Utjecaj mehaničkih svojstava drva na snagu potrebnu za odvajanje čestice pri ortogonalnom rezanju

Radmanović, Kristijan

Doctoral thesis / Disertacija

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Forestry / Sveučilište u Zagrebu, Šumarski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:108:567803

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

University of Zagreb Faculty of Forestry and Wood Technology

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
ŠUMARSKI FAKULTET

Kristijan Radmanović

Utjecaj mehaničkih svojstava drva na snagu potrebnu za odvajanje čestice pri ortogonalnom rezanju

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.



UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF FORESTRY

Kristijan Radmanović

Effect of mechanical properties of wood on power consumption in orthogonal cutting

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
ŠUMARSKI FAKULTET

Kristijan Radmanović

Utjecaj mehaničkih svojstava drva na snagu potrebnu za odvajanje čestice pri ortogonalnom rezanju

DOKTORSKI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Igor Đukić

Doc. dr. sc. Miran Merhar

Zagreb, 2015

Ključna dokumentacijska kartica

Kristijan Radmanović

TI (naslov)	Utjecaj mehaničkih svojstava drva na snagu potrebnu za odvajanje čestice pri ortogonalnom rezanju
AU (autor)	Kristijan Radmanović
AD (adresa)	10 040 Zagreb, Baćka 1
SO (izvor)	Šumarska knjižnica – Šumarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu Svetošimunska cesta 25, 10 000 Zagreb
PY (godina objave)	2015
LA (izvorni jezik)	Hrvatski
LS (jezik sažetka)	Engleski
DE (ključne riječi)	Ortogonalno rezanje, mehanička svojstva drva, sila rezanja, snaga rezanja...
GE (zemlja objave)	Hrvatska
PT (vrsta objave)	Disertacija
VO (volumen)	154
AB (sažetak)	U radu izveden je teorijski model određivanja snage rezanja pri ortogonalnom rezanju drva uz uvjet nastanka kontinuirane strugotine. Snaga rezanja prikazana je kao zbroj snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine, snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj i stražnjoj plohi alata i snage potrebne za stvaranje nove površine. Svaka pojedina komponenta snage teorijski je povezana sa odgovarajućim mehaničkim karakteristikama drva pomoću lako mjerljvih koeficijenta sabijanja strugotine. Za potrebe eksperimentalnog određivanja snage, rezani su uzorci borovine u uzdužnome smjeru, a proces se snimao brzom kamerom I_SPEED2. Snaga rezanja mjerena je u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Koeficijenti sabijanja strugotine potrebni za izračun komponenata snage određivani su sa snimke kamere, također u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Sadržaj vode u drvu iznosio je (10, 14, 30 i 45) %, a brzina rezanja (0,5, 1, 1,5, 2 i 3) m/s. Mehanička svojstva drva potrebna za eksperimentalno određivanje plastične komponente snage određena su na kidalici u ovisnosti o sadržaju vode u drvu. Rezultati istraživanja pokazuju da najveći udio u snazi rezanja zajednički zauzimaju udjeli snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine i snage potrebne za stvaranje nove površine, neovisno o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu.

Key words documentation

Kristijan Radmanović

TI (naslov)	Effect of mechanical properties of wood on power consumption in orthogonal cutting
AU (autor)	Kristijan Radmanović
AD (adresa)	10 040 Zagreb, Baćka 1
SO (izvor)	Library of Forestry Faculty of Zagreb University Svetošimunska cesta 25, 10 000 Zagreb
PY (godina objave)	2015
LA (izvorni jezik)	Croatian
LS (jezik sažetka)	English
DE (ključne riječi)	Orthogonal cutting, mechanical properties of wood, cutting force, cutting strenght
GE (zemlja objave)	Croatia
PT (vrsta objave)	Dissertation
VO (volumen)	154
AB (sažetak)	This paper presents a theoretical model for cutting power prediction in orthogonal cutting of wood with a type II chips (continuous). Cutting power is calulatet as the sum of the power required for the plastic deformation of chips, the power required to overcome the friction forces on the front and back face of the tool and the power necessary for creating a new surface. Every single component of power is theoretically associated with corresponding mechanical properties of wood and with chips compression ratio. For the purposes of experimental determination of power, the samples of pine were cut in a longitudinal direction, and the process was recorded with high speed camera. Cutting force was also measured as a function of cutting speed and the moisture content in wood. Chips compression ratio required to calculate the power components weas determined from the recorded videos, also in relation to the cutting speed and the moisture content in wood. The moisture content of the wood was (10, 14, 30 and 45)%, and the cutting speed (0.5, 1, 1.5, 2 and 3) m / s. The mechanical properties of wood necessary to experimentally determine the plastic component of the cutting power were determined on the testing machine. The research results show that the largest share of cutting power cant be attributed to the power required for the plastic deformation of chips and power needed to create a new surface, regardless of the cutting speed and the moisture content in the wood.

SADRŽAJ

POPIS OZNAKA

1. UVOD.....1

2. PROBLEMATIKA.....2
   2.1.Ortogonalno rezanje drva.....2
   2.2.Dinamika ortogonalnog rezanja.....4
   2.3.Građa drva i smjerovi rezanja.....7

3. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA.....12

4. CILJEVI I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA.....18

5. TEORIJSKI DIO.....19
   5.1.Kinematika kontinuuma.....20
   5.2.Opći zakoni mehanike kontinuuma.....22
      5.2.1. Zakon očuvanja mase.....22
      5.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja.....22
      5.2.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja.....22
      5.2.4. Zakon očuvanja energije.....23
   5.3.Naprezanje kontinuuma.....23
      5.3.1. Tenzor naprezanja.....27
   5.4.Deformacija kontinuuma.....35
      5.4.1. Tenzor deformacije.....36
   5.5.Veza između naprezanja i deformacije u drvu.....48
      5.5.1. Energija deformacije.....53

6. MODEL ODREĐIVANJA SILE REZANJA.....55
   6.1.Kinematika ortogonalnog rezanja.....61
   6.2.Snaga uložena na plastičnu deformaciju strugotine.....64
      6.2.1. Brzina deformacije.....68
   6.3.Snaga utrošena na svadavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata.....69
   6.4.Snaga utrošena na svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata.....74

6.5.Snaga utrošena na stvaranje nove površine.....77

7. MATERIJALI I METODE.....81
7.1.Kondicioniranje uzoraka borovine i određivanje gustoće.....81
7.2.Ispitivanje tlačne čvrstoće uzoraka borovine i određivanje koeficijenata snage i otvrdnjavanja.....83
7.3.Mjerenje sila i snimanje procesa rezanja brzom kamerom.....88
7.3.1. Eksperimentalni postav..... 88
7.3.2. Eksperimentalno određivanje sile rezanja.....90
7.3.3. Eksperimentalno određivanje snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine.....91
7.3.4. Eksperimentalno određivanje sile trenja na stražnjoj plohi alata.....93
7.3.5. Eksperimentalno određivanje sile trenja na prednjoj plohi alata.....94

8. REZULTATI ISTRAŽIVANJA S DISKUSIJOM.....97
8.1. Rezultati mjerenja mehaničkih svojstava uzoraka borovine.....98
8.2. Rezultati mjerenja sile rezanja i snage rezanja.....104
8.3. Rezultati mjerenja duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine.....106
8.4.Rezultati određivanja snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine.....109
8.5.Rezultati određivanja snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata.....112
8.6.Rezultati određivanja snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata.....114
8.7.Rezultati određivanja snage potrebne za stvaranje nove površine.....119
8.8.Usporedba udjela pojedinih komponenata snage u ukupnoj snazi rezanja.....121

9. ZAKLJUČCI.....125
LITERATURA.....131
POPIS SLIKA.....135
PRILOZI.....139

Popis oznaka	
Oznaka	Hrvatski naziv
A_w	površina poprečnog presjeka neodrezane strugotine
dA	prostorna elementarna površina
ds	duljina elementarne dužine u referentnoj konfiguraciji
ds'	duljina elementarne dužine u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{D}_\sigma$	devijatorski dio tenzora naprezanja
E_{pd}	energija potrebna za plastičnu deformaciju strugotine
E_{trp}	energija potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata
E_{trs}	energija potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata
E_{np}	energija potrebna za stvaranje nove površine
e	jedinični vektori ortonomiranog koordinatnog sustava
E'	Eulerov tenzor konačne deformacije u funkciji gradijenta polja pomaka
$\mathbf{e}'_{ij}$	Eulerov tenzor infitenzimalnih deformacija
f	volumna sila
$\Delta\mathbf{f}^n$	sila interakcije dvaju elemenata koja djeluje na orijentiranu površinu dA
$\mathbf{F}_d$	tenzor gradijenta deformiranja
$\mathbf{F}_{ij}$	tenzor Lagrangeovih gradijenata deformacije
$\mathbf{F}_n$	komponenta sile koja uzrokuje normalna naprezanja
$\mathbf{F}_o$	odrivna sila
$\mathbf{F}_R$	sila rezanja
$\mathbf{F}_t$	komponenta sile koja uzrokuje tangencijalna naprezanja
$\mathbf{F}_{trp}$	sila trenja između strugotine i prednje površine oštrice alata
$\mathbf{F}_{trs}$	sila trenja na stražnjoj strani oštrice alata
$\mathbf{F}_{uBC}$	ukupna sila na dijelu oštrice alata od točke B do točke C

$\mathbf{F}_{uCD}$	ukupna sila na stražnju površinu oštrice alata
$\mathbf{F}_{\perp BC}$	okomita komponenta sile F_{uBC}
$\mathbf{F}_{IIBC}$	paralelna komponenta sile F_{uBC}
$\mathbf{G}_{ij}$	Greenov tenzor
$\mathbf{H}'_{ij}$	tenzor Eulerovih prostornih gradijenata deformacija
h_{BC}	veličina stlačivanja obratka
h_{CD}	elastični povrat obratka
$I_1(\mathbf{T}_\sigma)$, $I_2(\mathbf{T}_\sigma)$ i $I_3(\mathbf{T}_\sigma)$	invarijante simetričnog dijela tenzora naprezanja
J	Jacobijeva determinanta
$\mathbf{k}$	vektor sile po jedinici mase
K	koeficijent snage
$\mathbf{K'}_{ij}$	tenzor Eulerovih gradijenata polja pomaka
K_M	konstanta materijala
K_r	jedinični otpor rezanja
K_φ	referentni jedinični otpor rezanja
l_c	duljina kontakta prednje plohe oštrice alata i strugotine
$\mathbf{L}$	Lagrangeov tenzor konačne deformacije u funkciji gradijenta polja pomaka
$\mathbf{l}_{ij}$	Lagrangeov tenzor infitenzimalnih deformacija
$\mathbf{M}'$	moment sile u deformiranoj konfiguraciji
n	faktor otvrdnjavanja
$\mathbf{P}$	prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja
p	materijalna točka kontinuuma
P_{np}	snaga potrebna za stvaranje nove površine
P_{pd}	snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine

P_{trp}	snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj površini alata
P_{trs}	snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj površini alata
R	specifična energija formiranja nove površine
R	gustoća izvora topline u referentnoj konfiguraciji
$\mathbf{S}_{\sigma}$	hidrostatički dio tenzora naprezanja
$\mathbf{T}_{\omega}^{\sigma}$	antisimetrični dio tenzora deformacije
$\mathbf{T}_{\sigma}$	simetrični dio tenzora deformacije
U, **u**	vektor pomaka materijalne točke u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji
U	unutarnja energija
V_0	volumen neodrezane strugotine
V_1	volumen odrezane strugotine
$\mathbf{v}_{\text{a}}$	brzina alata
$\mathbf{v}_{\text{o}}$	brzina obratka
$\mathbf{v}_{\text{c}}$	brzina rezanja
$\mathbf{v}_{\text{s}}$	brzina savijanja
$\mathbf{v}_{\text{sm}}$	brzina smične ravnine
$\mathbf{v}_{\text{st}}$	brzina strugotine
X	materijalne koordinate
x	prostorne koordinate
x_0	duljina neodrezane strugotine
x_1	duljina odrezane strugotine
y_0	debljina neodrezane strugotine
y_1	debljina odrezane strugotine

z_0	širina neodrezane strugotine
z_1	širina odrezane strugotine
α	stražnji kut oštrice
β	područje kontinuuma
γ	prednji kut oštrice
λ	koeficijent toplinske difuzije
μ_s	statički koeficijent trenja između strugotine i prednje plohe alata
μ_d	dinamički koeficijent trenja između strugotine i prednje plohe alata
$\varepsilon_{ij} i(\neq j)$	kutne deformacije
$\varepsilon_{ij} i(= j)$	linijske deformacije
ε_l	deformacija pri kojoj dolazi do loma materijala
ρ	radius zaobljenosti oštrice
ρ_0	gustoća drva u materijalnoj konfiguraciji (gustoća obrtaka)
ρ_1	gustoća drva u trenutnoj konfiguraciji (gustoća strugotine)
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyjev tenzor naprezanja
σ_c	tlačna naprezanja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine
$\boldsymbol{\sigma}^n$	vektor koji predstavlja silu interakcije između volumena V_1' i V_2'
τ_c	tangencijalna naprezanja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine
φ	kut između ravnine smicanja materijala i smjera rezanja
χ	gibanje tijela
Ω	proizvoljno područje fizikalnog prostora
$d\Omega$	rubna ploha
$\mathbf{Q}$	ortogonalan tenzor
Q	gustoća toplinskog toka

$\mathbf{q}'$	ukupna sila na tijelo u deformiranom stanju
ξ_p	koeficijent sabijanja površine strugotine
ξ_x	koeficijent sabijanja strugotine u uzdužnome smjeru
ξ_y	koeficijent sabijanja strugotine okomito na vlakanca u tangencijalnome smjeru smjeru

1.UVOD

Obrada materijala odvajanjem čestica pripada najčešćoj vrsti obrade pri kojoj se od osnovnog materijala (obratka) odvaja čestica, odnosno strugotina. Veličina odvojene strugotine znatno je manja od veličine obratka i takvog je oblika da se ne može iskoristiti u daljnjoj obradi. Proces obrade odvajanjem strugotine istražuje se radi utvrđivanja fizikalnih zakonitosti koje se primjenjuju pri odabiru optimalnih parametara obrade, pri izboru optimalnog alata i pogonskog stroja te pri upravljanju samim procesom. Obrada odvajanjem strugotine sprega je fizikalnih, tehnoloških i ekonomskih parametara promjenjive naravi te niza činitelja koji utječu na spomenute parametre. S obzirom na kompleksnost djelovanja brojnih činitelja na proces rezanja, zakonitosti proučavane na najjednostavnijoj obradi odvajanjem strugotine nastoje se primijeniti na ostale procese. Najjednostavniji oblik obrade odvajanjem strugotine jest ortogonalno rezanje. Proces ortogonalnog rezanja nastaje prodiranjem reznog alata određene geometrije u materijal predmeta obrade, pri čemu je oštrica okomita na smjer gibanja alata. Utvrđivanje zakonitosti procesa ortogonalnog rezanja svodi se na proučavanje međusobnog djelovanja alata, obratka i strugotine. Poznavanje zakonitosti procesa glavni je uvjet pri konstrukciji alata i pogonskog stroja koji će po svojoj koncepciji odgovarati proizvodnom optimumu te pridonijeti postizanju kvalitetnih proizvoda uz sve strože zahtjeve za točnošću i kvalitetom obrađene površine.

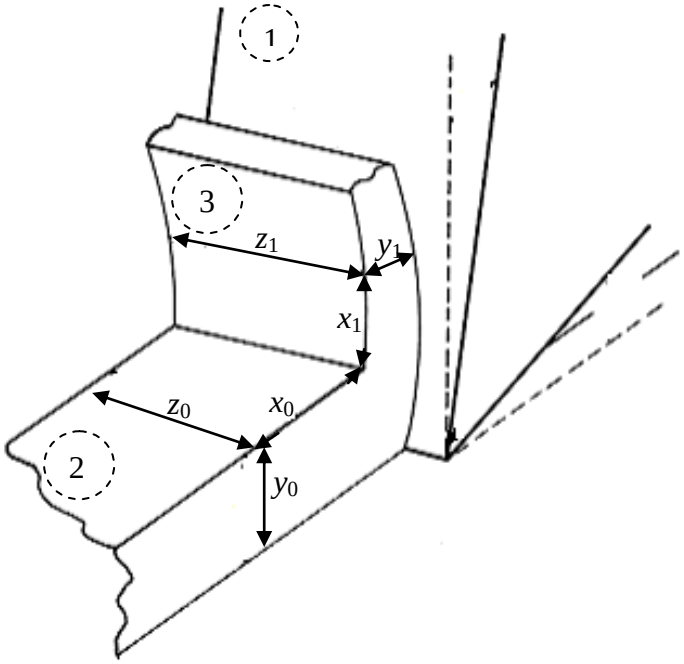
Predmet istraživanja ovog rada jest teorijsko određivanje snage rezanja te eksperimentalno određivanje snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine pri ortogonalnom rezanju uzoraka bora (*Pinus Sylvestris* L.). Istraživanje je izvedeno u dvije faze. Prva je faza obuhvatila razradu teorijskog modela snage rezanja. Tim se modelom nastoje objasniti fizikalni procesi koji se zbivaju u „pozadini“ ortogonalnog rezanja. Pri izradi modela korištena su načela mehanike kontinuuma, a drvo je promatrano kao ortotropni materijal. Modelom se nastoje povezati određena mehanička svojstva drva za koja se smatra da utječu na snagu rezanja, te odrediti mjerljivi parametri koji bi pratili te utjecaje ovisno o promjeni sadržaja vode u drvu i o brzini rezanja. Druga faza istraživanja sastojala se od eksperimentalnog određivanja mehaničkih svojstava drva potrebnih za teorijsko određivanje snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine.

2.PROBLEMATIKA

Izrazito velika složenost pojava u zoni rezanja onemogućuje postavljanje pouzdanoga, jednostavnoga i sveobuhvatnoga matematičkog modela za određivanje sile rezanja. Povijest znanosti o rezanju poznaje samo približne, pojednostavnjene inženjerske teorije uz pomoć kojih se, manje ili više točno, objašnjavaju mehanizmi formiranja odvojene čestice. U novije vrijeme primjenjuje se niz modela određivanja sile rezanja pri obradi metala u kojima se složeno stanje naprezanja i deformacije u zoni rezanja nastoji povezati s veličinama koje se u realnim uvjetima mogu eksperimentalno odrediti (Arrazola i dr., 2013.). Nedostatak standardiziranih metoda uzrokuje velika odstupanja u eksperimentalnom određivanju sile rezanja. Astakhov (2008.) navodi da ta odstupanja u međulaboratorijskim mjerenjima iznose čak do 50 %.

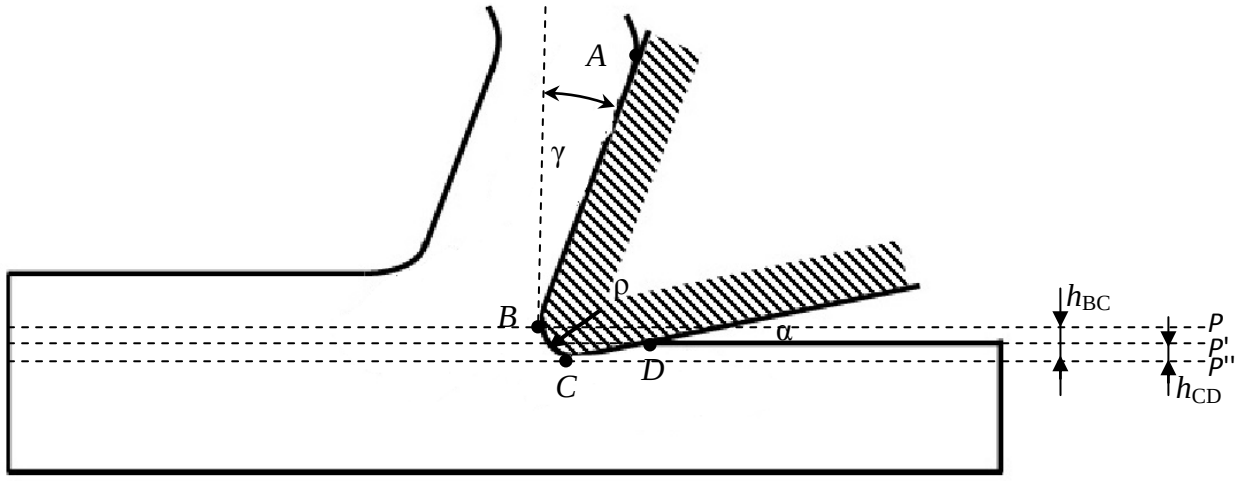
2.1. Ortogonalno rezanje drva

Proces ortogonalnog rezanja nastaje prodiranjem alata u materijal predmeta obrade (u obradak), uz uvjet okomitosti oštrice alata i smjera gibanja. Ako nije ispunjen uvjet okomitosti, govorimo o kosom rezanju. Zbog djelovanja alata na obradak jedan se dio obratka dimenzija $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0$ pretvara u strugotinu dimenzija $x_1 \cdot y_1 \cdot z_1$. S obzirom na to, sustav ortogonalnog rezanja može se podijeliti na tri dijela: alat, obradak i strugotinu, a njegovo proučavanje zapravo je proučavanje međusobnog djelovanja tih dijelova tijekom obrade. Na slici 2.1. prikazan je sustav ortogonalnog rezanja s pripadajućim dijelovima.



Slika 2.1. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja: 1 – alat, 2 – obradak, 3 – strugotina; x_0 – duljina neodrezane strugotine, y_0 – visina neodrezane strugotine, z_0 – širina neodrezane strugotine, x_1 – duljina odrezane strugotine, y_1 – visina odrezane strugotine, z_1 – širina odrezane strugotine

Sustav ortogonalnog rezanja najčešće se proučava kao dvodimenzionalni problem, pri čemu se uzima u obzir da je širina neodrezane strugotine jednaka širini odrezane strugotine ($z_0 = z_1$). Dvodimenzionalni proces s pripadajućim veličinama prikazan je slikom 2.2.

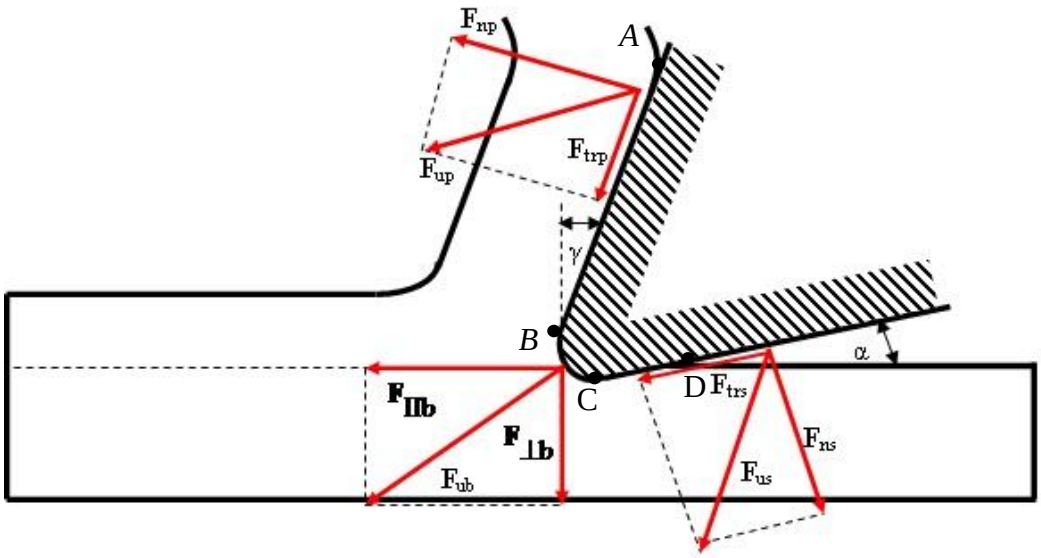


Slika 2.2. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja u dvije dimenzije: $\overline{AB}$ – duljina kontakta prednje plohe alata i strugotine, $\overline{BC}$ – duljina kontakta obratka i zaobljenog dijela oštrice, $\overline{CD}$ – duljina kontakta stražnje plohe alata i obratka, h_{BC} – stlačivanje obratka, h_{CD} – elastični povrat obratka, γ – prednji kut oštrice, α – stražnji kut oštrice, ρ – radijus zaobljenosti oštrice

Proces možemo podijeliti u tri zone (sl. 2.2.). Područje ograničeno točkama *A* i *B* naziva se zonom kontakta prednje površine alata i strugotine. Područje od točke B do točke *C* zona je u kojoj dolazi do kidanja obratka i stvaranja strugotine. Područje ograničeno točkama *C* i *D* jest zona dodira stražnje površine alata i obratka. Rezni brid oštrice alata s određenim radijusom zaobljenja (ρ) najprije dolazi u dodir s obratkom u najistaknutijoj točki *B* reznog brida (sl. 2.2.). Najveća naprezanja koja oštrica alata uzrokuje u obratku upravo se događaju u točki *B* (Goglia, 1994.). Naprezanja su proporcionalna deformaciji, zbog čega u točki *B* dolazi do loma obratka. Pravac *p* na kojemu leži točka *B* naziva se pravcem rezanja. Pravac *p*" označava pravac kretanja najniže točke reznog brida (*C*). Na slici 2.2. vidljiva je razlika između pravca *p* i *p*", što zapravo znači da se materijal stlačio. Veličina stlačivanja određena je udaljenošću između pravca *p* i pravca *p*" (h_{BC}). Ukupna visina stlačenog materijala sastoji se od elastičnoga (povratnog) i plastičnoga (nepovratnog) dijela. Veličina elastičnog dijela stlačivanja na slici 2.2. označena je sa h_{CD}, dok je veličina plastičnog dijela stlačivanja određena razlikom $h_{BC} - h_{CD}$.

2.2. Dinamika ortogonalnog rezanja

Dinamika ortogonalnog rezanja opisuje međudjelovanje alata, obratka i strugotine. U području ograničenom točkama *A* i *B* prednja strana oštrice alata stvara pritisak na strugotinu. Pritisak na strugotinu može se nadomjestiti jednom silom normale ($\mathbf{F}_{np}$) čiji je smjer okomit od prednje površine alata. Strugotina se određenom brzinom giba po prednjoj površini alata, što uzrokuje silu trenja ($\mathbf{F}_{trp}$). Vektorskim zbrojem tih dviju sila u postavljenome lokalnom koordinatnom sustavu (*x*', *y*') (sl. 2.3.) dobiva se rezultantna sila na prednjoj površini alata ($\mathbf{F}_{up}$). U području ograničenom točkama *B* i *C* ukupni pritisak koji brid oštrice alata stvara na obradak u globalnom se koordinatnom sustavu (*x*, *y*) (sl. 2.3.) može zamijeniti jednom silom ($\mathbf{F}_{ub}$) određenog iznosa i smjera. U području ograničenome točkama *C* i *D* stražnja površina alata stvara pritisak na obradak. Ukupni pritisak na obradak može se zamijeniti jednom silom normale ($\mathbf{F}_{ns}$) čiji je smjer okomit od stražnje površine alata. Zbog relativnog gibanja alata i obratka pojavljuje se i sila trenja ($\mathbf{F}_{trs}$). Ukupna sila na stražnjoj površini alata dobije se kao vektorski zbroj sila $\mathbf{F}_{ns}$ i $\mathbf{F}_{trs}$ u lokalnome koordinatnom sustavu (*x*", *y*") (sl. 2.3.).



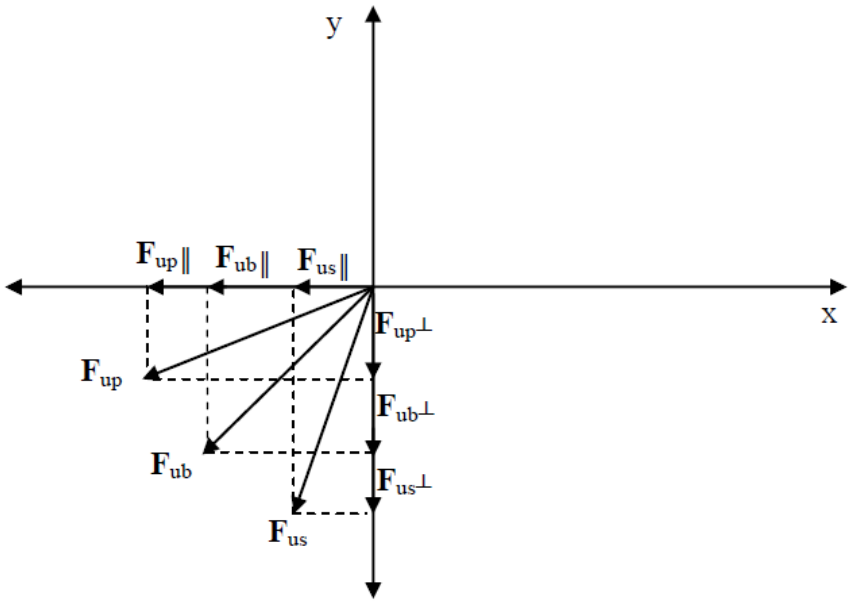
Slika 2.3. Shematski prikaz međusobnog djelovanja oštrice alata, obratka i strugotine pri ortogonalnom rezanju: $\mathbf{F}_{np}$ – sila normale prednje plohe alata, $\mathbf{F}_{trp}$ – sila trenja na prednjoj plohi alata, $\mathbf{F}_{up}$ – ukupna sila na prednjoj plohi alata, $\mathbf{F}_{ub}$ – ukupna sila na bridu alata, $\mathbf{F}_{\parallel b}$ – paralelna komponenta sile, $\mathbf{F}_{ub}$, $\mathbf{F}_{\perp b}$ – okomita komponenta sile $\mathbf{F}_{ub}$, $\mathbf{F}_{ns}$ – sila normale stražnje plohe alata, $\mathbf{F}_{trs}$ – sila trenja na stražnjoj plohi alata, $\mathbf{F}_{us}$ – ukupna sila na stražnjoj plohi alata

Translacija vektora ukupnih sila iz sva tri područja u globalni koordinatni sustav s koordinatama (x, y) prikazana je slikom 2.4. Zbroj usporednih komponenata ukupnih sila iz sva tri područja daje silu rezanja ($\mathbf{F}_r$):

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{usII} + \mathbf{F}_{ubII} + \mathbf{F}_{upII}, \tag{1}$$

a zbroj okomitih komponenata čini odrivnu silu ($\mathbf{F}_o$):

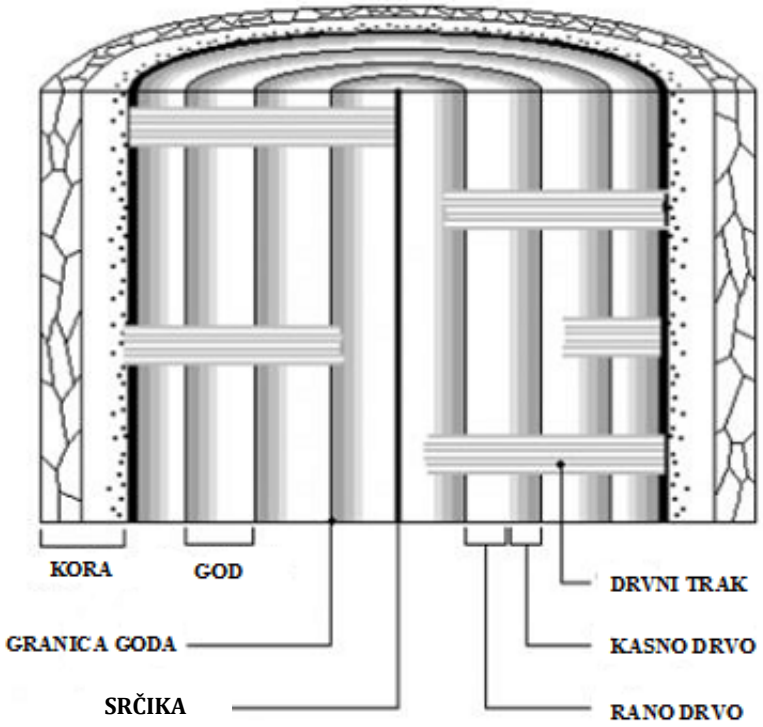
$$\mathbf{F}_O = \mathbf{F}_{us\perp} + \mathbf{F}_{ub\perp} + \mathbf{F}_{up\perp}. \tag{2}$$



Slika 2.4. Komponente ukupnih sila iz sva tri područja prikazane u globalnome koordinatnom sustavu

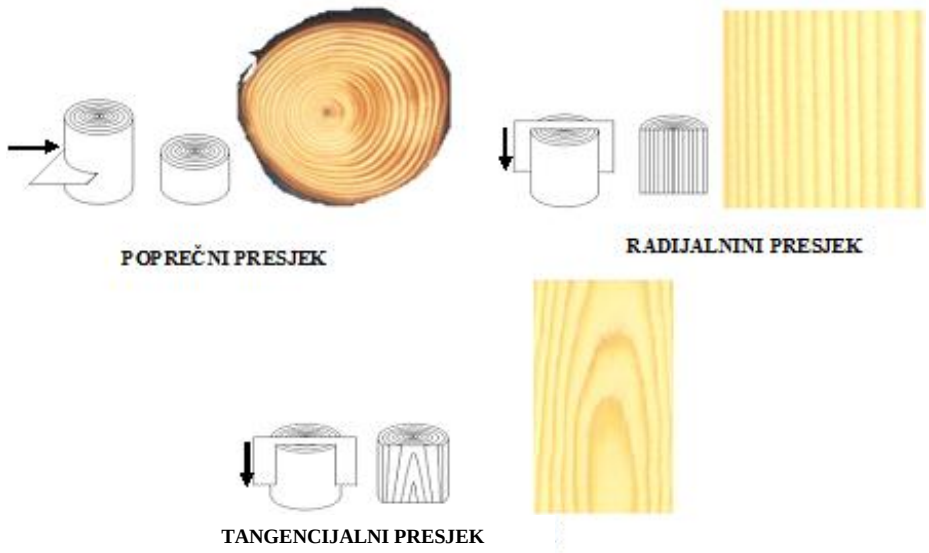
2.3. Građa drva i smjerovi rezanja

Drvo kao prirodni polimerni materijal ima vrlo složenu građu koja se može promatrati s makroskopskoga i mikroskopskog stajališta. Makroskopska i mikroskopska svojstva drva mogu se iskoristiti za određivanje rodova i vrsta drveta. U makroskopsku građu drva svrstavamo ona svojstva koja su vidljiva golim okom, a rezultat su unutrašnje građe drva.



Slika 2.5. Makroskopska građa drva (www.hrovat.net)

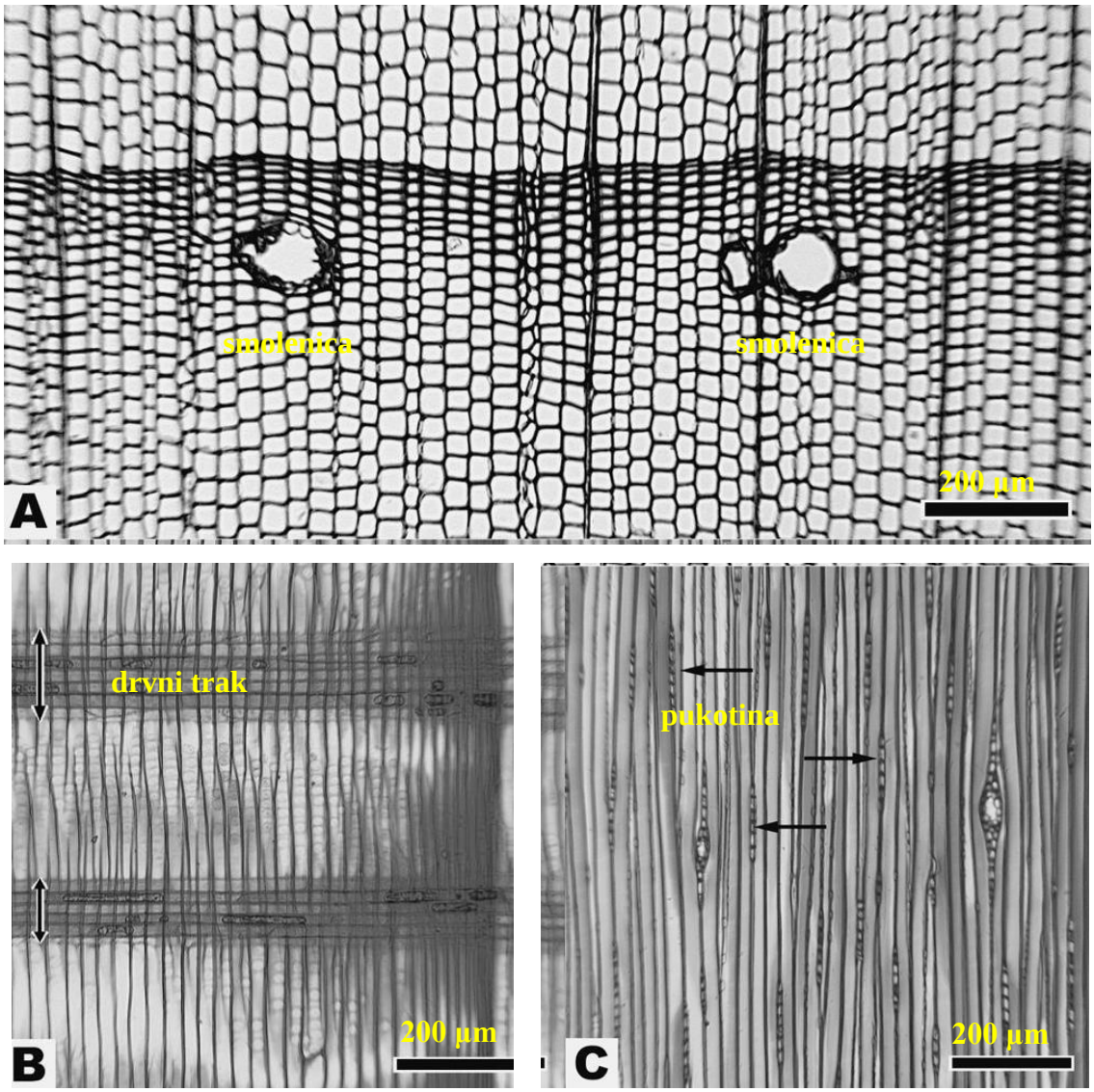
Za makroskopsko proučavanje drva definirana su tri različita presjeka: poprečni, radijalni i tangencijalni (sl. 2.6.). Presjekom se otvara unutrašnjost drva, na kojoj se može uočiti veći ili manji broj različitih dijelova. Na poprečnom presjeku vidljivi su godovi koji nastaju svake godine na već stvorenim godovima. Vide se kao koncentrični krugovi na poprečnom presjeku, na uzdužnom presjeku su to paralelne linije, dok se na tangencijalnom presjeku vide kao parabolični oblici. Unutar goda razlikuje se zona ranoga i kasnog drva. U anatomskom središtu poprečnog presjeka drva nalazi se srž.



Slika 2.6. Makroskopski presjeci drva: a) poprečni, b) radijalni i c) tangencijalni (www.hrovat.net)

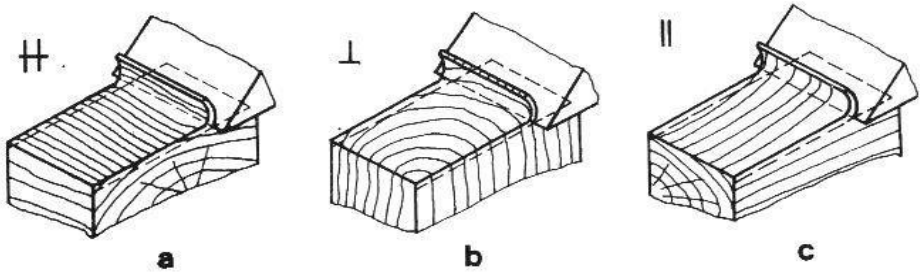
S mikroskopskog stajališta, drvo se sastoji od stanica većinom cjevastog oblika, zašiljenih na krajevima. Stanice tvore usmjerena drvna vlakna koja su međusobno povezana ligninom. Osnovna je građevna molekula stijenka stanica drvnih vlakna celuloza. Celulozne molekule stijenka stanica raspoređene su u obliku dvostrukih spirala, a promjer stanica kreće se od 10^{-4} do $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm. Drvo četinjača sastoji se od pravokutnih stanica koje se pojavljuju u dvije varijante: tanka stijenka – veliki lumen ili deblja stijenka – mali lumen (sl. 2.7.)

S kemijskog stajališta, drvo je biopolimerni kompozit sastavljen od umreženih i međusobno povezanih lanaca celuloze, hemiceluloze i lignina, s vrlo malim udjelom izlučevina i anorganskih tvari. Celuloza je ugljikohidratni polimer sa stupnjem polimerizacije n = 9000 – 10 000 (15 000), a u drvu se pojavljuje u kristaliničnoj ili amorfnoj strukturi (Fengel, 1989.). Hemiceluloza je također ugljikohidratni polimer sa stupnjem polimerizacije n = 100 – 200, a u drvu je nalazimo u amorfnoj strukturi, dok je lignin visokokompleksni, amorfni, uglavnom aromatski polimer (Fengel, 1989.).



Slika 2.7. Mikroskopski presjek drva četinjača: a) poprečni presjek, b) radijalni presjek, c) tangencijalni presjek (Wood handbook, 1999)

S obzirom na položaj drvnih vlakanaca u odnosu prema smjeru gibanja oštrice alata, pri rezanju masivnog drva razlikujemo tri osnovna smjera: longitudinalni (uzdužni), radijalni (poprečni) i tangencijalni (sl. 2.8.).



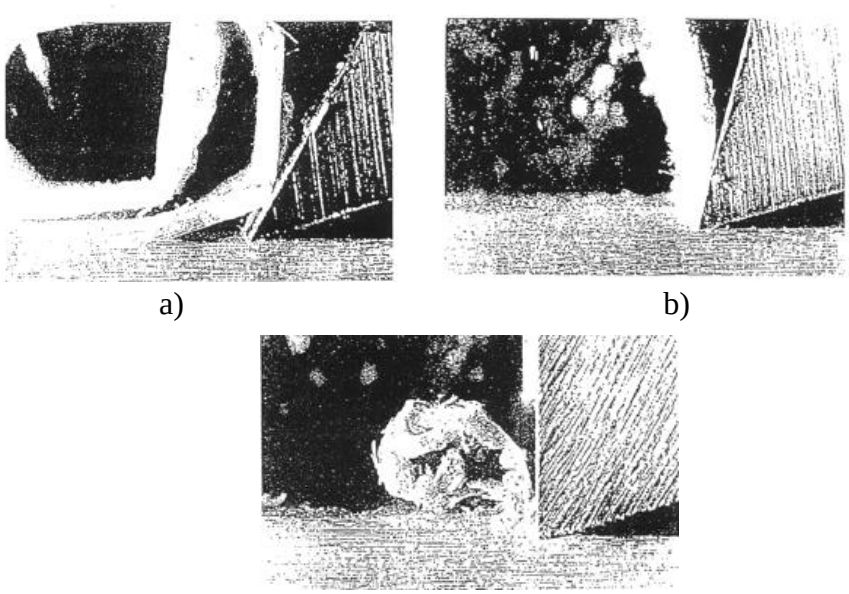
Slika 2.8. Shematski prikaz smjerova rezanja drva: a) tangencijalni, b) poprečni, c) longitudinalni

Pri uzdužnom smjeru rezanja rezni je brid okomit na smjer drvnih vlakanca, a smjer njegova gibanja jednak je smjeru drvnih vlakanca. Odvojena strugotina može imati različite oblike, od dugih, neprekinutih do kratkih lomljenih. Oblik strugotine najviše ovisi o debljini odvojene čestice y_1 i o prednjem kutu oštrice γ. Uz vrlo male debljine odvojenih strugotina nastaju dugačke, neprekinute odvojene strugotine. Jednako tako, neprekinute odvojene strugotine nastaju uz velike prednje kutove oštrice. Uz takav osnovni smjer rezanja otpori rezanja su manji od otpora rezanja pri poprečnom rezu, ali su veći od onih pri tangencijalnom rezu.

Pri poprečnom smjeru rezanja glavni rezni brid i smjer gibanja glavnoga reznog brida okomiti su na smjer drvnih vlakanca. U tom smjeru rezanja rezni brid presijeca vlakanca, a ispod stražnje strane redovito ostaju kratke pukotine. Pri takvom smjeru rezanja pojavljuju se najveći otpori.

Ako je smjer rezanja tangencijalan, glavni je rezni brid paralelan sa smjerom drvnih vlakanca, a smjer napredovanja glavnog reznog brida okomit je na smjer vlakanca. Ravnina rezanja paralelna je s drvnim vlakancima. Čvrstoća među drvnim vlakancima u tom je smjeru najmanja, čestice se pri rezanju lako odvajaju, pa je i otpor rezanja malen.

Oblik odvojene strugotine ovisi o mnogobrojnim činiteljima koji se mogu svrstati u parametre koji karakteriziraju obradu (dubina rezanja, brzina i smjer rezanja, prednji kut oštrice alata itd.) i parametre koji karakteriziraju obradak (mehanička svojstva obratka, sadržaj vode u drvu itd.). Na slici 2.9. prikazana su tri osnovna tipa strugotine (Koch, 1968.) – prekinuta, neprekinuta i lomljena.

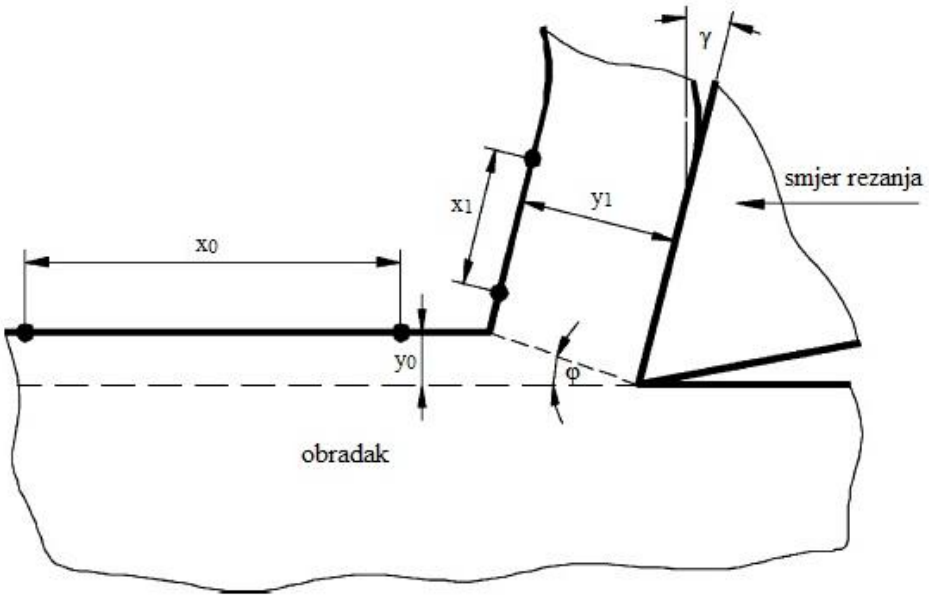


Slika 2.9. Prikaz tipova strugotina: a) prekinuta (tip I), b) neprekinuta (tip II) i c) lomljena (tip III)

3. PREGLED DOSADAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Cilj prijašnjih empirijskih istraživanja bio je pronaći nove metode i tehnike obrade materijala, smanjiti troškove obrade i izrade dijelova uz veću preciznost i kvalitetu. Nagli razvoj industrije polovicom 19. stoljeća popraćen je i prvim složenijim istraživanjima pojava u zoni odvajanja čestica pri nastanku strugotine i pojavi trenja na prednjoj i stražnjoj površini alata. Podatci o prvim istraživanjima pojavljuju se od 1851. do 1865. (Šolaja, 1965.), kada su M. Cocquilhat, F. Wiebe i M. Joessel, razmatrajući nastajanje strugotine, postavili prvu relaciju za silu rezanja u obliku $\mathbf{F} = K_{\mathrm{M}} \cdot A \cdot \mathbf{n}$, gdje je K_{M} konstanta materijala, A površina poprečnog presjeka strugotine, $\mathbf{n}$ pridruženi vektor normale površine poprečnog presjeka strugotine. H. Tresca (Kopač, 1991.; Altintas, 2000.) ispitivao je 1873. godine deformaciju pri blanjanju olova te je opisao pojavu sabijanja strugotine, što je jedan od prvih radova u teoriji plastičnosti i proučavanju stvaranja strugotine. Na temelju svojih opažanja postavio je teoriju o smičnoj ravnini paralelnoj s površinom obratka. Tu je pretpostavku opovrgnuo Time (1878.), koji je na temelju svojih eksperimentalnih istraživanja postavio hipotezu o nastanku strugotine koja vrijedi i u novije vrijeme te se smatra utemeljiteljem istraživanja obrade odvajanjem čestica. Sovjetski znanstvenik K. A. Zvorykin 1893. godine proširuje teoriju o nastanku strugotine pri obradi metala i postavlja prvu jednadžbu koja povezuje smicanje u smičnoj ravnini s otporima rezanja. Godine 1905. H. Fischer razrađujematematičke izraze za sile rezanja, a J. F. Brooks prikazuje prve fotografske snimke zone odvajanja čestica. U isto vrijeme više znanstvenika utvrđuje da pri stvaranju strugotine nastaje proces deformacije. Između 1915. i 1945. godine velik doprinos teoriji obrade odvajanjem čestica dali su G. Schlesinger, H. Klopstocka i W. Hippler. Godine 1922. E. G. Cokor prvi se pri proučavanju nastanka strugotine koristi fotoelastičnošću. M. M. Okochi 1927. godine razvija piezoelektričnu metodu mjerenja sila. Objavljivanjem radova Ernsta i Merchanta 1941. počinje razdoblje mikroskopskih istraživanja i pojednostavnjenja spoznaja o obradi metala.

Ernst i Merchant (Ernst, H.; Merchant, M. E., 1941.) postavljaju svoj model rezanja metala kojim uspostavljaju ovisnost između kuta smične ravnine, prednjeg kuta oštrice i kuta trenja.



Slika 3.1. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja u Ernst-Merchantovu modelu rezanja: x_0 – duljina neodrezane strugotine, y_0 – visina neodrezane strugotine, x_1 – duljina odrezane strugotine, y_1 – visina neodrezane strugotine, γ – prednji kut oštrice, φ – kut smične ravnine

Model se temelji na ovim pretpostavkama:

a) smična zona ima oblik ravnine,
b) nastaje kontinuirana strugotina,
c) oštrica alata savršeno je oštra,
d) protok materijala u zoni smicanja je plastičan,
e) materijal predmeta obrade je nestlačiv.

Na osnovi iznesenih pretpostavki, uz pomoć tog modela može se odrediti sila rezanja ($\mathbf{F}_r$) prema izrazu:

$$\mathbf{F}_r = \frac{\tau_s x_0 y_0}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi - \gamma + \beta)} \cdot \cos(\beta - \gamma)\,, \tag{3}$$

a odrivna sila ($\mathbf{F}_o$) prema izrazu:

$$\mathbf{F}_O = \frac{\tau_s x_0 y_0}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi - \gamma + \beta)} \cdot \sin(\beta - \gamma)\,. \tag{4}$$

pri čemu je x_0 duljina neodrezane strugotine, y_0 visina neodrezane strugotine, τ_s maksimalna smična naprezanja u smičnoj ravnini, φ kut smične ravnine, β kut trenja, a γ prednji kut oštrice. Model prvi put definira koeficijent sabijanja strugotine (ξ) kao omjer debljine strugotine (y_1) i debljine neodrezane strugotine (y_0) te je prikazan kao bitan pokazatelj plastične deformacije strugotine (ε^{pl}) prema izrazu:

$$\varepsilon^{pl} = \frac{1 - 2\xi \cdot \sin\gamma + \xi^2}{\xi \cdot \cos\gamma}. \tag{5}$$

Zbog svoje jednostavnosti Ernst-Merchantov model i danas je temelj mnogih modela, iako su kasnija istraživanja upozorila na određene neispravnosti tog modela.

Istraživanja u obradi drva odvajanjem čestica često se temelje na modelima razvijenima za obradu metala. Prva sustavna istraživanja sila rezanja pri obradi drva počinju u 1950-im godinama s radovima Kivimaa (1952.), Franza (1958.) i McKenzieja (1961.). Navedeni se autori koriste jednostavnijim mehaničkim modelima određivanja sile rezanja i uglavnom ne opisuju fizikalnu pozadinu samog procesa. U istraživanjima obrade drva odvajanjem čestica često se razvijaju empirijski modeli koji mogu biti korisni za praksu, ali su najčešće ograničeni na određene uvjete obrade i izvan tih uvjeta uglavnom ne vrijede i ne daju fizikalno objašnjenje procesa odvajanja čestica. Primjer takvog istraživanja jest Naylorovo (Naylor, 2012.), koje određuje empirijske izraze za silu rezanja ovisno o mehaničkim svojstvima drva, dubini rezanja i sadržaju vode u drvu. Izrazi (6) i (7) empirijski su izrazi za silu rezanja u smjeru paralelnom na vlakanca i okomitom na njih.

$$\mathbf{F}_{R\parallel} = -15{,}3 + 0{,}0243 \cdot G + 2{,}54 \cdot \tau - 0{,}0246 \cdot \rho + 65{,}4 \cdot y_0 - 0{,}301 \cdot u + 0{,}00492 \cdot U_s \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_{R\perp} = -72{,}7 - 0{,}000093 \cdot MOE + 0{,}235 \cdot MOR - 0{,}0594 \cdot \rho + 108 \cdot y_0 - 0{,}129 \cdot u + 0{,}00 \tag{7}$$

U navedenim je izrazima *MOE* modul elastičnosti u uzdužnom smjeru, *MOR* modul elastičnosti u smjeru okomitome na vlakanca, *G* modul smicanja, τ smična čvrstoća, ρ gustoća drva, *u* sadržaj vode u drvu, y_0 visina neodrezane strugotine, U_s smična čvrstoća u smjeru paralelnom s drvnim vlakancima, U_b tlačna čvrstoća u longitudinalnom smjeru.

