3) pa se veličina n_{Ref} definira na najvišoj frekvenciji izračuna.



Slika 3.3. *Primjer odstupanja vrijednosti propagacijske konstante kod upotrebe nedovoljnog broja prostornih harmonijskih valova (propagacijska konstanta po izrazu (2.48) ..... i pomoću prostornih harmonijskih valova,* μ_r -.-.-.-.- i μ_i _____*)*

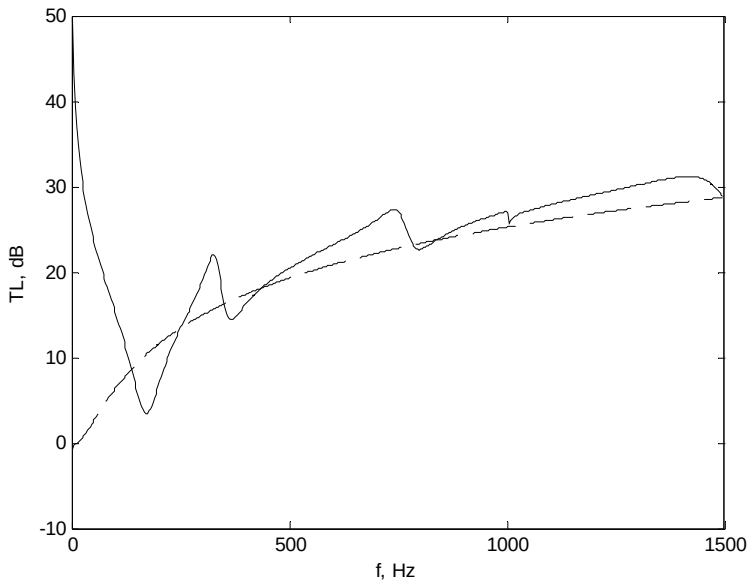
3.3.2. Analiza utjecajnih parametara na *TL* beskonačnog periodički oslonjenog panela

Odabrani su sljedeći osnovni ulazni parametri:

- krutost poprečne opruge, $K_t = 3,6 \cdot 10^9$ N/m,
- krutost fleksijske opruge, K_r=60 Nm/rad,
- modul elastičnosti panela, $E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Pa,
- debljina panela, h=0,00127 m,
- masa pomičnog dijela oslonca, m_M=0 kg,
- Poissonov koeficijent, ν=0,33,
- gustoća panela, ρ=2700 kg/m^3,
- gustoća zraka, ρ_0=1,21 kg/m^3,
- upadni kut, ϑ=45°,
- faktor prigušenja u materijalu panela, η=0,1,
- udaljenost između oslonaca panela, L=0,2 m,

- koeficijent faznog prigušenja ψ=1°,
- brzina zvuka u zraku, c=343 m/s i
- frekvencija f=10-1500 Hz.

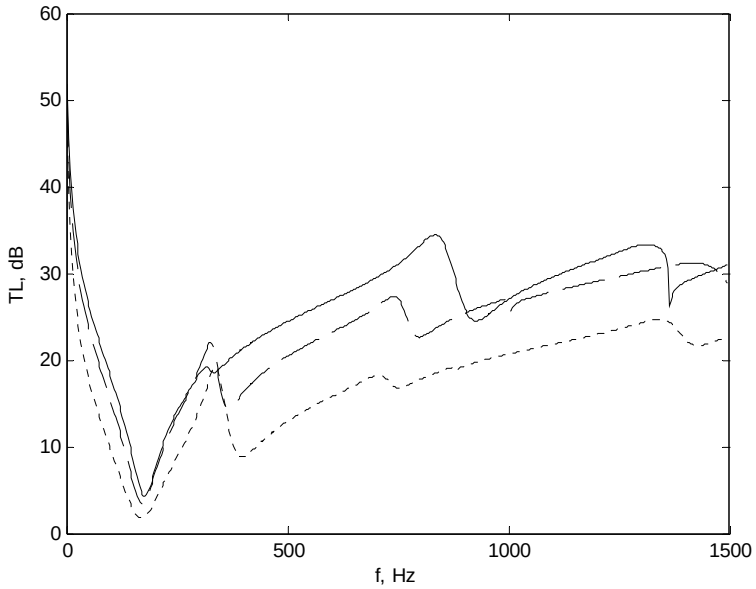
U pojedinim analizama koristit će se drugi ulazni parametri što će biti posebno naznačeno. Na slici 3.4 prikazane su krivulje zvučnog transmisijskog gubitka kroz panel, *TL*-a, za beskonačni periodički oslonjen panel i za beskonačni neoslonjen panel. Iz dijagrama se vidi osnovna razlika između *TL*-a navedenih panela. Veličina *TL*-a narasti će u niskom frekvencijskom pojasu kad se ukrijepi panel ali će zato u višem frekvencijskom pojasu doći do velikih oscilacija vrijednosti *TL*-a što je nepovoljno. Na navedenom primjeru je očito da se problem periodički oslonjenih panela skriva u novonastalim harmonicima koji nastaju zbog refleksija valova od oslonaca i rubova kod konačnih panela.



Slika 3.4. *Usporedba zvučnih transmisijskih gubitaka TL-a za beskonačni periodički oslonjen panel ——— i neoslonjen panel -------*

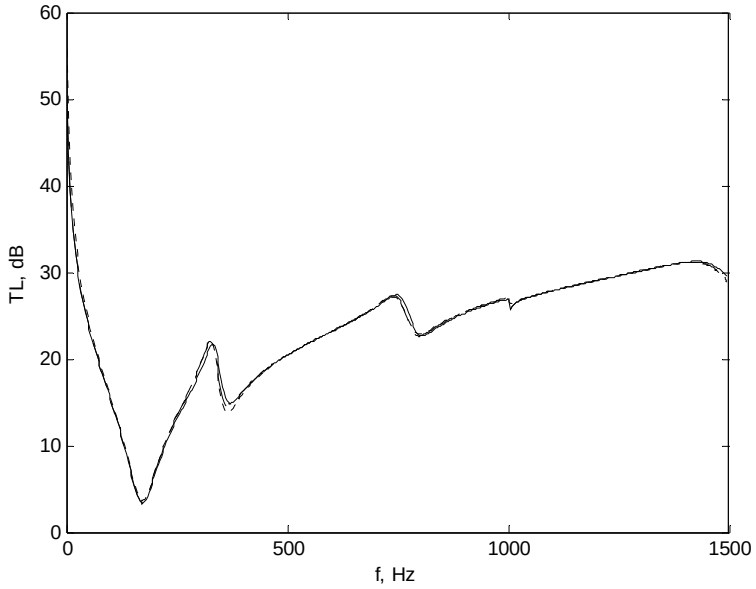
U praksi se kod periodički oslonjenih panela efekt zvučne transmisije događa na nižim frekvencijama od onih kod panela oslonjenih po svojim rubovima. Kao da je kritična frekvencija nakon upotrebe periodičkih oslonaca snižena za jednu ili više oktava, što ovisi o udaljenosti između oslonaca i krutosti u osloncima (fleksijskoj i poprečnoj opruzi). Refleksija valova od oslonaca mijenja disperziju valova na način da slobodni valovi koji imaju prostorne harmonijske valove s faznim brzinama većim od brzine zvuka (fleksijskih valova) u materijalu mogu propagirati na nižim frekvencijama od kritične frekvencije neukrepljenog panela. Navedene komponente uzrokuju da panel bude pobuđen na koincidentan način s incidentnim zvučnim valovima na frekvencijama nižim od kritične.

Na slici 3.5 analiziran je utjecaj upadnog kuta na zvučne transmisijske gubitke panela *TL*. Zvučni transmisijski gubici izračunati su za 3 različita upadna kuta: 15°, 45° i 70°. Na slici 3.5 vidi se smanjenje *TL*-a pri rastu upadnog kuta što se može objasniti povećanjem *x* komponente broja prisilnog vala k_x pa dolazi do većeg pobuđivanja fleksijskih valova tj. do veće radijacije zvuka.



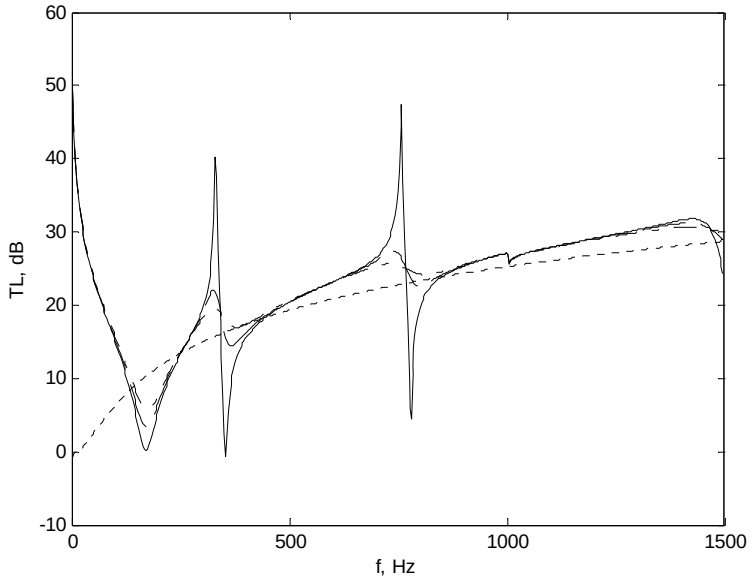
Slika 3.5. *Utjecaj upadnog kuta ϑ na TL za periodički oslonjen panel*: ϑ_1= 15° ——, ϑ_2=45° ------ *i* ϑ_3=70° .....

Na slici 3.6 prikazan je utjecaj faznog prigušenja. Prikazane su 3 krivulje *TL*-a za 3 različita fazna prigušenja 0°, 1° i 10°. Potrebno je primjetiti da odabir koeficijenta faznog prigušenja utječe u manjem iznosu na rješenje u nižem frekvencijskom pojasu.

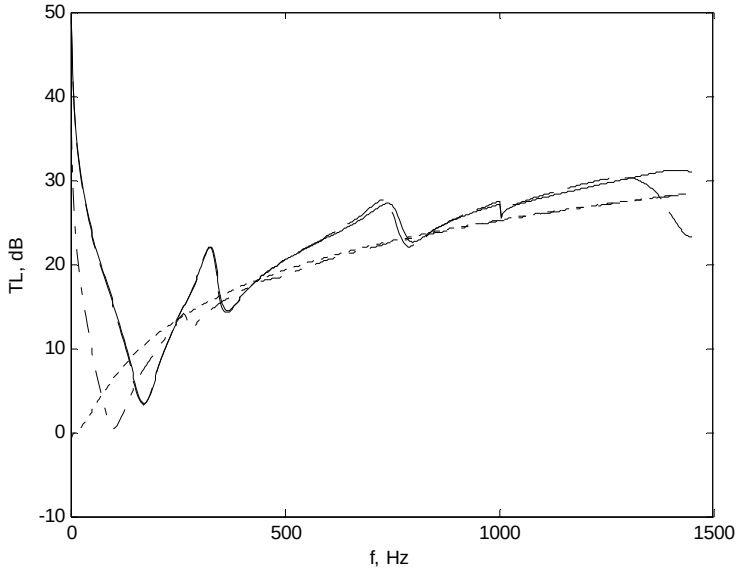


Slika 3.6. *Utjecaj koeficijenta faznog prigušenja ψ na TL za periodički oslonjen panel: ψ_1=0° , ψ_2=1° ------ i ψ_3=10° .....*

Na slici 3.7 prikazan je utjecaj prigušenja u materijalu panela na krivulju *TL*. Iz slike je vidljivo da prigušenje u materijalu panela poboljšava *TL* krivulju pa se u praksi za poboljšanje *TL*-a često koriste razne površinska obrada panela (eng. *coating*). Potrebno je primjetiti da se s povećanjem prigušenja u panelu postiže poboljšani *TL* na cijelom frekvencijskom pojasu, osobito u frekvencijskim pojasima u blizini rezonantnih frekvencija.



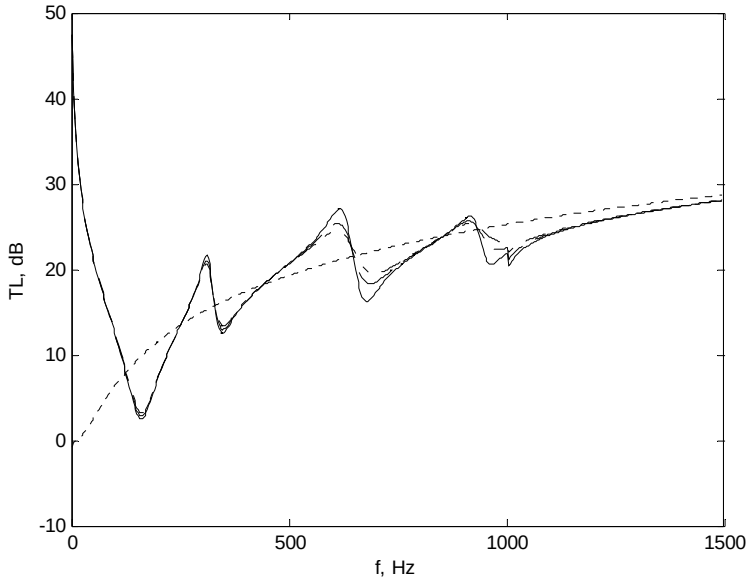
Slika 3.7. *Utjecaj prigušenja u panelu* η *na TL za periodički oslonjen panel*: η_1=0 ——, η_2=0,1 ------- *i* η_3=0,2 -.-.-.-.- *i TL za neoslonjeni panel* .....



Slika 3.8. *Utjecaj krutosti poprečne opruge u osloncu* K_t *na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela*: $K_{t1}=3,6\cdot10^9$ ——, $K_{t2}=3,6\cdot10^7$ --------, $K_{t3}=3,6\cdot10^5$ -.-.-.-.- *i* K_{t4}=0 .....

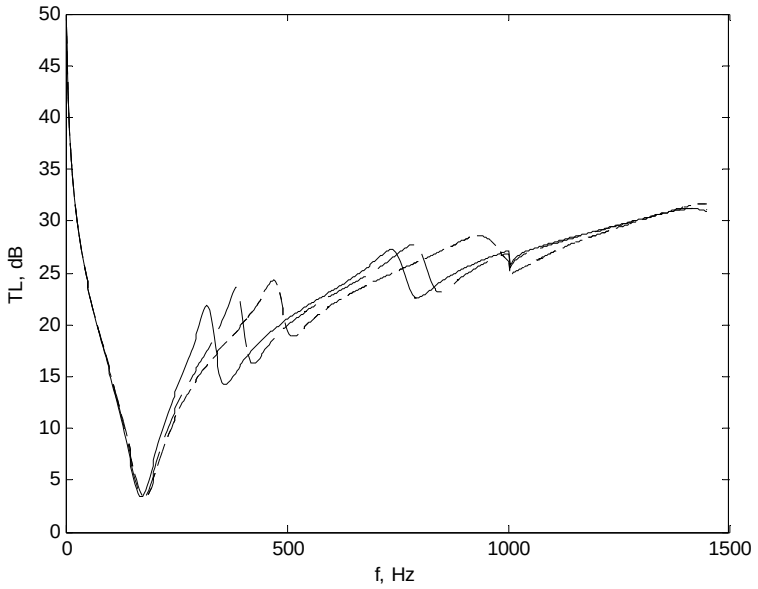
Pozitivan utjecaj krutosti poprečne opruge vidljiv je u niskom frekvencijskom pojasu (slika 3.8) kad je krutost poprečne opruge niža od granične (za osnovne parametre: $K_t = 7{,}1 \cdot 10^7$ N/m) iznad koje se oslonci prestanu poprečno gibati tj. postaju jednostavni oslonci.

Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncima vidljiv je ukoliko krutost poprečne opruge dozvoljava poprečne pomake u osloncima (slika 3.7). Postoji granična krutost poprečne opruge iznad koje prigušenje poprečne opruge više nema utjecaja na odziv jer se greda u osloncima više niti ne giba poprečno već se oslonac ponaša kao jednostavan oslonac. Utjecaj prigušenja je veći na višim frekvencijama.



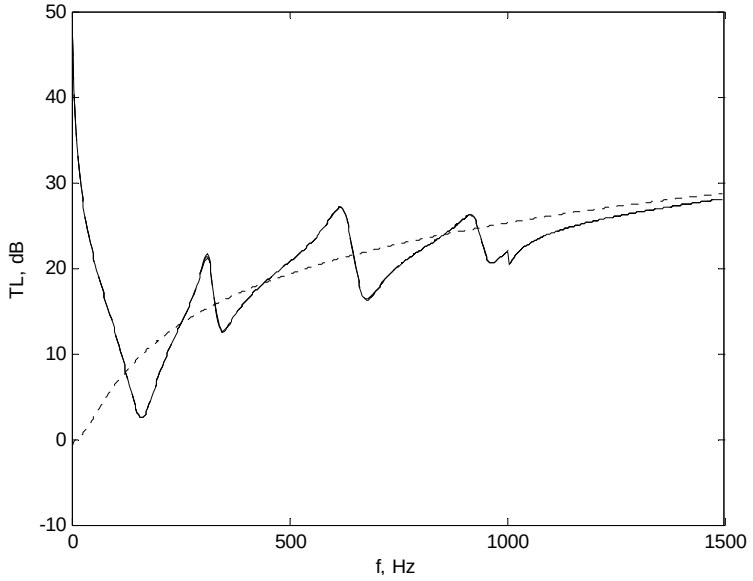
Slika 3.9. *Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncu η_t na TL za periodički oslonjen panel uz dozvoljene poprečne pomake tj. $K_t = 3{,}6 \cdot 10^6$: $\eta_{t1}=0$ ———, $\eta_{t2}=0{,}1$ -------, $\eta_{t2}=0{,}2$ -.-.-.-.- i TL za neoslonjeni panel .....*

Krutost fleksijske opruge povisuje frekvencije vlastitog gibanja osim na gornjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojasa gdje je zakret u osloncima jednak nuli pa krutost fleksijske opruge nema utjecaja jer nema ni zakreta.

