Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima

Vlahović Kruc, Renata

Doctoral thesis / Disertacija

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:446211

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb



Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Renata Vlahović Kruc

Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Renata Vlahović Kruc

Some results on quasi-symmetric designs with exceptional parameters

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2019



Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Renata Vlahović Kruc

Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima

DOKTORSKI RAD

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, 2019.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Renata Vlahović Kruc

Some results on quasi-symmetric designs with exceptional parameters

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Assoc. Prof. Vedran Krčadinac

Zagreb, 2019

Mami – za beskrajnu ljubav
i podršku koju mi je uvijek pružala

Zahvala

Veliko hvala mojem mentoru Vedranu Krčadincu, od milja zvanom Krcko, na bezuvjetnoj pomoći i podršci, neiscrpnom strpljenju i motivaciji, razumijevanju i dostupnosti te nesebičnom dijeljenju znanja. Hvala na svim razgovorima kojima bi me ohrabrivao i učinio sve da mi doktorski studij i izrada ovog rada ostanu u lijepom sjećanju.

Zahvaljujem i svim profesorima te kolegama s Matematičkog odsjeka koji su mi uljepšali zadnje četiri godine, posebno profesorima Željki Milin Šipuš, Mirku Poloniju i Juraju Šiftaru te cimerici Mariji koja je vrijeme u uredu 225 obogatila divnim uspomenama.

Veliko hvala mojim obiteljima Vlahović i Kruc, posebice tati Ivici i bratu Nevenu, koji su uvijek vjerovali u mene, bili mi podrška i iskreno se veselili svakom mom uspjehu. Također, hvala mojim prijateljima koji su bili uz mene i dijelili sa mnom dobre i loše dane.

I za kraj, veliko hvala mom suprugu Matiji koji mi je pružao ljubav i podršku u svim trenucima, trudio se olakšati svaku prepreku i vjerovao u mene kada i sama to nisam. Hvala i mojoj Vilmi, koja je provela najviše vremena uz mene tijekom pisanja ovog rada, svako učenje učinila lakšim i svaki težak dan popravila svojim ludorijama.

Bez njihove podrške izrada ovog rada bila bi gotovo nemoguća. Zato svima od srca još jednom veliko hvala!

Sažetak

U ovoj disertaciji proučavamo kvazisimetrične dizajne s iznimnim parametrima te metode za njihovu konstrukciju s pretpostavljenom grupom automorfizama. Tablica dopustivih iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y je proširena do $v = 150$ te je time dobiveno ukupno 260 skupova parametara, pri čemu za njih 172 egzistencija kvazisimetričnih dizajna nije poznata. Pomoću Kramer-Mesnerove metode – poznate metode za konstrukciju t-dizajna sa zadanom grupom automorfizama, konstruirani su mnogi dizajni s parametrima 2-(v, k, λ) odgovarajućih kvazisimetričnih dizajna iz navedene tablice te je time pokazano koliko je problem konstrukcije 2-dizajna bez uvjeta kvazisimetričnosti lakši.

U konstrukciji kvazisimetričnih dizajna sa zadanom grupom automorfizama osnovni koraci su generiranje orbita i konstrukcija dizajna iz dobivenih orbita. U disertaciji su opisani algoritmi za generiranje kratkih orbita te svih orbita podskupova zadane veličine nekog skupa pod djelovanjem pretpostavljene grupe automorfizama. Također, opisani su algoritmi na kojima se temelje metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna, a to su Kramer-Mesnerova metoda, metoda temeljena na traženju klika i metoda temeljena na orbitnim matricama.

Korištenjem navedenih algoritama konstruirani su novi kvazisimetrični dizajni s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$, zatim 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$ te 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$. Isto tako, utvrđena je egzistencija kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 8$, koja ranije nije bila poznata, te su konstruirana četiri neizomorfna dizajna s tim parametrima. Nadalje, utvrđeno je da samo već poznati kvazisimetrični dizajni s projektivnim parametrima postoje s određenim grupama automorfizama.

Ključne riječi: kvazisimetrični dizajn, konstrukcija kvazisimetričnih dizajna, grupa automorfizama, generiranje orbita, Kramer-Mesnerova metoda, orbitna matrica

Extended Summary

In this thesis, we study quasi-symmetric designs with exceptional parameters and methods for their construction with prescribed automorphism groups. A t-(v, k, λ) design is quasi-symmetric if any two blocks intersect either in x or in y points, for non-negative integers $x < y$. The classification of quasi-symmetric 2-designs is a difficult open problem and there are many triples (v, k, λ) for which existence is unknown. A. Neumaier in [74] defines four classes of quasi-symmetric 2-designs: multiples of symmetric designs, strongly resolvable designs, Steiner designs, and residuals of biplanes. If a quasi-symmetric design or its complement does not belong to any of these classes, he calls it exceptional. In the same paper, he published the first table of admissible exceptional parameters of quasi-symmetric 2-designs with $v < 40$. Updated and extended tables were published by V. D. Tonchev, A. R. Calderbank, and M. S. Shrikhande. The last table was published in [85] and contains all exceptional parameters with $v \leq 70$.

The thesis is divided into three chapters. In the first chapter, we give some basic definitions, notations, and results about t-designs, quasi-symmetric t-designs, and quasi-symmetric 2-designs in particular. We also explain their important connections with strongly regular graphs and self-orthogonal codes. Furthermore, we describe the known families of quasi-symmetric 2-designs. Finally, at the end of this chapter we update the table of admissible exceptional parameters with new results and extend it to $v = 150$. The new table contains 260 parameter sets, and for 172 parameter sets the existence of quasi-symmetric designs is unknown.

In the second chapter, we explore the construction of 2-designs with prescribed automorphism groups, not necessarily quasi-symmetric. We give some basic concepts and results from group theory, in particular permutation groups, and consider (full) automorphism groups of designs. Furthermore, we describe one of the most widespread methods for the construction of designs with prescribed automorphism groups, the Kramer-Mesner method. Using this method, we construct a lot of designs with exceptional parameters 2-(v, k, λ) of quasi-symmetric designs. The conclusion is that the construction of 2-designs is much easier without the condition of quasi-symmetry.

In the last and most important chapter, we develop computational methods for the construction of quasi-symmetric designs with a prescribed automorphism group G. The

construction is done in two basic steps: firstly, generate the good orbits of G on k-element subsets of a v-element set, and secondly, select orbits comprising blocks of the design. In the first section of this chapter, we give some ideas for selecting automorphism groups. In the second section, we explain algorithms for generating orbits. Depending on the parameters of the design and size of the automorphism group, we use the algorithm for short orbits, the algorithm for all orbits, or generate orbits from orbit matrices. In the third section, we explain methods for the construction of quasi-symmetric designs from the generated orbits. We use the Kramer-Mesner method, a method based on clique search, and a method based on orbit matrices. All these methods had been previously known in design theory. We adapt them for the construction of quasi-symmetric designs and perform the constructions for some feasible parameters and groups. We increase the number of known designs with parameters 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$, 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$, 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$, and establish the existence of quasi-symmetric 2-$(56, 16, 18)$ designs with intersection numbers $x = 4$ and $y = 8$. Furthermore, using binary codes associated with newly constructed 2-$(56, 16, 6)$ designs, we find even more quasi-symmetric designs with these parameters. All the new quasi-symmetric 2-$(56, 16, 18)$ designs can be extended to symmetric 2-$(78, 22, 6)$ designs and in this way the number of known symmetric designs with these parameters is significantly increased. In the last section of this chapter, we attempt construction of quasi-symmetric designs with projective parameters and certain automorphism groups, but find only known examples of such designs.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Kvazisimetrični dizajni **5**
1.1 t-dizajni . . . 5
1.2 Kvazisimetrični t-dizajni . . . 10
1.3 Kvazisimetrični 2-dizajni . . . 15
1.3.1 Kvazisimetrični 2-dizajni i grafovi . . . 17
1.3.2 Kvazisimetrični 2-dizajni i kodovi . . . 19
1.4 Familije kvazisimetričnih 2-dizajna . . . 22
1.5 Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna . . . 24

2 Konstrukcija dizajna sa zadanim grupama automorfizama **35**
2.1 Osnovni pojmovi iz teorije grupa . . . 35
2.2 Permutacijske grupe . . . 39
2.3 Puna grupa automorfizama dizajna . . . 41
2.4 Kramer-Mesnerova metoda . . . 42
2.5 Dizajni s parametrima kvazisimetričnih dizajna . . . 44
2.5.1 Grupa $G \leq AGL(1, q)$ . . . 44
2.5.2 Primitivna grupa G . . . 54

3 Konstrukcija kvazisimetričnih dizajna **61**
3.1 Odabir grupe automorfizama . . . 61
3.2 Generiranje orbita k-članih skupova . . . 62
3.2.1 Generiranje kratkih orbita . . . 63
3.2.2 Generiranje svih orbita . . . 65
3.2.3 Generiranje orbita pomoću orbitnih matrica . . . 69
3.3 Metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna . . . 72
3.3.1 Kramer-Mesnerova metoda . . . 73
Dizajni $(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$ i $(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$ . . . 75
Dizajni $(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ . . . 80
3.3.2 Algoritam temeljen na traženju klika . . . 81

Dizajni $(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ 82
Dizajni $(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ 85
3.3.3 Algoritam temeljen na orbitnim matricama 85
Dizajni $(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ 86
3.4 Kvazisimetrični dizajni s projektivnim parametrima 101

Zaključak **109**

A Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna - `wxMaxima` **111**

B Grupa $AGL(1, p^n)$, $n \in \mathbb{N}$ **115**

Bibliografija **117**

Životopis **125**

Uvod

Teorija dizajna je važno područje kombinatorike koje se bavi problemom egzistencije dizajna te njihovom konstrukcijom i klasifikacijom, a povezana je i s drugim područjima, kao što su teorija grupa, teorija grafova, teorija kodova. Njezin početak seže u sredinu 19. stoljeća, a obilježili su ga T. P. Kirkman, J. Steiner i mnogi drugi [26]. Veliki interes za proučavanje dizajna sredinom 20. stoljeća izazvala je knjiga *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* autora R. A. Fishera i F. Yatesa [36] koja sadrži mnoge statističke eksperimente temeljene na dizajnima. Iako je terminologiju dizajna koju danas koristimo formalno uveo R. C. Bose [6], već ranije ju je koristio F. Yates.

Tijekom povijesti proučavane su različite važne klase dizajna s karakterisičnim svojstvima, kao što su Steinerovi dizajni, simetrični dizajni, kvazisimetrični dizajni i mnogi drugi. Iako se koncept kvazisimetričnih dizajna javlja već u kasnim 60-ima 20. stoljeća, prvi su ih formalno uveli A. Baartmans i M. S. Shrikhande u [4]. Kvazisimetričnim dizajnima posvećeno je poglavlje u [26], monografija [84], skripta [60] te mnogi članci.

Pojam kvazisimetričnih dizajna s iznimnim parametrima uveo je A. Neumaier [74], koji je ujedno i prvi primijenio njihovu vezu s jako regularnim grafovima da bi dobio tablicu dopustivih iznimnih parametara. Neumaierova tablica sadržavala je 23 skupova parametara, pri čemu za njih 15 egzistencija kvazisimetričnih dizajna tada nije bila poznata. To je privuklo veliki interes za njihovo proučavanje. Tablica je kasnije proširivana i dopunjena s novim rezultatima, a posljednju verziju tablice objavio je M. S. Shrikhande u [85]. Egzistencija kvazisimetričnih dizajna s parametrima iz te tablice utvrđena je na različite načine. Neki dizajni konstruirani su kao derivirani, odnosno rezidualni dizajni već poznatih dizajna, neki su konstruirani od kodova, dok su neki konstruirani uz pretpostavku da na njih djeluje grupa automorfizama.

U ovoj disertaciji proučavamo kvazisimetrične dizajne s iznimnim parametrima te njihovu konstrukciju pomoću računalnih metoda, uz pretpostavku da na dizajn djeluje grupa automorfizama. Računalne metode u teoriji dizajna prisutne su više od 40-tak godina te one omogućuju rješavanje pitanja egzistencije nekih dizajna, njihovu klasifikaciju te proučavanje nekih velikih familija dizajna koje bi bez računala bilo gotovo nemoguće. Disertacija je podijeljena na tri poglavlja.

Prvo poglavlje sadrži osnovne pojmove i glavne rezultate iz područja t-dizajna op-

ćenito te kvazisimetričnih t-dizajna. Posebna pozornost posvećena je kvazisimetričnim 2-dizajnima koji su predmet istraživanja ove disertacije te je opisana njihova veza s jako regularnim grafovima i kodovima. Isto tako, opisane su familije kvazisimetričnih 2-dizajna radi boljeg razumijevanja onih s iznimnim parametrima. Na kraju poglavlja dajemo proširenu tablicu iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-(v, k, λ) dizajna te detaljno opisujemo korake za njezino generiranje. Posljednje objavljenu tablicu proširili smo do $v = 150$ te smo time dobili ukupno 260 skupova parametara. Dopunivši tablicu s poznatim rezultatima te rezultatima proizašlim iz ovog rada, u tablici je preostalo 172 skupova parametara za koje egzistencija kvazisimetričnih dizajna nije poznata. Za generiranje tablice korišten je softver `wxMaxima`, a kod je prikazan u prilogu A.

Drugo poglavlje posvećeno je konstrukciji dizajna sa zadanim grupama automorfizama. Radi boljeg razumijevanja njihove veze s teorijom grupa, dani su osnovni pojmovi i glavni rezultati iz područja grupa te su opisane permutacijske grupe koje imaju važnu ulogu u promatranju djelovanja grupe na dizajn. Nakon toga, opisana je Kramer-Mesnerova metoda kao jedna od najpoznatijih metoda za konstrukciju dizajna sa zadanom grupom automorfizama [57]. Uz nju, vrlo poznata je i metoda temeljena na taktičkim dekompozicijama koju je među prvima koristio Z. Janko [47] za konstrukciju simetričnih dizajna. Kombiniranjem navedenih metoda, V. Krčadinac, A. Nakić i M.-O. Pavčević su konstruirali nove unitale s parametrima 2-$(65, 5, 1)$ [63]. U nastavku rada, pomoću Kramer-Mesnerove metode konstruirali smo mnoge 2-dizajne čiji parametri odgovaraju iznimnim parametrima kvazisimetričnih dizajna. Za grupe automorfizama odabirali smo afine grupe $AGL(1, q)$ i njezine podgrupe te općenito primitivne grupe i njihove podgrupe koje djeluju na odgovarajućem broju točaka. S obzirom na broj konstruiranih dizajna u tom poglavlju, bez uvjeta da su oni kvazisimetrični, možemo naslutiti kako je uvjet kvazisimetričnosti jak te da je njihova konstrukcija težak problem.

Treće poglavlje posvećeno je konstrukciji kvazisimetričnih 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y, uz pretpostavku da na njih djeluje neka grupa automorfizama G. Ona se temelji na odabiru odgovarajućih orbita iz većeg skupa generiranih orbita k-članih podskupova v-članog skupa točaka pod djelovanjem grupe G. U prvom dijelu poglavlja dane su ideje za odabir grupe automorfizama. U drugom dijelu opisani su algoritmi za generiranje orbita. U ovisnosti o parametrima dizajna i redu grupe automorfizama, koristimo algoritam za generiranje kratkih orbita, algoritam za generiranje svih orbita ili orbite generiramo pomoću orbitnih matrica. Za daljnju konstrukciju dizajna važno je da broj orbita ne bude prevelik kako bi konstrukcija bila izvediva. U slučaju kvazisimetričnih dizajna broj orbita možemo smanjiti tako da u obzir uzmemo samo *dobre* orbite. Treći dio poglavlja sadrži metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna iz generiranih orbita, a to su Kramer-Mesnerova metoda, metoda temeljena na traženju klika te metoda temeljena na orbitnim matricama Za svaku metodu opisani su odgovarajući algoritmi. Te metode su već poznate u teoriji dizajna, a u ovom radu ih prilagođavamo za konstrukciju kvazisime-

tričnih dizajna. U prethodnom poglavlju već smo vidjeli da je Kramer-Mesnerova metoda prvotno bila korištena za konstrukciju t-dizajna. Metoda koja se temelji na traženju klika korištena je u konstrukciji kvazisimetričnih dizajna pomoću riječi kodova pridruženih već poznatim kvazisimetričnim dizajnima [29, 73], dok su orbitne matrice korištene za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna uz pomoć indeksiranja [30]. Korištenjem navedenih algoritama konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne. Pomoću Kramer-Mesnerove metode povećali smo broj poznatih kvazisimetričnih dizajna s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$ i 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$. Osim toga, konstruirali smo tri neizomorfna kvazisimetrična 2-$(56, 16, 18)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 8$ te time utvrdili egzistenciju dizajna s tim parametrima koja ranije nije bila poznata. Nadalje, metoda temeljena na traženju klika omogućila nam je da konstruiramo još jedan kvazisimetrični 2-$(56, 16, 18)$ dizajn koji je neizomorfan prethodno konstruiranima. Osim toga, pomoću nje konstruirali smo 876 novih kvazisimetričnih dizajna s parametrima 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$, pri čemu su do tada bila poznata samo dva. Pomoću metode temeljena na orbitnim matricama konstruirali smo još novih kvazisimetričnih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna te smo ih potpuno klasificirali s Frobeniusovom grupom reda 21. Za kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ i 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ promatrali smo i njima pridružene kodove te smo od riječi kodova pridruženih konstruiranim 2-$(56, 16, 6)$ dizajnima konstruirali dodatno novih kvazisimetričnih dizajna. Sve novokonstruirane dizajne s tim parametrima uložili smo u simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn i time povećali broj poznatih. Na kraju poglavlja dan je pregled rezultata o kvazisimetričnim dizajnima s projektivnim parametrima u kojima smo pokazali da s određenim grupama automorfizama postoje jedino već poznati dizajni.

U izradi ove disertacije korišteni su softveri `GAP` [37], `wxMaxima` [97] i `MAGMA` [8] te vlastiti novi i već ranije izrađeni programi napisani u programskom jeziku `C` [59, 62].

Poglavlje 1

Kvazisimetrični dizajni

Jedan od problema kojim se je bavio britanski statističar R. A. Fisher [34] pripada području agronomije, a govori o ispitivanju djelotvornosti različitih vrsta gnojiva na više tipova biljaka. Ako s v označimo broj vrsta gnojiva, a s b broj tipova biljaka, jedan od načina provođenja eksperimenta je takozvani *"potpuni eksperiment"*. To zahtijeva da se b zemljišta, pri čemu se na svakom nalazi druga vrsta biljke, podijeli na v dijelova kako bi se pritom testirali svi parovi biljka-gnojivo. Takvi eksperimenti bi u realnim uvjetima bili preskupi. R. A. Fisher je pokazao da je za cjelovitu statističku analizu dovoljno provesti *"nepotpuni eksperiment"*. On bi uključivao ispitivanje djelotvornosti k vrsti gnojiva, gdje je $k < v$, za svaku biljku. Pri tome je bitno da je ispunjen uvjet balansiranosti, odnosno da je svako gnojivo testirano na jednako mnogo tipova biljaka, pri čemu taj broj iznosi λ. Ovim i mnogim sličnim eksperimentima, R. A. Fisher je izazvao veliki interes za proučavanje dizajna.

U prvom poglavlju prikazani su osnovni pojmovi i dan je pregled glavnih rezultata iz područja t-dizajna (potpoglavlje 1.1), kvazisimetričnih t-dizajna (potpoglavlje 1.2), te je posebna pozornost posvećena kvazisimetričnim 2-dizajnima (potpoglavlje 1.3), familijama kvazisimetričnih 2-dizajna (potpoglavlje 1.4) te tablici iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna (potpoglavlje 1.5).

Za prikaz osnovnih pojmova i poznatih rezultata u ovom poglavlju korištena je sljedeća literatura: [1], [25], [26], [44], [60], [65], [84] i [87].

1.1 t-dizajni

Definicija 1.1. ***Dizajn*** *$\mathcal{D}$ s parametrima t-(v, k, λ) je uređeni par $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$, gdje je $\mathcal{V}$ konačan v-člani skup elemenata koje nazivamo* ***točkama****, a $\mathcal{B}$ familija k-članih podskupova od $\mathcal{V}$ koje nazivamo* ***blokovima*** *sa svojstvom da je svaki t-člani skup točaka sadržan u λ blokova.*

Općenito, kada želimo istaknuti parametar t, dizajn $\mathcal{D}$ nazivamo još i **t-dizajnom**. Pod pojmom *dizajn* podrazumijevamo 2-dizajn te njegove parametre često pišemo samo

kao (v, k, λ).

Iz definicije 1.1 uočavamo da su parametri t-(v, k, λ) dizajna cijeli brojevi te da treba vrijediti $0 \leq t \leq k \leq v$ i $\lambda > 0$. Parametre t-dizajna ponekad označavamo i $S_\lambda(t, v, k)$, odnosno $(\lambda : t, v, k)$.

Propozicija 1.2. *Svaki t-(v, k, λ) dizajn je ujedno i s-(v, k, λ_s) dizajn za sve $s \in \{0, \ldots, t\}$ i za*

$$\lambda_s = \lambda \cdot \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}. \tag{1.1}$$

Dokaz. Neka je $S \subseteq \mathcal{V}$ bilo koji s-člani skup točaka. Dvostrukim prebrojavanjem parova u skupu $\{(T, B) \mid S \subseteq T \subseteq B,\ |T| = t,\ B \in \mathcal{B}\}$ dolazimo do tražene tvrdnje. □

Korolar 1.3. *Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn, onda $\binom{k-s}{t-s}$ dijeli $\lambda \cdot \binom{v-s}{t-s}$.*

Osim parametara t, v, k, λ za t-dizajne vežemo i parametre b i r, pri čemu je b ukupan broj blokova, a r broj blokova kroz jednu točku dizajna. Parametre b i r možemo izračunati koristeći propoziciju 1.2:

$$b = \lambda_0 = \lambda \cdot \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \qquad \text{i} \qquad r = \lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}. \tag{1.2}$$

Za svaki t-(v, k, λ) dizajn definiramo njegov **red** kao $n = \lambda_1 - \lambda_2$.

Primjer 1.4. *Neka je $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ skup točaka, a $\mathcal{B}$ familija sljedećih 3-članih podskupova od $\mathcal{V}$:*

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{4, 5, 6\}\}.$$

Tada je $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ dizajn s parametrima 2-$(7, 3, 1)$. Kroz svaku točku dizajna prolazi točno $r = 3$ bloka te je ukupan broj blokova jednak $b = 7$ (slika 1.1).

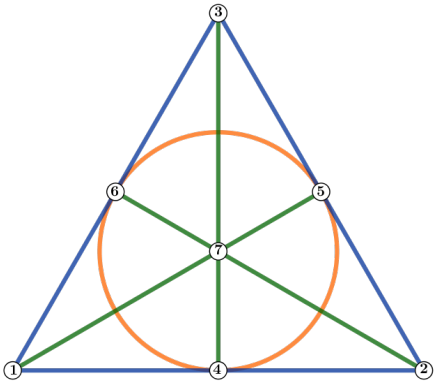
Primjer 1.5. *Neka je $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ skup točaka, a $\mathcal{B}$ familija sljedećih 3-članih podskupova od $\mathcal{V}$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = &\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 7, 8\}, \{2, 6, 9\}, \{4, 8, 9\},\\ &\{1, 5, 9\}, \{3, 7, 9\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 8\}\}.\end{aligned}$$

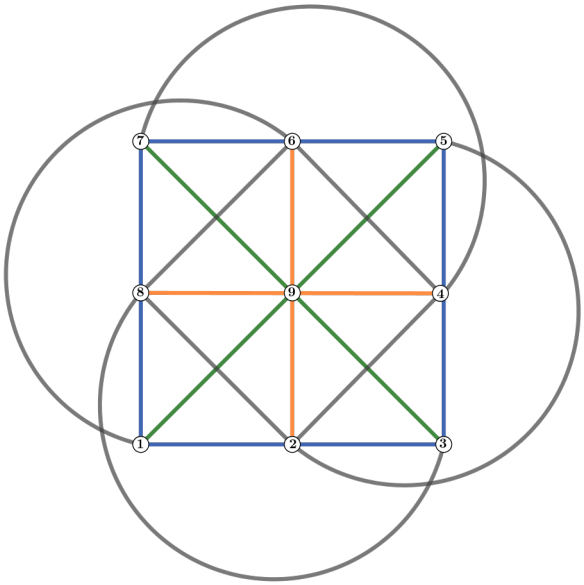
Tada je $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ dizajn s parametrima 2-$(9, 3, 1)$. Kroz svaku točku dizajna prolazi točno $r = 4$ bloka te je ukupan broj blokova jednak $b = 12$ (slika 1.2).

Dizajni iz primjera 1.4 i 1.5 su jedinstveni, tj. svi dizajni s navedenim parametrima su međusobno izomorfni (više o tome u potpoglavlju 2.3). Pritom je u slučaju dizajna s parametrima 2-$(7, 3, 1)$ riječ o projektivnom dizajnu $PG_1(2, 2)$, poznatom kao Fanova

ravnina (projektivna ravnina reda 2), odnosno u slučaju dizajna s parametrima 2-$(9, 3, 1)$ je riječ o afinom dizajnu $AG_1(2, 3)$ (afina ravnina reda 3). Više o projektivnim i afinim dizajnima reći ćemo u potpoglavlju 1.4.



Slika 1.1: 2-$(7, 3, 1)$ dizajn



Slika 1.2: 2-$(9, 3, 1)$ dizajn

Primjer 1.6. *Neka je $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, v\}$ skup točaka, a $\mathcal{B}$ familija svih k-članih podskupova od $\mathcal{V}$. Tada je $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$ dizajn s parametrima t-$(v, k, \binom{v-t}{k-t})$.*

Dizajne iz primjera 1.6 nazivamo još i **trivijalnim dizajnima** ili potpunim dizajnima. U slučaju $t = 2$, puni naziv za dizajne koji nisu potpuni je **balansirani nepotpuni blokovni dizajn** ili BIBD (eng. *balanced incomplete block design*).

Poznato je [89] da su za $k \geq v-t$ jedini primjeri dizajna trivijalni ili njihovi višekratnici (skup $\mathcal{B}$ sadrži svaki k-člani podskup od $\mathcal{V}$ ponovljen m puta, za neki $m \geq 1$). R. M. Wilson [94] je dokazao postojanje netrivijalnih t-dizajna za proizvoljno velike t:

Teorem 1.7. *Za sve prirodne brojeve t, k, v takve da je $t < k < v - t$ postoji netrivijalni t-(v, k, λ) dizajn za neki λ.*

Dizajni iz teorema 1.7 nisu nužno jednostavni, tj. mogu imati ponovljene blokove. Postojanje jednostavnih t-dizajna za proizvoljno velike t dokazao je L. Teirlinck [88].