Često primjenjivani empirijski model za određivanje sile rezanja jest onaj uz pomoću jediničnog otpora rezanja (K_r). Taj se otpor definira kao omjer sile rezanja ($\mathbf{F}_r$) i površine poprečnog presjeka neodrezane strugotine (A). U izrazu (8) **n** označava vektor normale površine poprečnog presjeka neodrezane strugotine:

$$K_r = \frac{\mathbf{F}_R}{A \cdot \mathbf{n}} \tag{8}$$

Na jedinični otpor rezanja utječe velik broj parametara kao što su vrsta drva, debljina strugotine, prednji i stražnji kut oštrice, trenje na oštrici, brzina rezanja, sadržaj vode u drvu, itd. Dosadašnja istraživanja pokazuju da se izmjerene vrijednosti jediničnog otpora rezanja unutar iste vrste drva, pa čak i unutar iste piljenice, mogu razlikovati i do 25 % (V. Goglia, 1994.). Jedinični otpor rezanja određuje se s pomoću tzv. referentnoga jediničnog otpora rezanja (K_φ). Taj se otpor rezanja eksperimentalno određuje u točno definiranim i kontroliranim uvjetima s obzirom na smjer drvnih vlakanaca. Svi ostali utjecajni parametri su poznati, a vrijednosti koje imaju pri mjerenju jediničnog otpora rezanja nazivaju se referentnim vrijednostima utjecajnih parametra. Neki od utjecajnih parametara jesu vrsta drva, sadržaj vode u drvu, debljina strugotine, radijus oštrice, brzina rezanja itd. Promjena vrijednosti bilo kojega utjecajnog parametra s obzirom na referentnu vrijednost utječe na promjenu vrijednosti jediničnog otpora rezanja, zbog čega se uvode određene korekcije, i to putem tzv. korekcijskih faktora. Vrijednosti korekcijskih faktora dobivaju se iz omjera otpora rezanja i izmjerenog otpora rezanja u stvarnim uvjetima. Pretpostavimo li da se u stvarnom primjeru promijenila samo debljina strugotine s obzirom na referentnu vrijednost i pritom je izmjeren jedinični otpor rezanja (K_s). Korekcijski faktor za promjenu debljine strugotine (k_s) određen je omjerom stvarnoga jediničnog otpora (K_s) i referentnoga jediničnog otpora rezanja (K_φ):

$$k_s = \frac{K_s}{K_\varphi} \tag{9}$$

Atkins (2003.) u svoj model ortogonalnog rezanja metala, koji proizlazi iz Ernst-Merchantove teorije, uključuje mehaniku loma i jediničnu energiju potrebnu za stvaranje nove površine (R). Snaga (P_u) uložena u sustav ortogonalnog rezanja rezultat je zbroja triju komponenti: snage uložene na plastičnu deformaciju strugotine (P_{pd}):

$$P_{pl} = \tau_y \cdot \varepsilon_y \cdot y_0 \cdot z_0 \cdot \mathbf{v}_a \tag{10}$$

snage uložene na svladavanje rada sile trenja na prednjoj strani alata (P_{trp}):

$$P_{trp} = \mathbf{F}_R \cdot \sec(\beta - \alpha) \cdot \sin\beta \cdot \frac{\mathbf{v}_a \cdot \sin\varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}, \tag{11}$$

i snage uložene na stvaranje nove površine (P_{np}):

$$P_{np} = R \cdot z_0 \cdot \mathbf{v}_a, \tag{12}$$

gdje je τ_y smična čvrstoća, ε_y deformacija u smjeru smične ravnine, y_0 visina neodrezane strugotine, z_0 širina neodrezane strugotine, $\mathbf{v}_a$ brzina alata, $\mathbf{F}_r$ sila rezanja, β kut trenja, α stražnji kut oštrice alata, φ kut smične ravnine, R jedinična energija potrebna za stvaranje nove površine. Atkins navodi dobro podudaranje teorijskih i eksperimentalnih rezultata pri rezanju metala, a također navodi da je model primjenjiv i na proces rezanja drva, uz uvjet nastanka kontinuirane strugotine. Uključivanjem mehanike loma u model uvedena je singularnost rješenja u području maksimalnih naprezanja, odnosno pri samom vrhu oštrice. Atkins svoj model primjenjuje i na drvo (Atkins, 2013.), ali nema fizikalnog objašnjenja kako je došao do modela.

Astakhov (2008.) primjenjuje energijski pristup određivanja sile rezanja i daje objašnjenje modela od razine osnovnih fizikalnih zakona, a velik dio njegovih istraživanja temelji se i na prethodnim radovima Zoreva (1966.). Prema Astakhovu, ukupna snaga rezanja rezultat je zbroja sljedećih komponenti: snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine (P_{pd}):

$$P_{pd} = \frac{K \cdot (1{,}15 \cdot \ln\xi)^{n+1}}{n+1} \cdot \mathbf{v}_a \cdot x_0 \cdot y_0, \tag{13}$$

snage potrebne za svladavanje rada trenja na prednjoj plohi alata $P_{(tr)p}$:

$$P_{trp} = 0{,}28 \cdot \sigma_R \cdot \mathbf{v}_a \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot \xi^{0{,}5}, \tag{14}$$

snage potrebne za svladavanje rada trenja na stražnjoj plohi alata $P_{(tr)s}$:

$$P_{\text{trs}} = 0{,}625 \cdot \tau_{\text{y}} \cdot \rho \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha \cdot (\xi - \sin\gamma)}} \tag{15}$$

i snage potrebne za stvaranje nove površine P_{np}:

$$P_{\text{np}} = E_{\text{ch}} \cdot \frac{x_0 \cdot y_0}{\sin \operatorname{arctg} \frac{\cos\gamma}{\xi - \sin\gamma}} \cdot f \,, \tag{16}$$

gdje je K faktor snage, n koeficijent otvrdnjavanja, $\mathbf{v}_{\text{a}}$ brzina alata, x_0 i y_0 duljina i širina neodrezane strugotine, x_1 i y_1 duljina i širina odrezane strugotine, ξ debljinski koeficijent sabijanja strugotine, σ_{R} maksimalna vlačna čvrstoća materijala obratka, τ_{y} smična čvrstoća materijala od kojega je izrađen alat, ρ radijus oštrice alata, l duljina kontakta stražnje površine alata i obratka, γ prednji kut oštrice alata, α stražnji kut oštrice alata, E_{ch} kohezivna energija, f frekvencija stvaranja strugotine. Model prikazuje koeficijent sabijanja strugotine (ξ) kao vrlo bitan pokazatelj svake pojedine komponente snage. Sve komponente ukupno potrebne snage za rezanje povezane su s debljinskim koeficijentom sabijanja strugotine kao činiteljem koji bi se u praksi mogao relativno jednostavno izmjeriti i biti pokazatelj ukupnih naprezanja koja nastaju u zoni rezanja. Model koji je postavio Astakhov temelji se na mehanici kontinuuma kao na fizikalnoj podlozi za povezivanje svojstava materijala obratka i tehnoloških parametara obrade, a rezultati modela pokazuju dobru podudarnost s eksperimentalnim podatcima pri obradi metala.

4.CILJEVI I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA

Ciljevi istraživanja jesu:

- prilagođivanje teorijskog modela snage rezanja ortogonalnom rezanju uzoraka drva
- prepoznavanje i analiziranje utjecajnih mehaničkih svojstava drva na iznos snage rezanja
- teorijsko određivanje veze između mehaničkih svojstava drva i iznosa snage rezanja
- eksperimentalno određivanje ovisnosti snage rezanja o brzini rezanja te o sadržaju vode u drvu
- eksperimentalno određivanje ovisnosti koeficijenata sabijanja strugotine o brzini rezanja te o sadržaju vode u drvu
- eksperimentalno određivanje ovisnosti mehaničkih svojstava drva potrebnih za izračun snage rezanja o sadržaju vode u drvu.

Hipoteze su sljedeće:

- ukupna snaga rezanja rezultat je zbrajanja ovih komponenti: snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine (P_{pd}), snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj (P_{trp}) i stražnjoj plohi alata (P_{trs}) i snage potrebne za stvaranje nove površine (P_{np})
- duljinski i debljinski koeficijent sabijanja strugotine mogu se prikazati kao veza između mehaničkih svojstava drva i snage rezanja
- mehanička svojstva drva potrebna za teorijski model ne mogu se preuzimati iz standardiziranih ispitivanja, već se trebaju ispitati na uzorcima reda veličine strugotine.

5.TEORIJSKI DIO

Osnovne teorijske temelje znanosti o rezanju čine teorija plastičnosti, znanost o toplini, tribologija i znanost o strukturi materijala. Uz pomoć tih disciplina objašnjava se priroda procesa rezanja i nastanak pojava u zoni rezanja. Polazeći od teorije plastičnosti, znanosti o strukturi materijala i od rezultata eksperimentalnih ispitivanja, opći tijek procesa rezanja može se rastaviti na tri karakteristična procesa: proces početne (elastične) deformacije, proces plastične deformacije reznog sloja u zoni rezanja i, na kraju, na proces razaranja materijala, nastanka odvojene čestice i njezina odvođenja. S obzirom na složenu građu, prije opisa modela razmotrit ćemo mehanička svojstva drva sa stajališta mehanike kontinuuma.

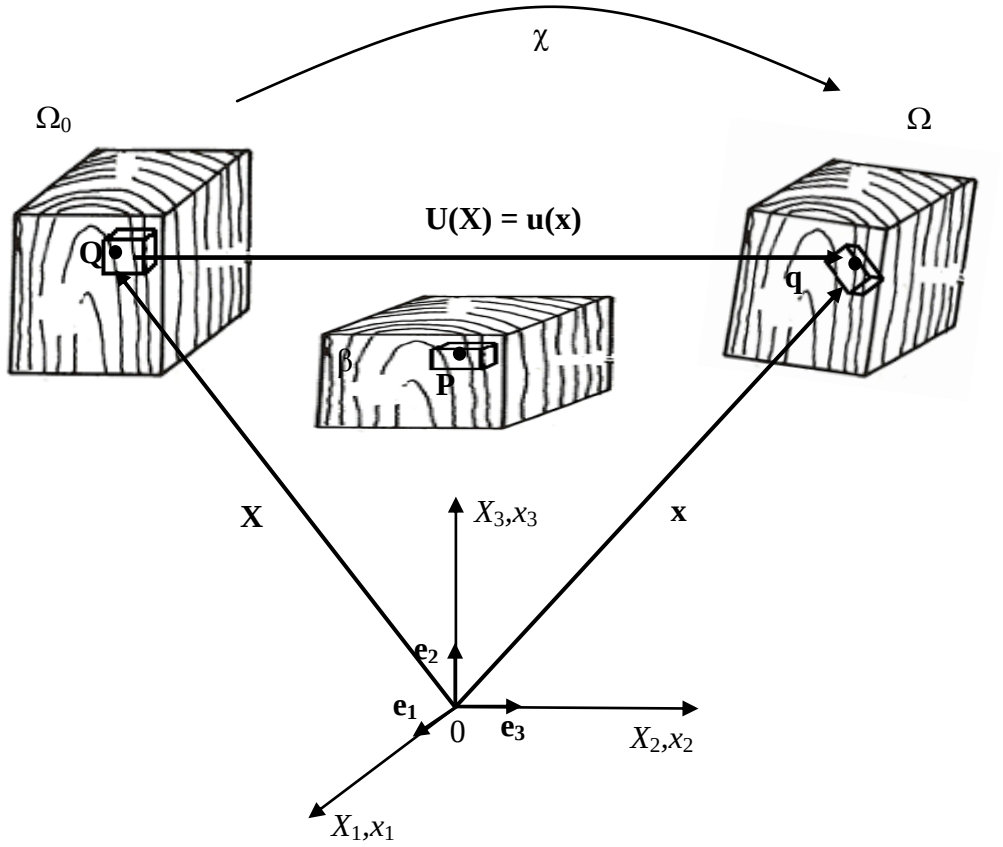
Mehanika kontinuuma proučava ponašanje materijala podvrgnutoga vanjskom utjecaju. Čvrsta tijela i fluidi imaju korpuskularnu strukturu, što znači da se sastoje od molekula, atoma i subatomskih čestica koje su međusobno manje ili više pokretljive. Među česticama djeluju interkorpuskularne sile elektromagnetske prirode čiji intenzitet ovisi o međusobnim razmacima čestica. Mikroskopski pristup proučavanju tijela uzima u obzir atomsku i molekularnu strukturu materije te ponašanje tijela postavlja na mikrorazinu. Normalno mjerljive veličine u tehnici daleko prelaze dimenzije unutar kojih treba voditi brigu o utjecajima pojedinih čestica, pa se promjene oblika i volumena mogu promatrati makroskopski, prihvaćajući materiju kao sredinu bez prekida. Tada se govori o mehanici neprekidnih sredina ili mehanici kontinuuma. U mikroskopskim uvjetima model kontinuuma ne vrijedi jer se između dvije čestice nalazi praznina. U nekim su tvarima diskontinuiteti i makroskopski očiti, npr. pukotine u drvu. S obzirom na navedeno, idealizacija drva kontinuumom može se smatrati samo zadovoljavajućom. Rješenja diferencijalnih jednadžbi utemeljenih na konceptu kontinuuma pokazala su podudaranje s rezultatima pokusa, uz određena odstupanja. To, zapravo, znači da materijal na makroskopskoj razini teži uprosječenju svojih svojstava na mikroskopskoj razini.

U mehanici kontinuuma pojave se promatraju fenomenološki i na makroskopskoj razini, ne ulazeći u fizikalnu strukturu materije. S takvog stajališta pretpostavljamo da neprekidna sredina ili kontinuum zadržava neprekinutost fizikalnih svojstava prelazeći i u infinitezimalne volumene odnosno, u graničnom prijelazu, u nulti volumen, tj. u točku. Na temelju hipoteze kontinuuma kruta se tijela u smislu mehanike definiraju kao neprekidni

sustavi beskonačnog broja materijalnih čestica. Sume po broju materijalnih čestica, koje se pojavljuju u zakonima mehanike sustava materijalnih čestica, tada se zamjenjuju integralima po neprekinutoj masi, odnosno po volumenu prostora koji kontinuum zauzima. Hipoteza kontinuuma ima fundamentalno značenje u istraživanju fizikalnih zakona i izvođenju jednadžbi gibanja ili ravnoteže. Pri proučavanju kontinuuma koordinate točaka odnosno varijable u jednadžbama možemo opisivati na dva načina. Kada promjenu neke fizikalne veličine promatramo kao funkciju početnog položaja i vremena, govorimo o Lagrangeovoj ili materijalnoj prezentaciji te veličine. Za razliku od Lagrangeova sustava, Eulerova ili prostorna prezentacija promatra veličine kao funkcije trenutačnog položaja i vremena. Jednadžbe u Eulerovu sustavu, dakle, opisuju fizikalne veličine (npr. gustoću, tlak, brzinu...) u određenoj fiksnoj točki promatranog područja, dok jednadžbe u Lagrangeovu sustavu prate povijest gibanja individualnih čestica danog materijala.

5.1. Kinematika kontinuuma

Neka se tijelo β u trenutku *t* nalazi u trodimenzionalnom Euklidovu prostoru (sl. 4.1.). Promatramo jednu česticu tijela β označenu slovom *p*, koja se naziva materijalna točka. Točka *O* označava ishodište koordinatnog sustava s pripadajućim jediničnim vektorima $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Neka se tijelo β giba u vremenu kroz prostor zauzimajući pritom različite položaje Ω_0, Ω_1, Ω_2,….. Ω_n. Tih položaja ima beskonačno mnogo, ali je svaki od njih točno određen u vremenu. Početni položaj Ω_0 naziva se referentnom ili materijalnom konfiguracijom, a svi ostali položaji Ω_1, Ω_2,.....Ω_n zovu se trenutačna ili prostorna konfiguracija. Položaj materijalne točke P na mjestu $Q \in \beta$ u vremenu $t_1 = 0$ određen je vektorom položaja **X** u odnosu prema ishodištu koordinatnog sustava *O*. Ako se tijelo β u nekom trenutku $t = t_2$ pomakne s položaja Ω_0 u položaj Ω_1, pri čemu je $t_2 > t_1$, to se naziva trenutačnom ili prostornom konfiguracijom. U trenutku t_2 čestica *P* nalazi se na mjestu $q \in \beta$, koje je određeno vektorom položaja **x**. Komponente vektora $\mathbf{X} = X_i \cdot \boldsymbol{e}_i$ zovu se materijalne ili referentne, a komponente vektora $\mathbf{x} = x_i \cdot \mathbf{e}_i$ jesu prostorne ili trenutačne komponente.



Slika 5.1. Konfiguracija i pomak materijalnog tijela

a) Materijalni, referentni ili Lagrangeov pristup

Gibanje kontinuuma opisano je uz pomoć materijalnih koordinata (X_1, X_2 *i* X_3) i vremena *t*:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \tag{17}$$

gdje $\boldsymbol{\chi}$ određuje položaj koordinate **x** u odnosu prema **X**. Pomak materijalne točke određen je relacijom:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \tag{18}$$

b) Prostorni, trenutačni ili Eulerov pristup

Gibanje kontinuuma opisano je prostornim koordinatama (x_1, x_2 *i* x_3) i vremenom *t*:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tag{19}$$

gdje $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ određuje inverzno gibanje u ovisnosti o koordinati ***x***. Pomak materijalne točke određen je relacijom:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{20}$$

Lako se može dokazati da vrijedi:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{21}$$

5.2. Opći zakoni mehanike kontinuuma

5.2.1. Zakon očuvanja mase

Pri makroskopskom proučavanju kontinuuma pretpostavlja se da je masa neprekidno i jednoliko raspoređena duž promatranog tijela. Ona je skalarna veličina i u klasičnoj se mehanici podrazumijeva da se ne mijenja tijekom gibanja, odnosno, prema jednadžbi kontinuiteta vrijedi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{22}$$

gdje je **v** brzina gibanja, a $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ promjena gustoće koja nastaje zato što je drvo stlačiv materijal.

5.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Neka tijelo β zauzima neki prostor Ω i omeđeno je rubnom plohom dΩ, na njegov elementarni volumen dV djeluje volumna sila **f** , a na njegovu elementarnu površinu dS vanjsko kontinuirano opterećenje. Tada prema zakonu očuvanja količine gibanja vrijedi:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{23}$$

Ako je ubrzanje jednako nuli, jednadžba (10) poprima oblik:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \tag{24}$$

5.2.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Prema zakonu očuvanja kutne količine gibanja, ukupna kutna količina gibanja sustava ostaje konstantna ako je ukupni moment sile koji djeluje na sustav jednak nuli. Matematičkim zapisom tog zakona i razvijanjem tih jednadžbi kao rezultat se dobije relacija:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}_{ji}. \tag{25}$$

Iz relacije (25) može se zaključiti da je Cauchyjev tenzor naprezanja (**σ**) simetričan.

5.2.4. Zakon očuvanja energije

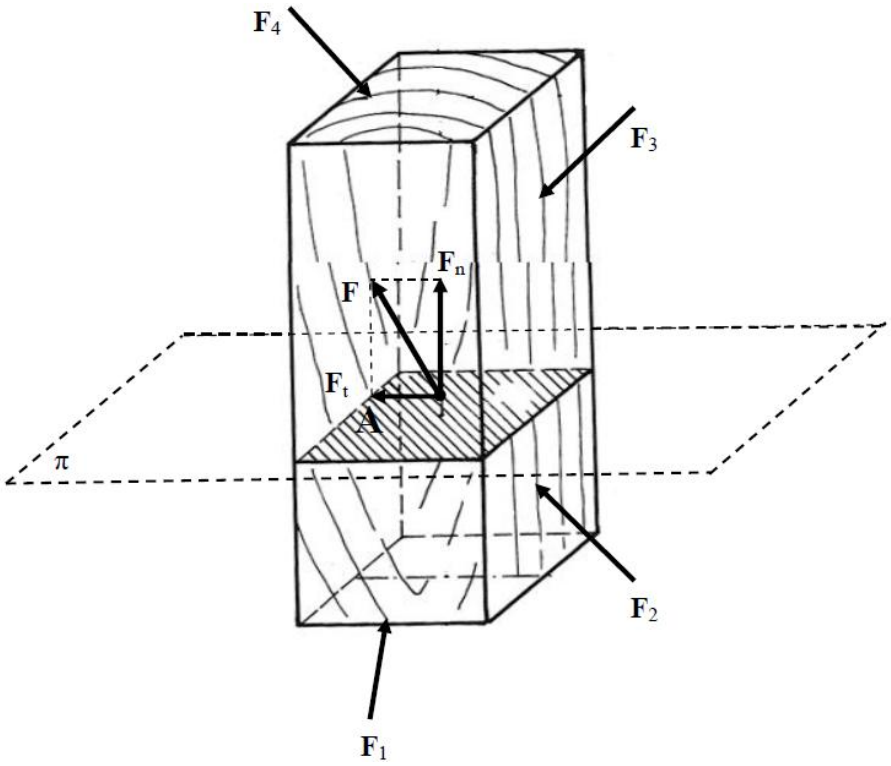
Zakon očuvanja energije u referentnoj konfiguraciji ima oblik:

$$\rho \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathbf{P} : \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{div}Q + R\,. \tag{26}$$

Zakon očuvanja energije ujedno izražava i prvi zakon termodinamike. Povećanje ukupne energije sustava ($\rho \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$) jednako je zbroju dovedene topline sustavu ($-\mathrm{div}Q + R$) i rada izvršenog nad sustavom ($\mathbf{P} : \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}$)

5.3. Naprezanje kontinuuma

Proces deformacije proučit ćemo s polazišta mehanike kontinuuma na drvu koje će biti predstavljeno kao ortotropni materijal. Tijekom deformacije, komad drva se u trenutku *t* nalazi u ravnotežnom stanju. Ako promatramo djelovanje sila $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ i $\mathbf{F}_4$ na komad drva u ravnotežnom stanju (sl. 5.2.), može se vidjeti da sile uzrokuju gibanje i deformiranje drva. Ako se taj komad drva podijeli na dva dijela, na presječnim površinama moraju djelovati sile kako bi se ti dijelovi nastavili gibati i deformirati na isti način kao i prije podjele. Tada razmatramo dva dijela tijela u dodiru s površinom razdvajanja π. Jedna je strana ravnine π pozitivna, a druga negativna. Sila se prenosi kroz ravninu π izravnim dodirom materijala. Sila koja se prenosi preko područja *A* označena je s **F**. Općenito, sila **F** nije okomita na ravninu π. Primjenom Newtonova zakona reakcije, materijal na negativnoj strani ravnine π prenosi silu − **F** preko područja A.



Slika 5.2. Normalno i tangencijalno naprezanje drva zbog djelovanja sile (*A* označava presječnu površinu u ravnini π)

Sila **F** rastavlja se na komponente $\mathbf{F}_n$ i $\mathbf{F}_t$, tako da je komponenta $\mathbf{F}_n$ okomita na ravninu π i predočuje normalnu silu na površini *A*, a komponenta $\mathbf{F}_t$ tangira ravninu π i označava tangencijalnu silu na površini *A*. Omjer komponenata sile **F** i površine *A* daje normalna i tangencijalna naprezanja. Tijekom procesa deformiranja komponente sile **F** mijenjaju se (Požgaj et al., 1993.). Kako bi se odredilo naprezanje u proizvoljnoj točki, područje *A* smatra se infinitezimalno malim. Matematička prezentacija ima oblik:

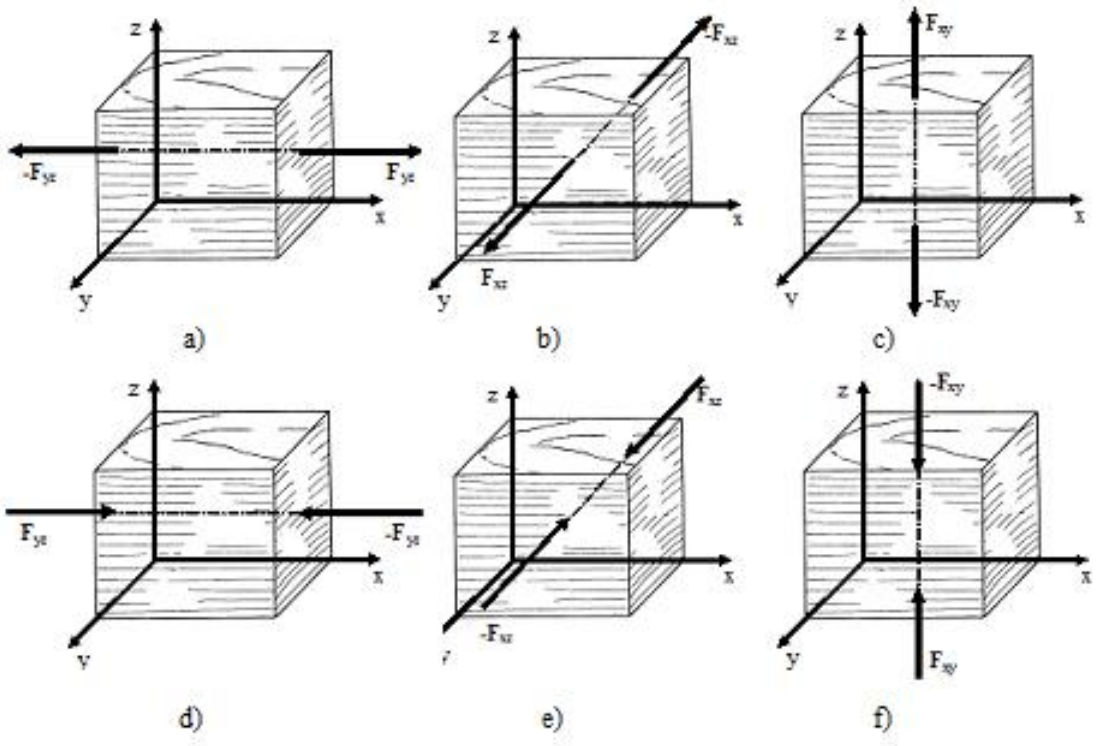
$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_n}{\mathrm{d}A} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_t}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_t}{\mathrm{d}A} \tag{28}$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma}$ normalno naprezanje u točki iz područja *A* ravnine π, a $\boldsymbol{\tau}$ tangencijalno (posmično) naprezanje u istoj točki područja *A* ravnine π.

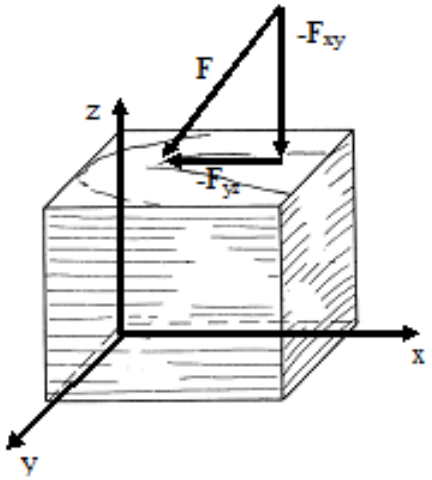
Normalna naprezanja u drvu uzrokuju sile koje djeluju okomito na njegovu površinu. S obzirom na prethodno definirane smjerove drva, razlikujemo djelovanje sile paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru, te okomito na vlakanca u radijalnom i tangencijalnom smjeru. Prema kutu između smjera djelovanja sile na površinu i vektora normale te površine definiraju se tlačna, vlačna i tangencijalna naprezanja. Ako sila na površinu i vektor normale

te površine zatvaraju kut od 0°, tada sila uzrokuje vlačna naprezanja, a ako je taj kut 180°, sila uzrokuje tlačna naprezanja (sl. 5.3.).



Slika 5.3. Prikaz djelovanja sile okomito na površinu drva: a) vlačno naprezanje u longitudinalnom smjeru (djelovanje sile okomito od površine poprečnog presjeka), b) vlačno naprezanje u radijalnom smjeru (djelovanje sile okomito od površine radijalnog presjeka), c) vlačno naprezanje u radijalnom smjeru (djelovanje sile okomito od površine tangencijalnog presjeka), d) tlačno naprezanje u longitudinalnom smjeru (djelovanje sile okomito na površinu poprečnog presjeka), e) tlačno naprezanje u radijalnom smjeru (djelovanje sile okomito na površinu radijalnog presjeka), f) tlačno naprezanje u radijalnom smjeru (djelovanje sile okomito na površinu tangencijalnog presjeka).

Tangencijalna naprezanja u drvu uzrokuje sila koja djeluje pod određenim kutom prema vektoru normale površine. Na slici 5.4. prikazan je slučaj djelovanja sile na površinu drva pod određenim kutom. Rastavljajući silu (**F**) na komponente, vidljivo je da komponenta – $\mathbf{F}_{xy}$ djeluje okomito na vlakanca uzrokujući tlačna naprezanja u radijalnom smjeru, a komponenta – $\mathbf{F}_{yz}$ djeluje paralelno s vlakancima uzrokujući tangencijalna naprezanja.

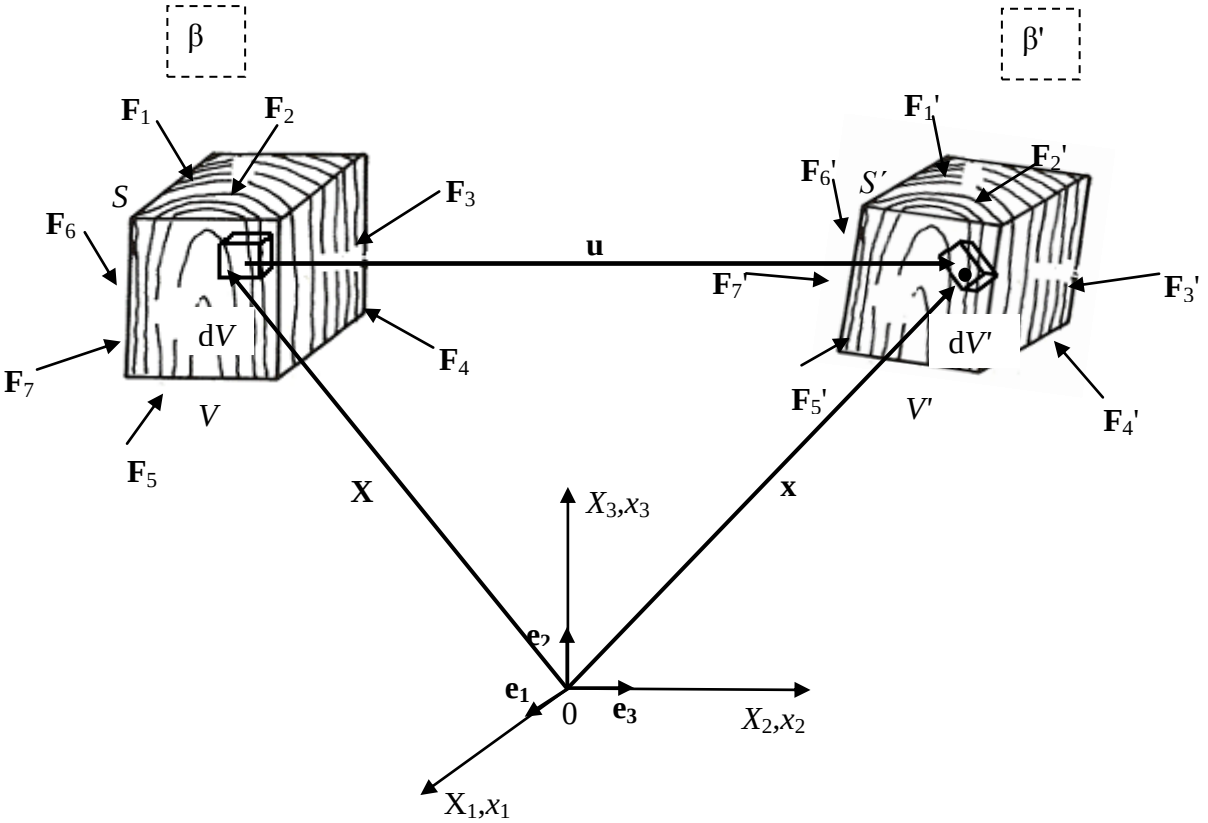


Slika 5.4. Djelovanje sile **F** na površinu drva pod određenim kutom: – $\mathbf{F}_{xy}$ komponenta sile **F** koja uzrokuje normalna naprezanja, – $\mathbf{F}_{yz}$ komponenta sile **F** koja uzrokuje tangencijalno naprezanje drva

5.3.1. Tenzor naprezanja

Radi određivanja troosnog stanja naprezanja, promotrit ćemo drvo u nedeformiranoj i deformiranoj konfiguraciji. Dio drva volumena *V*, omeđen plohom *S*, nedeformirano je stanje (β). Zbog djelovanja vanjskih i unutarnjih sila drvo se deformira i prelazi u deformirano stanje (β') volumena *V´*, omeđeno plohom *S´*. Kao posljedica gibanja pojavljuje se međusobno djelovanje susjednih materijalnih točaka unutar drva koje utječe na pojavu naprezanja. Položaj volumena d*V* u nedeformiranom stanju određen je vektorom položaja $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$, položaj volumena d*V´* u deformiranom stanju određen je vektorom položaja $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$, a $\mathbf{q}'$ označava ukupnu silu koja djeluje na tijelo u deformiranom stanju i može se prikazati uz pomoć koordinata:

$$\mathbf{q}' = \left(\mathbf{F'}(x_1)\mathbf{e}_1 , \mathbf{F'}(x_2)\mathbf{e}_2 , \mathbf{F'}(x_3)\mathbf{e}_3 \right). \tag{29}$$



Slika 5.5. Shematski prikaz deformacije drva: β – nedeformirano stanje, β' – deformirano stanje, dV – izdvojeni volumen u nedeformiranom stanju, dV' – izdvojeni volumen u deformiranom stanju, *S* – ploha kojom je omeđeno nedeformirano stanje, *S'* – ploha kojom je omeđeno deformirano stanje, $\mathbf{F}_i$ – sile koje djeluju u nedeformiranom stanju, $\mathbf{F}_i'$ – sile koje djeluju u deformiranom stanju, X – materijalne koordinate, x – prostorne koordinate

Unutarnje ili volumenske sile djeluju na mase pojedinih čestica $\Delta m'$ pridruženih jediničnim volumenima $\Delta V'$,i to suprotno smjeru gibanja. Volumenske su sile po prirodi inercijske, a djeluju na sve elementarne volumene deformiranog stanja. Kako bi deformirano stanje bilo u ravnoteži, nužno je da sila $\mathbf{F}'$ i moment $\mathbf{M}'$ svih sila budu nul-vektori, što se može prikazati izrazima:

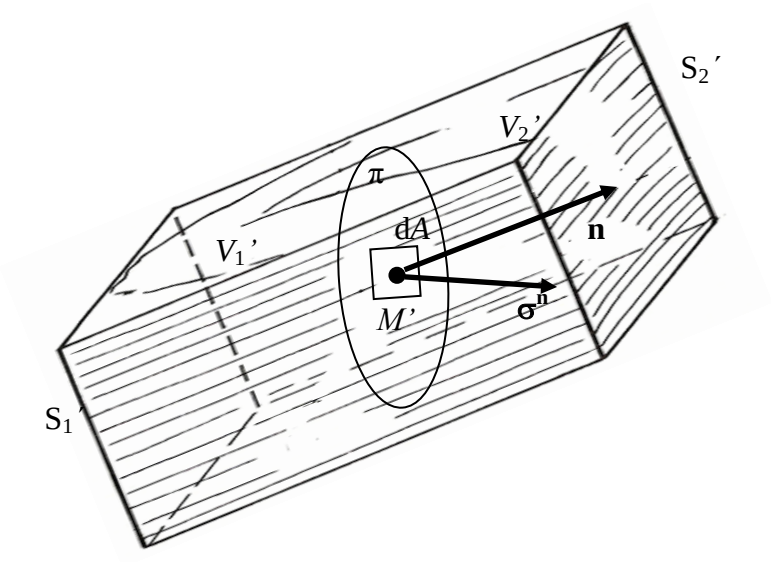
$$\mathbf{F}' = \int_{S'} \mathbf{q}' dS' + \int_{V'} \rho' \cdot \mathbf{k}\, dV' = 0 \tag{30}$$

$$\mathbf{M}' = \int_{S'} \mathbf{x} \times \mathbf{q}' dS' + \int_{V'} \mathbf{x} \times \rho' \cdot \mathbf{k}\, dV' = 0 \tag{31}$$

gdje je $\mathbf{k}$ vektor koji određuje silu po jedinici mase, a ρ´ masa po jedinici deformiranog volumena.

Ako je deformirano stanje u ravnoteži, onda je i svaki izdvojeni dio (dV') u ravnoteži. Prema St. Venantovu načelu, vanjsko se djelovanje može premještati unutar pravca u proizvoljnu lokaciju a da se dovoljno daleko od pravca djelovanja stanje naprezanja u tijelu ne mijenja. Da bi se odredilo polje unutarnjih sila, valja promotriti deformirano stanje opterećeno vanjskim silama po rubnoj plohi S_1' i S_2'. Ravnina π presijeca drvo na dva dijela i čini ravninu interakcije između volumena V_1' i V_2' (sl. 5.6.). Ako elementarnoj površini dS u okolini točke M' pridružimo vektor normale **n**, ona također postaje vektorska veličina, što se može prikazati izrazom:

$$\begin{aligned} &\mathbf{n}\, dS = \boldsymbol{dS}^{\mathrm{n}} \\ &\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \\ &\mathbf{dS}^{\mathrm{n}} = \mathbf{n}\, dS = (dS_1, dS_2, dS_3) \end{aligned} \quad . \tag{32}$$



Slika 5.6. Definiranje polja unutarnjih sila ili polja naprezanja

Neka je $\mathbf{\Delta f}^{\mathrm{n}}$ sila interakcije dvaju elemenata koja djeluje na orijentiranu površinu *dS*. Srednju vrijednost interaktivne sile na površinu *dS* možemo odrediti ovako:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}^{\mathrm{n}}}{\Delta S} = \frac{\mathbf{df}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}S} \tag{33}$$

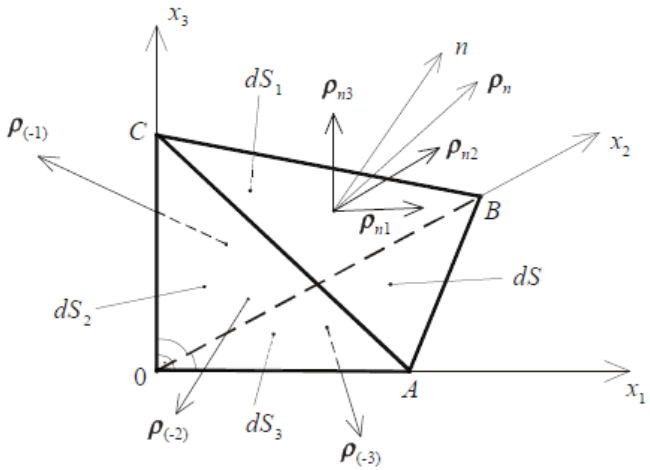
gdje je $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}$ vektor koji predočuje silu interakcije između volumena V_1' i V_2' preko orijentirane površine d*S* i naziva se vektorom totalnog naprezanja u točki *M´*. Indeks n označava pripadnost normali. Vektor totalnog naprezanja $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}$ na volumenu V_1' ima orijentaciju (+ **n**), a na volumenu V_2' orijentaciju (– **n**). Iz zakona akcije i reakcije proizlazi:

$$\boldsymbol{\sigma}^{-\mathrm{n}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{-\mathrm{n}} = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{n}}. \tag{34}$$

Budući da se u točki *M'* može postaviti beskonačno mnogo ravnina interakcije V_1' i V_2', moguće im je pridružiti i beskonačno mnogo vektora totalnog naprezanja $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}$. Nije nužno specificirati svaki par vektora naprezanja i normala kako bi se opisalo stanje naprezanja u određenoj točki deformirane konfiguracije. Dovoljno je znati vektore totalnog naprezanja na tri međusobno okomite ravnine u toj točki, a zatim se prema zakonu transformacije odredi totalno naprezanje na općoj ravnini s proizvoljno zadanom orijentacijom. Zadatak određivanja tenzora naprezanja svodi se na preslikavanje vektorskog polja normala u vektorsko polje totalnog naprezanja:

$$\mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}. \tag{35}$$

Promatra se preslikavanje predočeno izrazom (35) na proizvoljno orijentiranoj površini $\mathbf{d}\boldsymbol{S}^{\mathrm{n}}$ koja prolazi kroz određenu točku deformiranog stanja (sl. 5.7.).



Slika 5.7. Naprezanje u okolini točke

Na slici 5.7. prikazan je Cartesijev koordinatni sustav (0, x_1, x_2, x_3) s tetraedrom *0ABC*. Površina *ABC* elementarna je površina s orijentiranom normalom $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, pa je prema tome:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}^{\mathrm{n}} = \mathbf{n}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{d}S_1, \mathrm{d}S_2, \mathrm{d}S_3) \tag{36}$$

$$n_{\mathrm{i}} = \left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}S}, \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}S}, \frac{\mathrm{d}S_3}{\mathrm{d}S}\right) = \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}S}. \tag{37}$$

Na trokut *ABC* djeluje vektor $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}}$ s komponentama u smjeru koordinatnih osi $\boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}}, \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}}, \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}}$. Na elementarnim površinama $\mathrm{d}S_{\mathrm{i}}$ u smjeru suprotnome smjeru koordinatnih osi djeluju vektori totalnog naprezanja $\boldsymbol{\sigma}_1^{-\mathrm{n}}, \boldsymbol{\sigma}_2^{-\mathrm{n}}, \boldsymbol{\sigma}_3^{-\mathrm{n}}$ za koje vrijede izrazi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_1^{-\mathrm{n}} &= (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) = -\boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{-\mathrm{n}} &= (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) = -\boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{\sigma}_3^{-\mathrm{n}} &= (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}) = -\boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}} \end{aligned}. \tag{38}$$

Glavni vektor sila koje djeluju na elementarnom tetraedru zbog ravnoteže mora biti nul-vektor, iz čega proizlazi:

$$\mathrm{d}S_1\boldsymbol{\sigma}_1^{-\mathrm{n}} + \mathrm{d}S_2\boldsymbol{\sigma}_2^{-\mathrm{n}} + \mathrm{d}S_3\boldsymbol{\sigma}_3^{-\mathrm{n}} + \mathrm{d}S\boldsymbol{\rho}'' = 0\,. \tag{39}$$

Iz izraza (37), (38) i (39) dobiva se:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{n} &= \boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} n_1 + \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}} n_2 + \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}} n_3 = \\ &= (\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) n_1 + (\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23}) n_2 + (\sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}) n_3 \end{aligned}. \tag{40}$$

Komponente σ_{ij} u relaciji (40) označuju komponente naprezanja paralelne s koordinatnim osima. Za pozitivni smjer vektora punog naprezanja proizlazi:

$$\boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}}(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}}(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}}(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}). \tag{43}$$

Vektor punog naprezanja na proizvoljno odabranoj ravnini jednak je zbroju projekcija vektora totalnih naprezanja na koordinatnim ravninama u smjer normale na proizvoljnoj ravnini. U skladu s izrazima (39), (40), (41), (42) i (43), slijedi da je:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ \boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned}. \tag{44}$$

Izraz (44) daje preslikavanje polja normala u polje totalnog naprezanja. Pisano u indeksiranom obliku, to je:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} = \sigma_{\mathrm{ji}} n_{\mathrm{j}} \quad ; \quad (i, j = 1,2,3) \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{n}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{\sigma}_3^{\mathrm{n}} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{\mathrm{ij}}\right] \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \left[\sigma_{\mathrm{ji}}\right] \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^{n} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}. \tag{47}$$

Tenzor $[\sigma_{\mathrm{ij}}]$ čini devet komponenata vektora totalnog naprezanja, što daje Cauchyjev tenzor naprezanja u okolini točke deformiranog tijela. Indeks i označava smjer normale elementarne

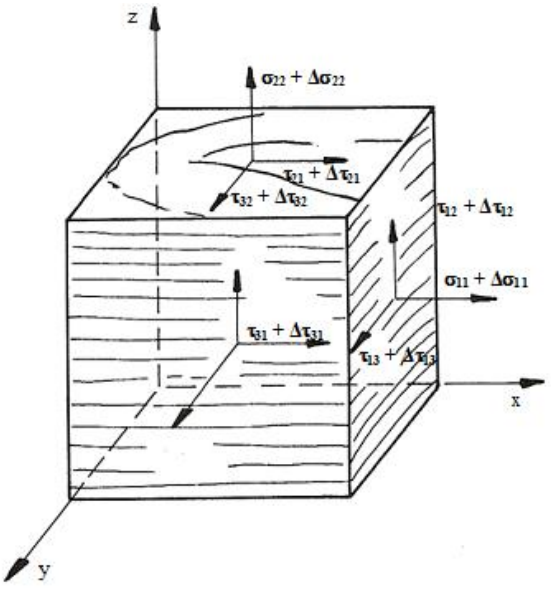
površine na kojoj se promatra naprezanje, a indeks j smjer koordinatne osi u čijem smjeru djeluje naprezanje, pa se može napisati da je:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}. \tag{48}$$

Dijagonalni elementi tenzora predočuju normalna naprezanja, a nedijagonalni elementi tangencijalna naprezanja:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}. \tag{49}$$

Postave li se osi koordinatnog sustava *x*, *y*, *z* kroz težište paralelopipeda prikazanoga na sljedećem crtežu, a zatim se za te osi postave ravnotežne momentne jednadžbe, tada te jednadžbe sadržavaju samo članove tangencijalnih naprezanja koje nisu paralelne s tim osima.



Slika 5.8. Shematski prikaz komponenata tenzora naprezanja

Iz jednadžbe momentne ravnoteže za x os:

$$(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}-(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}=0 \tag{50}$$

slijedi da je $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ i $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Iste jednadžbe vrijede i za druge dvije osi. U dvjema međusobno okomitim ravninama kroz neku točku napregnutog tijela tangencijalna su naprezanja jednako velika. Poopćenjem za *y* i *z* os možemo pisati: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Uzimajući u obzir zakonitosti koje proizlaze iz momentne ravnoteže, tenzor naprezanja može se prikazati izrazom:

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Tenzor naprezanja nesimetrični je tenzor koji se može rastaviti na simetrični i antisimetrični dio:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{T}_{\sigma} + \mathbf{T}_{\omega}^{\sigma} \tag{52}$$

pri čemu je $\mathbf{T}_{\sigma}$ simetrični, a $\mathbf{T}_{\omega}^{\sigma}$ antisimetrični dio tenzora deformacije koji se u razvijenom obliku mogu predočiti izrazima:

$$\left[T_{\sigma}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{32} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$\left[T_{\omega}^{\sigma}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{32} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Simetrični dio tenzora naprezanja $[T_{\sigma}]$ u kojemu su tangencijalna naprezanja jednaka nuli naziva se tenzorom glavnih naprezanja i određen je izrazom:

$$\left[T_{\sigma}^{g}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

gdje su σ_1, σ_2 i σ_3 glavna naprezanja, a koordinatne osi u kojima je vrijednost tangencijalnih naprezanja jednaka nuli tada su glavne osi tenzora naprezanja. Glavna naprezanja određuju se rješavanjem kubne jednadžbe:

$$\sigma^3 - I_1(\mathbf{T}_\sigma)\cdot\sigma^2 + I_2(\mathbf{T}_\sigma)\cdot\sigma - I_3(\mathbf{T}_\sigma) = 0\,. \tag{56}$$

u kojoj su $I_1(\mathbf{T}_\sigma)$, $I_2(\mathbf{T}_\sigma)$ i $I_3(\mathbf{T}_\sigma)$ invarijante simetričnog dijela tenzora naprezanja, a mogu se prikazati izrazima:

$$I_1(\mathbf{T}_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,, \tag{57}$$

$$I_2(\mathbf{T}_\sigma) = \begin{vmatrix}\sigma_1 & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \sigma_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_2 & \tau_{23}\\ \tau_{32} & \sigma_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\sigma_1 & \tau_{13}\\ \tau_{31} & \sigma_3\end{vmatrix}, \tag{58}$$

$$I_3(\mathbf{T}_\sigma) = \begin{vmatrix}\sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3\end{vmatrix}. \tag{59}$$

Simetrični dio tenzora naprezanja može se rastaviti na hidrostatički ($\mathbf{S}_\sigma$) i devijatorski ($\mathbf{D}_\sigma$) dio. Hidrostatički dio ($\mathbf{S}_\sigma$) tenzora označava naprezanja koja uzrokuju promjenu volumena, a devijatorski dio ($\mathbf{D}_\sigma$) predočuje naprezanja koja uzrokuju promjenu oblika. Hidrostatički i devijatorski dio tenzora deformacija dani su izrazima:

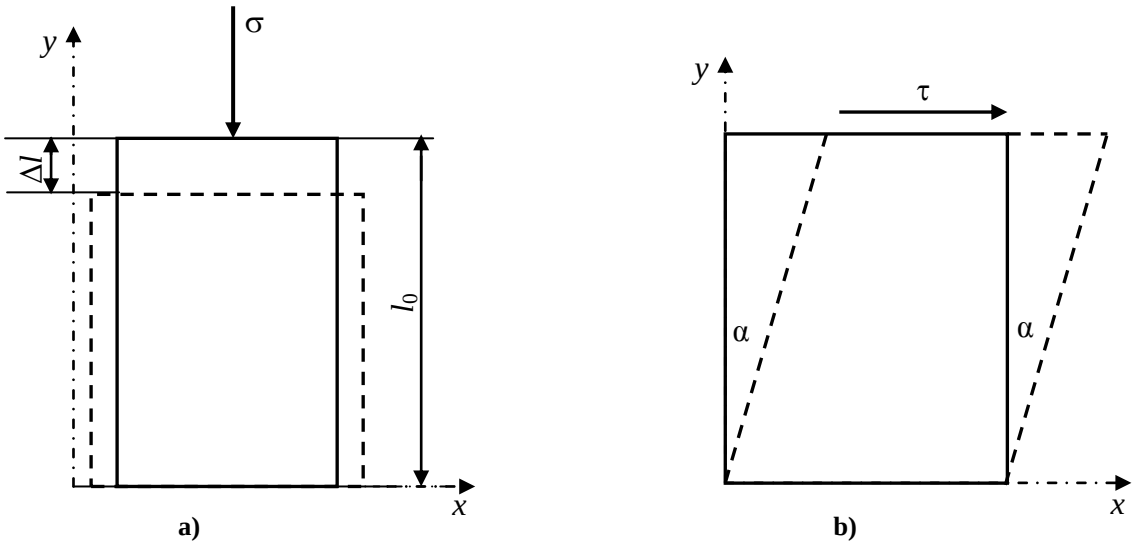
$$[\mathrm{S}_\sigma] = \begin{vmatrix}\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0\end{vmatrix}, \tag{60}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\cdot\sigma_{kk} = \frac{1}{3}\cdot(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\,, \tag{61}$$

$$[\mathrm{D}_\sigma] = \begin{vmatrix}\sigma_1 - \sigma_0 & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \sigma_2 - \sigma_0 & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 - \sigma_0\end{vmatrix}. \tag{62}$$

5.4. Deformacija kontinuuma

Vanjske sile koje djeluju na neko tijelo mijenjaju njegove dimenzije i oblik. Promjena oblika može biti elastična ili plastična, tj. promjene se očituju povratnim ili elastičnim deformacijama i nepovratnim ili plastičnim deformacijama. Pri elastičnoj promjeni oblika nakon prestanka djelovanja vanjske sile tijelo se vraća u prvobitni oblik. Plastične deformacije uzrokuju promjenu oblika i volumena tijela, odnosno sile su tako velike da premašuju izdržljivost materijala te on ostaje trajno deformiran. Deformacija se može dogoditi duž jedne osi (aksijalno), pri čemu će tijelo reagirati kontrakcijom ili produljenjem, ovisno o tome nastaje li deformacija zbog tlačnih ili zbog vlačnih naprezanja. Tijelo se također može deformirati zbog posmičnih naprezanja. S obzirom na uzrok nastanka, deformacije možemo podijeliti na linijske i kutne. Uzrok linijskih deformacija su normalna naprezanja, a uzrok nastanka kutnih deformacija tangencijalna su naprezanja.



Slika 5.9. Shematski prikaz nastanka linijskih i kutnih deformacija: a) linijska deformacija (σ – tlačno naprezanje, l_0 – početna duljina tijela, Δl – promjena duljine zbog tlačnih naprezanja) i b) kutna deformacija (τ – smično naprezanje, α – kut za koji se tijelo deformira zbog djelovanja smičnih naprezanja)

Matematička prezentacija ima oblik:

$$\varepsilon = \lim_{l_0 \to 0} \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad \gamma' = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \tag{63}$$

gdje je ε duljinska, a γ' kutna deformacija.

Eksperimenti na uzorcima drva pokazali su da su apsolutne veličine deformacija u longitudinalnom smjeru višestruko manje od veličine deformacija u radijalnom smjeru. S obzirom na to da su duljine ispitivanih uzoraka uvijek višestruko veće od širine i debljine, izmjerene deformacije u longitudinalnom smjeru uvijek su veće od deformacija u radijalnom smjeru te ih je lakše izmjeriti. Međutim, zbog različite prirode deformiranja u različitim smjerovima, iz ispitivanja u longitudinalnom smjeru ne može se zaključiti kakva su svojstva drva u radijalnom smjeru. Bodig (1965.) utvrdio je da se deformacije u longitudinalnom smjeru razvijaju sve do trenutka loma bez znatnije promjene u mikrostrukturi drva. Mikroskopske promjene strukture drva u radijalnom su smjeru prilično velike, iako ih je teško zabilježiti.