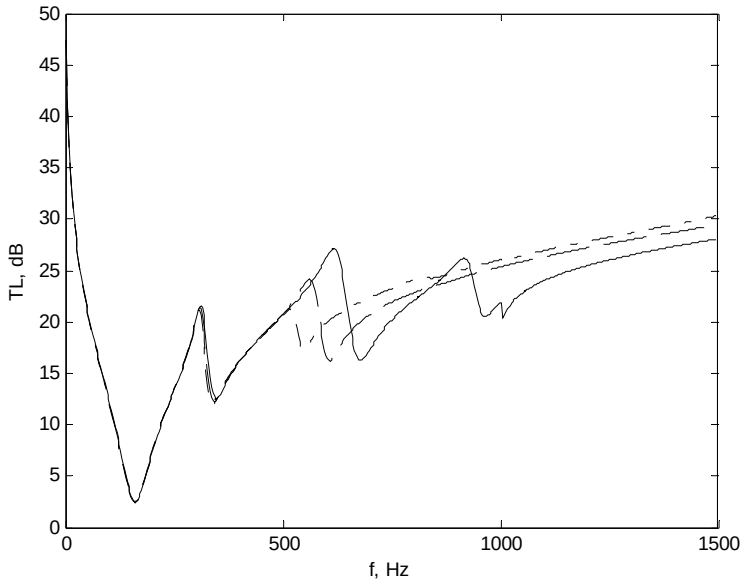


Slika 3.10. *Utjecaj krutosti fleksijske opruge u osloncu K_r na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: $K_{r1}=0$ ——, $K_{r2}=10^3$ -------, $K_{r3}=10^6$ -.-.-.-.-.- i $K_{r4}=10^9$ ..... (krivulje TL_{kr3} i TL_{kr4} se preklapaju)*

Prigušenje fleksijske opruge u osloncu nema primjetnog utjecaja kad su omogućeni poprečni pomaci u osloncima.

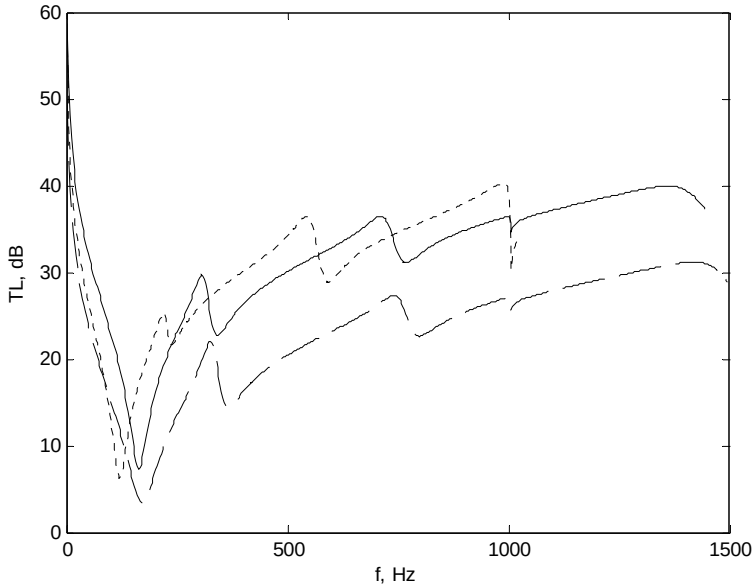


Slika 3.11. *Utjecaj prigušenja fleksijske opruge u osloncu η_r na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj. $K_t=3{,}6\cdot10^6$ N/m: $\eta_{r1}=0$ ——, $\eta_{r2}=0{,}1$ -------, $\eta_{r2}=0{,}2$ -.-.-.-.- i TL za neoslonjeni panel .....*



Slika 3.12. *Utjecaj mase pomičnog dijela oslonca na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj.* $K_t = 3,6 \cdot 10^6$: m_{M1}=0 kg ———, m_{M2}=0,1 kg ---- ----, m_{M3}=0,2 kg .....

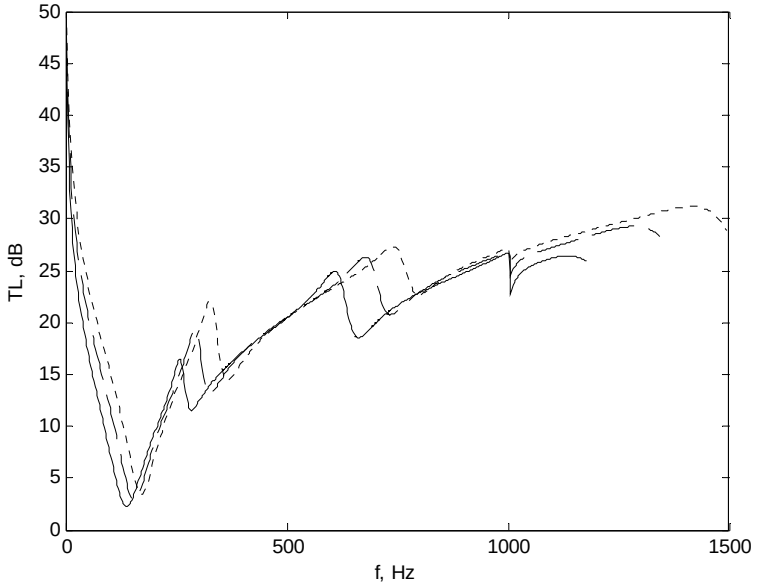
Masa pomičnog dijela oslonca ima pozitivan utjecaj na *TL* kad je omogućeno poprečno gibanje oslonaca (slika 3.12). Očito je da masa povoljno djeluje na odziv jer s rastom mase pomičnog dijela oslonca raste ukupna masa pregrade što je povoljno za *TL*.



Slika 3.13. *Utjecaj materijala panela na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: čelik (*ρ=7750 kg/m^3, $E = 1,9 \cdot 10^{11}$ Pa, ν=0,3*)* ———, *aluminij (*ρ=2700 kg/m^3, $E = 0,71 \cdot 10^{11}$ Pa, ν=0,33*)* --------, *bronca (*ρ=8500 kg/m^3, $E = 1,04 \cdot 10^{11}$ Pa, ν=0,37*)* .....

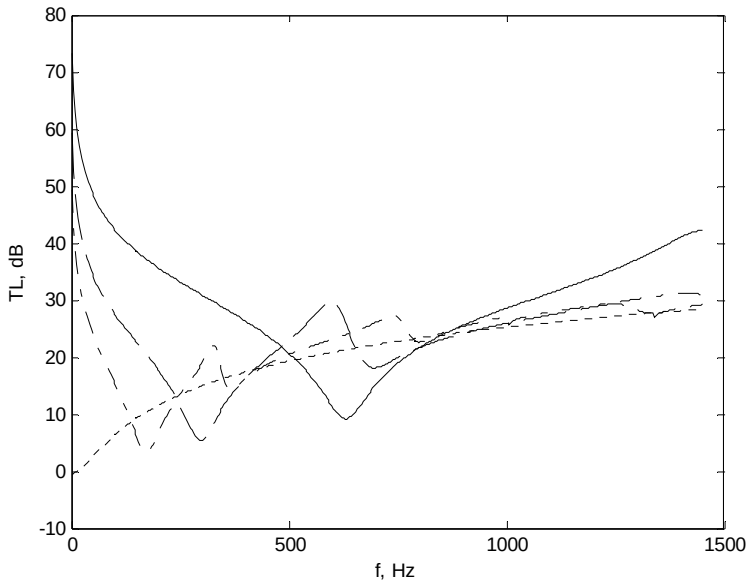
Odabir materijala od kojeg će se napraviti panel ima odlučujući utjecaj na *TL* krivulju. Na slici 3.13 prikazane su *TL* krivulje za čelik, aluminij i broncu. Vidljivo je da je *TL* bronce sličnih veličina kao *TL* čelika u srednjem frekvencijskom pojasu (250Hz - 1000Hz). Iznad 750 Hz bronca ima najveći *TL*. Navedeno je i očekivano zbog veće gustoće bronce pa ju to čini najefikasnijom u frekvencijskom pojasu koji je kontroliran masom. Na slici 3.13 se također vidi da je aluminij, koji ima najmanju krutost, najmanje efikasan u niskom frekvencijskom pojasu u kojem se *TL* kontrolira s krutošću.

Promjena debljine panela ima utjecaj na cijelom frekvencijskom pojasu *TL*-a (slika 3.14). U općem slučaju, *TL* se primjetno poboljšao u niskom frekvencijskom pojasu, ili u pojasu kontroliranom s krutošću, dok je u visokom frekvencijskom pojasu, gdje je *TL* kontroliran masom, ostao sličnih vrijednosti s time da su se pomaknule frekvencije rezonancija. Kao i u analizi utjecaja krutosti u opruzi u osloncu, povećanje krutosti povećava *TL* u niskom frekvencijskom pojasu dok je za visoki frekvencijski pojas potrebno koristiti apsorpcijske materijale.



Slika 3.14. *Utjecaj debljine panela h na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela*: h_1=1 mm ———, h_2=1,14 mm --------, h_3=1,27 mm .....

Umanjivanjem udaljenosti između oslonaca povećava se *TL* u niskom frekvencijskom pojasu, međutim navedeno uzrokuje velike oscilacije *TL*-a po cijelom frekvencijskom pojasu. Razlog se može opisati usporedbom radijacije jednog velikog panela i puno malih panela ukupne površine jednake površini velikog panela.

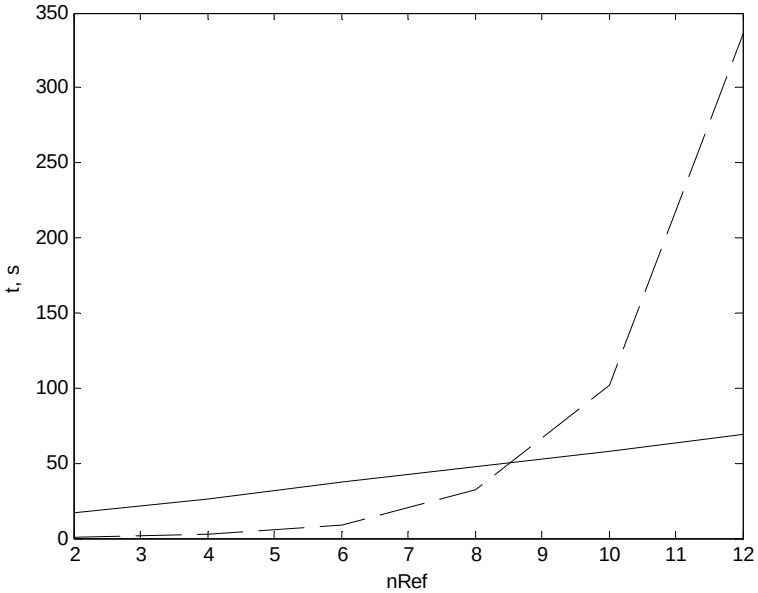


Slika 3.15. *Utjecaj udaljenosti između oslonaca L na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela*: L_1=100 mm ———, L_2=150 mm --------, L_3=200 mm .....

TL malog panela je manji od *TL*-a većeg panela ako su paneli od istog materijala pa slijedi da je *TL* sume malih panela isto manji od *TL*-a većeg panela. Slijedi da je situacija to nepovoljnija što je više malih panela do čega dolazi s povećavanjem broja oslonaca tj. sa smanjivanjem udaljenosti između oslonaca uz istu ukupnu površinu. Udaljenost između oslonaca određuje se iz optimuma između efikasnosti na cijelom radnom frekvencijskom pojasu i u niskom frekvencijskom pojasu.

3.3.3. Brzina izračuna metode virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova za izračun slobodnih vibracija

Broj prostornih harmonijskih valova koji su potrebni da bi se izračunalo približno rješenje *TL*-a utječe na brzinu rješavanja pomoću metode virtualnog rada jer s većim brojem prostornih harmonijskih valova raste broj elemenata u matricama izračuna s kvadratom broja prostornih harmonijskih valova.



Slika 3.16. *Usporedba brzine određivanja amplitude prostornih harmonijskih valova pri zadanoj frekvenciji neprigušenih slobodnih vibracija pomoću metode virtualnog rada _____ i razvoja u red - - - - - - - .*

nRef	Fourierov razvoj	Virtualni rad
2	16,8	0,84
4	26,6	2,5
6	37	9
8	47,4	32,23
10	58,1	101,42
12	69,2	335,7

Tablica 3.1. *Vrijeme (s) potrebno za izračun amplituda prostornih harmonijskih valova sa slike 3.16*

U dijagramu na slici 3.16 prikazana je usporedba brzine izračuna amplituda prostornih harmonijskih valova pomoću metode virtualnog rada i pomoću razvoja u red prostornih harmonijskih valova po izrazu (2.76) iz koje je očito da je metoda virtualnog rada sporija od metode razvoja u red prostornih harmonijskih valova iznad sjecišta prikazanih krivulja. U slučaju dodavanja prigušenja u sustav sjecište krivulja će se pojaviti na nižoj vrijednosti n_{Ref}.

3.3.4. Izračun vlastitih frekvencija slobodnih vibracija periodički oslonjene grede

Vlastite frekvencije slobodnih vibracija periodički oslonjene grede jednake su vlastitim frekvencijama jednostruke grede oslonjene na dva jednostavna oslonca i na dva uklještena oslonca (vidi poglavlje 2.2.1.1.1). Iz navedene činjenice i postojećih izraza za izračun vlastitih frekvencija jednostruke grede po Rayleigh-Ritz metodi [75] provjereni su rezultati dobiveni pomoću rubnih uvjeta i općeg rješenja za diferencijalnu jednadžbu gibanja i metode virtualnog rada uz virtualni pomak definiran s prostornim harmonijskim valovima.

Po metodi Rayleigh-Ritz-a za slobodno oslonjenu gredu dobivene su vlastite frekvencije iz izraza (3.1) [75]

$$\omega_n = a_n \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \tag{3.1}$$

gdje je a_n koeficijent koji ima različite vrijednosti za pojedine vlastite oblike vibriranja:

$a_{1s}=\pi^2=9{,}87$ - 1. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{2s}=4\pi^2=39{,}48$ - 2. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{3s}=9\pi^2=88{,}83$ - 3. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{4s}=16\pi^2=157{,}91$ - 4. vlastiti oblik vibriranja, itd.

Po istoj metodi i istom izrazu mogu se odrediti i vlastite frekvencije za gredu koja je uklještena na oba kraja ali onda koeficijent a_n ima druge vrijednosti:

$a_{1u}=22$ - 1. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{2u}=61{,}7$ - 2. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{3u}=121$ - 3. vlastiti oblik vibriranja,
$a_{4u}=200$ - 4. vlastiti oblik vibriranja, itd.

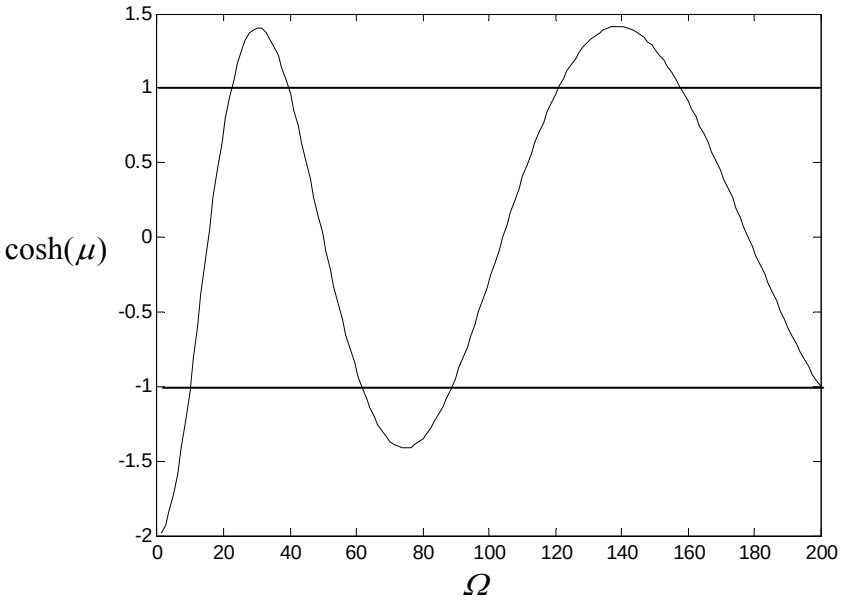
Vrijednosti koeficijenta a_n slične su vrijednostima parametra frekvencije Ω (2.35).

Donja granična frekvencija n-tog propagacijskog frekvencijskog pojasa beskonačne periodički oslonjene grede jednaka je n-toj vlastitoj frekvenciji grede slobodno oslonjene na oba kraja dok je gornja granična frekvencija jednaka n-toj vlastitoj frekvenciji grede uklještene na oba kraja pa slijedi usporedba vrijednosti koeficijenta a_n i vrijednosti parametra frekvencije Ω koristeći metode za određivanje graničnih frekvencija propagacijskih frekvencijskih pojasa beskonačne periodički oslonjene ploče.

$\Omega_{dg1pp}=10{,}07$, $a_{1s}=\pi^2=9{,}87$,
$\Omega_{gg1pp}=22{,}4$, $a_{1u}=22$,

Ω_{dg2pp}=39,71 , $a_{2s}=4\pi^2$=39,48 ,
Ω_{gg2pp}=61,71 , a_{2u}=61,7 ,
Ω_{dg3pp}=89,04 , $a_{3s}=9\pi^2$=88,83 ,
Ω_{gg3pp}=120,91 , a_{3u}=121 ,
Ω_{dg4pp}=158,15 , $a_{4s}=16\pi^2$=157,91 ,
Ω_{gg4pp}=199,88 i a_{4u}=200.

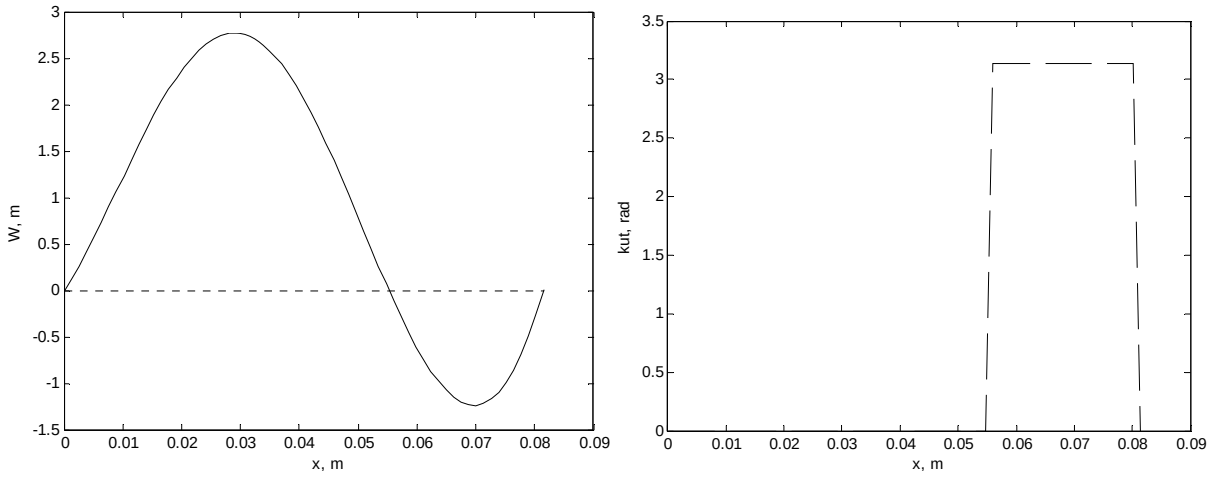
Na slici 3.17 prikazana je krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante cosh(μ) o parametru Ω iz koje su očitane granične vrijednosti parametra frekvencije Ω kod cosh(μ)=1 i cosh(μ)=-1.