Osim uvjeta djeljivosti iz korolara 1.3, drugi nužan uvjet za egzistenciju t-dizajna slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 1.8. *(**Fisherova nejednakost**) Ako postoji t-(v, k, λ) dizajn s $t \geq 2$ i $v \geq k+1$, onda je $b \geq v$.*

R. A. Fisher je nejednakost iz teorema 1.8 izvorno dokazao za 2-dizajne [35], no postoje razne generalizacije za t-dizajne. Jednu od generalizacija dokazali su D. K. Ray-Chaudhuri i R. M. Wilson [80] i ona je iskazana sljedećim teoremom:

Teorem 1.9. *(**Ray-Chaudhuri-Wilsonova nejednakost**)*

(i) Ako postoji t-(v,k,λ) dizajn takav da je $t=2s$ i ako vrijedi $v \geq k+s$, onda je broj blokova $b \geq \binom{v}{s}$. Štoviše, ako dizajn nije jednostavan, broj različitih blokova također ne može biti manji od $\binom{v}{s}$.

(ii) Ako postoji t-(v,k,λ) dizajn takav da je $t=2s+1$ i ako vrijedi $v-1 \geq k+s$, onda je broj blokova $b \geq 2\binom{v-1}{s}$.

Komplementarna struktura dizajna $\mathcal{D}=(\mathcal{V},\mathcal{B})$, u oznaci $\bar{\mathcal{D}}$, je uređeni par $(\mathcal{V},\bar{\mathcal{B}})$, gdje je $\bar{\mathcal{B}}=\{\mathcal{V}\setminus B \mid B\in\mathcal{B}\}$.

Propozicija 1.10. *Ako je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-(v,k,λ) i vrijedi $v \geq k+t$, onda je komplementarna struktura $\bar{\mathcal{D}}$ dizajn s parametrima t-$(v,v-k,\bar{\lambda})$ za*

$$\bar{\lambda}=\sum_{s=0}^{t}(-1)^s\binom{t}{s}\lambda_s.$$

Dokaz. Neka je $T\subseteq\mathcal{V}$ bilo koji t-člani skup točaka. Broj blokova od $\bar{\mathcal{D}}$ koji sadrže T, u oznaci $\bar{\lambda}$, jednak je broju blokova od $\mathcal{D}$ koji su disjunktni s T. Pomoću formule uključivanja-isključivanja i parametra λ_s iz propozicije 1.2 dolazimo do izraza za $\bar{\lambda}$. □

Nadalje, osim komplementa, za svaki dizajn $\mathcal{D}$ možemo definirati njegov derivirani i rezidualni dizajn.

Definicija 1.11. *Neka je $\mathcal{D}=(\mathcal{V},\mathcal{B})$ dizajn i neka je $P_0\in\mathcal{V}$ jedna njegova točka.* ***Derivirani dizajn*** *od $\mathcal{D}$, u oznaci $\mathrm{der}_{P_0}\mathcal{D}$, je*

$$(\mathcal{V}\setminus P_0, \{B\setminus\{P_0\} \mid B\in\mathcal{B}, P_0\in B\}),$$

a ***rezidualni dizajn*** *od $\mathcal{D}$, u oznaci $\mathrm{res}_{P_0}\mathcal{D}$, je*

$$(\mathcal{V}\setminus P_0, \{B \mid B\in\mathcal{B}, P_0\notin B\}).$$

Derivirani i rezidualni dizajni od $\mathcal{D}$ imaju također strukturu dizajna.

Propozicija 1.12. *Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-(v,k,λ) i neka je $P_0\in\mathcal{V}$ jedna njegova točka. Tada je struktura $\mathrm{der}_{P_0}\mathcal{D}$ dizajn s parametrima $(t-1)$-$(v-1,k-1,\lambda)$, a struktura $\mathrm{res}_{P_0}\mathcal{D}$ je dizajn s parametrima $(t-1)$-$(v-1,k,\lambda_{t-1}-\lambda)$.*

Dokaz. Derivirani dizajn očito ima ukupno $v-1$ točaka i svaki blok sadrži $k-1$ točku. Broj blokova kroz bilo koji $(t-1)$-člani podskup od $\mathcal{V}\setminus P_0$ jednak je broju blokova od $\mathcal{D}$ koji sadrži taj podskup i točku P_0, odnosno jednak je λ.
Rezidualni dizajn također ima ukupno $v-1$ točaka, ali svaki blok sadrži k točaka. Broj blokova kroz bilo koji $(t-1)$-člani podskup od $\mathcal{V}\setminus P_0$ jednak je broju blokova od $\mathcal{D}$ koji sadrži taj podskup, ali ne sadrže točku P_0, odnosno jednak je $\lambda_{t-1}-\lambda$. □

Primjer 1.13. *Neka je D dizajn s parametrima* 2-$(7,3,1)$ *iz primjera 1.4. Komplement od D je dizajn s parametrima* 2-$(7,4,2)$*, derivirani dizajn od $\mathcal{D}$ je dizajn s parametrima* 1-$(6,2,1)$*, a rezidualni dizajn od $\mathcal{D}$ je dizajn s parametrima* 1-$(6,3,2)$*.*

Za t-(v,k,λ) dizajn $\mathcal{D}$ kažemo da je **proširiv** ako postoji $(t+1)$-$(v+1,k+1,\lambda)$ dizajn $\mathcal{D}^*$ takav da je $\mathcal{D} = \operatorname{der}\mathcal{D}^*$, za neku točku P_0. Dizajn $\mathcal{D}^*$ nazivamo **proširenjem** od $\mathcal{D}$. Nužan uvjet za postojanje proširenja dizajna $\mathcal{D}$ iskazan je sljedećom propozicijom:

Propozicija 1.14. *Ako je t-(v,k,λ) dizajn s b blokova proširiv, onda $k+1$ dijeli $b(v+1)$.*

Dokaz. Uvjet dobivamo iz korolara 1.3. □

Primjer 1.15. *Dizajn s parametrima* 2-$(9,3,1)$ *iz primjera 1.5 može se proširiti do* 5*-dizajna. Prvim proširivanjem dobivamo dizajn s parametrima* 3-$(10,4,1)$*, zatim drugim proširivanjem dobivamo dizajn s parametrima* 4-$(11,5,1)$*, dok trećim proširivanjem dobivamo takozvani mali Wittov dizajn s parametrima* 5-$(12,6,1)$ *[96].*

Za kvazisimetrične dizajne posebno su zanimljiva proširenja simetričnih dizajna o kojima ćemo govoriti u poglavlju 1.2.

Dizajne je često korisno prikazati pomoću incidencijske matrice, osobito kada za njihovo proučavanje koristimo računalne metode.

Definicija 1.16. *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{V},\mathcal{B})$ dizajn s parametrima t-(v,k,λ), pri čemu je $\mathcal{V} = \{V_1,\ldots,V_v\}$ skup točaka i $\mathcal{B} = \{B_1,\ldots,B_b\}$ skup blokova.* ***Incidencijska matrica*** *od $\mathcal{D}$ je $v \times b$ matrica $M = [m_{ij}]$ definirana s*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } V_i \in B_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Incidencijska matrica M dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima t-(v,k,λ) ima sljedeća svojstva:

(i) $\sum_{i=1}^{v} m_{ij} = k$, za svaki $1 \le j \le b$,

(ii) $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} = r$, za svaki $1 \le i \le v$,

(iii) $\sum_{j=1}^{b} m_{ij} \cdot m_{i'j} = \lambda_2$, za sve $1 \le i,\, i' \le v$, $i \ne i'$.

U slučaju $t = 2$, incidencijska matrica $M = [m_{ij}]$ zadovoljava sljedeće jednadžbe:

$$M \cdot M^{\tau} = (r-\lambda)I + \lambda J,$$
$$M \cdot J = rJ,$$
$$J \cdot M = kJ,$$

pri čemu je I jedinična matrica, a J matrica kojoj su svi unosi 1.

Primjer 1.17. *Incidencijska matrica dizajna s parametrima* 2-$(7,3,1)$ *iz primjera 1.4 je* 7×7 *matrica*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U teoriji dizajna posebno se proučavaju t-dizajni s dodatnim svojstvima, kao što su **simetrični** dizajni kod kojih je broj blokova jednak broju točaka, **Steinerovi** dizajni kod kojih je $\lambda = 1$, i mnogi drugi. S obzirom da su neki od njih ujedno i kvazisimetrični, više o njima reći ćemo u poglavljima 1.2 i 1.4.

1.2 Kvazisimetrični t-dizajni

Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-(v,k,λ) te neka je $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_b\}$ skup blokova od $\mathcal{D}$. Veličine presjeka dvaju različitih blokova dizajna nazivaju se **presječni brojevi**. Pretpostavimo da su $x_1, x_2, \ldots, x_s$ presječni brojevi dizajna $\mathcal{D}$. Broj s naziva se **stupanj dizajna** $\mathcal{D}$. Odnos broja točaka v, broja blokova b i broja presječnih brojeva s iskazan je sljedećim teoremom [80]:

Teorem 1.18. *Neka je* $\mathcal{D}$ *dizajn takav da za svaka dva bloka* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *vrijedi* $|B_1 \cap B_2| \in \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$*, pri čemu su* $0 \leq x_1 < \ldots \leq x_s < k$ *zadani brojevi. Tada je* $b \leq \binom{v}{s}$.

Iz teorema 1.9 i 1.18 slijedi da u slučaju $t = 2s$ i $v \geq k + s$ dizajn $\mathcal{D}$ ima barem s presječnih brojeva. U specijalnom slučaju broj presječnih brojeva možemo ograničiti i odozgo:

Teorem 1.19. *Neka je* $\mathcal{D}$ *dizajn takav da je* $t = 2s$ *i* $v \geq k + s$*. Tada dizajn* $\mathcal{D}$ *ima* $b = \binom{v}{s}$ *blokova ako i samo ako ima točno* s *presječnih brojeva.*

Dokaz teorema može se naći u [80]. Dizajne koji imaju svojstva iz teorema 1.19 nazivamo **napetim dizajnima**.

Primjer 1.20. *Postoji dizajn s parametrima* 2-$(16,7,14)$ *kojemu je skup presječnih brojeva* $\{0,1,2,3,4,5,6\}$*, odnosno blokovi se sijeku u svim mogućim veličinama.*

Dizajn iz primjera 1.20 konstruiran je pomoću *tabu-search* algoritma i njegova incidencijska matrica dostupna je na [58]. Presječni brojevi dizajna izračunati su u `GAP`-u [37].

S obzirom na broj presječnih brojeva dizajna, kvazisimetrične dizajne možemo promatrati kao generalizaciju simetričnih dizajna.

Definicija 1.21. *Dizajn $\mathcal{D}$ je **simetričan** ako je broj točaka jednak ukupnom broju blokova, tj. $v = b$.*

Uvjet iz definicije 1.21 ekvivalentan je uvjetu $r = k$. U prethodnom poglavlju naveli smo da netrivijalni dizajni postoje za proizvoljno velike vrijednosti parametra t. Nasuprot tome, netrivijalni simetrični dizajni postoje samo za $t \leq 2$. Ta tvrdnja je jednostavna posljedica Ray-Chaudhuri-Wilsonovog teorema 1.9 iz kojeg slijedi da dizajni s $t \geq 3$ moraju imati $b > v$ blokova, što je nemoguće u slučaju simetričnih dizajna.

Korolar 1.22. *Ako postoji netrivijalni simetrični t-(v, k, λ) dizajn, onda je $t \leq 2$.*

S obzirom na činjenicu iz korolara 1.22, iz teorema 1.19 slijedi da simetrični 2-dizajni imaju točno jedan presječni broj, odnosno da su stupnja 1.

Korolar 1.23. *Dizajn s parametrima 2-(v, k, λ) i $v > k$ je simetričan ako i samo ako se svaka dva bloka sijeku u λ točaka.*

Nužan uvjet za egzistenciju simetričnih 2-dizajna iskazan je sljedećim teoremom:

Teorem 1.24. *(**Bruck-Ryser-Chowla**) Neka postoji simetrični 2-(v, k, λ) dizajn reda $n = k - \lambda$.*

(i) Ako je v paran, onda je n kvadrat prirodnog broja.

(ii) Ako je v neparan, onda jednadžba $nx^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2 = z^2$ ima netrivijalno cjelobrojno rješenje.

Kvazisimetrični dizajni su dizajni koji imaju najviše dva presječna broja, odnosno stupanj im je najviše 2.

Definicija 1.25. *Dizajn $\mathcal{D}$ je **kvazisimetričan** ako se svaka dva bloka sijeku u x ili u y točaka, pri čemu je $0 \leq x < y \leq k$.*

Jednostavni primjeri kvazisimetričnih dizajna su simetrični i Steinerovi dizajni.

Primjer 1.26. *Simetrični 2-(v, k, λ) dizajn je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x = \lambda$ i proizvoljnim y, ili obrnuto.*

Primjer 1.27. *Steinerov 2-$(v, k, 1)$ dizajn je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 1$.*

Dizajn s parametrima 2-$(7, 3, 1)$ iz primjera 1.4 je primjer Steinerovog, simetričnog, pa time i kvazisimetričnog 2-dizajna. Dizajn s parametrima 2-$(9, 3, 1)$ iz primjera 1.5 je Steinerov, pa time i kvazisimetričan, ali nije simetričan. Primjer kvazisimetričnog dizajna koji nije niti Steinerov niti simetričan je višekratnik simetričnog dizajna kod kojeg je svaki blok ponovljen $m \geq 2$ puta.

Primjer 1.28. *Višekratnik simetričnog* $2\text{-}(v,k,\lambda)$ *dizajna je kvazisimetričan* $2\text{-}(v,k,m\lambda)$ *dizajn, pri čemu je* $m \geq 2$*, s presječnim brojevima* $x = \lambda$ *i* $y = k$*.*

Višekratnici simetričnog dizajna su ujedno i jedini primjeri kvazisimetričnih dizajna koji nisu jednostavni.

Propozicija 1.29. *Neka je* $\mathcal{D}$ *kvazisimetrični dizajn s presječnim brojevima* x *i* y*. Broj blokova* m_x *koji sijeku neki čvrsti blok dizajna* $\mathcal{D}$ *u* x*, odnosno* m_y *u* y *točaka može se izraziti kao*

$$m_x = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x} \quad i \quad m_y = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x}. \tag{1.3}$$

Dokaz. Neka je $B_0 \in \mathcal{B}$ neki čvrsti blok dizajna $\mathcal{D}$. Svaki drugi blok $B \neq B_0$ dizajna $\mathcal{D}$ siječe blok B_0 u x ili u y točaka, pri čemu s m_x i m_y označimo broj takvih blokova koji blok B_0 sijeku u x, odnosno u y točaka. Tada očito vrijedi:

$$m_x + m_y = b - 1. \tag{1.4}$$

Nadalje, dvostrukim prebrojavanjem parova $\{(T,B) \mid T \in B_0 \cap B, B \neq B_0\}$ dobivamo jednadžbu:

$$x\, m_x + y\, m_y = k(r-1). \tag{1.5}$$

Dobivene jednadžbe (1.4) i (1.5) imaju jedinstveno rješenje

$$m_x = \frac{y(b-1) - k(r-1)}{y-x}, \quad m_y = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y-x},$$

iz čega vidimo da brojevi m_x i m_y ne ovise o izboru bloka B_0, već samo o parametrima kvazisimetričnog dizajna i njegovim presječnim brojevima. □

Korolar 1.30. *Svaki kvazisimetrični dizajn s ponovljenim blokovima je višekratnik simetričnog dizajna.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični $t\text{-}(v,k,\lambda)$ dizajn s presječnim brojevima x i y. S obzirom da dizajn $\mathcal{D}$ ima ponovljene blokove, tada je $y = k$ i svaki blok se ponavlja $m = m_y + 1$ puta, pri čemu je m_y broj definiran u dokazu propozicije 1.29. Iz toga slijedi da je $\mathcal{D}$ m-struki višekratnik nekog $t\text{-}(v,k,\lambda/m)$ dizajna u kojem se svaka dva bloka sijeku u $x = \lambda/m$ točaka. Iz korolara 1.23 slijedi da je dizajn $\mathcal{D}$ simetričan i $t = 2$. □

Kao posljedicu teorema 1.18 dobivamo da za kvazisimetrične dizajne bez ponovljenih blokova vrijedi sljedeće:

Korolar 1.31. *Kvazisimetrični dizajn bez ponovljenih blokova ima najviše* $b \leq \binom{v}{2}$ *blokova.*

Direktni dokaz tvrdnje iz korolara 1.31 može se naći u [84].

Vidjeli smo da simetrični dizajni postoje samo za $t \leq 2$. Egzistencija kvazisimetričnih t-dizajna također je ograničena za određene parametre t te je ona iskazana teoremom 1.32. Tvrdnju je prvi dokazao P. Cameron [23].

Teorem 1.32. *Ako postoji netrivijalni kvazisimetrični t-(v, k, λ) dizajn, onda je $t \leq 4$.*

Dokaz. Ako dizajn ima ponovljene blokove, onda iz korolara 1.30 slijedi da je višekratnik simetričnog dizajna, što zajedno s korolarom 1.22 daje $t \leq 2$. Ako dizajn nema ponovljenih blokova, onda iz korolara 1.31 slijedi da je $b \leq \binom{v}{2}$. Nadalje, za $t \geq 5$ iz teorema 1.9 je broj blokova ograničen i odozgo s $b \geq 2\binom{v-1}{2}$. Iz toga slijedi da je $v \in \{1, 2, 3, 4\}$ što uključuje samo trivijalne dizajne. □

Klasifikacija kvazisimetričnih 4-dizajna je potpuno riješena te je dana sljedećim teoremom:

Teorem 1.33. *Derivirani veliki Wittov dizajn* 4-$(23, 7, 1)$ *i njegov komplement* 4-$(23, 16, 52)$ *su jedini netrivijalni kvazisimetrični* 4*-dizajni.*

Teorem 1.33 je izvorno bio dokazan za napete 4-dizajne i dokaz je objavljen u nizu članaka [12, 32, 45, 46]. S obzirom na direktnu posljedicu teorema 1.19, koja je iskazana korolarom 1.34, tvrdnja vrijedi i za kvazisimetrične dizajne.

Korolar 1.34. *Kvazisimetrični t-(v, k, λ) dizajn s $4 \leq k \leq v - 4$ ima $b = \binom{v}{2}$ blokova ako i samo ako je $t = 4$.*

Presječni brojevi kvazisimetričnih 4-(v, k, λ) dizajna mogu se izračunati pomoću Delsarteova polinoma [80] zapisanog preko parametara dizajna:

Teorem 1.35. *Presječni brojevi 4-(v, k, λ) dizajna s $4 \leq k \leq v - 4$ i $b = \binom{v}{2}$ blokova su nultočke kvadratnog polinoma:*

$$f(x) = x^2 - \left(\frac{2(k-1)(k-2)}{v-3} + 1\right)x + \lambda\left(2 + \frac{4}{k-3}\right). \tag{1.6}$$

Klasifikaciju kvazisimetričnih 3-dizajna s presječnim brojem $x = 0$ riješio je P. Cameron [22], dok je za dizajne s presječnim brojem $x > 0$ poznato vrlo malo primjera te je postavljena hipoteza [83] da su ti primjeri ujedno i jedini kvazisimetrični 3-dizajni s presječnim brojem $x > 0$. P. Cameron je problem egzistencije kvazisimetričnih 3-dizajna s presječnim brojem $x = 0$ riješio promatrajući proširenja simetričnih 2-dizajna. Njihov odnos opisan je propozicijama 1.36 i 1.37.

Propozicija 1.36. *Ako je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn proširiv, onda je njegovo proširenje kvazisimetrični 3-$(v + 1, k + 1, \lambda)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = \lambda + 1$.*

Propozicija 1.37. *Svaki kvazisimetrični* 3*-dizajn s presječnim brojem* $x = 0$ *je proširenje simetričnog dizajna.*

Dvije važne klase simetričnih dizajna su konačne projektivne ravnine i Hadamardovi dizajni koji imaju parametre oblika 2-$(n^2+n+1, n+1, 1)$, odnosno 2-$(4n-1, 2n-1, n-1)$, pri čemu je n red dizajna. Poznati su mnogi primjeri projektivnih ravnina reda $n = q$, gdje je q prim potencija, dok nije poznat niti jedan primjer u kojem red nije prim potencija. S druge strane, pretpostavlja se da Hadamardovi dizajni postoje za sve redove $n \in \mathbb{N}$. Poznato je da su svi Hadamardovi dizajni proširivi, dok su jedine proširive projektivne ravnine reda $n = 2$ i $n = 4$.

P. Cameron [22] je odredio sve moguće parametre proširivih simetričnih dizajna i oni su navedeni u sljedećem teoremu:

Teorem 1.38. *Ako je simetrični* 2-(v, k, λ) *dizajn proširiv, onda vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

1. $v = 4\lambda + 3$, $k = 2\lambda + 1$ *(Hadamardov dizajn),*
2. $v = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$, $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$,
3. $v = 111$, $k = 11$, $\lambda = 1$,
4. $v = 495$, $k = 39$, $\lambda = 3$.

Iz propozicije 1.37 slijedi da Cameronov teorem ujedno klasificira kvazisimetrične 3-dizajne s presječnim brojem $x = 0$. Postoji hipoteza da Hadamardovi dizajni iz slučaja 1. postoje za sve $\lambda \in \mathbb{N}$. Za $\lambda = 1$ Hadamardov dizajn podudara se s Fanovom ravninom. U slučaju 2. poznato je da postoje dizajni za $\lambda = 1$ i $\lambda = 2$, dok za $\lambda \geq 3$ nije poznato postoje li simetrični dizajni niti mogu li se proširiti. C. W. H. Lam, L. Thiel i S. Swiercz [67] dokazali su da projektivna ravnina reda 10 ne postoji. Iz toga slijedi da dizajn s parametrima 2-$(111, 11, 1)$ iz slučaja 3. ne postoji. Za dizajn iz slučaja 4. nije poznato postoji li.

Jedini poznati primjeri kvazisimetričnih 3-dizajna s presječnim brojem $x > 0$ su derivirani Wittov dizajn 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$ (koji je ujedno i 3-$(23, 7, 5)$ dizajn) i njegov rezidualni dizajn 3-$(22, 7, 4)$, $x = 1$, $y = 3$, te njihovi komplementi 4-$(23, 16, 52)$, $x = 10$, $y = 12$ i 3-$(22, 15, 52)$, $x = 9$, $y = 11$. Dokazano je da su derivirani Wittov dizajn i njegov rezidual jedini primjeri kvazisimetričnih 3-dizajna s presječnim brojem $x = 1$ [21, 79].

Egzistencija kvazisimetričnih 2-dizajna je težak otvoren problem te postoje mnoge trojke parametara (v, k, λ) za koje egzistencija dizajna nije poznata. Više o njihovim dodatnim svojstvima i povezanosti s drugim kombinatoričkim strukturama reći ćemo u poglavlju 1.3, a o njihovoj klasifikaciji i poznatim familijama u poglavlju 1.4.

Navedeni rezultati o egzistenciji i klasifikaciji kvazisimetričnih t-dizajna prikazani su u tablici 1.1:

Tablica 1.1: Klasifikacija kvazisimetričnih t-dizajna

$t \geq 5$	Kvazisimetrični dizajni ne postoje.
$t = 4$	4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$, i njegov komplement 4-$(23, 16, 52)$, $x = 10$, $y = 12$
$t = 3$	Za $x = 0$: 3-$(4(\lambda+1), 2(\lambda+1), \lambda)$ 3-$((\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+5), (\lambda+1)(\lambda+2), \lambda)$ 3-$(496, 40, 3)$ Za $x = 1$: 4-$(23, 7, 1)$, $x = 1$, $y = 3$, i njegov komplement 4-$(23, 16, 52)$, $x = 10$, $y = 12$ 3-$(22, 7, 4)$, $x = 1$, $y = 3$, i njegov komplement 3-$(22, 15, 52)$, $x = 9$, $y = 11$ Za $x \geq 2$: postavljena je hipoteza da dizajni ne postoje.
$t = 2$	Potpuna klasifikacija je otvoren problem.

1.3 Kvazisimetrični 2-dizajni

U ovom poglavlju navedeni su važni rezultati koji se koriste u disertaciji.

Komplement kvazisimetričnog 2-dizajna je kvasimetrični 2-dizajn i vrijedi sljedeće:

Lema 1.39. *Komplement kvazisimetričnog* 2-(v, k, λ) *dizajna s presječnim brojevima* x *i* y *je kvazisimetrični* 2-$(v, v-k, b-2r+\lambda)$ *dizajn s presječnim brojevima* $\bar{x} = v - 2k + x$ *i* $\bar{y} = v - 2k + y$, $\bar{x} < \bar{y}$.

U sljedećim propozicijama i teoremima iskazani su poznati uvjeti na parametre kvazisimetričnih 2-dizajna koje ćemo koristiti pri generiranju tablice iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna u poglavlju 1.5.

Propozicija 1.40. *Neka je* 2-(v, k, λ) *kvazisimetrični dizajn s presječnim brojevima* x *i* y, *pri čemu je* $x < y$. *Tada vrijedi sljedeće:*

(i) $vr = bk$,

(ii) $\lambda(v-1) = r(k-1)$,

(iii) $0 \leq x \leq \frac{k(r-1)}{b-1}$,

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) slijede direktno iz formula 1.2, a tvrdnja (iii) slijedi iz propozicije 1.29 i činjenice da je $m_y \geq 0$. □

Propozicija 1.41. *Ako postoji kvazisimetrični* 2-(v, k, λ) *dizajn s presječnim brojevima* x *i* y*, pri čemu je* $x < y$*, onda vrijedi*

$$k(r-1)(x+y-1) + xy(1-b) = k(k-1)(\lambda-1). \tag{1.7}$$

Dokaz. Neka je B_0 fiksni blok. Dvostrukim prebrojavanjem parova $\{(T, B) \mid B \neq B_0, T \in B \cap B_0\}$ dobivamo jednadžbu

$$x\,(b - m_y - 1) + y\,m_y = k(r-1), \tag{1.8}$$

pri čemu je m_y definiran formulom (1.3).
Dvostrukim prebrojavanjem trojki $\{(T, T', B) \mid B \neq B_0,\, T, T' \in B \cap B_0,\, T \neq T'\}$ dobivamo drugu jednadžbu

$$x\,(b - m_y - 1)(x-1) + y\,m_y(y-1) = k(r-1)(\lambda-1). \tag{1.9}$$

Množenjem jednadžbe (1.8) s $x+y-1$ i oduzimanjem od jednadžbe (1.9) slijedi tvrdnja. □

Iz propozicije 1.41 slijedi da za zadane parametre kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna iz jednog presječnog broja možemo jednoznačno odrediti drugi. Dodatne uvjete na parametre kvazisimetričnih 2-dizajna dali su A. Neumaier [74] i A. R. Calderbank [19] te su oni iskazani teoremima 1.42 i 1.43.