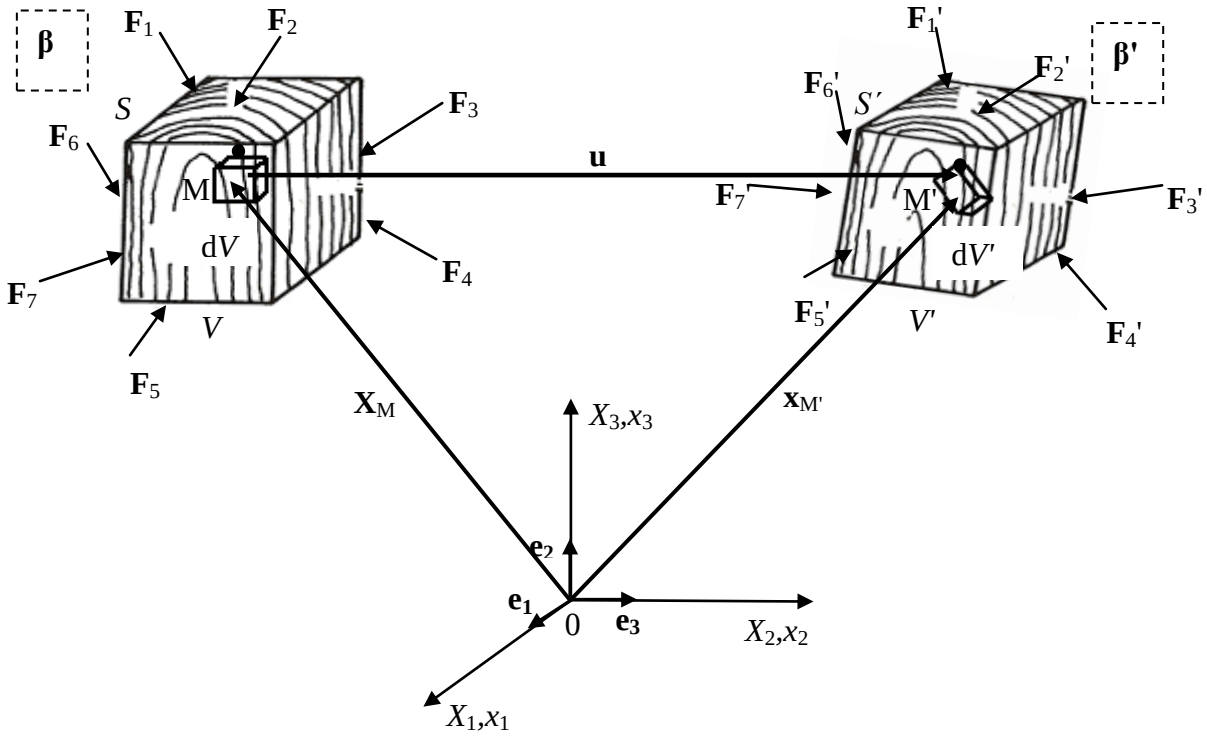
5.4.1. Tenzor deformacije

Radi određivanja troosnog stanja deformiranja, promotrit ćemo drvo u nedeformiranoj i deformiranoj konfiguraciji. Neka drvo (β), volumena *V*, konture *S*, s materijalnom točkom *M* u okolini volumena *dV*, čini referentnu odnosno nedeformiranu konfiguraciju, a drvo (β′) volumena *V'*, konture *S'*, s materijalnom točkom *M'* u okolini volumena *dV'*, deformiranu odnosno trenutačnu konfiguraciju (sl. 5.10.). Tijekom procesa deformiranja nedeformirana se konfiguracija preslikava u deformiranu. Rezultat preslikavanja je rješenje zadaće deformiranja realnog tijela. Preslikavanje nedeformirane konfiguracije u deformiranu zapravo je preslikavanje vektorskog polja u vektorsko polje ($M(\mathbf{X},t) \rightarrow M'(\mathbf{x},t')$), odnosno:

$$M(X_1, X_2, X_3, t) \rightarrow M'(x_1, x_2, x_3, t') \tag{64}$$

pri čemu su X_1, X_2, X_3 materijalne ili Lagrangeove koordinate, a x_1, x_2, x_3 prostorne ili Eulerove koordinate. Vektor pomaka **u** označava udaljenost točke *M* iz nedeformirane konfiguracije i točke *M'* iz deformirane konfiguracije, što se može prikazati izrazom:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \tag{65}$$



Slika 5.10. Shematski prikaz deformacije drva: β – nedeformirano stanje, β' – deformirano stanje, dV – izdvojeni volumen u nedeformiranom stanju, dV' – izdvojeni volumen u deformiranom stanju, *S* – ploha kojom je omeđeno nedeformirano stanje, *S'* – ploha kojom je omeđeno deformirano stanje, $\mathbf{F}_i$ – sile koje djeluju u nedeformiranom stanju, $\mathbf{F}_i'$ – sile koje djeluju u deformiranom stanju, X – materijalne koordinate, x – prostorne koordinate

Skup svih vektora pomaka svih točaka drva β daje polje pomaka:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3). \tag{66}$$

Za radijus-vektore točaka *M* i *M'* vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{\mathrm{M}} &= X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3 = X_{\mathrm{i}}\mathbf{e}_{\mathrm{i}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{M}'} &= x_1\mathbf{e}'_1 + x_2\mathbf{e}'_2 + x_3\mathbf{e}'_3 = x_{\mathrm{i}}\mathbf{e}'_{\mathrm{i}}\end{aligned}. \tag{67}$$

Relativna orijentacija materijalnih i prostornih osi definirana je kosinusima smjerova $\alpha_{\mathrm{ii}'}$ i $\alpha_{\mathrm{i'i}}$, koji su pak određeni skalarnim produktom bazičnih vektora između zadanih ortonomiranih sustava, kao i bazičnim vektorima unutar svakog sustava:

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}'_{\mathrm{i}}\mathbf{e}_{\mathrm{i}} = \mathbf{e}_{\mathrm{i}}\mathbf{e}'_{\mathrm{i}} = \alpha_{\mathrm{i'i}} = \alpha_{\mathrm{ii}'} \\ &\mathbf{e}_{\mathrm{i}}\mathbf{e}_{\mathrm{j}} = \delta_{ij} \quad i \quad \mathbf{e}'_{\mathrm{i}}\mathbf{e}'_{\mathrm{j}} = \delta_{i'j'}\end{aligned}. \tag{68}$$

Vektor pomaka može se izraziti komponentama radijus-vektora:

$$u_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}} - X_{\mathrm{i}}. \tag{69}$$

Izrazom (69) definirano je preslikavanje skupa materijalnih koordinata u skup prostornih koordinata. Operaciju preslikavanja obavlja tenzor drugog reda, koji se naziva tenzorom deformacije.

U Lagrangeovoj formulaciji deformacije prostorne koordinate iskazane su uz pomoć materijalnih koordinata ovom funkcijskom vezom:

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{i}} &= x_{\mathrm{i}}(X_1, X_2, X_3, t) = x_{\mathrm{i}}(X_{\mathrm{i}}, t) \\ u_{\mathrm{i}} &= u_{\mathrm{i}}(X_1, X_2, X_3, t) = u_{\mathrm{i}}(X_{\mathrm{i}}, t)\end{aligned}, \tag{70}$$

gdje su u_{i} komponente vektora pomaka, a određuju materijalne gradijente polja pomaka. Parcijalnim deriviranjem izraza (70) s obzirom na materijalne koordinate dobiva se tenzor materijalnih gradijenata polja pomaka ili tenzor Lagrangeovih gradijenata polja pomaka:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}} = \frac{\partial x_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}} - \delta_{\mathrm{ij}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ij}} - \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ij}}, \tag{71}$$

gdje je $\mathbf{F}_{\mathrm{ij}}$ je tenzor Lagrangeovih gradijenata deformacije ($\mathbf{F}_{\mathrm{ij}} = \mathbf{J}_{\mathrm{ij}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ij}}$). U razvijenom obliku $\mathbf{F}_{\mathrm{ij}}$ i $\mathbf{J}_{\mathrm{ij}}$ imaju oblik:

$$\left[\mathrm{F}_{ij}\right]=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial X_1},\frac{\partial}{\partial X_2},\frac{\partial}{\partial X_3},\right\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial x_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}}\right] \tag{72}$$

$$\left[\mathrm{J}_{ij}\right]=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial X_1},\frac{\partial}{\partial X_2},\frac{\partial}{\partial X_3},\right\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}}\right]. \tag{73}$$

U Eulerovoj formulaciji deformiranog tijela materijalne su konstante izražene putem prostornih funkcijskom vezom:

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{i}}&=X_{\mathrm{i}}(x_1,x_2,x_3,t)=X_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}},t)\\ u_{\mathrm{i}}&=u_{\mathrm{i}}(x_1,x_2,x_3,t)=u_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}},t)\end{aligned}. \tag{74}$$

Parcijalnom derivacijom izraza (74) s obzirom na prostorne ili Eulerove koordinate, dobiva se tenzor Eulerovih gradijenata polja pomaka:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ij}}=\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ij}}-\frac{\partial X_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}=\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ij}\,\mathrm{ij}}-\mathbf{H}'_{\mathrm{ij}}, \tag{75}$$

gdje je $\mathbf{H}'_{\mathrm{ij}}$ je tenzor Eulerovih prostornih gradijenata deformacija. U razvijenom obliku $\mathbf{H'}_{\mathrm{ij}}$ i $\mathbf{K'}_{\mathrm{ij}}$ glase:

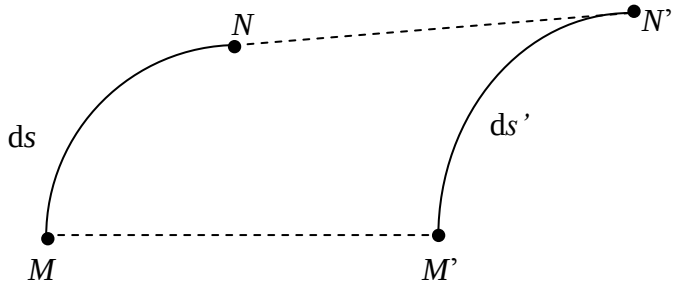
$$\left[\mathrm{H}'_{ij}\right]=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\right\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial X_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}\right], \tag{76}$$

$$\left[\mathrm{K}'_{ij}\right]=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\right\}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}\right]. \tag{77}$$

Veza između tenzora materijalnih i prostornih gradijenata deformacije inverzna je, pa vrijedi:

$$\mathbf{H}=\mathbf{F}^{-1}. \tag{78}$$

Tenzori deformacije definirani su kao razlika kvadrata duljine elementarne dužine u trenutačnoj i referentnoj konfiguraciji (sl. 5.11.).



Slika 5.11. Deformacija elementarnog luka

Prema Lagrangeovoj formulaciji:

$$\mathrm{d}x_{\mathrm{i}}=\frac{\partial x_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}}\mathrm{d}X_{\mathrm{j}}=F_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}X_{\mathrm{j}}, \tag{79}$$

$$\mathrm{d}s'=\mathbf{F}\mathrm{d}s. \tag{80}$$

Prema Eulerovoj formulaciji, diferencijali elementarnih duljina imaju oblik:

$$\mathrm{d}X_{\mathrm{i}}=\frac{\partial X_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}\mathrm{d}x_{\mathrm{j}}=\mathbf{H}'_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}x_{\mathrm{j}}=\mathbf{F}^{-1}_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}x_{\mathrm{j}}, \tag{81}$$

$$ds=\mathbf{F}^{-1}ds'. \tag{82}$$

Uvođenjem mjere prostora u obliku kvadrata diferencijala elementarnog luka $M - N$ i $M' - N'$ kvadrat duljine luka nakon deformacije iznosi:

$$(\mathrm{d}s')^2 = \mathrm{d}x_\mathrm{i}\mathrm{d}x_\mathrm{i} = \delta_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}x_\mathrm{i}\mathrm{d}x_\mathrm{j}\,. \tag{83}$$

Uz pomoć izraza (82), izraz (83) možemo zapisati:

$$(\mathrm{d}s')^2 = \frac{\partial x_\mathrm{k}}{\partial X_\mathrm{i}}\frac{\partial x_\mathrm{k}}{\partial X_\mathrm{j}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j} = \mathbf{F}_{\mathrm{ki}}\mathbf{F}_{\mathrm{kj}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j} = \mathbf{G}_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}^\mathrm{T}\mathbf{F} = \mathbf{G} \tag{84}$$

gdje je G_{ij} Greenov metrički tenzor deformacije:

$$\mathbf{G}_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial x_\mathrm{k}}{\partial X_\mathrm{i}}\frac{\partial x_\mathrm{k}}{\partial X_\mathrm{j}}\,. \tag{85}$$

Kvadrat duljine luka prije deformacije jest:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{i} = \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j}\,. \tag{86}$$

Prema izrazu (82), izraz (86) možemo zapisati kao:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \frac{\partial X_\mathrm{k}}{\partial x_\mathrm{i}}\frac{\partial X_\mathrm{k}}{\partial x_\mathrm{j}}\mathrm{d}x_\mathrm{i}\mathrm{d}x_\mathrm{j} = \mathbf{H}'_{\mathrm{ki}}\mathbf{H}'_{\mathrm{kj}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j} = \mathbf{C}'_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}X_\mathrm{i}\mathrm{d}X_\mathrm{j} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^\mathrm{T} = \mathbf{C}' \tag{87}$$

gdje je $\mathbf{C}'_{\mathrm{ij}}$ Cauchyjev metrički tenzor deformacije:

$$\mathbf{C}'_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial X_\mathrm{k}}{\partial x_\mathrm{i}}\frac{\partial X_\mathrm{k}}{\partial x_\mathrm{j}}\,. \tag{88}$$

Razlika kvadrata elementarnih lukova između trenutačne i referentne konfiguracije dviju bliskih materijalnih čestica kontinuuma primjenjuje se kao mjera deformacije. Lagrangeov pristup daje ovaj rezultat:

$$\mathbf{L}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \tag{89}$$

ili:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{u}_X \nabla + \nabla \mathbf{u}_X + \left(\nabla \mathbf{u}_X \right)\left(\mathbf{u}_X \nabla \right) \right) \right]. \tag{90}$$

Izraz (90) predočuje Lagrangeov tenzor konačne deformacije u funkciji gradijenta polja pomaka, koji je u razvijenom obliku prikazan izrazom:

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\
L_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\
L_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
L_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\
L_{23} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\
L_{13} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)
\end{aligned} \tag{91}$$

Eulerov pristup daje ovakav rezultat:

$$\mathbf{E}'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \tag{92}$$

ili:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{u}_x \nabla + \nabla \mathbf{u}_x + \left(\nabla \mathbf{u}_x \right)\left(\mathbf{u}_x \nabla \right) \right) \right]. \tag{93}$$

Izraz (93) predstavlja Eulerov tenzor konačne deformacije u funkciji gradijenta polja pomaka koji je u razvijenom obliku prikazan izrazom

$$
\begin{aligned}
E'_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right] \\
E'_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right] \\
E'_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] \\
E'_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\
E'_{23} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \\
E'_{13} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}
\quad . \tag{94}
$$

Konačna relativna deformacija između bliskih točaka *M'* i *N'* duž luka *ds'* u deformiranoj konfiguraciji može se izraziti kao:

$$e = \frac{ds' - ds}{ds}. \tag{95}$$

Sređivanjem izraza (95) dobiva se:

$$e^2 + 2e - 2\mathbf{L}_{ij}\frac{dX_{\mathrm{i}}}{ds}\frac{dX_{\mathrm{j}}}{ds} = 0. \tag{96}$$

Uvođenjem oznaka $\frac{\mathrm{d}X_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}s} = s_{\mathrm{i}}$ i $\frac{\mathrm{d}X_{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}s} = s_{\mathrm{j}}$ izraz (35) postaje:

$$e^2 + 2e - 2\mathbf{L}_{ij}s_{\mathrm{i}}s_{\mathrm{j}} = 0. \tag{97}$$

U kvadratnoj je jednadžbi $e^2 << e$, odnosno e^2 vrlo mala veličina te je možemo zanemariti, čime je učinjena prva linearizacija:

$$e = \mathbf{L}_{ij}s_{\mathrm{i}}s_{\mathrm{j}}. \tag{98}$$

Izraz (98) daje konačnu deformaciju dužine između točaka *M'* i *N'* u deformiranoj konfiguraciji. Preslikavanje početne u konačnu dužinu obavlja Lagrangeov tenzor konačne deformacije:

$$\mathbf{L} = \left[L_{\mathrm{ij}}\right] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \tag{99}$$

odnosno:

$$\mathbf{L}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial X_{\mathrm{i}}} + \frac{\partial u_{\mathrm{k}}}{\partial X_{\mathrm{i}}} \frac{\partial u_{\mathrm{k}}}{\partial X_{\mathrm{j}}} \right). \tag{100}$$

Analognim postupkom prema Eulerovu pristupu dobivamo:

$$e = \mathbf{E}'_{ij} s_{\mathrm{i}} s_{\mathrm{j}} . \tag{101}$$

Preslikavanje početne u konačnu dužinu obavlja Eulerov tenzor konačne deformacije:

$$\mathbf{E}' = \left[E'_{\mathrm{ij}}\right] = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{13} \\ E'_{21} & E'_{22} & E'_{23} \\ E'_{31} & E'_{32} & E'_{33} \end{bmatrix}, \tag{102}$$

odnosno:

$$\mathbf{E}'_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} - \frac{\partial u_{\mathrm{k}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} \frac{\partial u_{\mathrm{k}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} \right). \tag{103}$$

Ako su deformacije malene, tada su i gradijenti pomaka maleni, a tenzori konačne deformacije mogu se reducirati na infinitenzimalne tenzore deformacija:

$$\mathbf{l}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial X_{\mathrm{i}}} \right) \tag{104}$$

$$\mathbf{e}'_{\mathrm{ij}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}} + \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial x_{\mathrm{i}}} \right) \tag{105}$$

gdje je $\mathbf{l}_{\mathrm{ij}}$ Lagrangeov tenzor infinitenzimalnih deformacija, a $\mathbf{e}'_{\mathrm{ij}}$ Eulerov tenzor infinitenzimalnih deformacija. Ako su gradijenti pomaka maleni, malena je i razlika između materijalnih i prostornih koordinata, što znači da su komponente materijalnih gradijenata $\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial X_{\mathrm{j}}}$ i komponente prostornih gradijenata $\frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial x_{\mathrm{j}}}$ približno jednake te Lagrangeov i Eulerov tenzor malih deformacija postaju jednaki:

$$\mathbf{l}_{ij} = \mathbf{e}'_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right). \tag{106}$$

Općeniti zapis tenzora malih deformacija glasi:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{107}$$

Dijagonalni elementi predočuju linijsku, a izvandijagonalni kutnu deformaciju:

$$\varepsilon_{ij(i=j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_i}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial X_i}, \tag{108}$$

$$\varepsilon_{ij(i\neq j)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ji}. \tag{109}$$

S obzirom na navedeno, tenzor deformacija možemo zapisati u obliku:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \tag{110}$$

Tenzor deformacija nesimetrični je tenzor koji se može rastaviti na simetrični i antisimetrični dio:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{T}_{\varepsilon} + \mathbf{T}^{\varepsilon}_{\omega}. \tag{111}$$

U izrazu (111) $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ je simetrični, a $\mathbf{T}^{\varepsilon}_{\omega}$ antisimetrični dio tenzora deformacije, koji su u razvijenom obliku prikazani izrazima:

$$\left[\mathrm{T}_{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \tag{112}$$

$$\left[\mathrm{T}_{\omega}^{\varepsilon}\right]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & 0 \end{bmatrix}. \tag{113}$$

Simetrični dio tenzora deformacije (T_{ε}) u kojemu su kutne deformacije jednake nuli naziva se tenzorom glavnih deformacija, a jednak je:

$$\left[\mathrm{T}_{\varepsilon}^{g}\right]=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \tag{114}$$

gdje su ε_1, ε_2 i ε_3 glavne deformacije, a koordinatne osi u kojima je vrijednost kutnih deformacija jednak nuli tada su glavne osi tenzora deformacije. Glavne deformacije određuju se rješavanjem kubne jednadžbe:

$$\varepsilon^3 - I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon})\cdot\varepsilon^2 + I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon})\cdot\varepsilon - I_3(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = 0\,. \tag{115}$$

U izrazu (115) $I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon})$, $I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon})$ i $I_3(\mathbf{T}_{\varepsilon})$ označuju invarijante simetričnog dijela tenzora deformacije:

$$I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\,, \tag{116}$$

$$I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \varepsilon_3 \end{vmatrix}, \tag{117}$$

$$I_3(\mathbf{T}_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \tag{118}$$

Simetrični dio tenzora deformacije može se rastaviti na hidrostatički i devijatorski dio. Hidrostatički dio ($\mathbf{S}_\varepsilon$) tenzora označava promjenu volumena, a devijatorski dio ($\mathbf{D}_\varepsilon$) opisuje promjenu oblika. Hidrostatički i devijatorski dio tenzora deformacija dani su izrazima:

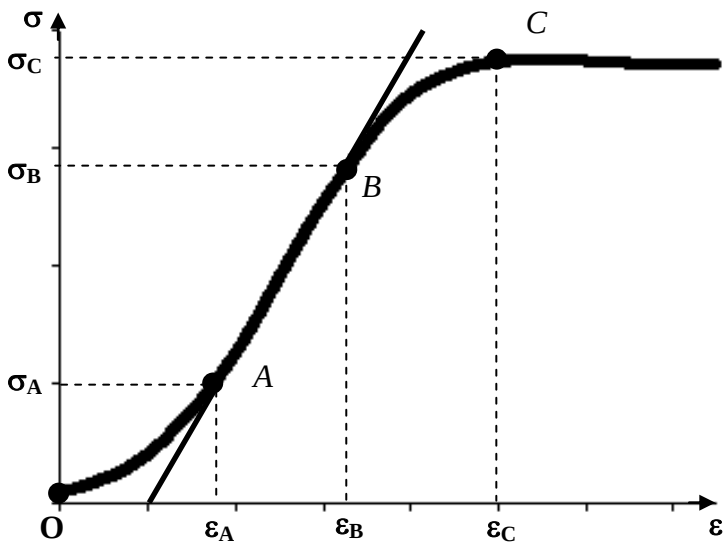
$$\mathbf{S}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}, \tag{119}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \tag{120}$$

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_2 - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_3 - \varepsilon_0 \end{vmatrix}. \tag{121}$$

5.5. Veza između naprezanja i deformacije u drvu

S obzirom na vezu između naprezanja i deformacije, materijale općenito možemo podijeliti na nekoliko skupina: elastični, plastični, viskozni, elastoplastični i viskoelastični (Enelund, 1996.). Kada se govori o drvu, odnos naprezanja i deformacija ponajprije ovisi o smjeru djelovanja sile. Za potrebe ovog rada zanimljivo je tlačno djelovanje sile paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru i okomito na njih u tangencijalnom smjeru.



Slika 5.12. Graf ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru: σ_A – minimalno elastično naprezanje, ε_A – minimalna elastična deformacija, σ_B – maksimalno elastično naprezanje, ε_B – maksimalna elastična deformacija, σ_C – maksimalno naprezanje, ε_C – deformacija pri maksimalnom naprezanju

U području krivulje do točke *A* odnos naprezanja i deformacija nelinearan je. U literaturi se taj dio krivulje često zanemaruje jer u tom području dolazi do „namještanja“ uzorka, odnosno do urušavanja mikroneravnina na površini uzorka drva. Područje krivulje od točke *A* do točke *B* označava elastično područje. Svako naprezanje u tom području uzrokuje samo elastičnu deformaciju, pa nakon rasterećenja deformacija iščezava. Naprezanja postignuta u točki *B* nazivaju se maksimalnim elastičnim naprezanjima, a deformacija u točki *B* zove se

maksimalna elastična deformacija. Odnos naprezanja i deformacija u tom je području linearan te se može opisati Hookovim zakonom:

$$\sigma_x = E_x \cdot \varepsilon_x , \tag{122}$$

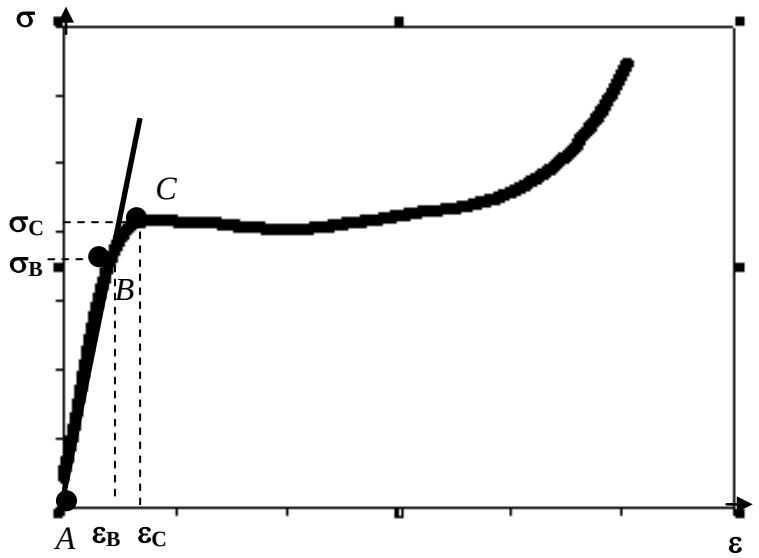
gdje je E_x modul elastičnosti u longitudinalnom smjeru, σ_x naprezanje u longitudinalnom smjeru, a ε_x deformacija u longitudinalnom smjeru.

Područje krivulje od točke *B* do točke *C* naziva se plastičnim područjem. U tom području nastaju plastične (trajne) deformacije koje ostaju i nakon rasterećenja uzorka. Naprezanja koja nastaju u točki *C* nazivaju se maksimalnim naprezanjima, a deformacija u točki *C* zove se plastična deformacija. Vidljivo je da u tom području odnos između naprezanja i deformacija nije linearan te se najčešće određuje eksperimentalnim putem. Dosadašnja istraživanja (David et al., 2002.) pokazuju da se eksperimentalni podatci u većini slučajeva najbolje prilagođuju izrazu:

$$\sigma_x = K_x \cdot \varepsilon_x^{n_x} , \tag{123}$$

gdje je K_x faktor snage u longitudinalnom smjeru, a n_x koeficijent otvrdnjavanja u longitudinalnom smjeru.

U području krivulje od točke *C* nadalje naprezanja se smanjuju, a deformacija raste do svoje kritične vrijednosti u kojoj dolazi do loma materijala. Za potrebe ove disertacije zanimljivo je područje krivulje od točke *B* do točke *C*, odnosno veza naprezanja i deformacija iz spomenutog područja.



Slika 5.13. Dijagram ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru: σ_B – maksimalno elastično naprezanje, ε_B – maksimalna elastična deformacija, σ_C – naprezanje u točki *C*, ε_C – deformacija u točki *C*

Područje krivulje od točke *A* do točke *B* elastično je područje u kojemu se odnos naprezanja i deformacije može opisati izrazom:

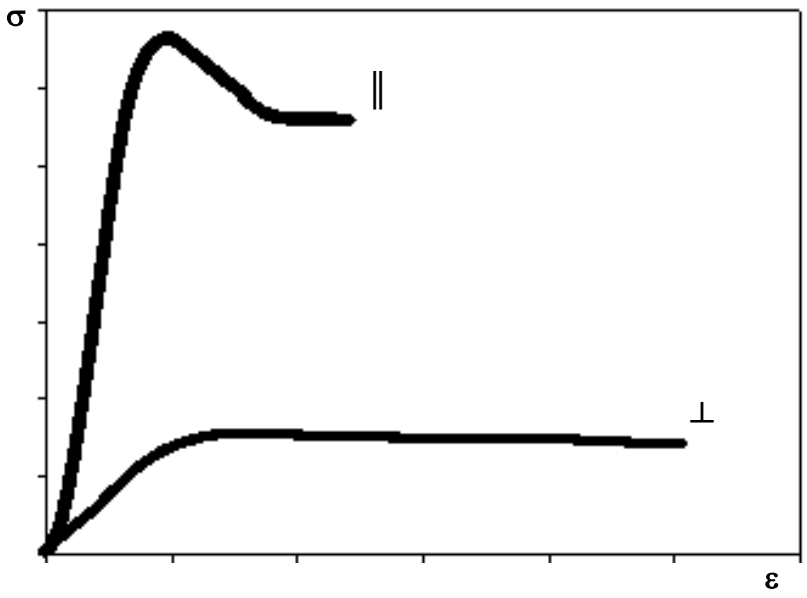
$$\sigma_y = E_y \cdot \varepsilon_y, \tag{124}$$

gdje je E_y modul elastičnosti u tangencijalnom smjeru, σ_y naprezanje u tangencijalnom smjeru, a ε_y deformacija u tangencijalnom smjeru.

Područje krivulje od točke B do točke C plastično je područje u kojemu se odnos naprezanja i deformacije može opisati izrazom (Mathew i Oxley, 1982.):

$$\sigma_y = K_y \cdot \varepsilon_y^{n_y}, \tag{125}$$

gdje je K_y faktor snage u tangencijalnom smjeru, a n_y koeficijent otvrdnjavanja u tangencijalnom smjeru.



Slika 5.14. Usporedba ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile okomito na vlakanca u radijalnom smjeru (⊥) i pri tlačnom djelovanju sile paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru (∥)

Iz slike 5.14. vidljivo je da je za istu deformaciju u uzdužnome smjeru potrebno znatno veće naprezanje nego okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.

Promatrajući troosno stanje, veza između naprezanja i deformacija u elastičnom području može se izraziti tenzorom elastičnosti $\mathbf{C}_{ijkl}$ ili tenzorom podatljivosti $\mathbf{S}_{ijkl}$ (Tsai, 1971.). Budući da su naprezanja i deformacije tenzori drugog reda, a tenzori elastičnosti i podatljivosti tenzori četvrtog reda, veza tenzora deformacija i naprezanja u indeksnom zapisu glasi:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}. \tag{126}$$

Taj izraz predočuje poopćeni Hookeov zakon, a njegov je inverzni oblik:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{S}_{ijkl} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{kl}. \tag{127}$$

Tenzori elastičnosti i podatljivosti, kao tenzori četvrtog reda, kvadratne su matrice dimenzije 9 x 9. Budući da su kutne deformacije i tangencijalna naprezanja konjugirani, tj. da je $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ i $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, matrice C_{ijkl} i S_{ijkl} moguće je svesti na oblik 6 x 6. Time se broj materijalnih konstanti smanjuje s 81 na 36. Nadalje, broj konstanti se

zbog simetrije smanjuje na konačnih 21, što je i maksimalan broj materijalnih konstanti koje opisuju ponašanje materijala.

Za određivanje mehaničkih svojstava općega anizotropnog materijala potrebno je odrediti 21 neovisnu komponentu, što je s eksperimentalnog stajališta vrlo zahtjevan zadatak. Prema Neumannovu načelu (Neumann, 1885.), strukturalna simetrija materijala uvjetuje simetriju svih njegovih fizikalnih svojstava. Ravnine elastične simetrije imaju svojstvo da se pri zrcaljenju koordinatnog sustava na toj ravnini ne mijenjaju komponente tenzora elastičnosti C_{ij}, odnosno tenzora podatljivosti S_{ij}. Taj je uvjet moguće zadovoljiti samo ako su neke komponente jednake nuli. Broj komponenata jednakih nuli povećava se s povećanjem ravnina elastične simetrije (Altenbach, 2004.). S obzirom na anatomsku simetriju drva u tri međusobno ortogonalna smjera, drvo se može promatrati kao ortotropni materijal (Adalian et al., 2002.). Ortotropni su materijali oni koji imaju tri međusobno okomite ravnine simetrije. Broj materijalnih konstanti u tom se slučaju reducira na devet, pa izrazi za tenzore elastičnosti i podatljivosti poprimaju oblik:

$$[\mathrm{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \tag{128}$$

odnosno:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}. \tag{129}$$

Iz tenzora podatljivosti i elastičnosti može se primijetiti da nema interakcije između normalnih naprezanja σ_1, σ_2, σ_3 i posmičnih deformacija γ'_4, γ'_5, γ'_6, što znači da normalna naprezanja uzrokuju samo normalne deformacije. Jednako tako nema interakcije između posmičnih naprezanja τ_4, τ_5, τ_6 i normalnih deformacija ε_1, ε_2, ε_3, što znači da posmična naprezanja uzrokuju samo kutne deformacije. Ne postoji ni interakcija između posmičnih

naprezanja koja djeluju u jednoj ravnini i kutnih deformacija u drugoj ravnini, tako da posmična naprezanja uzrokuju samo kutne deformacije u ravnini u kojoj djeluju.

Veza između naprezanja i deformacija u plastičnom području troosnog stanja naprezanja nije linearna te se najčešće određuje eksperimentalnim putem. Dosadašnja istraživanja pokazuju da se eksperimentalni podatci najbolje prilagođuju izrazu:

$$\bar{\sigma} = \bar{K} \cdot (\bar{\varepsilon})^{\bar{n}}, \tag{130}$$

gdje je $\bar{\sigma}$ ekvivalentno naprezanje, a $\bar{\varepsilon}$ ekvivalentna deformacija koji se određuju prema von Misesovu kriteriju tečenja materijala (Gusel et al., 2009.), $\bar{K}$ je ekvivalentni faktor snage, a $\bar{n}$ ekvivalentni koeficijent otvrdnjavanja koji se može odrediti prema Hankinsovoj formuli (Bodig i Jane, 1982.).

5.5.1. Energija deformacije

U procesu deformacije drva vanjske sile obave određeni rad. Dio tog rada akumulira se u materijalu u obliku potencijalne energije deformacije. Ako se zanemare gubitci zbog pretvaranja u ostale oblike energije, sav uloženi rad vanjskih sila pretvori se u potencijalnu energiju drva. Ta je energija u granicama elastičnog ponašanja materijala povratna, što znači da nakon prestanka djelovanja vanjskih sila elastično tijelo može obavljati mehanički rad jednak uskladištenoj energiji. U granicama plastičnog ponašanja uložena se energija akumulira unutar drva stvarajući nepovratne plastične deformacije. Budući da ta energija ovisi o deformaciji, naziva se energijom deformacije ili deformacijskim radom. Elementarni deformacijski rad uložen u deformaciju jediničnog volumena određen je izrazom:

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{131}$$

Ukupni deformacijski rad vanjskih sila dan je volumnim integralom:

$$\mathrm{W} = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{132}$$

Prema postavkama teorije plastičnosti, deformacijski rad, tj. potencijalna energija deformacije jednim se dijelom „troši“ na promjenu volumena (W_{vol}), a drugim na promjenu oblika (W_{obl}), pa se i deformacijski rad dijeli na dva dijela, što se može prikazati izrazima:

$$W_{vol} = \int_V \mathbf{S}_\varepsilon \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{133}$$

gdje je $\mathbf{S}_\varepsilon$ hidrostatički dio tenzora deformacije određen izrazom (119), odnosno:

$$W_{obl} = \int_V \mathbf{D}_\varepsilon \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{134}$$

gdje je $\mathbf{D}_\varepsilon$ devijatorski dio tenzora deformacije određen izrazom (121).

6.MODEL ODREĐIVANJA SILE REZANJA

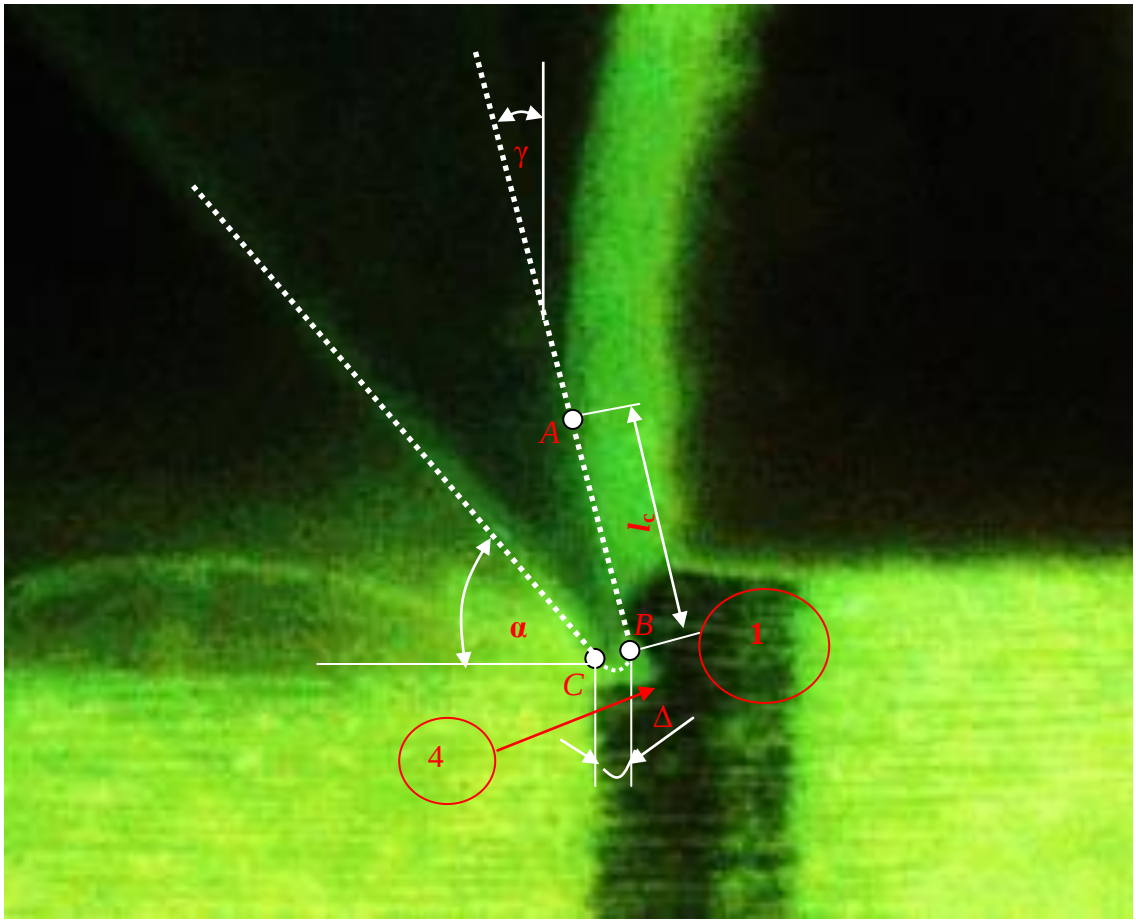
Iz pregleda dostupne literature može se zaključiti da dosadašnji modeli određivanja sile rezanja pri obradi drva ne opisuju na zadovoljavajući način fizikalnu pozadinu samog procesa. Dobar model nije samo dobra interpretacija eksperimentalnih rezultata jer je za dobru interpretaciju rezultata eksperimenta dovoljan „dobar polinom“. Model je nešto više. Kao prvo, on obuhvaća opis fizikalnih mehanizama koji su uključeni u proces rezanja, kao drugo, trebao bi biti logična formulacija zasnovana na općepoznatim prirodnim zakonima, a tek kao treće, posljedica svega toga trebali bi biti brojčani rezultati.

Model koji povezuje odabrana mehanička svojstva drva što utječu na proces ortogonalnog rezanja može se postaviti na temelju zakona očuvanja energije, a na temelju modela mogu se odrediti mjerljivi pokazatelji energije samog sustava. Polazišta modela su sljedeće pretpostavke:

a) proces obrade je ortogonalno rezanje,
b) smjer rezanja je longitudinalan,
c) brzina alata je konstantna,
d) pri rezanju nastaje kontinuirana strugotina,
e) širina neodrezane strugotine jednaka je širini odrezane strugotine ($z_0 = z_1$),
f) protok materijala je plastičan,
g) materijal predmeta obrade je elastoplastičan i ortotropan,
h) kinetička je energija strugotine zanemariva.

U sustavu ortogonalnog rezanja oštrica alata predaje energiju strugotini i obratku. Prijenos energije ostvaruje se na dodirnim površinama prednje plohe alata i strugotine, te stražnje plohe alata i obratka (sl. 6.1.). Zbog relativnoga gibanja alata s obzirom na obradak i strugotinu, dio energije se troši na svladavanje rada sile trenja na prednjoj (E_{trp}) i stražnjoj plohi alata (E_{trs}), a dio ukupne energije iskorištava se za stvaranje nove površine (E_{np}). Preostali dio ukupne energije raspodjeljuje se unutar obratka i strugotine stvarajući naprezanja i, u konačnici, plastičnu deformaciju strugotine (E_{pd}). Dio energije koji se u tehničkim proračunima obično zanemaruje jest kinetička energija strugotine. Ideju o razlaganju uložene

energije na spomenute komponente primjenjuje i Astakhov (2008.) u svojim proračunima pri obradi metala.



Slika 6.1. Područja utroška energije pri ortogonalnom rezanju: 1 – područje u kojemu se energija troši za plastičnu deformaciju strugotine, $l_c = \overline{AB}$ – duljina kontakta na prednjoj plohi, odnosno područje u kojemu se energija troši za svladavanje rada sile trenja između prednje plohe alata i strugotine, $\Delta = \overline{BC}$ – područje u kojemu dolazi do utroška energije za svladavanje rada sile trenja između stražnje plohe alata i obratka, 4 – područje u kojemu nastaje utrošak energije za stvaranje nove površine, α – stražnji kut oštrice, γ – prednji kut oštrice

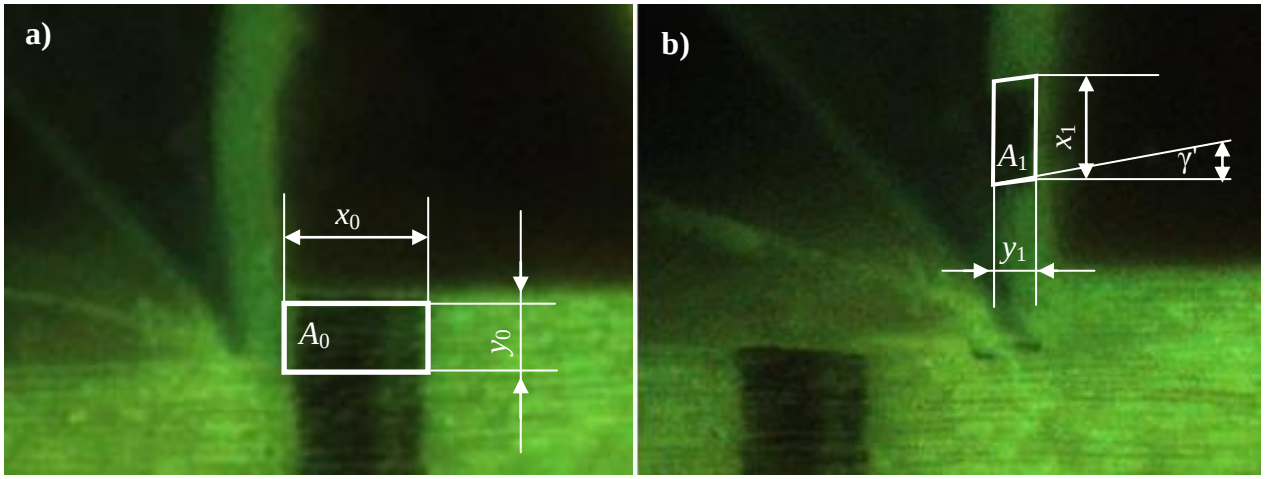
Matematički zapis navedene raspodjele energije, uz zanemarivanje kinetičke energije strugotine, glasi:

$$E_{\mathrm{u}} = E_{\mathrm{pd}} + E_{\mathrm{trp}} + E_{\mathrm{trs}} + E_{\mathrm{np}}\,. \tag{135}$$

Vremenskom derivacijom izraza dobiva se:

$$P_{\mathrm{u}} = P_{\mathrm{pd}} + P_{\mathrm{trp}} + P_{\mathrm{trs}} + P_{\mathrm{np}}. \tag{136}$$

Izraz (136) opisuje raspodjelu ukupne snage sustava (snaga rezanja) na: P_{pd} – snagu potrebnu za plastičnu deformaciju strugotine, P_{trp} – snagu potrebnu za svladavanje rada sile trenja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine, P_{trs} – snagu potrebnu za svladavanje rada trenja na dodirnoj površini stražnje plohe alata i obratka i P_{np} – snagu potrebnu za stvaranje nove površine.



Slika 6.2. Proces plastične deformacije strugotine pri ortogonalnom rezanju drva: x_0 – duljina neodrezane strugotine, y_0 – debljina neodrezane strugotine, x_1 – duljina odrezane strugotine, y_1 – debljina odrezane strugotine, A_0 – površina neodrezane strugotine, A_1 – površina odrezane strugotine, γ – kut smicanja

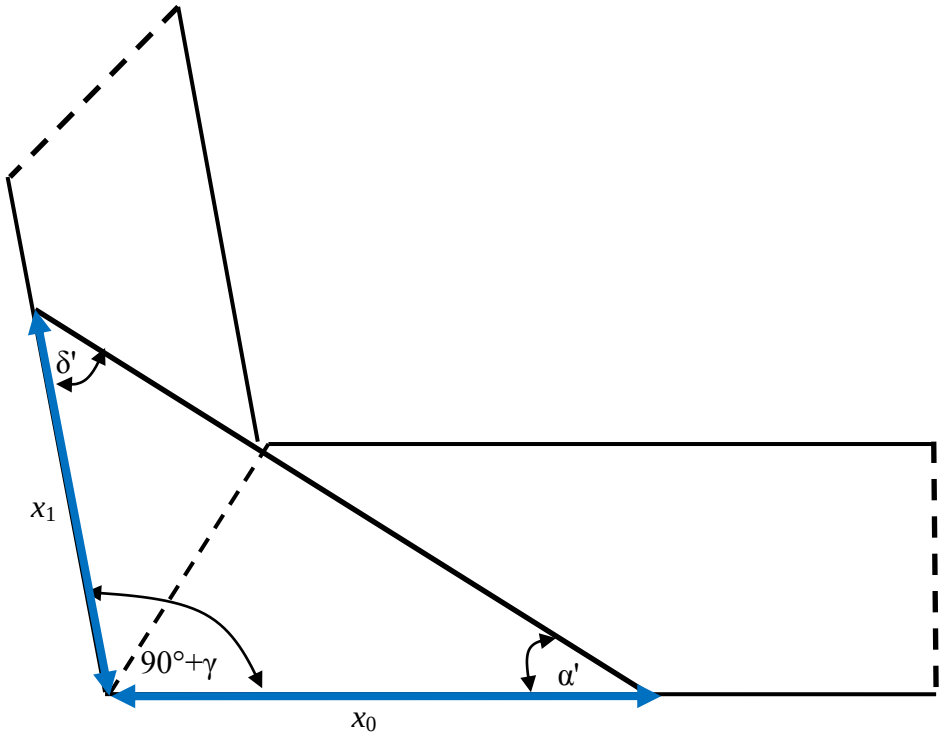
Na slici 6.2. prikazan je proces pretvorbe dijela obratka dimenzija x_0, y_0 (nedeformirano stanje) u strugotinu dimenzija x_1, y_1 (deformirano stanje). Usporedbom deformiranoga i nedeformiranog stanja može se zaključiti da je tijekom procesa rezanja nastala kontrakcija duljine x_0 i visine y_0 ($x_0 > x_1$, $y_0 > y_1$). Do kontrakcije duljine x_0 dolazi zbog tlačnih naprezanja paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru, a visina y_0 kontrahira se zbog tlačnih naprezanja okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru. Na slici 6.2.b) također je vidljivo da je kut koji zatvaraju duljina x_1 i visina y_1 strugotine različit od 90°. Promjena kuta tijekom procesa deformacije posljedica je tangencijalnih naprezanja.

Radi eksperimentalnog određivanja snage rezanja, modelom se nastoje povezati mjerljivi faktori sabijanja strugotine (ξ_x, ξ_y) sa svakom pojedinom komponentom snage. Faktore sabijanja strugotine definiramo kao omjer duljine i visine odrezane i neodrezane strugotine:

$$\xi_x = \frac{x_1}{x_0} \tag{137}$$

$$\xi_y = \frac{y_1}{y_0}. \tag{138}$$

Izraz (137) određuje duljinski koeficijent sabijanja strugotine čija je geometrijska interpretacija predočena na slici 6.3. Tijekom procesa rezanja duljina obratka (x_0) translatira se u duljinu strugotine (x_1).

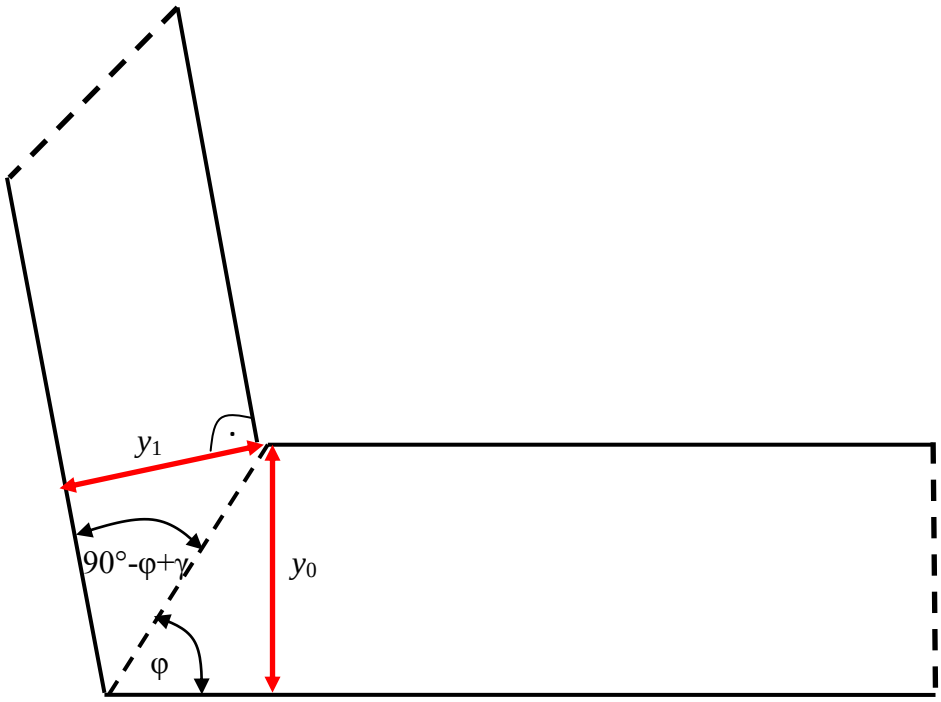


Slika 6.3. Shematski prikaz geometrijskih svojstava duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine: x_0 – duljina neodrezane strugotine, x_1 – duljina odrezane strugotine

Iz trokuta sa slike 6.3. i sinusovog poučka izveden je izraz:

$$\xi_x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{\sin\alpha'}{\cos(\alpha'+\gamma)} \tag{139}$$

Izraz (138) daje debljinski koeficijent sabijanja strugotine čija je geometrijska interpretacija prikazana na slici 6.4. Tijekom procesa rezanja debljina neodrezane strugotine (y_0) translatira se u debljinu odrezane strugotine (y_1).



Slika 6.4. Shematski prikaz geometrijskih svojstava debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine: y_0 – visina neodrezane strugotine, y_1 – visina odrezane strugotine

Iz trokuta sa slike 6.4. i sinusovog poučka izveden je izraz:

$$\xi_y = \frac{y_1}{y_0} = \frac{\cos(\varphi - \gamma)}{\sin(\varphi)}. \tag{140}$$

Omjerom površine deformiranog (A_1) i nedeformiranog (A_0) stanja određen je površinski faktor sabijanja:

$$\xi_p = \frac{A_1}{A_0} = \frac{x_1 \cdot y_1}{x_0 \cdot y_0} = \xi_x \cdot \xi_y. \tag{141}$$

Primjenom jednadžbe kontinuiteta (22) na proces ortogonalnog rezanja slijedi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{v}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial y} \right), \tag{142}$$

gdje je $\mathbf{v}_x$ brzina deformacije u uzdužnome smjeru $\left(\mathbf{v}_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial t}\right)$, a $\mathbf{v}_y$ brzina deformacije okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru $\left(\mathbf{v}_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial t}\right)$. Uvrštenjem izraza za brzine deformacija u izraz (142) dobiva se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \rho}{\rho} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right) \end{aligned}. \tag{143}$$

Ako su vremenske derivacije funkcija jednake, tada su i te funkcije jednake, pa je:

$$-\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}. \tag{144}$$

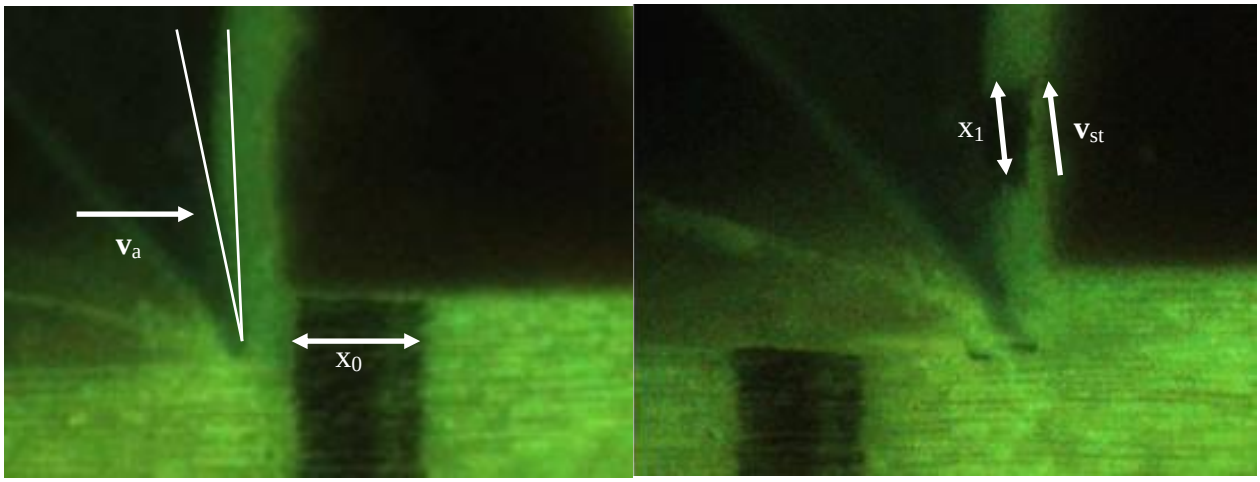
Integracijom izraza (144) dobiva se odnos između gustoće u deformiranom (odrezane strugotine) i nedeformiranom stanju (neodrezane strugotine):

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{\xi_x \cdot \xi_y} = \frac{1}{\xi_p}. \tag{145}$$

gdje je ρ_1 gustoća odrezane strugotine, a ρ_0 gustoća neodrezane strugotine.