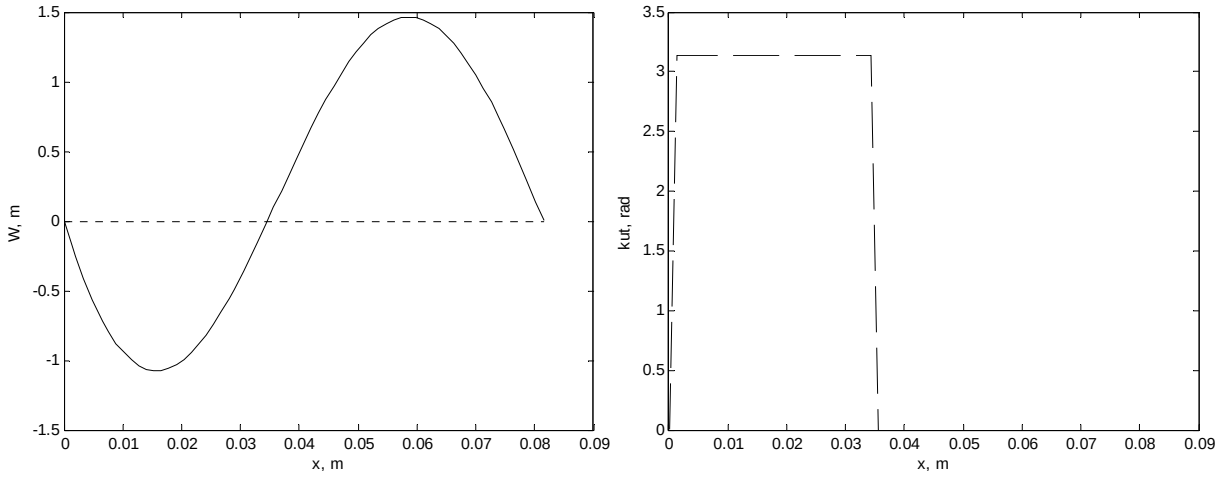
Slika 3.17. *Krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante cosh(μ) o parametru frekvencije Ω*

3.3.5. Usporedba oblika vibriranja slobodnih vibracija

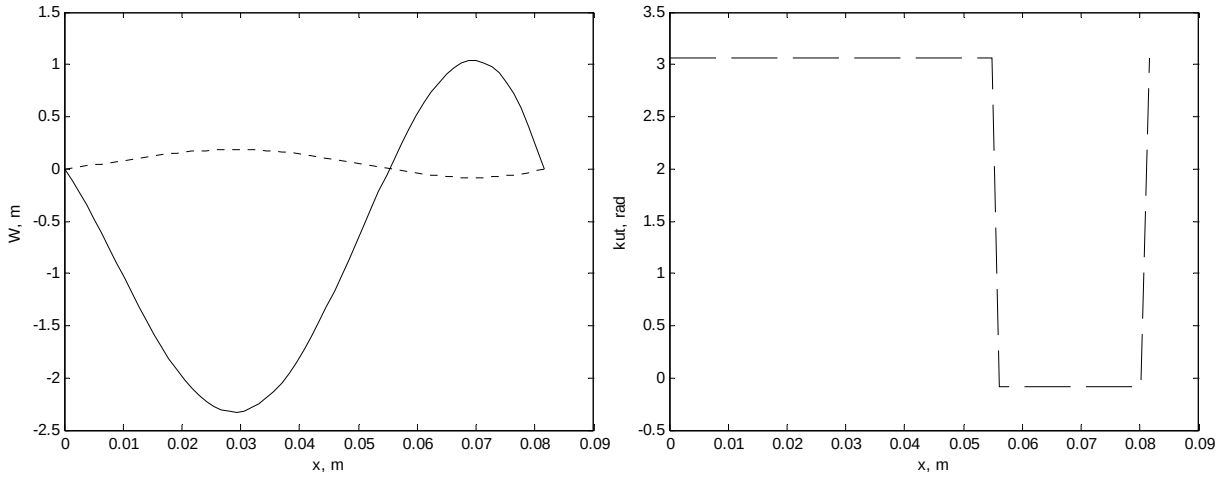
U ovom poglavlju opisani su rezultati izračuna nove funkcije oblika slobodnih vibracija (2.44) periodički oslonjene beskonačne grede. Na slikama 3.18, 3.19 i 3.20 uspoređen je njezin oblik s funkcijom oblika (2.45) [33] i oblikom vibriranja izračunatim po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova.



Slika 3.18. *Izgled realne _____ i imaginarne --------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po novoj funkciji oblika* (*2.44*)



Slika 3.19. *Izgled realne _____ i imaginarne -------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po funkciji oblika* (*2.45*) [33]

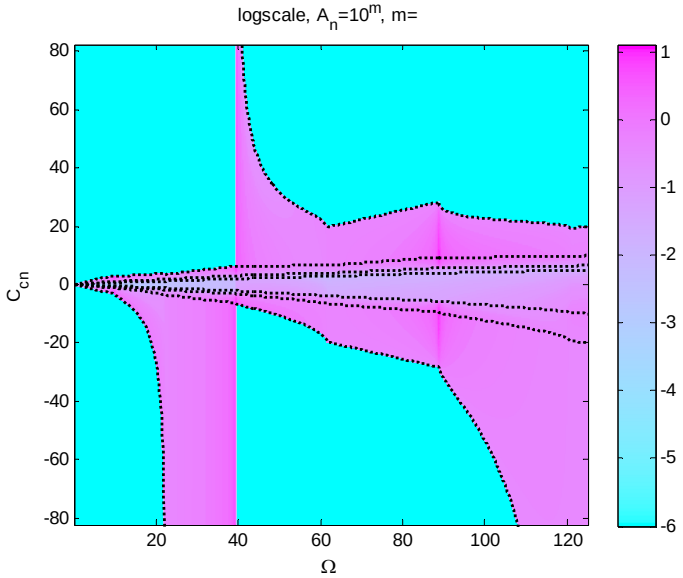


Slika 3.20. *Izgled realne _____ i imaginarne -------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova (desno)*

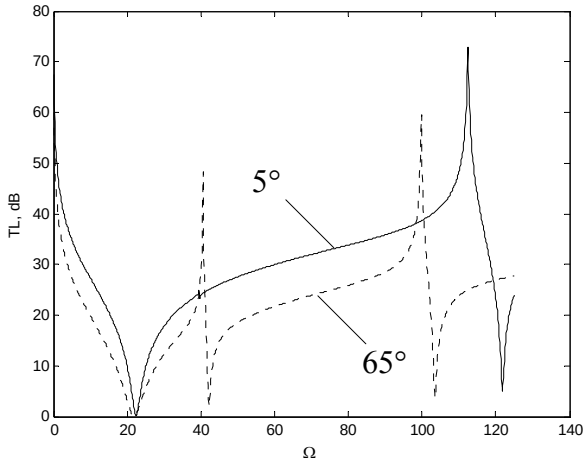
Iz slika 3.18-3.20 vidljivo je podudaranje nove funkcije oblika na slici 3.18 s rješenjem po metodi virtualnog rada na slici 3.20 i ne podudaranje s funkcijom oblika na slici 3.19 [33], čime je potvrđena točnost nove funkcije oblika (uz izvod u poglavlju 2.2.2).

3.3.6. Dijagram za analizu slobodnih i prisilnih vibracija

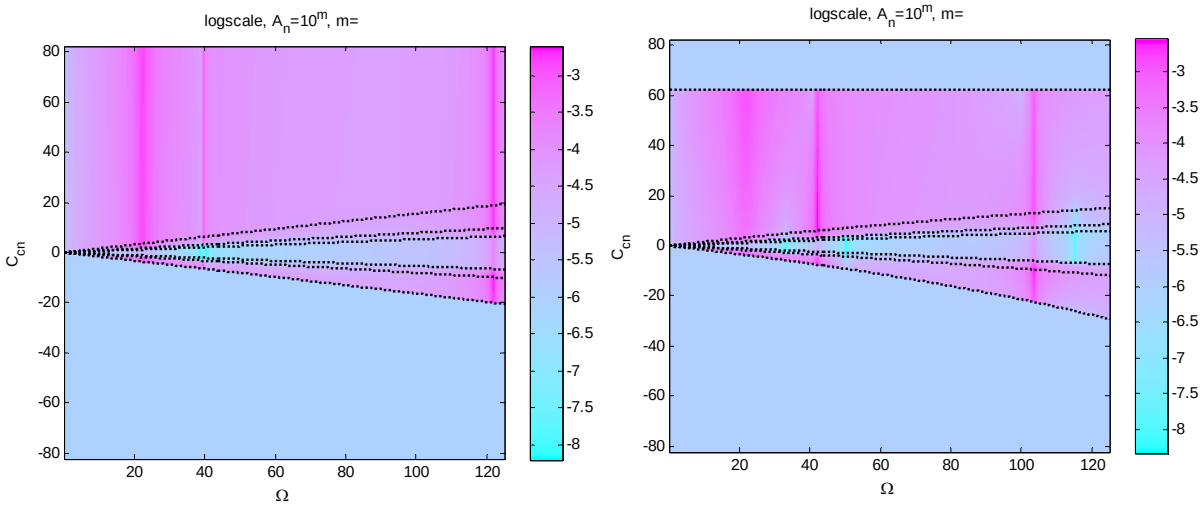
Sa ciljem jasnijeg praćenja akustičkog odziva opisanog pomoću grupe prostornih harmonijskih valova osmišljen je dijagram na slici 3.21 (poglavlje 2.2.2.5.3). Na apscisi dijagrama nalazi se frekvencija a na ordinati fazna brzina. Krivulje prikazane na dijagramu definiraju fazne brzine pojedinih prostornih harmonijskih valova koje postoje na zadanoj frekvenciji. Amplitude valova izražene su bojom. Slijedi da su osnovni parametri za praćenje akustičkog odziva opisanog s redom prostornih harmonijskih valova, a to su n-ti broj vala, fazna brzina vala c_n i amplituda vala A_n za pojedinu frekvenciju, vidljivi odjednom na dijagramu pa je moguće lagano pratiti kako se navedene varijable mijenjaju pri promjeni pojedinih utjecajnih varijabli, npr. upadnog kuta prisilnog vala (slika 3.22).



Slika 3.21. *Slobodne vibracije panela definirane s grupom prostornih harmonijskih valova*



a)



b) *ϑ=5°* *ϑ=65°*

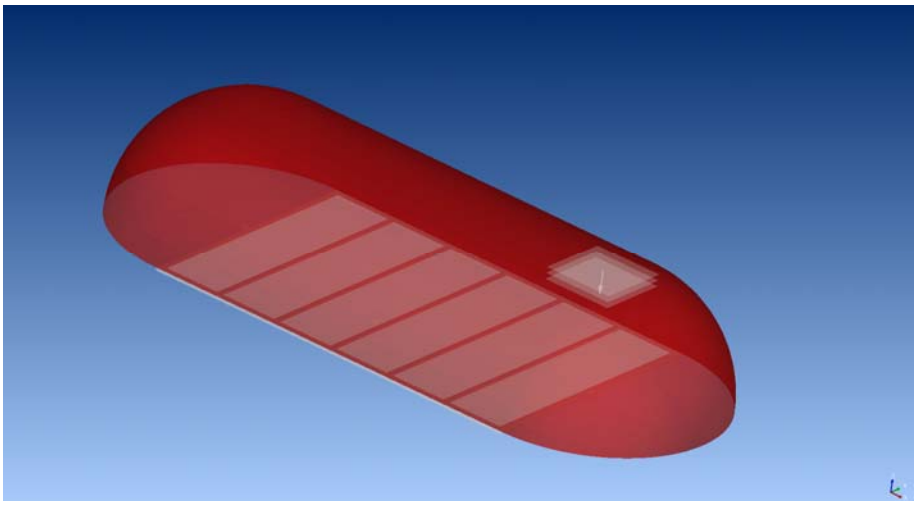
Slika 3.22. *Odziv panela: a) TL i b) vibracijski, definiran s grupom prostornih harmonijskih valova za upadne kuteve ϑ*

3.3.7. Usporedba izračunatih vrijednosti zvučnih transmisijskih gubitaka konačnog panela s metodom virtualnog rada i metodom konačnih elemenata

U sklopu ove disertacije za izračun zvučnog transmisijskog gubitka korišten je računalni program "ACTRAN" (eng. *ACoustic TRANsmission*) koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Točnost izračuna pomoću metode konačnih elemenata može se smatrati visokom ukoliko je pri diskretizaciji panela maksimalna dimenzija konačnog elementa najmanje 6 puta manja od polovice najmanje valne duljine fleksijskog vala u panelu. Uz navedenu preporuku potrebno je i provjeriti konvergenciju. Očito je da je ograničenje ove metode frekvencijski pojas izračuna s obzirom da pri rastu broja konačnih elemenata raste i vrijeme samog izračuna pa su rezultati uspoređeni na užem frekvencijskom pojasu.

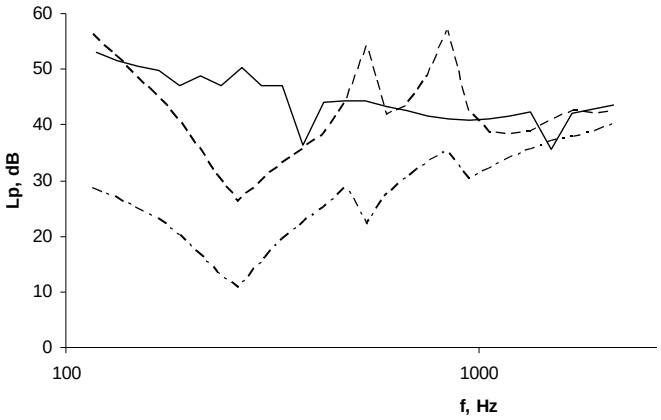
Interesantno je spomenuti da je način izračuna radijacije jednak izračunu koji je opisan u ovoj disertaciji tj. koristi se Rayleigh-ov integral (vidi poglavlje 2.5.2). Razlika je u definiciji difuznog polja i gibanja panela.

Za referentni primjer odabran je model karakteristika jednakih karakteristikama eksperimentalnog modela. Panel je ploča od mjedi sljedećih karakteristika:
-modul elastičnosti $E = 1{,}11 \cdot 10^{11}$ Pa ("ACTRAN") i $E_{ekv}=1{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa,
-gustoća $\rho = 9090$ kg/m^3,
-Poisson-ov koeficijent $\nu = 0{,}37$,
-širina panela $a_D = 489$ mm,
-visina panela $b_D = 303$ mm,
-debljina panela $h = 0{,}5$ mm,
dok je za oslonce odabrana zvuko-izolirajuća brtva koja se koristi za ugradnju pregrada od Knaufa i koja ima karakteristike:
-modul elastičnosti $E = 170648$ Pa ("ACTRAN") i $K_t = 2 \cdot 10^6$ N/m,
-gustoća $\rho = 46$ kg/m^3,
-Poisson-ov koeficijent $\nu = 0{,}49$,
-širina brtve 9 mm,
-visina brtve 3,2 mm,
-udaljenost između oslonaca L=83 mm,
-broj prostornih perioda panela n_p=6 i
-broj oslonaca 5 + oslonci na vanjskom rubu po širini i visini panela.



Slika 3.23. *Model konačnih elemenata akustičkog odziva konačnog periodički oslonjenog panela*

Na slici 3.24 prikazan je usporedni dijagram rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka po metodi virtualnog rada s ograničenjem upadnog kuta na beskonačni panel (ϑ_{lim} = 72°) i s primjenom metode prostornog isječka i rezultata s metodom konačnih elemenata u računalnom programu Actran.



Slika 3.24. *Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada ϑ_{lim} = 72° -.-.-.-.-.-.-, b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka - - - - - -, c) metoda konačnih elemenata, Actran 2D difuzno polje _____.*

Vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka izračunate s metodom virtualnog rada za beskonačnu gredu uz ograničavanje upadnog kuta na 72° i metode konačnih elemenata dobro se podudaraju u srednjem i viskom frekvencijskom pojasu dok u niskom frekvencijskom pojasu dolazi do većih razlika što je uzrokovano zanemarivanjem efekta difrakcije i vlastitih oblika vibriranja koji slijede iz konačnih dimenzija grede.

Vrijednosti zvučnog transmisijskog gubitka izračunate s metodom virtualnog rada i metodom prostornog isječka imaju primjetno uvećane rezultate na niskim frekvencijama što je i očekivano zbog same prirode metode što je objašnjeno u poglavlju 2.5.1. Frekvencijski pojas iznad kojeg se metoda može koristiti uključuje da valna duljina odziva panela bude manja (preporuka i za red veličine) od udaljenosti između oslonaca što se za zadane dimenzije panela ispuni na oko 1000Hz iznad koje je očito bolje podudaranje s referentnim rezultatima po metodi konačnih elemenata. Gornja granica frekvencijskoj pojasa u dijagramu na slici 3.24 (2000Hz) definirana je na temelju mogućnosti korištenog računala s obzirom da više frekvencije analize traže još veći broj konačnih elemenata tj. više radne memorije.