Teorem 1.42. *Parametri kvazisimetričnog* 2-(v, k, λ) *dizajna* $\mathcal{D}$ *s presječnim brojevima* x *i* y *zadovoljavaju nejednakost* $B(B-A) \leq AC$*, gdje je*

$$\begin{aligned} A &= (v-1)(v-2), \\ B &= r(k-1)(k-2), \\ C &= rD(y-1)(y-2) + r(r-1-D)(x-1)(x-2), \\ D &= \tfrac{(k-1)(\lambda-1)-(r-1)(x-1)}{y-x}. \end{aligned}$$

Jednakost se dostiže ako i samo je $\mathcal{D}$ 3*-dizajn.*

Teorem 1.43. *Parametri kvazisimetričnog* 2-(v, k, λ) *dizajna* $\mathcal{D}$ *s presječnim brojevima* x *i* y *zadovoljavaju nejednakosti:*

(i) $f_3(v, k, x, y) \geq 0$,

(ii) $f_4(v, k, x, y) \geq 0$,

pri čemu su f_3 *i* f_4 *sljedeći polinomi:*

$$\begin{aligned} f_3(v,k,x,y) = \;& (v-1)(v-2)(k-x)(k-y) - k(v-k)(v-2)(2k-x-y) \\ & + k(v-k)(k(v-k)-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(v,k,x,y) = \; & -(v-6)(v-3)(v-1)(k-x)(k-y)(2k-x-y) \\ & +(v-6)(v-3)k(v-k)(2k-x-y)^2 \\ & -2(v-3)k(v-k)(2k(v-k)-3v)(2k-x-y) \\ & +(v-3)(k(v-k)(3v+2)-6v(v-1))(k-x)(k-y) \\ & +k(v-k)(3k(v-k)(k(v-k)-2(v-1))+5v-3). \end{aligned}$$

Jednakost u (i) se dostiže ako i samo je $\mathcal{D}$ 3-dizajn, a u (ii) ako i samo je $\mathcal{D}$ 4-dizajn.

Uvjet (i) iz Calderbankova teorema 1.43 ekvivalentan je uvjetu iz teorema 1.42.

Kvazisimetrični 2-dizajni povezani su s drugim kombinatoričkim strukturama, kao što su **jako regularni grafovi** i **samoortogonalni kodovi**. Njihovu vezu objasnit ćemo u potpoglavljima 1.3.1 i 1.3.2.

1.3.1 Kvazisimetrični 2-dizajni i grafovi

Povezanost kvazisimetričnih dizajna s jako regularnim grafovima daje im dodatna svojstva te uvjete na njihove parametre.

Definicija 1.44. ***Graf*** Γ *je uređeni par (V, E), gdje je V konačan skup elemenata koje nazivamo* ***vrhovima****, a E familija dvočlanih skupova vrhova koje nazivamo* ***bridovima****.*

Stupanj vrha je broj susjednih vrhova grafa Γ. **Put u grafu** Γ je niz međusobno različitih vrhova $V_0, \ldots, V_n$, pri čemu su V_{i-1} i V_i susjedni za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ako je $V_0 = V_n$, onda put nazivamo **ciklusom**. Za graf Γ kažemo da je **povezan** ako postoji put između bilo koja dva vrha u grafu. U suprotnome, graf je nepovezan.

Definicija 1.45. *Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima x i y, pri čemu je $x < y$. Dizajnu $\mathcal{D}$ pridružujemo graf $\Gamma(\mathcal{D})$ na sljedeći način:*

- *vrhovi grafa su blokovi,*
- *dva vrha su povezana bridom ako se odgovarajući blokovi sijeku u y točaka.*

Graf $\Gamma(\mathcal{D})$ pridružen dizajnu $\mathcal{D}$ na ovaj način naziva se ***blokovni graf****.*

Dizajnu $\mathcal{D}$ i njegovom komplementu $\bar{\mathcal{D}}$ pridružen je isti blokovni graf zato što se blokovi B_1 i B_2 dizajna $\mathcal{D}$ sijeku u y točaka ako i samo se njihovi komplementarni blokovi $\mathcal{V} \setminus B_1$ i $\mathcal{V} \setminus B_2$ dizajna $\bar{\mathcal{D}}$ sijeku u $\bar{y}$ točaka.

R. C. Bose [7] je dokazao da je blokovni graf u slučaju $\lambda = 1$ jako regularan s parametrima $SRG(b, k(r-1), r-2+(k-1)^2, k^2)$.

Definicija 1.46. *Za graf Γ kažemo da je* ***jako regularan*** *(eng. strongly regular graph) s parametrima $SRG(b, a, c, d)$ ako ima b vrhova, svaki vrh je stupnja a, svaka dva susjedna vrha imaju c zajedničkih susjeda i svaka dva nesusjedna vrha imaju d zajedničkih susjeda.*

Rezultat o blokovnom grafu za $\lambda = 1$ su S. S. Shrikhande i Bhagwandas [86] proširili na općenite kvazisimetrične dizajne. Dokaz teorema dali su i J. M. Goethals i J. J. Seidel [38].

Teorem 1.47. *Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima x i y te neka je $\Gamma(\mathcal{D})$ njemu pridružen blokovni graf. Pretpostavimo da je graf $\Gamma(\mathcal{D})$ povezan. Tada je $\Gamma(\mathcal{D})$ jako regularan graf s parametrima $SRG(b, a, c, d)$ za*

$$a = \frac{k(r-1) - x(b-1)}{y - x}, \quad c = a + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_1\Theta_2 \quad i \quad d = a + \Theta_1\Theta_2,$$

pri čemu je $\Theta_1 = \frac{r-\lambda-k+x}{y-x}$ *i* $\Theta_2 = -\frac{k-x}{y-x}$.

Općenito, svaki graf Γ možemo opisati matricom susjedstva. Matrica susjedstva grafa Γ iz teorema 1.47 je $b \times b$ matrica $A = [a_{ij}]$, pri čemu je a_{ij} broj bridova između i-tog i j-tog vrha. Matrica A zadovoljava jednadžbu $A^2 = aI + cA + d(J - I - A)$. Veza između matrice incidencije M dizajna $\mathcal{D}$ i matrice susjedstva A pridružene blokovnom grafu dizajna je $(y - x)A = M^\tau \cdot M + (x - k)I - xJ$, pri čemu je I jedinična matrica, a J matrica kojoj su svi unosi 1. Spektar grafa Γ čine svojstvene vrijednosti: $\Theta_0 = a$ kratnosti 1, Θ_1 kratnosti $v - 1$ i Θ_2 kratnosti $b - v$. Parametri Θ_1 i Θ_2 se mogu dobiti kao cjelobrojna rješenja kvadratne jednadžbe

$$\Theta^2 + (d - c)\Theta + d - a = 0. \tag{1.10}$$

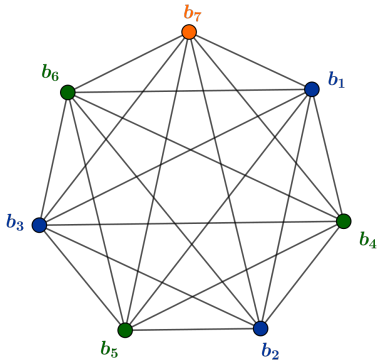
Podatci o egzistenciji jako regularnih grafova dostupni su u Brouwerovoj tablici [13]. Teorem 1.47 implicira da svaki jako regularni graf nije nužno blokovni graf nekog kvazisimetričnog dizajna. Na primjer, u Brouwerovoj tablici poznato je da postoji jako regularni graf s parametrima $SRG(53, 26, 12, 13)$, no rješenja jednažbe (1.10) za te parametre nisu cjelobrojna te taj graf ne može biti blokovni graf nekog kvazisimetričnog dizajna. Osim toga, teorem nam omogućuje da utvrdimo nepostojanje određenih kvazisimetričnih dizajna ako znamo da ne postoje njima odgovarajući jako regularni grafovi.

Primjer 1.48. *Blokovni graf 2-$(7, 3, 1)$ dizajna je $SRG(7, 6, 5, 9)$ (slika 1.3), a 2-$(9, 3, 1)$ dizajna je $SRG(12, 9, 6, 9)$ (slika 1.4).*

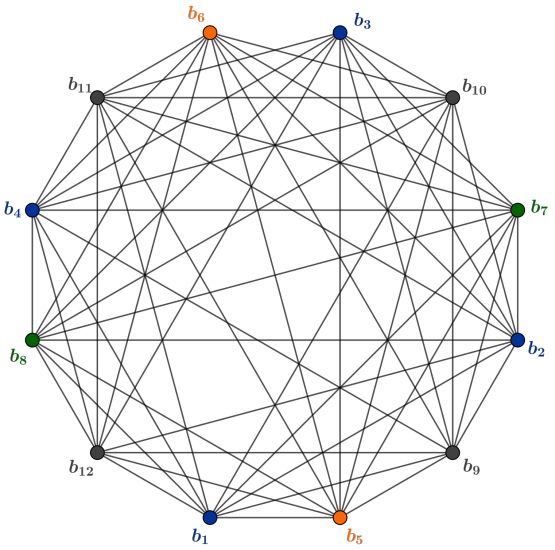
Korolar 1.49. *Ako postoji kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima x i y, onda $y - x$ dijeli $k - x$ i $r - \lambda$.*

Uvjeti djeljivosti iz korolara 1.49 proizlaze iz činjenice da parametri Θ_1 i Θ_2 iz teorema 1.47 moraju biti cjelobrojni. Ako su zadovoljeni navedeni uvjeti djeljivosti, onda su i ostali parametri blokovnog grafa $\Gamma(\mathcal{D})$ cjelobrojni.

Propozicija 1.50. *Neka je graf Γ jako regularan s parametrima $SRG(b, a, c, d)$. Tada je njegov komplement $\bar{\Gamma}$ jako regularan s parametrima $SRG(b, b-1-a, b-2a+d, b-2a+c)$.*



Slika 1.3: $SRG(7, 6, 5, 9)$



Slika 1.4: $SRG(12, 9, 6, 9)$

Iz teorema 1.47 i propozicije 1.50 slijedi da kvazisimetrični dizajn s parametrima 2-$(91, 35, 51)$, $x = 7$ i $y = 14$ ne postoji jer ne postoji komplement njemu pridruženog jako regularnog grafa $SRG(351, 320, 292, 288)$. Parametri komplementarnog grafa bili bi $SRG(351, 30, -1, -59)$.

1.3.2 Kvazisimetrični 2-dizajni i kodovi

Kao i u slučaju jako regularnih grafova, povezanost sa samoortogonalnim kodovima daje dodatne uvjete na parametre kvazisimetričnih dizajna. Važne rezultate o egzistenciji, neegzistenciji i jedinstvenosti kvazisimetričnih dizajna dali su A. R. Calderbank [17, 18] i V. Tonchev [91].

Definicija 1.51. ***Linearni kod*** *C duljine n i dimenzije k je k-dimenzionalni potprostor n-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{F}_q^n$, pri čemu je q prim potencija, a $\mathbb{F}_q$ konačno polje reda q.*

Elemente koda C nazivamo **kodnim riječima** i pišemo ih u obliku vektora redaka. **Generirajuća matrica** linearnog koda C je matrica dimenzije $k \times n$ kojoj retci čine bazu od C. **Minimalna težina** koda C definirana je na sljedeći način:

$$d = \min\{w(x) \mid x \in C,\ x \neq 0\},$$

pri čemu je $w(x) = |\{i \mid x_i \neq 0\}|$ težina riječi koda C. **Težinski polinom** (ili **enumerator**) koda C je

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i,$$

pri čemu je A_i broj riječi koda C težine i. Parametre linearnog koda C zapisujemo kao $[n, k, d, q]$.

Definicija 1.52. *Neka je C linearni kod.* ***Ortogonalni*** *(ili* ***dualni****) kod $C^\perp$ je*

$$C^\perp = \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid x \cdot y = 0, \quad za\ sve\ x \in C\},$$

gdje je $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ produkt vektora $x, y \in \mathbb{F}_q^n$. Kod C je ***samoortogonalan*** *ako je $C \subseteq C^\perp$ i* ***samodualan*** *ako je $C = C^\perp$.*

Sljedeća lema prikazuje na koji način možemo povezati samoortogonalni kod s kvazisimetričnim dizajnom kojem su presječni brojevi iste parnosti:

Lema 1.53. *Neka je M incidencijska matrica kvazisimetričnog 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y takvima da vrijedi $k \equiv x \equiv y \pmod 2$. Tada vrijedi sljedeće:*

(i) Ako je k paran, onda je linearni kod duljine v i generirajućom matricom M^τ samoortogonalan.

(ii) Ako je k neparan, onda matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ \vdots & M^\tau \\ 1 & \end{bmatrix}$$

generira samoortogonalan kod duljine $v + 1$.

Dokaz leme može se naći u [91]. Osim nje, u istom članku dokazane su i sljedeće dvije leme koje se odnose na minimalnu težinu pripadajućeg koda nekog dizajna:

Lema 1.54. *Ako je M incidencijska matrica 2-(v, k, λ) dizajna, onda dual linearnog koda generiranog matricom M^τ ima minimalnu težinu $d \geq (r + \lambda)/\lambda$.*

Lema 1.55. *Ako je M incidencijska matrica 2-(v, k, λ) dizajna, onda dual linearnog koda generiranog matricom iz leme 1.53 (ii) ima minimalnu težinu $d \geq \min\{(b+r)/r, (r+\lambda)/\lambda\}$.*

Koristeći navedene leme, V. Tonchev [91] je dokazao jedinstvenost do na izomorfizam kvazisimetričnih dizajna sa sljedećim parametrima:

- 2-$(21, 6, 4)$, $x = 0$ i $y = 2$,
- 2-$(21, 7, 12)$, $x = 1$ i $y = 3$,
- 2-$(22, 7, 16)$, $x = 1$ i $y = 3$,

te neegzistenciju kvazisimetričnih dizajna s parametrima:

- 2-$(28, 7, 16)$, $x = 1$ i $y = 3$,
- 2-$(29, 7, 12)$, $x = 1$ i $y = 3$.

Osim navedenih rezultata, koristeći kodove V. Tonchev [90] je klasificirao kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(31, 7, 7)$, $x = 1$, $y = 3$ i dokazao da postoji točno pet takvih dizajna do na izomorfizam.

Veliki doprinos u traženju nužnih uvjeta za egzistenciju kvazisimetričnih 2-dizajna dao je A. R. Caldebrank te su oni iskazani u sljedeća dva teorema:

Teorem 1.56. *Neka je $\mathcal{D}$ 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x_1, \ldots, x_s$ takvima da je $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_s \equiv x \pmod 2$. Tada vrijedi bar jedna od sljedećih tvrdnji:*

(i) $r \equiv \lambda \pmod 4$,

(ii) $x \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 4$, $v \equiv \pm 1 \pmod 8$,

(iii) $x \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv v \pmod 4$, $v \equiv \pm 1 \pmod 8$.

Teorem 1.57. *Neka je p neparan prost broj i neka je $\mathcal{D}$ 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima $x_1, \ldots, x_s$ takvima da je $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_s \equiv x \pmod p$. Tada vrijedi bar jedna od sljedećih tvrdnji:*

(i) $r \equiv \lambda \pmod{p^2}$,

(ii) $v \equiv 0 \pmod 2$, $v \equiv k \equiv x \equiv 0 \pmod p$, $(-1)^{v/2}$ *je kvadrat u* $\mathbb{F}_p$,

(iii) $v \equiv 1 \pmod 2$, $v \equiv k \equiv x \not\equiv 0 \pmod p$, $(-1)^{(v-1)/2}$ *je kvadrat u* $\mathbb{F}_p$,

(iv) $r \equiv \lambda \equiv 0 \pmod p$ *i vrijedi bar jedna od tvrdnji:*

- *(a)* $v \equiv 0 \pmod 2$, $v \equiv k \equiv x \not\equiv 0 \pmod p$,
- *(b)* $v \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv x \not\equiv 0 \pmod p$, v/x *je nekvadrat u* $\mathbb{F}_p$,
- *(c)* $v \equiv 1 \pmod{2p}$, $r \equiv 0 \pmod{p^2}$, $k \equiv x \not\equiv 0 \pmod p$,
- *(d)* $v \equiv p \pmod{2p}$, $k \equiv x \equiv 0 \pmod p$,
- *(e)* $v \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv x \equiv 0 \pmod p$, v *je nekvadrat u* $\mathbb{F}_p$,
- *(f)* $v \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv x \equiv 0 \pmod p$, v *i* $(-1)^{(v-1)/2}$ *su kvadrati u* $\mathbb{F}_p$.

Dokazi teorema 1.56 i 1.57 nalaze se u [17, 18]. Koristeći navedene rezultate, A. R. Calderbank je dokazao da kvazisimetrični dizajni sa sljedećim parametrima ne postoje:

- 2-$(21, 8, 14)$, $x = 2$ i $y = 4$,
- 2-$(21, 9, 12)$, $x = 3$ i $y = 5$,
- 2-$(35, 7, 3)$, $x = 1$ i $y = 3$,
- 2-$(41, 17, 34)$, $x = 5$ i $y = 8$,
- 2-$(43, 18, 51)$, $x = 6$ i $y = 9$,
- 2-$(51, 15, 7)$, $x = 3$ i $y = 5$,
- 2-$(51, 21, 14)$, $x = 6$ i $y = 9$,
- 2-$(57, 24, 23)$, $x = 9$ i $y = 12$,
- 2-$(57, 27, 117)$, $x = 12$ i $y = 17$,
- 2-$(69, 33, 176)$, $x = 15$ i $y = 21$.

1.4 Familije kvazisimetričnih 2-dizajna

Klasifikacija kvazisimetričnih 2-dizajna je težak otvoren problem. A. Neumaier [74] je definirao četiri klase kvazisimetričnih dizajna:

1. višekratnici simetričnih dizajna,
2. jako rastavljivi dizajni,
3. Steinerovi 2-dizajni,
4. reziduali dvoravnina.

Sve dopustive parametre kvazisimetričnih dizajna koji ne pripadaju nijednoj od navedenih klasa nazvao je **iznimnim parametrima kvazisimetričnih dizajna.** U svom članku [74] je objavio i prvu tablicu iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna o kojoj ćemo više reći u sljedećem poglavlju 1.5.

Osim navedenih familija kvazisimetričnih dizajna, dodatno možemo izdvojiti projektivne i afine dizajne te familiju A. Blokhuisa i W. H. Haemersa koja je konstruirana kasnije [5]. A. Neumaier je projektivne dizajne uvrstio u kvazisimetrične dizajne s iznimnim parametrima, a među njima se nalaze i Blokhuis-Haemersovi dizajni. Afini dizajni su ujedno i jako rastavljivi te oni pripadaju familiji 2.

FAMILIJA 1. **Višekratnici simetričnih dizajna**

Višekratnik simetričnog 2-(v, k, λ) dizajna je kvazisimetrični dizajn s parametrima 2-$(v, k, m\lambda)$ i presječnim brojevima $x = \lambda$ i $y = k$, a sastoji se od $m \geq 2$ kopija blokova simetričnog dizajna. Kvazisimetrični dizajni kojima je blokovni graf nepovezan su višekratnici simetričnih dizajna, i obratno [74].

FAMILIJA 2. **Jako rastavljivi dizajni**

Dizajn 2-(v, k, λ) je rastavljiv ako se skup blokova može particionirati na c disjunktnih klasa tako da je svaka točka sadržana u konstantnom broju blokova iz svake klase. Za rastavljive dizajne vrijedi Boseova nejednakost $b \geq v + c - 1$, koja je poboljšanje Fisherove nejednakosti iz teorema 1.8. U slučaju jednakosti, za dizajn kažemo da je jako rastavljiv. D. R. Hughes i F. C. Piper [43] su dokazali da je jako rastavljiv dizajn ujedno i kvazisimetričan te da se svaka dva bloka iz iste klase sijeku u $x = k - n$ točaka, a svaka dva bloka iz različitih klasa u $y = k^2/v$ točaka. Kvazisimetrični 2-dizajni kojima je blokovni graf potpun c-partitni graf su jako rastavljivi, i obratno [74].

FAMILIJA 3. **Steinerovi 2-dizajni**

Steinerov 2-$(v, k, 1)$ dizajn je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 1$. To su ujedno i jedini kvazisimetrični dizajni s tim presječnim brojevima [74]. Egzistencija Steinerovih 2-dizajna obično se razmatra za fiksni k, a R. M. Wilson [95] je dokazao da

za svaki k postoji samo konačno mnogo dopustivih v za koje Steinerovi 2-$(v,k,1)$ dizajni ne postoje.

FAMILIJA 4. **Reziduali dvoravnina**

Dvoravnina je simetrični 2-$(v,k,2)$ dizajn. Općenito, za svaki simetrični 2-(v,k,λ) dizajn $\mathcal{D}=(\mathcal{V},\mathcal{B})$ možemo definirati njegov rezidualni dizajn, u oznaci $\mathrm{res}_{B_0}\mathcal{D}$ kao incidencijsku strukturu

$$(\mathcal{V}\setminus B_0, \{B\setminus B_0 \mid B\in\mathcal{B},\ B\neq B_0\}),$$

pri čemu je B_0 jedan njegov blok. Struktura $\mathrm{res}_{B_0}\mathcal{D}$ je 2-dizajn s parametrima 2-$(v-k, k-\lambda, \lambda)$. Iz toga slijedi da rezidualni dizajn dvoravnine ima parametre 2-$(v-k,k-2,2)$. S obzirom da se blokovi dvoravnine sijeku u dvije točke, blokovi rezidualnog dizajna sijeku se u jednoj ili dvije točke, pa je rezidualni dizajn dvoravnine kvazisimetričan s presječnim brojevima $x=1$ i $y=2$. Kvazisimetrični dizajni s presječnim brojevima $x=1$ i $y=2$ su ili reziduali dvoravnina ili je to 2-$(5,3,3)$ dizajn [74].

FAMILIJA 5. **Projektivni i afini 2-dizajni**

Parametri projektivnih i afinih dizajna iskazani su preko *Gaussovog* ili *q-binomnog koeficijenta*:

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-d+1}-1)}{(q^d-1)(q^{d-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Projektivni dizajn $PG_d(n,q)$ je dizajn kojem su točke 1-dimenzionalni, a blokovi $(d+1)$-dimenzionalni potprostori $(n+1)$-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Parametri tog dizajna su

$$2-\left(\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q, \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q\right). \tag{1.11}$$

Za $d=n-2$ dizajn $PG_{n-2}(n,q)$ je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x=\begin{bmatrix} n-3 \\ 1 \end{bmatrix}_q$ i $y=\begin{bmatrix} n-2 \\ 1 \end{bmatrix}_q$. Ukupan broj dizajna s parametrima kao $PG_{n-2}(n,q)$ raste eksponencijalno s linearnim rastom od n [52], no poznato je vrlo malo kvazisimetričnih dizajna s tim parametrima. Osim projektivnih dizajna, jedini poznati primjeri takvih dizajna su *polarity* dizajni koji imaju iste parametre kao $PG_2(4,q)$ [51] i još tri dizajna u slučaju $PG_2(4,2)$. Dakle, poznato je pet neizomorfnih kvazisimetričnih dizajna s parametrima kao $PG_2(4,2)$ [90], dva za $PG_2(4,q)$ [51], $q>2$ i samo jedan za sve $PG_{n-2}(n,q)$, $n>4$.

Afini dizajn $AG_d(n,q)$ je dizajn kojemu su točke vektori, a blokovi translati d-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{F}_q^n$. Parametri tog dizajna su

$$2-\left(q^n, q^d, \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q\right). \tag{1.12}$$

Za $d=n-1$ dizajn $AG_{n-1}(n,q)$ je kvazisimetričan s presječnim brojevima $x=0$ i $y=q^{n-2}$. U tom slučaju dizajn $AG_{n-1}(n,q)$ je i jako rastavljiv.

FAMILIJA 6. **Blokhuis-Haemersovi dizajni**

A. Blokhuis i W. H. Haemers [5] konstruirali su beskonačnu familiju kvazisimetričnih dizajna s parametrima

$$2 - (q^2, q^2(q-1)/2, q(q^3 - q^2 - 2)/4))$$

i presječnim brojevima $x = q^2(q-2)/4$ i $y = q^2(q-1)/4$, pri čemu je q potencija broja 2. Točke dizajna odgovaraju točkama afinog prostora $AG(3, q)$, a blokovi odgovaraju maksimalnim lukovima afinog prostora $AG(2, q)$ nad poljem $\mathbb{F}_q$. Maksimalni lukovi u $AG(2, q)$ tvore simetrični 2-$(q^2, q(q-1)/2, q(q-2)/4)$ dizajn.

1.5 Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna

Prvu tablicu dopustivih iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna do $v \leq 40$ objavio je A. Neumaier [74]. Tablica sadrži 15 skupova parametara za koje je egzistencija dizajna u tom trenutku bila otvorena (tablica 1.2). To je privuklo veliki interes i potaknulo mnoge rezultate o kvazisimetričnim dizajnima. Tablica sadrži parametre kvazisimetričnih 2-(v^*, k^*, λ^*) dizajna s presječnim brojevima p i q, parametre odgovarajućih jako regularnih grafova (v, k, λ, μ) te parametre pripadajućih regularnih skupova (d, e). Regularni skup s parametrima (d, e) je neprazan podskup vrhova jako regularnog grafa kojem je broj vrhova koji su susjedni s vrhovima grafa jednak e, odnosno d, ovisno o tome nalazi li se taj vrh unutar regularnog skupa.

Tablica 1.2: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna do $2 \leq v^* \leq 40$ [74]

No.	Ex?	v*	k*	λ*	p	q	v	k	λ	μ	d	e
1	?	19	9	16	3	5	76	45	28	24	25	18
2	?	20	10	18	4	6	76	35	18	14	21	14
3	?	20	8	14	2	4	95	54	33	27	27	18
4	?	21	9	12	3	5	70	27	12	9	15	9
5	?	21	8	14	2	4	105	52	29	22	26	16
6	yes	21	6	4	0	2	56	45	36	36	15	12
7	yes	21	7	12	1	3	120	77	52	44	33	22
8	?	22	8	12	2	4	99	42	21	15	21	12
9	yes	22	6	5	0	2	77	60	47	45	20	15
10	yes	22	7	16	1	3	176	105	68	54	45	28
11	yes	23	7	21	1	3	253	140	87	65	60	35
12	?	24	8	7	2	4	69	20	7	5	10	5
13	?	28	7	16	1	3	288	105	52	30	45	20
14	yes	28	12	11	4	6	63	32	16	16	16	12
15	?	29	7	12	1	3	232	77	36	20	33	14
16	yes	31	7	7	1	3	155	42	17	9	18	7
17	?	33	15	35	6	9	176	45	18	9	27	15
18	?	33	9	6	1	3	88	60	41	40	20	15
19	?	35	7	3	1	3	85	14	3	2	6	2
20	?	35	14	13	5	8	85	14	3	2	8	4
21	yes	36	16	12	6	8	63	30	13	15	15	12
22	?	37	9	8	1	3	148	84	50	44	28	18
23	?	39	12	22	3	6	247	54	21	9	27	12

Neumaierovom tablicom posebno su bili motivirani A. R. Calderbank i V. Tonchev, čiji su rezultati opisani u poglavlju 1.3.2. Oni su tablicu prvotno dopunili novim rezultatima [17, 91], a potom i proširili dopustivim iznimnim parametrima do $v \leq 70$ [18, 93]. Tablicu je posljednji dopunio novim rezultatima i objavio M. S. Shrikhande [85]. Tablica sadrži 78 dopustiva iznimna parametra, od kojih je za 38 egzistencija dizajna u tom trenutku bila nepoznata.