6.1. Kinematika ortogonalnog rezanja

Ortogonalno rezanje u osnovi se ostvaruje relativnim gibanjem alata ili obratka. Razmotrit ćemo primjer u kojemu se alat giba konstantnom brzinom, a obradak miruje.

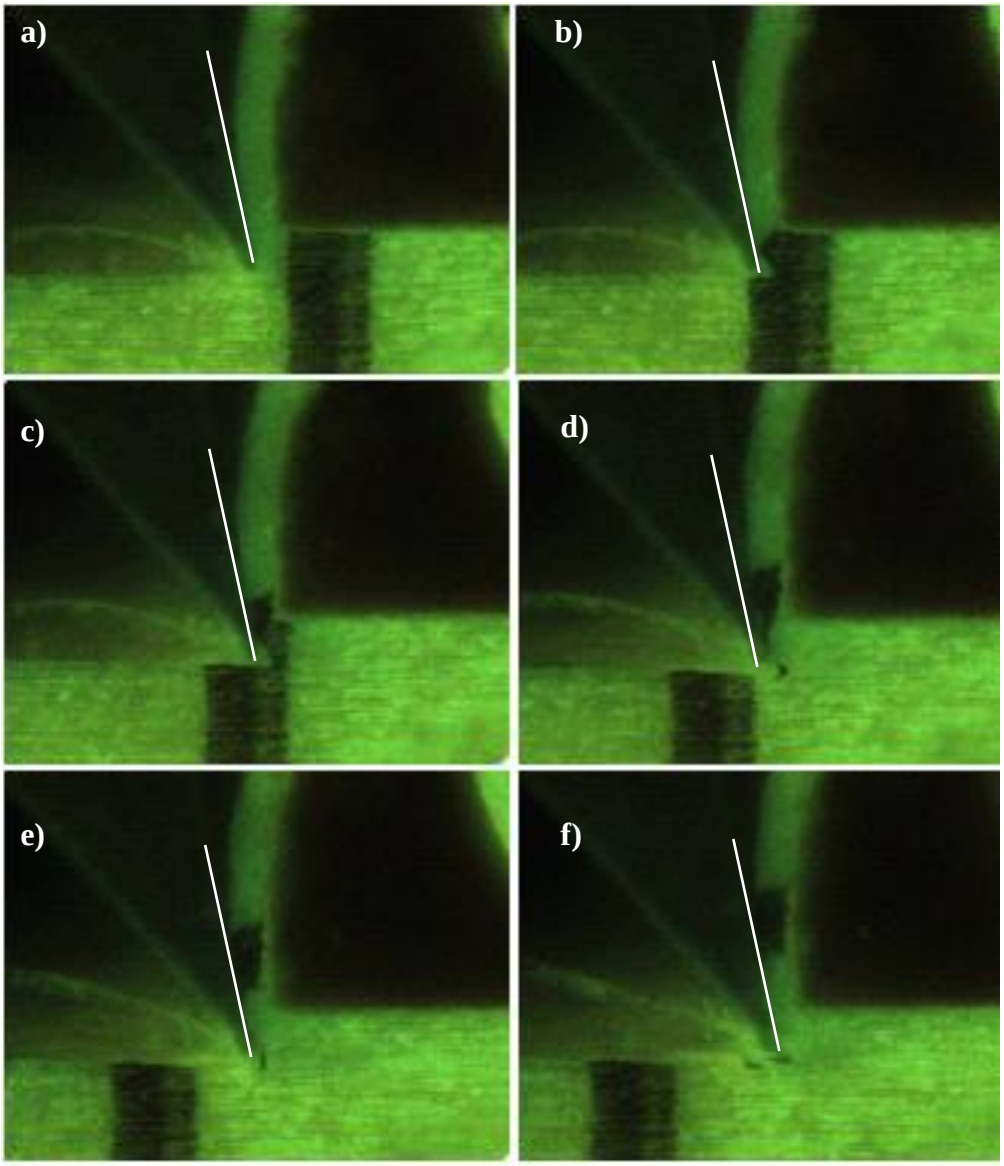


Slika 6.5. Definiranje kinematičkih veličina ortogonalnog rezanja: x_0 – duljina dijela neodrezane strugotine, x_1 – duljina dijela odrezane strugotine, $\mathbf{v}_a$ – brzina alata, $\mathbf{v}_{st}$ – brzina strugotine

Prema slici 6.5., brzina alata jednaka je $\mathbf{v}_a = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}$, a zbog jednolikoga gibanja derivacije se mogu zanemariti, te brzina alata postaje $\mathbf{v}_a = \frac{x_0}{t}$. Pritom se i brzina strugotine može definirati na isti način, $\mathbf{v}_{st} = \frac{x_1}{t}$. Budući da je riječ o vezanim gibanjima, vremena (t) u izrazima za brzinu alata i strugotine moraju biti jednaka, pa je:

$$\frac{x_1}{\mathbf{v}_{st}} = \frac{x_0}{\mathbf{v}_a} \Rightarrow \frac{\mathbf{v}_{st}}{\mathbf{v}_a} = \frac{x_1}{x_0} = \xi_x \,. \tag{146}$$

Izraz (146) predočuje vezu između brzine alata, brzine strugotine i duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine. Brzina alata u literaturi se često naziva i brzinom rezanja ($\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_a$). Ako se ortogonalno rezanje ostvaruje gibanjem obratka, tada je brzina rezanja po iznosu jednaka brzini obratka ($\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_o$).

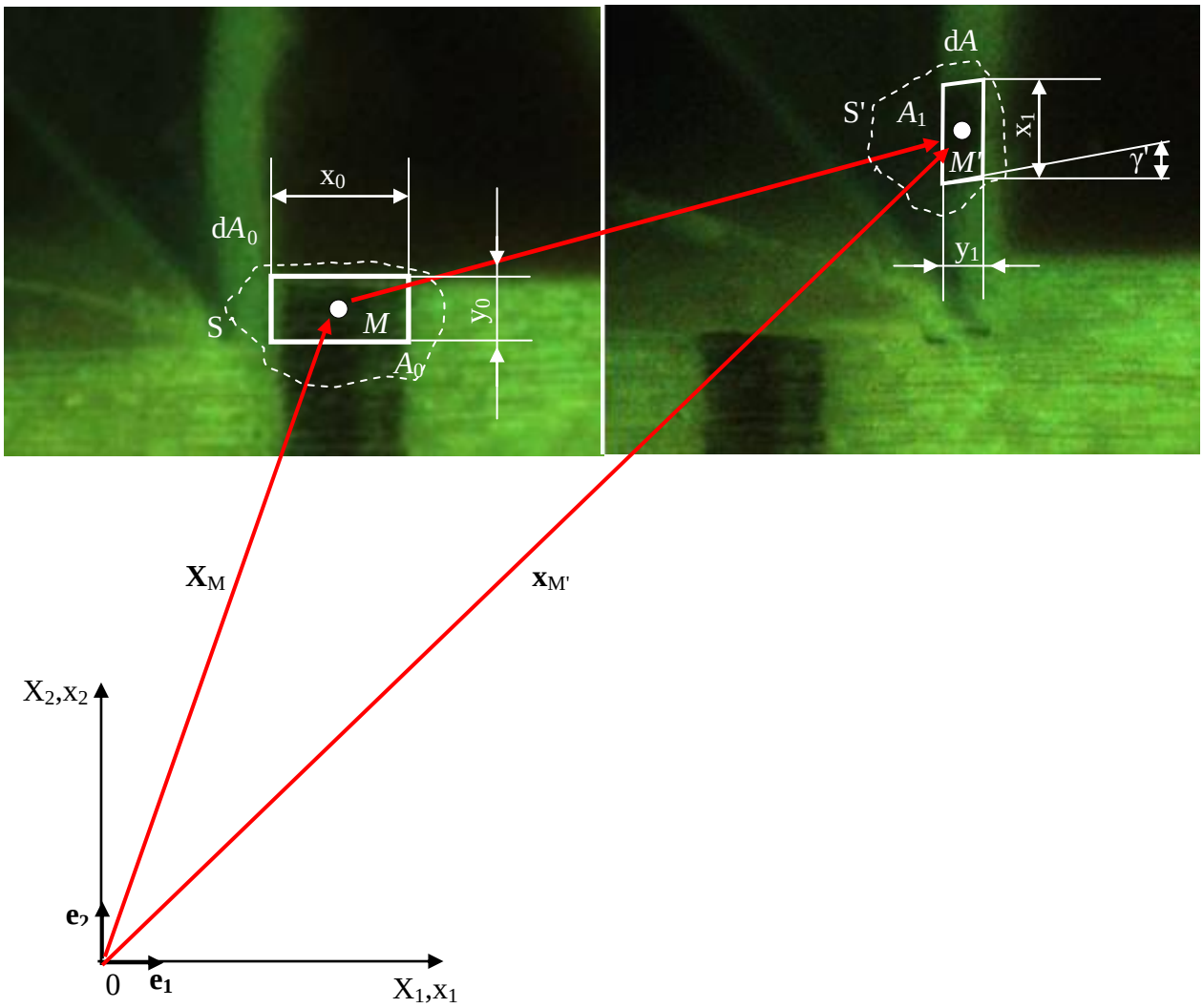


Slika 6.6. Proces savijanja dijela obratka i nastanka strugotine

Pri rezanju u uvjetima nastanka kontinuirane strugotine, kakvi su simulirani za potrebe ovog rada, dolazi do savijanja strugotine (sl. 6.6.).

6.2. Snaga uložena u plastičnu deformaciju strugotine

Dio obratka površine A_0, omeđen plohom S, nedeformirano je stanje (materijalna konfiguracija). Zbog djelovanja oštrice alata i unutarnjih sila obradak se deformira i prelazi u deformirano stanje (trenutačna konfiguracija), odnosno u strugotinu površine A_1, omeđenu plohom S'. Kao posljedica gibanja uspostavlja se međusobno djelovanje susjednih materijalnih točaka unutar obratka koje utječe na pojavu naprezanja, a samim time i na nastanak deformacija. Položaj površine dA_0 u nedeformiranom stanju određen je vektorom položaja $\mathbf{X}(X_1, X_2)$, a položaj površine dA_1 u deformiranom stanju određen je vektorom položaja $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ (sl. 6.7.).



Slika 6.7. Proces plastične deformacije strugotine pri ortogonalnom rezanju drva: x_0 – duljina neodrezane strugotine, y_0 – debljina neodrezane strugotine, x_1 – duljina odrezane strugotine, y_1 – debljina odrezane strugotine, A_0 – površina neodrezane strugotine, A_1 – površina odrezane strugotine, γ – kut smicanja, X – materijalne koordinate, x – trenutačne koordinate

Tijekom procesa deformiranja nedeformirana se konfiguracija preslikava u deformiranu. U teorijskom dijelu ovog rada izveden je izraz za odnos između nedeformirane i deformirane konfiguracije u obliku Caushyjevih tenzora naprezanja i deformacije. U ravninskom stanju naprezanja i deformacije Caushyjevi su tenzori prikazani izrazima:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}, \tag{147}$$

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}. \tag{148}$$

U izrazu (148) dijagonalni elementi određuju linijsku, a izvandijagonalni kutnu deformaciju:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\ln\frac{x_1}{x_0} & \frac{1}{2}\gamma\\ \frac{1}{2}\gamma & \ln\frac{y_1}{y_0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ln\xi_x & \frac{1}{2}\gamma\\ \frac{1}{2}\gamma & \ln\xi_y\end{bmatrix}. \tag{149}$$

S obzirom na to da su deformacije strugotine plastične prirode, veza između naprezanja i deformacije opisana je izrazom (130). Energija potrebna za plastičnu deformaciju strugotine može se odrediti iz izraza:

$$W=\int_V \boldsymbol{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\int_V \overline{K}\cdot\bar{\varepsilon}^{\bar{n}}\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\overline{K}\cdot\bar{\varepsilon}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1}\cdot x_0\cdot y_0\cdot z_0. \tag{150}$$

Vremenskom derivacijom izraza (150) dobiva se izraz za snagu plastične deformacije strugotine:

$$P_{pd}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\overline{K}\cdot\bar{\varepsilon}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\cdot y_0\cdot z_0=\frac{\overline{K}\cdot\bar{\varepsilon}^{\bar{n}+1}}{\bar{n}+1}\cdot\mathbf{v}_A\cdot y_0\cdot z_0. \tag{151}$$

Izraz (151) predočuje vezu između snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine (P_{pd}), parametara obrade ($\mathbf{v}_a$, y_0 i z_0) i mehaničkih svojstava drva ($\overline{K}$ i $\bar{n}$). Ekvivalentna deformacija ($\bar{\varepsilon}$) ovisi o parametrima obrade i o mehaničkim svojstvima drva te je bitan

pokazatelj plastične deformacije strugotine (Asthakov, 2008.). Kako bi se odredila ekvivalentna deformacija strugotine, potrebno je odrediti glavne deformacije po osima globalnoga koordinatnog sustava (*x*,*y*) rješavanjem kubne jednadžbe (115). Invarijante tenzora deformacije (116) i (117) za ravninsko razmatranje dani su izrazima:

$$I_1(\mathbf{T}_\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \ln \xi_x + \ln \xi_y , \tag{152}$$

$$I_2(\mathbf{T}_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma'_{12} \\ \frac{1}{2}\gamma'_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} = \ln \xi_x \cdot \ln \xi_y - \frac{\gamma'^2}{4} . \tag{153}$$

Uvrštenjem izraza (152) i (153) u (115) dobiva se kvadratna jednadžba:

$$\varepsilon^2 - \left(\ln \xi_x + \ln \xi_y\right) \cdot \varepsilon + \left(\ln \xi_x \cdot \ln \xi_y - \gamma^2\right) = 0 . \tag{154}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe daju glavne deformacije određene izrazom:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\ln \xi_x + \ln \xi_y}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\ln \xi_x - \ln \xi_y\right)^2}{4} - \frac{\gamma'^2}{4}} . \tag{155}$$

Eksperimentalni dio ovog rada pokazuje da su u zadanim uvjetima obrade kutne deformacije malih iznosa, a obzirom na to da se u izračunu pojavljuje član $\frac{\gamma'^2}{4}$, kutne se deformacije mogu zanemariti. Zanemarivanjem kutnih deformacija, glavne su deformacije određene izrazima:

$$\varepsilon_1 = \ln \xi_x \tag{156}$$

$$\varepsilon_2 = \ln \xi_y , \tag{157}$$

pa tenzor glavnih deformacija postaje:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \ln \xi_x & 0 \\ 0 & \ln \xi_y \end{bmatrix} . \tag{158}$$

Kako bi se dobile ekvivalentne deformacije, glavne je deformacije potrebno uvrstiti u neki od kriterija. Pri određivanju ekvivalentnih deformacija drva često se primjenjuje von Misesov kriterij iako treba imati na umu i njegova ograničenja:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_x\right)^2} \,. \tag{159}$$

Uvrštenjem glavnih deformacija u von Misesov kriterij dobije se izraz za ekvivalentnu deformaciju strugotine:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\ln^2 \xi_x - \ln\zeta_x \ln\xi_y + \ln^2 \xi_y} \,. \tag{160}$$

Uvrštenjem izraza (160) u (151) dobiva se izraz koji povezuje faktore sabijanja strugotine sa snagom uloženom u plastičnu deformaciju strugotine:

$$P_{\mathrm{pl}} = \frac{\overline{K} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\ln^2 \xi_x - \ln \xi_x \ln \xi_y + \ln^2 \xi_y} \right)^{\overline{n}+1}}{\overline{n}+1} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{A}} \cdot y_0 \cdot z_0 \,, \tag{161}$$

gdje su ekvivalentne vrijednosti faktora snage $\overline{K}$ i koeficijenta otvrdnjavanja $\overline{n}$ određeni prema Hankinsovoj formuli (Bodig i Jane, 1982.):

$$\overline{K} = \frac{K_x \cdot K_y}{K_x \cdot \sin^2 \gamma' + K_y \cdot \cos^2 \gamma'} \,, \tag{162}$$

$$\overline{n} = \frac{n_x \cdot n_y}{n_x \cdot \sin^2 \gamma' + n_y \cdot \cos^2 \gamma'} \,. \tag{163}$$

6.2.1. Brzina deformacije

U teoriji obrade materijala odvajanjem strugotine razlikujemo dvije veličine: brzinu deformiranja i brzinu deformacije. Pod brzinom deformiranja podrazumijeva se brzina kretanja alata ($\mathbf{v}_a$), a brzina deformacije označava promjenu stupnja deformacije u jedinici vremena. Prema Zorevu (1966.), brzina deformacije može se odrediti kao omjer brzine alata i duljine dijela obratka koji se deformira, što se može prikazati ovako:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathbf{v}_a}{x_0}. \tag{164}$$

Usto, iz mehanike kontinuuma proizlazi da je brzina deformacije tenzorska veličina jednaka vremenskoj derivaciji tenzora deformacije:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \tag{165}$$

Komponente tenzora brzine deformacije određuju se vremenskom derivacijom komponenata tenzora deformacije:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(i=j)} = \frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij(i=j)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\xi\right) = \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\xi}\cdot\dot{\xi} \tag{166}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij(i\neq j)} = \frac{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij(i\neq j)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma'\right) = \dot{\gamma}'. \tag{167}$$

Uzimajući u obzir prethodne izraze, tenzor brzine deformacije u razvijenom obliku, uz zanemarivanje kutnih deformacija, prikazan je izrazom:

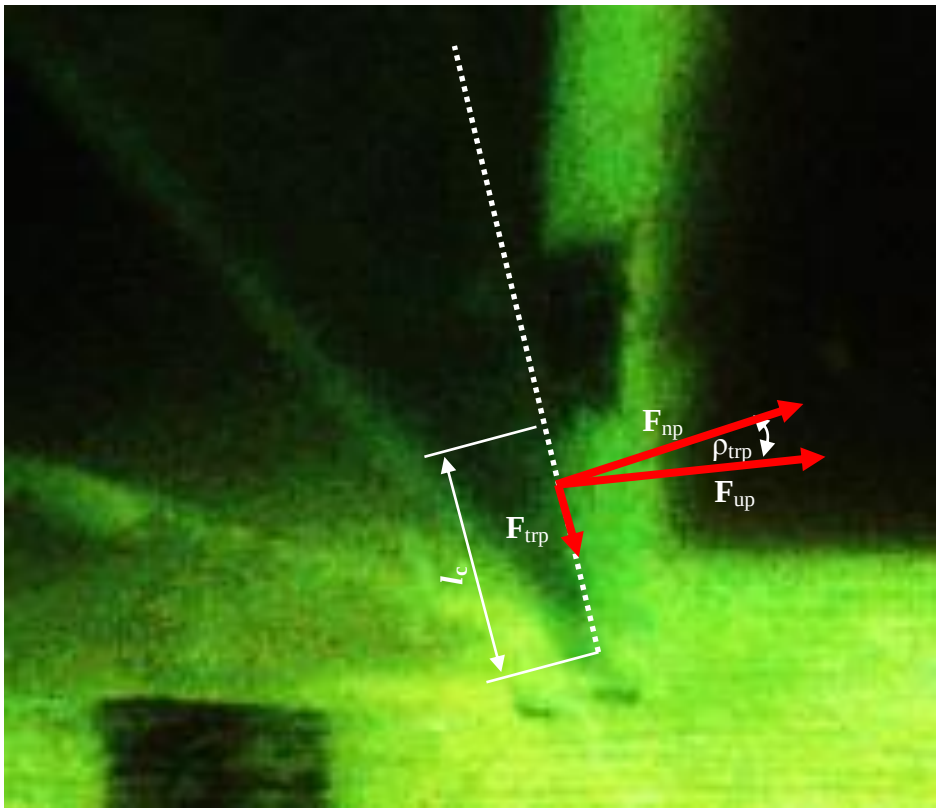
$$\left[\dot{\varepsilon}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_x}\dot{\xi}_x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi_y}\dot{\xi}_y \end{bmatrix}. \tag{168}$$

Ekvivalentna brzina deformacije ($\dot{\bar{\varepsilon}}$) može se odrediti uz pomoć von Misesova kriterija:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\dot{\xi}_x}{\xi_x}\right)^2 - \left(\frac{\dot{\xi}_x \cdot \dot{\xi}_y}{\xi_x \cdot \xi_y}\right) + \left(\frac{\dot{\xi}_y}{\xi_y}\right)^2} \,. \tag{169}$$

6.3. Snaga utrošena za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata

Nakon odvajanja, strugotina dolazi u dodir s prednjom plohom alata. Zbog relativnoga gibanja strugotine u odnosu prema prednjoj plohi alata pojavljuje se trenje, zbog čega se dio ukupne energije sustava troši za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata.



Slika 6.8. Međusobno djelovanje prednje plohe alata i strugotine: $\mathbf{F}_{trp}$ – sila trenja na dodirnoj površini strugotine i prednje plohe alata, $\mathbf{F}_{np}$ – sila kojom prednja ploha alata djeluje na strugotinu, $\mathbf{F}_{up}$ – ukupna sila na prednjoj površini alata, l_c – duljina kontakta prednje površine alata i strugotine, ρ_{trp} – kut trenja

Sila trenja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine ($\mathbf{F}_{trp}$) uzrokuje tangencijalna naprezanja definirana izrazom:

$$\boldsymbol{\tau}_c = \frac{\mathbf{F}_{trp}}{l_c \cdot z_1}, \tag{170}$$

dok sila kojom prednja ploha alata djeluje okomito na strugotinu ($\mathbf{F}_{np}$) uzrokuje tlačna naprezanja veličine:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \frac{\mathbf{F}_{np}}{l_c \cdot z_1}, \tag{171}$$

Iz izraza (170) proizlazi formula za silu trenja na prednjoj plohi alata:

$$\mathbf{F}_{trp} = \boldsymbol{\tau}_c \cdot l_c \cdot z_1. \tag{172}$$

Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata definirana je izrazom:

$$P_{trp} = \mathbf{F}_{trp} \cdot \mathbf{v}_s = \boldsymbol{\tau}_c \cdot l_c \cdot z_1 \cdot \mathbf{v}_s. \tag{173}$$

Uvrštenjem izraza (146) u (173) snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata povezuje se s duljinskim faktorom sabijanja strugotine:

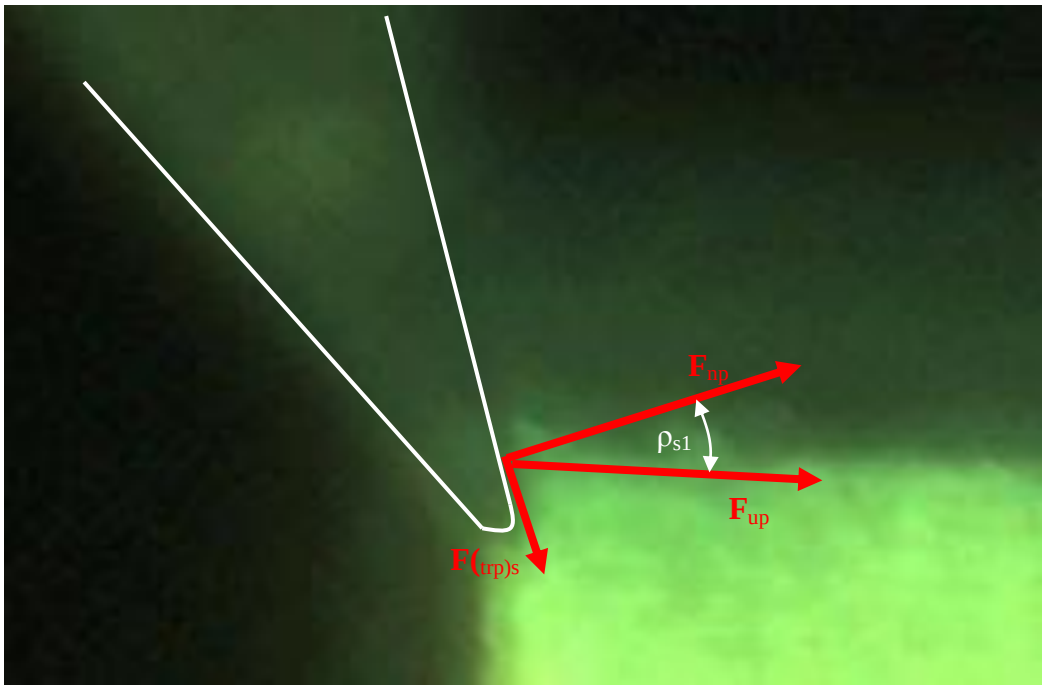
$$P_{trp} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_c \cdot l_c \cdot z_1 \cdot \mathbf{v}_a \cdot \xi_x. \tag{174}$$

Iz izraza (174) vidljivo je da je snaga (P_{trp}) proporcionalna srednjoj vrijednosti tangencijalnih naprezanja na kontaktnoj površini prednje plohe alata i strugotine ($\bar{\boldsymbol{\tau}}_c$), dodirnoj površini ($l_c \cdot z_1$), brzini alata i duljinskom koeficijentu sabijanja strugotine. Prema prethodnim istraživanjima koja su napravljena za potrebe disertacije, ustanovljeno je da iznos snage potrebne za svladavanje rada trenja na prednjoj plohi alata raste s porastom brzine alata pri obradi metala. Prema Astakhovu (2008.), snaga potrebna za svladavanje rada trenja na prednjoj plohi alata proporcionalna je brzini alata, a obrnuto proporcionalna debljinskom koeficijentu sabijanja strugotine:

$$P_{\text{trp}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{c}} \cdot l_{\text{c}} \cdot z_1 \cdot \frac{\mathbf{v}_{\text{a}}}{\xi_{\text{y}}}. \tag{175}$$

Iznos debljinskog faktora sabijanja strugotine raste s povećanjem brzine rezanja. Pri određenoj brzini rezanja postiže svoju maksimalnu vrijednost, nakon čega se smanjuje, a pri dovoljno velikim brzinama rezanja postaje konstantan. Duljina kontakta prednje plohe alata i strugotine također se smanjuje s porastom brzine alata (Zorev, 1966.).

Dodir prednje plohe alata i strugotine u tehnici je poznat kao *kontakt s trenjem*. Kontakt s trenjem vrsta je dodira do kojega dolazi u svim realno postojećim kontaktnim problemima. Pri takvom je kontaktu klizanje u točkama dodira suprotstavljeno sili trenja. To znači da je za pojavu međusobnog klizanja površina spomenutu silu trenja potrebno nadvladati silama koje djeluju na pravcu tangencijalnom na kontaktnu površinu. Sama sila trenja $\mathbf{F}_{\text{trp}}$ u svakoj pojedinoj točki kontakta ovisi o svojstvima promatranih površina (hrapavosti, sadržaju vode u drvu itd.), makroskopski objedinjenih u iznosu koeficijenta trenja μ i u intenzitetu normalne komponente $\mathbf{F}_{\text{np}}$ kontaktnog pritiska u toj istoj točki. Takva se ovisnost obično izražava vrlo dobro poznatom relacijom $\mathbf{F}_{\text{trp}} = \mu \cdot \mathbf{F}_{\text{np}}$. Stoga, ovisno o odnosu intenziteta tangencijalnih i normalnih komponenti kontaktnih pritisaka te uz Coulombov zakon trenja, skupovi točaka na kontaktnoj površini mogu tvoriti zone u stanju prianjanja, u kojima su tangencijalne komponente manje od sile trenja, ili pak u stanju klizanja, kada je sila trenja nadvladana. Ako su tangencijalne komponente dodirnih pritisaka manje od sile trenja, govori se o statičkom trenju, a ako su one veće od sile trenja, radi se o dinamičkom trenju. Drugim riječima, statičko je trenje uvijek veće od dinamičkoga. Pri ortogonalnom rezanju o statičkom trenju govorimo u trenutku kada oštrica alata ulazi u zahvat (sl. 6.9.).



Slika 6.9. Sila trenja pri ulasku oštrice alata u zahvat: $\mathbf{F}_{(trp)s}$ – statička sila trenja, $\mathbf{F}_{np}$ – sila kojom prednja ploha alata djeluje na strugotinu, $\mathbf{F}_{up}$ – ukupna sila na prednjoj površini alata, ρ_{s1} – kut statičkog trenja

Uvrštenjem izraza (170) i (171) u osnovnu definiciju sile trenja ($\mathbf{F}_{tr} = \mu \cdot \mathbf{F}_{np}$) dobiva se izraz za faktor trenja:

$$\mu = \frac{\boldsymbol{\tau}_c}{\boldsymbol{\sigma}_c}. \tag{176}$$

Prema izrazu (176), faktor trenja ovisi o tangencijalnim i normalnim tlačnim naprezanjima na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine. Tijekom procesa naprezanja se mijenjaju, što otežava eksperimentalno određivanje faktora trenja. U trenutku kada oštrica alata ulazi u zahvat i kada su tangencijalne komponente dodirnih pritisaka manje od sile trenja, govori se o statičkom faktoru trenja (μ_s). Prema literaturi (Astakhov, 1998.), statički faktor trenja između metala i drva iznosi od 0,3 do 0,5. Tijekom zahvata tangencijalne komponente kontaktnih pritisaka nadvladavaju silu trenja te se tada govori o dinamičkom faktoru trenja (μ_d). Uvrštenjem izraza (176) u (174) određena je ovisnost snage potrebne za svladavanje rada sile trenja o normalnim tlačnim naprezanjima na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine:

$$P_{trp} = \mu \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot l_c \cdot z_1 \cdot \mathbf{v}_a \cdot \xi_x. \tag{177}$$

S obzirom na to da raspodjela normalnih naprezanja na dodirnoj plohi oštrice alata i strugotine nije ravnomjerna, teorijsko određivanje trenja obuhvaća određivanje funkcije raspodjele kontaktnih pritisaka *p*(x). Pri obradi metala (Muskhelishvili, 1977.) funkcija raspodjele kontaktnih pritisaka na prednju plohu alata može se dobiti umnoškom dvaju faktora:

$$p(x) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} \cdot p_1(x). \tag{178}$$

Prvi faktor predočuje tlačna naprezanja, drugi faktor $p_1(x)$ dimenzionalna je funkcija, a x označava udaljenost od brida oštrice. Prema Muskhelishviliju (1977.), dimenzionalna se funkcija može odrediti iz izraza:

$$p_1(x) = \frac{2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)}{\pi \cdot \left(1 - 2 \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)} \cdot \left(\frac{l_{\mathrm{c}} - x}{x}\right)^{\frac{1}{2} - \rho_{\mathrm{trp}}}. \tag{179}$$

Uvrštenjem izraza (171) i (179) u (178) određuje se funkcija raspodjele normalnih tlačnih naprezanja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine:

$$p(x) = \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{np}}}{l_{\mathrm{c}} \cdot z_1} \cdot \frac{2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)}{\pi \cdot \left(1 - 2 \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)} \cdot \left(\frac{l_{\mathrm{c}} - x}{x}\right)^{\frac{1}{2} - \rho_{\mathrm{trp}}}. \tag{180}$$

Srednja vrijednost normalnih tlačnih naprezanja ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{c}}$) na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine određuje se integracijom funkcije raspodjele:

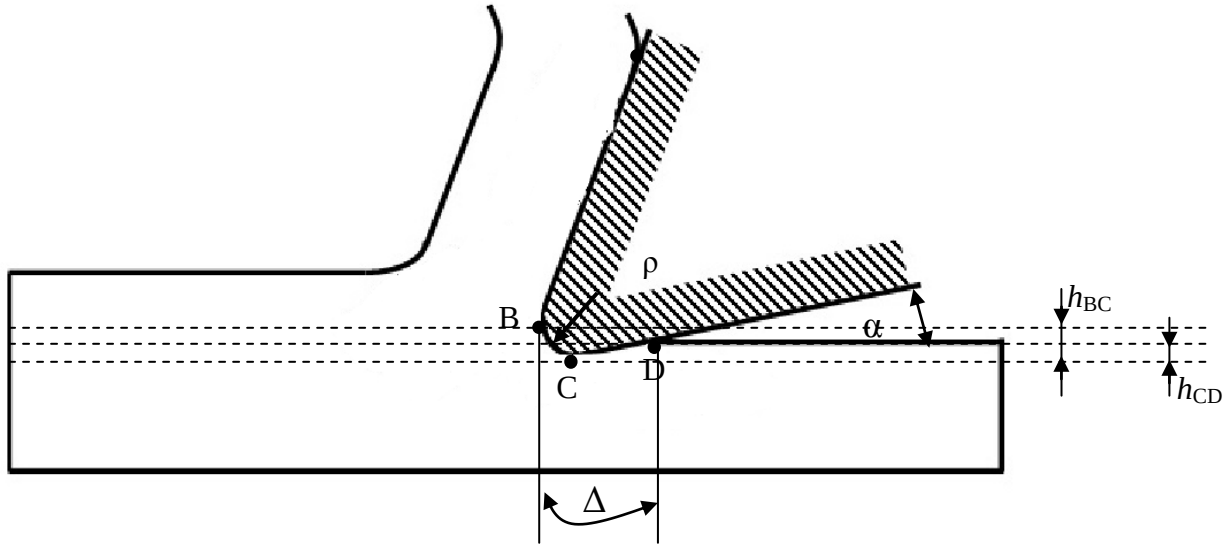
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{l_c} \int_0^{l_{\mathrm{c}}} \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{np}}}{l_{\mathrm{c}} \cdot z_1} \cdot \frac{2 \cdot \cos\left(\pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)}{\pi \cdot \left(1 - 2 \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)} \cdot \left(\frac{l_{\mathrm{c}} - x}{x}\right)^{\frac{1}{2} - \rho_{\mathrm{trp}}} dx, \tag{181}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{c}} = \frac{2 \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{np}} \cdot \cos\left(\pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)}{l_{\mathrm{c}} \cdot z_1 \cdot \pi \cdot \left(1 - 2 \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right)} \cdot \sec\left(\pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - l_{\mathrm{c}} \cdot \pi \cdot \rho_{\mathrm{trp}}\right). \tag{182}$$

Snagu potrebnu za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata moguće je odrediti iz izraza (174) ili (177). Problem određivanja snage uz pomoć izraza (174) jesu tangencijalna naprezanja i njihova raspodjela, dok izraz (177) sadržava dinamički faktor trenja, koji je također problem. Određivanje trenja na prednjoj plohi oštrice uglavnom se svodi na modeliranje i za sada još nisu pronađeni odgovarajući modeli koji bi se dobro podudarali sa stvarnim podatcima (Astakov, 2008.).

6.4. Snaga utrošena za svladavanje sile trenja na stražnjoj plohi alata

Svaka realna oštrica ima određeni radijus zaobljenja (ρ), zbog čega dolazi do dodira stražnje plohe alata i obratka (sl. 6.11.). Zbog tog dodira na stražnjoj se plohi alata pojavljuje trenje i dio uložene energije troši se za svladavanje rada sile trenja. Kako se teži tome da radijus zaobljenja oštrice bude što manji, to je i duljina dodira stražnje plohe alata i obratka malena, a samim time je i dio energije koji se troši za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata malen.



Slika 6.10. Međusobno djelovanje stražnje plohe alata i obratka: Δ – duljina kontakta stražnje plohe alata i obratka, h_{BC} – visina stlačenog dijela obratka, $h_{BC} - h_{CD}$ – elastični povrat obratka, α – stražnji kut oštrice, ρ – radijus zaobljenja oštrice alata

Iz slike 6.10. proizlazi izraz za duljinu kontakta stražnje plohe alata i obratka:

$$\Delta = \rho \cdot \left[\arccos\left(1 - \frac{h_{BC}}{\rho}\right) + \frac{h_{CD}}{\rho \cdot \sin\alpha} \right]. \tag{183}$$

Prema Astakhovu (2008.), veličina stlačenog dijela obratka (h_{BC}) i elastični povrat obratka ($h_{BC} - h_{CD}$) mogu se povezati s koeficijentom sabijanja strugotine okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru strugotine, i to uz pomoć izraza:

$$h_{BC} = \rho \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\xi_y^2 - 2 \cdot \xi \cdot \sin\gamma + \sin^2\gamma}{\xi_y^2 - 2 \cdot \xi_y \cdot \sin\gamma + 1}} \right), \tag{184}$$

$$h_{CD} = \rho \cdot \frac{\xi_y - \sin\gamma}{\xi_y \cdot \cos\gamma} \cdot \left(1 - \frac{\xi_y - \sin\gamma}{\sqrt{\xi_y^2 - 2 \cdot \xi_y \cdot \sin\gamma + 1}} \right). \tag{185}$$

Ukupni pritisak stražnje plohe oštrice alata na obradak može se zamijeniti jednom silom normale ($\mathbf{F}_{ns}$). Sila normale stražnje plohe oštrice alata stvara tlačna naprezanja u obratku, a ona su definirana izrazom:

$$\boldsymbol{\sigma}_{B\text{-}D} = \frac{\mathbf{F}_{ns}}{\Delta \cdot z_0}, \tag{186}$$

a sila trenja na stražnjoj plohi alata ($\mathbf{F}_{trs}$) uzrokuje tangencijalna naprezanja na dodirnoj površini stražnje plohe alata i strugotine:

$$\boldsymbol{\tau}_{B\text{-}D} = \frac{\mathbf{F}_{trs}}{\Delta \cdot z_0}, \tag{187}$$

Snagu potrebnu za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi moguće je odrediti prema izrazu:

$$P_{trs} = \mathbf{F}_{trs} \cdot \mathbf{v}_a = \boldsymbol{\tau}_{B-D} \cdot \Delta \cdot z_0 \cdot \mathbf{v}_a. \tag{188}$$

Tangencijalna naprezanja na dodirnoj površini stražnje plohe alata i obratka nisu konstantna, te se, kao i pri trenju, na prednjoj plohi alata najprije treba odrediti funkcija raspodjele

tangencijalnih naprezanja. Prema Poletici (1969.), funkcija raspodjele tangencijalnih naprezanja pri obradi metala određena je izrazom:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{B-D}} = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-3 \cdot x^2}{\Delta^2}}, \tag{189}$$

gdje je $\boldsymbol{\tau}_0$ smična čvrstoća materijala obratka, a x udaljenost od brida oštrice (točka B). Srednja vrijednost tangencijalnih naprezanja određena je integracijom izraza:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{B-D}} = \frac{1}{x} \cdot \int_0^{\Delta} \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-3 \cdot x^2}{\Delta^2}} \mathrm{d}x = 0{,}505 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 . \tag{190}$$

Zamjenom tangencijalnih naprezanja u izrazu (188) srednjom vrijednošću tangencijalnih naprezanja (190), izraz za snagu potrebnu za svladavanje rada trenja na stražnjoj plohi alata poprima oblik:

$$P_{\text{trs}} = 0{,}505 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \Delta \cdot z_0 \cdot \mathbf{v}_{\text{a}} . \tag{191}$$

Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata ovisi o smičnoj čvrstoći obratka ($\boldsymbol{\tau}_0$), dodirnoj površini ($\Delta \cdot z_0$) i brzini alata ($\mathbf{v}_{\text{a}}$). Izrazima (184) i (185) debljinski je koeficijent sabijanja strugotine povezan s duljinom kontakta stražnje plohe alata i obratka, a samim time računski je povezan i s navedenom komponentom snage rezanja.

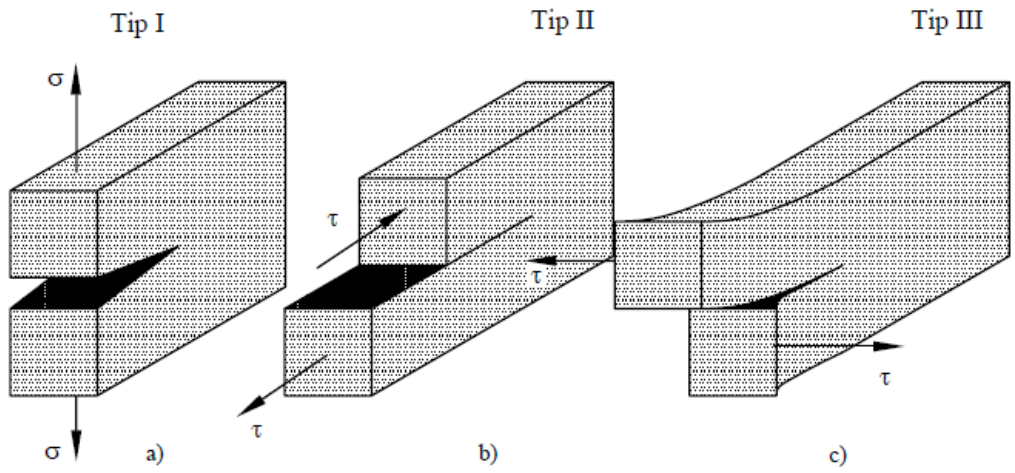
Dio energije sustava koji se troši za svladavanje rada trenja na prednjoj i stražnjoj plohi alata u konačnici se pretvara u toplinu. Može se reći da sustav ortogonalnog rezanja ima izvor topline koji se giba brzinom jednakoj brzini alata ($\mathbf{v}_{\text{a}}$). Nastala toplina raspodjeljuje se na alat, obradak i strugotinu, uzrokujući povećanje temperature (Jaspers, 1999.). Dio nastale topline koji se u tehničkim proračunima obično zanemaruje prelazi na okolinu. Raspodjela topline na alat, obradak i strugotinu ovisi o vrsti obratka, materijalu od kojega je izrađen alat, parametrima obrade (dubini rezanja, brzini itd.). Koeficijent toplinske vodljivosti materijala alata znatno je veći od koeficijenta toplinske vodljivosti drva, zbog čega velik dio stvorene topline preuzima sam alat. Dio topline koji prelazi na obradak uzrokuje promjenu mehaničkih svojstava samog obratka, što utječe na iznos sile rezanja. Prema Pecletovu kriteriju (Astakhov, 2004.):

$$P_e = \frac{\mathbf{v}_a \cdot y_0}{\lambda}, \tag{192}$$

učinak topline na mehanička svojstva obratka koja utječu na iznos sile rezanja ovisi o omjeru umnoška brzine alata i dubine rezanja ($\mathbf{v}_a \cdot y_0$) te toplinske difuzivnosti obratka (λ). Ako je taj omjer veći od 10 ($Pe > 10$), izvor topline se giba brže nego što se toplinski val probija kroz obradak, te nastala toplina ne utječe na iznos sile rezanja. Tipične su vrijednosti toplinske difuzivnosti različitih vrsta drva reda veličine 10^{-6} m^2/s (*Wood Handbook*, 1999.), što uvršteno u izraz (192) daje vrijednosti znatno veće od 10.

6.5. Snaga utrošena za stvaranje nove površine

Djelovanjem oštrice alata u obratku nastaje složeno stanje naprezanja, pri čemu je najveća koncentracija naprezanja uz sam vrh brida oštrice. Kada naprezanja premaše vrijednost (mikro)čvrstoće materijala obratka, ispred vrha oštrice alata nastaje niz mikropukotina. Širenjem mikropukotina od obratka se odvaja strugotina i stvara se nova površina. Temeljni faktor koji definira pukotinu – njezin nastanak, oblik, brzinu širenja itd., jest faktor intenziteta naprezanja *K*. Taj je faktor veza između (makro)naprezanja σ kojima je promatrani element napregnut, oblika elementa i duljine pukotine. Faktor intenziteta naprezanja određuje se za tri osnovna tipa opterećenja zbog kojih se stvaraju tri glavna tipa pukotine (sl. 6.11.).



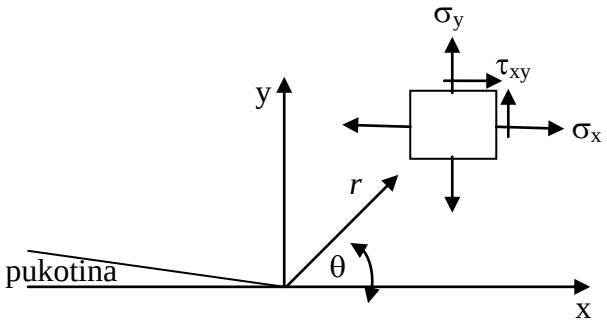
Slika 6.11. Tri osnovna tipa pukotine: a) odcjepni, b) klizni, c) rascjepni: σ – normalna naprezanja, τ – tangencijalna naprezanja

Na slici 6. 11 tip I prikazuje odcjepni, tip II klizni, a tip III rascjepni oblik nastanka pukotine.

Koeficijent intenziteta naprezanja određuje se za svaki tip zasebno, a prema Broeku (1989.), definira se ovako:

$$K = \lim_{r \to 0} \sqrt{2\pi \cdot r} \cdot \sigma, \tag{193}$$

gdje je r udaljenost od vrha pukotine, a σ naprezanje u promatranom smjeru (sl. 6.13.).



Slika 6.12. Shematski prikaz ravninskog stanja naprezanja na udaljenosti r od vrha pukotine

Irwin (Broek, 1989.) izračunava naprezanja pri vrhu pukotine u elastičnome materijalu uz pomoć koeficijenta intenziteta naprezanja. U primjeru ravninskoga stanja naprezanja (v. sl. 6. 12), na udaljenosti *r* od vrha pukotine, normalna i tangencijalna naprezanja mogu se izraziti uz pomoću koeficijenta intenziteta naprezanja:

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{194}$$

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right), \tag{195}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}. \tag{196}$$

Koeficijenti intenziteta naprezanja za isti su tip opterećenja zbrojivi, tj. ukupni koeficijent intenziteta naprezanja jednak je zbroju koeficijenata pojedinačnih opterećenja. Koeficijenti intenziteta naprezanja različitih tipova opterećenja ne mogu se zbrajati, ali se mogu zbrajati omjeri njihovih oslobođenih energija (Jelaska, 2000.). Ukupni faktor

oslobođene energije naziva se faktorom gustoće energije (G) i jednak je zbroju faktora oslobođene energije za svaki tip opterećenja zasebno:

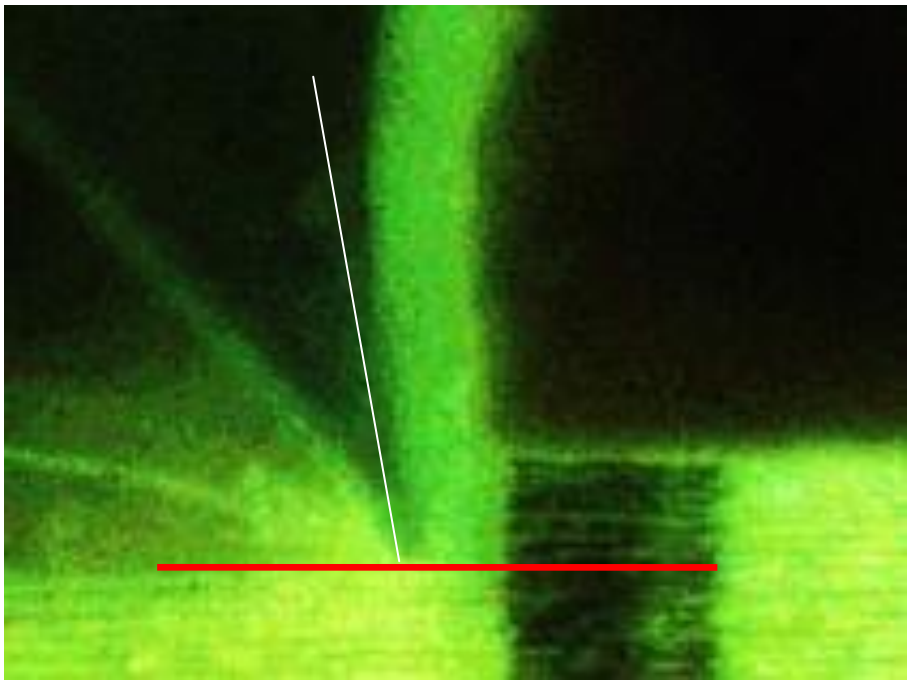
$$G = G_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}} + G_{\mathrm{III}} . \tag{197}$$

Prema Sihu (1965.), faktor gustoće energije može se izraziti uz pomoć kritičnog koeficijenta intenziteta naprezanja (K_{IC}) i modula elastičnosti (E). Za ortotropni materijal faktor gustoće energije (G) iznosi:

$$G = \frac{K_{\mathrm{IC}}^2}{\overline{E}}, \tag{198}$$

gdje $\overline{E}$ označava ekvivalentni modul elastičnosti (Merhar, 2012.).

Pri procesu ortogonalnog rezanja drva u uzdužnom smjeru, zbog djelovanja oštrice alata u uzdužnome smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru, nastaje kombinacija pukotine tipa I i tipa II. Na slici 6.13. crvenom je crtom označeno područje u kojemu se stvara nova površina.



Slika 6.13. Shematski prikaz nastanka nove površine pri ortogonalnom rezanju. Crvenom je crtom označeno područje nastanka nove površine.

Faktor gustoće energije pri ortogonalnom rezanju, uz uvjet nastanka kontinuirane strugotine. može se odrediti prema:

$$G = G_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}} \,. \tag{199}$$

Prema Astakhovu (2008.), snaga potrebna za stvaranje nove površine može se odrediti iz izraza:

$$P_{\mathrm{np}} = G \cdot x_0 \cdot z_0 \cdot f \,, \tag{200}$$

gdje je f frekvencija nastanka mikropukotina. Umnožak duljine neodrezane strugotine (x_0) i frekvencije nastanka nove pukotine (f) jednak je brzini alata:

$$P_{\mathrm{np}} = G \cdot z_0 \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{a}} \,. \tag{201}$$

Brzina alata može se odrediti uz pomoć brzine strugotine i duljinskog koeficijenata sabijanja prema (146), te se izraz (201) može zapisati u obliku:

$$P_{\mathrm{np}} = G \cdot z_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_{\mathrm{s}}}{\xi_{\mathrm{x}}} \,. \tag{202}$$

Izrazom (202) snaga potrebna za stvaranje nove površine povezana je s duljinskim koeficijentom sabijanja strugotine.

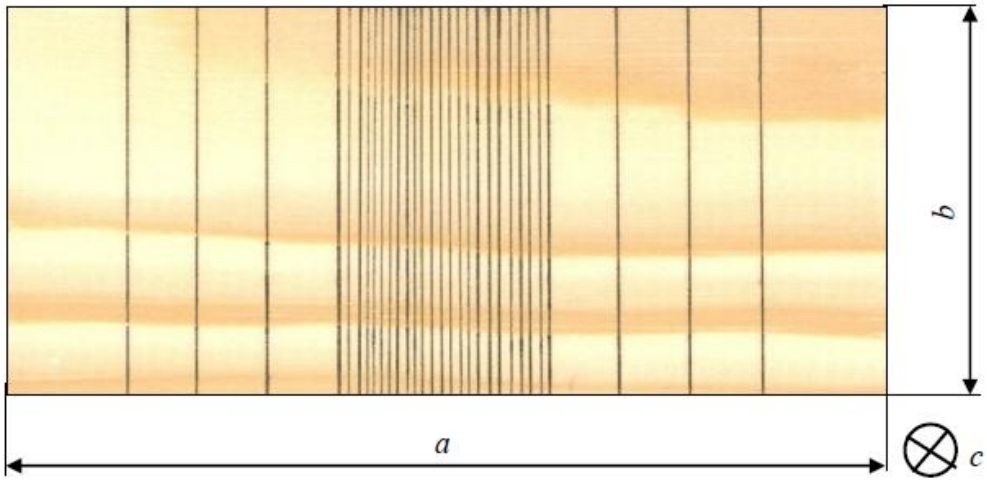
7.MATERIJALI I METODE

Glavni predmet istraživanja u eksperimentalnom dijelu ovog rada bilo je određivanje snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine pri ortogonalnom rezanju drva. Eksperimentalno istraživanje izvedeno je u tri faze. U prvoj su fazi odabrani i pripremljeni uzorci, u drugoj su određena mehanička svojstva potrebna za izračun plastične komponente snage rezanja, a u trećoj su određeni snaga rezanja te koeficijenti duljinskoga i debljinskog sabijanja strugotine. Mjerenje mehaničkih svojstava uzoraka drva provedeno je u akreditiranom Laboratoriju za drvo u graditeljstvu Šumarskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a mjerenja sila na reznu oštricu i koeficijenata sabijanja strugotine pri ortogonalnom rezanju uzoraka obavljeno je na Biotehnička fakulteta u Ljubljani, Oddelk za lesarstvo.

7.1. Kondicioniranje uzoraka borovine i određivanje njezine gustoće

Istraživanje je provedeno na uzorcima borovine (*Pinus sylvestris* L.) bez vidljivih grešaka drva te s približno jednakim udjelom ranoga i kasnog drva. Za potrebe određivanja ovisnosti koeficijenata sabijanja strugotine sila na oštricu alata i mehaničkih svojstava odabranih uzoraka drva o sadržaju vode u drvu (u), pripremljeno je dvadeset uzoraka dimenzija $a = (12{,}52 \pm 0{,}04)$ cm, $b = (5{,}82 \pm 0{,}02)$ cm i $c = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ cm (sl. 7.1) koje je bilo potrebno kondicionirati na vrijednosti u = (0, 10, 14, 30 i 45) %. Uzorci su prethodno osušeni u sušioniku do u = 0 %. Sušenje je trajalo sedam dana, a masa uzoraka provjeravana je svakih 12 sati. U trenutku kada se tri uzastopna rezultata mjerenja mase nisu razlikovala za više od 1 %, sadržaj vode u uzorcima bio je približno 0 % ($u \approx 0\%$). Srednja vrijednost mase uzoraka pri u = 0 % iznosila je $m_0 = (39{,}9704 \pm 1{,}2541)$ g. Na uzorke su nakon toga vodootpornim markerom ucrtane linije debljine (0,3 ÷ 0,5) mm, kako bi poslužile za lakše očitavanje koeficijenta sabijanja strugotine sa snimke kamere. Uzorci su potom podijeljeni u četiri skupine s pet uzoraka u svakoj. Prva skupina uzoraka kondicionirana je na $u_1 \approx 10\%$. Kondicioniranje je obavljeno otopinom natrij-bromida ($NaBr \cdot 2H_2O$), uz relativnu vlažnost okoline 58 % i temperaturu 20 °C. Nakon kondicioniranja srednja vrijednost mase uzoraka iznosila je $m_1 = (43{,}9452 \pm 1{,}7911)$ g.