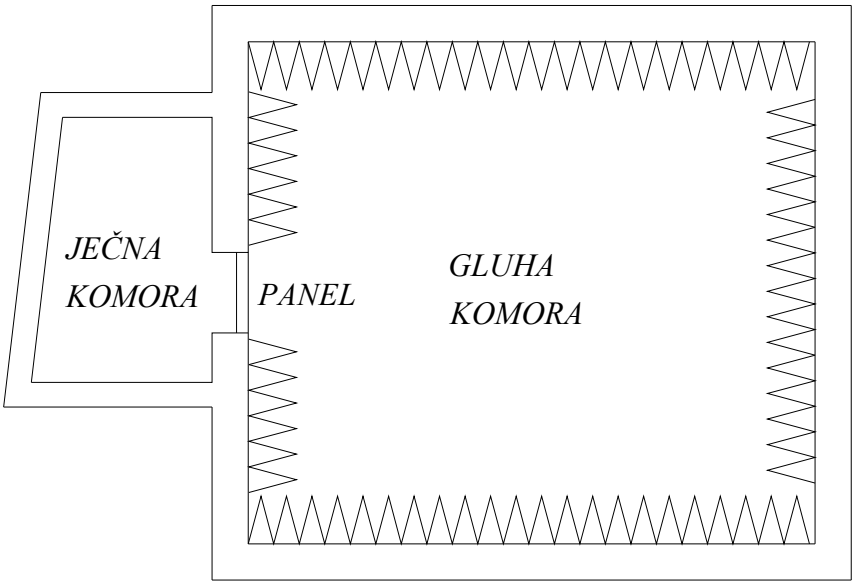
Poglavlje 4.

Eksperimentalna analiza

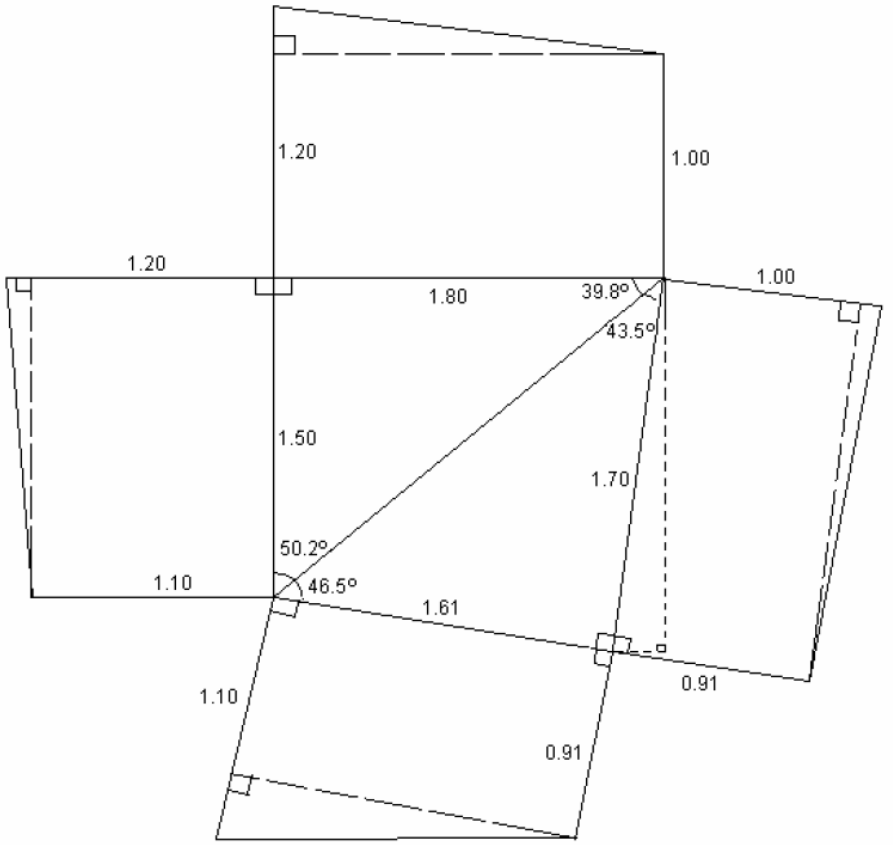
U ovom poglavlju opisana je i prezentirana priprema za eksperimentalna mjerenja i rezultati *TL* mjerenja, koji su potrebni kako bi se potvrdila točnost numeričkih rezultata. Eksperimentalni model sastoji se od dvije prostorije: ječne i gluhe komore. Ječna komora napravljena je prema članku [77], dok su dimenzije gluhe komore odabrane s ciljem što ravnomjernijeg odziva akustičkog polja. Između navedenih komora je otvor u zidu s okvirom na kojeg su pričvršćeni testni paneli. Zvuk se generira u ječnoj komori te se iz razlike usrednjene razine zvučnog tlaka u ječnoj i gluhoj komori izračunava zvučni transmisijski gubitak *TL*.

4.1. Opis eksperimentalnog modela

Na slici 4.1 prikazan je tlocrt eksperimentalnog modela koji se sastoji od gluhe komore volumena 23,15 m^3 i ječne komore volumena 2,86 m^3 s neparalelnim ravnim stranicama i otvora između komora u koji je ugrađen panel.



Slika 4.1. *Tlocrt eksperimentalnog modela za mjerenje koeficijenta transmisije zvučne snage TL, dB*



Slika 4.2. *Dimenzije i oblik stijenki ječne komore*

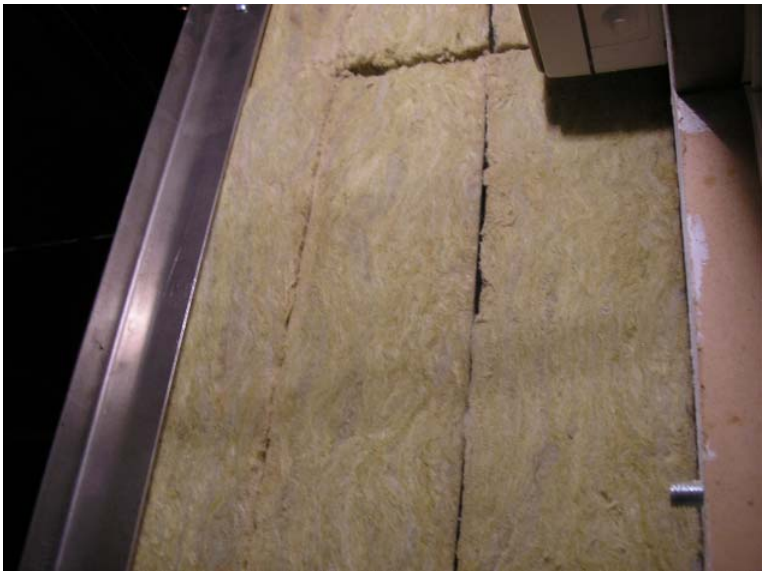
4.1.1. Ječna komora

Dimenzije i oblik stijenki ječne komore prikazane su na slikama 4.2 i 4.3. U članku [77] stijenke su napravljene od šperploče debljine 12 mm jer je ječna komora pomična dok je za ova eksperimentalna mjerenja izrađena nepomična komora s masivnijim i glatkim stijenkama s ciljem veće refleksije (4 stijenke su cigleni zidovi dok su 2 stijenke sendviči od MDF-a (eng. *medium density fiber*) i pijeska). Na unutarnjim površinama ječne komore postavljene su keramičke pločice. Prosječna debljina stijenki je 15 cm.

Slika 4.3. *Izgled ječne komore*

4.1.2. Gluha komora

S obzirom da se numerički izračun temelji na nepostojanju refleksija na transmisijskoj strani panela bilo je potrebno izgraditi gluhu komoru. Radi se o komori oblika kvadra čije su dimenzije ($3,45\,\mathrm{m} \times 3,05\,\mathrm{m} \times 2,2\,\mathrm{m}$) a koje su određene računalnim programom RoomOptimizer s ciljem dobivanja što ravnomjernijeg odziva akustičkog polja. Da bi se spriječile refleksije valova od stijenki komore sve stijenke gluhe komore obložene su s 3 sloja 80 mm Knauf Insulation akustičnih ploča kamene vune s crnim voalom APS GVB (slika 4.4).



Slika 4.4. *Slojevi kamene vune u gluhoj komori*

4.1.3. Zid između ječne i gluhe komore

Između ječne i gluhe komore nalazi se cigleni zid koji zajedno sa žbukom ima debljinu oko 28 cm. U zidu je prozor s okvirom ($489\,\text{mm} \times 303\,\text{mm}$) u koji je ugrađen panel. Moguće je koristiti odvojeno ječnu i gluhu komoru kad se otvor u potpunosti zatvori pomoću skidljive teške betonske ploče uz potpuno brtvljenje (slika 4.5).

Slika 4.5. *Izgled zatvorenog prozora (lijevo: pogled sa strane ječne komore, desno: pogled sa strane gluhe komore)*

U zid su ugrađena i dvostruka vrata od MDF-a debljine 22 mm i kamene vune debljine 80 mm (slika 4.6).

Slika 4.6. *Dvostruka vrata između gluhe komore i prostora oko ječne komore*

4.1.4. Okvir panela

Za eksperimentalna mjerenja napravljene su dvije vrste testnih okvira. S prvom vrstom testnog okvira (slika 4.7) ostvario se rubni uvjet uklještenja po vanjskim rubovima panela koji se može promijeniti u polukruti oslonac uz dodavanje brtvi.

Slika 4.7. *Okvir za vanjski rub panela*

S drugom vrstom testnog okvira (slika 4.8) ostvario se rubni uvjet jednosmjerne periodičke oslonjenosti panela.

Slika 4.8. *Periodički okvir za panel*

Na periodičkom okviru za panel udaljenost simetrale oslonaca iznosi 83 mm a visina otvora okvira je 303 mm. Panel se sastoji od ukupno 6 perioda panela tj. prostora omeđenih s okvirima. Između okvira i panela ugrađeno je više elastičnih brtvi s različitim modulima elastičnosti i prigušenjima. U biti napravljen je stezni okvir od dvije rešetke između kojih se nalaze graničnici (prsteni) koji definiraju silu u brtvi. Promjenom dimenzije graničnika mijenja se sila kojom stezni okvir s brtvom steže panel. Na taj način postignut je ujednačen rubni uvjet po cijelom okviru.

4.2. Mjerna oprema

Za akustička mjerenja korištena je zvučna kartica ROGA Plug.n.DAQ (USB sučelje s windows driverima, 2 kanala, IEPE power 24V/4mA, 16 bit), dva mikrofona Bruel&Kjaer Type 4189 (Prepolarized Free-field ½”), omnodirekcijski zvučnik i računalni program ARTA [80], a za mjerenja vibracija korišten je mjerni uređaj Schenck Vibroport 41 s beskontaktnim senzorima Schenck IN-085 (slika 4.9).

Slika 4.9. *Mjerna oprema (redom: mikrofon, mjerna kartica, omnodirekcijski zvučnik, senzor za vibracije i mjerni uređaj Vibroport 41)*

4.3. Rezultati mjerenja referentnih fizikalnih veličina

Cilj mjerenja je definirati fizikalne veličine koje su ulazni parametri za numerički izračun kao i fizikalne veličine koje se mogu usporediti s rezultatima numeričkog izračuna. Ulazni parametri za numerički izračun dijele se na parametre vezane uz panel i elastične oslonce od kojih će se za neke definirati i njihova ekvivalentna vrijednost.

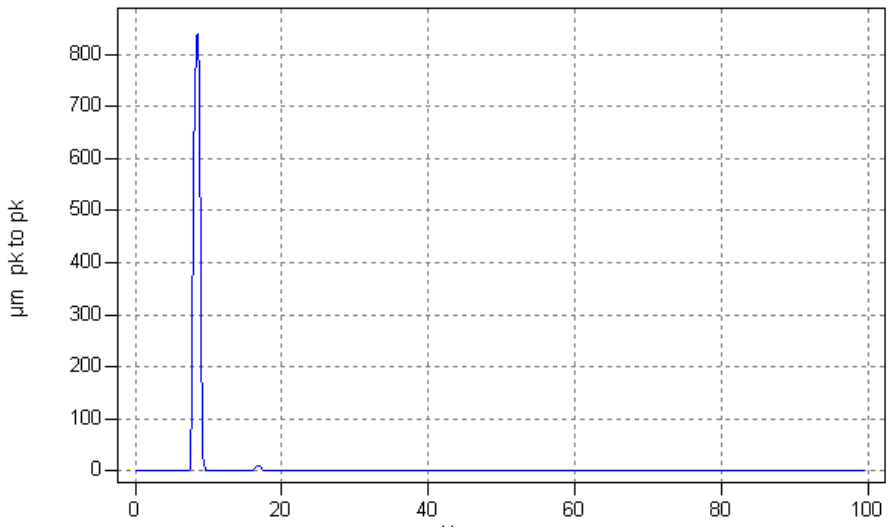
4.3.1. Panel

Za panel je odabrana tanka ploča od mjedi dimenzija $0,498 \times 0,321 \times 0,0005\,\mathrm{m}$. Gustoća panela odredila se po izrazu

$$\rho = \frac{m_{UK}}{V} = \frac{0,713}{0,498 \cdot 0,321 \cdot 0,0005} = 9090\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

gdje je m_{UK} masa panela a V volumen panela.

Poissonov koeficijent materijala panela odabran je iz dostupne literature (ν=0,37) za materijal mjed. Potrebno je primjetiti da je temeljni model beskonačan i da period grede ima malu debljinu u odnosu na udaljenost između oslonaca i time spada pod grede za koje se Poissonov koeficijent ne koristi. Međutim s obzirom da se model beskonačne grede koristi za opisivanje konačnog duguljastog panela koji ima konačnu visinu napravljen je kompromis na način da se koristio Poissonov koeficijent u izrazu za modul elastičnosti tanke grede.



Slika 4.10. *Mjerenje impulsnog odziva*

Modul elastičnosti panela odredio se iz frekvencije 1. oblika vibriranja duguljaste trake dimenzija ($0{,}185 \times 0{,}0275 \times 0{,}0005$ m) koja je uklještena na jednom kraju (slika 4.11 desno). Izmjerena je frekvencije 1. oblika vlastitog vibriranja: $f_1 = 8{,}25$ Hz .

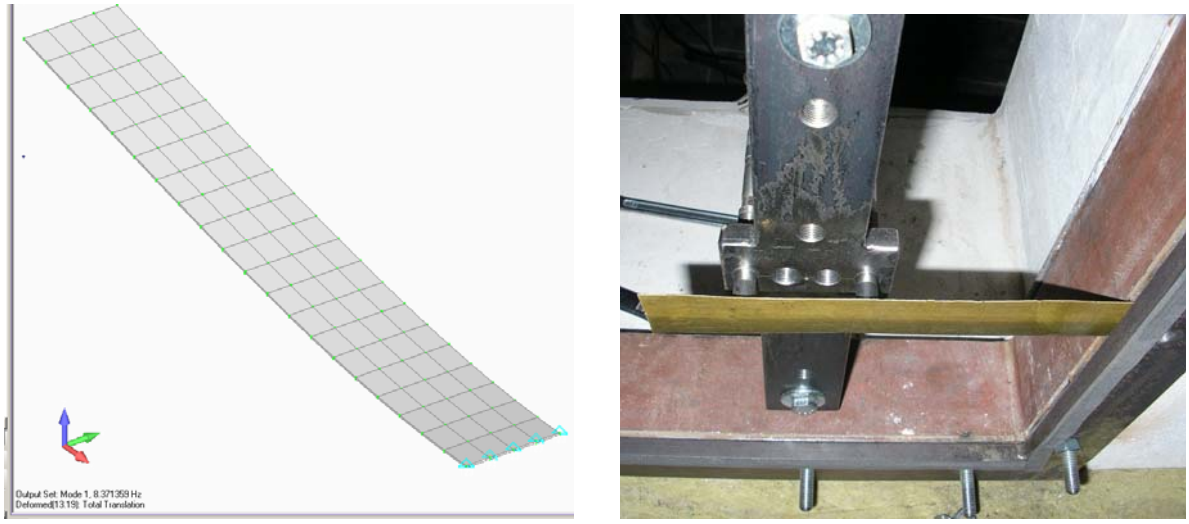
Izraz za izračun vlastitih frekvencija vibriranja homogene grede čija je duljina mnogo veća od dimenzija poprečnog presjeka po metodi Rayleigh-Ritz-a (3.1) ima oblik

$$\omega_n = a_n \sqrt{\frac{EI}{m_g l^4}}$$

gdje je EI fleksijska krutost grede, l duljina grede, m_g masa po jedinici duljine i a_n numerička konstanta koja za 1. oblik vibriranja iznosi a_1 = 3,52 po Rayleigh-Ritz metodi [75]. Iz navedenog izraza (4.1) slijedi izraz za određivanje modula elastičnosti materijala grede

$$E = \frac{m_g l^4}{I}\left(\frac{\omega_n}{a_n}\right)^2 = \frac{12\rho \cdot l^4}{h^2}\left(\frac{2\pi f_n}{a_n}\right)^2 \tag{4.1}$$

te je dobiven modul elastičnosti $E = 1{,}11 \cdot 10^{11}$ Pa .

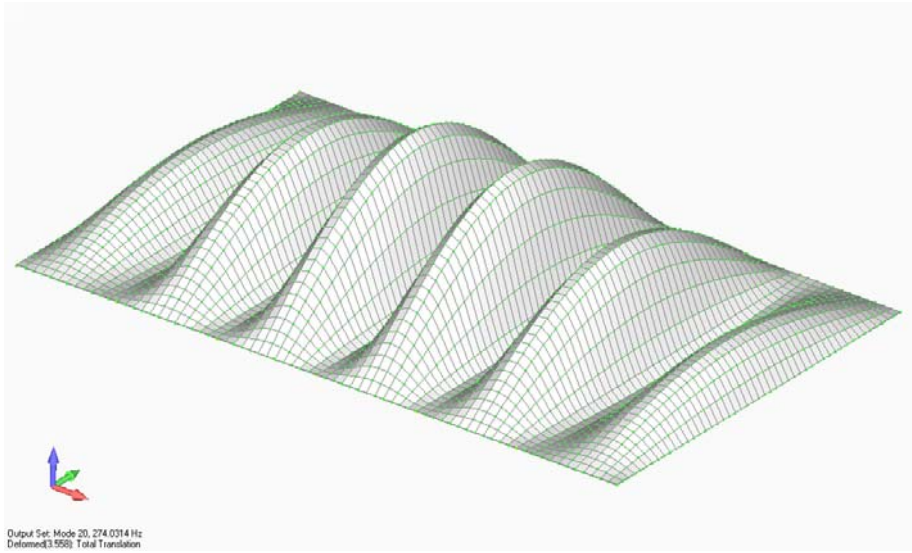


Slika 4.11. *Provjera frekvencije 1. oblika vibriranja*

Koristeći računalni program "FEMAP" potvrđena je dobivena vrijednosti modula elastičnosti.