Od tada postoji nekoliko novih rezultata. P. Kaski i P. R. J. Östergård su dokazali da postoji točno pet dvoravnina reda 9 [55]. Kao posljedicu toga, pokazali su da dizajn s parametrima 3-$(57, 12, 2)$ ne postoji. Iz teorema 1.42 slijedi da tada ne postoji ni kvazisimetrični 2-$(57, 12, 11)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 3$. M. Harada, A. Munemasa i V. Tonchev su dokazali da ne postoji kvazisimetrični 2-$(37, 9, 8)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 3$ [42]. Među novim rezultatima nalazi se i naš rezultat u kojem smo koristeći Kramer-Mesnerovu metodu konstruirali nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 6$ [64]. Egzistencija kvasimetričnih dizajna s tim parametrima je do tada bila otvoreno pitanje. Više o njima reći ćemo u poglavlju 3.

U posljednje objavljenoj tablici nalaze se parametri za koje neegzistenciju dizajna možemo utvrditi na temelju teorema 1.57, no u tablici ona nije navedena te je pitanje egzistencije ostalo otvoreno. To su parametri: 2-$(52, 16, 20)$, $x = 4$ i $y = 7$, zatim 2-$(56, 15, 42)$, $x = 3$ i $y = 6$ te 2-$(56, 21, 24)$, $x = 6$ i $y = 9$. Oni ne zadovoljavaju niti jedan od nužnih uvjeta teorema za $p = 3$, iz čega zaključujemo da dizajni ne postoje. Pretpostavljamo da je A. Calderbank [18] previdio navedene parametre te je propust prenesen i u svim kasnije objavljenim tablicama, uključujući i Shrikhandeovu tablicu [85].

Osim rezultata o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima za $v \leq 70$, poznati su i mnogi rezultati za $v > 70$. Na primjer, poznato je da kvazisimetrični dizajni s parametrima 2-$(78, 36, 30)$, $x = 15$, $y = 18$, zatim 2-$(120, 56, 55)$, $x = 24$, $y = 28$ te 2-$(136, 64, 56)$, $x = 28$, $y = 32$ postoje [11, 70]. Poznato je da postoje i dizajni s parametrima 2-$(121, 13, 13)$, $x = 1$, $y = 4$ i 2-$(127, 31, 155)$, $x = 7$, $y = 15$ jer parametri odgovaraju projektivnim dizajnima. Poznati su rezultati i o neegzistenciji nekih kvazisimetričnih 2-dizajna. Na primjer, poznato je da dizajn s parametrima 2-$(111, 12, 10)$, $x = 0$, $y = 2$ ne postoji [67, 82]. Iz tog razloga smo tablicu dopustivih iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna proširili do $v \leq 150$ te smo je dopunili sa svim nama poznatim rezultatima.

Za generiranje tablice koristimo sljedeće korake:

`KORAK 1:` Generiramo trojke parametara (v, k, λ) koje zadovoljavaju nužne uvjete za egzistenciju kvazisimetričnih 2-dizajna. Iz činjenice da je komplement kvazisimetričnog dizajna kvazisimetričan (lema 1.39), parametar k možemo ograničiti s $3 \leq k \leq v/2$. S obzirom da izostavljamo dizajne s ponovljenim blokovima, kvazisimetrični dizajn ima najviše $b \leq \binom{v}{2}$ blokova (korolar 1.31). Iz toga dobivamo ocjenu $\lambda \leq \binom{k}{2}$. Trojke (v, k, λ) moraju također zadovoljavati uvjet djeljivosti (korolar 1.3), iz kojeg slijedi da za dane

parametre (v, k, λ) parametri b i r moraju biti cijeli brojevi, te Fisherovu nejednakost $b \geq v$ (teorem 1.8). Broj parametara koji zadovoljavaju navedene uvjete jednak je 33 879. Među dobivenim parametrima nalaze se i parametri simetričnih dizajna koje izostavljamo. Odbacivši parametre za koje je $v = b$ dobivamo 33 743 trojki parametara (v, k, λ).

KORAK 2: Odbacujemo trojke parametara (v, k, λ) kod kojih se dostiže ocjena $b = \binom{v}{2}$, odnosno $\lambda = \binom{k}{2}$. Iz teorema 1.33 i korolara 1.34 slijedi da je jedini kvazisimetrični dizajn kod kojeg je postignuta navedena ocjena dizajn s parametrima 2-$(23, 7, 21)$, što su parametri deriviranog velikog Wittovog dizajna kao 2-dizajna. U suprotnome, postojali bi drugi 4-dizajni. Broj parametara koji dostižu ocjenu $b = \binom{v}{2}$, a različiti su od parametara 2-$(23, 7, 21)$, je 3 959.

KORAK 3: Generiramo dopustive parove presječnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju nužne uvjete. Za preostalih 29 784 trojki (v, k, λ) iz koraka 2 tražimo moguće presječne brojeve x i y na način da za svaki cijeli broj

$$0 \leq x \leq \frac{k(r-1)}{b-1}$$

odredimo y takav da je

$$y = \frac{k(k-1)(\lambda-1) - k(r-1)(x-1)}{k(r-1) + 1 - b}.$$

Ocjene za presječne brojeve x i y slijede iz propozicija 1.40 i 1.41. Ako je y cijeli broj i par (x, y) zadovoljava uvjete djeljivosti iz korolara 1.49, dodajemo ga na trojku parametara (v, k, λ). Ukupan broj parametara (v, k, λ, x, y) koji zadovoljavaju navedene uvjete je 6 129.

KORAK 4: Odbacujemo petorke parametara (v, k, λ, x, y) koje ne zadovoljavaju uvjete iz teorema 1.42, a njih je 107. Uvjet (i) iz teorema 1.43 odbacuje istih 107 parametara, dok uvjet (ii) odbacuje još dodatne tri petorke $(28, 7, 16, 1, 3)$, $(29, 7, 12, 1, 3)$ i $(118, 13, 36, 1, 4)$. A. Neumaier je navedene parametre uključio u svoju tablicu jer je taj rezultat postao poznat tek kasnije. S obzirom da tablicu želimo proširiti po uzoru na prvu tablicu dopustivih iznimnih parametara, navedene parametre ne ćemo odbaciti, već ćemo naznačiti da dizajni s tim parametrima ne postoje. Ovime smo dobili ukupno 6 022 dopustiva parametra za kvazisimetrične 2-dizajne u slučaju kada je $v \leq 150$.

KORAK 5: Odbacujemo petorke parametara (v, k, λ, x, y) koje pripadaju klasama kvazisimetričnih 2-dizajna opisanih u poglavlju 1.4. Od 6 022 dobivenih parametara koji zadovoljavaju nužne uvjete za egzistenciju kvazisimetričnih 2-dizajna, 5 587 su parametri višekratnika simetričnih 2-dizajna $(y = k)$, 59 su parametri jako rastavljivih 2-dizajna $(x = k - r + \lambda)$, 113 su parametri Steinerovih 2-dizajna $(\lambda = 1)$, a 24 su parametri reziduala dvoravnina $(\lambda = 2)$. Neki od njih pripadaju više od jednoj klasi. Time dobivamo 260 iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$, odnosno Shrikhandevu tablicu [85] proširujemo sa 187 novih iznimnih parametara.

`KORAK 6:` Generiramo parametre pridruženih blokovnih grafova $SRG(b, a, c, d)$ koristeći teorem 1.47 za sve petorke iznimnih parametara (v, k, λ, x, y) dobivenih u koraku 5.

Za generiranje tablice iznimnih parametra za $v \leq 150$ prema opisanim koracima 1 - 6 koristili smo softver `wxMaxima` [97], a kod je prikazan u prilogu A.

Osim parametara (v, k, λ, x, y) i $SRG(b, a, c, d)$ u tablici navodimo još parametar r. Također, tablici dodajemo stupce: '$\#\, D$', '$\#\, QSD$', '$\#\, SRG$' i 'Nap.', pri čemu '$\#\, D$' sadrži informaciju o broju dizajna do na izomorfizam, '$\#\, QSD$' sadrži informaciju o broju kvazisimetričnih dizajna do na izomorfizam, '$\#\, SRG$' sadrži informaciju o broju jako regularnih grafova pridruženih dizajnima do na izomorfizam te stupac 'Nap.' sadrži dodatne informacije o (ne)egzistenciji kvazisimetričnih dizajna.

Tablicu 1.3 smo dopunili poznatim rezultatima, među kojima su i naši rezultati o kojima ćemo nešto više reći u poglavlju 3, a u tablici su označeni sivom bojom. Za neke kvazisimetrične 2-dizajne čiji su parametri navedeni u tablici znamo da ne postoje jer parametri ne zadovoljavaju teoreme 1.56 i 1.57, a za neke jer ne postoje njima pridruženi blokovni grafovi. Informacije o broju jako regularnih grafova preuzeli smo iz Brouwerove tablice [13]. Ukoliko ne postoji informacija za bilo koji od navedenih stupaca '$\#\, D$', '$\#\, QSD$' ili '$\#\, SRG$', upisali smo '?'. Više o stupcu '$\#\, D$' reći ćemo u potpoglavlju 2.5.

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
1	19	7	7	1	3	21	57	42	31	30	≥ 1	0	0	[17, 74]
2	19	9	16	3	5	36	76	45	28	24	$\geq 10^{16}$	0	0	[17]
3	20	8	14	2	4	38	95	54	33	27	≥ 1	0	0	[20]
4	20	10	18	4	6	38	76	35	18	14	$\geq 10^{16}$	0	0	[20]
5	21	6	4	0	2	16	56	45	36	36	≥ 1	1	1	[91]
6	21	7	12	1	3	40	120	77	52	44	$\geq 10^{18}$	1	1	[91]
7	21	8	14	2	4	40	105	52	29	22	≥ 1	0	?	[17]
8	21	9	12	3	5	30	70	27	12	9	$\geq 10^4$	0	≥ 1	[17]
9	22	6	5	0	2	21	77	60	47	45	≥ 3	1	1	[96]
10	22	7	16	1	3	56	176	105	68	54	≥ 8	1	1	[91]
11	22	8	12	2	4	36	99	42	21	15	≥ 1	0	?	[17]
12	23	7	21	1	3	77	253	140	87	65	≥ 15	1	≥ 1	[96]
13	24	8	7	2	4	23	69	20	7	5	≥ 1	0	?	[16]
14	28	7	16	1	3	72	288	105	52	30	≥ 1	0	?	[19, 91]
15	28	12	11	4	6	27	63	32	16	16	$\geq 58\,891$	$\geq 58\,891$	≥ 1	[64]
16	29	7	12	1	3	56	232	77	36	20	$\geq 1\,518$	0	?	[19, 91]
17	31	7	7	1	3	35	155	42	17	9	≥ 5	5	≥ 1	[90]
18	33	9	6	1	3	24	88	60	41	40	≥ 3376	0	?	[17]
19	33	15	35	6	9	80	176	45	18	9	?	?	≥ 1	
20	35	7	3	1	3	17	85	14	3	2	≥ 2	0	?	[17]
21	35	14	13	5	8	34	85	14	3	2	≥ 1	?	?	
22	36	16	12	6	8	28	63	30	13	15	$\geq 522\,079$	$\geq 522\,079$	≥ 1	[64]

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
23	37	9	8	1	3	36	148	84	50	44	$\geq 10^{37}$	0	?	[42]
24	39	12	22	3	6	76	247	54	21	9	?	?	≥ 1	
25	41	9	9	1	3	45	205	96	50	40	≥ 1	?	?	
26	41	17	34	5	8	85	205	136	93	84	≥ 2	0	?	[18]
27	41	20	57	8	11	120	246	140	85	72	≥ 1	?	?	
28	42	18	51	6	9	123	287	160	96	80	?	?	?	
29	42	21	60	9	12	123	246	119	64	51	≥ 2	?	?	
30	43	16	40	4	7	112	301	192	128	112	≥ 143	?	?	
31	43	18	51	6	9	126	301	150	83	66	≥ 5	0	?	[18]
32	45	9	8	1	3	44	220	84	38	28	≥ 2	1	≥ 1	[41, 90]
33	45	15	42	3	6	132	396	260	178	156	≥ 9	?	?	
34	45	18	34	6	9	88	220	84	38	28	≥ 10	?	≥ 1	
35	45	21	70	9	13	154	330	63	24	9	≥ 297	?	≥ 1	
36	46	16	8	4	6	24	69	48	32	36	≥ 1	?	?	
37	46	16	72	4	7	216	621	320	184	144	≥ 229	?	?	
38	49	9	6	1	3	36	196	60	23	16	≥ 49	≥ 49	≥ 1	[10]
39	49	13	13	1	4	52	196	156	125	120	≥ 1	?	?	
40	49	16	45	4	7	144	441	176	85	60	≥ 2	?	?	
41	51	15	7	3	5	25	85	54	33	36	?	0	?	[17]
42	51	21	14	6	9	35	85	70	57	60	?	0	?	[18]
43	52	16	20	4	7	68	221	64	24	16	?	0	≥ 1	Tm.1.57
44	55	15	7	3	5	27	99	48	22	24	?	?	≥ 1	
45	55	15	63	3	6	243	891	320	148	96	?	?	?	
46	55	16	40	4	8	144	495	78	29	9	≥ 5	?	≥ 1	
47	56	12	9	0	3	45	210	176	148	144	?	?	?	
48	56	15	42	3	6	165	616	205	90	57	≥ 77	0	?	Tm.1.57
49	56	16	6	4	6	22	77	16	0	4	$\geq 1\,410$	$\geq 1\,410$	1	[73]
50	56	16	18	4	8	66	231	30	9	3	≥ 4	≥ 4	≥ 1	[64]
51	56	20	19	5	8	55	154	105	72	70	?	?	?	
52	56	21	24	6	9	66	176	105	64	60	?	0	?	Tm.1.57
53	57	9	3	1	3	21	133	24	5	4	≥ 1	?	?	
54	57	12	11	0	3	56	266	220	183	176	?	0	?	[55]
55	57	15	30	3	6	120	456	140	58	36	?	?	?	
56	57	21	10	7	9	28	76	21	2	7	?	0	0	[40]
57	57	21	25	6	9	70	190	105	60	55	?	?	?	
58	57	24	23	9	12	56	133	44	15	14	?	0	?	[18]
59	57	27	117	12	17	252	532	81	30	9	≥ 1	0	≥ 1	[18]
60	60	15	14	3	6	59	236	55	18	11	?	?	?	
61	60	30	58	14	18	118	236	55	18	11	≥ 1	0	?	[20]
62	61	21	21	6	9	63	183	70	29	25	≥ 1	?	≥ 1	
63	61	25	160	9	13	400	976	300	128	76	?	?	?	
64	63	15	35	3	7	155	651	90	33	9	≥ 1	≥ 1	≥ 1	$PG_3(5, 2)$
65	63	18	17	3	6	62	217	150	105	100	?	?	?	
66	63	24	92	8	12	248	651	182	73	42	?	?	?	

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
67	64	24	46	8	12	126	336	80	28	16	$\geq 30\,264$	$\geq 30\,264$	≥ 1	[29]
68	65	20	19	5	8	64	208	75	30	25	?	?	≥ 1	
69	66	30	29	12	15	65	143	72	36	36	$\geq 10\,000$	$\geq 10\,000$	≥ 1	[64]
70	69	18	30	3	6	120	460	255	150	130	?	?	?	
71	69	33	176	15	21	374	782	99	36	9	?	0	≥ 1	[17]
72	70	10	6	0	2	46	322	225	160	150	?	?	?	
73	70	30	58	10	14	138	322	225	160	150	?	?	?	
74	71	14	39	2	5	210	1065	266	103	54	≥ 4	?	?	
75	71	31	93	11	15	217	497	310	201	180	≥ 5	?	?	
76	71	35	136	15	19	280	568	315	186	160	≥ 490	?	?	
77	72	18	34	3	6	142	568	279	150	124	?	?	?	
78	72	32	124	12	16	284	639	350	205	175	?	?	?	
79	72	36	140	16	20	284	568	279	150	124	?	?	?	
80	73	10	15	1	4	120	876	105	38	9	?	?	≥ 1	
81	73	28	126	10	16	336	876	105	38	9	?	?	≥ 1	
82	73	32	124	12	16	288	657	328	179	148	≥ 14	?	?	
83	75	27	117	9	15	333	925	108	39	9	?	?	≥ 1	
84	76	16	12	1	4	60	285	220	171	165	?	?	?	
85	76	26	52	6	10	156	456	325	236	220	?	?	?	
86	76	30	116	10	14	300	760	345	176	140	?	?	?	
87	76	36	21	16	18	45	95	40	12	20	?	0	0	[2]
88	76	36	42	16	20	90	190	45	12	10	?	?	?	
89	76	36	105	16	21	225	475	96	32	16	?	?	≥ 1	
90	77	33	24	12	15	57	133	88	57	60	?	?	?	
91	78	26	100	6	10	308	924	611	418	376	?	?	?	
92	78	28	216	8	12	616	1716	875	490	400	?	?	?	
93	78	33	64	13	18	154	364	66	20	10	?	0	?	Tm.1.57
94	78	36	30	15	18	66	143	70	33	35	$\geq 10\,000$	$\geq 10\,000$	≥ 1	[64]
95	79	19	57	4	9	247	1027	114	41	9	≥ 22	?	≥ 1	
96	81	30	290	10	15	800	2160	476	178	84	≥ 1	?	?	
97	81	39	247	18	25	520	1080	117	42	9	≥ 452	?	≥ 1	
98	84	28	54	8	12	166	498	161	64	46	?	?	?	
99	85	15	4	1	3	24	136	105	80	84	?	?	?	
100	85	15	6	0	3	36	204	175	150	150	?	?	?	
101	85	35	34	10	15	84	204	175	150	150	?	?	?	
102	85	40	52	16	20	112	238	162	111	108	?	?	?	
103	85	40	130	15	20	280	595	450	345	325	?	?	?	
104	87	24	92	6	12	344	1247	126	45	9	?	?	≥ 1	
105	88	22	14	2	6	58	232	198	169	168	?	?	?	
106	88	28	63	8	13	203	638	112	36	16	?	0	≥ 1	Tm.1.57
107	88	33	32	8	13	87	232	198	169	168	?	0	?	Tm.1.57
108	88	40	65	16	20	145	319	168	92	84	?	?	?	
109	91	21	18	3	6	81	351	210	129	120	?	?	?	
110	91	26	160	6	10	576	2016	715	314	220	?	?	?	

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
111	91	28	18	7	10	60	195	98	49	49	?	0	≥ 1	Tm.1.57
112	91	35	51	7	14	135	351	320	292	288	?	0	0	Tm.1.57
113	91	35	51	11	15	135	351	210	129	120	?	?	?	
114	91	36	56	12	16	144	364	198	112	102	≥ 3	?	?	
115	91	39	19	15	17	45	105	78	55	66	?	0	1	Tm.1.56
116	91	40	52	16	20	120	273	102	41	36	?	?	≥ 1	
117	92	26	100	6	10	364	1288	429	180	124	?	?	?	
118	92	27	108	7	12	378	1288	234	80	34	?	0	?	Tm.1.57
119	93	18	51	3	8	276	1426	135	48	9	?	?	?	
120	93	30	145	9	16	460	1426	135	48	9	?	?	?	
121	93	45	330	21	29	690	1426	135	48	9	?	?	?	
122	93	45	825	20	25	1725	3565	1260	555	385	?	?	?	
123	96	36	42	12	16	114	304	108	42	36	?	?	≥ 1	
124	96	40	78	16	24	190	456	35	10	2	?	0	0	[13]
125	99	15	5	1	3	35	231	140	85	84	?	0	?	Tm.1.56
126	99	36	20	12	15	56	154	48	12	16	?	?	?	
127	100	12	5	0	2	45	375	264	188	180	?	?	?	
128	100	36	105	12	18	297	825	128	40	16	?	0	≥ 1	Tm.1.57
129	101	20	19	2	5	100	505	324	213	198	≥ 1	?	?	
130	101	21	21	1	5	105	505	420	351	340	≥ 1	?	?	
131	101	21	21	3	6	105	505	224	108	92	≥ 1	?	?	
132	101	25	96	5	9	400	1616	475	186	120	≥ 564	?	?	
133	101	45	99	15	21	225	505	420	351	340	≥ 119	0	?	Tm.1.56
134	103	28	126	7	14	476	1751	150	53	9	?	?	?	
135	105	25	30	5	9	130	546	125	40	25	?	?	≥ 1	
136	105	40	18	14	16	48	126	65	28	39	?	?	≥ 1	
137	105	40	54	10	16	144	378	325	280	275	?	?	≥ 1	
138	105	51	425	24	33	884	1820	153	54	9	?	?	?	
139	106	30	58	6	10	210	742	456	290	264	?	?	?	
140	106	42	41	14	18	105	265	168	107	105	?	?	?	
141	106	50	105	20	25	225	477	336	240	228	?	0	?	Tm.1.57
142	109	25	50	5	10	225	981	140	43	16	≥ 4	?	≥ 1	
143	109	49	196	19	24	441	981	588	367	330	≥ 14	?	?	
144	109	49	196	21	28	441	981	140	43	16	≥ 14	?	≥ 1	
145	109	54	265	24	29	540	1090	594	343	300	≥ 3	?	?	
146	110	20	38	2	5	218	1199	648	372	324	?	?	?	
147	110	30	87	6	10	327	1199	648	372	324	?	?	?	
148	110	50	245	20	25	545	1199	648	372	324	?	?	?	
149	110	55	270	25	30	545	1090	539	288	245	?	?	?	
150	111	12	10	0	2	100	925	594	393	360	?	0	?	[67, 82]
151	111	21	14	3	6	77	407	126	45	36	?	?	≥ 1	
152	111	27	117	6	13	495	2035	162	57	9	?	?	?	
153	111	45	150	15	20	375	925	594	393	360	?	?	?	
154	111	50	245	20	25	550	1221	610	329	280	?	?	?	

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
155	112	12	11	0	2	111	1036	660	434	396	?	?	?	
156	112	28	9	6	8	37	148	63	22	30	?	?	?	
157	113	43	129	13	18	344	904	602	411	380	≥ 7	0	?	Tm.1.57
158	113	50	175	20	25	400	904	378	177	144	?	?	?	
159	114	24	184	4	8	904	4294	1125	420	250	?	?	?	
160	114	54	954	24	30	2034	4294	1125	420	250	?	?	?	
161	115	20	16	0	4	96	552	475	410	400	?	?	?	
162	115	20	54	2	5	324	1863	912	486	408	?	?	?	
163	115	24	92	4	8	456	2185	546	197	116	?	?	?	
164	115	40	52	10	15	152	437	336	260	252	?	?	?	
165	115	45	330	15	20	855	2185	1134	633	540	?	?	?	
166	115	52	442	22	28	988	2185	546	197	116	?	0	?	Tm.1.56,1.57
167	116	20	19	0	4	115	667	570	489	475	?	?	?	
168	116	20	57	2	5	345	2001	960	504	420	?	?	?	
169	116	24	60	4	8	300	1450	345	120	70	?	?	?	
170	116	36	63	6	12	207	667	570	489	475	?	?	?	
171	116	46	225	16	21	575	1450	644	318	260	?	?	?	
172	116	50	980	20	26	2300	5336	1375	510	300	?	0	?	Tm.1.57
173	116	56	154	21	28	322	667	570	489	475	?	0	?	Tm.1.57
174	117	13	3	1	3	29	261	52	11	10	?	0	?	Tm.1.56
175	117	29	210	5	9	870	3510	1914	1113	960	?	?	?	
176	117	30	80	6	10	320	1248	522	246	198	?	?	?	
177	117	42	287	12	17	812	2262	1386	885	792	?	?	?	
178	117	45	275	15	20	725	1885	864	438	360	?	?	?	
179	117	52	51	22	27	116	261	52	11	10	?	0	?	Tm.1.57
180	117	57	532	27	37	1102	2262	171	60	9	?	0	?	Tm.1.56,1.57
181	118	13	36	1	4	351	3186	455	148	51	?	0	?	Tm.1.43
182	118	28	84	4	8	364	1534	1008	682	624	?	?	?	
183	118	40	100	10	15	300	885	624	448	420	?	?	?	
184	118	43	602	13	18	1677	4602	2451	1400	1197	?	?	?	
185	118	45	220	15	20	585	1534	657	316	255	?	0	?	Tm.1.57
186	120	24	23	4	8	119	595	114	33	19	≥ 3	?	?	
187	120	30	58	6	10	238	952	351	150	117	?	?	?	
188	120	36	30	8	12	102	340	231	158	154	?	?	?	
189	120	40	195	10	15	595	1785	1184	808	740	≥ 2	?	?	
190	120	45	132	15	20	357	952	351	150	117	?	?	?	
191	120	48	94	18	24	238	595	114	33	19	?	?	?	
192	120	50	35	20	25	85	204	28	2	4	?	?	?	
193	120	56	55	24	28	119	255	128	64	64	$\geq 14\,668$	$\geq 14\,668$	≥ 1	[9, 39]
194	121	13	13	1	4	130	1210	156	47	16	≥ 1	≥ 2	≥ 1	$PG_2(4, 3)$
195	121	46	69	16	21	184	484	138	47	36	?	?	≥ 1	
196	123	48	376	18	28	976	2501	180	63	9	?	?	?	
197	124	24	46	4	9	246	1271	160	48	16	?	?	≥ 1	
198	124	40	130	12	19	410	1271	160	48	16	?	0	≥ 1	Tm.1.57

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
199	124	60	295	28	36	615	1271	160	48	16	?	?	≥ 1	
200	125	20	57	2	5	372	2325	924	423	330	≥ 68	?	?	
201	125	45	99	15	21	279	775	150	45	25	≥ 5	?	≥ 1	
202	126	30	29	6	10	125	525	144	48	36	?	?	≥ 1	
203	127	15	5	1	3	45	381	140	55	49	?	?	?	
204	127	31	155	7	15	651	2667	186	65	9	≥ 969	≥ 1	≥ 1	$PG_4(6,2)$
205	127	36	40	8	12	144	508	273	152	140	?	?	?	
206	127	37	74	7	12	259	889	666	505	480	≥ 3	0	?	Tm.1.57
207	127	42	205	12	17	630	1905	714	313	240	≥ 19	?	?	
208	127	57	76	22	27	171	381	266	187	182	?	0	?	Tm.1.57
209	129	21	70	3	9	448	2752	189	66	9	?	?	?	
210	129	45	330	15	25	960	2752	189	66	9	?	?	?	
211	129	63	651	30	41	1344	2752	189	66	9	?	0	?	Tm.1.57
212	130	13	4	1	4	43	430	39	8	3	?	0	?	Tm.1.57
213	130	39	38	11	18	129	430	39	8	3	?	0	?	Tm.1.57
214	130	52	68	20	28	172	430	39	8	3	?	?	?	
215	130	60	118	25	30	258	559	294	161	147	?	?	?	
216	131	20	38	2	5	260	1703	592	246	184	≥ 6	?	?	
217	133	13	26	1	5	286	2926	195	68	9	?	?	?	
218	133	55	495	22	33	1210	2926	195	68	9	?	?	?	
219	133	63	93	28	33	198	418	147	56	49	?	0	?	Tm.1.57
220	134	20	30	2	5	210	1407	456	180	132	?	?	?	
221	135	36	210	9	18	804	3015	198	69	9	?	?	?	
222	136	40	13	10	12	45	153	120	91	105	?	0	1	[27]
223	136	40	325	10	15	1125	3825	1344	568	420	?	?	?	
224	136	48	188	16	24	540	1530	176	52	16	?	?	?	
225	136	64	56	28	32	120	255	126	61	63	$\geq 14\,668$	$\geq 14\,668$	≥ 1	[9,39]
226	136	64	840	28	34	1800	3825	1344	568	420	?	?	?	
227	137	40	195	10	15	680	2329	776	315	230	≥ 364	?	?	
228	139	23	88	3	7	552	3336	667	218	112	?	?	?	
229	139	51	425	18	29	1173	3197	204	71	9	?	?	?	
230	140	20	19	2	5	139	973	272	96	68	?	0	?	Tm.1.57
231	140	40	78	10	15	278	973	272	96	68	?	?	?	
232	140	56	550	21	28	1390	3475	690	225	115	?	?	?	
233	140	60	177	24	30	417	973	272	96	68	?	0	?	Tm.1.57
234	141	15	4	1	3	40	376	105	32	28	?	?	?	
235	141	36	24	8	12	96	376	105	32	28	?	?	?	
236	141	45	33	9	15	105	329	288	252	252	?	?	?	
237	141	50	105	15	20	300	846	455	256	231	?	?	?	
238	141	56	154	21	28	392	987	170	49	25	?	?	≥ 1	
239	141	57	1140	21	27	2850	7050	2394	993	720	?	0	?	Tm.1.56
240	141	60	118	24	30	280	658	162	51	36	?	0	≥ 1	Tm.1.56
241	141	69	782	33	45	1610	3290	207	72	9	?	?	?	
242	144	27	12	3	6	66	352	234	156	154	?	?	?	