Druga skupina uzoraka kondicionirana je na $u_2 \approx 14\ \%$. Kondicioniranje je provedeno natrij-kloridom (NaCl), uz relativnu vlažnost okoline 76,5 % i temperaturu 20 °C. Nakon kondicioniranja srednja vrijednost mase uzoraka iznosila je $m_2 = (45{,}6452 \pm 1{,}2590)\ \mathrm{g}$. Treća skupina uzoraka kondicionirana je na $u_3 \approx 30\ \%$, a četvrta na $u_4 \approx 45\ \%$, pri čemu su navedene vrijednosti postignute na sljedeći način. Uzorci su najprije potopljeni u vodu sobne temperature (t = 22 °C). Uzorci treće skupine stajali su potopljeni u vodi deset dana, nakon čega im je izmjerena masa $m_3 = (52{,}0950 \pm 0{,}9571)\ \mathrm{g}$, a uzorci četvrte skupine stajali su u vodi dvadeset dana, a onda im je izmjerena masa $m_4 = (57{,}8738 \pm 1{,}9881)\ \mathrm{g}$.



Slika 7.1. Prikaz uzorka: *a* – dimenzija uzorka u longitudinalnom smjeru, *b* – dimenzija uzorka u tangencijalnom smjeru, *c* – dimenzija uzorka u radijalnom smjeru

Sadržaj vode u drvu određen je gravimetrijskom metodom, a vrijednosti su izračunane uz pomoć izraza:

$$u_{\mathrm{n}} = \frac{m_{\mathrm{n}} - m_0}{m_0} \cdot 100\%, \qquad \mathrm{n} = 1,2,3,4\,. \tag{203}$$

Tablica 7.1. Rezultati određivanja sadržaja vode i gustoće uzoraka

	m_0, g	m_n, g	u, %	ρ, kg/m^3
1. skupina	$39{,}9704 \pm 1{,}2541$	$43{,}9452 \pm 1{,}7911$	$9{,}94 \pm 0{,}30$	$482{,}47 \pm 3{,}34$
2. skupina	$39{,}9704 \pm 1{,}2541$	$45{,}6452 \pm 1{,}2590$	$14{,}19 \pm 0{,}11$	$501{,}13 \pm 2{,}81$
3. skupina	$39{,}9704 \pm 1{,}2541$	$52{,}0950 \pm 0{,}9571$	$30{,}33 \pm 0{,}43$	$571{,}95 \pm 4{,}18$
4. skupina	$39{,}9704 \pm 1{,}2541$	$57{,}8738 \pm 1{,}9881$	$44{,}79 \pm 0{,}69$	$635{,}39 \pm 4{,}69$

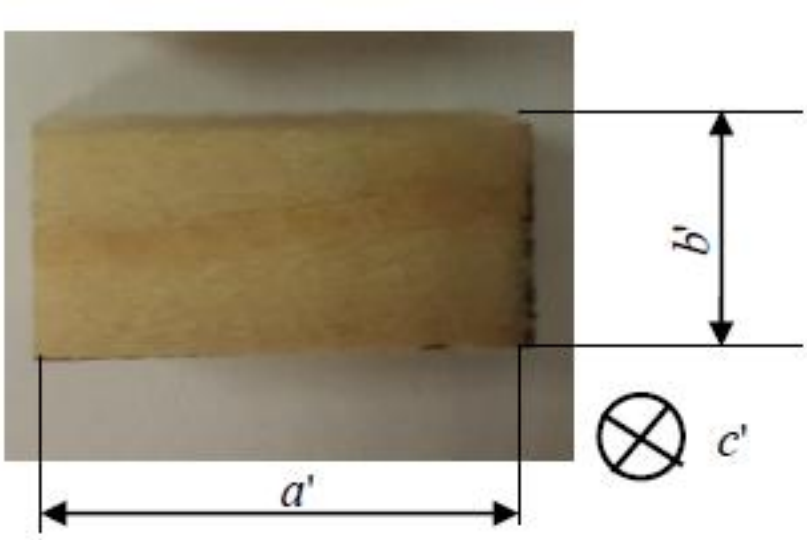
Gustoća za sve četiri skupine uzoraka izračunana je na osnovi izraza:

$$\rho = \frac{m_n}{V_n}, \qquad n = 1,2,3,4\,. \tag{204}$$

gdje je V_n volumen uzoraka nakon kondicioniranja na određene sadržaje vode.

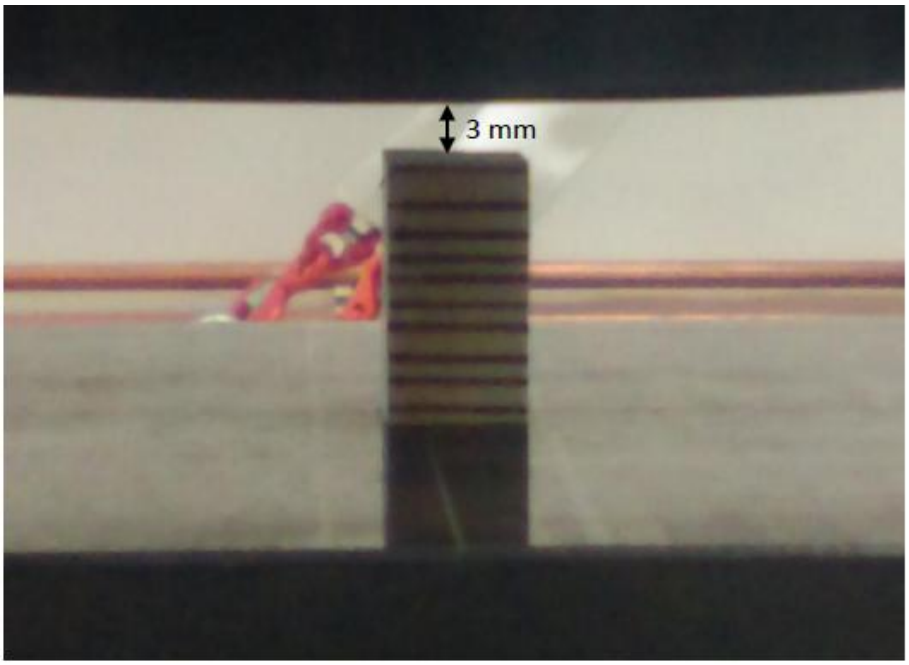
7.2. Ispitivanje tlačne čvrstoće uzoraka borovine i određivanje koeficijenata snage i otvrdnjavanja

Nakon toga je iz svake skupine uzoraka izdvojen po jedan uzorak, iz kojega su izrezani uzorci potrebni za određivanje mehaničkih svojstava borovine. Uzorci su bili dimenzija: $a' = (1{,}00 \pm 0{,}01)$ cm, $b' = (2{,}00 \pm 0{,}01)$ cm i $c' = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ cm (sl. 7.2.). Dimenzije uzoraka nisu bile u skladu sa standardiziranim vrijednostima uzoraka za ispitivanje tlačne čvrstoće jer je poznato da mehanička svojstva drva ovise o dimenzijama uzoraka, odnosno o sastavu drva, pa su ispitivanja rađena na uzorcima što manjih dimenzija, koje je bilo moguće kvalitetno ispitati na kidalici kako bi se za potrebe ovog rada dobile što reprezentativnije vrijednosti tlačne čvrstoće.



Slika 7.2. Uzorak borovine na kojemu su ispitana tlačna svojstva u uzdužnom i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru: a' – dimenzija uzorka u longitudinalnom smjeru, $a' = (1{,}00 \pm 0{,}01)\text{cm}$; b' – dimenzija uzorka u tangencijalnome smjeru, $b' = (2{,}00 \pm 0{,}01)\text{cm}$;c' – dimenzija uzorka u radijalnom smjeru, $c' = (1{,}25 \pm 0{,}01)\text{cm}$

U drugoj fazi eksperimentalnog dijela za potrebe izračuna komponente snage rezanja koja je potrebna za plastičnu deformaciju strugotine na uzorcima borovine mjerena je tlačna čvrstoća paralelno s vlakancima u uzdužnom smjeru i tlačna čvrstoća okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru. Teorijski dio ovog rada pokazuje da su ta mehanička svojstva koeficijent snage (K) i koeficijent otvrdnjavanja (n) pri tlačnom djelovanju sile. Uzorci za ispitivanje mehaničkih svojstava ispiljeni su od uzoraka na kojima su kasnije obavljena ispitivanja pri ortogonalnom rezanju i na odgovarajući su način označeni kako bi se kasnije mogli povezati rezultati dobiveni mjerenjima mehaničkih svojstava i eksperimentalnog rezanja. Tlačna čvrstoća uzoraka ispitana je na kidalici proizvođača Shimadzu, tip Autograph AG – X, opremljenoj dinamometrom nazivne sile 1000 N. Tijek i postupak ispitivanja programiran je pripadajućim softverom Trapezium X. Za ispitivanje je odabrana brzina tlačenja uzorka od 2 mm/min kako bi se dobili odgovarajući dijagrami. Poznato je da tlačna čvrstoća ovisi o brzini ispitivanja (Astakhov, 1998.), ali zbog praktičnih ograničenja ona se nije mogla znatnije mijenjati, pa je pretpostavljeno da neće biti bitnih promjena svojstava koja bi utjecala na veće razlike u konačnom izračunu snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine pri rezanju.



Slika 7.3. Ispitivanje tlačnih svojstava uzoraka borovine u uzdužnom smjeru uz pomoć kidalice proizvođača Shimadzu, tip Autograph AG – X

Svojstva su ispitana ovisno o sadržaju vode u uzorcima $u \approx (10,14,30 \text{ i } 45)\ \%$. Eksperiment se u jednakim uvjetima ponavljao tri puta. Podatci izmjerene sile i pomaka dalje su obrađivani u programskom paketu Sigmaplot v.10.0.

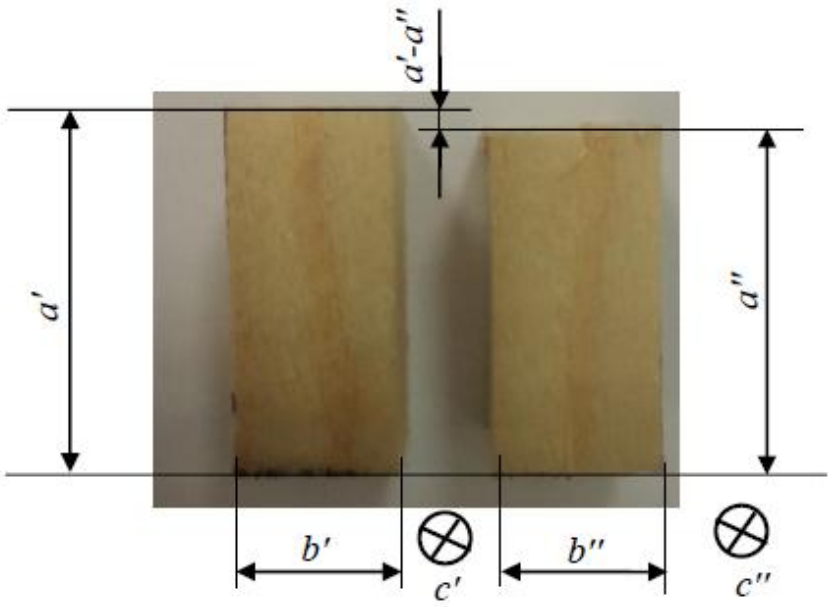
Tlačna čvrstoća određena je prema izrazu:

$$\sigma = \frac{\mathbf{F}}{a' \cdot c'}, \tag{205}$$

a relativna deformacija prema:

$$\varepsilon = \frac{a''\text{-}a'}{a'} = \xi - 1, \tag{206}$$

gdje je a' – početna duljina uzorka, a'' – konačna duljina uzorka, b' – početna širina uzorka, c' – početna debljina uzorka i ξ – koeficijent sabijanja uzorka.



Slika 7.4. Uzorak borovine prije i nakon određivanja tlačnih svojstava na kidalici

Na temelju podataka dobivenih ispitivanjem tlačne čvrstoće uzoraka izračunat je koeficijent snage (*K*) i koeficijent otvrdnjavanja (*n*). Koeficijenti snage i otvrdnjavanja opisuju ponašanje materijala u plastičnom području, a eksperimentalnim se putem određuju iz dijagrama ovisnosti deformacije o naprezanjima (sl. 7.5.). U području krivulje (sl. 7.5.) u kojemu je odnos naprezanja i deformacije linearan očitaju se vrijednosti naprezanja i deformacije u dvije bliske točke (ε_{1e}, σ_{1e}), (ε_{2e}, σ_{2e}), te se prema izrazu (207) odredi modul elastičnosti. Modul elastičnosti označava nagib pravca čiji se smjer podudara s elastičnim područjem krivulje:

$$E = \lim_{\Delta\varepsilon \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}. \qquad (207)$$

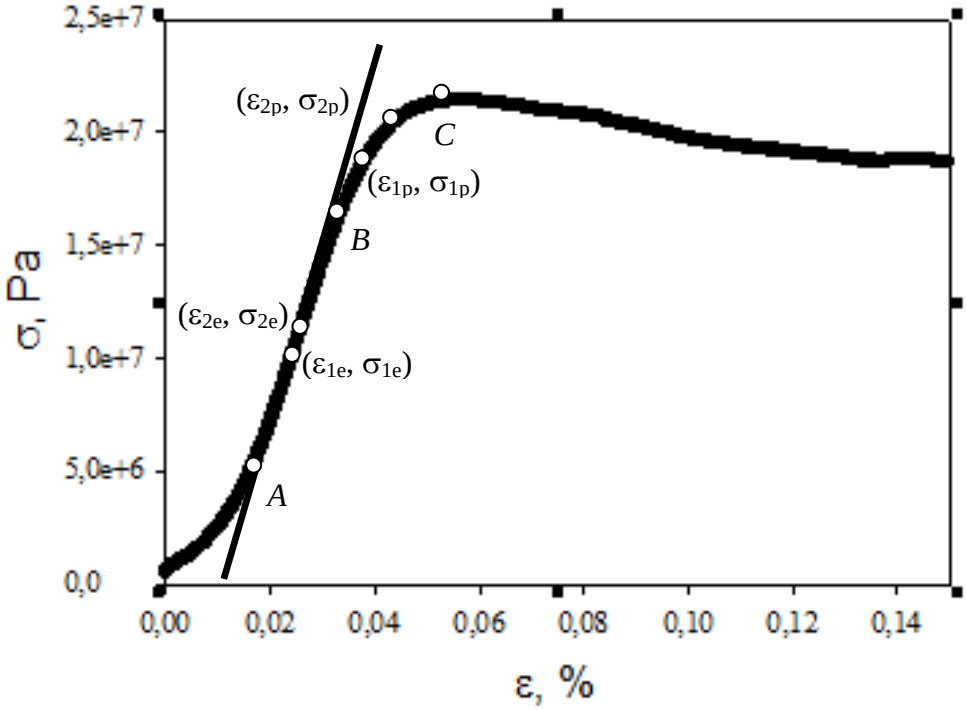
Trenutak kada se pravac i krivulja počnu dodirivati označava početak elastičnog područja (*A*). Trenutak kada se pravac i krivulja prestanu dodirivati označava kraj elastičnog i početak plastičnog područja (*B*). Odnos naprezanja i deformacija u elastičnom području dan je izrazom:

$$\sigma_{el} = E \cdot \varepsilon. \qquad (208)$$

Naprezanja postignuta u točki *C* maksimalna su plastična naprezanja, a dio krivulje od točke *B* do točke *C* označava plastično područje. Odnos naprezanja i deformacija u plastičnom području određen je izrazom:

$$\sigma_{pl} = K \cdot \varepsilon_{pl}^{n}. \tag{209}$$

gdje je *K* koeficijent snage, a *n* koeficijent otvrdnjavanja.



Slika 7.5. Prikaz elastičnih i plastičnih naprezanja pri djelovanju sile u uzdužnom smjeru

Koeficijent snage i otvrdnjavanja određuju se uz pomoć dijagrama ovisnosti naprezanje – deformacija. U plastičnom području krivulje (*B* – *C*) odabiru se dvije točke u kojima se očitaju vrijednosti naprezanja i deformacije (σ_{pl1}, ε_{pl1}) i (σ_{pl2}, ε_{pl2}). U odabranim se točkama postavi jednadžba ovisnosti naprezanja o deformaciji:

$$\sigma_{pl1} = K \cdot \varepsilon_{pl1}^{n}. \tag{210}$$

$$\sigma_{pl2} = K \cdot \varepsilon_{pl2}^{n}, \tag{211}$$

a nakon toga se logaritmiranjem jednadžbi (210) i (211) odrede analitički izrazi za koeficijent otvrdnjavanja:

$$n = \frac{\log\left(\sigma_{pl1}\right) - \log\left(\sigma_{pl2}\right)}{\log\left(\varepsilon_{pl1}\right) - \log\left(\varepsilon_{pl2}\right)}, \tag{212}$$

i koeficijent snage:

$$K = \frac{\sigma_{pl1}}{\varepsilon_{pl1}^{n}}. \tag{213}$$

Koeficijent snage i otvrdnjavanja određeni su u uzdužnom smjeru (K_x, n_x) i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru (K_y, n_y) u ovisnosti o sadržaju vode u drvu. Ekvivalentne vrijednosti koeficijenta snage i otvrdnjavanja, uz pomoć kojih se izračunava snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine, određene su prema izrazima (162) i (163). Mjerenje je pri jednakom sadržaju vode u drvu ponavljano tri puta, nakon čega je određena srednja vrijednost s pripadajućom standardnom devijacijom

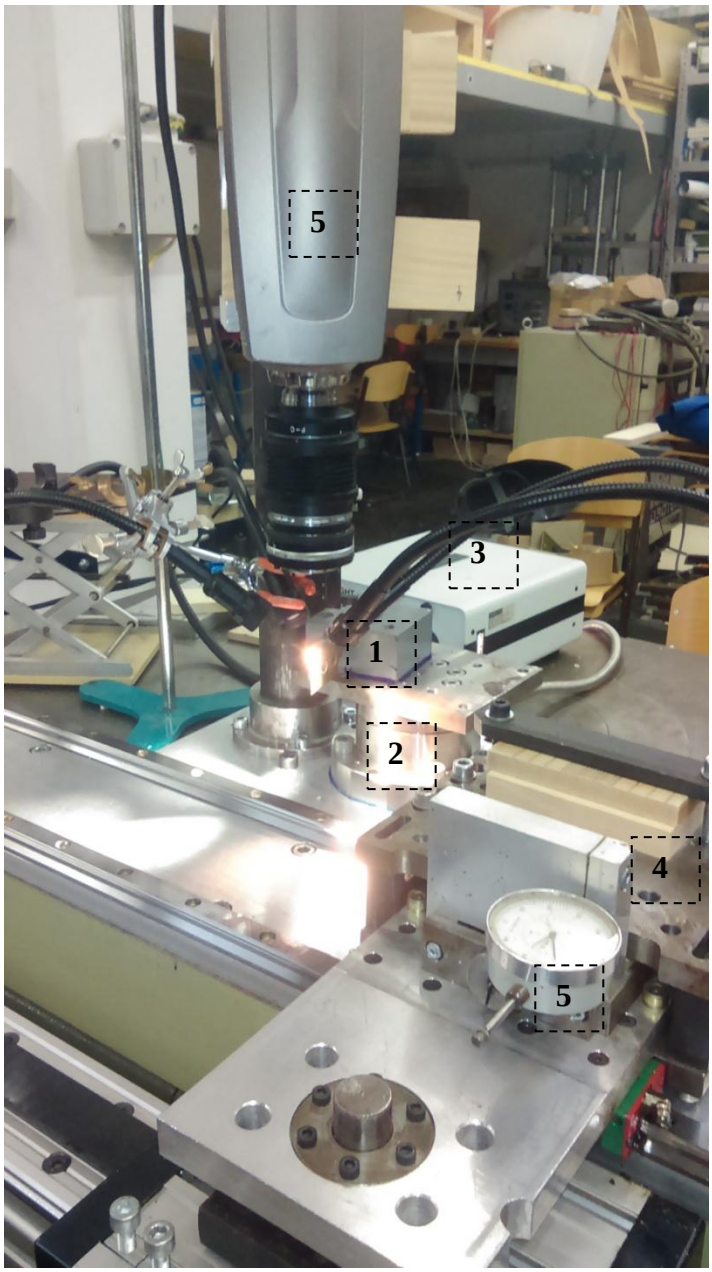
7.3. Mjerenje sila i snimanje procesa rezanja brzom kamerom

Uzorci bora duljine 125 mm i debljine 12 mm ortogonalno su rezani u uzdužnom smjeru. Uzorci su ortogonalno izrezani gibanjem obratka dok je oštrica alata bila pričvršćena za dinamometar. Parametri obrade mijenjani su tako da se dobije kontinuirana strugotina. Sila je izmjerena u ovisnosti o sadržaju vode u drvu i brzini rezanja. Proces je sniman brzom kamerom I – SPEED 2, a sa snimke kamere određeni su duljinski i debljinski koeficijent sabijanja strugotine u ovisnosti o sadržaju vode u drvu i o brzini rezanja.

7.3.1. Eksperimentalni postav

Za ortogonalno rezanje uzoraka bora upotrijebljen je eksperimentalni postav prikazan na sljedećoj slici. Osnovu tog sustava činila je pomična ploča od lijevanog željeza na koju je bio pričvršćen uzorak. Dodatak za obradu materijala (za dubinu rezanja) iznosio je 0,3 mm, a određivan je uz pomoć vijka i komparatora točnosti 0,01 mm. Pomična je ploča spojena na

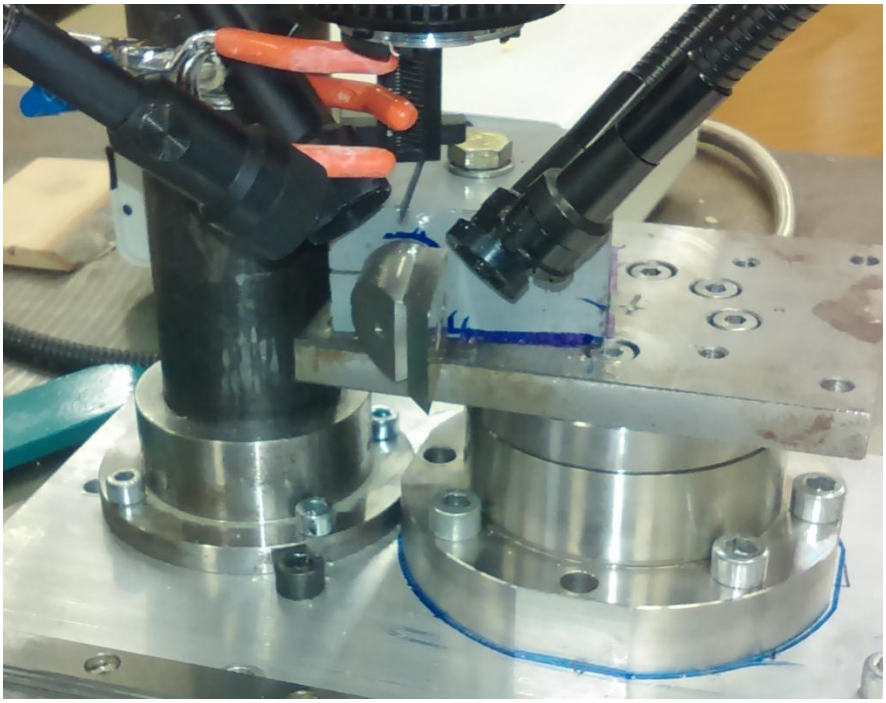
pogonski elektromotor koji može postići brzinu do 5 m/s. Drugi dio eksperimentalnog postava sastojao se od dinamometra na koji je pričvršćena oštrica alata, a iznad nje se nalazila brza kamera Olympus I – SPEED 2.



Slika 7.6. Eksperimentalni postav: 1 – oštrica alata, 2 – troosni dinamometar, 3 – rasvjeta, 4 – sustav za ostvarivanje glavnoga gibanja s pričvršćenim uzorkom koji se reže, 5 – komparator, 6 – brza kamera I-SPEED2

Za rezanje je rabljena oštrica od brzoreznog čelika (HSS), pričvršćena na dinamometar s kutom klina od 30°. Debljina oštrice bila je 7 mm, širina 30 mm, a prethodno ju je naoštrio

sam proizvođač. Prednji je kut oštrice odabiran tako da se dobije kontinuirana strugotina. Prema Kochu (1966.), za odabrane sadržaje vode taj je kut iznosio 10°.



Slika 7.7. Oštrica alata pričvršćena na dinamometar

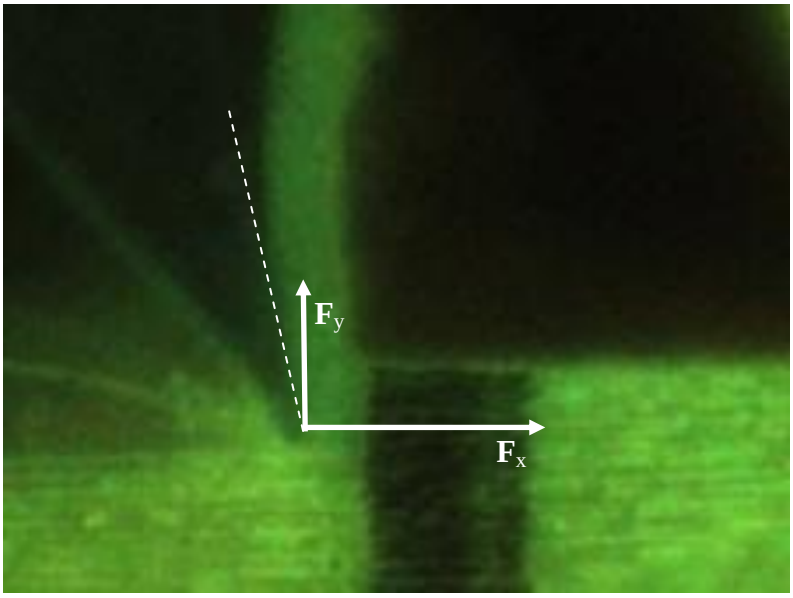
7.3.2. Eksperimentalno određivanje sile rezanja

Za mjerenje sile upotrijebljen je 4-komponentni Kistlerov piezoelektrični dinamometar tipa 9272. U specifikaciji proizvođača navedena je rezonantna frekvencija u smjeru x i y od oko 3,1 kHz, ali kako je dinamometar bio učvršćen na pristroj, rezonantna mu je frekvencija promijenjena. Ona je izmjerena i iznosila je oko 600 Hz (Merhar, 2010.), zbog čega je frekvencija mjerenja sile podešena na 1000 Hz.

Dinamometar mjeri silu u smjeru paralelnome ($\mathbf{F}_x$) i okomitome ($\mathbf{F}_y$) na smjer gibanja obratka (sl. 7.8.). Ukupna sila ($\mathbf{F}_r$) jednaka je vektorskom zbroju sila u paralelnom i okomitom smjeru, a njezin je iznos određen izrazom:

$$\mathbf{F}_r = \sqrt{\mathbf{F}_x^2 + \mathbf{F}_y^2} \,. \tag{214}$$

Sile su mjerene u ovisnosti o sadržaju vode u drvu i brzini gibanja obratka (brzini rezanja). Sadržaj vode u drvu iznosio je (10, 14, 30 i 45) %, a brzina gibanja obratka (0,5, 1, 1,5, 2 i 3) m/s. Mjerenje sile pri jednakim uvjetima ponavljano je tri puta. Izmjereni su podatci filtrirani u programu LabVIEW uz pomoć Besseljeva niskopropusnog filtra, a nakon toga je određena srednja vrijednost sile u smjeru x i y, s pripadajućom standardnom devijacijom, u programskom paketu SigmaPlot v.10.0. Eksperimentalni dio ovog rada pokazuje da su sile u smjeru y pri navedenim brzinama rezanja i sadržaju vode u drvu malog iznosa te se mogu zanemariti. U tom slučaju iz izraza (214) proizlazi $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_x$.



Slika 7.8. Prikaz izmjerenih komponenti sile: $\mathbf{F}_x$ – sila rezanja, $\mathbf{F}_y$ – odrivna sila

Snaga rezanja određena je množenjem srednje vrijednosti sile u smjeru x ($\mathbf{F}_r$) i brzine obratka ($\mathbf{v}_o$) , također u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u uzorcima. Odrivna sila sa smjerom gibanja obratka zatvara kut od 90 °, zbog čega je njezin umnožak s brzinom obratka jednak nuli, što znači da odrivna sila ne utječe na iznos snage rezanja.

7.3.3. Eksperimentalno određivanje snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine

U teorijskom dijelu ovog rada izveden je izraz (161), prema kojemu je određena snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine. Iz izraza (160) vidljivo je da je za izračun navedene komponente snage, osim koeficijenta snage i otvrdnjavanja, potrebno izmjeriti i

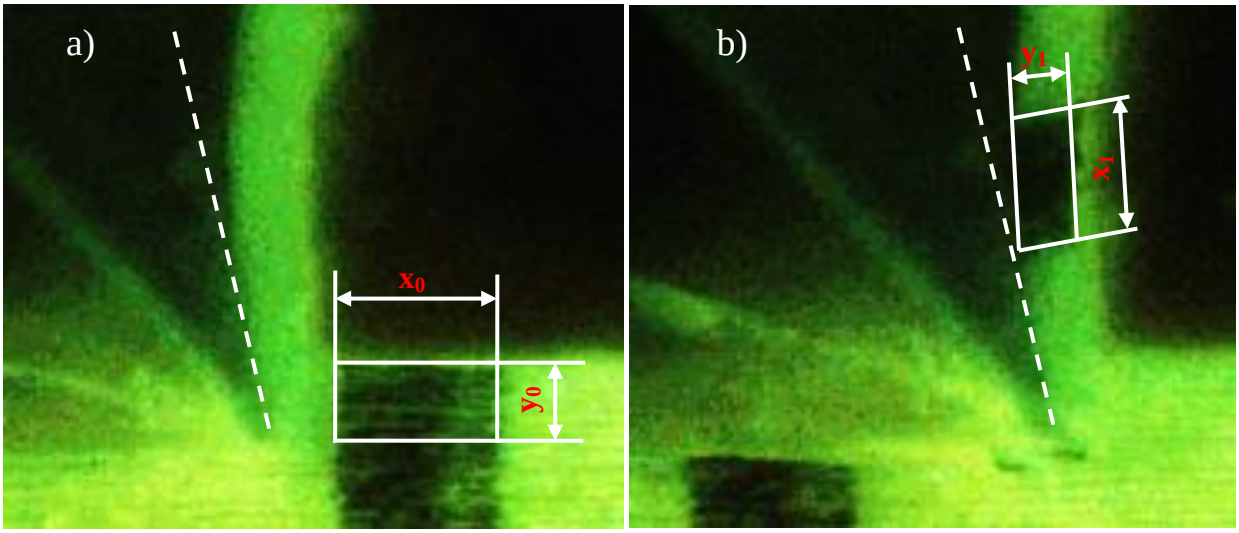
koeficijente sabijanja strugotine. Za tu je svrhu proces rezanja sniman brzom kamerom Olympus I – SPEED 2, koja je bila pričvršćena iznad oštrice alata. Kamera omogućuje snimanje maksimalnom brzinom 150 000 snimaka u sekundi. Pri maksimalnoj rezoluciji 1280 x 1024 kamera može snimati brzinom od 2000 snimaka u sekundi, dok se pri većim brzinama rezolucija smanjuje. Pri rezanju je odabrana brzina od 1000 do 1400 snimaka u sekundi. Objektivima postavljenim na kameru (sl. 7.9.) postignuto je vidno polje veličine 5,6 x 4,2 mm, a za osvjetljenje tako male površine bila je dovoljna halogena rasvjeta fokusirana na mjernu površinu.



Slika 7.9. Kamera Olympus I – SPEED 2 s objektivima pričvršćena iznad oštrice alata s halogenom rasvjetom

Snimke kamere kasnije su obrađivane u programskom paketu i-SPEED proizvođača Olympus, uz pomoć kojega su određeni koeficijenti sabijanja strugotine u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Sadržaj vode u drvu iznosio je (10, 14, 30 i 45) %, a brzina rezanja (0,5, 1, 1,5, 2 i 3) m/s. Za kalibraciju je korištena duljina dodatka za obradu koja je iznosila 0,3 mm. Na slici 7.10. prikazan je primjer očitavanja dimenzija

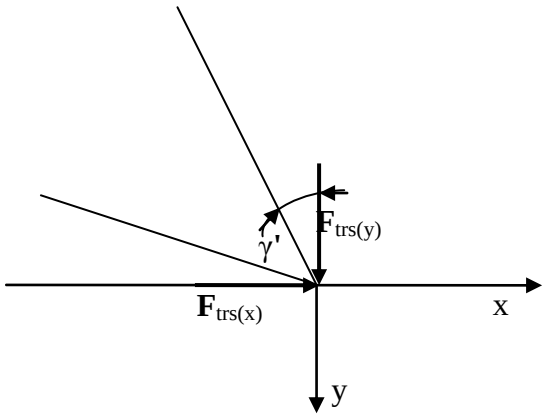
neodrezane (sl. 7.10.a) i odrezane (sl. 7.10.b) strugotine. Dimenzije neodrezane strugotine izmjerene su prije početka procesa deformacije, kada se oštrica alata nalazila dovoljno daleko da ne prouzroči naprezanja u označenom dijelu obratka. Dimenzije odrezane strugotine izmjerene su u trenutku kada je označeni dio strugotine prestao biti u dodiru s prednjom plohom alata. Omjerom dimenzija odrezane i neodrezane strugotine određeni su koeficijenti sabijanja strugotine. Rezanje je u jednakim uvjetima ponavljano tri puta. Koeficijenti sabijanja strugotine izmjereni su u istovjetnim uvjetima deset puta, nakon čega je određena srednja vrijednost i pripadajuća standardna devijacija.



Slika 7.10. Primjer očitavanja: a) dimenzija neodrezane strugotine, b) dimenzija odrezane strugotine sa snimke kamere

7.3.4. Eksperimentalno određivanje sile trenja na stražnjoj plohi alata

Sila trenja na stražnjoj plohi alata izmjerena je struganjem alata po obratku, odnosno dodatak za obradu iznosio je 0 mm. Slika 7.11. prikazuje komponente sile izmjerene pri struganju alata po obratku.



Slika 7.11. Izmjerene komponente sile trenja na stražnjoj plohi alata: $F_{trs(x)}$ – paralelna komponenta sile trenja na stražnjoj plohi alata, $F_{trs(y)}$ – okomita komponenta sile trenja na stražnjoj plohi alata, γ' – prednji kut oštrice alata

Sila trenja na stražnjoj plohi alata izmjerena je u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u uzorcima. Sadržaj vode u uzorcima iznosio je (10, 14, 30 i 45) %, a brzina gibanja obratka odnosno brzina rezanja (0,5, 1, 1,5, 2 i 3) m/s. Prema izrazu:

$$P_{trs} = \mathbf{F}_{trs(x)} \cdot \mathbf{v}_o \qquad (215)$$

određena je snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata. Izmjereni su podatci obrađivani na način opisan u odjeljku 7.3.2.

7.3.5. **Eksperimentalno određivanje sile trenja na prednjoj plohi alata**

Model sila prema kojemu je određena sila trenja na prednjoj plohi alata prikazan je slikom 7.12. (Merhar, 2010.). Od izmjerene vrijednosti komponenata sile u smjeru x i y ($\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$) oduzete su izmjerene vrijednosti komponente sile trenja na stražnjoj plohi alata ($\mathbf{F}_{tr(x)}$, $\mathbf{F}_{tr(y)}$):

$$\mathbf{F}_{rx} = \mathbf{F}_x - \mathbf{F}_{tr(x)}\,, \qquad (216)$$

$$\mathbf{F}_{ry} = \mathbf{F}_y - \mathbf{F}_{tr(y)}\,. \qquad (217)$$

Prema slici 6.9. komponente sile rezanja ($\mathbf{F}_{rx}$ i $\mathbf{F}_{ry}$) mogu se izraziti uz pomoć prednjeg kuta oštrice alata i kuta trenja:

$$\mathbf{F}_{rx} = \mathbf{F}_r \cos\left(\rho_{trp} - \gamma'\right), \tag{218}$$

$$\mathbf{F}_{ry} = \mathbf{F}_r \sin\left(\rho_{trp} - \gamma'\right), \tag{219}$$

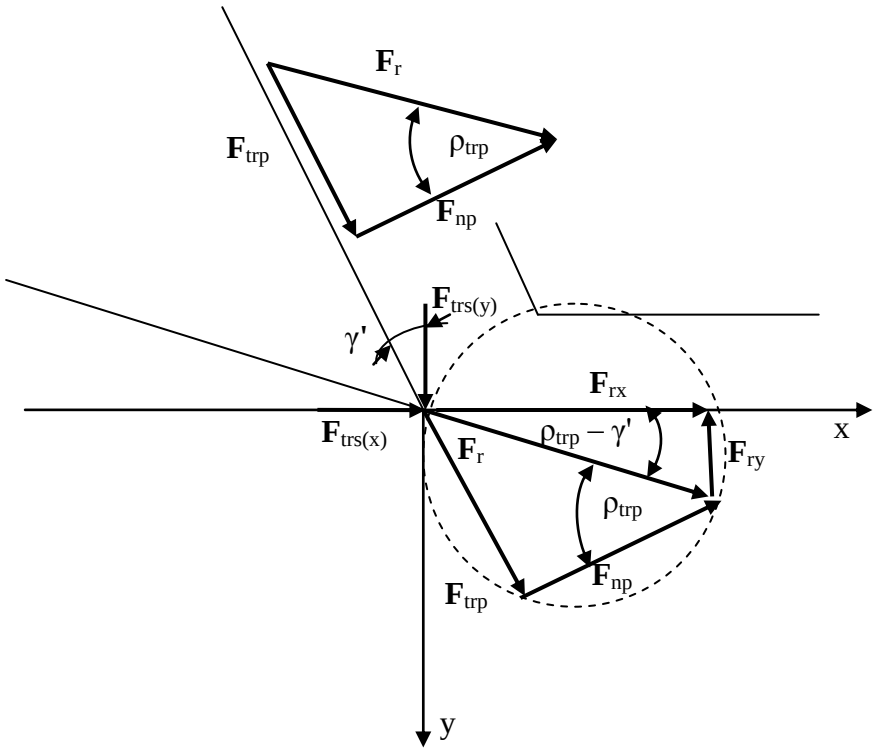
gdje je:

$$\mathbf{F}_r = \sqrt{\mathbf{F}_{rx}^2 + \mathbf{F}_{ry}^2}\ . \tag{220}$$

Sila normale prednje plohe alata i sila trenja mogu se odrediti uz pomoć sile rezanja ($\mathbf{F}_r$) prema izrazima:

$$\mathbf{F}_{np} = \mathbf{F}_r \cos\left(\rho_{trp}\right), \tag{221}$$

$$\mathbf{F}_{trp} = \mathbf{F}_r \sin\left(\rho_{trp}\right), \tag{222}$$



Slika 7.12. Shematski prikaz sila pri ortogonalnom rezanju upotrijebljen za izračun komponente sile trenja na prednjoj plohi alata

gdje je kut trenja:

$$\rho_{trp} = \gamma' + arctg \frac{\mathbf{F}_{ry}}{\mathbf{F}_{rx}}. \quad (223)$$

Iz definicije sile trenja ($\mathbf{F}_{trp} = \mu \cdot \mathbf{F}_{np}$) proizlazi izraz za faktor trenja:

$$\mu_d = \mathrm{tg}(\rho_{trp}). \quad (224)$$

Prema izrazu (223), kut sile trenja na prednjoj plohi alata ovisi o komponentama sile ($\mathbf{F}_{rx}$ i $\mathbf{F}_{ry}$) koje su određene iz izmjerenih vrijednosti ($\mathbf{F}_x$ i $\mathbf{F}_y$). Budući da se u danom slučaju dinamometrom mjere komponente sile u trenutku kad je oštrica alata u zahvatu, faktor trenja u izrazu (224) dinamički je.

Prema izrazu:

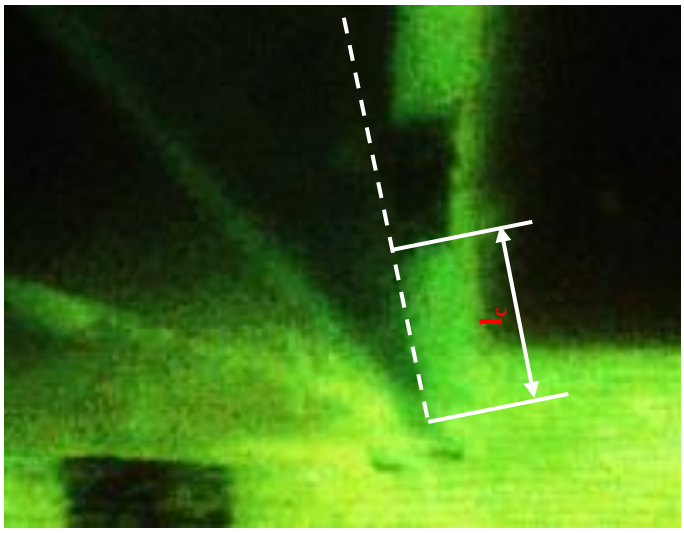
$$P_{trp} = \mathbf{F}_{trp} \cdot \mathbf{v}_{st}, \quad (225)$$

u kojemu je $\mathbf{v}_{st}$ brzina strugotine, određena je snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata. Uvrštenjem izraza (146) u izraz (225) određuje se veza između snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata i duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine:

$$P_{trp} = \mathbf{F}_{trp} \cdot \xi_x \cdot \mathbf{v}_a. \quad (226)$$

Sila trenja i snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata određeni su u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u uzorcima.

U teorijskom dijelu ovog rada izrazom (174) dana je veza između snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata i duljine kontakta prednje plohe alata i strugotine. Duljina kontakta prednje plohe alata i strugotine određena je sa snimke kamere na jednak način kao i pri mjerenju koeficijenta sabijanja strugotine. Na slici 7.13. prikazan je primjer očitavanja duljine kontakta (l_c).



Slika 7.13. Primjer očitavanja duljine kontakta prednje plohe alata i strugotine (l_c) sa snimke kamere

8.REZULTATI ISTRAŽIVANJA S DISKUSIJOM

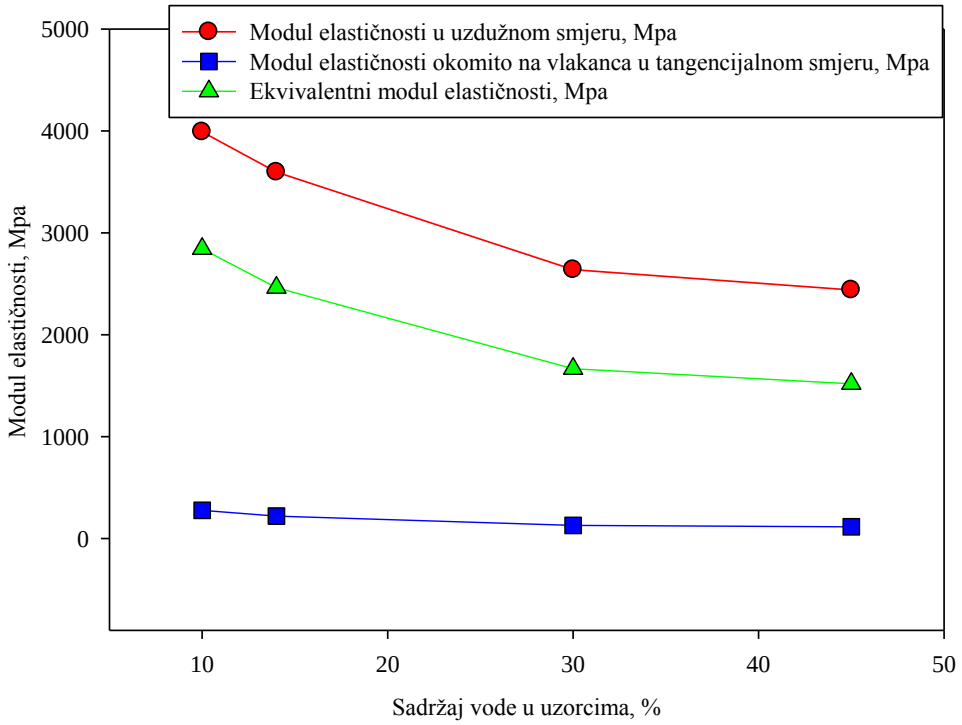
Eksperimentalno izmjerene vrijednosti obrađivane su u programskom paketu SigmaPlot v.10.0. Zatim je određena srednja vrijednost izmjerenih parametara s pripadajućom standardnom devijacijom. Mjerenja mehaničkih svojstava uzoraka borovine i sile rezanja u jednakim uvjetima ponavljana su tri puta, a mjerenja koeficijenata sabijanja strugotine deset puta. S obzirom na mali broj ponavljanih mjerenja, podatci nisu testirani statističkim testovima. Jedan od ciljeva disertacije jest utvrđivanje postoji li ovisnost koeficijenata sabijanja strugotine i snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja i sadržaju vode u uzorcima. Kako bi se ta ovisnost mogla statistički testirati i opisati odgovarajućom matematičkom formulacijom, potrebna su mjerenja na većem broju sadržaja vode i brzina rezanja, te na više vrsta drva, što ostavlja prostor za daljnja istraživanja.

Radi bolje preglednosti, u ovom je poglavlju prikazana ovisnost srednjih vrijednosti izmjerenih i izračunanih veličina o sadržaju vode u uzorcima i brzini rezanja. Sadržaj vode u uzorcima iznosio je (u $\approx$10, 14, 30 i 45) %, a brzina rezanja ($v_r \approx$ 0,5, 1, 1,5, 2 i 3) m/s. Dijagrami ovisnosti srednje vrijednosti izmjerenih i izračunanih veličina s pripadajućom standardnom devijacijom o sadržaju vode u drvu i brzini rezanja nalaze se u prilogu ovog rada (pogl. 9.).

8.1. Rezultati mjerenja mehaničkih svojstava uzoraka borovine

Mehanička svojstva borovine ispitana su na kidalici postupkom opisanim u odjeljku 7.2. Modul elastičnosti (207), koeficijent snage (213) i koeficijent otvrdnjavanja (212) određeni su u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru, u ovisnosti o sadržaju vode u uzorcima. Iz izraza (162) i (163) određene su ekvivalentne vrijednosti izmjerenih veličina. Na slici 8.1. prikazan je dijagram ovisnosti modula elastičnosti u uzdužnom smjeru (E_x) i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru (E_y) te ekvivalentnoga modula elastičnosti ($\overline{E}$) o sadržaju vode u drvu. Na slici je vidljiv pad srednje vrijednosti modula elastičnosti s porastom sadržaja vode u drvu u oba ispitivana smjera. Prema dosadašnjim istraživanjima (*Wood Handbook*, 1999.), iznos modula elastičnosti smanjuje se s

porastom sadržaja vode u drvu. Kada je sadržaj vode u drvu veći od točke zasićenja vlakanaca ($u_{tzv} \approx 25$ %), modul elastičnosti postaje neovisan o sadržaju vode.



Slika 8.1. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti modula elastičnosti u longitudinalnom i tangencijalnom smjeru te ekvivalentnoga modula elastičnosti o sadržaju vode u uzorcima

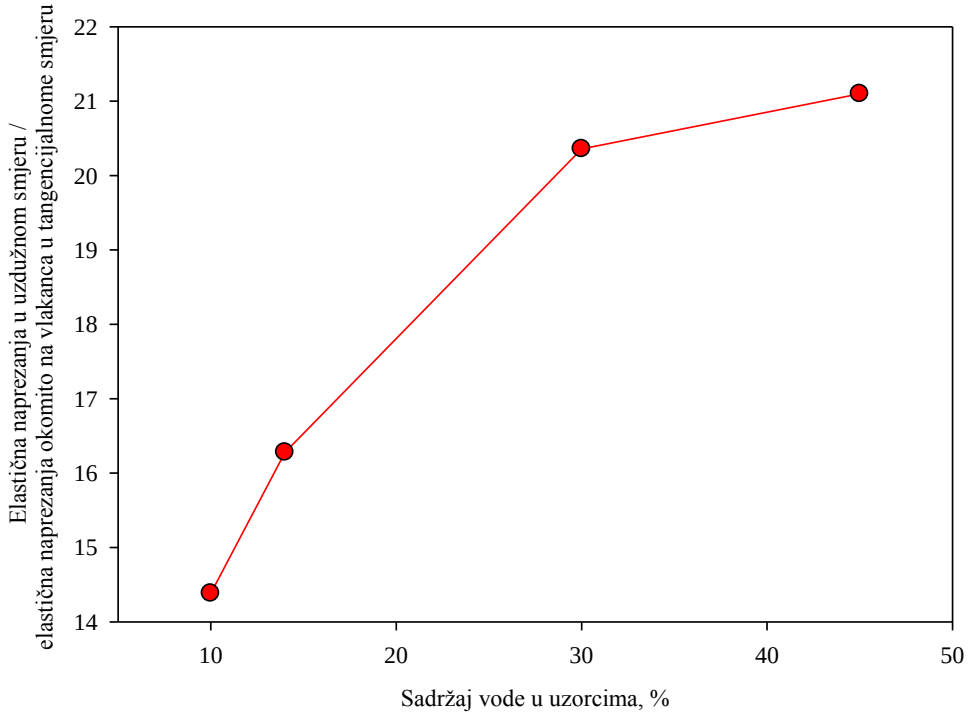
Prema izrazu (122), modul elastičnosti obrnuto je proporcionalan elastičnoj deformaciji uzoraka, iz čega se može zaključiti da s povećanjem sadržaja vode raste i elastična deformacija uzoraka u oba ispitivana smjera. Postave li se jednadžbe (122) i (124) u omjer, dobiva se:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{E_x \cdot \varepsilon_x}{E_y \cdot \varepsilon_y}. \tag{227}$$

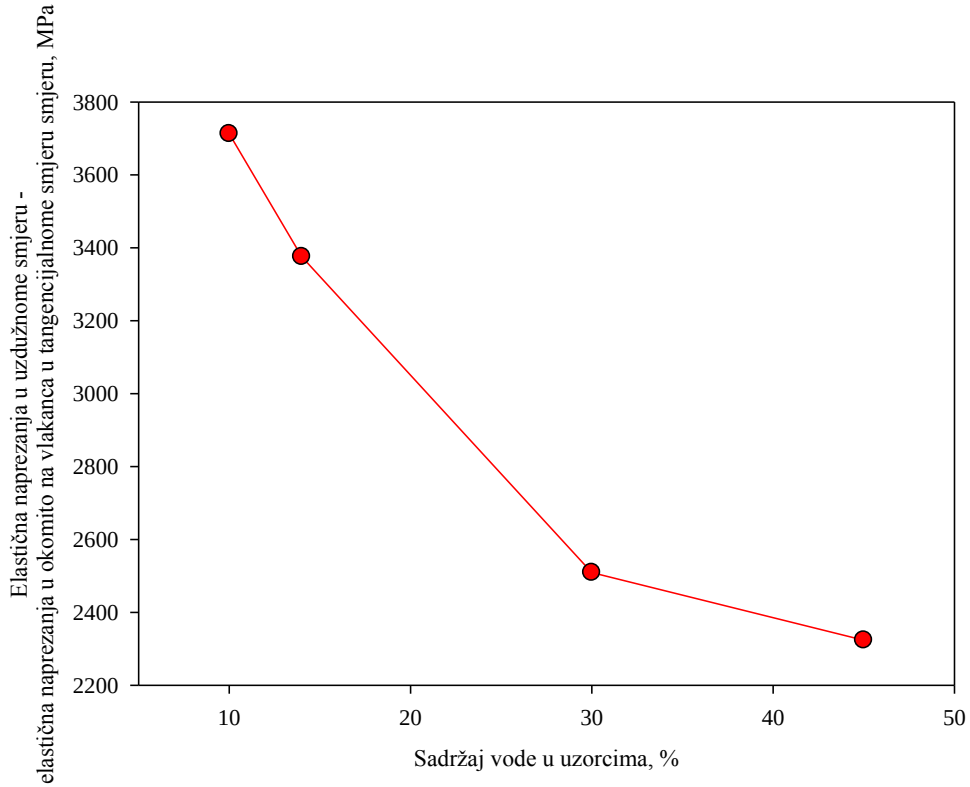
Iz izraza (227) može se odrediti odnos naprezanja potrebnih za postizanje jednake elastične deformacije u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru. Ako su deformacije jednake, izraz (227) može se zapisati u obliku:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{E_x}{E_y}. \tag{228}$$

Na slici 8.2. prikazana je ovisnost omjera modula elastičnosti u uzdužnom smjeru (E_x) i modula elastičnosti okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru (E_y) o sadržaju vode u drvu. Na slici je vidljivo da se taj omjer povećava s porastom sadržaja vode u drvu. Pri sadržaju vode u = 10 % elastično je naprezanje u uzdužnom smjeru 14,2 puta veće od naprezanja okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru, dok je pri sadržaju vode u = 45 % taj omjer 21. Na slici 8.3. prikazan je dijagram ovisnosti razlike modula elastičnosti u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u drvu. Iz dijagrama se zaključuje da se razlika u elastičnim svojstvima uzoraka borovine u ispitivanim smjerovima smanjuje s povećanjem sadržaja vode u drvu, odnosno da elastična svojstva drva u uzdužnom smjeru „brže“ slabe uz porast sadržaja vode nego elastična svojstva okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.