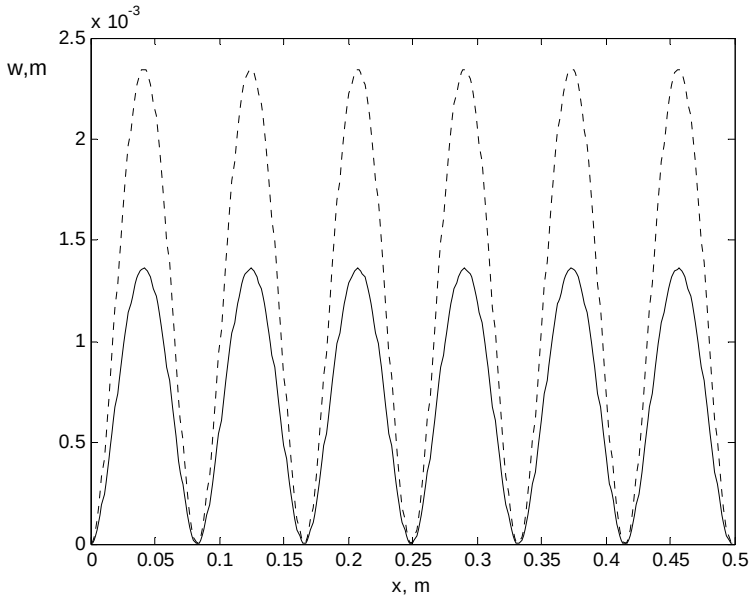
S obzirom da je model grede koji se koristio u izračunu beskonačan dok je eksperimentalni model konačan, potrebno je odrediti ekvivalentni modul elastičnosti za beskonačan model koji se određuje iz podudaranja frekvencije referentnog vlastitog oblika vibriranja numeričkog modela i računalnog programa "FEMAP".

Referentni oblik vibriranja periodički oslonjenih panela pojavljuje se na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog frekvencijskog propagacijskog pojasa i po obliku je jednak prvom vlastitom obliku grede konačne duljine jednog perioda beskonačne grede koja je uklještena na oba ruba. Cilj je definirati navedenu frekvenciju sa računalnim programom "FEMAP" za spriječene pomaka u osloncima po *z*-osi (f_{gg1pp}=274,03 Hz).



Slika 4.12. *Prikaz referentnog oblika vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa*

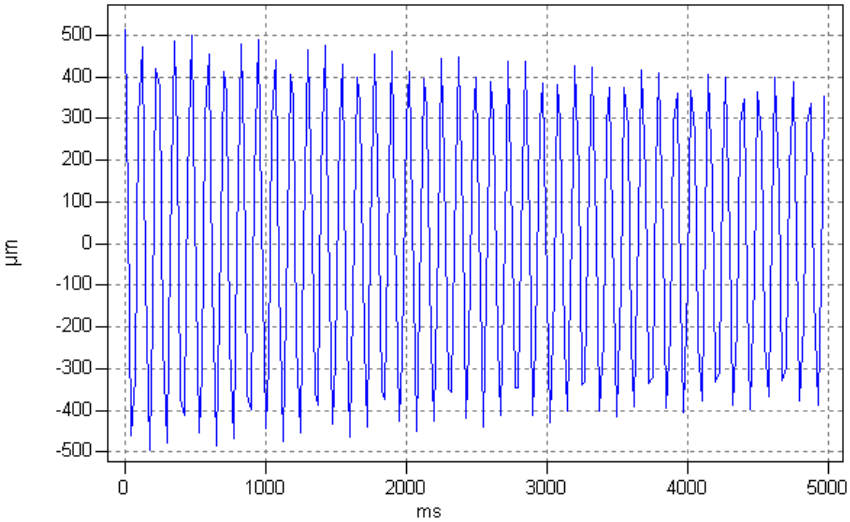
U nastavku se natražno iz beskonačnog modela grede odredio ekvivalentni modul elastičnosti s kojim je gornja frekvencija prvog propagacijskog pojasa jednaka istoj dobivenoj sa računalnim programom "FEMAP".



Slika 4.13. *Oblik vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa izračunat pomoću računalnog modela u Matlab-u, _____ realni i - - - - - imaginarni dio*

U numeričkom modelu beskonačne grede iz E=1,11·10^{11} Pa dobiva se f_{gg1pp}=263,65 Hz, dok se iz E_{ekv}=1,2·10^{11} Pa dobiva f_{gg1pp}=274,14 Hz što se odabire kao dovoljno točna vrijednost.

Prigušenje u materijalu panela određeno je eksperimentalno iz mjerenja na slici 4.14.



Slika 4.14. *Vremenski odziv trake od mjedi*

Iz izmjerenog impulsnog odziva na slici 4.14 očitane su vrijednosti amplituda i trenutaka odziva: 1. maksimum (475 ms, 497 µm) i 36. maksimum (4625 ms, 398 µm) uz provjeru pomaka od nultog položaja apscise. U nastavku je izračunata veličina logaritamskog dekrementa

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = \frac{1}{35}\ln\left(\frac{0,497}{0,398}\right) = 0,0063 \tag{4.2}$$

pa se iz jednakosti

$$\delta = 2\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{4.3}$$

definirao izraz za omjer prigušenja ζ i odredila njegova veličina

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0,0063}{\sqrt{4\pi^2+0,0063^2}} = 0,001\,.$$

Ukoliko se pretpostavi da u materijalu nastaje sila prigušenja zbog unutarnjeg trenja (histerezno prigušenje) koeficijent prigušenja materijala η izračunava se iz izraza

$$\eta = 2\zeta = 0,002 \tag{4.4}$$

i kompleksni modul elastičnosti panela se može napisati u obliku

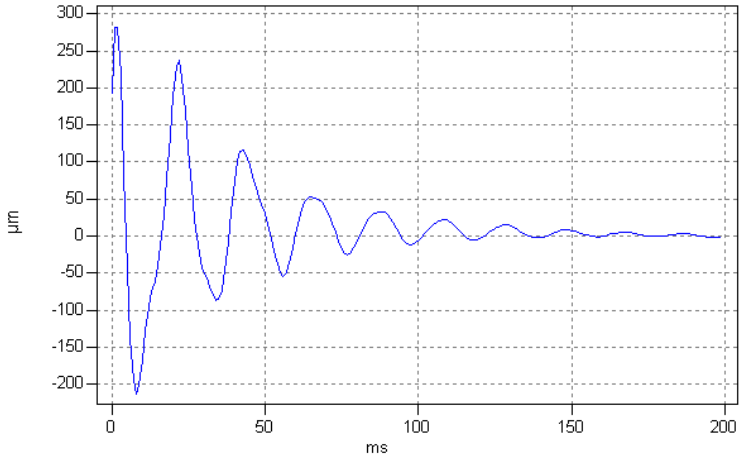
$$E^*_{ekv} = E_{ekv}\left(1+j\eta\right). \tag{4.5}$$

4.3.2. Brtva

Prigušenje u brtvama odredilo se iz vibracijskog odziva nedeformabilne kocke od čelika (slika 4.15) koje je impulsno pobuđeno na aksijalno vibriranje.

Slika 4.15. *Prikaz mjerenja prigušenja u brtvi*

Zbog prigušenja u brtvi vibracije se smanjuju pa slijedi izračun prigušenja.



Slika 4.16. *Mjerenje prigušenja u brtvi*

Iz izmjerenog impulsnog odziva očitane su ove vrijednosti: 1. maksimalna vrijednost (22 ms, 236,8 μm) i 5. maksimalna vrijednost (108 ms, 22,91 μm) uz postojanje pomaka nulte koordinate *z*-osi na položaj 2,08 μm. Slijedi izračun logaritamskog dekrementa po izrazu (4.2)

$$\delta_D = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{0,2368-0,00208}{0,02291-0,00208}\right) = 0,606$$

pa iz izraza (4.3) slijedi izraz za omjer prigušenja ζ

$$\zeta = \frac{\delta_D}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{0,606}{\sqrt{4\pi^2+0,606^2}} = 0,096\,.$$

Ukoliko se pretpostavi da u materijalu nastaje sila prigušenja zbog unutarnjeg trenja (histerezno prigušenje) koeficijent prigušenja materijala η izračunava se iz izraza (4.4)

$$\eta = 2\zeta = 0,192$$

i kompleksni modul elastičnosti panela se može napisati u obliku

$$E^*_{ekv} = E_{ekv}\left(1+j\eta\right).$$

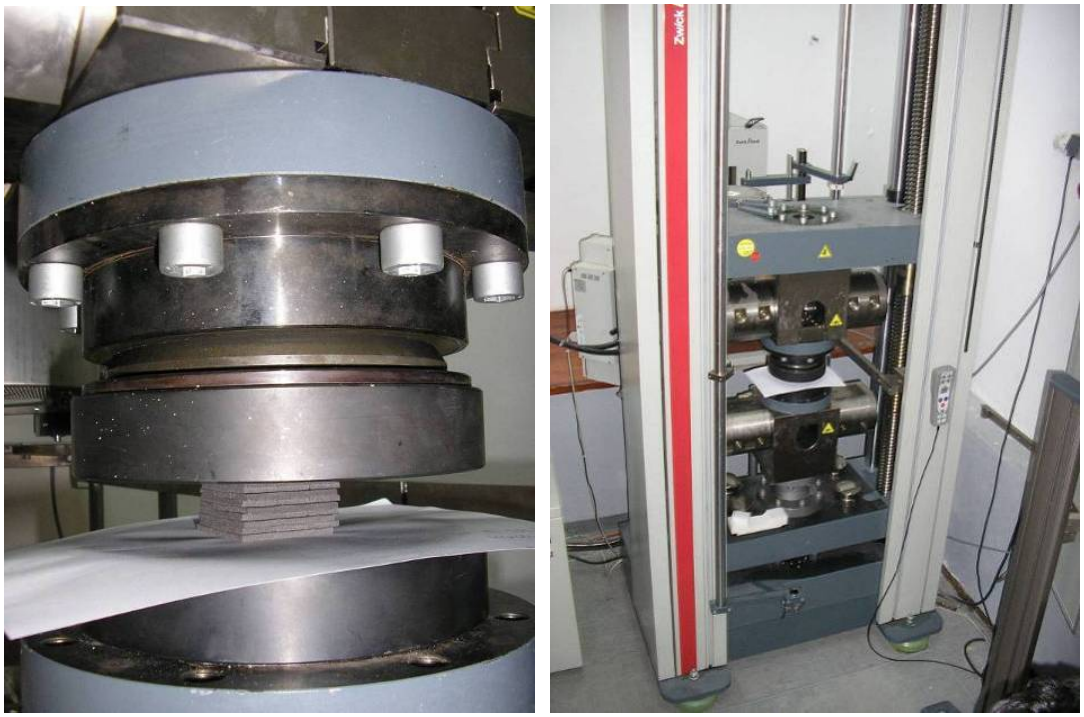
Poissonov koeficijent za brtvu odabran je iz literature ν=0,49.

Gustoća brtve određena je iz volumena brtve i mase eksperimentalnog uzorka po izrazu

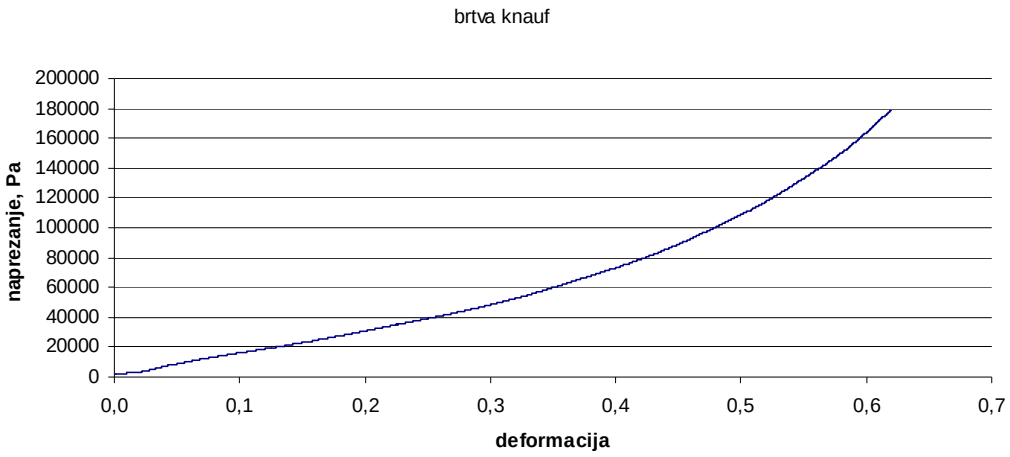
$$\rho = \frac{m}{V}$$

i iznosi 46 kg/m^3.

Modul elastičnosti brtve određen je eksperimentalno. Potrebno je primjetiti da je brtva nelinearna pa je potrebno s obzirom na stlačenost brtve koristiti odgovarajući modul za daljnji izračun. Za određivanje modula elastičnosti brtve izrađeni su testni uzorci cca. $0,05\times0,05\times0,032$ m koji su opterećeni na tlak na kidalici (slika 4.17) te je dobiven dijagram $\sigma(\varepsilon)$ (slika 4.18).



Slika 4.17. *Kidalica, Laboratorij za čvrstoću Tehničkog fakulteta Rijeka*



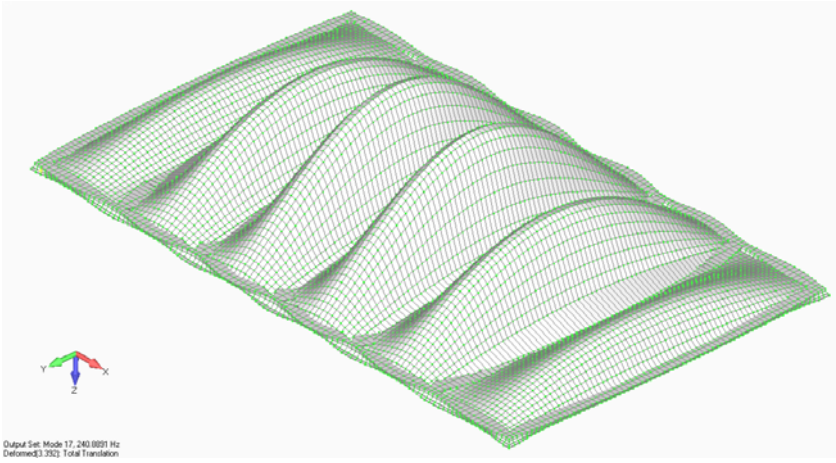
Slika 4.18. *Dijagram $\sigma(\varepsilon)$ za brtvu, mjereno na kidalici na slici 4.17*

Očito je da se modul elastičnosti brtve mijenja pri rastu opterećenja pa je iz dijagrama na slici 4.18 definiran modul elastičnosti brtve kad je panel u ravnotežnom položaju tj. na sredini između okvira.

Slika 4.19. *Dva periodična okvira na konstantnoj udaljenosti s ciljem definiranja krutosti poprečne opruge u osloncima*

Modul elastičnosti brtve odredio se iz udaljenosti poprečnih okvira koja je određena sa duljinom graničnika, 6 mm. S obzirom da je visina brtvi 3,2 mm i da je panel debljine 0,5 mm slijedi da je nakon montaže brtva stisnuta na dimenziju 2,75 mm tj. za pomak 0,45 mm. Iz nagiba tangente na krivulju na slici 4.18 izračunava se modul elastičnosti E = 170684 Pa.

S obzirom da u stvarnosti brtva ima konačne dimenzije a u numerički model se uvrštava samo vrijednost krutosti poprečne opruge ona je određena iz gornje granične frekvencije prvog propagacijskog frekvencijskog pojasa f_{gg1pp}= 240,89 Hz dobivene pomoću računalnog programa "FEMAP" nakon dodavanja brtvi.



Slika 4.20. *Panel između dvije brtve*

U nastavku se natražno iz beskonačnog modela grede odredila ekvivalentna krutost poprečne opruge K_{tekv} s kojom je gornja frekvencija prvog propagacijskog pojasa jednaka istoj dobivenoj s računalnim programom "FEMAP" (K_{tekv}= $2 \cdot 10^6$ N/m).

4.3.3. Određivanje faktora korekcije

Razina akustičkog odziva ploče opisuje se s veličinom zvučnog transmisijskog gubitka. Po proceduri mjerenja određuje se konstantni faktor korekcije k_{CF} iz mjerenja vremena odjeka u gluhoj komori nakon čega se izvrši mjerenje zvučnog transmisijskog gubitka za periodički oslonjen panel na brtve pod djelovanjem 2D difuznog polja.

Procedura mjerenja zvučnog transmisijskog gubitka panela *TL* započinje s mjerenjem razine zvučnog tlaka u ječnoj komori, $L_{p,ječna}$, uz djelovanje zvučnog izvora (omnidirekcijski zvučnik, slika 4.9) koji je pobuđen sa signalom bijele buke. Simultano se mjeri i razina zvučnog tlaka novonastale buke u gluhoj komori, $L_{p,gluha}$. Iz navedenih razina zvučnog tlaka izračunava se koeficijent redukcije buke između ječne i gluhe komore ΔL_p po tercnim frekvencijskim pojasima

$$\Delta L_p = L_{p,ječna} - L_{p,gluha} \,. \tag{4.6}$$

Koeficijent zvučnih transmisijskih gubitaka kroz panel *TL* definira se iz izraza

$$TL = \Delta L_p + 10\log_{10}\left(\frac{A}{S_a \alpha_a}\right) \tag{4.7}$$

gdje je S_a površina, α_a koeficijent apsorpcije apsorpcijskog materijala i A je površina testnog panela. Član $S_a\alpha_a$ naziva se Sabine-ova apsorpcija.