Tablica 1.3: Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna za $v \leq 150$

RBr.	v	k	λ	x	y	r	b	a	c	d	$\#D$	$\#QSD$	$\#SRG$	Nap.
243	144	34	51	4	9	221	936	748	602	580	?	0	?	Tm.1.57
244	144	39	190	9	14	715	2640	819	318	225	?	?	?	
245	144	40	135	10	16	495	1782	325	100	50	?	?	?	
246	144	45	20	12	15	65	208	132	81	88	?	?	≥ 1	
247	145	25	20	1	5	120	696	570	469	456	?	?	?	
248	145	40	78	10	16	288	1044	175	50	25	?	?	≥ 1	
249	145	45	66	9	15	216	696	570	469	456	?	?	?	
250	145	55	33	20	25	88	232	33	2	5	?	0	?	Tm.1.57
251	145	55	396	19	25	1056	2784	858	332	234	?	?	?	
252	145	65	52	25	30	117	261	208	165	168	?	0	?	Tm.1.57
253	145	70	161	28	35	336	696	570	469	456	?	?	?	
254	147	48	376	15	26	1168	3577	216	75	9	?	0	?	Tm.1.57
255	147	63	93	21	28	219	511	432	366	360	?	0	?	Tm.1.57
256	148	22	11	1	4	77	518	385	288	280	?	0	?	Tm.1.57
257	148	36	15	8	12	63	259	42	5	7	?	?	?	
258	148	36	105	8	15	441	1813	192	56	16	?	?	?	
259	148	50	75	15	20	225	666	245	100	84	?	?	?	
260	149	53	689	17	23	1961	5513	1696	660	460	≥ 1	0	?	Tm.1.57

Nakon popunjavanja tablice sa svim nama poznatim rezultatima, u tablici je preostalo 172 iznimnih parametara za koje egzistencija kvazisimetričnih dizajna nije poznata.

Poglavlje 2

Konstrukcija dizajna sa zadanim grupama automorfizama

Za mnoge kombinatoričke strukture, među kojima su i dizajni, proučava se djelovanje grupa koje ih preslikavaju same u sebe. Metode za konstrukciju dizajna koje opisujemo u disertaciji temelje se na pretpostavci da na dizajn djeluje neka grupa automorfizama.

Slika dizajna s parametrima 2-$(7, 3, 1)$ iz primjera 1.4 je geometrijsko-kombinatorna struktura koju možemo promatrati kroz izometrije euklidske ravnine koje ga preslikavaju u samoga sebe. One induciraju automorfizme dizajna. Na primjer, rotacija oko središnje točke za $120°$ odgovara automorfizmu reda 3, zrcaljenje s obzirom na tri osi simetrije trokuta odgovaraju involutornim automorfizmima. No, postoje automorfizmi tog dizajna koji nisu inducirani izometrijama ravnine.

U drugom poglavlju prikazani su osnovni pojmovi i dan je pregled glavnih rezultata iz područja teorije grupa (potpoglavlje 2.1), opisane su permutacijske grupe koje imaju važnu ulogu u promatranju djelovanja grupe na dizajn (potpoglavlje 2.2) te je posebna pozornost posvećena grupama automorfizama dizajna (potpoglavlje 2.3). Osim toga, opisana je Kramer-Mesnerova metoda za konstrukciju dizajna (potpoglavlje 2.4) uz pomoć koje su konstruirati 2-dizajni čiji parametri odgovaraju iznimnim parametrima kvazisimetričnih dizajna koji su dani u tablici 1.3 (potpoglavlje 2.5).

2.1 Osnovni pojmovi iz teorije grupa

U ovom poglavlju prikazani su osnovni pojmovi, definicije i teoremi iz područja teorije grupa koji se koriste u disertaciji, a dostupni su u [31] i [68].

Neka je G grupa s binarnom operacijom $\cdot : G \times G \to G$.

Definicija 2.1. ***Red grupe*** *G, u oznaci $|G|$, je kardinalni broj skupa G. Kažemo da je grupa G* ***konačna*** *i* ***reda*** *n ako je $|G| = n$, za neki $n \in \mathbb{N}$, inače kažemo da je grupa G beskonačna.*

U disertaciji ćemo se ograničiti na konačne grupe.

Definicija 2.2. *Za $S \subseteq G$ kažemo da je **skup generatora grupe** G i pišemo $G = \langle S \rangle$, ako se svaki element grupe G može prikazati kao produkt elemenata ili inverza elemenata iz skupa S, tj. ako je*

$$G = \langle S \rangle = \{x_1 \cdots x_n \mid x_i \in S \text{ ili } x_i^{-1} \in S,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Grupa $G = \langle x \rangle$ koja je generirana jednim elementom zove se **ciklička grupa**. Poznato je da je svaka ciklička grupa konačnog reda $n \in \mathbb{N}$ izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_n, +)$, pri čemu je $\mathbb{Z}_n$ skup ostataka pri dijeljenju elemenata skupa $\mathbb{Z}$ s n, a operacija " $+$ " je operacija zbrajanja modulo n.

Definicija 2.3. *Neka je $H \leq G$ i $g \in G$. Skup $gH = \{gh \mid h \in H\}$ naziva se **lijeva klasa podgrupe** H određena elementom g, a skup $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ naziva se **desna klasa podgrupe** H određena elementom g. Skup svih lijevih klasa podgrupe H označavamo s $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, a skup svih desnih klasa podgrupe H označavamo s $H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\}$.*

Lako se pokaže da su dvije lijeve klase g_1H i g_2H, pri čemu je $H \leq G$ i $g_1, g_2 \in G$, ili disjunktne ili jednake. Analogno vrijedi i za desne klase. Susjedne klase su jednakobrojne.

Poznato je da je kardinalni broj skupova lijevih i desnih klasa neke pogrupe $H \leq G$ jednak jer je preslikavanje $\psi : G/H \to H \setminus G$ definirano s $\psi(gH) = Hg^{-1}$ bijekcija.

Definicija 2.4. *Kardinalni broj skupa lijevih klasa G/H naziva se **indeks podgrupe** H u G i označava $[G : H]$.*

Jedan od temeljnih rezultata teorije grupa je teorem koji kaže da red podgrupe H bilo koje konačne grupe G dijeli red od G. Teorem je poznat po imenu *Lagrangeov teorem.*

Teorem 2.5. *(**Langrange**) Neka je G konačna grupa i $H \leq G$. Tada je*

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

Nadalje, u teoriji grupa proučavaju se preslikavanja između grupa koja čuvaju operaciju, tj. homomorfizmi. U ovoj disertaciji spominju se preslikavanja koja zovemo izomorfizam i automorfizam.

Definicija 2.6. *Neka su G i G' dvije grupe. Preslikavanje $\varphi : G \to G'$ koje je bijekcija i homomorfizam, tj. za koje vrijedi da je $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\forall\ x, y \in G$, zove se **izomorfizam.***

Za grupe G i G' kažemo da su **izomorfne**, i pišemo $G \cong G'$, ako postoji izomorfizam $\varphi : G \to G'$.

Definicija 2.7. *Neka je G grupa. Preslikavanje $\varphi : G \to G$ koje je izomorfizam zove se* ***automorfizam****.*

Skup svih automorfizama od G označavamo s $\mathrm{Aut}\,(G)$. Za proizvoljnu grupu G, $\mathrm{Aut}\,(G)$ je također grupa, uz operaciju komponiranja. Iz tog razloga za $\mathrm{Aut}\,(G)$ kažemo da je **grupa automorfizama** od G.

Grupe koje promatramo u disertaciji su konačne i često su nastale kao direktan produkt ili semidirektan produkt nekih jednostavnijih grupa.

Definicija 2.8. *Neka su G i H grupe.* ***Direktan produkt grupa*** *G* ***i*** *H je grupa koju čini skup $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ s obzirom na operaciju*

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

Za grupu $G \times H$ vrijedi sljedeće:

- neutralni element je $e_{G\times H} = (e_G, e_H)$,
- inverzni element od $(g, h) \in G \times H$ je $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$,
- $G \times H$ je Abelova ako i samo ako su G i H Abelove grupe,
- $|G \times H| = |G| \cdot |H|$,
- postoji izomorfizam $G \cong G \times e_H \leq G \times H$ i $H \cong e_G \times H \leq G \times H$, te uz identifikaciju $G \equiv G \times e_H$ i $H \equiv e_G \times H$ slijedi da je $G, H \leq G \times H$, štoviše $G, H \lhd G \times H$.

Analogno bismo definirali direktan produkt proizvoljne konačne familije grupa $\{G_1, ..., G_n\}$.

Definicija 2.9. *Neka su G i H grupe te neka je zadan neki homomorfizam $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\,(G)$, pri čemu je $\varphi(h) := \varphi_h \in \mathrm{Aut}\,(G)$, $h \in H$.* ***Semidirektan produkt grupa*** *G* ***i*** *H je grupa koju čini skup $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ s obzirom na operaciju*

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \varphi_{h_1}(g_2), h_1 h_2).$$

Oznaka za direktan produkt grupa G i H je $G \times H$, a za semidirektan produkt $G \rtimes_\varphi H$, ili samo $G \rtimes H$ ako znamo o kojem homomorfizmu φ se radi.

Za grupu $G \rtimes_\varphi H$ vrijedi sljedeće:

- neutralni element je $e_{G\rtimes_\varphi H} = (e_G, e_H)$,
- inverzni element od $(g, h) \in G \times H$ je $(g, h)^{-1} = (\varphi_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})$,
- $G \rtimes H$ je Abelova ako i samo ako su G i H Abelove grupe te ako je φ trivijalni homomorfizam koji sve elemente iz H preslikava u identitetu (neutralni element od $\mathrm{Aut}\,(G)$),
- $|G \rtimes H| = |G| \cdot |H|$,
- postoji izomorfizam $G \cong G \rtimes_\varphi e_H \leq G \rtimes_\varphi H$ i $H \cong e_G \rtimes_\varphi H \leq G \rtimes_\varphi H$, te uz identifikaciju $G \equiv G \rtimes_\varphi e_H$ i $H \equiv e_G \rtimes_\varphi H$ slijedi da je $G \lhd G \rtimes_\varphi H$, a $H \leq G \rtimes_\varphi H$.

Semidirektan produkt $G \rtimes_\varphi H$ je generalizacija direktnog produkta $G \times H$ te uz trivijalni homomorfizam φ vrijedi:

$$G \rtimes_\varphi H \cong G \times H.$$

U metodama koje koristimo u disertaciji za konstrukciju dizajna sa zadanim grupama automorfizama, bitan je izbor djelovanja grupe na skup točaka i blokova. Djelovanje grupe na nekom skupu općenito možemo formalizirati na sljedeći način:

Definicija 2.10. *Neka je G grupa i neka je X neki neprazan skup.* ***Djelovanje grupe*** *G* ***na skup*** *X je preslikavanje*

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g(x)$$

koje zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $e(x) = x, \ \forall x \in X,$

(ii) $(gh)(x) = g(h(x)), \ \forall g, h \in G \ \ i \ \forall x \in X.$

Djelovanjem grupe G na nekom skupu X elementi $g \in G$ točke skupa X preslikavaju u točke tog istog skupa. Iz tog razloga ima smisla promatrati u što sve elementi grupe G preslikavaju čvrstu točku $x \in X$, te koji elementi iz grupe G preslikavaju x u samog sebe.

Definicija 2.11. *Neka je G grupa koja djeluje na neprazan skup X.* ***Orbita elementa*** *$x \in X$ je skup*

$$x^G = \{g(x) \mid g \in G\},$$

a ***stabilizator elementa*** *$x \in X$ je skup*

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Važna svojstva orbite i stabilizatora nekog elementa $x \in X$ na kojeg djeluje neka grupa G iskazana su u sljedećem teoremu. Dokaz teorema može se naći u [31].

Teorem 2.12. *Neka je G grupa koja djeluje na neprazan skup X i neka su $g, h \in G$ i $x, y \in X$. Tada vrijedi:*

(i) Dvije orbite x^G i y^G su ili jednake ili disjunktne te skup svih orbita čini particiju skupa X.

(ii) Stabilizator G_x je podgrupa grupe G i vrijedi da je $G_y = g^{-1}G_x g$, gdje je $y = g(x)$. Štoviše, vrijedi da je $g(x) = h(x)$ ako i samo ako je $G_x g = G_x h$.

*(iii) (**Teorem o orbiti i stabilizatoru**) Vrijedi da je $|x^G| = [G : G_x]$, za sve $x \in X$. Posebno, ako je grupa G konačna, onda vrijedi da je*

$$|G| = |x^G| \cdot |G_x|.$$

Osim toga, postoji veza između broja orbita neke konačne grupe koja djeluje na konačnom skupu i broja fiksnih točaka njezinih elemenata, a iskazana je sljedećom lemom:

Lema 2.13. *(**Burnside**) Neka je G konačna grupa koja djeluje na konačnom skupu X. Ako s m označimo broj orbita, a s $\mathrm{fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, onda vrijedi*

$$|G| \cdot m = \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Burnsideova lema poznata je još kao Cauchy-Frobeniusova lema, a njezin dokaz se može naći u [31]. Djelovanja grupe G na nekom skupu X mogu imati dodatna svojstva, a više o njima reći ćemo kasnije prilikom opisivanja nekih specijalnih grupa pomoću kojih smo konstruirali (kvazisimetrične) dizajne u potpoglavljima 2.5 i 3.3.

2.2 Permutacijske grupe

Grupa automorfizama dizajna djeluje kao permutacijska grupa na skupu njegovih točaka i na skupu njegovih blokova. U ovom poglavlju opisane su permutacijske grupe i navedena su neka njihova svojstva, a koja su dostupna u [24], [31] i [49].

Definicija 2.14. *Neka je X neprazan skup. Svako bijektivno preslikavanje $\sigma : X \to X$ zove se **permutacija** skupa X.*

Skup svih permutacija skupa X označavamo sa $S(X)$. Skup $S(X)$ je grupa s obzirom na operaciju kompozicije funkcija i naziva se **simetrična grupa** na skupu X. Ako je $G \leq S(X)$, onda kažemo da je G permutacijska grupa na skupu X. Ako je $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $|S(X)| = n!$. Tada za grupu $S(X)$ kažemo da je simetrična grupa stupnja n i označavamo je S_n.

Jedan od načina prikaza permutacije $\sigma \in S_n$ je u eksplicitnom obliku

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvi redak matrice prikazuje elemente skupa X, a drugi redak njihove slike pri preslikavanju σ. Drugi način prikaza permutacija je kao produkt disjunktnih ciklusa.

Definicija 2.15. *Neka je $X = \{1, 2 \ldots, n\}$ skup i neka su $i_1, i_2, \ldots, i_r \in X$ međusobno različiti. Permutacija $\sigma \in S_n$ takva da je*

$$\begin{aligned} &\sigma(i_j) = i_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, r-1, \\ &\sigma(i_r) = i_1, \\ &\sigma(k) = k, \quad \forall\, k \in X \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}, \end{aligned}$$

*zove se r**-ciklus** *(ili **ciklička permutacija duljine** r) i označava $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$.*

Ciklus duljine 2 zove se **transpozicija**. Svaki r-ciklus $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ može se napisati kao produkt transpozicija

$$(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}) \ldots (i_1, i_2).$$

Iz definicije r-ciklusa jasno je da

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r) = (i_2, i_3, \ldots, i_r, i_1) = \ldots = (i_r, i_1, \ldots, i_{r-2}, i_{r-1}).$$

Dva ciklusa su disjunktna ako nemaju zajedničkih nefiksnih elemenata.

Teorem 2.16. *Svaka permutacija može se prikazati kao produkt disjunktnih ciklusa.*

Ciklička faktorizacija jedinstvena je do na poredak cikličkih permutacija i umetanje ili ispuštanje cikličkih permutacije duljine 1 koje predstavljaju identitetu.

Korolar 2.17. *Svaka permutacija može se prikazati kao produkt transpozicija.*

Faktorizacija na transpozicije nije jedinstvena, no može se pokazati da je njezina parnost jedinstvena. Za permutaciju kažemo da je parna (neparna) ako se može zapisati kao produkt parnog (neparnog) broja transpozicija. Skup svih parnih permutacija u S_n, $n \in \mathbb{N}$ zove se **alternirajuća grupa** A_n. Grupa A_n je normalna podgrupa od S_n te je njezin red jednak $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$.

Djelovanje neke grupe G na nekom nepraznom skupu X možemo poistovjetiti s **permutacijskom reprezentacijom** grupe G na skupu X, tj. s homomorfizmom $\varphi : G \to S(X)$.

Teorem 2.18. *Grupa G djeluje na skupu X ako i samo ako postoji homomorfizam $\varphi : G \to S(X)$, $\varphi(g) := f_g$, pri čemu je $f_g(x) = g(x)$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X$.*

Grupa G djeluje **vjerno** na skupu X ako je φ monomorfizam.

Teorem 2.19. *(**Cayley**) Svaka grupa je izomorfna permutacijskoj grupi. Specijalno, ako je G konačna grupa reda n, onda je G izomorfna nekoj podgrupi simetrične grupe S_n.*

Osim što dvije permutacijske grupe mogu biti izomorfne, one mogu biti i permutacijski izomorfne.

Definicija 2.20. *Neka su G i G' dvije permutacijske grupe na skupovima X i X'. Za G i G' kažemo da su **permutacijski izomorfne** ako postoji bijekcija $\alpha : X \to X'$ i izomorfizam $\varphi : G \to G'$ takav da je $\alpha(g(x)) = \varphi(g)(\alpha(x))$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X$.*

Dvije permutacijske grupe koje su permutacijski izomorfne su i izomorfne, no obrat ne vrijedi.

2.3 Puna grupa automorfizama dizajna

Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima 2-$(7, 3, 1)$ iz primjera 1.4. Već smo spomenuli da je dizajn s tim parametrima jedinstven do na izomorfizam. Na primjer, lako se ustanovi da postoji bijekcija skupa točaka dizajna $\mathcal{D}$ na skup točaka projektivnog dizajna $PG_1(2, 2)$ koja blokove preslikava u blokove. Nadalje, u uvodu u ovo poglavlje također smo uočili neka preslikavanja dizajna $\mathcal{D}$ na sama sebe koja su inducirana izometrijama euklidske ravnine. Ta preslikavanja su primjeri automorfizama dizajna $\mathcal{D}$.

Definicija 2.21. *Dizajni $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{B}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{B}_2)$ su **izomorfni** ako postoji bijekcija $\varphi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ takva da je $\varphi(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.*

Izomorfnost dizajna $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ možemo karakterizirati i pomoću incidencijskih matrica. Neka su M_1 i M_2 njihove incidencijske matrice. Dizajni $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ su izomorfni ako i samo ako postoje permutacijske matrice P i Q takve da je $M_1 = P \cdot M_2 \cdot Q$. Permutacijska matrica je matrica koja u svakom retku i stupcu ima jednu jedinicu, a ostali unosi su nula.

Definicija 2.22. ***Automorfizam** dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ je izomorfizam na samoga sebe. Skup svih automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ tvori grupu koju nazivamo **punom grupom automorfizama od** $\mathcal{D}$ i označavamo s* $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$. *Bilo koja podgrupa pune grupe automorfizama* $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ *zove se **grupa automorfizama dizajna** $\mathcal{D}$.*

Neka je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$. Tada grupa G djelovanjem na skupu $\mathcal{V}$ particionira skup točaka dizajna u orbite, ali isto tako particionira i skup blokova $\mathcal{B}$. Predstavnici orbita blokova dizajna čine **bazne blokove dizajna**. Grupom G i baznim blokovima dizajn je potpuno određen.

Primjer 2.23. *Simetrija slike dizajna $\mathcal{D}$ inducira automorfizam $\varphi_s = (1, 2)(5, 6)$ dizajna, a rotacija $\varphi_r = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$. Postoji automorfizam dizajna $\mathcal{D}$ koji nije induciran izometrijama ravnine, kao što je na primjer $\varphi = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ je $PGL(3, 2)$, a izomorfna je grupi $PGL(2, 7)$. Red grupe* $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ *je* 168. *Na primjer, grupa $G = \langle (1, 2, 3)(4, 5, 6) \rangle$ i bazni blokovi $\{\{1, 2, 4\}, \{1, 5, 7\}, \{4, 5, 6\}\}$ određuju dizajn $\mathcal{D}$.*

2.4 Kramer-Mesnerova metoda

Kramer-Mesnerova metoda je jedna od najčešćih računalnih metoda koja se koristi za konstrukciju i klasifikaciju t-dizajna sa zadanim grupama automorfizama. Razvili su je E. S. Kramer i D. M. Mesner te su svoj rad objavili 1976. godine u članku „*t-designs on hypergraphs*" [57]. Koristeći opisanu metodu, autori su uspjeli konstruirati brojne t-dizajne za $t = 2$ i $t = 3$ te $10 \leq v \leq 16$ i svoje rezultate prikazali su u navedenom članku. Dodatno, E. S. Kramer je koristeći istu metodu konstruirao stotine t-dizajna za $t = 4$ i $t = 5$ te $v = 17, 18$, a njegovi rezultati objavljeni su u [56].

Opis Kramer-Mesnerove metode, osim u izvornom članku, dostupan je i u mnogim drugim člancima te knjigama, na primjer u [54].

Neke je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ) te neka je $G \leq S_v$ permutacijska grupa koja djeluje na v-članom skupu. Pretpostavimo da je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$. Podsjetimo se da tada grupa G particionira skup točaka $\mathcal{V}$ i skup blokova $\mathcal{B}$ na orbite. S obzirom da su blokovi k-člani podskupovi skupa točaka i svaki t-članih podskup skupa točaka mora biti sadržan u točno λ blokova, potrebno je odrediti orbite svih t-članih i k-članih podskupova skupa točaka pod djelovanjem grupe G.

Neka su $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ orbite t-članih podskupova, a $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ orbite k-članih podskupova skupa točaka $\mathcal{V}$ pod djelovanjem grupe G. Tada vrijedi:

Teorem 2.24. *Neka su $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$ proizvoljni. Tada je svaki t-člani podskup iz orbite $\mathcal{T}_i$ sadržan u istom broju k-članih podskupova iz orbite $\mathcal{K}_j$ i svaki k-člani podskup iz orbite $\mathcal{K}_j$ sadrži isti broj t-članih podskupova iz orbite $\mathcal{T}_i$.*

Dokaz. Neka su $T, T' \in \mathcal{T}_i$ proizvoljni t-člani podskupovi. Pretpostavimo da je T sadržan u k-članim podskupovima $K_1, K_2, \ldots, K_s \in \mathcal{K}_j$. S obzirom da T i T' pripadaju istoj orbiti $\mathcal{T}_i$, postoji $g \in G$ takav da je $T' = g(T)$. Skup T' sadržan je u k-članim podskupovima $g(K_1), g(K_2), \ldots, g(K_s) \in \mathcal{K}_j$. Iz činjenice da g inducira bijekcije na skupu t-članih i na skupu k-članih podskupova, slijede prva i druga tvrdnja teorema. □

Budući da broj k-članih podskupova orbite $\mathcal{K}_j$ koji sadrže određeni t-člani podskup T orbite $\mathcal{T}_i$ ne ovisi o izboru t-članog podskupa T, već samo o vrijednostima i i j, taj broj označimo s a_{ij}:

$$a_{ij} = |\{K \in \mathcal{K}_j \mid T \in K\}|, \;\; T \in \mathcal{T}_i.$$

Brojevi a_{ij} su elementi matrice $A = [a_{ij}]$ dimenzije $m \times n$ koju nazivamo **Kramer-Mesnerovom matricom**. Time se traženje k-članih podskupova koji čine dizajn $\mathcal{D}$ svodi na traženje $\{0, 1\}$-rješenja linearnog sustava

$$A \cdot X = \lambda J_m, \tag{2.1}$$

gdje je J_m vektor duljine m koji se sastoji samo od jedinica, a rješenje $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t$ je vektor duljine n. Blokovi dizajna $\mathcal{D}$ dobivaju se kao unija odgovarajućih orbita k-članih podskupova:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\substack{x_j = 1 \\ 1 \leq j \leq n}} \mathcal{K}_j.$$

Sustav linearnih jednadžbi (2.1) poznat je i pod nazivom **Kramer-Mesnerov sustav**.