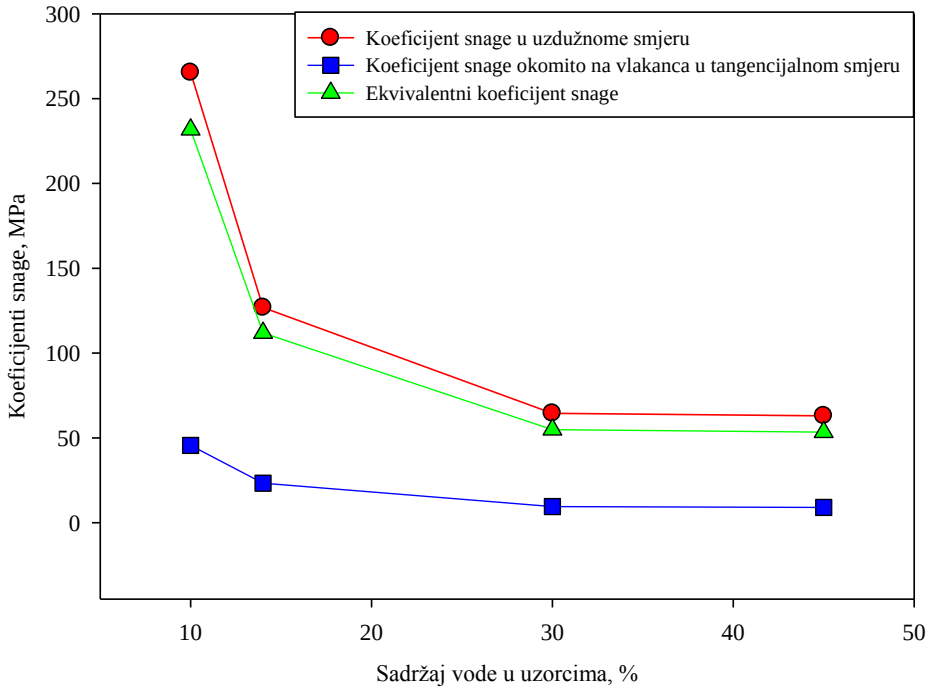


Slika 8.2. Dijagram ovisnosti omjera elastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima

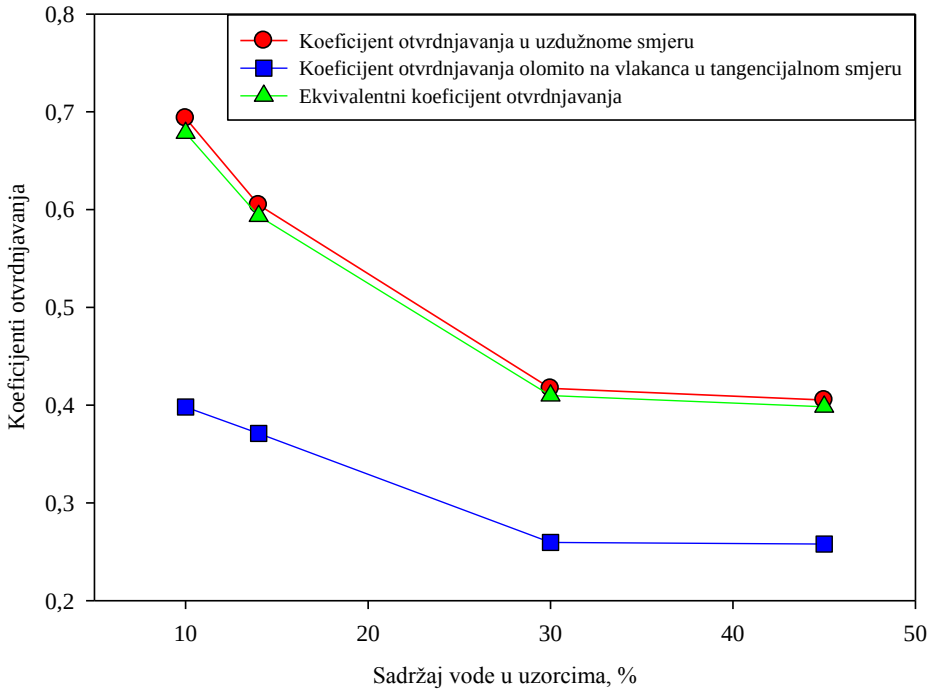


Slika 8.3. Dijagram ovisnosti razlike elastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima

Razmatranja slična onima za elastično područje provedena su i za plastično područje opisano izrazom (209). Na slici 8.4. prikazana je ovisnost koeficijenta snage u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru te ovisnost ekvivalentnog koeficijenta snage o sadržaju vode u uzorcima. Koeficijent snage također se smanjuje s porastom sadržaja vode u drvu sve do točke zasićenja vlakanaca, a pri većim sadržajima vode postaje konstantan (Clouston, 2002.). Usporedbom dijagrama sa slike 8.1. i dijagrama sa slike 8.4. vidljivo je da je iznos srednje vrijednosti modula elastičnosti znatno veći od iznosa srednje vrijednosti koeficijenta snage u oba ispitivana smjera. Osim koeficijenta snage, u plastičnom je području određen i koeficijent otvrdnjavanja prema (212). Dijagram ovisnosti koeficijenta otvrdnjavanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru te ovisnost ekvivalentnog koeficijenta otvrdnjavanja o sadržaju vode u uzorcima prikazani su slikom 8.5. S porastom sadržaja vode u drvu iznos srednje vrijednosti navedenih koeficijenata otvrdnjavanja u oba se ispitivana smjera smanjuje. Pri sadržaju vode u drvu većim od točke zasićenja vlakanaca koeficijenti otvrdnjavanja postaju približno konstantni (Clouston, 2002.).



Slika 8.4. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta snage u uzdužnom i tangencijalnom smjeru, te ekvivalentnog koeficijenta snage o sadržaju vode u uzorcima



Slika 8.5. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta otvrdnjavanja u longitudinalnom i tangencijalnom smjeru te ovisnost ekvivalentnog koeficijenta otvrdnjavanja o sadržaju vode u uzorcima

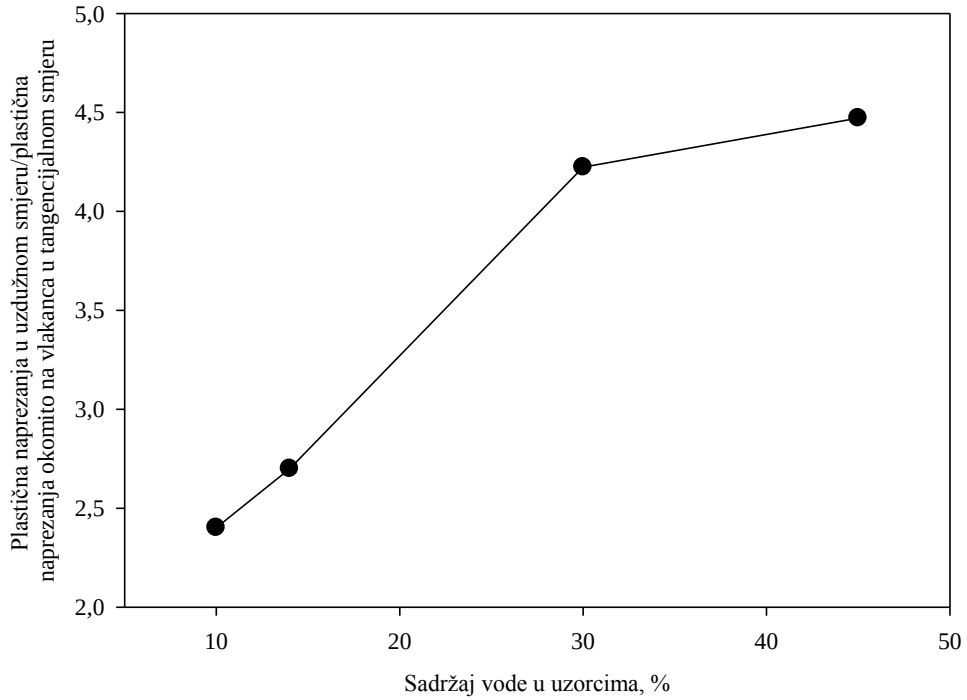
Postave li se jednadžbe (123) i (125) u omjer, slijedi:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{K_x \cdot \varepsilon_x^{n_x}}{K_y \cdot \varepsilon_y^{n_y}}. \tag{229}$$

Iz izraza (229) može se odrediti odnos naprezanja potrebnih za postizanje jednake plastične deformacije u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru. Ako su deformacije jednake, izraz (229) može se zapisati u obliku:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{K_x}{K_y} \cdot \varepsilon^{n_x - n_y}. \tag{230}$$

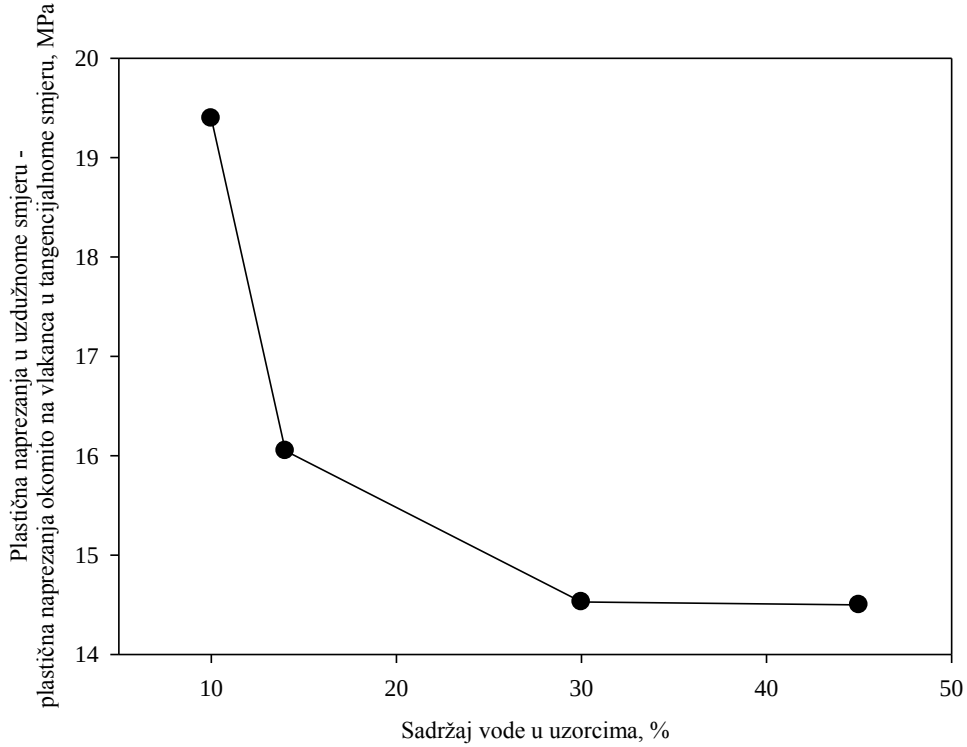
Na slici 8.6. prikazana je ovisnost omjera naprezanja potrebnih za postizanje jednake deformacije u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru. Pri sadržaju vode u = 10 % taj je omjer nešto veći od 2,5, dok pri sadržaju vode u drvu u = 45 % on iznosi oko 4,5. Omjer plastičnih naprezanja u promatranim smjerovima povećava se s porastom sadržaja vode u uzorcima, ali znatno manje nego pri elastičnim naprezanjima (sl. 8.2.).



Slika 8.6. Dijagram ovisnosti omjera plastičnog naprezanja potrebnih za postizanje jednake plastične deformacije u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima

Na slici 8.7. prikazan je dijagram ovisnosti razlike plastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i plastičnih naprezanja okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u drvu. Iz dijagrama se zaključuje da se razlika u plastičnim svojstvima uzoraka borovine u

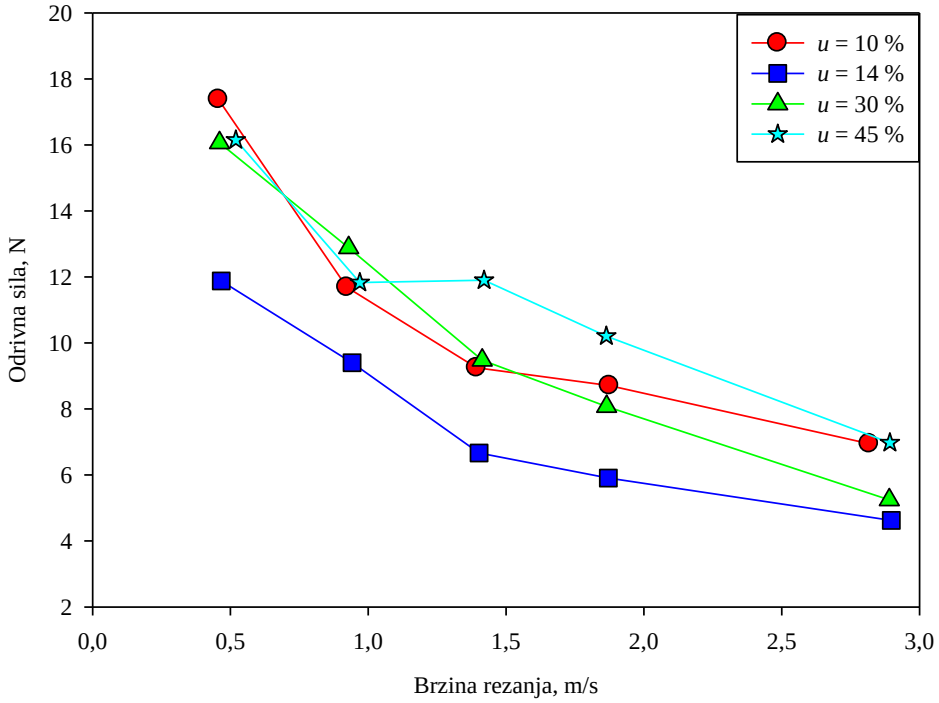
ispitivanim smjerovima smanjuje s povećanjem sadržaja vode u drvu, odnosno da plastična svojstva uzoraka borovine u uzdužnom smjeru „brže“ slabe s povećanjem sadržaja vode.



Slika 8.7. Dijagram ovisnosti razlike plastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima

8.2. Rezultati mjerenja sile rezanja i snage rezanja

Dinamometrom su izmjerene sile u smjeru paralelnome ($\mathbf{F}_x$) i okomitome ($\mathbf{F}_y$) na smjer gibanja obratka u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u uzorcima. Rezultati mjerenja odrivne sile prikazani su dijagramom na slici 8.8. Iz dijagrama se može zaključiti da se s porastom brzine rezanja srednja vrijednost odrivne sile smanjuje.



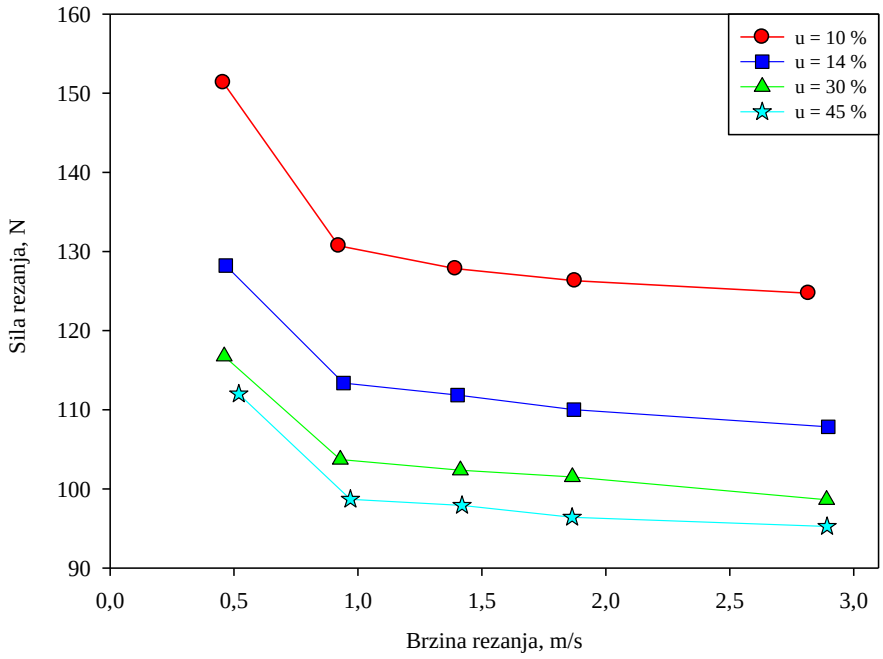
Slika 8.8. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti odrivne sile o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

Iznos odrivne sile u danim uvjetima mjerenja dovoljno je malen da znatno ne utječe na iznos sile rezanja (tab. 8.1.). Iz navedenoga se može zaključiti da se odrivna sila može zanemariti, a izmjerena sila u smjeru paralelnom sa smjerom gibanja obratka jednaka je sili rezanja.

Tablica 8.1. Izmjerene vrijednosti sile u smjeru paralelnome (F_x) i okomitome (F_y) na smjer gibanja obratka te izračunane vrijednosti sile rezanja (F_r) u ovisnosti o brzini rezanja pri sadržaju vode u = 10 %

v, m/s	F_x, N	F_y, N	F_r
0,5	151,35	17,37	152,35
1	130,72	11,68	131,24
1,5	127,83	9,25	128,16
2	126,31	8,70	126,61
3	124,73	6,94	124,92

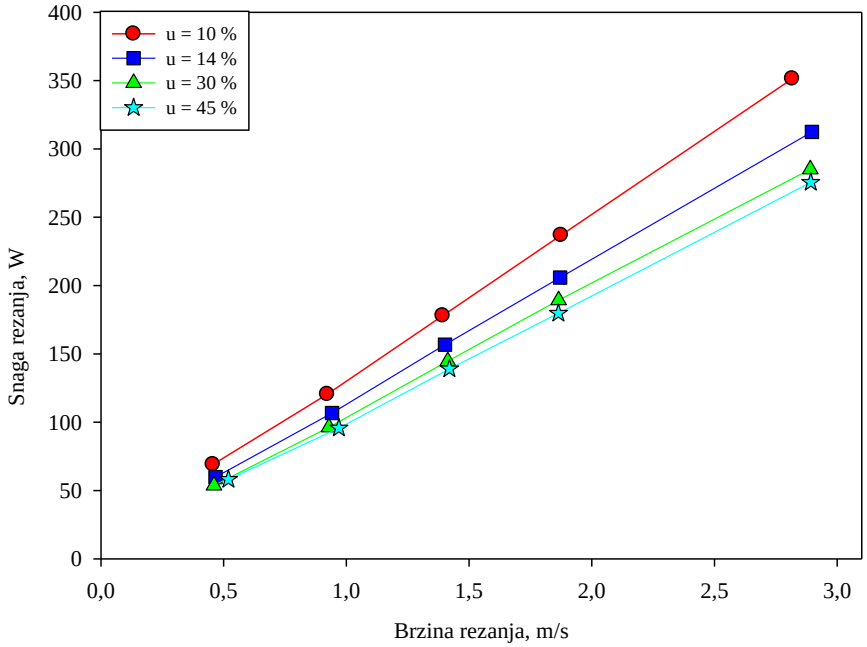
Rezultati mjerenja sile rezanja prikazani su dijagramom na slici 8.9. Iz dijagrama se može zaključiti da se s porastom sadržaja vode u drvu srednja vrijednost sile rezanja smanjuje, što je i u skladu s dosadašnjim istraživanjima (Goglia, 1994.). S povećanjem brzine rezanja sila rezanja se smanjuje (McKenzie, 1960.). Promjena iznosa srednje vrijednosti sile rezanja najveća je pri promjeni brzine rezanja od 0,5 na 1 m/s, za sve vrijednosti sadržaja vode u drvu. U intervalu brzina rezanja od 1 do 3 m/s promjena sile rezanja najmanja je, i to za sve vrijednosti sadržaja vode u drvu.



Slika 8.9. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile rezanja o brzini rezanja, uz sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

Snaga rezanja određena je umnoškom sile rezanja i brzine rezanja (pogl. 7.3.2.). Na slici 8.10. prikazan je dijagram ovisnosti srednje vrijednosti iznosa snage rezanja o brzini

rezanja za različite sadržaje vode u drvu. S porastom brzine rezanja iznos srednje vrijednosti snage rezanja linearno raste. Najveće povećanje srednje vrijednosti snage rezanja zbog porasta brzine rezanja zabilježeno je za sadržaj vode u = 10 %, a s povećanjem sadržaja vode u drvu snaga rezanja se smanjuje.

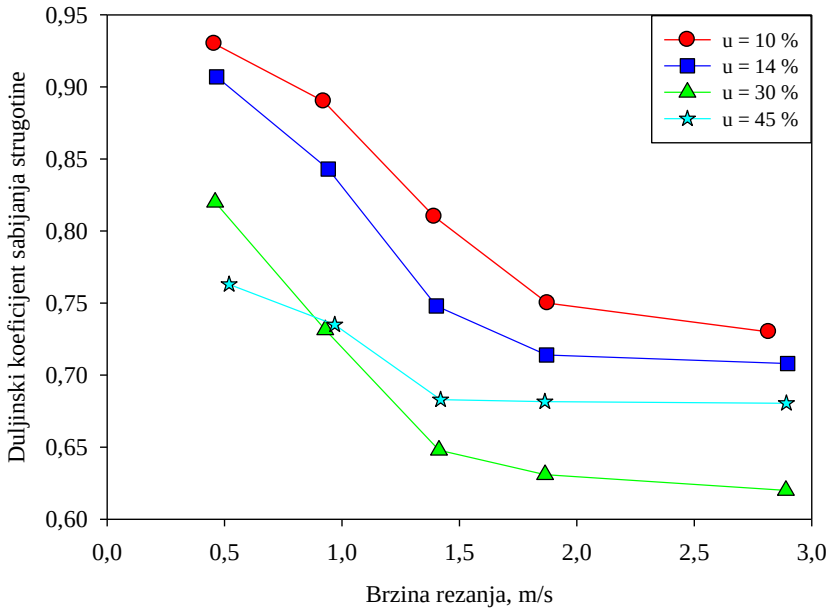


Slika 8.10. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

8.3. Rezultati mjerenja duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine

Koeficijenti sabijanja strugotine određeni su sa snimke kamere prema postupku opisanome u poglavlju 7.3.3. Na slici 8.11. prikazan je dijagram ovisnosti srednje vrijednosti duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u = (10, 14, 30 i 45) %. Iz dijagrama ovisnosti vidljivo je smanjivanje srednje vrijednost iznosa duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine s povećanjem brzine rezanja za sve ispitivane vrijednosti sadržaja vode u drvu. Pad srednje vrijednosti veći je u intervalu brzina rezanja od 0,5 do 1,5 m/s, dok je u intervalu brzina od 1,5 do 3 m/s pad vrijednosti znatno manji. S porastom sadržaja vode u drvu do 30 %, iznos srednje vrijednosti duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine smanjuje se za sve odabrane brzine rezanja. S porastom sadržaja vode u drvu od 30 do 45 %, pri brzinama rezanja od 1 do 3 m/s, duljinski se koeficijent sabijanja strugotine

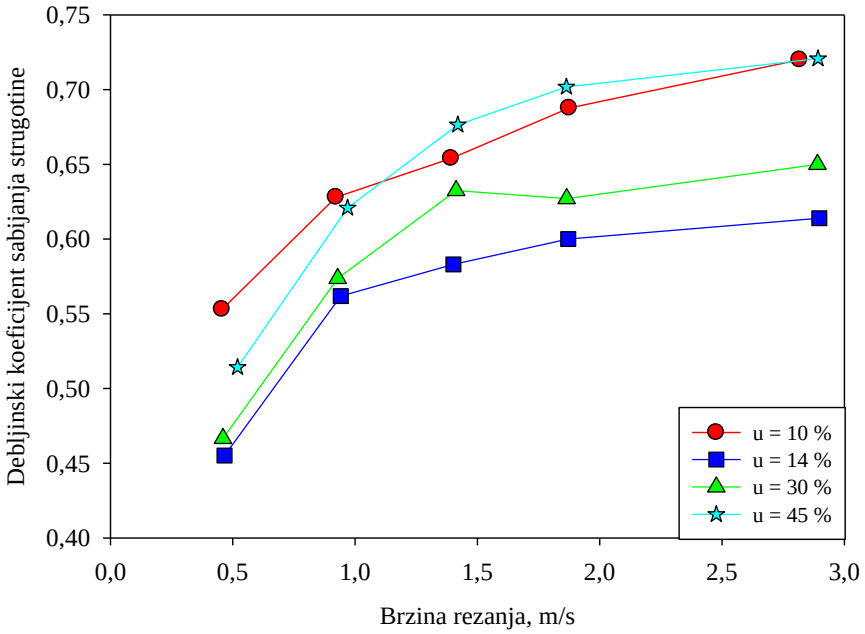
povećava. Razlog tog povećanja može biti elastični povrat materijala, koji je proporcionalan je elastičnoj deformaciji. Prema dijagramu na slici 8.1., vidljivo je da se s porastom sadržaja vode u drvu smanjuje modul elastičnosti, odnosno povećava elastična deformacija, a samim time i elastični povrat materijala.



Slika 8.11. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

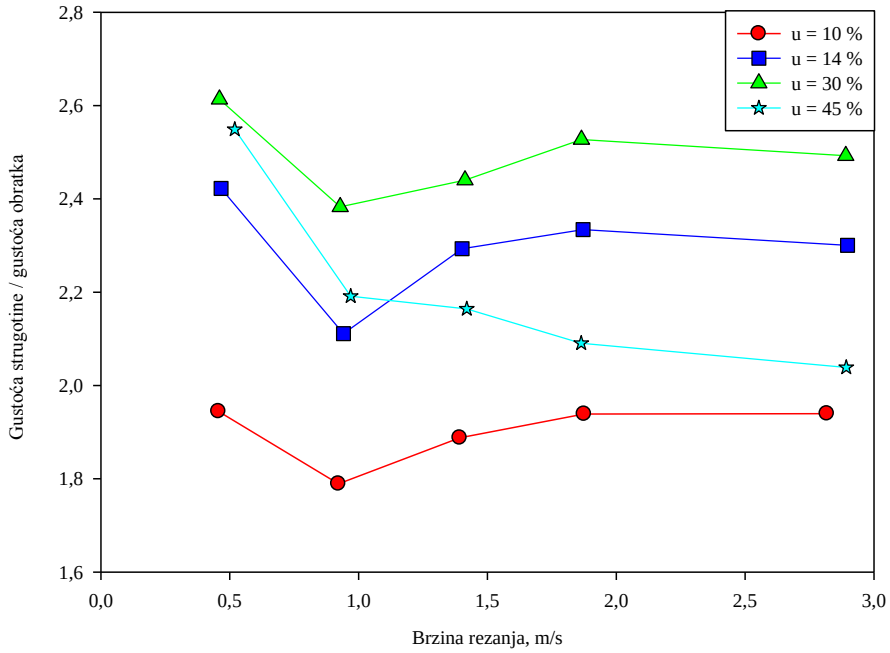
Na slici 8.12. prikazan je dijagram ovisnosti srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u = (10, 14, 30 i 45) %. S porastom brzine rezanja povećava se iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine. Ta je promjena najveća pri promjeni brzine rezanja od 0,5 do 1 m/s, za sve ispitivane sadržaje vode u drvu. U intervalu brzina rezanja od 1,5 do 3 m/s promjena iznosa srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine znatno je manja. Astakhov (2008.) navodi da pri obradi metala debljinski koeficijent sabijanja raste s brzinom rezanja. Pri određenoj brzini rezanja on postiže svoj maksimum, a nakon toga se smanjuje, dok pri većim brzinama postaje konstantan. Iznos brzine rezanja pri kojoj debljinski koeficijent sabijanja ima najveći iznos, prema Astakhovu (2008.), ovisi o materijalu obratka i parametrima obrade. S porastom sadržaja vode u drvu od 10 do 14 % iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine za ispitivane se brzine rezanja smanjuje, dok se pri porastu sadržaja vode u drvu od 30 do 45 % iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine za ispitivane brzine rezanja povećava. Razlog tog povećanja

može biti elastični povrat materijala, koji se prema slici 8.1. povećava s porastom sadržaja vode u drvu.



Slika 8.12. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

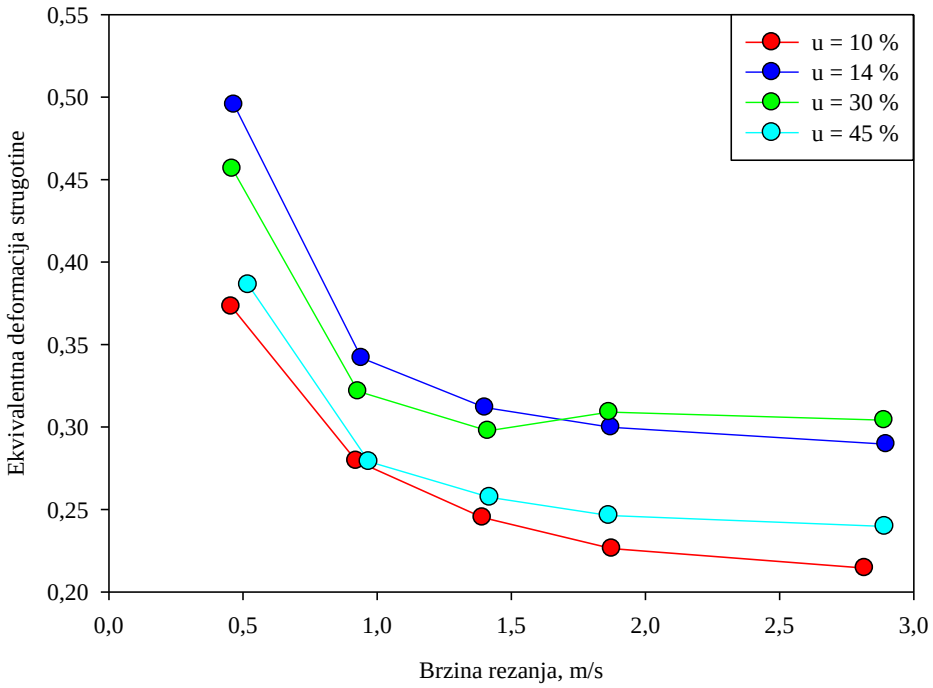
Prema izrazu (142) određen je omjer gustoće odrezane strugotine i gustoće neodrezane strugotine u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu (sl. 8.13.). Prema slici 8.13. može se zaključiti da je gustoća odrezane strugotine veća od gustoće neodrezane strugotine za sve ispitivane sadržaje vode u drvu. S promjenom brzine rezanja od 0,5 do 1 m/s razlika u gustoći odrezane i neodrezane strugotine smanjuje se za sve ispitivane sadržaje vode u drvu. S promjenom brzine rezanja od 1 do 2 m/s razlika u gustoći odrezane i neodrezane strugotine se povećava, dok pri brzinama rezanja većim od 2 m/s omjer gustoća ostaje približno konstantan za sadržaje vode u drvu u = (10, 14 i 30) %. Za uzorke sa sadržajem vode 45 % razlika u gustoći odrezane i neodrezane strugotine smanjuje se s povećanjem brzine rezanja.



Slika 8.13. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti omjera gustoće strugotine i gustoće obratka o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

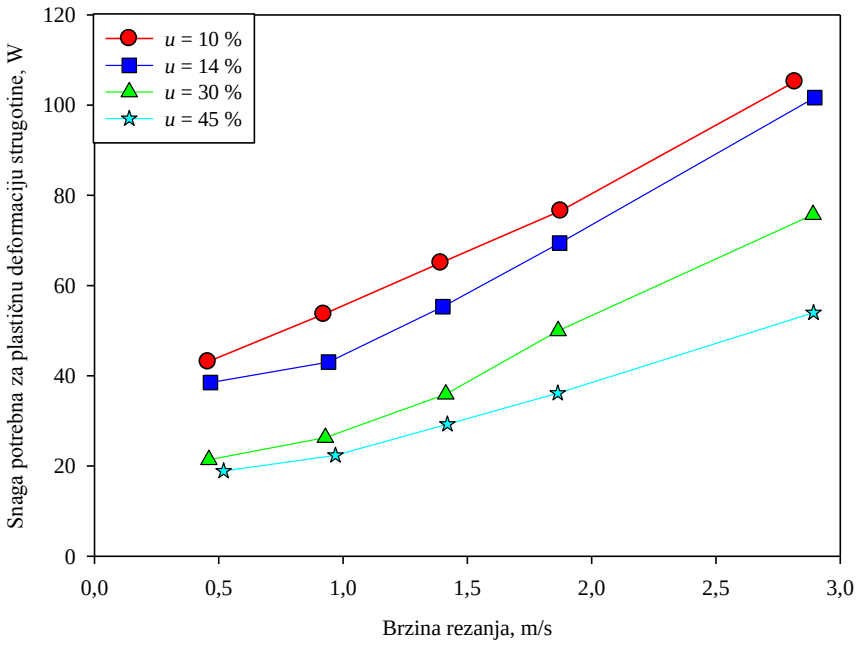
8.4. Rezultati određivanja snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine

Snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine određena je prema izrazu (151). Za potrebe izračuna navedene komponente snage najprije je određena ekvivalentna deformacija strugotine prema izrazu (160). Na slici 8.14. prikazan je dijagram ovisnosti iznosa srednje vrijednosti ekvivalentne deformacije o brzini rezanja za sadržaje vode u = (10, 14, 30 i 45) %. Iznos srednje vrijednosti ekvivalentne deformacije smanjuje se s porastom brzine rezanja za sve vrijednosti sadržaja vode u drvu. S porastom sadržaja vode u drvu od 10 do 14 % srednja se vrijednost ekvivalentne deformacije povećava. U uzoraka sa sadržajem vode 30 i 45 % ekvivalentna se deformacija smanjuje, a razlog je veći elastični povrat materijala.



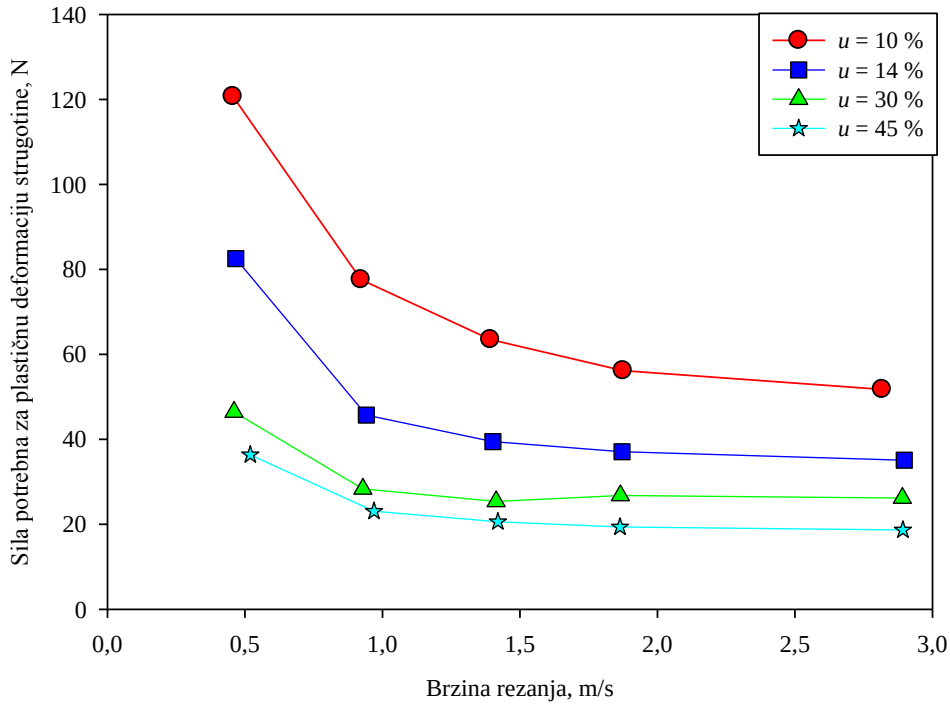
Slika 8.14. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti ekvivalentne deformacije strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

Uvrštenjem ekvivalentnih vrijednosti koeficijenta snage, koeficijenta otvrdnjavanja i deformacije u izraz (151) dobiva se snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine. Na slici 8.15. prikazan je dijagram ovisnosti snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode *u* = (10, 14, 30 i 45) %. Iz slike 8.15. zaključuje se da iznos srednje vrijednosti snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine raste s brzinom rezanja za sve ispitivane vrijednosti sadržaja vode u drvu. S povećanjem sadržaja vode u drvu navedena se komponenta snage rezanja smanjuje pri svim primijenjenim brzinama rezanja.



Slika 8.15. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

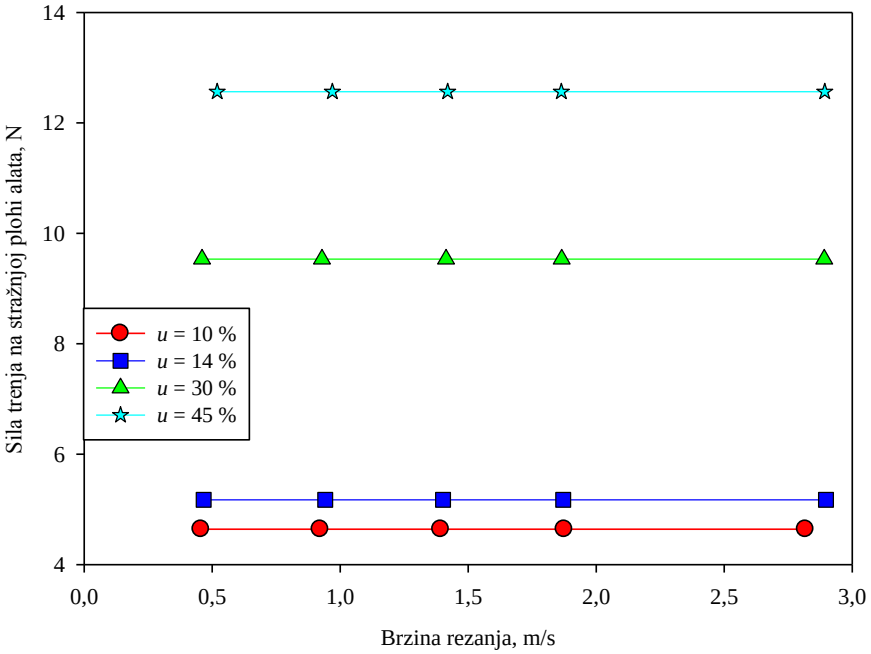
Omjerom snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine i brzine rezanja određena je sila potrebna za plastičnu deformaciju strugotine, čija je ovisnost o brzini rezanja za različite sadržaje vode u drvu prikazana slikom 8.16. Sila potrebna za plastičnu deformaciju strugotine smanjuje se s brzinom rezanja i sa sadržajem vode u uzorcima. S obzirom na ispitana mehanička svojstva uzoraka borovine, navedeni je rezultat logičan. Uz povećanje sadržaja vode mehanička se svojstva borovine smanjuju te je potrebna manja sila kako bi se ona plastično deformirala. Pri brzinama rezanja većim od 1,5 m/s, za uzorke sa sadržajem vode u = (14, 30 i 45) % sila potrebna za plastičnu deformaciju strugotine nije se mijenjala s promjenom brzine.



Slika 8.16. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

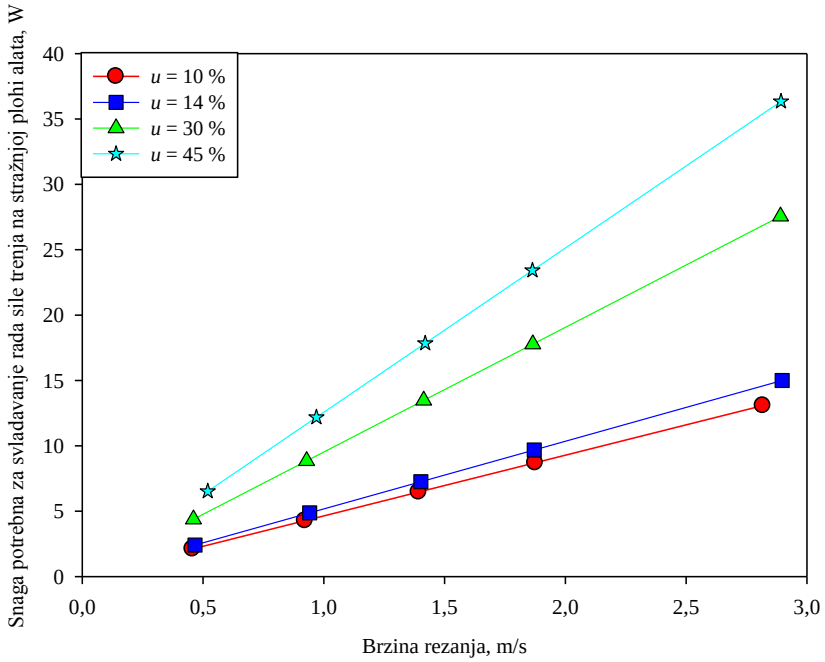
8.5. Rezultati određivanja snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata

Sila trenja na dodirnoj površini stražnje plohe alata i strugotine određena je postupkom opisanim u poglavlju 7.3.4. Sila je mjerena u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Na slici 8.17. prikazan je dijagram ovisnosti sile trenja na stražnjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %. Iz dijagrama ovisnosti vidljivo je da sila trenja na stražnjoj plohi alata ne ovisi o brzini rezanja, dok se sa sadržajem vode u drvu povećava, čemu uzrok može biti veća čupavost obrađene plohe zbog prethodnog prolaska noža.



Slika 8.17. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile trenja na stražnjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata određena je prema izrazu (201), a njezina ovisnost o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu prikazana je slikom 8.18.

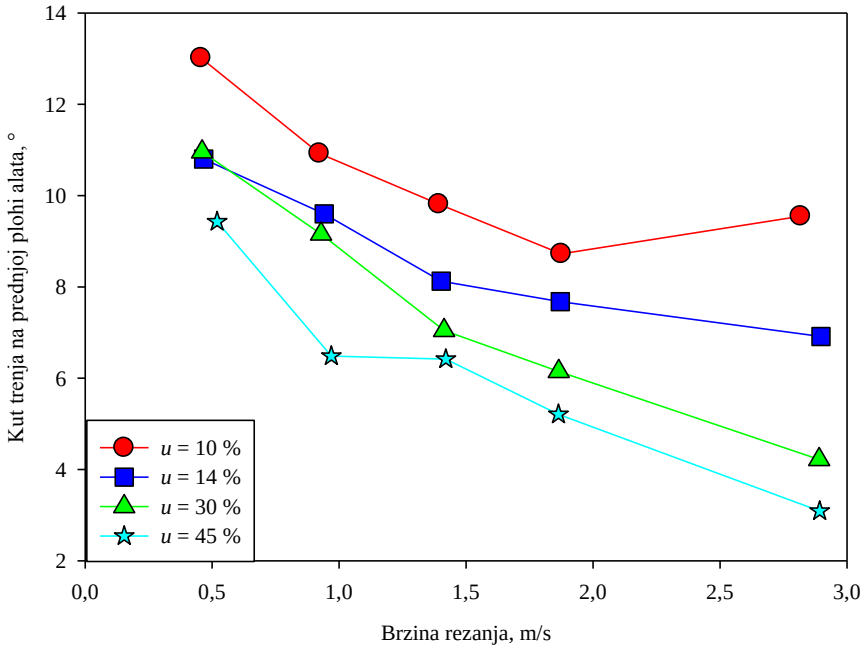


Slika 8.18. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

S povećanjem brzine rezanja povećava se i snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata. Povećanje snage s porastom brzine rezanja veće je za uzorke s većim sadržajem vode (sl. 8.19.) zbog većega elastičnog povrata materijala i veće čupavosti.

8.6. Rezultati određivanja snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata

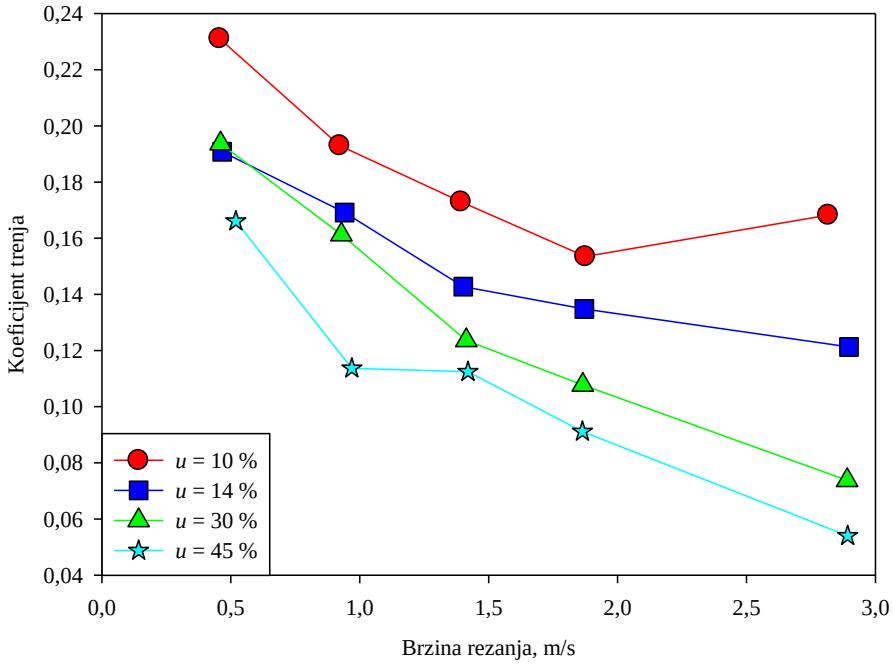
Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata određena je postupkom opisanim u poglavlju 7.3.5. Radi određivanja sile trenja na prednjoj plohi alata, najprije je prema izrazu (223) određen kut trenja (ρ_{trp}) u ovisnosti o brzini i sadržaju vode u drvu (sl. 8.17.). Iz dijagrama ovisnosti sa slike 8.16. vidljivo je da se sa smanjenjem brzine rezanja i sadržaja vode u drvu smanjuje srednja vrijednost kuta trenja na prednjoj plohi alata.



Slika 8.19. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti kuta trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

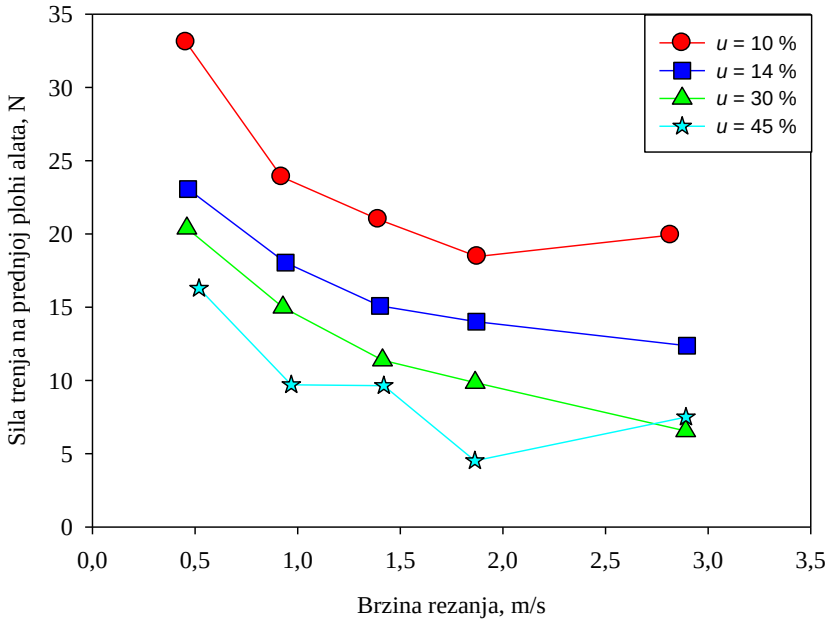
Koeficijent trenja određen je prema izrazu (224), a njegova ovisnost o brzini i sadržaju vode u drvu prikazana je dijagramom na slici 8.20. Koeficijent trenja na prednjoj plohi alata određen

je kao tangens kuta trenja (ρ_{trp}). Budući da se vrijednosti kuta trenja nalaze u prvom kvadrantu trigonometrijske kružnice, u kojemu vrijedi pravilo da povećanje kuta znači i povećanje tangensa tog kuta, ovisnost koeficijenta trenja o brzini i sadržaju vode u uzorcima istovjetno je ovisnosti kuta trenja u tim uvjetima. Sa slika 8.19. i 8.20. može se zaključiti da se kut i koeficijent trenja smanjuju s povećanjem brzine rezanja i s povećanjem sadržaja vode u drvu.



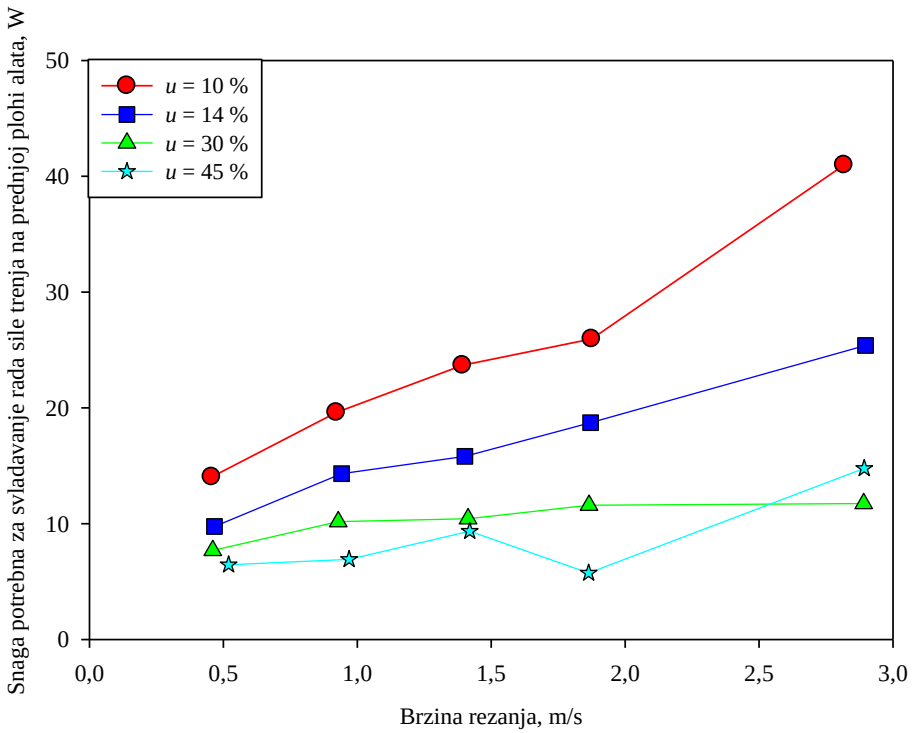
Slika 8.20. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta trenja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

Sila trenja na prednjoj plohi alata određena je izrazom (222), a njezina ovisnost o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu predočena je na slici 8.21. S povećanjem brzine rezanja i uz veći sadržaj vode u drvu, srednja vrijednost iznosa sile trenja na prednjoj plohi alata ima tendenciju smanjivanja (sl. 8. 21.).

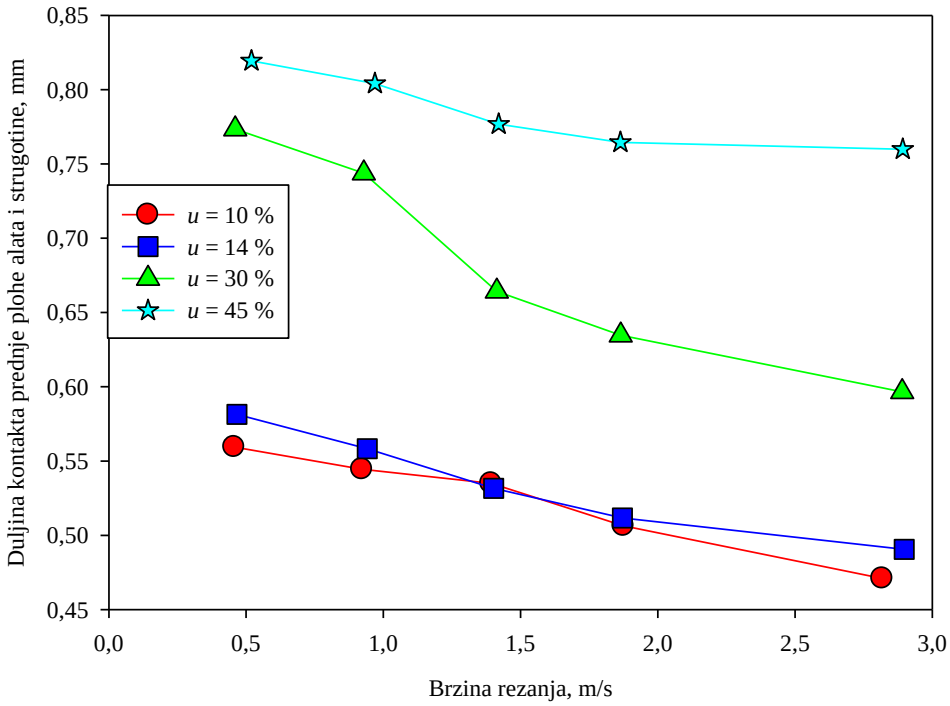


Slika 8.21. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata određena je prema izrazu (226), a njezina ovisnost o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu dana je na slici 8.22. Iz dijagrama je vidljivo povećanje srednje vrijednosti navedene komponente snage s povećanjem brzine rezanja. To je povećanje veće za uzorke s manjim sadržajem vode.