Drugi član s desne strane jednakosti u izrazu (4.7), tzv. faktor korekcije, ima konstantnu veličinu pri mjerenju testnih panela jer slijedi iz konstantnih varijabli, tj. vrijedi

$$k_{CF} = 10\log_{10}\left(\frac{A}{S_a \alpha_a}\right) = konst. \tag{4.8}$$

Za određivanje faktora korekcije k_{CF} potrebno je odrediti koeficijent apsorpcije apsorpcijskog materijala na stijenkama gluhe komore koji se određuje iz mjerenja vremena odjeka T gluhe komore koristeći Eyring-ov izraz u slučaju kad je koeficijent apsorpcije veći od 0,2

$$T = 0{,}16\frac{V}{-S_a \ln\left(1-\alpha_a\right)} \tag{4.9}$$

gdje je V volumen prostorije. Koeficijent apsorpcije izračunava se po izrazu (4.10) izvedenom iz izraza (4.9)

$$\alpha_a = 1 - e^{-\frac{0{,}16V}{TS_a}} \,. \tag{4.10}$$

U ječnoj komori generira se bijela buka pomoću omnidirekcijskog zvučnika s frekvencijskim pojasem od 100 do 10000 Hz te se iz simultano izmjerenih razina buke u ječnoj, $L_{p,ječna}$, i gluhoj komori, $L_{p,gluha}$, određuje koeficijent redukcije buke između ječne i gluhe komore ΔL_p po izrazu (4.6). Iz izmjerenih vrijednosti koeficijenta redukcije buke ΔL_p i korekcijskih faktora k_{CF} izračunava se koeficijent transmisijskih gubitaka *TL*-a testnih panela po izrazu:

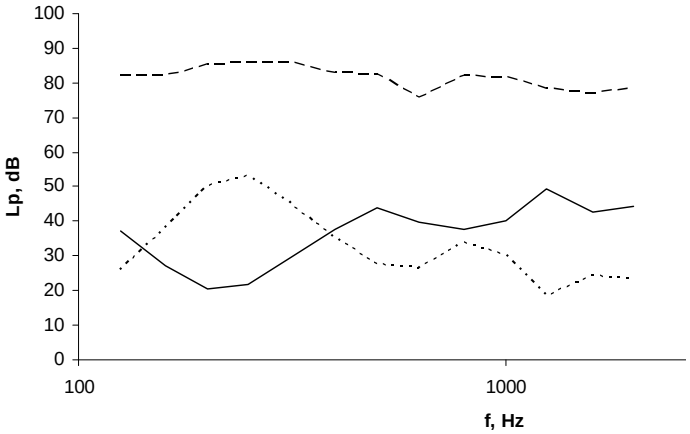
$$TL = \Delta L_p - k_{CF,lab} \,. \tag{4.11}$$

f (Hz)	$L_{p,jecna}$ (dB)	$L_{p,gluha}$ (dB)	ΔL (dB)	$\alpha_{a,Eyring}$	$k_{CF,Eyring}$
125	81,47	29,59	51,88	0,10	14,74
160	81,91	41,15	40,76	0,13	13,49
200	85,23	52,12	33,11	0,16	12,53
250	86,31	52,68	33,63	0,19	11,74
315	85,12	43,53	41,59	0,19	11,74
400	83	34,74	48,26	0,24	10,77
500	82,16	26,97	55,19	0,21	11,28
630	75,74	25,42	50,32	0,24	10,77
800	80,89	32,59	48,3	0,24	10,77
1000	80,61	29,84	50,77	0,24	10,77
1250	78,53	18,24	60,29	0,24	10,77
1600	77,47	24,11	53,36	0,24	10,77
2000	78,76	23,45	55,31	0,24	10,77

Tablica 4.1. *Vrijednosti korekcijskog faktora*

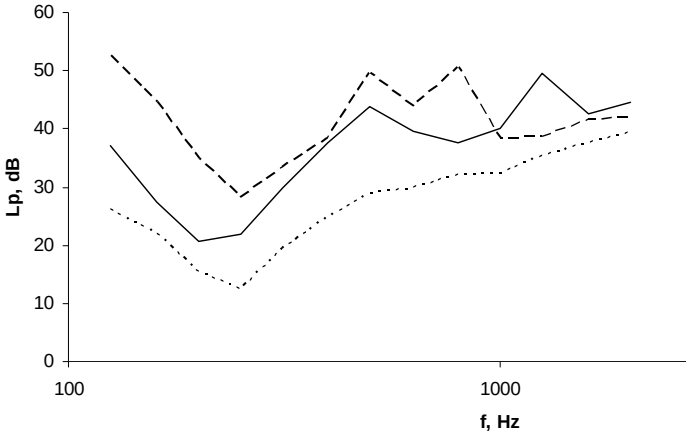
4.3.4. Analiza rezultata zvučnog transmisijskog gubitka

Mjerenja razine bijele buke u ječnoj komori i razine transmitirane buke u gluhoj komori prikazana su na slici 4.21 kao i izračunati zvučni transmisijski gubitak *TL*.



Slika 4.21. *Izmjerene veličine razine buke u ječnoj komori* (- - - - -), *gluhoj komori* (.....) *i određeni zvučni transmisijski gubitak (_____)*

U nastavku se eksperimentalno određeni zvučni transmisijski gubitak uspoređuje s zvučnim transmisijskim gubitkom određenim s metodom virtualnog rada i metodom prostornog isječka.



Slika 4.22. *Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada* θ_{lim} *= 72° ....., b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka - - - - - -, i c) eksperimentalni rezultati _____.*

Na dijagramu na slici 4.22 vidljivo je bolje podudaranje rezultata za metodu prostornog isječka što je teorijski potkrepljeno i s numeričkim rezultatima pomoću metode konačnih elemenata u poglavlju 3.3.7. Podudaranje rezultata raste s rastom frekvencije.

Poglavlje 5.

Zaključak

Sa ciljem zadovoljavanja zahtjeva za zaštitu od buke te nosivosti i optimalnih cijena konstrukcija u praksi se često koriste paneli koji su periodički oslonjeni na oslonce (npr. plivajući podovi, pregrade u avionima i brodovima, itd.). Takvi paneli imaju optimalne akustičke karakteristike i relativno malu masu te se zbog dodatnih oslonaca mogu opteretiti silom. Periodičko oslanjanje na oslonce uzrokuje pojavljivanje velikog broja novih vlastitih frekvencija što uzrokuje potrebu korištenja materijala s povećanim prigušenjem. Utjecaj prigušenja u panelu na njegov akustički odziv je opširno obrađen u postojećoj literaturi dok je u ovoj disertaciji dan naglasak na određivanje utjecaja prigušenja u osloncima na akustički odziv panela uz korištenje metode virtualnog rada dok je pomak panela definiran s redom prostornih harmonijskih valova.

Jednosmjerno periodički oslonjen panel konačnih dimenzija kome je visina jednog perioda panela minimalno 3 puta veća od njegove širine tj. udaljenosti između oslonaca uz djelovanje ravninskog akustičkog polja, u kojem su vektori akustičkih tlakova uvijek u poprečnoj ravnini na panel, može se modelirati kao periodički oslonjena greda po relevantnoj

literaturi. Paneli takvih dimenzija su česti u praksi pa se stoga navedeni model odabrao za analizu akustičkog odziva panela. Odabrana je beskonačna duljina grede za koju izračun ne uključuje postojeće refleksije od vanjskih rubova što pojednostavljuje izraze za gibanje panela dok se akustička radijacija približila vrijednostima konačnih panela koristeći metodu prostornog isječka.

U ovoj disertaciji izrađeno je vlastito programsko rješenje "AKUPAN" u programskom paketu "MATLAB". Programsko rješenje uključuje izračunavanje slobodnog i prisilnog gibanja periodički oslonjene grede. Vrijednost navedenog pristupa je u mogućnosti usporedbe dobivenih rezultata u sklopu čega je predložen dijagramski prikaz vibracijskog odziva grede opisanog s redom prostornih harmonijskih valova u kojem su bojom definirani intenziteti amplitude pojedinih valova dok je iznos njihovih faznih brzina na ordinati a frekvencije izračuna na apscisi. S navedenim pristupom moguće je pratiti promjene u vibracijskom odzivu panela pri promjeni upadnog kuta ravninskog akustičkog vala iz čega slijede jasni zaključci o prirodi akustičkog odziva panela. Po saznanju autora opisani pristup do sada nije publiciran.

Fazne brzine pojedinih prostornih harmonijskih valova izračunate su iz faznog kuta vibracija točaka na jednom periodu panela. Ukoliko se fazni kut u točkama grede linearno smanjuje u pozitivnom smjeru (koordinatnog sustava) promatrani val se giba u pozitivnom smjeru i obratno, ukoliko fazni kut linearno raste u pozitivnom smjeru promatrani val se giba u negativnom smjeru. Veličina fazne brzine slijedi iz iznosa nagiba krivulje fazne brzine u funkciji o položaju na jednom periodu panela (npr. kod stojnih valova se dobije horizontalni pravac gdje je fazni kut jednak 0 ili π).

Pri nultom upadnom kutu ravninskog akustičkog vala tj. kad je njegova fronta paralelna s panelom rezonantni odziv panela događa se na gornjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojaseva gdje vibriranje ima istostrani uklješteni oblik vibriranja. Navedeni oblik vibriranja rezonira s prisilom i zato dolazi do povećanja amplituda. Na donjim graničnim frekvencijama propagacijskih pojaseva amplitude su minimalne jer vibriranje ima sinusni oblik pa prisila istovremeno gura jedan brijeg a suprostavlja se susjednom. Pri rastu upadnog kuta dolazi do pomaka rezonantnih frekvencija vibriranja. Gornja granična frekvencija prvog propagacijskog pojasa snizuje se kao i amplitude odgovarajućih prostornih harmonijskih valova dok donja granična frekvencija drugog propagacijskog pojasa raste kao i amplitude odgovarajućih prostornih harmonijskih valova. Navedeno se ponavlja u svim propagacijskim pojasima. Opisani događaji lako se mogu pratiti u predloženom dijagramu.

Izvedena je funkcija oblika slobodnog vibriranja beskonačne periodički oslonjene grede na jednostavne oslonce, čiji je oblik uspoređen s postojećim u literaturi te je potvrđena njezina točnost. Iz dinamičke ravnoteže grede izračunate su propagacijske konstante koje se koriste za definiranje prostornih harmonijskih valova iz čije sume slijedi ukupno gibanje panela. U ovoj disertaciji opisan je njihov izračun korištenjem metode virtualnog rada na slobodne vibracije što po saznanju autora također do sada nije publicirano.

U disertaciji je analiziran utjecaj brojnosti prostornih harmonijskih valova na točnost rezultata, kako zvučnog transmisijskog gubitka tako i propagacijske konstante, te su definirani dijagrami u kojima se vidi utjecaj prigušenja na sustav. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna kao što je i navedeno u literaturi. Međutim, ukoliko sustav nema dovoljno prigušenja maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojaviti će se na nižoj frekvenciji što nije navedeno u literaturi.

U disertaciji je analizirana brzina izračuna amplituda pojedinih prostornih harmonijskih valova pomoću razvoja u red i metode virtualnog rada kod slobodnih vibracija. Definiran je granični broj prostornih harmonijskih valova do kojeg se amplitude prostornih harmonijskih valova brže izračunavaju pomoću metode virtualnog rada nego s razvojem u red. Navedeni broj prostornih harmonijskih valova se snizuje pri rastu prigušenja u sustavu.

U disertaciji je izvršena usporedba dobivenih rješenja vlastitog numeričkog modela s rješenjima programa "ACTRAN" (eng. *ACoustic TRANsmission*) koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Korišteni su isti rubni uvjeti koji su procijenjeni eksperimentalno. Dobivena rješenja programa "ACTRAN" smatraju se točnim i time su referentna za usporedbu. Dobivena je dobra podudarnost rezultata u srednjem i višem frekvencijskom pojasu.

U sklopu disertacije izrađen je eksperimentalni model za mjerenje vibracija panela nastalih zbog djelovanja difuznog zvučnog polja kao i za mjerenje zvučnog transmisijskog gubitka što je omogućeno s izradom ječne i gluhe komore te odgovarajućeg zida s otvorom za panel. Dimenzije ječne i gluhe komore optimizirane su obzirom na dostupni volumen komora. Ječna komora izrađena je po literaturi za male ječne komore s neparalelnim stijenkama. Stijenke komore izrađene su od reflektivnih materijala: betona, pločica, knaufa i mdf-a (eng. *medium density fiber*). Dimenzije gluhe komore optimizirane su s ciljem dobivanja što ravnomjernijeg akustičkog odziva zraka unutar komore. Sve su stijenke obložene s visoko apsorpcijskim materijalima proizvođača KnaufInsulation. Na temelju inicijalnih mjerenja

određena je korelacija između eksperimenta i modela te su uspoređeni dobiveni rezultati. Dobivena je dobra podudarnost rezultata.

Predlaže se nastavak istraživanja u ovim smjerovima:

- razvijanje numeričkog modela s direktnim rješavanjem jednadžbi gibanja slobodnih i prisilnih vibracija periodički oslonjene grede na elastične oslonce i usporedba efikasnosti programskog rješavača s metodom virtualnog rada,

- razvijanje numeričkog modela ortogonalno ukrepljenog panela,

- proširenje eksperimentalnog modela na veći broj perioda i

- primjena numeričkog izračuna na praktične probleme te definiranje novih utjecajnih parametara.

Popis literature

[1] Y.K.Lin, *Free vibrations of continuous skin stringer panels*, Journal of Applied Mechanics 27, pp. 669, 1960.

[2] Y.K. Lin, *Stresses in continuous skin-stiffened panels under random loading*, Journal of Aerospace Science 29, pp. 67, 1962.

[3] Y.K. Lin, I.D. Brown, P.C. Deltschle, *Free vibrations of a finite row of continuous skin stringer panels*, Journal of Sound and Vibration 1, pp. 14, 1964.

[4] C.A. Mercer, *Response of a multi-supported beam to a random pressure field*, Journal of Sound and Vibration 2, pp. 293, 1965.

[5] A.W. Leissa, *Vibration of plates*, NASA SP-160, 1969.

[6] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*. New York: Mercel Dekker, Inc. 2004.

[7] M. Heckl, *Wave propagation on beam-plate systems*, Journal of the Acoustical Society of America 33 (1961) pp. 640-651.

[8] D.J. Mead, *A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic system with multiple coupling*, Journal of Sound and Vibration 27 (1973) pp. 235-260.

[9] D.J. Mead, *Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping*, Journal of Sound and Vibration 40 (1975) pp. 19-39.

[10] Y. Yong, Y.K. Lin, *Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic strustures of finite length*, Journal of Sound and Vibration 129 (1989) pp. 99-118.

[11] A.K. Roy, R. Plunkett, *Wave attenuation in periodic structures*, Journal of Sound and Vibration 104 (1986) pp. 395-410.

[12] U. Orrenius, S. Finnveden, *Calculation of wave propagation in rib stiffened plate structures*, Journal of Sound and Vibration 198 (1996) pp. 203-224.

[13] P.G. Bremner, *Vibro-acoustics of ribbed structures - a compact modal formulation for SEA models*, Proceedings of the Noise-Con 94, Ft. Lauderdale, Florida, May 1994.

[14] V. Cotoni, R.S. Langley, P.J. Shorter, *A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory*, Journal of sound and Vibration 318 (2008) pp. 1077-1108.

[15] A. Mejdi, N. Atalla, *Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened plates with eccentric stiffeners subject to airborne and structure-borne excitations*, Journal of Sound and Vibration 329 (2010) pp. 4422-4439.

[16] J. Wei, M. Petyt, *A method of analyzing finite periodic structures. Part 1: theory and examples*, Journal of Sound and Vibration 202, pp. 559-569, 1997.

[17] J.Wei, M. Petyt, *A method of analyzing finite periodic structures. Part 2: comparison with infinite periodic structure theory*, Journal of Sound and Vibration 202, pp. 571-583, 1997.

[18] B.A.J. Mustafa, R. Ali, *Prediction of natural frequency of vibration of stiffened cylindrical shells and orthogonally stiffened curved panels*, Journal of Sound and Vibration 113 (1987) pp. 317.

[19] M. Barrette, A. Berry, O. Beslin, *Vibration of stiffened plates using hierarchical trigonometric functions*, Journal of Sound and Vibration 235 (8) (2000) pp. 727-747.

[20] D.W. Fox, V.G. Sigillito, *Bounds for frequencies of rib reinforced plates*, Journal Sound and Structural Vibration 69 (4) (1982) pp. 497-507.

[21] D.W. Fox, V.G. Sigillito, *Bounds for eigen frequencies of a plate with an elastically attached reinforcing rib*, International Journal of Solids and Structures 18 (3) (1982) pp. 235-247.

[22] E.J. Sapountzakis, J.T. Katsikadelis, *Dynamic analysis of elastic plates reinforced with beams of doubly-symmetrical cross section*, Computational Mechanics 23 (1999) pp. 429-430.

[24] M. Heckl, *Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structure*, Journal of Acoustical Society of America 36, pp. 1335, 1964.

[25] D.J. Mead, E.M. Wilby, *Forced vibration of periodically-supported beams subjected to convected, homogeneous pressure fields*, University of Southampton Report., 1971.

[26] D.J. Mead, K.K. Pujara, *Space-harmonic analysis of periodically supported beams: response to convected random loading*, Journal of Sound and Vibration 14, pp. 525-541, 1971.

[27] R. D. Ford, *The response of structures to jet noise*, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1962.

[28] C.A. Mercer, C. Seavey, *Prediction of natural frequencies and normal modes of skin stringer panel rows*, Journal of Sound and Vibration 6, 149, 1967.

[29] G. Maidanik, *Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields*, Journal of the Acoustical Society of America 34 (6) (1962) pp. 809-826.

[30] F. Fahy, *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*, Academic Press, London, 2007.

[31] G.P. Mathur, B.N. Tran, J.S. Bolton, N.-M. Shiau, *Sound transmission through stiffened double-panel structures lined with elastic porous materials*, Proceedings of 14th DGLR/AIAA Aeroacoustical Conference, pp. 102-105, 1992.

[32] J.-H. Lee, J. Kim, *Analysis of sound transmission through periodically stiffened panels by space-harmonic expansion method*, Journal of Sound and Vibration 251(2), pp. 349-366, 2002.

[33] D.J. Mead, *Free wave propagation in periodically supported, infinite beams*, Journal of Sound and Vibration 11, pp. 181-197, 1970.

[34] D.J. Mead, *Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton*, Journal of Sound and Vibration 190 (1996) pp. 495-524.

[35] E.H. Dowell, C.-H. Chao, D.B. Bliss, *Acoustoelasticity: general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparison with experiments*, Journal of Sound and Vibration 52, pp. 519-542, 1977.

[36] W. Desmet, P. Sas, *Sound transmission of finite double-panel partitions with sound absorbing material and panel stiffeners*, Proceedings of First Joint CEAS/AIAA Aeroacoustical Conference (16th AIAA Aeroacoustics Conference), AIAA-95-043, pp. 311-320, 1995.

[37] O.K. Bedair, *Fundamental frequency determination of stiffened plates using sequential quadratic programming*, Journal of Sound and Vibration 199, pp. 87-106, 1997.

[38] S. Mukherjee, S. Parthan, *Wave propagation in one-dimensional multy-bay periodically supported panels under supersonic fluid flow*, Journal of Sound and Vibration 186, pp. 71-86, 1995.

[39] C. Maurys, P.O. Matte, *Sound transmission trough a rib-stiffened plate comparison of light-fluid approximation with experimental results*, Journal of Sound and Vibration 249 (1) (2002) pp. 206-212.