Sljedeći primjer ilustrira konstrukciju dizajna s parametrima 2-$(7, 3, 1)$ koristeći Kramer-Mesnerovu metodu:

Primjer 2.25. *Neke je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima* 2-$(7, 3, 1)$. *Broj blokova dizajna jednak je* 7. *Neka je $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, 7\}$ skup točaka dizajna $\mathcal{D}$ te neka je $G = \langle (1,2,3)(4,5,6)(7) \rangle$ ciklička grupa reda 3 koja djeluje na skupu $\mathcal{V}$. S obzirom da je $t = 2$ i $k = 3$ pod djelovanjem grupe G dobivamo sljedeće orbite* 2*-članih i* 3*-članih podskupova:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\} \\
\mathcal{T}_3 &= \{\{1,5\},\{2,6\},\{3,4\}\} \\
\mathcal{T}_4 &= \{\{1,6\},\{2,4\},\{3,5\}\} \\
\mathcal{T}_5 &= \{\{1,7\},\{2,7\},\{3,7\}\} \\
\mathcal{T}_6 &= \{\{4,5\},\{5,6\},\{4,6\}\} \\
\mathcal{T}_7 &= \{\{4,7\},\{5,7\},\{6,7\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= \{\{1,2,3\}\} \\
\mathcal{K}_2 &= \{\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{1,3,6\}\} \\
\mathcal{K}_3 &= \{\{1,2,5\},\{2,3,6\},\{1,3,4\}\} \\
\mathcal{K}_4 &= \{\{1,2,6\},\{2,3,4\},\{1,3,5\}\} \\
\mathcal{K}_5 &= \{\{1,2,7\},\{2,3,7\},\{1,3,7\}\} \\
\mathcal{K}_6 &= \{\{1,4,5\},\{2,5,6\},\{3,4,6\}\} \\
\mathcal{K}_7 &= \{\{1,4,6\},\{2,4,5\},\{3,5,6\}\} \\
\mathcal{K}_8 &= \{\{1,4,7\},\{2,5,7\},\{3,6,7\}\} \\
\mathcal{K}_9 &= \{\{1,5,6\},\{2,4,6\},\{3,4,5\}\} \\
\mathcal{K}_{10} &= \{\{1,5,7\},\{2,6,7\},\{3,4,7\}\} \\
\mathcal{K}_{11} &= \{\{1,6,7\},\{2,4,7\},\{3,5,7\}\} \\
\mathcal{K}_{12} &= \{\{4,5,6\}\} \\
\mathcal{K}_{13} &= \{\{4,5,7\},\{5,6,7\},\{4,6,7\}\}
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da Kramer-Mesnerova matrica A ima dimenziju 7×13 te je ona sljedećeg oblika:

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{bmatrix}.$$

Kramer-Mesnerov sustav $A \cdot X = J_7$ ima šest rješenja:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\tau \\
X_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\tau \\
X_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\tau \\
X_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\tau \\
X_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\tau
\end{aligned}
$$

Na primjer, rješenje X_1 odgovara dizajnu $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$, gdje je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_6 \cup \mathcal{K}_{11} \\
&= \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,5,6\},\{3,4,6\},\{1,6,7\},\{2,4,7\},\{3,5,7\}\}.
\end{aligned}
$$

Preostale dizajne dobili bismo na analogan način. Dizajn iz primjera 1.4 odgovarao bi rješenju X_4. Svi dobiveni dizajni međusobno su izomorfni.

Za generiranje orbita, generiranje Kramer-Mesnerove matrice i rješavanje Kramer-Mesnerova sustava u primjeru 2.25 koristili smo `GAP` [37]. Općenito, problem generiranja orbita i rješavanja Kramer-Mesnerova sustava je složen te algoritmi zahtijevaju određena poboljšanja pri konstrukciji dizajna s velikim parametrima. Više o njima reći ćemo u poglavlju 3.

2.5 Dizajni s parametrima kvazisimetričnih dizajna

Konstrukcija kvazisimetričnih dizajna je težak problem i više o njemu reći ćemo u sljedećem poglavlju. Kako bismo pokazali koliko je uvjet kvazisimetričnosti jak, konstruirat ćemo dizajne koji imaju iste parametre (v, b, r, k, λ) kao kvazisimetrični dizajni iz tablice 1.3. Sve poznate informacije te novodobiveni rezultati o njihovoj egzistenciji nalaze se u stupcu '$\#\, D$' tablice 1.3.

Informacija o broju dizajna do na izomorfizam kojima je $r \leq 40$ dostupna je u [69] te su podaci u stupcu '$\#\, D$' tablice 1.3 preuzeti odatle. Dizajne kojima je $r > 40$ konstruiramo pomoću Kramer-Mesnerove metode opisane u potpoglavlju 2.4. Kao zadane grupe automorfizama dizajna odabiremo afine grupe $AGL(1, q)$ i njezine podgrupe (potpoglavlje 2.5.1) te općenito primitivne permutacijske grupe koje djeluju na odgovarajućem broju točaka i njihove podgrupe (potpoglavlje 2.5.2).

2.5.1 Grupa $G \leq AGL(1, q)$

Neka je $\mathbb{F}_q$ polje s q elemenata, pri čemu je q prim potencija.

Definicija 2.26. ***Afina grupa*** *$AGL(1, q)$ je grupa afinih preslikavanja*

$$\varphi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q, \;\; \varphi(x) = ax + b,$$

gdje je $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in \mathbb{F}_q$, s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju.

Pokazuje se da je $AGL(1,q) \cong \mathbb{F}_q \rtimes \mathbb{F}_q^*$. S obzirom da je $(\mathbb{F}_q, +)$ elementarno Abelova grupa reda q, a $(\mathbb{F}_q^*, \cdot)$ ciklička grupa reda $q-1$, red grupe $AGL(1,q)$ jednak je $q(q-1)$. Grupa $AGL(1,q)$ je permutacijska 2-homogena, štoviše 2-tranzitivna grupa na skupu $\mathbb{F}_q$.

Definicija 2.27. *Neka je G grupa koja djeluje na neprazan skup X. Grupa G je* ***2-homogena*** *ako za bilo koja dva dvočlana skupa točaka $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \subseteq X$ postoji $g \in G$ takav da je $g(\{x_1, x_2\}) = \{y_1, y_2\}$. Grupa G je* ***2-tranzitivna*** *ako za bilo koje parove točaka $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$, pri čemu je $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$, postoji $g \in G$ takav da je $g(x_i) = y_i$, za $i = 1, 2$.*

Iz definicije 2.27 se lako vidi da je svaka 2-tranzitivna grupa ujedno i 2-homogena. Iz tog razloga dovoljno je dokazati sljedeće:

Propozicija 2.28. *Grupa $AGL(1,q)$ je 2-tranzitivna na skupu $\mathbb{F}_q$.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{F}_q$ takvi da je $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$. Trebamo pokazati da postoji afino preslikavanje $\varphi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $\varphi(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{F}_q^*$, $b \in \mathbb{F}_q$ takvo da je $\varphi(x_1) = y_1$ i $\varphi(x_2) = y_2$. Dani uvjeti su ekvivalentni s jednadžbama $ax_1 + b = y_1$ i $ax_2 + b = y_2$, a taj sustav ima jedinstveno rješenje:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{i} \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Time smo pokazali da grupa $AGL(1,q)$ djeluje 2-tranzitivno na skupu $\mathbb{F}_q$. □

Općenito, ako grupa G djeluje 2-homogeno na nekom skupu $\mathcal{V}$, onda pomoću nje na sljedeći način dobivamo 2-dizajne:

Teorem 2.29. *Neka grupa G djeluje 2-homogeno na v-članom skupu $\mathcal{V}$ te neka je $B \subseteq \mathcal{V}$ k-člani podskup. Tada uređeni par $(\mathcal{V}, B^G)$ tvori dizajn s parametrima 2-(v, k, λ), gdje je*

$$\lambda = \frac{|G|}{|G_B|} \cdot \frac{k(k-1)}{v(v-1)}, \tag{2.2}$$

pri čemu je G_B stabilizator skupa B.

Dokaz. Očito struktura $(\mathcal{V}, B^G)$ ima v točaka jer je $|\mathcal{V}| = v$. Iz definicije slijedi da je $B^G = \{g(B) \mid g \in G\}$, pri čemu je $g(B) = \{g(x) \mid x \in B\}$. S obzirom da je G permutacijska grupa i vrijedi da je $|g(B)| = |B| = k$, zaključujemo da je B^G familija k-članih podskupova od $\mathcal{V}$. Preostaje pokazati da su bilo koja dva dvočlana skupa $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \subseteq \mathcal{V}$ sadržana u točno λ blokova, gdje je λ neki cijeli broj, odnosno da su skupovi $\mathcal{B}_1 = \{g(B) \mid \{x_1, x_2\} \subseteq g(B),\ g \in G\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{g(B) \mid \{y_1, y_2\} \subseteq g(B),\ g \in G\}$ jednakobrojni. S obzirom da grupa G djeluje 2-homogeno, postoji $h \in G$ takav da je $h(\{x_1, x_2\}) = \{y_1, y_2\}$.

Neka je $\chi : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, $\chi(g(B)) = h(g(B))$. Preslikavanje χ je dobro definirana bijekcija jer vrijedi

$$\{y_1, y_2\} = h(\{x_1, x_2\}) \subseteq h(g(B)) \in \mathcal{B}_2.$$

Slično se pokazuje da je $\{x_1, x_2\} = h^{-1}(\{y_1, y_2\}) \subseteq h^{-1}(g(B)) \in \mathcal{B}_1$, za bilo koji $g(B) \in \mathcal{B}_2$. Time zaključujemo da su skupovi $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ jednakobrojni, odnosno da je svaki dvočlani skup točaka sadržan u konstantnom broju blokova. Iz teorema 2.12.(iii) slijedi da je $|G| = |B^G| \cdot |G_B|$. Uvrštavanjem

$$|B^G| = b = \lambda \cdot \frac{v(v-1)}{k(k-1)},$$

pri čemu je b broj blokova 2-(v, k, λ) dizajna, dobivamo tvrdnju (2.2). □

Tvrdnja teorema 2.29 vrijedit će očito i u slučaju kada grupa G djeluje 2-tranzitivno. Iz propozicije 2.28 i teorema 2.29 vidimo da pomoću grupe $AGL(1, q)$ možemo lako dobiti dizajne.

Korolar 2.30. *Neka je G grupa $AGL(1, q)$ te neka je $B \subseteq \mathbb{F}_q$ takav da je $|B| = k$ i $|B^G| = b$. Tada $(\mathbb{F}_q, B^G)$ tvori 2-(q, k, λ) dizajn s b blokova, gdje je*

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{|G_B|}, \tag{2.3}$$

pri čemu je G_B stabilizator skupa B.

Općenito, blokovi dizajna ne moraju nužno odgovarati jednoj orbiti, već oni mogu odgovarati uniji više orbita i tvoriti dizajn sa zadanim parametrima. Želimo li konstruirati jednostavne dizajne, orbite moraju biti disjunktne.

Korolar 2.31. *Neka je G grupa $AGL(1, q)$ grupa te neka su $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{F}_q$ takvi da vrijedi: $|B_1| = \ldots = |B_n| = k$, $|B_1^G| + \ldots + |B_n^G| = b$ i $B_1^G, \ldots, B_n^G$ su disjunktni. Tada $(\mathbb{F}_q, \mathcal{B})$, pri čemu je $\mathcal{B} = B_1^G \cup \ldots \cup B_n^G$, tvori 2-$(q, k, \lambda)$ dizajn s b blokova, gdje je*

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{|G_{B_1}|} + \cdots + \frac{k(k-1)}{|G_{B_n}|}. \tag{2.4}$$

Kao i ranije, G_{B_i} označava stabilizator skupa B_i, za $i = 1, \ldots, n$.

Pretpostavimo da grupa $G = AGL(1, q)$ djeluje na dizajne iz tablice 1.3 za koje je $v = q$. Iz korolara 2.30 i 2.31 slijedi da je dovoljan uvjet da grupa G ima orbitu ili orbite k-članih podskupova od $\mathbb{F}_q$ odgovarajuće veličine b.

Dizajne ćemo konstruirati koristeći `GAP` [37]. U slučaju kada je $q = p$ prim broj, prirodna reprezentacija grupe $G \cong AGL(1, p)$ je generirana permutacijama:

$$\alpha = (1, 2, \ldots, p), \tag{2.5}$$

$$\beta = (\omega^0 + 1, \omega^1 + 1, \ldots, \omega^{p-1} + 1), \tag{2.6}$$

gdje je ω primitivni element polja $\mathbb{F}_p$. Pritom je, zbog prikaza permutacija u `GAP`-u, nužan prijelaz $(0, 1, \ldots, p-1) \to (1, 2, \ldots, p)$. U slučaju kada je $q = p^n$, za neki $n \geq 2$, pemutacijsku reprezentaciju grupe G na v-članom skupu točaka možemo dobiti pomoću naredbe:

```
G:=AffineActionByMatrixGroup(Group(Z(v)*[[1]])).
```
(2.7)

Općenito, permutacijska reprezentacija grupe G dobivena tom naredbom se ne podudara s onom iz definicije 2.26. Permutacijske reprezentacije tih grupa dane su u prilogu B.

Za sve parametre (v, k, λ) iz tablice 1.3, za koje je $v = q$ prim potencija, generiramo orbite k-članih podskupova v-članog skupa točaka. Za generiranje orbita koristimo naredbu `replesize` koja je opisana u poglavlju 3.2. Ako postoje orbite koje zadovoljavaju pretpostavke korolara 2.30 i/ili 2.31, onda postoji i dizajn sa zadanim parametrima.

Dobiveni rezultati prikazani su u tablici 2.1. U tablici su navedeni stupci 'R.Br.', 'v', 'k', 'λ', 'b' koji odgovaraju parametrima iz tablice 1.3 te stupci '$\#\,\mathcal{D}$', 'Bazni blokovi' i 'Stupanj', pri čemu '$\#\,D$' sadrži informaciju o broju konstruiranih dizajna do na izomorfizam, 'Bazni blokovi' sadrži bazne blokove jednog od konstruiranih dizajna, pri čemu je izabran onaj dizajn koji ima najmanji stupanj, te 'Stupanj' sadrži raspon stupnjeva konstruiranih dizajna.

Tablica 2.1: Dizajni (q, k, λ) konstruirani pomoću grupe $G = AGL(1, q)$

RBr.	v	k	λ	b	$\#D$	Bazni blokovi	Stupanj
1	19	7	7	57	1	{1, 2, 8, 9, 12, 13, 19}	4
12	23	7	21	253	15	{1, 2, 3, 10, 15, 22, 23}	5–7
17	31	7	7	155	1	{1, 2, 6, 7, 26, 27, 31}	5
23	37	9	8	148	1	{2, 8, 10, 11, 13, 17, 27, 34, 35}	4
25	41	9	9	205	1	{1, 2, 4, 10, 15, 28, 33, 39, 41}	5
26	41	17	34	205	2	{1, 2, 3, 4, 7, 10, 14, 15, 19, 24, 28, 29, 33, 36, 39, 40, 41}	6–7
27	41	20	57	246	1	{2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 32, 33, 34, 37, 38, 40, 41}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 22, 24, 27, 29, 32, 34, 38}	7
31	43	18	51	301	5	{2, 3, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 30, 31, 32, 36, 37, 38, 39, 42, 43}	7–10
39	49	13	13	196	1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 18, 25, 32, 39, 46}	5

Tablica 2.1: Dizajni (q, k, λ) konstruirani pomoću grupe $G = AGL(1, q)$

RBr.	v	k	λ	b	$\#D$	Bazni blokovi	Stupanj
40	49	16	45	441	2	{2, 3, 5, 6, 9, 13, 18, 20, 23, 25, 30, 34, 39, 41, 44, 46}, {1, 2, 3, 4, 10, 12, 15, 18, 25, 27, 29, 31, 32, 36, 45, 49}	8
62	61	21	21	183	1	{1, 2, 4, 9, 10, 12, 21, 24, 25, 28, 29, 34, 35, 38, 39, 42, 51, 53, 54, 59, 61}	6
67	64	24	46	336	3	{5, 6, 7, 10, 15, 16, 19, 21, 26, 27, 33, 36, 37, 39, 43, 44, 45, 50, 51, 54, 55, 61, 62, 63}	4
74	71	14	39	1065	4	{2, 15, 21, 22, 23, 31, 33, 34, 38, 46, 49, 63, 66, 68}, {1, 2, 3, 5, 8, 28, 31, 33, 34, 35, 42, 53, 54, 65}	7–8
75	71	31	93	497	5	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 15, 16, 18, 21, 22, 26, 29, 30, 35, 38, 43, 44, 47, 51, 52, 55, 57, 58, 62, 67, 68, 69, 70, 71}	9–11
82	73	32	124	657	14	{2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 14, 15, 17, 20, 21, 23, 28, 30, 31, 44, 45, 47, 52, 54, 55, 58, 60, 61, 64, 66, 67, 68, 71, 72, 73}	9–12
95	79	19	57	1027	22	{1, 2, 3, 7, 15, 21, 24, 25, 32, 34, 47, 49, 56, 57, 60, 66, 74, 78, 79}	8–12
96	81	30	290	2160	≥ 1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 31, 32, 35, 36, 62, 63, 65, 73, 76, 77, 79}	15
97	81	39	247	1080	452	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 22, 26, 27, 32, 35, 37, 41, 43, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 58, 62, 63, 68, 71, 73, 77, 79}	9–15
129	101	20	19	505	1	{2, 7, 11, 15, 18, 33, 37, 40, 42, 45, 58, 61, 63, 66, 70, 85, 88, 92, 96, 101}	4
130 131	101	21	21	505	1	{1, 2, 7, 11, 15, 18, 33, 37, 40, 42, 45, 58, 61, 63, 66, 70, 85, 88, 92, 96, 101}	7
142	109	25	50	981	4	{1, 2, 4, 9, 11, 15, 25, 27, 30, 34, 42, 46, 47, 64, 65, 69, 77, 81, 84, 86, 96, 100, 102, 107, 109}	9–11
143 144	109	49	196	981	14	{1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 15, 17, 18, 20, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 34, 42, 44, 46, 47, 49, 52, 53, 58, 59, 62, 64, 65, 67, 69, 77, 81, 82, 83, 84, 86, 90, 91, 93, 94, 96, 100, 102, 104, 107, 108, 109}	11–13
145	109	54	265	1090	3	{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 31, 33, 36, 38, 39, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 64, 67, 70, 71, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 86, 90, 91, 97, 98, 99, 102, 106}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 28, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 53, 57, 61, 65, 67, 68, 69, 72, 73, 74, 76, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 90, 91, 92, 94, 95, 99, 100, 108}	13–15

Tablica 2.1: Dizajni (q, k, λ) konstruirani pomoću grupe $G = AGL(1, q)$

RBr.	v	k	λ	b	$\#D$	Bazni blokovi	Stupanj
157	113	43	129	904	7	{1, 2, 4, 5, 8, 13, 14, 17, 19, 22, 23, 24, 26, 29, 30, 31, 35, 42, 49, 50, 52, 53, 62, 63, 65, 66, 73, 80, 84, 85, 86, 89, 91, 92, 93, 96, 98, 101, 102, 107, 110, 111, 113}	10–13
194	121	13	13	1210	1	{1, 2, 7, 21, 30, 39, 48, 57, 76, 85, 94, 103, 112}	5
200	125	20	57	2325	68	{6, 8, 15, 19, 31, 36, 38, 45, 49, 61, 66, 68, 75, 79, 91, 96, 98, 105, 109, 121}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 14, 18, 30, 35, 44, 48, 60, 67, 74, 78, 95, 97, 120, 125}, {1, 2, 3, 4, 5, 9, 21, 26, 27, 29, 39, 56, 57, 69, 81, 86, 87, 89, 111, 119}	6–10
201	125	45	99	775	5	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 18, 19, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 44, 45, 48, 49, 60, 61, 65, 66, 67, 68, 74, 75, 78, 79, 90, 91, 95, 96, 97, 98, 104, 105, 108, 109, 120, 121, 125}	6
204	127	31	155	2667	969	{1, 2, 3, 4, 9, 20, 21, 24, 26, 34, 39, 41, 49, 57, 58, 61, 68, 71, 72, 80, 88, 90, 95, 103, 105, 108, 109, 120, 125, 126, 127}	11–19
206	127	37	74	889	3	{1, 2, 5, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 29, 32, 38, 40, 47, 48, 52, 53, 60, 69, 76, 77, 81, 82, 89, 91, 97, 100, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 113, 124, 127}	11-12
207	127	42	205	1905	19	{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 17, 20, 24, 25, 26, 29, 33, 39, 47, 48, 49, 51, 57, 58, 62, 65, 66, 68, 74, 76, 77, 88, 93, 95, 97, 98, 101, 102, 108, 113, 115, 118, 123}, { 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 17, 21, 22, 23, 29, 36, 37, 39, 41, 53, 60, 64, 67, 68, 69, 70, 73, 77, 84, 96, 98, 100, 101, 108, 114, 115, 116, 120, 123, 124, 126}	13–16
216	131	20	38	1703	6	{2, 3, 10, 16, 26, 43, 48, 54, 59, 62, 71, 74, 79, 85, 90, 107, 117, 123, 130, 131}	8–9
227	137	40	195	2329	364	{2, 3, 4, 8, 11, 19, 20, 21, 25, 28, 36, 37, 38, 42, 45, 53, 54, 55, 59, 62, 70, 71, 72, 76, 79, 87, 88, 89, 93, 96, 104, 105, 106, 110, 113, 121, 122, 123, 127, 130}	11–18
260	149	53	689	5513	≥ 1	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 21, 25, 28, 35, 38, 45, 52, 55, 62, 69, 72, 79, 82, 89, 96, 99, 106, 113, 116, 123, 126, 130, 133, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149}	26

Dizajna pod rednim brojevima 96. i 260. ima puno te bi konstrukcija svih dizajna iziskivala dodatno računanje i prilagodbu programa koje koristimo. Iz tog razloga konstruirali smo samo jedan dizajn s navedenim parametrima.

Pretpostavivši da grupa $G = AGL(1, q)$ djeluje na dizajne iz tablice 1.3 za koje je $v = q$ konstruirali smo dizajne za 35 različitih parametara (v, k, λ). Za njih 5 poznato je da kvazisimetrični dizajni postoje, za njih 7 poznato je da ne postoje, a za njih 23 nije poznato postoje li odgovarajući kvazisimetrični dizajni.

Parametri (v, k, λ) za koje je $v = q$ prim potencija, ali nismo dobili dizajne od grupe $AGL(1, q)$ su: $(19, 9, 16)$, $(29, 7, 12)$, $(43, 16, 40)$, $(49, 9, 6)$, $(61, 25, 160)$, $(71, 35, 136)$, $(73, 10, 15)$, $(73, 28, 126)$, $(101, 25, 96)$, $(101, 45, 99)$, $(103, 28, 126)$, $(113, 50, 175)$, $(121, 46, 69)$, $(127, 15, 5)$, $(127, 36, 40)$, $(127, 57, 76)$, $(139, 23, 88)$ i $(139, 51, 425)$.

Neka je $G < AGL(1, q)$ te pretpostavimo da grupa G djeluje na dizajne s navedenim parametrima. Grupa G nije nužno 2-homogena te pretpostavke korolara 2.30 i 2.31 nisu ispunjene. Za generiranje orbita veličine manje ili jednake od b koristimo naredbu `replesize`, a pritom takve orbite nazivamo **kratkim orbitama**. U slučaju kada G nije 2-homogena za konstrukciju dizajna iz dobivenih orbita koristimo Kramer-Mesnerovu metodu i naredbe `KMmat` i `mysolvemat` koje su opisane u poglavlju 3.3.1. Za određivanje broja neizomorfnih dizajna koristimo program `incfilter`. Ako je za neke parametre konstruirano više neizomorfnih dizajna, onda su dani bazni blokovi samo jednog od njih, pri čemu je izabran onaj dizajn koji ima najmanji stupanj. Dobiveni rezultati iskazani su sljedećim propozicijama:

Propozicija 2.32. *Postoji barem šest dizajna s parametrima* 2-$(19, 9, 16)$*,* $b = 76$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{19} \rtimes \mathbb{Z}_9$ grupa reda 171 generirana permutacijama α iz (2.5) i

$$\beta = (2, 5, 17, 8, 10, 18, 12, 7, 6)(3, 9, 14, 15, 19, 16, 4, 13, 11).$$

Grupa G inducira jednu orbitu na 2-članim podskupovima i 8 kratkih orbita na 9-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 19\}$, od kojih je šest veličine 57 i dvije veličine 19. Iz toga slijedi da grupa G djeluje 2-homogeno na skupu $\mathcal{V}$ te primjenom korolara 2.31 zaključujemo da od orbita 9-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ možemo konstruirati 12 dizajna, od kojih dobivamo 6 neizomorfnih. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je $\{\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 15\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 14, 17\}\}$. Stupanj tog dizajna je 4, a njegovi presječni brojevi su $3, 4, 5, 6$. □

Propozicija 2.33. *Postoji barem* 1 518 *dizajna s parametrima* 2-$(29, 7, 12)$*,* $b = 232$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{29} \rtimes \mathbb{Z}_7$ grupa reda 203 generirana permutacijama α iz (2.5) i

$$\begin{aligned}\beta =&(2, 17, 25, 8, 26, 24, 21)(3, 4, 20, 15, 22, 18, 12)(5, 7, 10, 29, 14, 6, 23)\\ &(9, 13, 19, 28, 27, 11, 16).\end{aligned}$$

Grupa G inducira dvije orbite na 2-članim podskupovima i 7 692 orbita na 7-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 29\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije $2 \times 7\,692$ ima 6 072 rješenja kojima odgovara 1 518 neizomorfnih dizajna s navedenim parametrima. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je $\{\{1, 2, 3, 5, 22, 24, 25\}, \{1, 2, 12, 14, 16, 19, 22\}\}$. Stupanj tog dizajna je 4, a njegovi presječni brojevi su $0, 1, 2, 3$. □

Propozicija 2.34. *Postoji barem* 143 *dizajna s parametrima* 2-$(43, 16, 40)$*,* $b = 301$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{43} \rtimes \mathbb{Z}_{21}$ grupa reda 903 generirana permutacijama α iz (2.5) i

$$\begin{aligned}\beta =&(2, 10, 39, 42, 26, 11, 5, 37, 24, 36, 15, 41, 17, 16, 7, 12, 14, 32, 22, 18, 25)\\ &(3, 19, 34, 40, 8, 21, 9, 30, 4, 28, 29, 38, 33, 31, 13, 23, 27, 20, 43, 35, 6).\end{aligned}$$

Grupa G inducira jednu orbitu na 2-članim podskupovima i 286 kratkih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 43\}$, pri čemu su sve orbite veličine 301. Iz toga slijedi da grupa G djeluje 2-homogeno na skupu $\mathcal{V}$ te primjenom korolara 2.30 zaključujemo da od orbita 16-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ možemo konstruirati 286 dizajna, od kojih dobivamo 143 neizomorfnih. Bazni blok jednog od konstruiranih dizajna je {1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13, 19, 22, 23, 26, 30, 31, 37, 41}. Stupanj tog dizajna je 6, a njegovi presječni brojevi su $4, 5, 6, 7, 8, 9$. □

Propozicija 2.35. *Postoji barem* 490 *dizajna s parametrima* 2-$(71, 35, 136)$*,* $b = 568$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{71} \rtimes \mathbb{Z}_{35}$ grupa reda 2 485 generirana permutacijama α iz (2.5) i

$$\begin{aligned}\beta =&(2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 58, 44, 16, 31, 61, 50, 28, 55, 38, 4, 7, 13, 25, 49, 26, 51, 30, 59,\\ &46, 20, 39, 6, 11, 21, 41, 10, 19, 37)(8, 15, 29, 57, 42, 12, 23, 45, 18, 35, 69, 66, 60, 48,\\ &24, 47, 22, 43, 14, 27, 53, 34, 67, 62, 52, 32, 63, 54, 36, 71, 70, 68, 64, 56, 40).\end{aligned}$$

Grupa G inducira jednu orbitu na 2-članim podskupovima i 542 kratkih orbita na 35-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 71\}$, od kojih su dvije veličine 71, 50 veličine 355 i 490 veličine 497. Iz toga slijedi da grupa G djeluje 2-homogeno na skupu $\mathcal{V}$ te primjenom korolara 2.31 zaključujemo da od orbita 35-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ veličine 71 i 497 možemo konstruirati 980 dizajna, od kojih dobivamo 490 neizomorfnih. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 37, 38, 39, 41, 44, 46, 49, 50, 51, 55, 58, 59, 61, 65}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 17, 18, 22, 24, 25, 26, 28, 32, 36, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 50, 54, 56, 57, 59, 60, 63, 65, 68, 69}}. Stupanj tog dizajna je 6, a njegovi presječni brojevi su $13, 15, 17, 19, 21$. □

Propozicija 2.36. *Postoji barem* 564 *dizajna s parametrima* 2-$(101, 25, 96)$*,* $b = 1\,616$.