Slika 8.22. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %



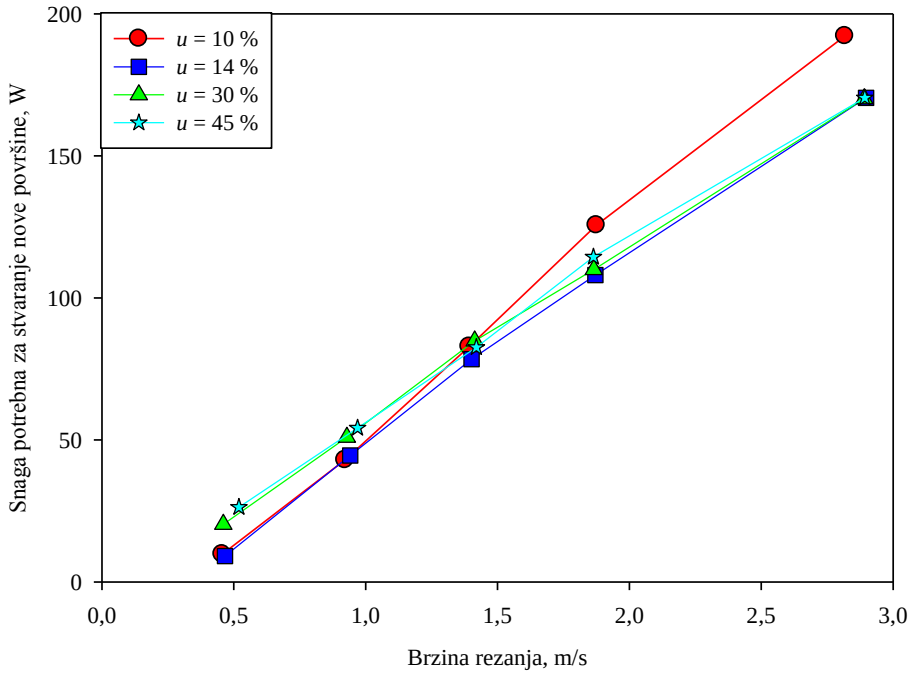
Slika 8.23. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti duljine kontakta prednje plohe alata i strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10, 14, 30 i 45) %

8.7. Rezultati određivanja snage potrebne za stvaranje nove površine

Snaga potrebna za stvaranje nove površine određena je oduzimanjem pojedinih komponenti snage od ukupne snage rezanja:

$$P_{\mathrm{np}} = P_{\mathrm{u}} - P_{\mathrm{pd}} - P_{\mathrm{trp}} - P_{\mathrm{trs}}\,, \tag{231}$$

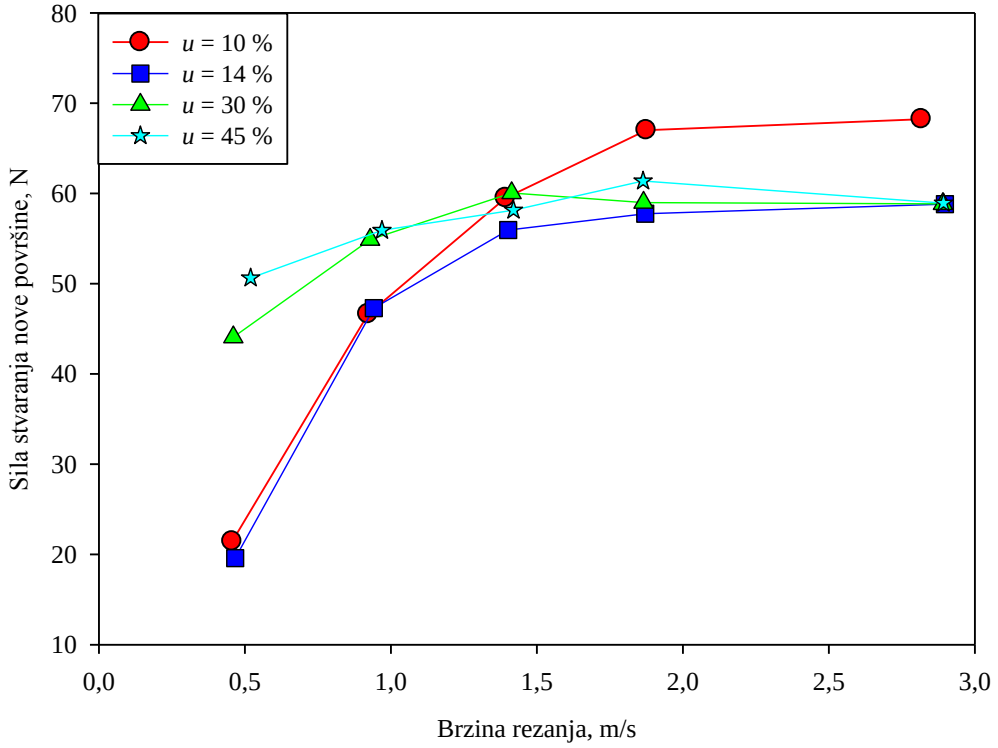
u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Na slici 8.24. prikazan je dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za uzorke sa sadržajem vode (10, 14, 30 i 45) % iz kojega je vidljivo da navedena komponenta snage raste s povećanjem brzine rezanja. Porast snage za stvaranje nove površine s povećanjem brzine rezanja veći je za uzorke s manjim sadržajem vode.



Slika 8.24. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

Dijeljenjem srednje vrijednosti iznosa navedene komponente snage brzinom rezanja određena je sila stvaranja nove površine, čija je ovisnost o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu prikazana dijagramom na slici 8.25. Iz dijagrama je vidljivo povećanje iznosa srednje vrijednosti sile stvaranja nove površine s povećanjem brzine rezanja, što je u skladu s

istraživanjima rezanja duktilnih materijala (Atkins, 2004.). Pri manjim brzinama navedena je komponenta sile znatno veća (od 20 do 25) N za uzorke s većim sadržajem vode, dok se s povećanjem brzine rezanja ta razlika smanjuje. Reiterer i Tschegg (2002.) objavili su svoje opažanje da s porastom sadržaja vode u drvu (smrekovini) raste i energija za stvaranje nove površine. Pri brzini od 1,5 m/s razlika među silama stvaranja nove površine za uzorke s različitim sadržajem vode postaje najmanja.

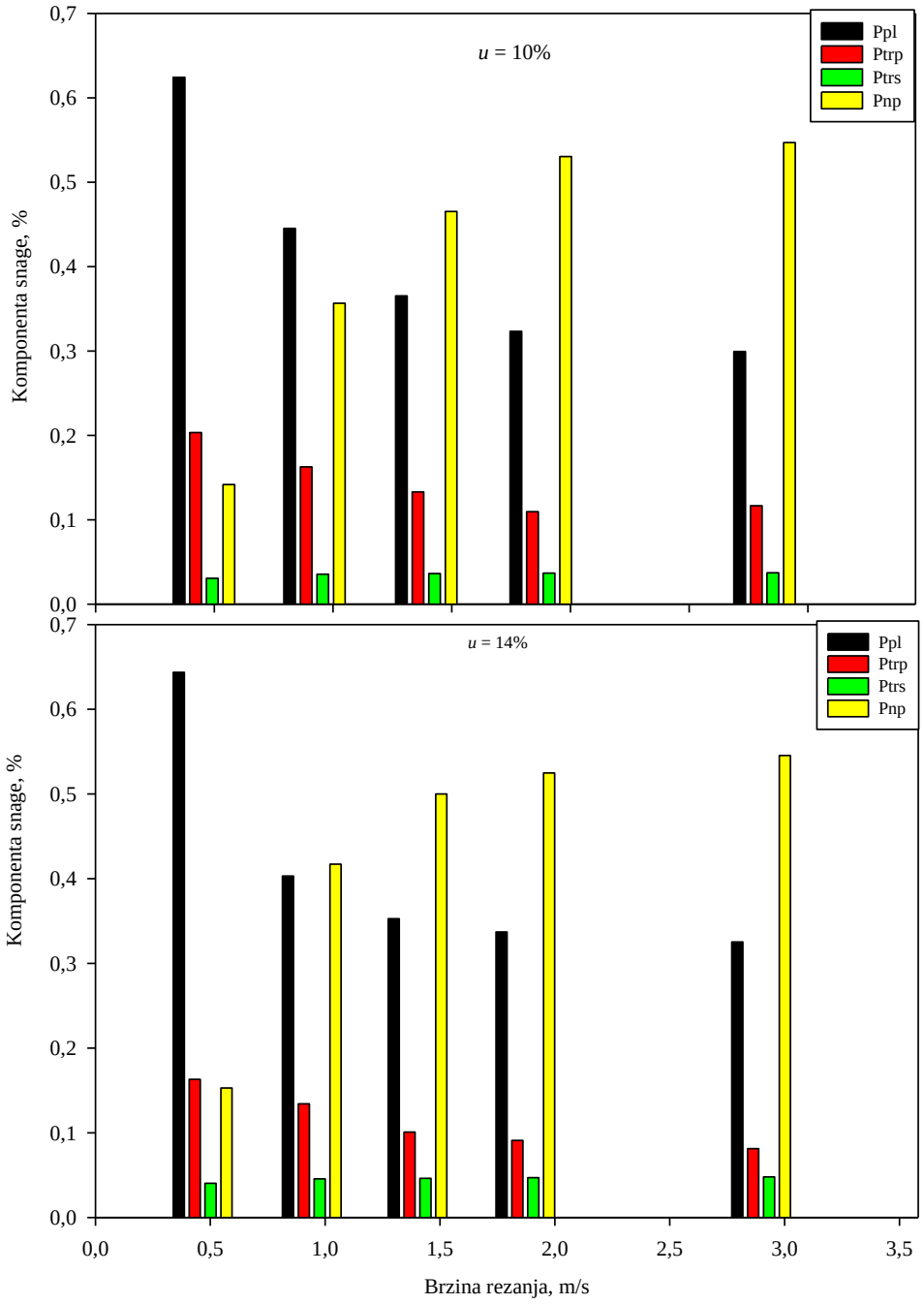


Slika 8.25. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %

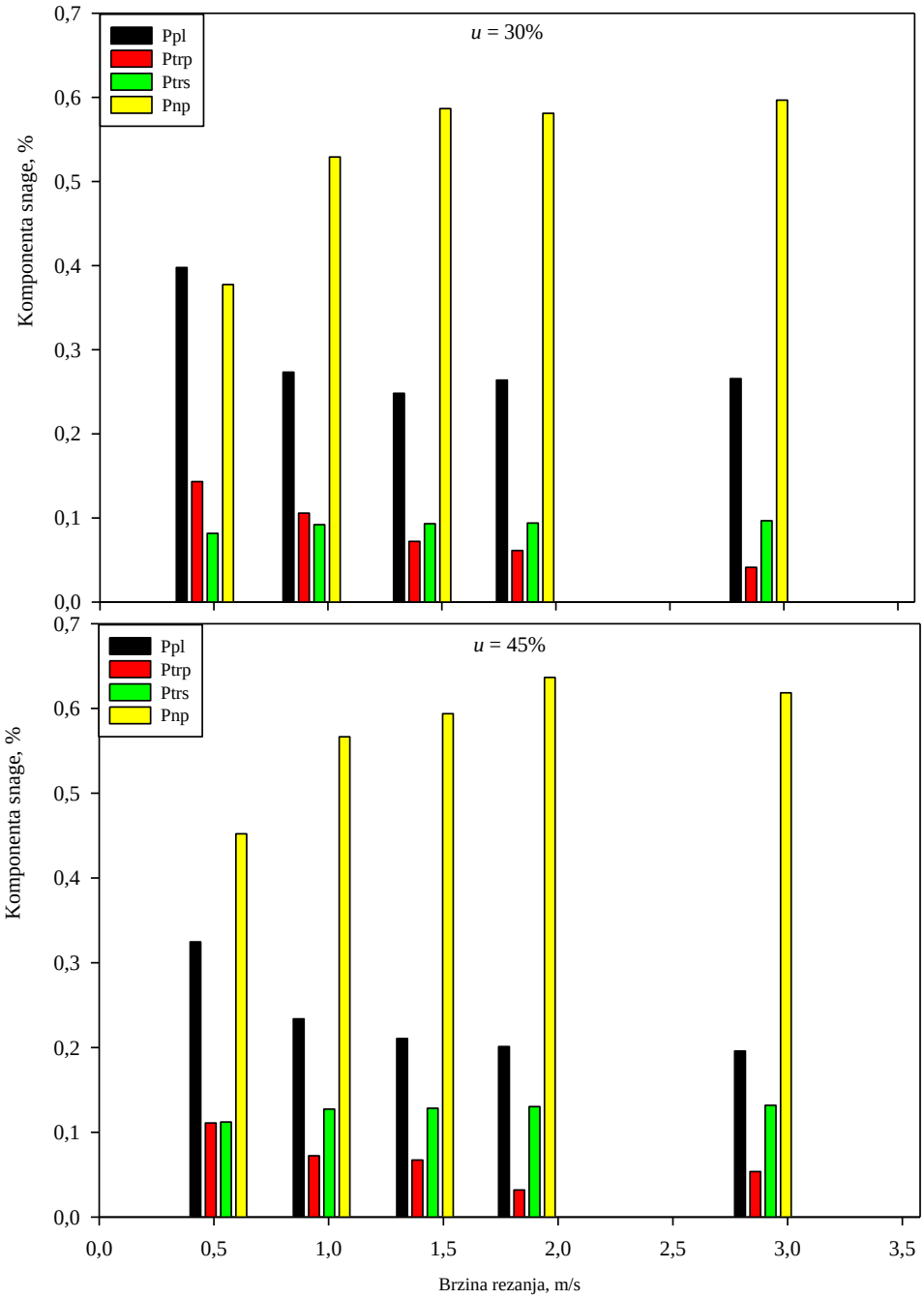
8.8. Usporedba udjela pojedinih komponenata snage u ukupnoj snazi rezanja

Ovaj odjeljak sadržava analizu odnosa udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Na slikama 8.26. i 8.27. prikazani su dijagrami ovisnosti udjela pojedine komponente snage o brzini rezanja za sadržaje vode u drvu (10, 14, 30 i 45) %. Najveći udio u ukupnoj snazi rezanja čine udjeli plastične komponente snage i snage potrebne za stvaranje nove površine zajedno, neovisno o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu. Udio plastične komponente snage smanjuje se s porastom brzine rezanja, što je u skladu s istraživanjima Astakhova (2008.). S porastom sadržaja vode u drvu ta se komponenta snage smanjuje. Radovi o ponašanju udjela plastične komponente snage u ovisnosti o sadržaju vode u drvu u traženim bazama nisu pronađeni. S obzirom na rezultate ispitivanja mehaničkih svojstava borovine, može se reći da se s porastom sadržaja vode smanjuju plastična svojstva uzoraka borovine, a samim time i snaga potrebna za njihovu plastičnu deformaciju. Udio komponente snage potrebne za stvaranje nove površine raste s povećanjem brzine rezanja, što je u skladu s istraživanjima Atkinsa (2004.). Udio navedene komponente raste i s povećanjem sadržaja vode u drvu, što se podudara s istraživanjima Reiterera i Tschegga (2002.).

Manji udio u ukupnoj snazi rezanja zajedno čine udjeli komponente snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj i one na stražnjoj plohi alata. Udio komponente snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata smanjuje se s porastom brzine rezanja i sadržaja vode u drvu. Udio te komponente na stražnjoj plohi alata praktički je neovisan o brzini rezanja, a s povećanjem sadržaja vode u drvu zbog nastanka čupavosti raste.



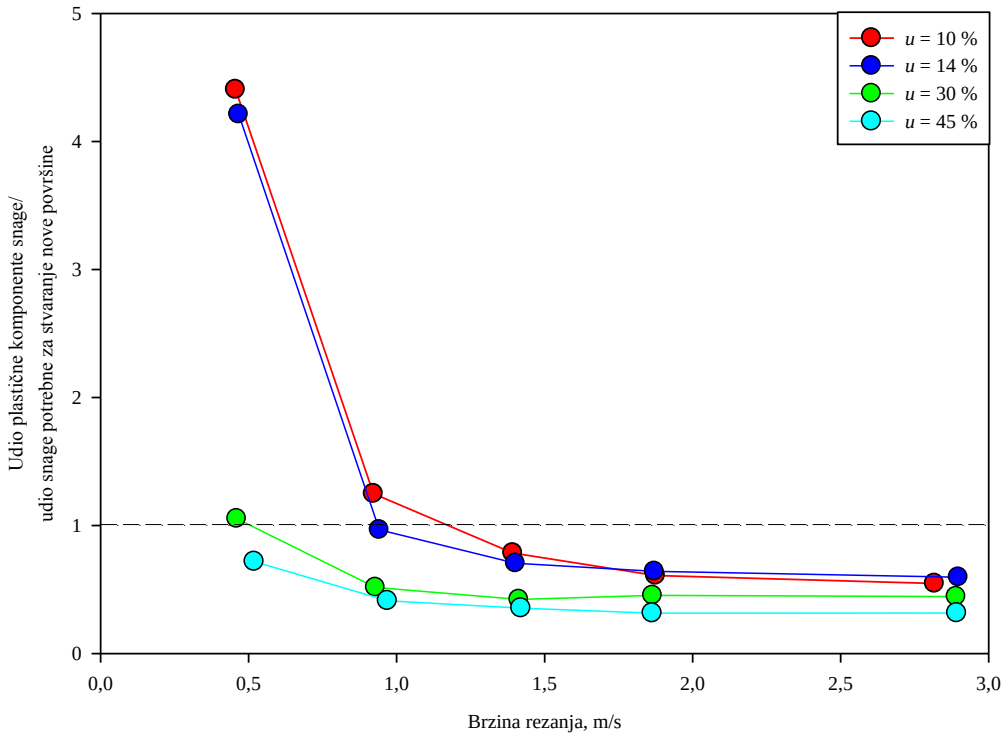
Slika 8.26. Dijagram ovisnosti udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima *u* = (10 i 14) %.



Slika 8.27. Dijagram ovisnosti udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (30 i 45) %.

Iz slika 8.26. i 8.27. vidljivo je da pri određenoj brzini udio plastične komponente snage postaje manji od udjela snage potrebne za stvaranje nove površine. Na slici 8.28. prikazan je dijagram ovisnosti omjera udjela plastične komponente snage i udjela snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za različite sadržaje vode u drvu. Iz

dijagrama je vidljivo da brzina pri kojoj udio plastične komponente postaje manji od udjela komponente snage potrebne za stvaranje nove površine ovisi o sadržaju vode u drvu. Pri sadržaju vode 10 % ta se brzina nalazi u intervalu od 1 do 1,5 m/s, dok je pri sadržaju vode u drvu 14 % ta brzina manja od 1,5 m/s. Na slici 8.28. predočena je ovisnost omjera udjela plastične komponente snage i snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za različite sadržaje vode u drvu. Pri sadržaju vode u drvu većemu od 30 %, udio plastične komponente snage manji je od udjela komponente snage potrebne za stvaranje nove površine za sve primijenjene brzine rezanja. Pri sadržaju vode u drvu u = 10, 14 %, te pri brzinama rezanja manjim od 1 m/s, udio plastične komponente snage veći je od udjela komponente snage potrebne za stvaranje nove površine (sl. 8. 28.).



Slika 8.28. Dijagram ovisnosti omjera udjela plastične komponente snage i snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.

9.ZAKLJUČCI

Prema ciljevima postavljenim u ovom istraživanju, dobivene su važne spoznaja o fizikalnoj pozadini procesa ortogonalnog rezanja drva. Ustanovljeno je da se ukupna snaga rezanja može predočiti kao zbroj snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine, snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj i stražnjoj plohi alata i snage potrebne za stvaranje nove površine. Navedene komponente snage povezane su putem koeficijenata sabijanja strugotine s određenim mehaničkim svojstvima drva. Teorijskim su istraživanjem određena mehanička svojstva drva povezana s pojedinim komponentama snage rezanja. Analiza rezultata teorijskog istraživanja može se sažeti u obliku tablice 9.1., u kojoj je dan prikaz parametara koji utječu na pojedine komponente snage rezanja.

Tablica 9.1. Analiza teorijskog istraživanja parametara koji utječu na pojedine komponente snage rezanja

	Parametri obrade	**Mehanička svojstva**	**Koeficijent sabijanja**
Snaga potrebna za plastičnu deformaciju strugotine	- brzina rezanja - širina rezanja (z_0) - dubina rezanja (y_0)	- koeficijent snage - koeficijent otvrdnjavanja	- duljinski - debljinski
Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata	- brzina strugotine - duljina kontakta prednje plohe alata i strugotine - širina odrezane strugotine	- tangencijalna naprezanja na kontaktnoj površini prednje plohe alata i strugotine	- debljinski
Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata	- duljina kontakta stražnje plohe alata i obratka - širina neodrezane strugotine	- tangencijalna naprezanja na kontaktnoj površini stražnje plohe alata i obratka	- debljinski
Snaga potrebna za stvaranje nove površine	- brzina strugotine - širina rezanja (z_0)	- kohezivna energija	- duljinski

S obzirom na teorijski model, pokazalo se da je potrebno odrediti čvrstoću na tlak u smjeru paralelnom i okomitom na smjer gibanja oštrice alata. Za odabrani smjer rezanja (uzdužni) određena je čvrstoća na tlak u smjeru vlakanaca i okomito na njih u tangencijalnom

smjeru te su iz dijagrama ovisnosti naprezanja o deformaciji određeni koeficijenti snage i otvrdnjavanja.

Analiza rezultata eksperimentalnog određivanja modula elastičnosti, koeficijenta snage i otvrdnjavanja uzoraka borovine može se sažeti u nekoliko zaključaka.

1. Navedena mehanička svojstva borovine ispitana su na uzorcima manjih dimenzija od standardiziranih, a dobiveni rezultati, suprotno prvotno postavljenoj hipotezi, bitno se ne razlikuju od vrijednosti dobivenih ispitivanjem standardiziranih proba, a prema podatcima u dostupnoj literaturi.
2. Iznosi koeficijenata snage i otvrdnjavanja u oba smjera smanjuju se s porastom sadržaja vode u drvu do točke zasićenosti vlakanaca, nakon čega poprimaju približno konstantne vrijednosti.
3. Razlika među modulima elastičnosti, kao i odgovarajuća naprezanja, u promatranim smjerovima smanjuje se s porastom sadržaja vode u drvu, iz čega se može zaključiti da modul elastičnosti u smjeru vlakanaca pada brže od modula elastičnosti okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.
4. Razlika u naprezanjima u plastičnom području u promatranim se smjerovima smanjuje s porastom sadržaja vode u drvu, iz čega se može zaključiti da naprezanja u plastičnom području u smjeru vlakanaca padaju brže od naprezanja okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.
5. Iznosi ekvivalentnih modula elastičnosti te koeficijenata snage i otvrdnjavanja također se smanjuju s porastom sadržaja vode u drvu, a njihov iznos najviše ovisi o vrijednostima mehaničkih svojstava drva u smjeru vlakanaca.

Analiza rezultata izmjerenih koeficijenata sabijanja strugotine u ovisnosti o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu može se sažeti u nekoliko zaključaka.

1. Iznos duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine smanjuje se s povećanjem brzine rezanja za sve ispitivane vrijednosti sadržaja vode u drvu. Pad srednje vrijednosti izrazitiji je u intervalu brzina rezanja od 0,5 do 1,5 m/s, dok je u intervalu brzina od 1,5 do 3 m/s pad vrijednosti znatno manji. S porastom sadržaja vode u drvu do 30 %, iznos srednje vrijednosti duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine smanjuje se pri svim ispitivanim brzinama rezanja. S porastom sadržaja vode u drvu od 30 do 45 %, pri brzinama rezanja od 1 do 3 m/s, duljinski se koeficijent

sabijanja strugotine povećava. Razlog tog povećanja može biti elastični povrat materijala, koji je proporcionalan elastičnoj deformaciji.

2. S porastom brzine rezanja povećava se iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine. Ta je promjena najveća pri promjeni brzine rezanja od 0,5 ÷ 1 m/s, za sve ispitivane sadržaje vode u drvu. U intervalu brzina rezanja od 1,5 ÷ 3 m/s, promjena iznosa srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine znatno je manja. Pri porastu sadržaja vode u drvu od 10 ÷ 14 % iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine za ispitivane se brzine rezanja smanjuje, dok se pri porastu sadržaja vode u drvu od 30 ÷ 45 % iznos srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine za ispitivane brzine rezanja povećava. Razlog tog povećanja može biti elastični povrat materijala, koji prema rezultatima ispitivanja mehaničkih svojstava, pri većem sadržaju vode u drvu raste.

Analizom rezultata određivanja snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine pokazalo se da iznos srednje vrijednosti snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine raste s brzinom rezanja. Uz povećanje sadržaja vode u drvu navedena se komponenta snage rezanja pri svim primijenjenim brzinama rezanja smanjuje, što je u skladu s promjenom promatranih mehaničkih svojstava drva.

Snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata raste s povećanjem brzine rezanja. To je povećanje znatnije u uzoraka s manjim sadržajem vode.

S povećanjem brzine rezanja povećava se i snaga potrebna za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata. Povećanje snage s porastom brzine rezanja izrazitije je za uzorke s većim sadržajem vode zbog većega elastičnog povrata materijala i povećane čupavosti.

S povećanjem brzine rezanja povećava se i snaga potrebna za stvaranje nove površine, a taj je porast praktički neovisan o promjeni sadržaja vode u drvu. Energija stvaranja nove površine raste s povećanjem brzine rezanja. Pri manjim brzinama navedena je energija znatno veća za uzorke s većim sadržajem vode, dok se s povećanjem brzine rezanja ta razlika smanjuje.

Analiza udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja može se sažeti u nekoliko zaključaka.

1. Najveći udio u ukupnoj snazi rezanja zajedno čine udjeli plastične komponente snage i snage potrebne za stvaranje nove površine, neovisno o brzini rezanja i sadržaju vode u drvu.
2. Udio plastične komponente snage smanjuje s porastom brzine rezanja i sadržaja vode u drvu.
3. Udio komponente snage potrebne za stvaranje nove površine raste s povećanjem brzine rezanja i pri većem sadržaju vode u drvu.
4. Manji udio u ukupnoj snazi rezanja zajedno čine udjeli komponente snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj i stražnjoj plohi alata. Udio komponente snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata smanjuje se s porastom brzine rezanja i s povećanjem sadržaja vode u drvu. Udio komponente snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata praktički je neovisan o brzini rezanja, a s povećanjem sadržaja vode u drvu raste.

LITERATURA

1. Adalian, C.; Morlier, P., 2002: Wood Model for the dynamic behaviour of wood in multiaxial compression. Holz als Roh- und Werkstoff 60(6): 433-439.
2. Alfirević, I., 2003: Mehanika kontinuuma. Golden marketing, Zagreb.
3. Altenbach, H.; Altenbach, J.; Kissing, W., 2004: Mechanics of Composite Structural Elements. Springer-Verlag, Berlin.
4. Altintas, Y., 2000: Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations and CNC design. New York, Cambridge University Press: 286 str.
5. Arrazola, P.J.; Ozel, T.; Umbrello, D.; Davies, M.; Jawahir, I. S., 2013: Recent advances in modelling of metal machining processes. CIRP Annals – Manufacturing Technology 62 (2013): 695-718.
6. Astakhov, V. P.; Xiao, X., 2008: A methodology for practical cutting force evaluation based on the energy spent int he cutting system. Machining Science and Technology, 12:325–347, DOI: 10.1080/10910340802306017
7. Astakhov, V. P., 1998: Metal cutting mechanics. CRC Press, Boca Raton, US
8. Atkins, A. G., 2003: Modelling metal cutting using modern ductile fracture mechanics:quantitative explanations for some longstanding problems. International Journal of Mechanical Sciences 45 (2003): 373-396.
9. Atkins, A. G., 2004: Toughness and cutting: a new way of simultaneously determining ductile fracture toughness and strength, doi:10.1016/j.engfracmech.2004.07.014
10. Basar, Y.; Weichert, D., 2000: Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Fundamental mathematical and physical concepts Springer, 2000.
11. Božičević, J., 1980: Temelji automatike 2 – mjerni pretvornici i mjerenje. Školska knjiga, Zagreb.
12. Bodiq, F.; Jane, B. A., 1982: Mechanics of wood and wood composites.
13. Broutman, L. J.; Krock, H. R., 1975: Composites Materials, Structural Designand Analysis, Part I. Academic Press, New York.
14. David, M.; Moses, H.; Prion, G. L., 2002: Anisotropic plasticity and failure prediction in wood composites. University Of British Columbia, Vancouver, British Columbia, Canada.

15. Enelund, M., 1996: Fractional Calculus and Linear Viscoelasticity in Structural Dynamics, Division of Solid Mechanics. Chalmers Tekniska Hogskola, Goteborg, Sweden, 1996., p.1-27, A1-33+B1-20+C1-19+D1-28+E1-26.
16. Ernst, H.; Merchant, M. E., 1941: Chip formation, friction and high quality machined surfaces. Surface Treatment of Metals, ASM, 29: 299-378.
17. Fengel D.; Wegener G., 1989: Wood, University of Munich. Institiut for wood research, Division of wood chemistry and ultrastructure research, ISBN: 3-11-012059-3.
18. Forest Products Laboratory, 1999: Wood handbook – Wood as an engineering material. Gen. Tech. Rep. FPL-GTR-113. Madison, WI: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory. 463 p.
19. Franz, N. C.; 1958: An Analysis of the Wood-cutting Process. The University of Michigan Press, Ann Arbor.
20. Goglia, V., 1994: Strojevi i alati za obradu drva. Šumarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, ISBN 953-6307-00-6.
21. Gusel, L.; Rudolf, R.; Kosec, B., 2009: ANALYSIS OF A STRAIN RATE FIELD IN COLD FORMED MATERIAL USING THE VISIOPLASTICITY METHOD ISSN 0543-5846 METABK 48(2) 103-107 (2009) UDC-UD 669.018.254:620.172.22=111.
22. Koch, P., 1968: Wood Machining Processes. Ronald Press, New York.
23. Kopač, J., 1991: Odrezavanje. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo: 196 str.
24. Kazimierz, A.; Orlowski, T.; Atkins, T.; Chuchala, D., 2012: Application of fracture mechanics for energetic effects predictions while wood sawing. This article is published with open access at Springerlink.com
25. Kent, P., 1997: Modelling of Wood Properties by a Micromechanical Approach; Licentiate of technology thesis. Lund University: ISSN 0281‐6679
26. Kivimaa, E., 1952: Die Schnittkraft in der Holzbeareitung. Holz Roh Werk. 10: 94-108.
27. Kivimaa, E., 1952: Die Schnittkraft in der Holzbeareitung. Holz Roh Werk. 10: 94-108.
28. Lubkin, J. L., 1957: A Status report on Research in the Circular Sawing of Wood, Volume I. Cent. Res. Lab. Amer. Mach. & Foundry Co. Stamford Co.

29. Mackenzie, P.; Helnwein, J.; Eberhardsteiner, H.; Mang, A., 2003: A multi-surface plasticity model for clear wood and its application to the finite element analysis of structural details.
30. Mathew, P.; Oxley, P., 1982: Predicting the Effects of Very High Cutting Speeds on Cutting Forces. University of New Wales, Australia, Annals of the CIRP Vol. 31/1/1982.
31. McKenzie, W. M., 1961: Fundamental analysis of the wood-cutting process. PhD thesis, University of Michigan, MI, USA.
32. McKenzie, W. M., 1960: Wood cutting process. Forest Products Journal, 10, 9: 447-456
33. Merhar, M., 2010: Vpliv frakturnih in mikromehanskihlastnosti lesa na nastanek odrezka v procesu ortogonalnega premočrtnega odrezavanja. Doktorska disertacija, UDK 621.9.
34. Moses, D. M.; Prion, H. G. L., 2002: Anisotropic plasticity and failure prediction in wood composites.
35. Muskhelishvili, N. I., 1977: Some basic Problemsof the Mathematical Theory of Elasticity. Sijthoff and Noordhoff Int. Pub., Leyden.
36. Neuman, F., 1885: Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Teubner, Leipzig.
37. Naylor, A.; Hackney, P.; Perera, N.; Clahr, E.: A predictive model for the cutting force in wood machining developed using mechanical properties. BioResources 7(3): 2883-2894.
38. Požgaj, A.; Chovanec, D.; Kurjatko, S.; Babiak, M., 1993: Štruktura a vlasntnosti dreva. Priroda a. S., Bratislava, ISBN 80-07-00600-1.
39. Peggi, L.; Clouston, F., 2002: A stochastic plasticity approach to strength modeling of strand-based wood composites.
40. Reiter, A.; Tschegg, S., 2002: The influence of moisture content on the mode I fracture behavior of sprucewood. Journal of Materials Science, 37, 20: 4487-4491.
41. Sih, G. C.; Paris, P. C.; Irwin, G. R., 1965: On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. International Journal of Fracture Mechanics, 1, 3: 189-203.
42. Stefanie, E.; Stanzl, T., 2006: Microstructure and fracture mechanical respons of wood. Int J Fract (2006) 139: 495-508, DOI:10.1007/s10704-006-0052-0.
43. Šavar, Š., 1990: Obrada metala odvajanjem čestica. 2. dio – primjena alata i postupaka. ISBN 86 – 03 – 99664 – 4.

44. Šolaja, V., 1965: Neki problemi kvalitete obrade i habanja reznih alata. I. savjetovanje proizvodnog mašinstva (OR), Beograd.
45. Tsai, S. W., Wu, E. M., 1971: A general theory of strength for anisotropic materials. Journal of Composite Materials, Vol. 5, pp. 58-80.
46. Williams J. G., 1998: Friction and plasticity effectsin wedge splitting and cutting fracture tests. Journal of Material Science, 33: 5351-5357.
47. Wyeth, D. J.; Giacomo, G.; Atkins, A. G., 2009: Fracture toughness, chip types and the mechanics of cutting wood. A review COST Action E35: 2004-2008: Wood machining – micromechanics and fracture, Holzforschung, Vol. 63: 168-180, DOI 10.1515/HF.2009.017.
48. Zhang, L. C.; Wang X. M., 2001: A force prediction model for cutting unidirectional fibre-reinforced plastics. Machining Science and Technology, 5, 3: 293-305.
49. Zorev, N. N., 1966: Metal cutting mechanics. Librarry of Congres Catalog No. 65-13083.
50. http://www.hrovat.net/assets/_resampled/resizedimage450306-prerezi3.jpg
51. http://www.hrovat.net/assets/_resampled/resizedimage400373-prerezi8.jpg

POPIS SLIKA

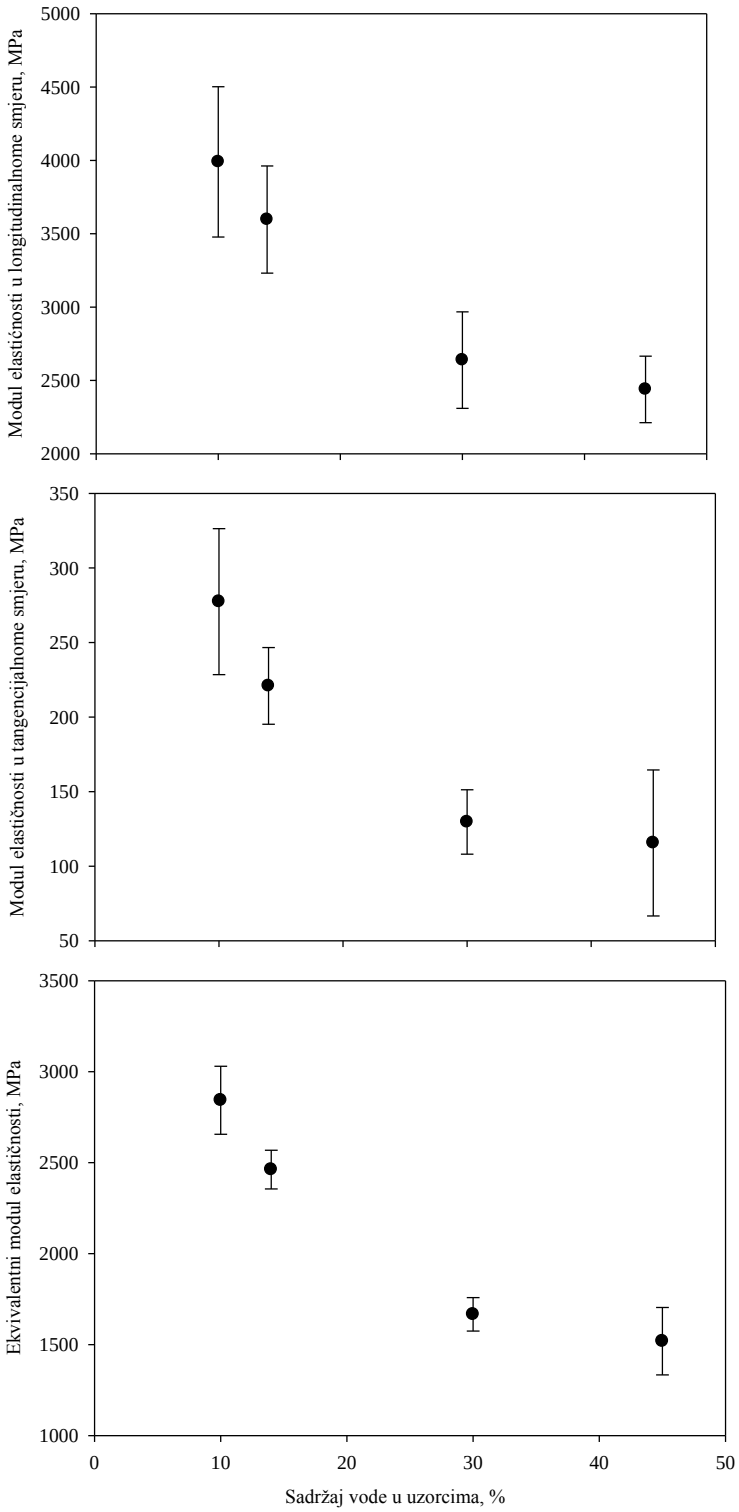
Slika 2.1. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja.....3
Slika 2.2. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja u dvije dimenzije.....3
Slika 2.3. Shematski prikaz međudjelovanja oštrice alata, obratka i strugotine pri ortogonalnom rezanju.....5
Slika 2.4. Komponente rezultantnih sila iz sva tri područja prikazane u globalnome koordinatnom sustavu.....6
Slika 2.5. Makroskopska građa drva.....7
Slika 2.6. Makroskopski presjeci drva.....8
Slika 2.7. Mikroskopski presjek drva četinjača.....9
Slika 2.8. Shematski prikaz smjerova rezanja drva.....10
Slika 2.9. Prikaz tipova strugotina.....11
Slika 3.1. Shematski prikaz ortogonalnog rezanja u Ernst-Merchantovom modelu rezanja 13
Slika 5.1. Konfiguracija i pomak materijalnog tijela.....21
Slika 5.2. Normalno i tangencijalno naprezanje drva zbog djelovanja sile 24
Slika 5.3. Prikaz djelovanja sile okomito na površinu drva.....25
Slika 5.4. Djelovanje sile F na površinu drva pod određenim kutom.....26
Slika 5.5. Shematski prikaz deformacije drva.....27
Slika 5.6. Definiranje polja unutarnjih sila ili polja naprezanja.....29
Slika 5.7. Naprezanje u okolišu točke.....30
Slika 5.8. Shematski prikaz komponenata tenzora naprezanja.....32
Slika 5.9. Shematski prikaz nastanka linijskih i kutnih deformacija.....35
Slika 5.10. Shematski prikaz deformacije drva.....37
Slika 5.12. Dijagram ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile paralelno s vlakancima u uzdužno smjeru.....48
Slika 5.13. Dijagram ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.....50
Slika 5.14. Usporedba ovisnosti deformacije o naprezanju pri tlačnom djelovanju sile okomito na vlakanca u radijalnom smjeru (⊥) i pri tlačnom djelovanju sile paralelno s vlakancima u longitudinalnom smjeru (∥).....51
Slika 6.1. Područja utroška energije pri ortogonalnom rezanju.....56
Slika 6.2. Proces plastične deformacije strugotine pri ortogonalnom rezanju drva.....57
Slika 6.3. Shematski prikaz geometrijskih svojstava duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine.....58
Slika 6.4. Shematski prikaz geometrijskih svojstava debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine.....59

Slika 6.5. Definiranje kinematičkih veličina ortogonalnog rezanja.....61
Slika 6.6. Proces savijanja dijela obratka i nastanka strugotine.....62
Slika 6.7. Proces plastične deformacije strugotine pri ortogonalnom rezanju drva.....64
Slika 6.8. Međusobno djelovanje prednje plohe alata i strugotine.....69
Slika 6.9. Sila trenja pri ulasku oštrice alata u zahvat.....71
Slika 6.10. Međusobno djelovanje stražnje plohe alata i obratka.....74
Slika 6. 13 Tri osnovna tipa pukotine.....77
Slika 6. 12. Shematski prikaz ravninskog stanja naprezanja na udaljenosti r od vrha pukotine.....78
Slika 6. 13. Shematski prikaz nastanka nove površine pri ortogonalnom rezanju.....79
Slika 7.1. Prikaz uzorka.....82
Slika 7.2. Uzorak borovine na kojemu su ispitana tlačna svojstva u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru.....84
Slika 7.3. Ispitivanje tlačnih svojstava uzoraka borovine u uzdužnom smjeru uz pomoć kidalice proizvođača Shimadzu, tip Autograph AG – X.....85
Slika 7.4. Uzorak borovine prije i nakon određivanja tlačnih svojstava na kidalici.....86
Slika 7.5. Prikaz elastičnih i plastičnih naprezanja pri djelovanju sile u uzdužnom smjeru.....87
Slika 7.6. Eksperimentalni postav.....89
Slika 7.7. Oštrica alata pričvršćena na dinamometar.....90
Slika 7.8. Prikaz izmjerenih komponenti sile.....91
Slika 7.9. Kamera Olympus I – SPEED 2 s objektivima pričvršćena iznad oštrice alata s halogenom rasvjetom.....92
Slika 7.10. Primjer očitavanja: a) dimenzija neodrezane strugotine, b) dimenzija odrezane strugotine sa snimke kamere.....93
Slika 7.11. Izmjerene komponente sile trenja na stražnjoj plohi alata.....93
Slika 7.12. Shematski prikaz sila pri ortogonalnom rezanju upotrijebljen za izračun komponente sile trenja na prednjoj plohi alata.....95
Slika 7.13. Primjer očitavanja duljine kontakta prednje plohe alata i strugotine.....96
Slika 8.1. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti modula elastičnosti u longitudinalnom i tangencijalnom smjeru te ekvivalentnog modula elastičnosti o sadržaju vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.....98
Slika 8.2. Dijagram ovisnosti omjera elastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.....100
Slika 8.3. Dijagram ovisnosti razlike elastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.....100
Slika 8.4. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta snage u longitudinalnom i tangencijalnom smjeru, te ekvivalentnog koeficijenta snage o sadržaju vode u uzorcima.....101

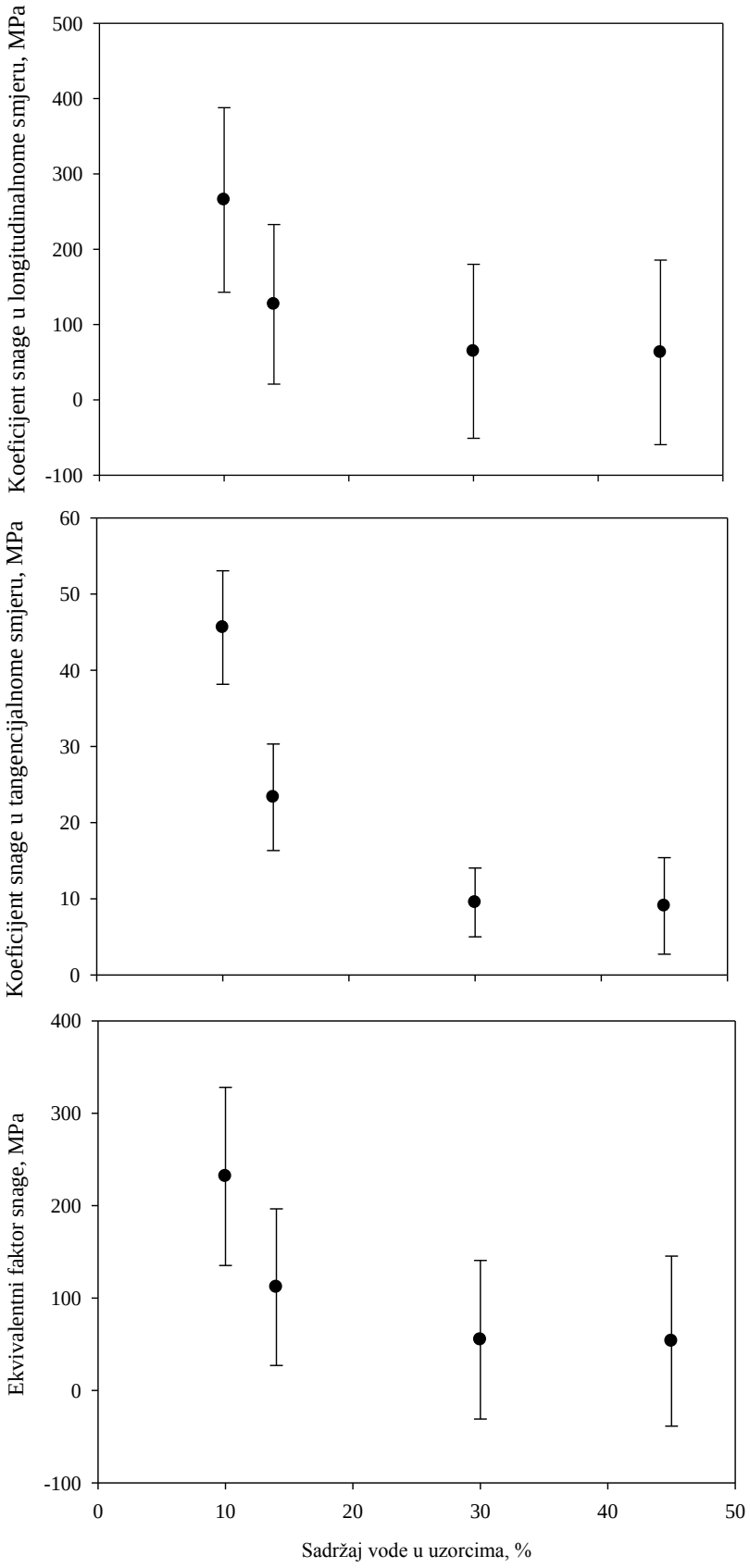
Slika 8.5. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta otvrdnjavanja u longitudinalnom i tangencijalnom smjeru, te ekvivalentnog koeficijenta otvrdnjavanja o sadržaju vode u uzorcima.....102
Slika 8.6. Dijagram ovisnosti omjera plastičnog naprezanja za postizanje jednake plastične deformacije u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnome smjeru o sadržaju vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.....103
Slika 8.7. Dijagram ovisnosti razlike plastičnih naprezanja u uzdužnom smjeru i okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru o sadržaju vode u uzorcima u = (10, 14, 30 i 45) %.....104
Slika 8.8. Dijagram ovisnosti razlike srednje vrijednosti odrivne sile o brzini rezanja za sadržaj vode u drvu u = (10, 14, 30 i 45) %.....106
Slika 8.9. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....107
Slika 8.10. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....109
Slika 8.11. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti duljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....109
Slika 8.12. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....108
Slika 8.13. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti omjera gustoće strugotine i gustoće obratka o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....111
Slika 8.14. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti ekvivalentne deformacije strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....112
Slika 8.15. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....113
Slika 8.16. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile potrebne za plastičnu deformaciju strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....114
Slika 8.17. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile trenja na stražnjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....115
Slika 8.18. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na stražnjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....116
Slika 8.19. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti kuta trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....117
Slika 8.20. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti koeficijenta trenja na dodirnoj površini prednje plohe alata i strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....118
Slika 8.21. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....119
Slika 8.22. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za svladavanje rada sile trenja na prednjoj plohi alata o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....120

Slika 8.23. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti duljine kontakta prednje plohe alata i strugotine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....120
Slika 8.24. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....121
Slika 8.25. Dijagram ovisnosti srednje vrijednosti sile potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode (10, 14, 30 i 45) %.....122
Slika 8.26. Dijagram ovisnosti udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode 10 i 14 %.....124
Slika 8.27. Dijagram ovisnosti udjela pojedine komponente snage u ukupnoj snazi rezanja o brzini rezanja za sadržaje vode 30 i 45 %.....125
Slika 8.28. Dijagram ovisnosti omjera udjela plastične komponente snage i snage potrebne za stvaranje nove površine o brzini rezanja za sadržaje vode u drvu (10, 14, 30 i 45) %.....126

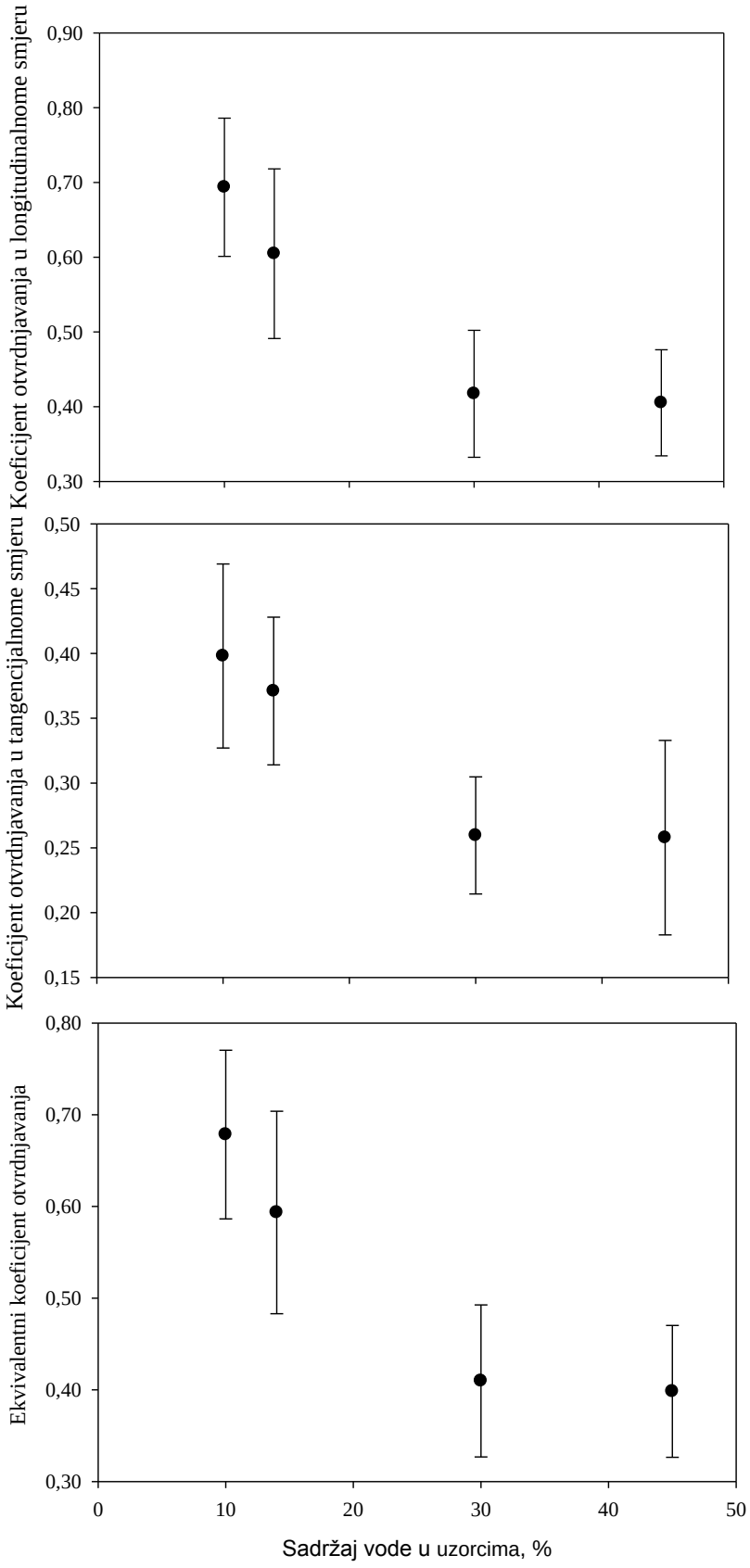
PRRILOZI



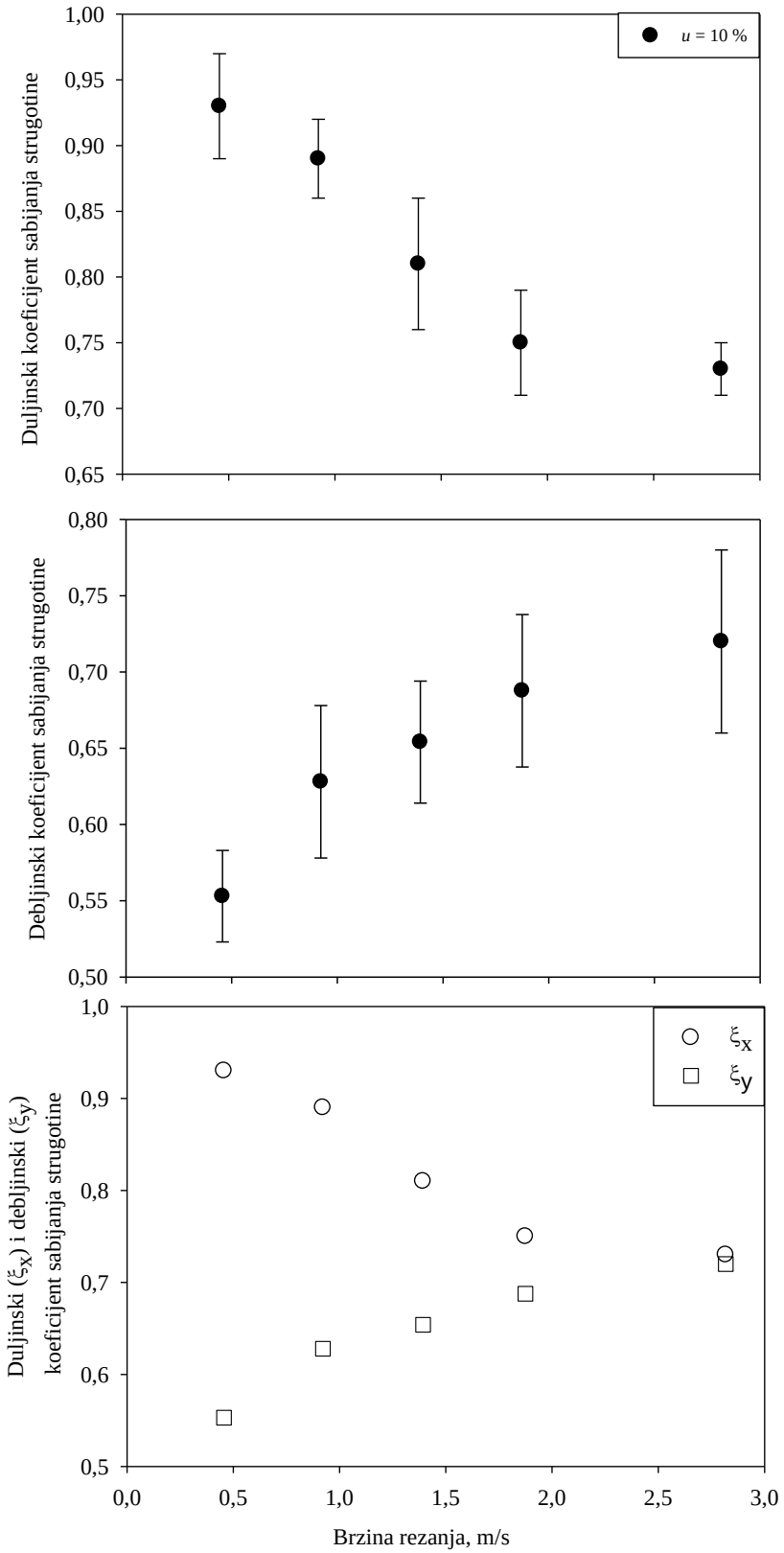
Slika 10.1. Dijagram ovisnosti modula elastičnosti u uzdužnom smjeru, okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru i ekvivalentnog modula elastičnosti o sadržaju vode u drvu, s pripadajućom standardnom devijacijom