[40] T.R. Lin, J. Pan, *A closed form solution for the dynamic response of finite ribbed plates*, Journal of the Acoustical Society of America 119 (2) (2006) pp. 917-925.

[41] T.R. Lin, *A study of modal characteristics and the control mechanism of finite periodic and irregular ribbed plates*, Journal of the Acoustical Society of America 123 (2) (2008) pp. 729-737.

[42] B. Liu, L. Feng, A. Nilsson, *Sound transmission through curved aircraft panels with stringer and ring frame attachments*, Journal of Sound and Vibration 300 (2007) pp. 949-973.

[43] A.J. Cooper, D.G. Crighton, *Response of irregularly ribbed elastic structures under fluid loading to localized excitation*, Proceedings of the Royal Society of London 455 (1999) pp. 1083-1105.

[44] J. Legault, A. Mejdi, N. Atalla, *Vibro-acoustic response of orthogonally stiffened panels: The effects of finite dimensions*, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) pp. 5928-5948.

[45] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, I: response to convected harmonic pressure and free wave propagation*, Journal of Sound and Vibration 73 (4) (1980) pp. 473-486.

[46] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: response to line and point forces*, Journal of sound and Vibration 73 (1980) pp. 487-504.

[47] B.R. Mace, *Sound radiation from fluid-loaded orthogonally stiffened plates*, Journal of Sound and Vibration 79 (1981) pp. 439-452.

[48] D.J. Mead, *Plates with regular stiffening in acoustic media: vibration and radiation*, Journal of the Acoustical Society of America 88 (1990) pp. 391-401.

[49] J. Wang, T.J. Lu, J. Woodhouse, R.S. Langley, J. Evans, *Sound transmission through lightweight double-leaf partitions: theoretical modeling*, Journal of Sound and Vibration 286 (2005) pp. 817-847.

[50] F.X. Xin, T.J. Lu, *Analytical modeling of fluid-loaded orthogonally ribbed-stiffened sandwich structures: Sound transmission*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 58 (2010) pp. 1374-1396.

[51] F.X. Xin, T.J. Lu, *Sound radiation of orthogonally rib-stiffened sandwich structures with cavity absorption*, Composites Science and Technology 70 (2010) pp. 2198-2206.

[52] F.X. Xin, T.J. Lu, *Transmission loss of orthogonally rib-stiffened double-panel structures with cavity absorption*, Journal of the Acoustical Society of America 129 (2011) pp. 1919-1934.

[53] F.X. Xin, T.J. Lu, *Analytical modeling of wave propagation in orthogonally rib-stiffened sandwich structures: sound radiation*, Computers and Structures 89 (2011) pp. 507-516.

[54] J. Legault, N. Atalla, *Numerical and experimental investigation of the effect of structural links on the sound transmission of a lightweight double panel structure*, Journal of Sound and Vibration 324 (2009) pp. 712-732.

[55] C.H. Hodges, J. Woodhouse, *Theory of noise and vibration in complex structures*, Reports on Progress in Physics 49 (1986) pp. 107-170.

[56] L. Dozio, M. Ricciardi, *Free vibration analysis of ribbed plates by a combined analytical-numerical method*, Journal of Sound and Vibration 319 (2009) pp. 681-697.

[57] B. Liu, *Noise radiation of aircraft panels subject to turbulent boundary layer excitations*, Journal of Sound and Vibration 314 (2008) pp. 693-711.

[58] M. Villot, C. Guigou, L. Gagliardini, *Predicting the acoustical radiation of finite size multi-layered structures by applying spatial windowing of infinite structures,* Journal of Sound and Vibration 245 (2001) pp. 433-455.

[59] M. Villot, C. Guigou-Carter, *Using spatial windowing to take the finite size of plane structures into account in sound transmission*, NOVEM 2005 Conference, Biarritz, France, 2005.

[60] S. Ghinet, N. Atalla, *Sound transmission loss of insulating complex structures*, Canadian Acoustics 29 (2001) pp. 26-27.

[61] D. Rhazi, N. Atalla, *A simple method to account for size effects in the transfer matrix method*, Journal of the Acoustic Society of America, Express Letters 127 (2010) pp. 30-36.

[62] Jer-Nan Juang, Minh Q. Phan, *Identification and control of mechanical systems*, Cambridge University Press, 2004.

[63] R.E.D. Bishop, D.C. Johnson, *The mechanics of Vibrations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[64] L. Cremer, M. Heckl, *Korperschall*, Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[65] L. Cremer, H.O. Leilich, *Zur Theorie der Biegekettenleiter*, Arch. d. elektr. Ubertr. 7 (6), pp. 261, 1953.

[66] B. Tabarrok, *On duality in the oscillations of framed structures*, Journal of sound and Vibrations (1968) 8 (3), pp. 469-481.

[67] P. Macioce, *Viscoelastic Damping*, Roush Industries, Inc.

[68] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V.Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982.

[69] B.R. Mace, *Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: response to line and point forces*, Journal of Sound and Vibration 73 pp. 487-504, 1980.

[70] D.J. Mead, *A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates*, Journal of Sound and Vibration 104 pp. 9-27, 1986.

[71] S. Li, *Active modal control simulation of vibro-acoustic response of a fluid-loaded plate*, Journal of Sound and Vibration 330 (2011) pp. 5545-5557.

[72] D. Pierce, *Acoustics*, New York: McGraw-Hill, 1981.

[73] K.A. Mulholland, H.D. Parbrook, A. Cummings, *The transmission loss of double panels*, Journal of Sound and Vibration 6, pp. 324-334, 1967.

[74] L.L. Beranek, *The transmission and radiation of acoustic waves by solid structures,* Noise Reduction, Chapter 13, New York: McGraw-Hill, 1960.

[75] J.P. Den Hartog, *Vibracije u mašinstvu* (prijevod) , "Građevinska knjiga", Beograd, 1972.

[76] K.T. Sundara Raja Iyengar, R. Narayana Iyengar, *Determination of the orthotropic plate parameters of stiffened plates and grillages in free vibration*, Applied Scientific Research 17 (6) (1967) pp. 422-438.

[77] E.J. Carlisle, R.J. Hooker, *Small chamber Reverberant absorption measurements*, Proceedings of ACOUSTICS 2004, Gold Coast, Australia, 3-5 November 2004.

[78] C.E. Wallace, *Radiation Resistance of a Rectangular Panel*, Journal of the Acoustical Society of America, Volume 51, Number 3, Part 2, pp. 946, 1970.

[79] P.J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*, Academic Press, Inc. 1984.

[80] Upute za računalni program *ARTA* (program for the impulse response measurement and for real-time spectrum analysis and frequency response measurements, autor: Dr. sc. Ivo Mateljan, Faculty of Electrical Engineering, R. Boškovića bb, 21000 Split, Hrvatska).

[81] A. Skoblar, *Analiza zvučnog polja oko vibrirajuće ploče*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, 2006.

Popis oznaka i simbola

a_D ukupna širina panela, m

a_n koeficijent za određivanje vlastitih frekvencija

$\tilde{A}_1$ amplituda akustičkog tlaka upadnog vala, Pa

A' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova

A površina panela, m^2

$\mathbf{A}$ vektor amplituda prostornih harmonijskih valova, m

A_a površina kroz koju akustički val prolazi, m^2

A_g površina poprečnog presjeka grede, m^2

A_i amplituda vibracija točke grede na položaju x_i, m

A_m amplituda m-tog prostornog harmonijskog vala, m

A_{n-} amplituda *n*-tog prostornog harmonijskog vala koji putuje u negativnom smjeru, m

A_n amplituda n-tog prostornog harmonijskog vala koji putuje u pozitivnom smjeru, m

A_p površina poprečnog presjeka panela, m^2

b_D ukupna visina panela, m

$\tilde{B}_1$ amplituda akustičkog tlaka reflektiranog vala, Pa

B' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova

$\mathbf{B}$ matrica funkcija oblika,

B_n amplituda potencijala brzine reflektiranog *n*-tog prostornog harmonijskog vala, m^2/s

c_n fazna brzina *n*-tog prostornog harmonijskog vala, m/s

$\tilde{C}_1$ amplituda akustičkog tlaka pri radijaciji od vibrirajućeg panela u suprotnom smjeru od *z*-osi, Pa

$\tilde{C}_2$ amplituda akustičkog tlaka pri radijaciji od vibrirajućeg panela u smjeru *z*-osi, Pa
C' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
C_{cn} bezdimenzijski parametar fazne brzine
c_i brzina zvuka u *i*-tom materijalu, m/s
C_i konstante
C_n amplituda potencijala brzine *n*-tog prostornog harmonijskog vala na transmisijskoj strani, m^2/s
C_t aksijalno prigušenje u ovjesu panela, Ns/m
D' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
D fleksijska krutost grede, Nm^2
$_{dgnpp}$ indeks za donju graničnu frekvenciju *n*-tog propagacijskog pojasa
E' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
E modul elastičnosti materijala, Pa
E_{ekv} ekvivalentna vrijednost modula elastičnosti, Pa
f frekvencija vibriranja, Hz
$\mathbf{f}$ vektor poprečnih sila i momenata savijanja u osloncu grede
$f(x)$ funkcija oblika
F' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
F_i pomoćne funkcije po literaturi [63]
$\mathbf{f}_n$ vektor sile, N
G' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$_{ggnpp}$ indeks za gornju graničnu frekvenciju *n*-tog propagacijskog pojasa
h debljina panela, m
H' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
H_n koeficijenti Fourierovog razvoja u red
I aksijalni moment inercije poprečnog presjeka, m^4
I' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
I_t transmisijski okomiti intenzitet, W/m^2
I_u udarni okomiti intenzitet, W/m^2
J' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
k broj vala, m^{-1}
k_{CF} faktor korekcije
k_x komponenta broja vala u smjeru *x*-osi, m^{-1}
k_{xn} komponenta broja vala *n*-tog prostornog harmonijskog vala u smjeru *x*-osi, m^{-1}
k_z komponenta broja vala u smjeru *z*-osi, m^{-1}
k_{zn} komponenta broja vala *n*-tog prostornog harmonijskog vala u smjeru *z*-osi, m^{-1}
K' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
K_r krutost fleksijske opruge u osloncu, Nm/rad
K_t krutost poprečne opruge u osloncu, N/m

K_{tekv} ekvivalentna aksijalna krutost poprečne opruge u osloncu, N/m
L' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
L, L_x udaljenost između oslonaca po x-osi, m
$L_{p,gluha}$ razina zvučnog tlaka u gluhoj komori, dB
$L_{p,ječna}$ razina zvučnog tlaka u ječnoj komori, dB
L_y udaljenost između oslonaca po y-osi, m
m broj prostornog harmonijskog vala
m_g specifična masa grede, kg/m
m_M masa (bez volumena), kg
m_p specifična masa panela, kg/m^2
m_{UK} ukupna masa, kg
M' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
M moment savijanja, Nm
M_r moment savijanja u r-tom osloncu, Nm
$\mathbf{M}_{VR}$ matrični prikaz jednadžbi virtualnih radova
n broj prostornog harmonijskog vala
n_f broj frekvencija izračuna
n_P broj perioda grede konačnog panela
n_T broj točaka izračuna po jednom periodu grede
n_{UK} ukupan broj prostornih harmonijskih valova
n_Ω broj frekvencija u 1. propagacijskom pojasu
N' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
O' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
p frekvencijska konstanta
p_r^- akustičko polje radijacije u suprotnom smjeru od z-osi, Pa
p_r^+ akustičko polje radijacije u smjeru z-osi, Pa
p_a akustički tlak, Pa
p_r akustičko polje reflektiranog vala, Pa
p_u akustičko polje udarnog vala, Pa
p_ω akustički tlak u daljnjem polju, Pa
P' član matričnog prikaza $\mathbf{M}_{VR}$ jednadžbi virtualnih radova
$\mathbf{P}$ vektor sa članom P'
$_{..Pris}$ indeks za prisilne vibracije grede
q vanjska poprečna sila, N
r polumjer polusfere do daljnjeg polja, m
R indeks zvučne izolacije, izolacijska moć pregrade, prigušenje zvuka, dB
R_{mn} radijacijski otpor, kg/s
S poprečna sila, N
S_a površina apsorpcijskog materijala, m^2

$_{..\mathrm{Slob}}$	indeks za slobodne vibracije grede
t	vrijeme, s
T	vremenski period vala, s
TL	zvučni transmisijski gubitak, dB
TL_{konv}	zvučni transmisijski gubitak s konvergencijom vrijednosti, dB
TL_{teor}	teorijski zvučni transmisijski gubitak, dB
$\mathbf{u}$	vektor rubnih uvjeta,
v	brzina čestice medija u kojem se širi val, m/s
$\overline{v}$	usrednjena vibracijska brzina panela, m/s
$\tilde{v}$	amplituda brzine čestice medija u kojem se širi val, m/s
V	volumen panela, m^3
w	pomak u smjeru z-osi Descartesovog koordinatnog sustava, m
$\tilde{w}$	amplituda pomaka u smjeru z-osi Descartesovog koordinatnog sustava, m
$w_{\mathrm{n}}(x)$	funkcija oblika n-tog prostornog harmonijskog vala
$\mathbf{w}$	vektor harmonijskih pomaka točke grede,
x	koordinata Descartesovog koordinatnog sustava, m
z	specifična akustična impedanca, Pas/m
$\tilde{z}_f$	specifična akustička impedanca u fluidu, Pas/m
$\tilde{z}_p$	specifična akustička impedanca u vakumu, Pas/m
$\mathbf{Z}$	matrica mehaničke impedance grede ili matrica dinamičke krutosti grede
Z_0	karakteristična ajustička impedanca, $\mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}$
Z_{a}	akustička impedanca, $\mathrm{Pas/m^3}$
α	prijenosna funkcija poprečnog pomaka u jednoj točki zbog djelovanja sile u drugoj točki, $\mathrm{mN^{-1}}$
α_{a}	koeficijent apsorpcije materijala
β	prijenosna funkcija zakreta u jednoj točki zbog djelovanja momenta u drugoj točki, $\mathrm{radN^{-1}m^{-1}}$
δ	prijenosna funkcija poprečnog pomaka u jednoj točki zbog djelovanja momenta u drugoj točki, $\mathrm{N^{-1}}$
δA_m^*	virtualna amplituda prostornog harmonijskog vala, m
δ_{a}	koeficijent smanjenja amplitude
δ_{D}	logaritamski dekrement
$\delta\mathbf{r}$	virtualni vektor pomaka, m
δw	virtualni poprečni pomak, m
δW	virtualni rad, J
δw^*	konjugirano kompleksni virtualni poprečni pomak, m
δW_{M}	virtualni rad točkaste mase u osloncu, J

δW_p virtualni rad unutarnjih sila jednog perioda grede, J
δW_t virtualni rad poprečne opruge u osloncu, J
δW_t virtualni rad poprečne opruge u osloncu, J
Δf frekvencijski pojas između susjednih frekvencija izračuna, Hz
ΔL_p koeficijent redukcije buke, dB
ε deformacija
ε_y deformacija po y-osi kod ravninskog stanja defomacije
γ prijenosna funkcija zakreta u jednoj točki zbog djelovanja sile u drugoj točki, radN^{-1}
η faktor prigušenja u materijalu grede
η_r faktor prigušenja u fleksijskoj opruzi u osloncu
η_t faktor prigušenja u poprečnoj opruzi u osloncu
η_v koeficijent gubitaka u vakuumu
φ_g fazni kutevi po duljini grede za ukupni val, rad
φ_{ng} fazni kutevi po duljini grede za n-ti prostorni harmonijski val, rad
Φ_1 potencijal brzina upadnog i reflektiranog vala, m^2/s
Φ_2 potencijal brzina transmitiranog vala, m^2/s
κ bezdimenzijska krutost fleksijske opruge
λ valna duljina, m
λ_t valna duljina tzv. trace vala, m
μ propagacijska konstanta
μ_i imaginarna komponenta propagacijske konstante
μ_p faktor brojnosti vlastitih oblika vibriranja
μ_r realna komponenta propagacijske konstante
ν Poissonov koeficijent
θ zakret elementa grede, rad
Ω bezdimenzijski parametar frekvencije
Π akustička (zvučna) snaga, W
ρ gustoća materijala, kg/m^3
ρ_0 gustoća zraka, kg/m^3
σ naprezanje, Pa
σ_{ef} efikasnost radijacije konačnog panela
σ_x naprezanje po x-osi kod ravninsnkog stanja naprezanja, Pa
$\bar{\tau}$ usrednjeni koeficijent transmisije zvučne snage,
τ_b koeficijent transmisije zvučne snage beskonačne grede za jedan upadni kut ϑ,
τ_k koeficijent transmisije zvučne snage konačne grede za jedan upadni kut ϑ,
ϑ upadni kut udarnog zvuka, rad
ϑ_{lim} granični upadni kut iznad kojeg se ne očekuje udarni zvuk, rad

ω kružna frekvencija vibriranja, s^{-1}

ω_1 prva vlastita kružna frekvencija vibriranja, s^{-1}

ψ koeficijent faznog prigušenja, m^{-1}

ζ omjer prigušenja

Popis slika

Slika 2.1. *Diferencijalni element grede s odgovarajućim silama i momentima* 12
Slika 2.2. *Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce* 16
Slika 2.3. *Pozitivni pomaci i zakreti perioda grede* 16
Slika 2.4. *Momenti koji djeluju na period grede* 17
Slika 2.5. *Realni _____ i imaginarni _ _ _ _ _ dio oblika vibriranja kad je frekvencija: a) niža od donje granične frekvencije, b) jednaka donjoj graničnoj frekvenciji, c) na sredini ($\mu_i=\pi/2$) i d) na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog frekventnog pojasa* 21
Slika 2.6. *Vrijednosti kompleksnih propagacijskih konstanti (imaginarni dio _____ i realni dio --------) u funkciji o bezdimenzijskom frekvencijskom parametru Ω* ... 21
Slika 2.7. *Sekundarne vrijednosti imaginarne propagacijske konstante za 1. propagacijski frekvencijski pojas* 23
Slika 2.8. *Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima* 29
Slika 2.9. *Dva susjedna perioda grede s poprečnim pomacima i zakretima u osloncima* 29
Slika 2.10. *Prikaz prostornih harmonijskih valova na beskonačnoj period. oslonjenoj gredi* 31
Slika 2.11. *Beskonačna periodički oslonjena greda na jednostavnim osloncima* 31
Slika 2.12. *Beskonačna greda periodički oslonjena na jednostavne oslonce* 39
Slika 2.13. *Prikaz vektora pomaka* $\mathbf{w}_1$ *i* $\mathbf{w}_2$ *u susjednim periodima grede* 39
Slika 2.14. *Vrijednosti faznih brzina komponenta pozitivno usmjerenog vala u prvom propagacijskom frekvencijskom pojasu* 43
Slika 2.15. *Realne i imaginarne vrijednosti propagacijskih konstanti (metoda propagacije valova)* 44
Slika 2.16. *Vrijednosti primarne imaginarne_____ i realne ..... komponente propagacijske konstante μ u funkciji parametra frekvencije* 44
Slika 2.17. *Omjer amplituda slobodne grupe prostornih harmonijskih valova (Ω=15.5)* 45
Slika 2.18. *Oblik vibriranja pri Ω=15.5: realna _____ i imaginarna komponenta -------* 46
Slika 2.19. *Amplitude i fazne brzine prostornih harmonijskih valova u zadanom frekvencijskom pojasu* 47