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{101} \rtimes \mathbb{Z}_{25}$ grupa reda 2 525 generirana permutacijama α iz (2.5) i

$$\begin{aligned}\beta =&(2, 6, 26, 25, 20, 96, 72, 53, 59, 89, 37, 80, 93, 57, 79, 88, 32, 55, 69, 38, 85, 17, 81, 98, 82)\\ &(3, 11, 51, 49, 39, 90, 42, 4, 16, 76, 73, 58, 84, 12, 56, 74, 63, 8, 36, 75, 68, 33, 60, 94, 62)\\ &(5, 21, 101, 97, 77, 78, 83, 7, 31, 50, 44, 14, 66, 23, 10, 46, 24, 15, 71, 48, 34, 65, 18, 86, 22)\\ &(9, 41, 100, 92, 52, 54, 64, 13, 61, 99, 87, 27, 30, 45, 19, 91, 47, 29, 40, 95, 67, 28, 35, 70, 43).\end{aligned}$$

Grupa G inducira dvije orbite na 2-članim podskupovima i 3 104 kratkih orbita na 25-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 101\}$, od kojih je 3100 veličine 505 i četiri veličine 101. Za konstrukciju dizajna uzmimo prvih 50 orbita veličine 505 i prvu dobivenu orbitu veličine 101. Tada Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 2×50 ima 564 rješenja, od kojih dobivamo isto toliko neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{2, 3, 4, 5, 6, 8, 17, 32, 34, 37, 44, 46, 51, 60, 68, 72, 73, 74, 78, 80, 84, 85, 88, 90, 96}, {1, 2, 3, 4,6, 7, 14, 17, 33, 36, 43, 45, 50, 59, 65, 67, 72, 73, 77, 83, 84, 87, 89, 95, 100}, {1, 2, 3, 4, 6, 7, 19, 23,25, 27, 30, 31, 37, 46, 50, 57, 59, 65, 70, 74, 79, 83, 91, 93, 95}, {1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 15, 18, 20, 25,29, 40, 43, 48, 49, 55, 60, 61, 76, 78, 80, 82, 92, 95}}. Stupanj tog dizajna je 12, a njegovi presječni brojevi su $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20$. □

Propozicija 2.37. *Postoji barem* 119 *dizajna s parametrima* 2-$(101, 45, 99)$*,* $b = 505$.

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{101} \rtimes \mathbb{Z}_{25}$ grupa reda 2 525 generirana permutacijama kao u dokazu propozicije 2.36. Grupa G inducira dvije orbite na 2-članim podskupovima i 33 592 kratkih orbita na 45-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 101\}$, pri čemu su sve orbite veličine 505. Za konstrukciju dizajna uzmimo prvih 1000 orbita veličine 505. Tada Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 2×1000 ima 120 rješenja, od kojih dobivamo 119 neizomorfnih dizajna. Bazni blok jednog od konstruiranih dizajna je {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 15, 17, 18, 29, 30, 32, 34, 35, 37, 39, 44, 46, 51, 54, 56, 60, 62, 66, 67, 68, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 80, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 96, 100, 101 }. Stupanj tog dizajna je 8, a njegovi presječni brojevi su $10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$. □

Dizajna s parametrima $(101, 25, 96)$ i $(101, 45, 99)$ ima puno te kada bismo u obzir uzeli orbite svih 25-članih, odnosno 45-članih podskupova, rješavanje Kramer-Mesnerovog sustava bez dodatne prilagodbe ne bi bilo moguće.

Grupa $AGL(1, q)$ općenito može djelovati i na većem skupu točaka, no tada ona ne djeluje 2-homogeno. Pretpostavimo da grupa $G = AGL(1, q)$ djeluje na dizajne iz tablice 1.3 za koje je $v = q + 1$. Za konstrukciju dizajna koristimo naredbe iz slučaja kada je $G < AGL(1, q)$. Dobiveni rezultati prikazani su u tablici 2.2 čiji su stupci jednaki stupcima iz tablice 2.1.

Tablica 2.2: Dizajni $(q+1, k, \lambda)$ konstruirani pomoću grupe $G = AGL(1, q)$

RBr.	v	k	λ	b	$\#D$	Bazni blokovi	Stupanj
4	20	10	18	76	1	{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}, {1, 2, 3, 4, 11, 13, 14, 16, 17, 20}	6
61	60	30	58	236	1	{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58}, {1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 35, 39, 42, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 55, 57, 60}	6

Pretpostavivši da grupa $AGL(1, q)$ ili neka njezina podgrupa djeluje na dizajne iz tablice 1.3, konstruirali smo dizajne za 43 različitih parametara (v, k, λ).

Osim svih navedenih dizajna koje smo konstruirali grupom $AGL(1, q)$ ili nekom njezinom podgrupom, konstruirali smo još jedan dizajn do čije smo grupe automorfizama došli slijedeći oblik stukture grupe $AGL(1, q)$. Promatrali smo semidirektna proširenja grupe $\mathbb{Z}_v$, pri čemu v nije prim potencija. Za $v = 91$ postoji 48 semidirektnih proširenja.

Propozicija 2.38. *Postoje barem tri dizajna s parametrima* 2-$(91, 36, 56)$, $b = 364$.

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{91} \rtimes (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3)$ grupa reda 3 276 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =& (1, 2, \ldots, 91),\\
\beta =& (2, 80, 54)(3, 68, 16)(4, 56, 69)(5, 44, 31)(6, 32, 84)(7, 20, 46)(9, 87, 61)(10, 75, 23)\\
& (11, 63, 76)(12, 51, 38)(13, 39, 91)(14, 27, 53)(17, 82, 30)(18, 70, 83)(19, 58, 45)\\
& (21, 34, 60)(24, 89, 37)(25, 77, 90)(26, 65, 52)(28, 41, 67)(33, 72, 59)(35, 48, 74)\\
& (40, 79, 66)(42, 55, 81)(47, 86, 73)(49, 62, 88),\\
\gamma =& (2, 81, 31, 35, 82, 20, 65, 25, 10, 84, 89, 34)(3, 70, 61, 69, 72, 39, 38, 49, 19, 76, 86, 67)\\
& (4, 59, 91, 12, 62, 58, 11, 73, 28, 68, 83, 9)(5, 48, 30, 46, 52, 77, 75, 6, 37, 60, 80, 42)\\
& (7, 26, 90, 23, 32, 24, 21, 54, 55, 44, 74, 17)(8, 15, 29, 57, 22, 43, 85, 78, 64, 36, 71, 50)\\
& (13, 51, 88, 45, 63, 47, 41, 16, 18, 87, 56, 33)(14, 40, 27, 79, 53, 66).
\end{aligned}$$

Grupa G inducira tri orbite na 2-članim podskupovima i 352 kratkih orbita na 36-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 91\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 3×352 ima 6 rješenja, od kojih dobivamo tri neizomorfna dizajna. Bazni blok jednog od konstruiranih dizajna je {2, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 17, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 32, 37, 40, 42, 44, 46, 52, 53, 54, 55, 64, 65, 66, 75, 79, 80, 81, 82, 84, 89}. Stupanj tog dizajna je 9, a njegovi presječni brojevi su $9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 24$. □

2.5.2 Primitivna grupa G

Neka je G tranzitivna grupa na skupu X, tj. takva za sve $x, y \in X$, $x \neq y$ postoji $g \in G$ takav da je $y = g(x)$. Neprazan podskup $\Delta \in X$ naziva se **blokom** grupe G ako za svaki $g \in G$ vrijedi da je ili $\Delta^g = \Delta$ ili $\Delta^g \cap \Delta = \emptyset$, pri čemu je $\Delta^g = \{g(\delta) \mid \delta \in \Delta\}$. **Trivijalni blokovi** grupe G koja djeluje na skupu X su skupovi X i $\{\alpha\}$, $\alpha \in X$. Blokovi koji nisu trivijalni nazivaju se **netrivijalnim blokovima** grupe G.

Definicija 2.39. *Grupa G je **primitvna** grupa ako je tranzitivna i ako nema netrivijalnih blokova na skupu X.*

Sljedeći teorem daje neka svojstva primitivnih grupa:

Teorem 2.40.

(i) Svaka 2-tranzitivna grupa je primitivna.

(ii) Netrivijalna normalna podgrupa primitivne grupe je tranzitivna.

(iii) Tranzitivna grupa G na skupu X je primitivna ako i samo ako je G_x maksimalna podgrupa od G.

Grupa $AGL(1, q)$ je primjer primitivne grupe. Osim nje, česti primjeri primitivnih grupa koje biramo za konstrukciju dizajna su i Mathieuova grupa $\mathbb{M}_v$ koja djeluje na v točaka, zatim projektivna linearna grupa $PGL(n, q)$, projektivna specijalna linearna grupa $PSL(n, q)$, projektivna specijalna unitarna grupa $PSU(n, q)$, koje djeluju na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru nad poljem $\mathbb{F}_q$, gdje je q prim potencija.

Općenito, u `GAP`-u [37] je dostupna biblioteka svih primitivnih grupa koje djeluju na nekom v-članom skupu, a do njih dolazimo naredbom:

```
List([1..NrPrimitiveGroups(v)],x->PrimitiveGroup(v,x)).
```

Neka je G primitivna grupa ili njezina podgrupa. Pretpostavimo da grupa G djeluje na dizajne iz tablice 1.3. Dizajne ćemo konstruirati Kramer-Mesnerovom metodom. Ako je broj konstruiranih dizajna za neke parametre veći od jedan, onda navodimo bazne blokove samo jednog od njih, pri čemu je izabran onaj dizajn koji ima najmanji stupanj. Dobiveni rezultati iskazani su sljedećim propozicijama:

Propozicija 2.41. *Postoji barem 8 dizajna s parametrima 2-$(22, 7, 16)$, $b = 176$.*

Dokaz. Neka je $G \cong ((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_5) \rtimes \mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{M}_{22}$ podgrupa primitivne grupe. Grupa G je reda 1 920 i generirana je permutacijama

$$\alpha = (1, 4, 17, 8, 7)(2, 21, 22, 3, 15)(5, 16, 18, 10, 19)(6, 20, 13, 12, 9),$$
$$\beta = (3, 13)(4, 20)(5, 8)(7, 19)(9, 17)(11, 14)(15, 18)(16, 21).$$

Grupa G inducira četiri orbite na 2-članim podskupovima i 14 kratkih orbita na 7-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 22\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 4×14 ima 24 rješenja, od kojih dobivamo 8 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 11, 12, 13, 14}, {1, 2, 3, 5, 10, 20, 21}, {1, 2, 4, 5, 11, 15, 22}}. Stupanj tog dizajna je 2, a njegovi presječni brojevi su $1, 3$. Ovime smo konstruirali kvazisimetrični dizajn ne postavljajući uvjet da se postigne to svojstvo. □

Propozicija 2.42. *Postoji barem jedan dizajn s parametrima* 2-$(28, 7, 16)$, $b = 288$.

Dokaz. Neka je $G \cong PSU(3, 3)$ primitivna grupa reda 6 048 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1, 4, 2, 3)(5, 21, 9, 15)(6, 19, 10, 22)(7, 16, 11, 25)(8, 26, 12, 20)(14, 27, 17, 24),\\ \beta =&(1, 7, 9)(2, 8, 10)(3, 5, 11)(4, 6, 12)(13, 18, 14)(15, 23, 22)(16, 28, 26)\\ &(19, 24, 25)(20, 27, 21).\end{aligned}$$

Grupa G inducira jednu orbitu na 2-članim podskupovima i jednu orbitu veličine 288 na 7-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 28\}$. Iz toga slijedi da grupa G djeluje 2-homogeno te primjenom teorema 2.29 zaključujemo da orbita veličine 288 na 7-članim podskupovima skupa $\mathcal{V}$ tvori dizajn. Bazni blok tog dizajna je $\{2, 3, 14, 15, 19, 21, 22\}$. Stupanj tog dizajna je 3, a njegovi presječni brojevi su $1, 2, 4$. □

Propozicija 2.43. *Postoje barem dva dizajna s parametrima* 2-$(42, 21, 60)$, $b = 246$.

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{Z}_{41} \rtimes \mathbb{Z}_{20} \leq PSL(2, 42)$ podgrupa primitivne grupe. Grupa G je reda 820 i generirana je permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1, 3, 17, 28, 31, 21, 42, 4, 5, 13, 35, 40, 16, 12, 18, 6, 19, 10, 27, 34, 9, 29, 14, 7, 30,\\ &39, 26, 38, 32, 36, 20, 15, 33, 25, 24, 22, 41, 11, 8, 37, 23),\\ \beta =&(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41)\\ &(4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42).\end{aligned}$$

Grupa G inducira tri orbite na 2-članim podskupovima i 140 kratkih orbita na 21-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 42\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 3×140 ima 4 rješenja, od kojih dobivamo 2 neizomorfna dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, 36,39, 40}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13,14,15, 20, 22, 28, 30, 31, 33, 34, 37, 41}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 15, 17, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 34, 35, 36, 37, 40, 42}, {1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 20, 22, 23, 28, 30, 31, 33, 34, 37, 41}}. Stupanj tog dizajna je 8, a njegovi presječni brojevi su $1, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20$. □

Propozicija 2.44. *Postoje barem dva dizajna s parametrima* 2-$(45, 9, 8)$*,* $b = 220$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{M}_{10}$ primitivna grupa reda 720 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,2,7)(3,11,27)(4,14,31)(5,18,32)(6,20,36)(8,24,39)(9,25,28)(10,26,42)\\
&(12,15,16)(13,30,40)(17,19,21)(22,35,44)(23,33,29)(34,43,37)(38,45,41),\\
\beta =&(1,4)(3,12)(5,19)(6,21)(7,14)(8,10)(11,20)(13,16)(15,23)(17,22)(18,33)\\
&(24,41)(25,28)(26,43)(27,32)(29,44)(30,35)(34,39)(36,40)(42,45),\\
\delta =&(1,6,7,23)(2,10)(3,13,22,5)(4,17,14,12)(8,9)(11,28,44,25)(15,19,21,16)\\
&(18,35,40,27)(20,38,29,37)(24,32,39,30)(26,41,42,34)(33,45,36,43),\\
\gamma =&(1,5,7,13)(2,9)(3,6,22,23)(4,16,14,19)(8,10)(11,29,44,20)(12,15,17,21)\\
&(18,34,40,41)(24,36,39,33)(25,37,28,38)(26,35,42,27)(30,43,32,45).
\end{aligned}$$

Grupa G inducira četiri orbite na 2-članim podskupovima i 106 kratkih orbita na 9-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 45\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 4×106 ima 4 rješenja, od kojih dobivamo 2 neizomorfna dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 7, 15, 17, 28, 35, 42}, {1, 2, 7, 34, 37, 38, 41, 43, 45}}. Stupanj tog dizajna je 6, a njegovi presječni brojevi su $0, 1, 2, 3, 4, 5$. □

Propozicija 2.45. *Postoji barem 9 dizajna s parametrima* 2-$(45, 15, 42)$*,* $b = 396$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong A_6 \rtimes \mathbb{Z}_4$ primitivna grupa reda 1 440 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,2,7)(3,11,27)(4,14,31)(5,18,32)(6,20,36)(8,24,39)(9,25,28)(10,26,42)\\
&(12,15,16)(13,30,40)(17,19,21)(22,35,44)(23,33,29)(34,43,37)(38,45,41),\\
\beta =&(1,3,5,6,7,22,13,23)(2,8,9,10)(4,15,16,17,14,21,19,12)(11,28,29,38,44,\\
&25,20,37)(18,33,34,24,40,36,41,39)(26,43,35,32,42,45,27,30),\\
\delta =&(2,3,4,6)(5,20,23,30)(7,33,31,35)(8,16,45,27)(9,39,25,42)(10,36,34,19)\\
&(11,13,18,22)(12,38,29,26)(14,28)(15,17,40,32)(21,24,44,37)(41,43).
\end{aligned}$$

Grupa G inducira četiri orbite na 2-članim podskupovima i 2 029 kratkih orbita na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 45\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 4×2029 ima 9 rješenja, od kojih dobivamo 9 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 4, 5, 9, 13, 14, 22, 23, 25, 28, 33, 35, 39, 42}, {1, 2, 4, 5, 9, 13, 14, 22, 23, 25, 28, 33, 35, 39, 42}, {1, 2, 3, 7, 8, 9, 12, 17, 22, 24, 30, 32, 33, 36, 39}}. Stupanj tog dizajna je 9, a njegovi presječni brojevi su $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. □

Propozicija 2.46. *Postoji barem* 10 *dizajna s parametrima* 2-$(45, 18, 34)$*,* $b = 220$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{M}_{10}$ primitivna grupa reda 720 kao u dokazu propozicije 2.44. Grupa G inducira četiri orbite na 2-članim podskupovima i 702 kratkih orbita na 18-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 45\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 4×702 ima 17 rješenja, od kojih dobivamo 10 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 7, 8, 11, 22, 24, 27, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45}, {1, 2, 3, 4, 5, 8, 14, 17, 19, 20, 29, 31, 32, 34, 35, 37, 42, 43}, {1, 2, 3, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 20, 28, 29, 31, 35, 37, 39, 40, 43}}. Stupanj tog dizajna je 8, a njegovi presječni brojevi su $0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. □

Propozicija 2.47. *Postoji barem* 297 *dizajna s parametrima* 2-$(45, 21, 70)$*,* $b = 330$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong \mathbb{M}_{10}$ primitivna grupa reda 720 kao u dokazu propozicije 2.44. Grupa G inducira četiri orbite na 2-članim podskupovima i 1 819 kratkih orbita na 21-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 45\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 4×1819 ima 585 rješenja, od kojih dobivamo 297 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 14, 15, 17, 25, 28, 31, 32, 33, 35, 39, 40, 41, 42, 43}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 27, 29, 32, 36, 40, 44}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 25, 29, 31, 32, 33, 34, 38, 39, 41, 45}}. Stupanj tog dizajna je 4, a njegovi presječni brojevi su $3, 9, 11, 13$. □

Propozicija 2.48. *Postoji barem* 229 *dizajna s parametrima* 2-$(46, 16, 72)$*,* $b = 621$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong A_6 \rtimes \mathbb{Z}_4$ primitivna grupa reda 1 440 kao u dokazu propozicije 2.45. Grupa G inducira pet orbita na 2-članim podskupovima i 4 579 kratkih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 46\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 5×4579 ima 229 rješenja, od kojih dobivamo 229 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 24, 25, 31, 33, 34, 35, 38, 39}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 24, 29, 35, 38, 40, 43, 44, 46}, {1, 2, 3, 4, 8, 11, 15, 18, 20, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 37}, {1, 2, 3, 5, 8, 12, 16, 17, 20, 25, 26, 27, 40, 42, 45, 46}}. Stupanj tog dizajna je 10, a njegovi presječni brojevi su $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. □

Propozicija 2.49. *Postoji barem* 5 *dizajna s parametrima* 2-$(55, 16, 40)$*,* $b = 495$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong PGL(2, 11)$ primitivna grupa reda 1 440 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1, 2, 4, 8, 15, 26, 41, 32, 47, 13)(3, 6, 12, 21, 34, 51, 37, 52, 48, 36)(5, 10, 18, 31,\\ &45, 29, 44, 23, 39, 25)(7, 14, 24, 40, 11, 20, 35, 38, 54, 50)(9, 16, 28, 43, 22)\\ &(17, 30, 19, 33, 49, 46, 27, 42, 53, 55),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta =&(1,3,7)(2,5,11)(4,9,17)(6,13,23)(10,19,34)(12,22,38)(14,25,26)\\&(15,27,28)(16,29,45)(18,32,48)(20,36,41)(21,37,53)(24,31,46)(30,44,40)\\&(33,50,35)(39,51,49)(42,55,47)(43,52,54).\end{aligned}$$

Grupa G inducira pet orbita na 2-članim podskupovima i 4 794 kratkih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 55\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 5×4794 ima 5 rješenja, od kojih dobivamo 5 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 4, 12, 21, 22, 29, 30, 33, 41, 44, 45, 46, 48, 54}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 13, 27, 28, 35, 36, 43, 49, 50, 51}, {1, 2, 3, 6, 11, 21, 25, 26, 27, 29, 34, 35, 41, 42, 46, 49}}. Stupanj tog dizajna je 9, a njegovi presječni brojevi su $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$. □

Propozicija 2.50. *Postoji barem 77 dizajna s parametrima* 2-$(56, 15, 42)$*,* $b = 616$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong PGL(2, 11)$ primitivna grupa reda 1 440 kao u dokazu propozicije 2.49. Grupa G inducira šest orbita na 2-članim podskupovima i 5 794 kratkih orbita na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 56\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 6×5794 ima 77 rješenja, od kojih dobivamo 77 neizomorfnih dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 4, 9, 15, 17, 19, 40, 43, 47, 48, 49, 52, 53, 54}, {1, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 18, 28, 39, 43, 46, 50, 52, 53}, {1, 2, 3, 5, 7, 10, 22, 29, 33, 34, 36, 39, 47, 55, 56}, {1, 2, 3, 9, 12, 16, 17, 19, 21, 25, 39, 44, 47, 50, 52}, {1, 2, 4, 5, 12, 21, 22, 26, 27, 29, 30, 32, 41, 48, 52}}. Stupanj tog dizajna je 9, a njegovi presječni brojevi su $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13$. □

Propozicija 2.51. *Postoji barem jedan dizajn s parametrima* 2-$(57, 27, 117)$*,* $b = 532$*.*

Dokaz. Neka je $G \cong PSL(2, 19)$ primitivna grupa reda 3 420 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1,2)(3,5)(4,7)(6,10)(8,13)(9,15)(11,18)(12,20)(14,23)(16,25)(17,27)(22,32)\\&(24,35)(26,31)(28,39)(29,41)(30,42)(33,34)(36,47)(37,49)(43,53)(44,51)\\&(45,50)(46,54)(48,56)(52,55),\\\beta =&(1,3,6,11,19,30,43,49,15,20,27,38,35,46,55,42,23,34,45)(2,4,8,14,24,36,\\&48,47,41,52,57,13,22,33,32,18,29,39,51)(5,9,16,26,25,37,50,54,7,12,21,\\&31,44,53,56,10,17,28,40).\end{aligned}$$

Grupa G inducira tri orbite na 2-članim podskupovima i 55 kratkih orbita na 27-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 57\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 3×55 ima jedno rješenje, od kojeg dobivamo dizajn s baznim blokovima {{1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 16, 18, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 33, 35, 38, 40, 44, 45, 46, 49, 51, 52, 56, 57}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 26, 27, 28, 36, 41, 43, 44, 45, 46, 54, 56}, {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11,

14, 15, 18, 21, 22, 25, 26, 27, 32, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 51, 57}}. Stupanj dizajna je 9, a njegovi presječni brojevi su $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$. □

Propozicija 2.52. *Postoje barem tri dizajna s parametrima* 2-$(120, 24, 23)$*,* $b = 595$.

Dokaz. Neka je $G \cong PSL(2, 16)$ primitivna grupa reda 4 080 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1,40)(2,78)(3,118)(4,112)(5,94)(6,102)(7,88)(8,12)(9,85)(10,91)(11,84)\\ &(13,19)(14,114)(15,18)(17,108)(20,66)(21,47)(22,53)(23,106)(24,41)(25,46)\\ &(26,58)(27,105)(28,57)(29,115)(31,90)(32,52)(33,49)(34,76)(35,51)(36,43)\\ &(37,103)(39,44)(42,56)(45,71)(48,60)(50,59)(54,98)(55,72)(61,69)(62,111)\\ &(63,109)(65,83)(67,74)(68,104)(70,73)(75,96)(77,80)(79,95)(82,99)(86,93)\\ &(87,100)(92,113)(97,107)(101,110)(117,120),\\ \beta =&(1,116,18)(2,56,113)(3,70,58)(4,65,105)(5,42,43)(6,50,27)(7,16,69)(8,89,106)\\ &(9,28,55)(10,91,59)(11,98,63)(12,92,120)(13,44,76)(14,100,21)(15,104,94)\\ &(17,82,37)(19,74,62)(20,103,67)(22,112,31)(23,40,87)(24,78,34)(25,119,83)\\ &(26,96,46)(29,90,117)(30,107,72)(32,33,97)(35,114,52)(36,79,66)(38,111,81)\\ &(39,45,108)(41,75,84)(47,51,54)(48,71,80)(49,86,95)(53,109,64)(57,102,88)\\ &(60,101,73)(61,93,118)(68,85,77)(99,110,115).\end{aligned}$$

Grupa G inducira 7 orbita na 2-članim podskupovima i 6 683 kratkih orbita na 24-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 120\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 7×6683 ima 4 rješenja, od kojih dobivamo 3 neizomorfna dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 4, 13, 14, 21, 27, 28, 32, 41, 44, 49, 52, 55, 62, 65, 68, 77, 79, 86, 106, 111, 118}, {1, 2, 4, 10, 22, 23, 25, 31, 48, 50, 51, 54, 55, 63, 69, 70, 75, 83, 84, 93, 103, 105, 113, 120}, {1, 2, 4, 19, 34, 36, 42, 47, 55, 57, 73, 76, 80, 81, 82, 85, 96, 98, 100, 104, 108, 114, 117, 119}}. Stupanj tog dizajna je 4, a njegovi presječni brojevi su $0, 4, 6, 8$. □

Propozicija 2.53. *Postoje barem dva dizajna s parametrima* 2-$(120, 40, 195)$*,* $b = 1\,785$.