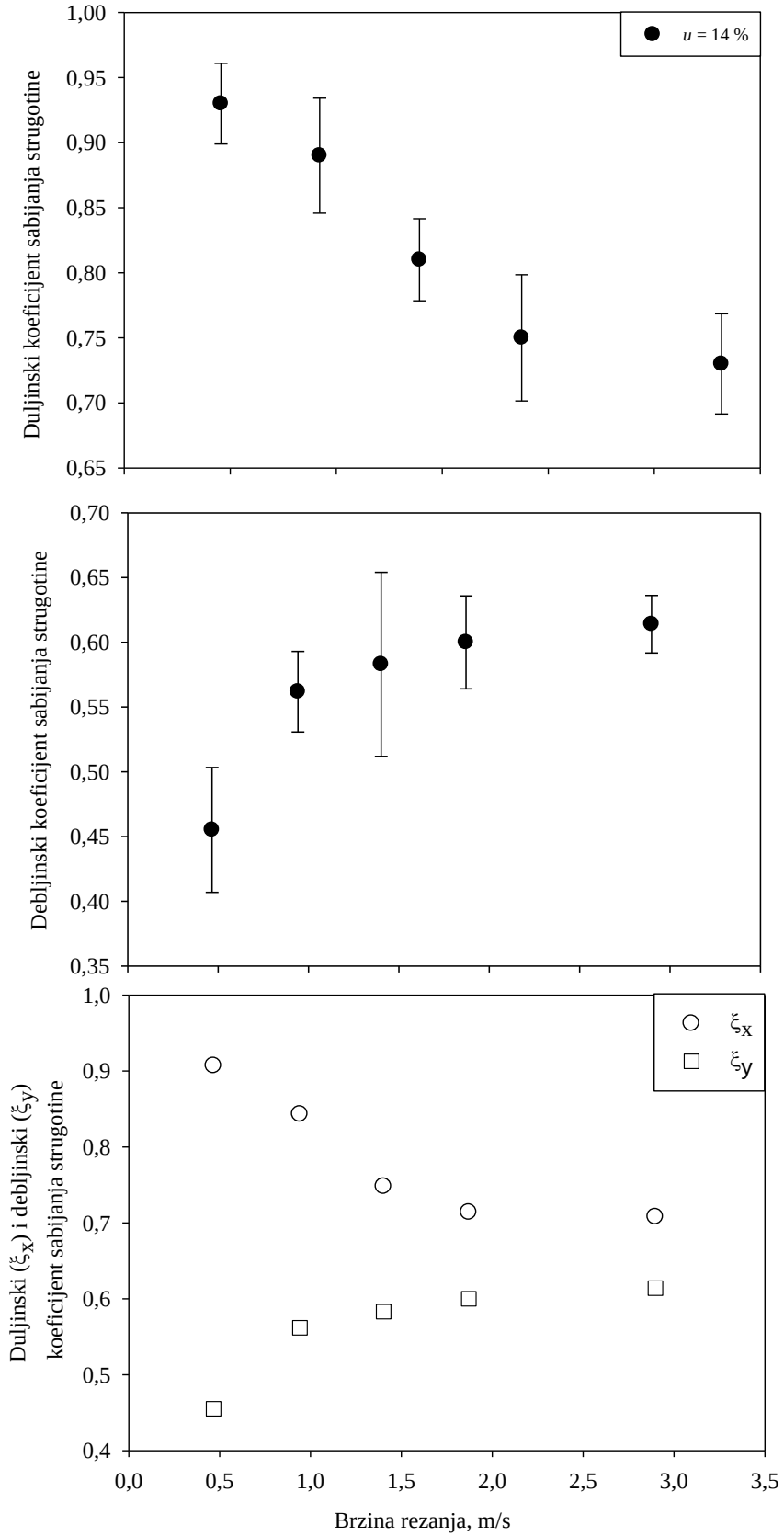
Slika 10.2. Dijagram ovisnosti koeficijenta snage u uzdužnom smjeru, okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru i ekvivalentnog koeficijenta snage o sadržaju vode u drvu, s pripadajućom standardnom devijacijom



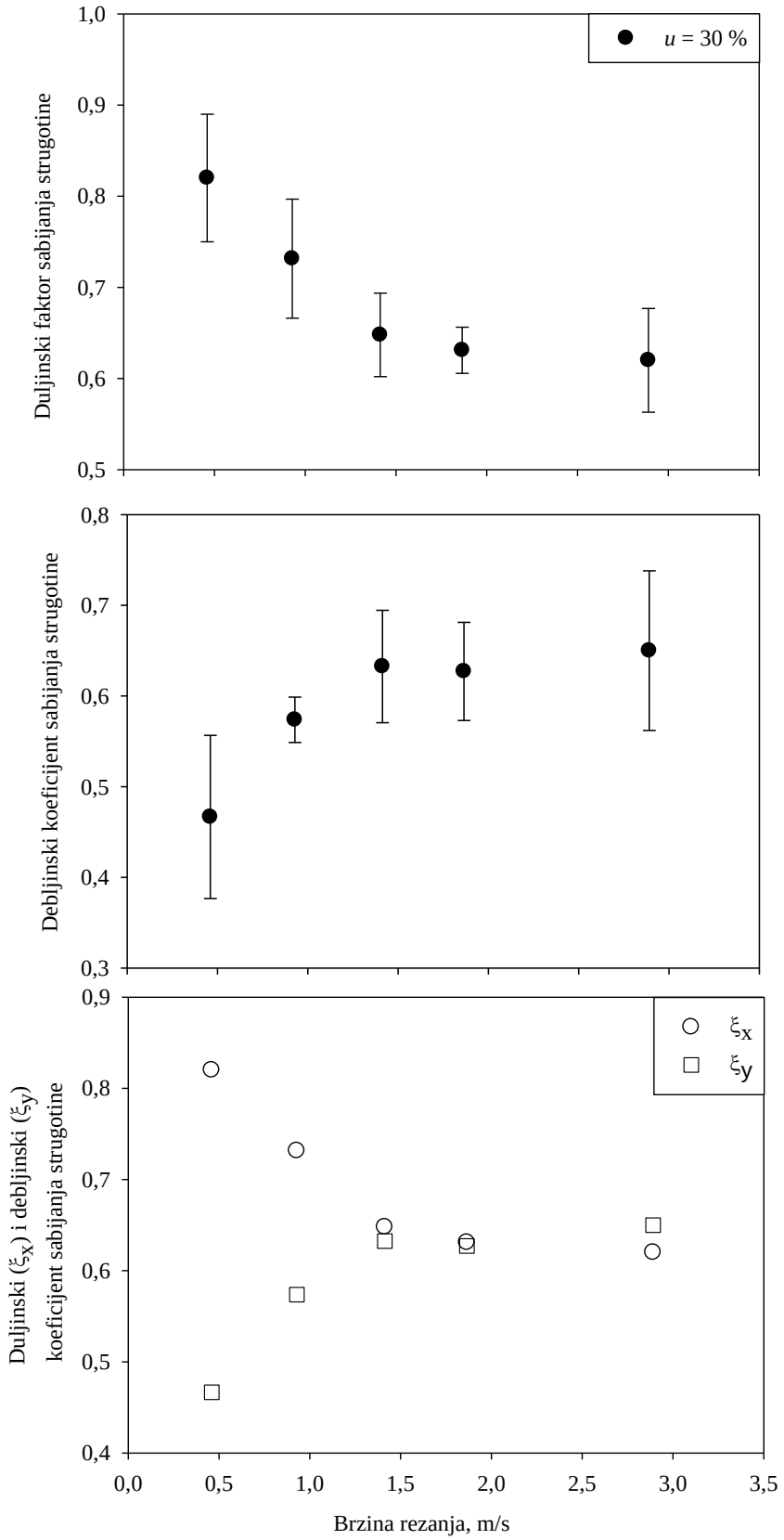
Slika 10.3. Dijagram ovisnosti koeficijenta otvrdnjavanja u uzdužnom smjeru, okomito na vlakanca u tangencijalnom smjeru i ekvivalentnog koeficijenta otvrdnjavanja o sadržaju vode u drvu, s pripadajućom standardnom devijacijom



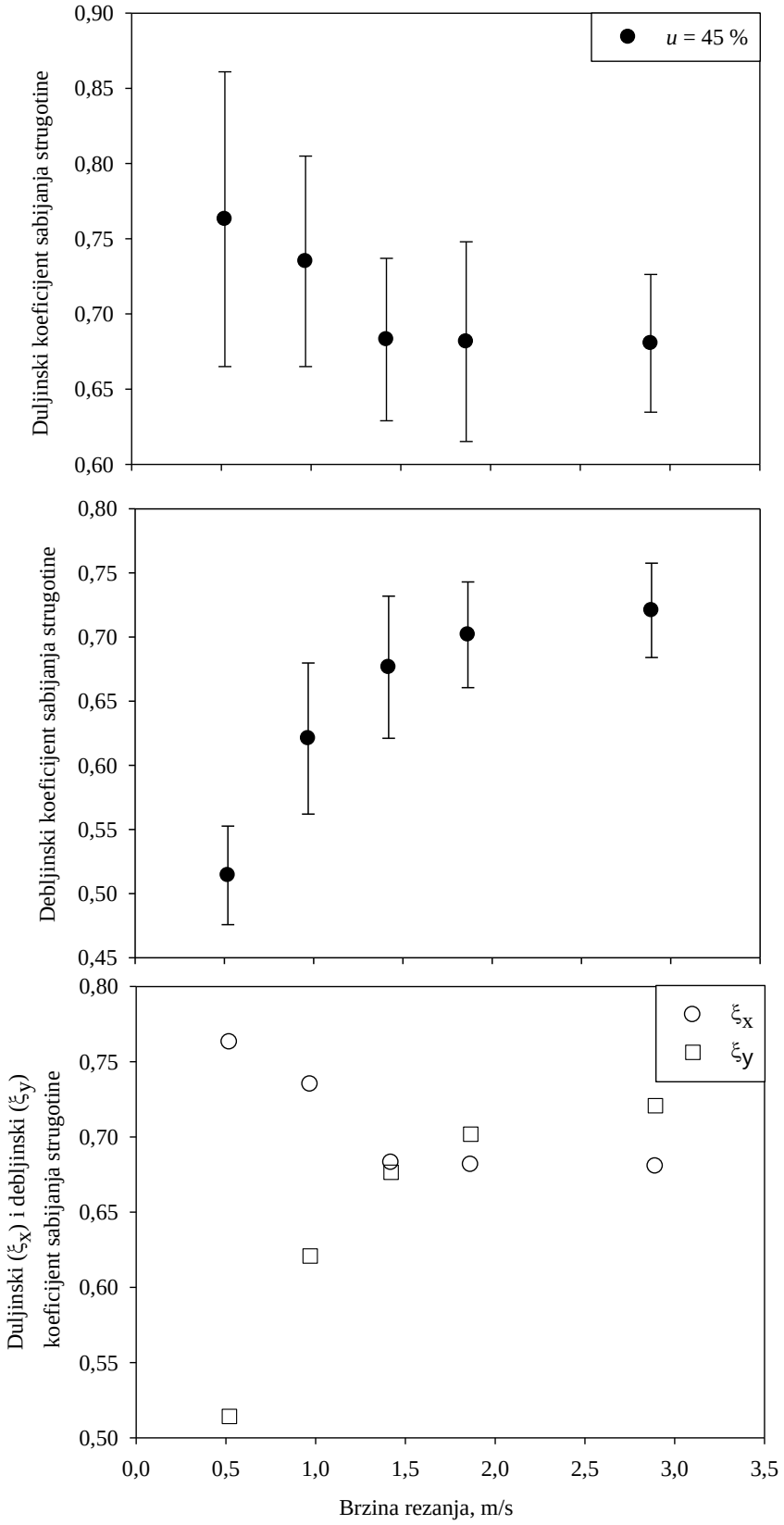
Slika 10.4. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini pri sadržaju vode u = 10 %



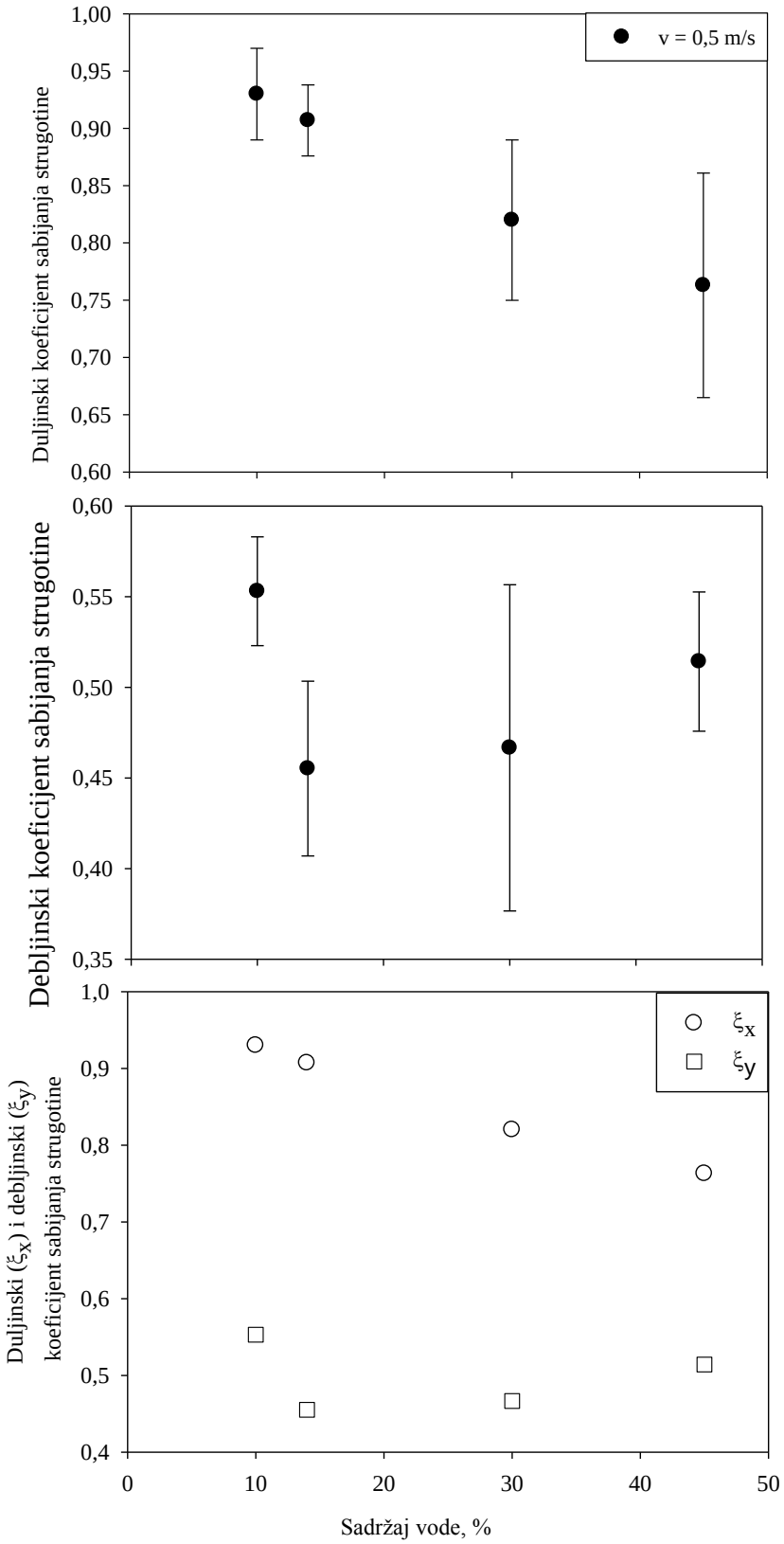
Slika 10.5. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini pri sadržaju vode u = 14 %



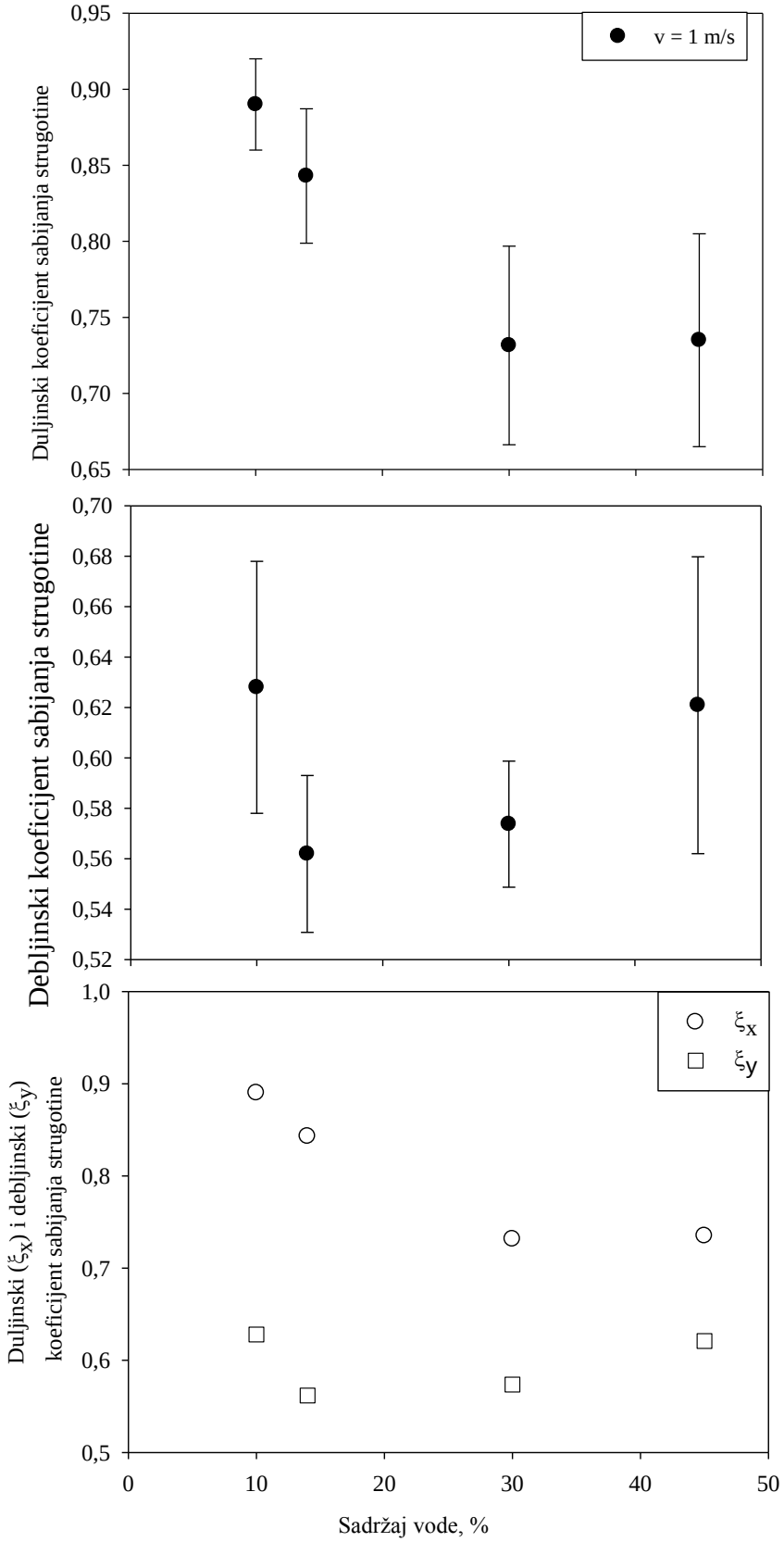
Slika 10.6. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini pri sadržaju vode u = 30 %



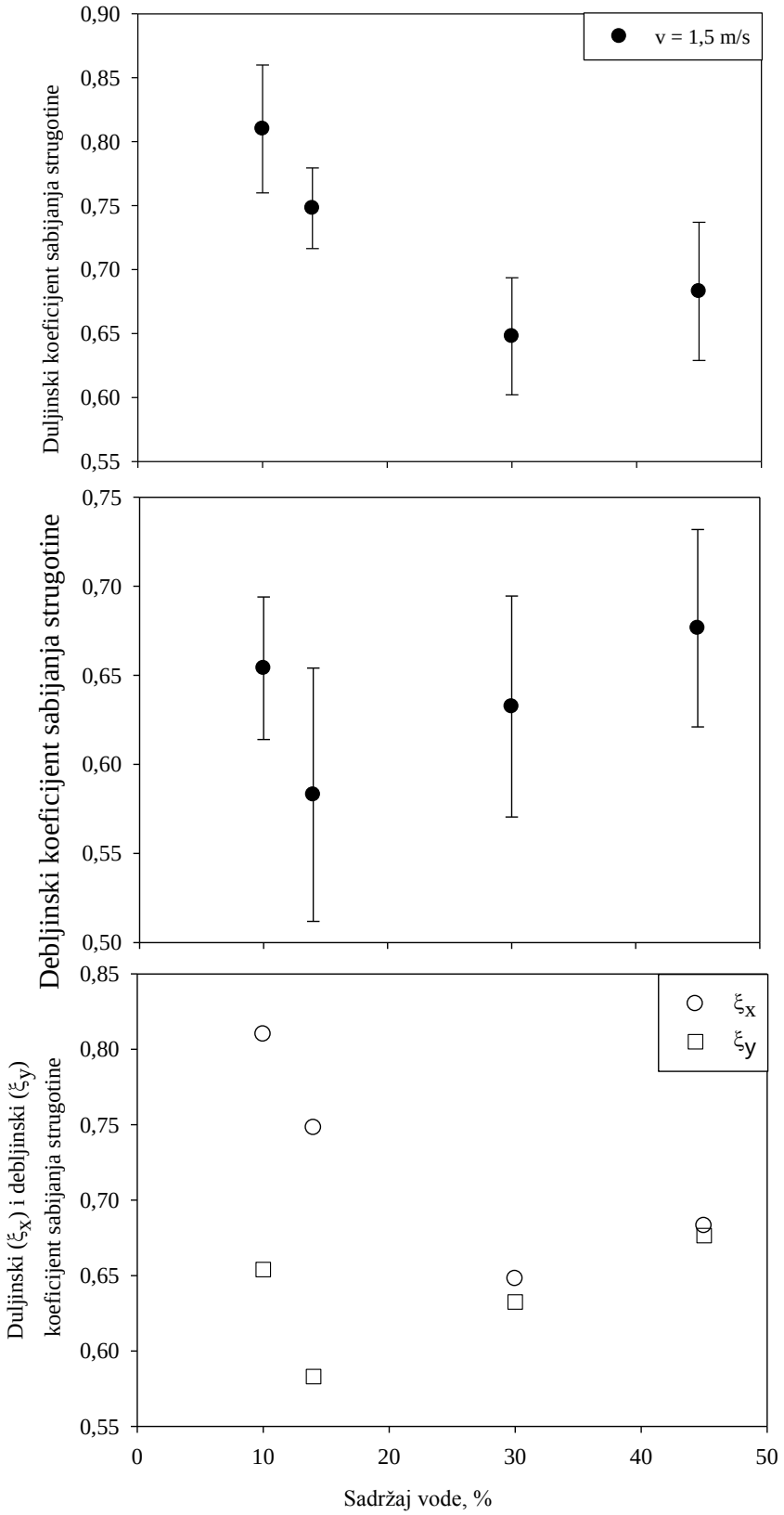
Slika 10.7. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o brzini pri sadržaju vode *u* = 45 %



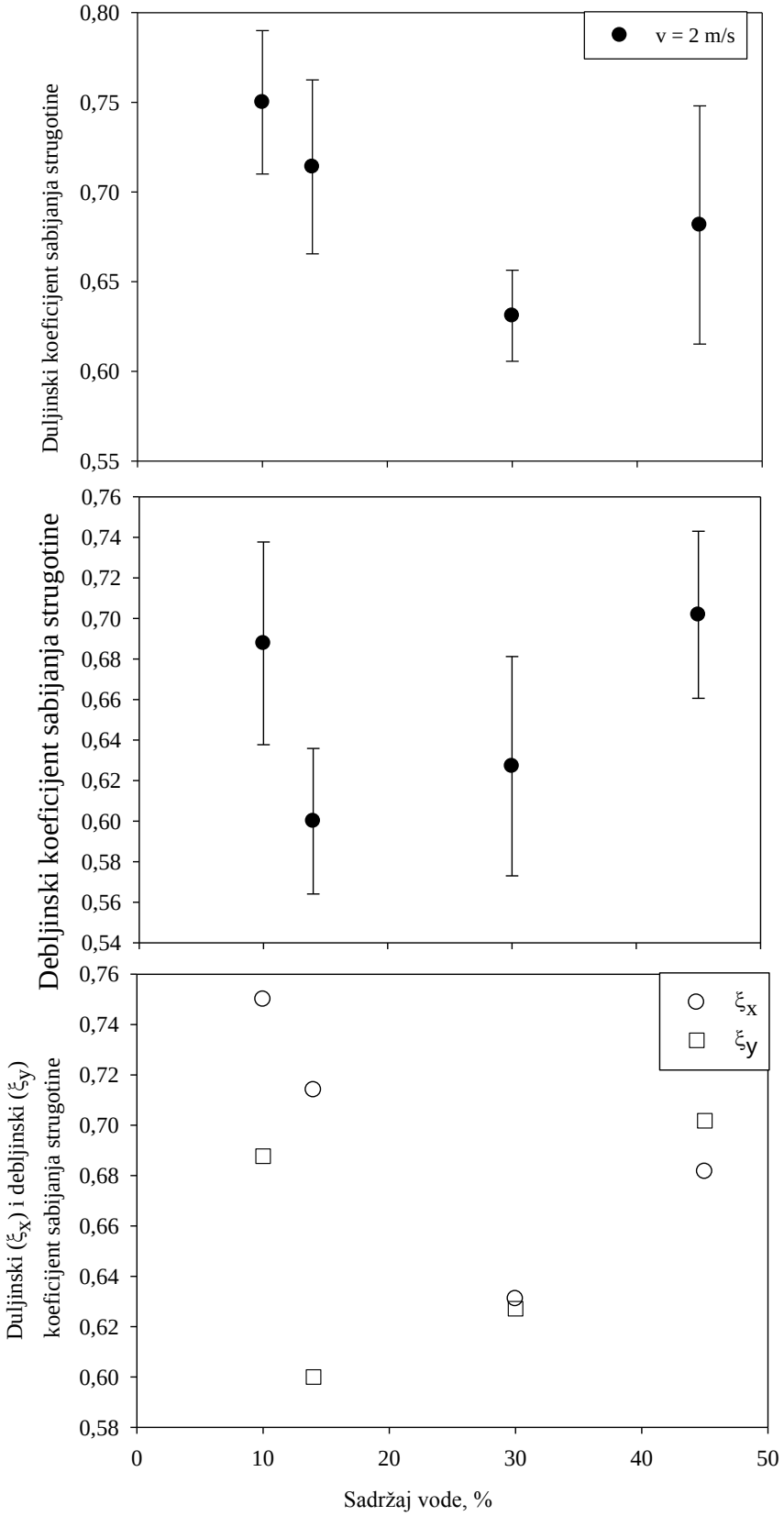
Slika 10.8. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o sadržaju vode u drvu pri brzini rezanja $\mathbf{v}_r$ = 0,5 m/s, s pripadajućom standardnom devijacijom



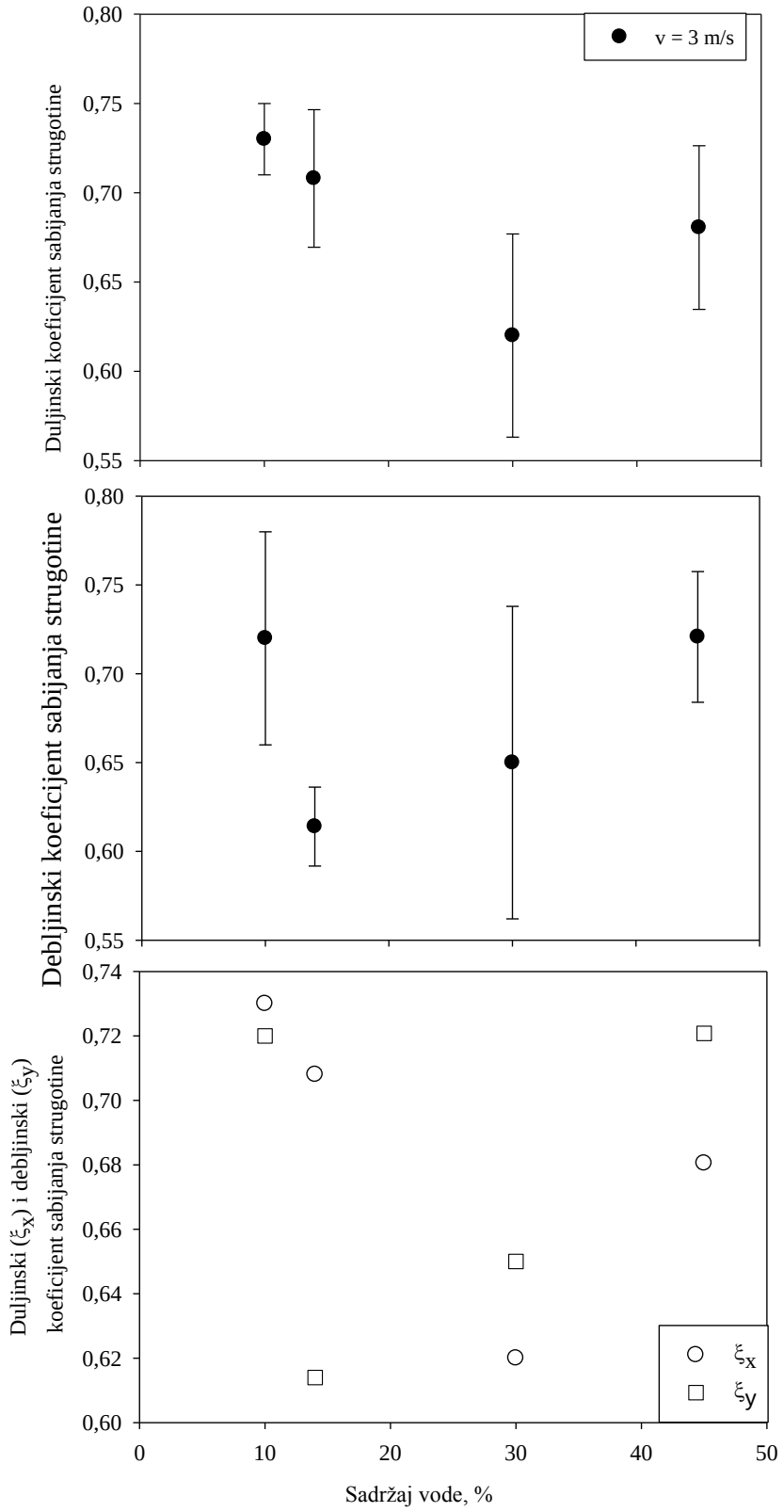
Slika 10.9. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o sadržaju vode u drvu pri brzini rezanja $\mathbf{v}_r$ = 1 m/s, s pripadajućom standardnom devijacijom



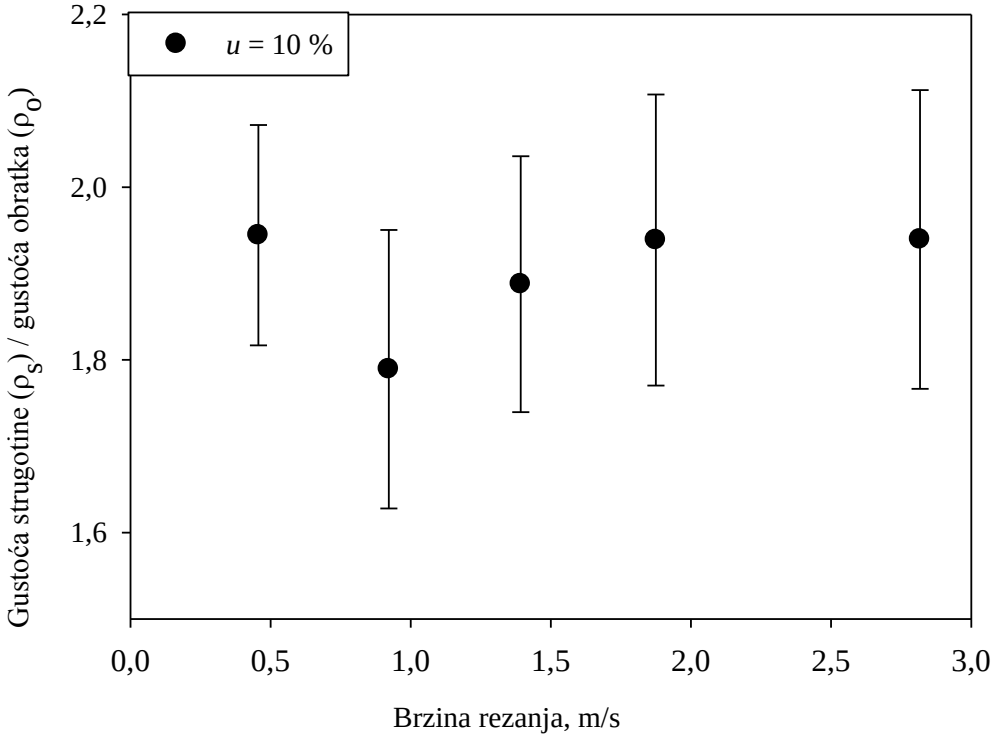
Slika 10.10. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o sadržaju vode u drvu pri brzini rezanja $\mathbf{v}_r$ = 1,5 m/s, s pripadajućom standardnom devijacijom



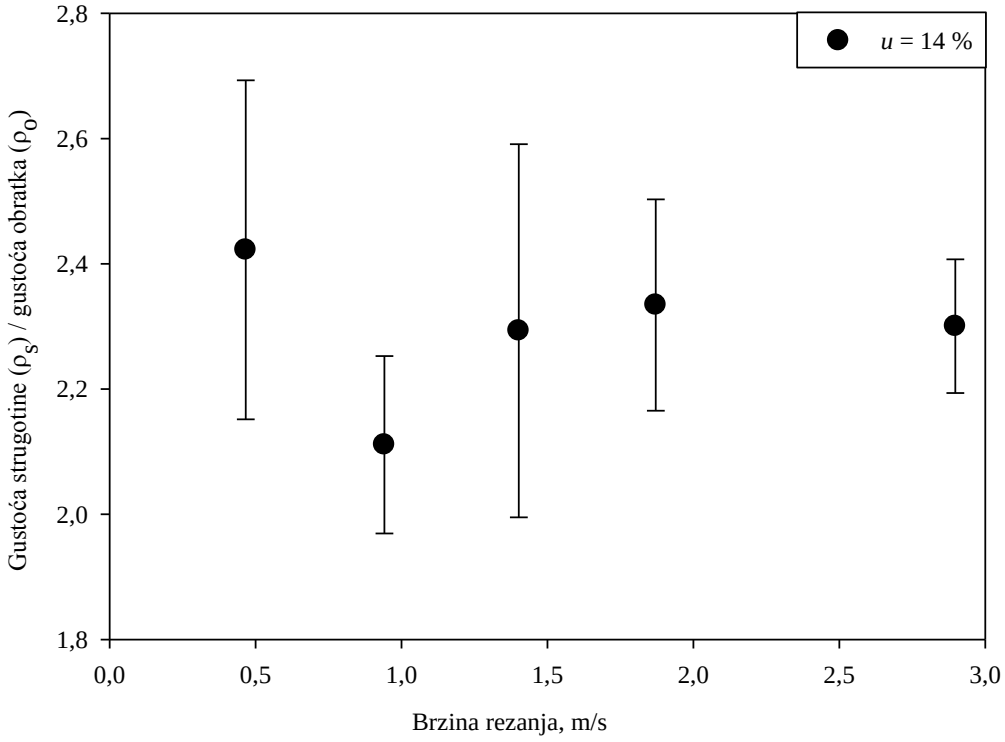
Slika 10.11. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o sadržaju vode u drvu pri brzini rezanja $\mathbf{v}_r$ = 2 m/s, s pripadajućom standardnom devijacijom



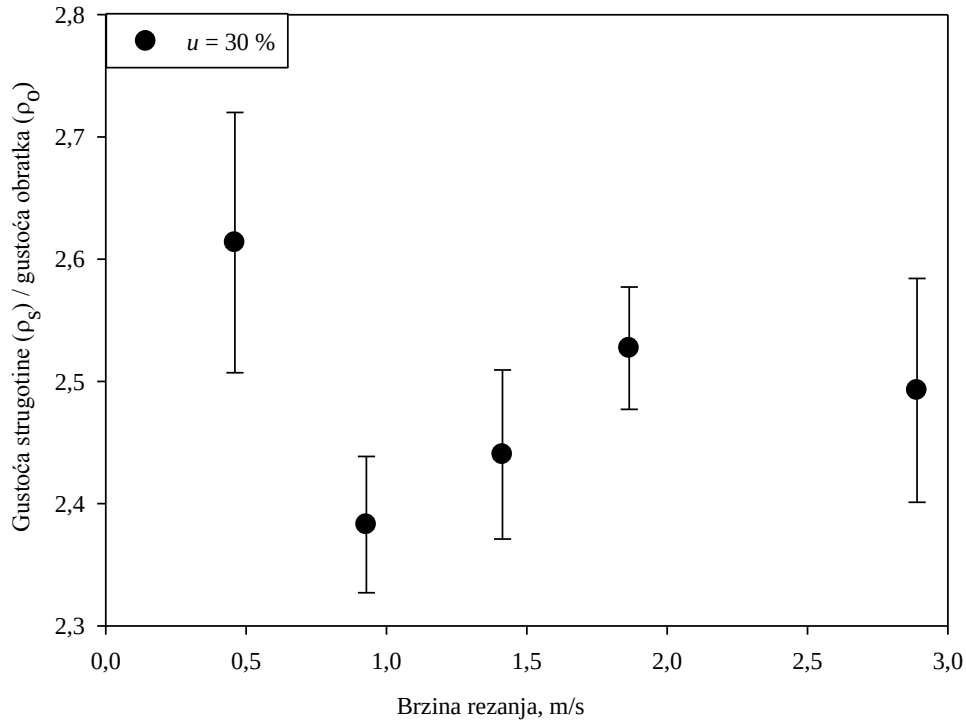
Slika 10.12. Dijagram ovisnosti duljinskog i debljinskog koeficijenta sabijanja strugotine o sadržaju vode u drvu pri brzini rezanja $\mathbf{v}_r$ = 3 m/s, s pripadajućom standardnom devijacijom



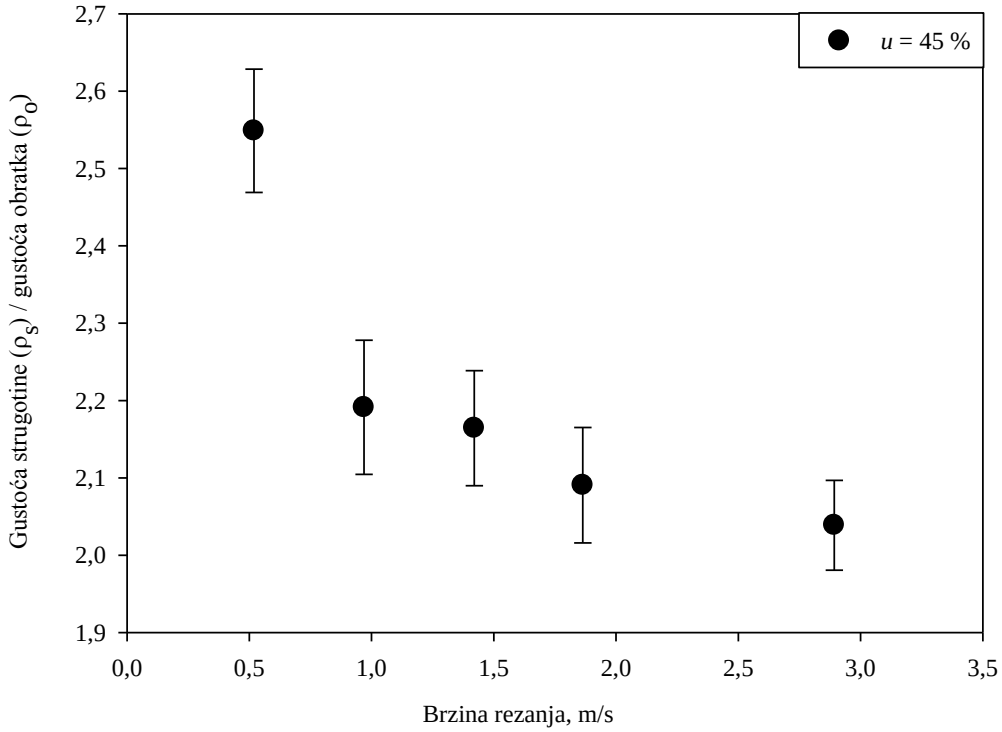
Slika 10.13. Dijagram ovisnosti omjera gustoće neodrezane i odrezane strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 10 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



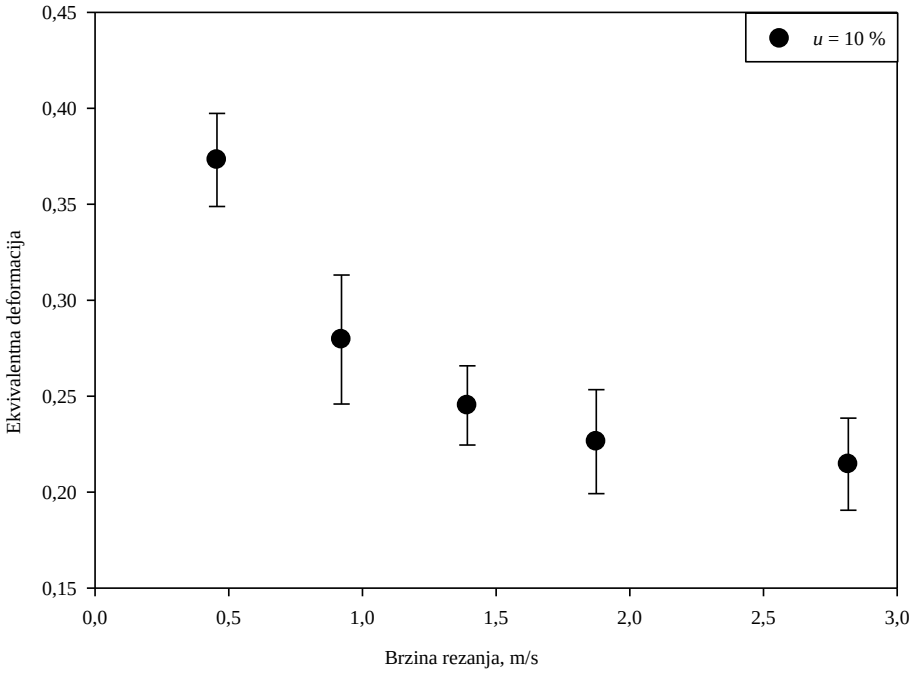
Slika 10.14. Dijagram ovisnosti omjera gustoće neodrezane i odrezane strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 14 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



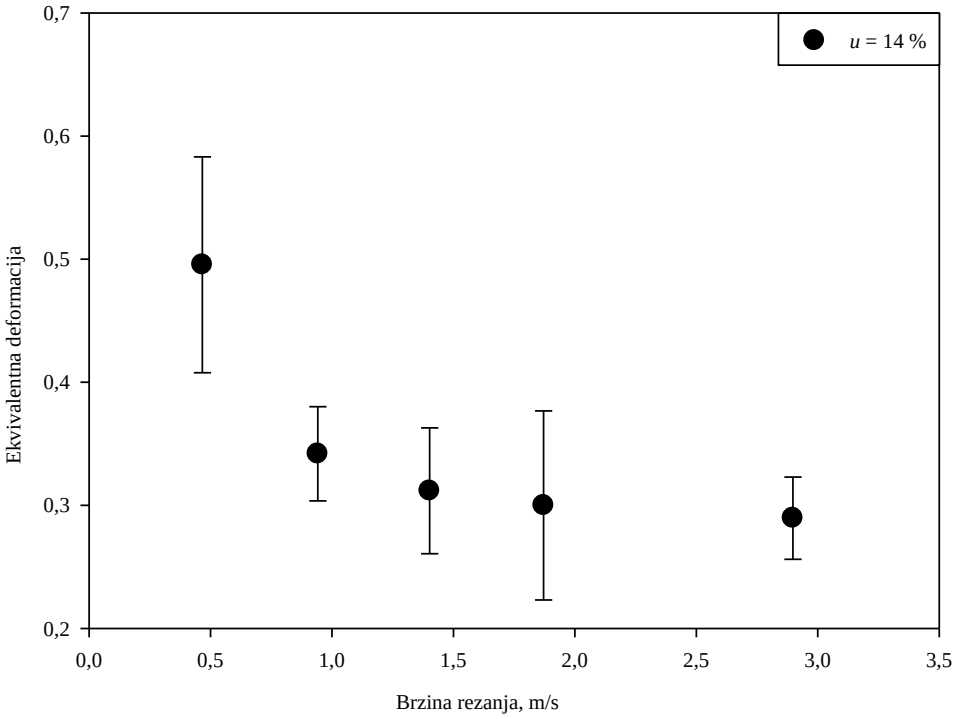
Slika 10.15. Dijagram ovisnosti omjera gustoće neodrezane i odrezane strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 13 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



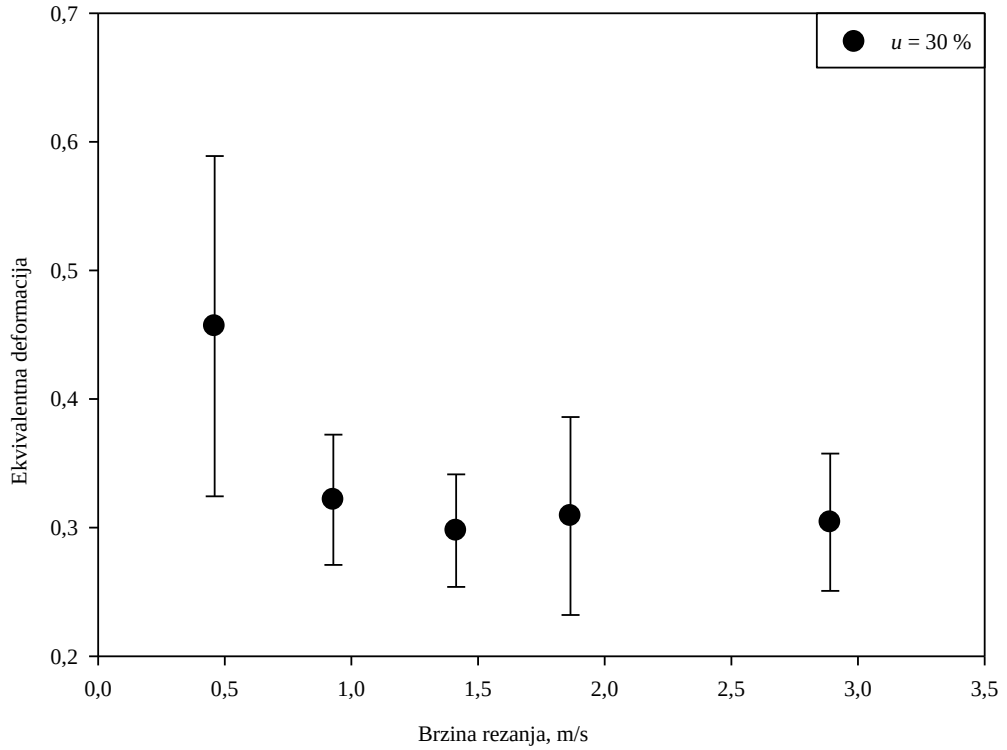
Slika 10.16. Dijagram ovisnosti omjera gustoće neodrezane i odrezane strugotine o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 45 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



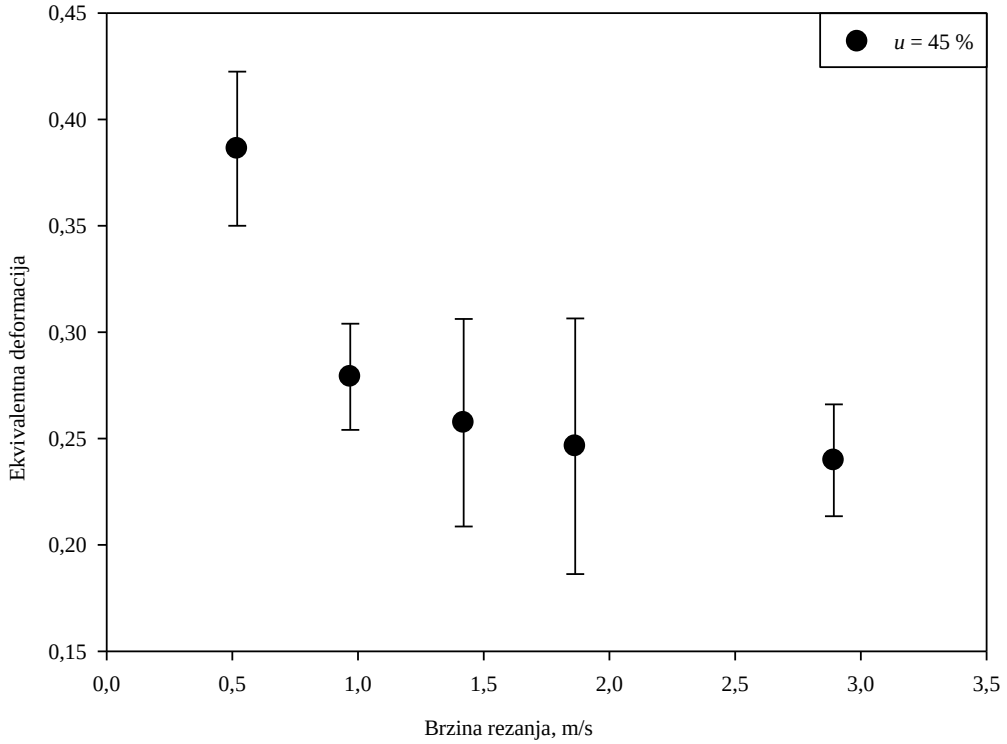
Slika 10.17. Dijagram ovisnosti ekvivalentne deformacije o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 10 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



Slika 10.18. Dijagram ovisnosti ekvivalentne deformacije o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 14 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



Slika 10.19. Dijagram ovisnosti ekvivalentne deformacije o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 30 %, s pripadajućom standardnom devijacijom



Slika 10.20. Dijagram ovisnosti ekvivalentne deformacije o brzini rezanja pri sadržaju vode u drvu *u* = 45 %, s pripadajućom standardnom devijacijom

Životopis

Kristijan Radmanović rođen je 20. 03. 1978. u Čakovcu. Osnovnu školu završio je u Murskom Središću, a srednju Medicinsku školu, zdravstveno laboratorijskog usmjerenja u Varaždinu 1996. godine. Tijekom svog srednjoškolskog obrazovanja pokazuje veliko zanimanje za prirodoslovne predmete, te sudjeluje na gradskim i županijskim natjecanjima iz kemije. Nakon završene srednje škole dolazi u Zagreb gdje se zapošljava u zaštitarskoj tvrtci u kojoj je radio naredne dvije godine. Nakon toga upisuje Prirodoslovno matematički fakultet smjer profesor fizike i politehnike. Tijekom studiranja pokazuje izniman interes za znanstveni rad te sudjeluje na raznim znanstveno – istraživačkim projektima od kojih valja istaknuti istraživanje nanokompozitnih poluvodića, te dielektrična ispitivanja biouzoraka u tekućoj fazi. Tijekom studiranja dobivao je državnu stipendiju. Godine 2006. zapošljava se u osnovnoj školi Samobor, a godinu dana kasnije u I. gimnaziji Zagreb, gdje radi kao profesor fizike. Tijekom rada u I. gimnaziji priprema učenike za natjecanja, te 2007. sa učenicima osvaja prvo mjesto na državnom natjecanju iz eksperimentalne fizike. Godine 2009. zapošljava se na Šumarskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu kao asistent iz predmeta fizika i osnove elektrotehnike. U 9. mjesecu 2009. upisuje poslijediplomski doktorski studij biofizike na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu, a u 6. mjesecu 2011. Poslijediplomski doktorski studij drvne tehnologije na Šumarskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Do sada je objavio u autorstvu i koautorstvu 5 radova iz skupine A1 i 3 rada iz skupine A3. U slobodno vrijeme bavi se nogometom i šahom.