Slika 2.20. *Omjer amp. prostornih harmonijskih valova slobodne valne grupe (Ω=50,2)* 48
Slika 2.21. *Oblik vibriranja na Ω=50,2* 48
Slika 2.22. *Fazna brzina slobodnih valova u neoslonjenoj gredi --------- i u periodički oslonjenoj gredi _____ (horizontalne linije predstavljaju faznu brzinu prisile C_{cn1}=0,8 i C_{cn2}=2)* 49
Slika 2.23. *Idealizirani model normalne transmisije zvuka kroz jednostruki panel* 52
Slika 2.24. *Beskonačna greda na jednako udaljenim elastičnim osloncima s harmonijskom prisilom u jednoj točki* 55
Slika 2.25. *Prostorni prikaz panela oslonjenog u jednom smjeru pod utjecajem ravninskog akustičkog vala s upadnim kutem ϑ* 56
Slika 2.26. *Definicija valne duljine tzv. trace vala pri zadanom upadnom kutu ϑ* 56
Slika 2.27. *Geometrijske karakteristike beskonačne periodički oslonjene grede* 58
Slika 2.28. *Nagib tangente na elastičnu liniju grede -------* (θ, rad) *i oblik prisilnog vibriranja grede _____* (w, m) 59
Slika 2.29. *Konvergencija rezultata zvučnih transmisijskih gubitaka TL* 63
Slika 2.30. *Shematski prikaz metode prostornog isječka* 65
Slika 2.31. *Pravokutni panel u beskonačnoj ravnini* 67
Slika 2.32. *Primjer dijag. efikasnosti radijacije konačnog periodički oslonjenog panela* 68
Slika 3.1. *Dijagram toka numeričkog modela* 70
Slika 3.2. *Utjecaj prigušenja u panelu η na potreban broj prostornih harmonijskih valova (n_{Ref}*2+1) za periodički oslonjen panel*: η=0 ———, η=0,1 -------, η=0,2 -.-.-.-.- i η=0,4 74
Slika 3.3. *Primjer odstupanja vrijednosti propagacijske konstante kod upotrebe nedovoljnog broja prostornih harmonijskih valova (propagacijska konstanta po izrazu (2.48) ..... i pomoću prostornih harmonijskih valova, μ_r -.-.-.-.- i μ_i _____)* 75
Slika 3.4. *Usporedba zvučnih transmisijskih gubitaka TL-a za beskonačni periodički oslonjen panel ——— i neoslonjen panel -------* 76
Slika 3.5. *Utjecaj upadnog kuta ϑ na TL za periodički oslonjen panel*: ϑ_1= 15° ———, ϑ_2=45° ------ *i* ϑ_3=70° 77
Slika 3.6. *Utjecaj koeficijenta faznog prigušenja ψ na TL za periodički oslonjen panel: ψ_1=0° ———, ψ_2=1° ------ i ψ_3=10°* 77
Slika 3.7. *Utjecaj prigušenja u panelu η na TL za periodički oslonjen panel*: η_1=0 ———, η_2=0,1 ------- *i* η_3=0,2 -.-.-.-.- *i TL za neoslonjeni panel* 78
Slika 3.8. *Utjecaj krutosti poprečne opruge u osloncu K_t na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela*: $K_{t1}=3,6\cdot10^9$ ———, $K_{t2}=3,6\cdot10^7$ --------, $K_{t3}=3,6\cdot10^5$ -.-.-.-.- *i* K_{t4}=0 78

Slika 3.9. *Utjecaj prigušenja poprečne opruge u osloncu η_t na TL za periodički oslonjen panel uz dozvoljene poprečne pomake tj. K_t=3,6·10^6 : η_{t1}=0 ———, η_{t2}=0,1 ------, η_{t2}=0,2 -.-.-.-.- i TL za neoslonjeni panel* 79

Slika 3.10. *Utjecaj krutosti fleksijske opruge u osloncu K_r na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: K_{r1}=0 ———, K_{r2}=10^3 -------, K_{r3}=10^6 -.-.-.-.-.- i K_{r4}=10^9 ..... (krivulje TL_{kr3} i TL_{kr4} se preklapaju)* 80

Slika 3.11. *Utjecaj prigušenja fleksijske opruge u osloncu η_r na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj. K_t=3,6·10^6 N/m: η_{r1}=0 , η_{r2}=0,1 -------, η_{r2}=0,2 -.-.-.-.- i TL za neoslonjeni panel* 80

Slika 3.12. *Utjecaj mase pomičnog dijela oslonca na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela uz dozvoljene poprečne pomake tj. K_t=3,6·10^6 : m_{M1}=0 kg ———, m_{M2}=0,1 kg -------, m_{M3}=0,2 kg* 81

Slika 3.13. *Utjecaj materijala panela na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: čelik (ρ=7750 kg/m^3, E=1,9·10^{11} Pa, ν=0,3) ————, aluminij (ρ=2700 kg/m^3, E=0,71·10^{11} Pa, ν=0,33) --------, bronca (ρ=8500 kg/m^3, E=1,04·10^{11} Pa, ν=0,37)* 81

Slika 3.14. *Utjecaj debljine panela h na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: h_1=1 mm ———, h_2=1,14 mm --------, h_3=1,27 mm* 82

Slika 3.15. *Utjecaj udaljenosti između oslonaca L na TL beskonačnog periodički oslonjenog panela: L_1=100 mm ———, L_2=150 mm --------, L_3=200 mm* 83

Slika 3.16. *Usporedba brzine određivanja amplitude prostornih harmonijskih valova pri zadanoj frekvenciji neprigušenih slobodnih vibracija pomoću metode virtualnog rada _____ i razvoja u red - - - - - - -* 84

Slika 3.17. *Krivulja ovisnosti vrijednosti hiperbolnog kosinusa propagacijske konstante cosh(μ) o parametru frekvencije Ω* 86

Slika 3.18. *Izgled realne _____ i imaginarne --------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po novoj funkciji oblika (2.44)* 87

Slika 3.19. *Izgled realne _____ i imaginarne -------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede (desno) po funkciji oblika (2.45)* [33] 87

Slika 3.20. *Izgled realne _____ i imaginarne -------- komponente oblika vibriranja (lijevo) i faznih kuteva po duljini grede po metodi virtualnog rada uz primjenu prostornih harmonijskih valova (desno)* 88

Slika 3.21. *Slobodne vibracije panela definirane s grupom prostornih harmonijskih valova* 89

Slika 3.22. *Odziv panela: a) TL i b) vibracijski, definiran s grupom prostornih harmonijskih valova za upadne kuteve ϑ* 89

Slika 3.23. *Model konačnih elemenata akustičkog odziva konačnog periodički oslonjenog panela* 91

Slika 3.24. *Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada ϑ_{lim} = 72° -.-.-.-.-.-.-, b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka - - - - - -, c) metoda konačnih elemenata, Actran 2D difuzno polje _____.* 91
Slika 4.1. *Tlocrt eksperimentalnog modela za mjerenje koeficijenta transmisije zvučne snage TL, dB* 94
Slika 4.2. *Dimenzije i oblik stijenki ječne komore* 94
Slika 4.3. *Izgled ječne komore* 95
Slika 4.4. *Slojevi kamene vune u gluhoj komori* 96
Slika 4.5. *Izgled zatvorenog prozora (lijevo: pogled sa strane ječne komore, desno: pogled sa strane gluhe komore)* 96
Slika 4.6. *Dvostruka vrata između gluhe komore i prostora oko ječne komore* 97
Slika 4.7. *Okvir za vanjski rub panela* 97
Slika 4.8. *Periodički okvir za panel* 98
Slika 4.9. *Mjerna oprema (redom: mikrofon, mjerna kartica, omnodirekcijski zvučnik, senzor za vibracije i mjerni uređaj Vibroport 41)* 98
Slika 4.10. *Mjerenje impulsnog odziva* 99
Slika 4.11. *Provjera frekvencije 1. oblika vibriranja* 100
Slika 4.12. *Prikaz referentnog oblika vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa* 101
Slika 4.13. *Oblik vibriranja na gornjoj graničnoj frekvenciji prvog propagacijskog pojasa izračunat pomoću računalnog modela u Matlab-u, _____ realni i - - - - - imaginarni dio* 101
Slika 4.14. *Vremenski odziv trake od mjedi* 102
Slika 4.15. *Prikaz mjerenja prigušenja u brtvi* 103
Slika 4.16. *Mjerenje prigušenja u brtvi* 103
Slika 4.17. *Kidalica, Laboratorij za čvrstoću Tehničkog fakulteta Rijeka* 105
Slika 4.18. *Dijagram $\sigma(\varepsilon)$ za brtvu, mjereno na kidalici na slici 4.17* 105
Slika 4.19. *Dva periodična okvira na konstantnoj udaljenosti s ciljem definiranja krutosti poprečne opruge u osloncima* 106
Slika 4.20. *Panel između dvije brtve* 106
Slika 4.21. *Izmjerene veličine razine buke u ječnoj komori (- - - - -), gluhoj komori (.....) i određeni zvučni transmisijski gubitak (_____)* 109
Slika 4.22. *Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka: a) metoda virtualnog rada θ_{lim} = 72° ....., b) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka - - - - - -, i c) eksperimentalni rezultati _____.* 109

Popis tablica

Tablica 3.1. *Vrijeme (s) potrebno za izračun amplituda prostornih harmonijskih valova sa slike 3.16*.....84
Tablica 4.1. *Vrijednosti korekcijskog faktora*..... 108

Životopis

Ante Skoblar je rođen 26. studenoga 1973. godine u Rijeci, Republika Hrvatska. U Rijeci pohađa osnovnu školu nakon koje upisuje srednju školu Centar za kadrove u obrazovanju i kulturi, Rijeka, i to prirodoslovno-matematičku struku, matematičko-informatičkog obrazovnog profila. Srednju školu završava u lipnju 1992. godine, i iste godine upisuje studij strojarstva na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kojeg završava 1998. obranom diplomskog rada naslova "Buka i vibracije elektromotora" pod vodstvom mentora red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića, dipl. ing. i time stiče zvanje diplomiranog inženjera strojarstva.

U siječnju 1999. godine zapošljava se u poduzeću Riječki akustički inženjering gdje obavlja poslove vezane uz tehnologiju proizvodnje raznih zvuko, toplinsko i vibro-izolacijskih proizvoda, uglavnom vezanih uz brodogradnju. Tijekom 2000. odslužio je vojni rok te se zapošljava u Brodogradilištu 3. Maj kao projektant u uredu strojnih uređaja za klasu gdje radi na projektiranju različitih brodskih sustava.

U prosincu 2001. godine zapošljava se na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kao znanstveni novak na Zavodu za tehničku mehaniku gdje drži nastavu iz predmeta Kinematika, Dinamika, Vibracije i Mehanika II, a isto tako sudjeluje na znanstvenom projektu "Mehanička sigurnost strojeva", br. 069013 te znanstvenom projektu "Nelinearna dinamika rotacijskih strojeva", br. 0069016 pod vodstvom glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića. Istovremeno upisuje i poslijediplomski studij strojarstva, smjer Računarska mehanika. U rujnu 2004. boravi mjesec dana u Laboratoriju za mehatroniku tehničkog sveučilišta u Darmstadtu (Njemačka) pod vodstvom prof.dr.ing. R. Nordmanna.

U svibnju 2006. uspješno je obranio magistarski rad pod imenom Analiza zvučnog polja oko vibrirajuće ploče.

Od 2007. sudjeluje u znanstvenom projektu "Redukcija vibracija i buke mehatroničkim pristupom", br. 069-0691736-1733 pod vodstvom glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Roberta Žigulića.

Autor je ili koautor 30 znanstvenih radova objavljenih u domaćim ili stranim časopisima ili zbornicima radova. Član je Hrvatskog društva za mehaniku (HDM), Hrvatskog društva za teoriju strojeva i mehanizama (CroFToMM) i Hrvatskog akustičkog društva (HAD).

Oženjen je i otac dvije kćeri.

PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

1. AUTOR

Ime i prezime:	Ante Skoblar
Datum i mjesto rođenja:	26.11.1973., Rijeka
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišni studij strojarstva, 1998.
Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Računarska mehanika, 2006.
Sadašnje zaposlenje:	Asistent, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:	Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	114, 78, 2, 81
Znanstveno polje i grana:	Strojarstvo, opće strojarstvo (konstrukcije); Druge temeljne tehničke znanosti, tehnička mehanika i mehanika fluida
Voditelj rada:	Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:	25.4.2008.
Datum predaje rada:	17.4.2012.
Datum prihvaćanja ocjene rada:	29.6.2012.
Sastav Povjerenstva za ocjenu:	Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing. Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing. Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.
Datum obrane:	19.7.2012.
Sastav Povjerenstva za obranu:	Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing. Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing. Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.
Datum promocije:	

Oznaka: DD Tek. broj: UDK: 534.833.52:534.12:534-7:519.6(043)

ANALIZA AKUSTIČKOG ODZIVA PRAVOKUTNOG PANELA

Ante Skoblar

Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi: paneli s periodičkim ukrepama, difuzno akustičko polje, prostorni harmonijski valovi, zvučni transmisijski gubici

Sažetak: Stijenke prostorija raznih namjena često se izvode kao paneli s periodičkim ukrepama. U slučaju kad na panel djeluje ravninsko akustičko polje i kad je visina perioda panela najmanje tri puta veća od njegove širine, beskonačni panel periodički oslonjen u jednom smjeru može se modelirati kao beskonačna periodički oslonjena greda. Akustički odziv izračunat je metodom virtualnog rada uz definiranje pomaka redom prostornih harmonijskih valova. Rezultati za konačni panel dobiveni su ograničavajući površinu udarnog vala i radijacije zvuka na konačne dimenzije panela koristeći metodu prostornog isječka. U sustavu s dovoljnim prigušenjem maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova za traženu točnost pojavljuje se na najvišoj frekvenciji izračuna međutim ukoliko sustav nije dovoljno prigušen maksimalan broj potrebnih prostornih harmonijskih valova pojavit će se na nižoj frekvenciji. O prigušenju u sustavu ovisit će i granični broj prostornih harmonijskih valova do kojeg se njihove amplitude kod slobodnih vibracija panela brže izračunavaju pomoću metode virtualnog rada nego s razvojem u red. U dijagramu prikaza prostornih harmonijskih valova amplitude i fazne brzine valova definirane su za frekventni pojas što se postiglo definiranjem amplitude vala bojom. U sklopu disertacije izvedena je funkcija oblika slobodnih vibracija grede periodički oslonjene na jednostavne oslonce čija je točnost verificirana primjenom metode virtualnog rada. Rezultati eksperimentalnog modela dobro se slažu sa rezultatima numeričke simulacije.

Rad nije objavljen.

Mentor: Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.

Povjerenstvo za ocjenu: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing.
Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.
Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.

Povjerenstvo za obranu: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing.
Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić, dipl. ing.
Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.

Datum obrane: 19.7.2012.

Datum promocije:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.
(114 stranica, 78 slika, 2 tablice i 81 bibliografski podatak, hrvatski jezik)

DD

UDK: 534.833.52:534.12:534-7:519.6(043)

Analiza akustičkog odziva pravokutnog panela

I Skoblar, A.

II Sveučilište u Rijeci
Tehnički Fakultet
Hrvatska

Ključne riječi:

paneli s periodičkim ukrepama
difuzno akustičko polje
prostorni harmonijski valovi
zvučni transmisijski gubici

Code: DD No.: UDC 534.833.52:534.12:534-7:519.6(043)

ACOUSTIC RESPONSE ANALYSIS OF A RECTANGULAR PANEL

Ante Skoblar

University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords: panels with periodic stiffeners, diffuse acoustic field, space-harmonic waves, sound transmission loss

Summary: Room walls are often built as panels with periodical stiffeners. In the case when the panel is excited with plane acoustic waves and when the height of the panel period is minimally three times larger than its width, infinite panel periodically supported in one direction can be modelled as infinite periodically supported beam. Acoustical response is calculated with the method od virtual work with displacement defined with series of space-harmonic waves. The results for finite panel are gained with limiting the acoustic and structural coupling effects to the area of finite panel using spatial windowing method. In the system with sufficient damping the maximum number of space-harmonic waves for gaining an appropriate accuracy appear on the maximum frequency but if the damping is low the maximum number of space-harmonic waves appear on lower frequency. Damping in the sistem also influences the number of space-harmonic waves bellow which there amplitudes of free vibrations are faster calculated with the method of virtual work than with the series expansion. In diagrams for representation of space-harmonic waves amplitudes and phase velocities are defined for an frequency spectrum where wave amplitudes are defined with color. Also, free vibrations of infinite periodically supported beam on simple supports are calculated where a new shape function is derived and its accuracy is confirmed with the method of virtual work. The results of eksperimental model are in a good agreement with the results of numerical simulation.

The thesis has not been published.

Mentor: Prof. D. Sc. Roberto Žigulić

Advisors: Assoc. Prof. D. Sc. Sanjin Braut
Prof. D. Sc. Roberto Žigulić
Prof. D. Sc. Hinko Wolf

Reviewers: Assoc. Prof. D. Sc. Sanjin Braut
Prof. D. Sc. Roberto Žigulić
Prof. D. Sc. Hinko Wolf

Presentation: 19.7.2012.

Degree conferred:

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineeing
(114 pages, 78 pictures, 2 tables i 81 references, Croatian language)

DD

UDC 534.833.52:534.12:534-7:519.6(043)

Acoustic response analysis
of a rectangular panel

I Skoblar, A.

II University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Keywords:

panels with periodic stiffeners
diffuse acoustic field
space-harmonic waves
sound transmission loss