Dokaz. Neka je $G \cong PSL(3, 4)$ primitivna grupa reda 20 160 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1,58)(2,95)(3,34)(4,106)(5,36)(6,57)(7,13)(8,31)(9,56)(10,104)(11,39)\\ &(12,30)(14,117)(15,85)(16,53)(17,73)(18,45)(19,77)(20,81)(21,28)(22,86)\\ &(23,26)(24,114)(27,55)(29,100)(32,70)(33,91)(35,62)(37,46)(38,97)(40,79)\\ &(43,105)(44,110)(47,50)(48,92)(49,59)(51,94)(52,72)(54,76)(60,112)(61,88)\\ &(63,98)(64,82)(65,115)(66,109)(68,118)(69,83)(71,101)(74,116)(78,84)(80,90)\\ &(87,108)(93,99)(96,103)(102,111)(107,120),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta =&(1,75,86,117)(2,30,66,13)(3,38,94,104)(4,42,28,107)(5,20,92,15)(6,22,55,95)\\&(7,33,72,62)(8,64,119,108)(9,37,41,106)(10,18,118,112)(11,36,100,35)\\&(12,24,115,25)(14,45,111,68)(16,109,82,69)(17,110,27,39)(19,98,48,67)\\&(21,50,99,93)(23,102)(26,73,56,85)(29,49,84,53)(31,91,116,77)(32,54,59,120)\\&(40,60,63,97)(43,74)(44,51,101,89)(46,96,47,113)(52,61,90,103)(57,83,81,58)\\&(65,70,80,87)(71,105,78,114).\end{aligned}$$

Grupa G inducira tri orbite na 2-članim podskupovima i 2 302 kratkih orbita na 40-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 120\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 3×2302 ima 3 rješenja, od kojih dobivamo 2 neizomorfna dizajna. Skup baznih blokova jednog od konstruiranih dizajna je {{1, 2, 3, 6, 16, 18, 20, 30, 31, 33, 35, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 57, 58, 73, 75, 77, 81, 86, 89, 92, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 105, 106, 113}, {1, 2, 3, 4, 5, 8, 16, 18, 26, 29, 30, 32, 35, 38, 39, 40, 41, 46, 54, 56, 59, 61, 62, 65, 69, 74, 86, 90, 91, 102, 103, 105, 108, 111, 112, 113, 115, 116, 117, 118}, {1, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 18, 24, 26, 29, 32, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 52, 54, 56, 61, 62, 69, 78, 82, 86, 87, 90, 97, 100, 102, 105, 108, 111, 115, 116, 117, 118, 120}, {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16, 22, 23, 26, 27, 31, 34, 43, 48, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 63, 65, 74, 76, 80, 86, 90, 92, 94, 95, 96, 98, 103, 105, 106, 115, 116}}. Stupanj tog dizajna je 18, a njegovi presječni brojevi su $0, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 28, 32$. □

U potpoglavljima 2.5.1 i 2.5.2 ukupno smo konstruirali 57 dizajna s parametrima (v, k, λ) iz tablice 1.3. Za dodatnih 15 dizajna informacija o egzistenciji je dostupna u [69], a za još 6 znamo da postoje jer postoje i njima odgovarajući kvazisimetrični dizajni. Dakle, egzistencija dizajna s parametrima iz tablice 1.3 poznata je za ukupno 78 skupova parametara. Od toga je za njih 18 poznato da postoje, a za njih 23 poznato da ne postoje odgovarajući kvazisimetrični dizajni. Za njih 37 egzistencija kvazisimetričnih dizajna nije poznata.

S obzirom na broj konstruiranih dizajna, pretpostavljamo da većina dizajna s parametrima iz tablice 1.3 postoje, no njihova konstrukcija iziskivala bi puno vremena te prilagodbu programa za generiranje orbita i traženje rješenja Kramer-Mesnerovog sustava, osobito u slučaju velikih parametara. Vidimo da svi konstruirani dizajni, osim jednog, imaju stupnjeve veće od kvazisimetričnih, koji su stupnja 2. Iz tog možemo naslutiti da je uvjet kvazisimetričnosti jak te da je njihova konstrukcija težak problem.

Poglavlje 3

Konstrukcija kvazisimetričnih dizajna

Metode za konstrukciju dizajna koje koristimo u disertaciji temelje se na pretpostavci da na dizajn djeluje neka grupa automorfizama G. U ovom poglavlju opisane su metode za konstrukciju kvazisimetričnih 2-(v, k, λ) dizajna s presječnim brojevima x i y. Svaka metoda sastoji se od četiri osnovna koraka:

`KORAK 1:` Odabir grupe G.

`KORAK 2:` Generiranje orbita k-članih podskupova v-članog skupa.

`KORAK 3:` Konstrukcija dizajna iz orbita.

`KORAK 4:` Provjera izomorfnosti dobivenih dizajna.

U nastavku poglavlja opisane su metode koje koristimo, pri čemu su navedene neke ideje za odabir grupe automorfizama (potpoglavlje 3.1), opisani su algoritmi za generiranje orbita (potpoglavlje 3.2) te algoritmi za konstrukciju dizajna iz dobivenih orbita (potpoglavlje 3.3). Koristeći navedene metode konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$, 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$, 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ te 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$, pri čemu je egzistencija 2-$(56, 16, 18)$ dizajna ranije bila nepoznata. Osim toga, navedene metode primijenjene su u pokušaju da konstruiramo nove kvazisimetrične dizajne koji imaju iste parametre kao i projektivni dizajni (potpoglavlje 3.4).

3.1 Odabir grupe automorfizama

Postoji nekoliko ideja za odabir grupe automorfizama pri konstrukciji dizajna. Jedna od njih je odabrati grupu automorfizama za koju je poznato da djeluje već na nekom dizajnu. Na primjer, u poglavlju 2.5.2 konstruirali smo 2-$(45, 9, 8)$ dizajn s grupom $\mathbb{M}_{10}$. Tom istom grupom pokušali smo konstruirati i preostale dizajne s 45 točaka. Druga ideja je odabrati podgrupu (pune) grupe automorfizama nekog poznatog dizajna. Konstruiramo

li dizajne s istim parametrima pomoću odabrane podgrupe, među konstruiranim dizajnima će biti već poznati dizajn te mogu biti novi dizajni kojima podgrupa od koje smo krenuli može, ali i ne mora biti (puna) grupa automorfizama. Koristeći navedene ideje konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne o kojima ćemo nešto više reći u poglavlju 3.3. Treća ideja, u slučaju kvazisimetričnih dizajna, je odabrati grupu automorfizama koja djeluje na jako regularni graf, ukoliko on postoji, odgovarajućeg kvazisimetričnog dizajna. Tom grupom određeno nam je djelovanje grupe automorfizama na blokovima dizajna, ali ne i na točkama.

Za analizu grupe i sve operacije s grupama koristimo `GAP` [37]. Za računanje pune grupa automorfizama dizajna koristimo program `nauty` [72].

3.2 Generiranje orbita k-članih skupova

Neka je $\mathcal{V} = \{1, \ldots, v\}$ skup točaka i $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_b\}$ skup blokova kvazisimetričnog dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima 2-(v, k, λ) i presječnim brojevima x i y. Pretpostavimo da je dizajn $\mathcal{D}$ jednostavan, tj. da nema ponovljenih blokova. Neka je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$. Tada grupa G skup točaka $\mathcal{V}$ i skup blokova $\mathcal{B}$ particionira u disjunktne orbite

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{V}_m \ \text{ i} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{B}_n. \end{aligned}$$

Orbite $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ nazivaju se **točkovne orbite**, a $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ **blokovne orbite** dizajna $\mathcal{D}$. Duljine orbita označimo s

$$\begin{aligned} \nu_i &= |\mathcal{V}_i|, \ \ 1 \leq i \leq m, \\ \beta_j &= |\mathcal{B}_j|, \ \ 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vektore $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ i $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ nazivamo **točkovnim**, odnosno **blokovnim vektorima duljina orbita djelovanja grupe** G. Očito vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i = v \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_i = b. \tag{3.2}$$

Blokovne orbite dizajna sastoje se od k-članih podskupova skupa točaka $\mathcal{V}$. U drugom koraku metoda za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna generiramo orbite k-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ pod djelovanjem grupe G. Iz (3.2) slijedi da za konstrukciju dizajna iz dobivenih orbita u obzir možemo uzeti samo orbite veličine najviše b. U slučaju kada je red grupe G veći od b, takve orbite nazivamo **kratkim orbitama**. Isto tako, s obzirom da se svi blokovi kvazisimetričnog dizajna trebaju sijeći u x ili u y točaka, u obzir uzimamo samo dobre orbite.

Definicija 3.1. *Orbita $\mathcal{K}$ koju čine k-člani podskupovi skupa $\mathcal{V}$ inducirana grupom G je* ***dobra*** *ako je*

$$|K_1 \cap K_2| = x \quad ili \quad y,$$

za bilo koja dva podskupa $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$.

Za generiranje orbita koristimo nekoliko metoda i algoritama, ovisno o redu odabrane grupe G te parametrima kvazisimetričnih dizajna. U slučaju kada je red grupe G veći od b, koristimo algoritam za generiranje kratkih orbita (potpoglavlje 3.2.1). U slučaju kada je red grupe G manji ili jednak b, koristimo algoritme za generiranje svih orbita (potpoglavlje 3.2.2) ili orbite generiramo pomoću orbitnih matrica (potpoglavlje 3.2.3). U svakom od navedenih algoritama prilikom generiranja orbita dovoljno je pamtiti samo predstavnika svake konstruirane orbite. Za sve generirane orbite trebamo provjeriti jesu li dobre. Za to koristimo program `qsymstrip` napisan pomoću `GAP` naredbi, a temelji se na sljedećem algoritmu 1:

ALGORITAM 1: Dobre orbite

ulaz: grupa G, predstavnici orbita $\{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\}$, parametri x, y, k
za svaki *predstavnik* $K \in \{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\}$ **napravi**
  ako je $|K \cap g(K)| \in \{x, y, k\}$ *za sve* $g \in G$ **onda**
    ispiši K
  kraj
kraj
izlaz: predstavnici dobrih orbita iz skupa $\{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\}$

Odbacivši sve orbite koje nisu dobre možemo smanjiti ukupan broj orbita, što nam je bitno za daljnju konstrukciju dizajna, a pritom ne propustiti niti jedan od kvazisimetričnih dizajna na kojima djeluje odabrana grupa.

3.2.1 Generiranje kratkih orbita

Neka je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima 2-(v, k, λ) i presječnim brojevima x i y takva da je $|G| > b$, pri čemu je b broj blokova dizajna $\mathcal{D}$. Neka je $\mathcal{K}$ orbita k-članih podskupova v-članog skupa točaka inducirana djelovanjem grupe G. S obzirom da je $|G| > b$, iz teorema 2.5 slijedi da veličina orbite $\mathcal{K}$ može biti veća od b, no tada ona ne može činiti blokovnu orbitu dizajna $\mathcal{D}$. Stoga pretpostavimo dodatno da je $|\mathcal{K}| \leq b$. Tada iz teorema 2.5 slijedi da orbita $\mathcal{K}$ ima netrivijalni stabilizator $H \leq G$ indeksa $[G : H] \leq b$. Dakle, generiranje svih orbita k-članih poskupova v-članog skupa točaka možemo ograničiti na generiranje samo orbita kojima je stabilizator indeksa manjeg ili jednakog b. Ako podgrupa H stabilizira skup $\mathcal{K}$, onda se on sastoji od orbita grupe H. Algoritam za generiranje kratkih orbita prikazan je u 2:

ALGORITAM 2: Generiranje kratkih orbita

ulaz: grupa G, parametri v, k, b

za svaku *podgrupu* $H \leq G$ *indeksa* $[G : H] \leq b$ *do na konjugaciju* **napravi**

1: generiraj orbite v-članog skupa pod djelovanjem grupe H,

2: sastavi sve moguće k-člane skupove od orbita iz koraka 1,

3: uzmi predstavnike k-članih podskupova pod djelovanjem grupe G.

kraj

izlaz: predstavnici kratkih orbita k-članih podskupova v-članog skupa

S obzirom da su nam potrebni samo predstavnici orbita k-članih podskupova pod djelovanjem grupe G, u algoritmu 2 petlju provodimo samo na nekonjugiranim podgrupama $H \leq G$. Iz sljedeće leme slijedi da konjugirane podgrupe fiksiraju podskupove iz iste orbite.

Propozicija 3.2. *Ako su* $H_1, H_2 \leq G$ *konjugirane, tj.* $H_2 = g^{-1}H_1g$ *za neki* $g \in G$*, onda* H_1 *fiksira* K *ako i samo ako* H_2 *fiksira* $g(K)$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da H_1 fiksira K. To znači da za svaki $h \in H_1$ vrijedi $h(K) = K$. Trebamo dokazati da tada H_2 fiksira $g(K)$. Neka je $h' \in H_2$. Iz definicije slijedi da je $h' = g^{-1}h\,g$, za neki $h \in H_1$. Tada je:

$$h'(g(K)) = (g^{-1}h\,g)g(K) = g(h(g^{-1}(g(K)))) = g(h(K)) = g(K),$$

što je i trebalo dokazati. Analogno bismo dokazali drugi smjer. □

Za generiranje kratkih orbita koristimo program `replesize` koji se sastoji od sljedećih `GAP` naredbi: `ConjugacyClassesSubgroups` za traženje podgrupa $H \leq G$ do na konjugaciju, `Orbits` za generiranje orbita u koraku 1 te `OrbitRepresentatives` za traženje predstavnika orbita u koraku 3. Za izvođenje koraka 2 koristimo niz `GAP` naredbi kojima sastavljamo kombinacije dobivenih orbita iz koraka 1. Algoritam za kratke orbite koristili smo u poglavlju 2.5 za konstrukciju dizajna s parametrima kvazisimetričnih dizajna.

Dobivene orbite k-članih podskupova v-članog skupa algoritmom 2 su kratke orbite, no treba dodatno provjeriti jesu li one dobre. Za odbacivanje orbita koje nisu dobre koristimo algoritam 1, odnosno program `qsymstrip`.

Osim programa `replesize` koristimo i program `replesize2` koji ujedinjuje naredbe `replesize` i `qsymstrip`, a osim toga korak 2 napisan je u programskom jeziku `C` kako bi bio efikasniji i brži.

Koristeći algoritam za generiranje kratkih orbita uspjeli smo konstruirati tri neizomorfna kvazisimetrična dizajna s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ o kojima ćemo nešto više reći u poglavlju 3.3.1.

3.2.2 Generiranje svih orbita

Neka je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima 2-(v, k, λ) i presječnim brojevima x i y takva da je $|G| \leq b$, pri čemu je b broj blokova dizajna $\mathcal{D}$. Iz teorema 2.5 slijedi da veličine orbita grupe G nisu veće od b. Iz tog razloga, ne možemo se ograničiti na kratke orbite, nego za konstrukciju dizajna trebamo generirati sve orbite k-članih podskupova v-članog skupa pod djelovanjem grupe G.

Jedan od načina za određivanje svih orbita k-članih podskupova pod djelovanjem grupe G je korištenje naredbi koje su dostupne u `GAP`-u. Naredbe smo ujedinili u program `makerep`. Za sve generirane orbite trebamo dodatno provjeriti jesu li dobre pomoću programa `qsymstrip`. Algoritam za generiranje svih orbita prikazan je u 3:

ALGORITAM 3: Generiranje svih orbita - pretraga stabla po širini

ulaz: grupa G, parametri v, k
$\mathcal{O}_1 \leftarrow$ predstavnici orbita 1-članih podskupova pod djelovanjem grupe G
za $i = 2$ **do** k **napravi**
  $S \leftarrow \emptyset$
  za svaki $o \in \mathcal{O}_{i-1}$ **napravi**
    za svaki $j \in \{1, \ldots, v\} \setminus o$ **napravi**
      $o' \leftarrow o \cup \{j\}$
      $S \leftarrow S \cup \{o'\}$
    kraj
  kraj
  $\mathcal{O}_i \leftarrow$ predstavnici orbita i-članih podskupova iz S pod djelovanjem grupe G
kraj
izlaz: predstavnici orbita k-članih podskupova skupa $\{1, \ldots, v\}$

Generiranje orbita primjenom algoritma 3 je u slučaju velikih parametara vrlo sporo jer se temelji samo na naredbama iz `GAP`-a. Osim toga, s obzirom da su za generiranje orbita na i-tom nivou potrebni svi predstavnici orbita iz $(i-1)$-nivoa, ovaj algoritam troši puno memorije te je ovaj način generiranja orbita neefikasan. Efikasniji način generiranja svih orbita temelji se na algoritmu tipa Read-Faradževa [33, 71, 81]. To je općeniti algoritam za generiranje neizomorfnih kombinatornih objekata, a u nastavku opisujemo verziju za generiranje orbita k-članih podskupova v-članog skupa.

Neka je G permutacijska grupa koja djeluje na skupu $\mathcal{V} = \{1, \ldots, v\}$. Neka su U i W k-člani podskupovi od $\mathcal{V}$. Pretpostavimo da je $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$, za neke $u_1 < \ldots < u_k$, i $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$, za neke $w_1 < \ldots < w_k$. Tada je $U < W$ ako postoji indeks i takav da je $u_i < w_i$ i $u_j = w_j$, za sve $j < i$. Time smo na skupu $\mathcal{V}$ definirali potpuni uređaj. Ovako definiran uređaj omogućuje uspoređivanje k-članih podskupova orbite $U^G = \{g(U) \,|\, g \in G\}$. S $m(U)$ označimo njezin najmanji element. Naš algoritam za

generiranje svih orbita temelji se na generiranju minimalnih predstavnika, tj. predstavnika takvih da je $m(U) = U$, a prikazan je u 4:

ALGORITAM 4: Generiranje svih orbita - pretraga stabla po dubini

```
procedura DOBRE_ORBITE (U : podskup od {1,...,v})
    ako je |U| = k onda
        ako je |U ∩ g(U)| ∈ {x, y, k} za sve g ∈ G onda
            ispiši U
        kraj
    inače
        za e = max U + 1, ..., v napravi
            ako je m(U ∪ {e}) = U ∪ {e} onda
                DOBRE_ORBITE (U ∪ {e})
            kraj
        kraj
    kraj
kraj procedure
/*                          glavni program                          */
ulaz: grupa G, parametri v, k, x, y
pozovi proceduru DOBRE_ORBITE (∅)
izlaz: minimalni predstavnici orbita k-članih podskupova v-članog skupa
```

Osim toga, ovaj algoritam nam daje samo dobre orbite. Sljedeća lema dokazuje da je algoritam 4 korektan:

Lema 3.3. *Neka je U minimalni element, tj. $m(U) = U$, te neka je $U' = U \setminus \max U$. Tada je U' također minimalni element, tj. $m(U') = U'$.*

Dokaz. Iz činjenice da je U minimalni element slijedi da je $U \leq g(U)$, za svaki $g \in G$. Trebamo pokazati da je $U' \leq g(U')$, za svaki $g \in G$. Pretpostavimo da postoji $g \in G$ takav da je $g(U') < U'$. Neka je $U' = \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ i $g(U') = \{u'_1, \ldots, u'_{k-1}\}$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ takav da je $u'_i < u_i$ i $u'_j = u_j$, za svaki $j < i$. Neka je $e = \max U$. Ako je $g(e) \leq u'_i$, onda je

$$g(U) = \{u'_1, \ldots, g(e), \ldots, u'_i, \ldots, u'_{k-1}\} < \{u_1, \ldots, u_i, \ldots u_{k-1}, e\} = U.$$

Ako je $g(e) > u'_i$, onda je

$$g(U) = \{u'_1, \ldots, u'_i, \ldots, g(e), \ldots u'_{k-1}\} < \{u_1, \ldots, u_i, \ldots u_{k-1}, e\} = U.$$

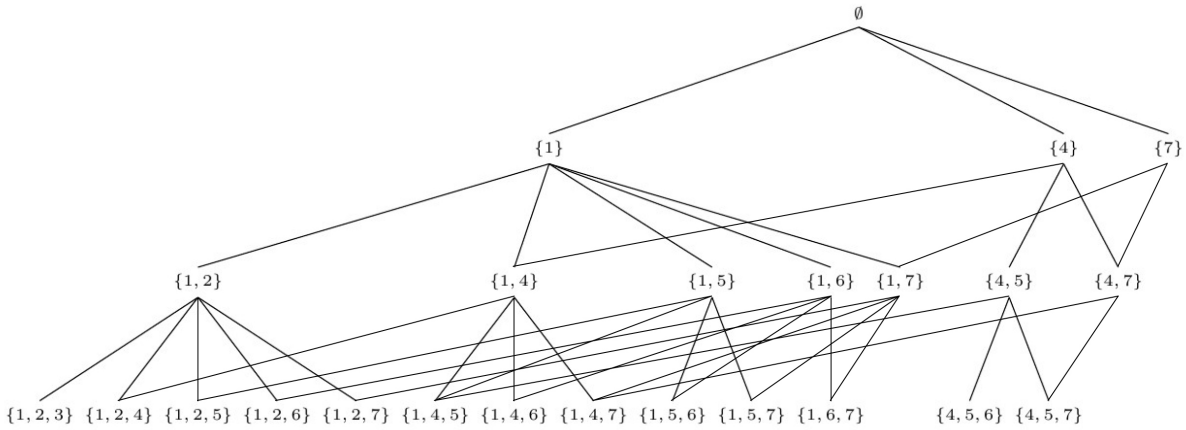
U oba slučaja dolazimo do zaključka da je $g(U) < U$, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom da je U minimalni element. □

Indukcijom se lako pokaže da algoritam 4 neće izostaviti niti jednog minimalnog predstavnika. Pretpostavimo da su generirani svi minimalni predstavnici na i-tom nivou stabla. Prema algoritmu 4 svakog od njih proširimo elementima koji su veći od njihovog najvećeg elementa. Tada se među njima nalaze sigurno i minimalni predstavnici na $(i+1)$-nivou. U suprotnom, prema lemi 3.3 ne bismo dobili sve minimalne predstavnike na i-tom nivou, što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije.

Na algoritmu 4 temelji se program `forbrep` napisan u programskom jeziku `C` kojeg koristimo za generiranje svih orbita k-članih podskupova v-članog skupa.

Sljedeći primjer prikazuje razliku između generiranja orbita pomoću algoritama 3 i 4:

Primjer 3.4. *Neka je* $G = \langle (1,2,3)(4,5,6)(7) \rangle$ *grupa reda* 3. *Generirajmo orbite* 3*-članih podskupova* 7*-članog skupa točaka. Slika 3.1 prikazuje minimalne predstavnike orbita podskupa veličine najviše* 3*, organizirane u stablo po relaciji inkluzije* $\subseteq$.

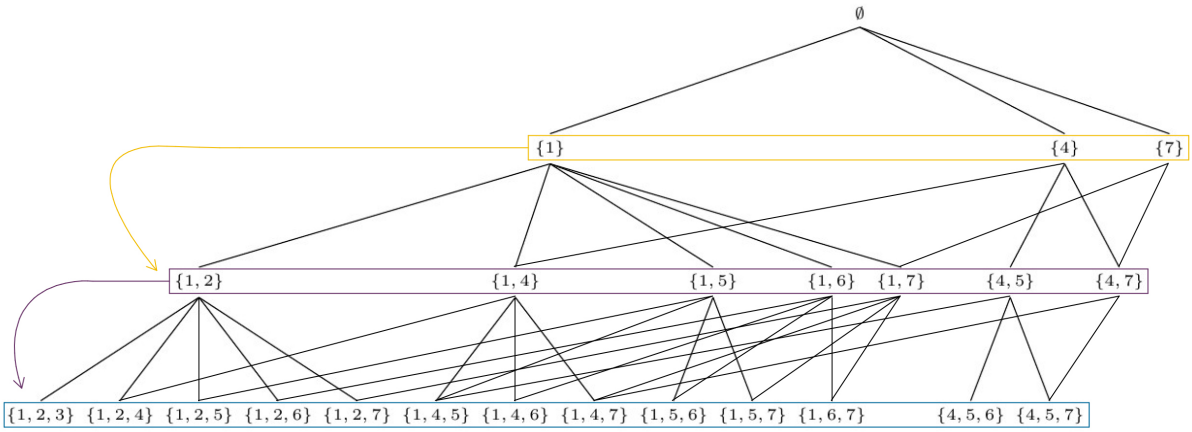


Slika 3.1: Minimalni predstavnici orbita i-članih podskupova 7-članog skupa za $i = 0, 1, 2, 3$

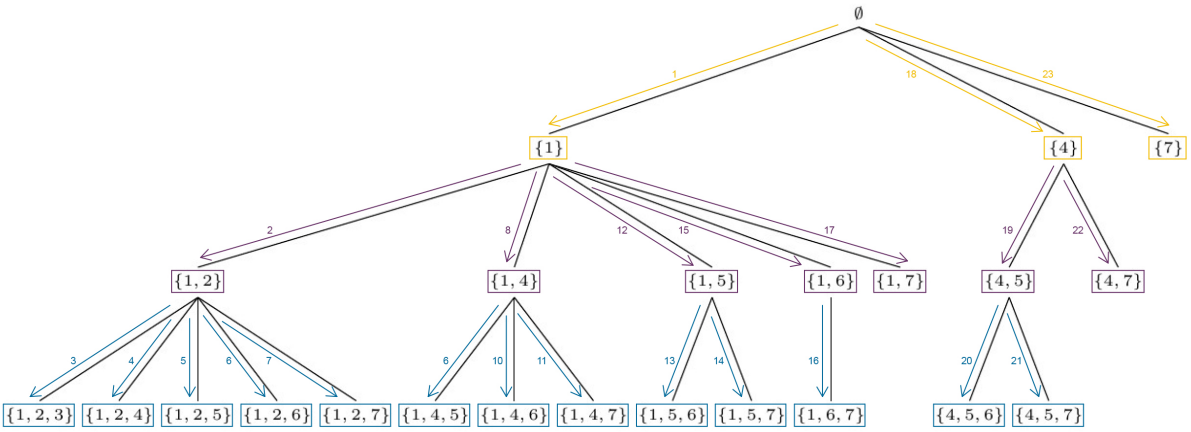
Algoritam 3 generira orbite po nivoima ("breadth-first search"), tj. za generiranje svih predstavnika na i*-tom nivou program treba pamtiti sve predstavnike s* $(i-1)$*-nivoa stabla (slika 3.2). U našem slučaju, za generiranje predstavnika svih orbita* 2*-članih podskupova, program treba pamtiti sva tri predstavnika orbita* 1*-članih podskupova* 7*-članog skupa (**žuta boja**), dok za generiranje predstavnika svih orbita* 3*-članih podskupova (**plava boja**) program treba pamtiti svih sedam predstavnika orbita* 2*-članih podskupova (**ljubičasta boja**).*

Algoritam 4 generira orbite po dubini, s lijeva na desno ("depth-first search"), tj. za generiranje svih predstavnika na k*-tom nivou program treba u svakom trenutku pamtiti samo po jednog predstavnika s prethodnih nivoa stabla (slika 3.3). U našem slučaju, za generiranje predstavnika svih orbita* 3*-članih podskupova* 7*-članog skupa (**plava boja**) program treba pamtiti uvijek samo jednog predstavnika orbita* 1*-članih podskupova (**žuta***

***boja**) i jednog predstavnika orbita 2-članih podskupova (**ljubičasta boja**). Redoslijed kojim algoritam generira minimalne predstavnike orbita dan je brojevima* $1 - 23$.



Slika 3.2: Algoritam 3 na primjeru generiranja orbita 3-članih podskupova 7-članog skupa



Slika 3.3: Algoritam 4 na primjeru generiranja orbita 3-članih podskupova 7-članog skupa

Koristeći algoritam 4 za generiranje svih orbita konstruirati smo još jedan kvazisimetrični dizajn s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ o kojem ćemo nešto više reći u poglavlju 3.3.2.

3.2.3 Generiranje orbita pomoću orbitnih matrica

Broj orbita k-članih podskupova v-članog skupa koje dobijemo algoritmom 4 ponekad je prevelik te tada od dobivenih orbita ne možemo konstruirati dizajne. Korištenjem orbitnih matrica možemo smanjiti broj orbita koje treba razmatrati. Orbitne matrice za konstrukciju dizajna sa zadanom grupom automorfizama koristili su mnogi, primjerice u [48] za konstrukciju simetričnih dizajna, u [61] za konstrukciju Steinerovih dizajna, dok su u [30] korištene za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna.

Neka je G grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima 2-(v, k, λ). Neka su $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ točkovne orbite, a $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ blokovne orbite dizajna $\mathcal{D}$. Blokovne i točkovne orbite čine **taktičku dekompoziciju**, tj. vrijedi sljedeće:

(i) broj blokova iz $\mathcal{B}_j$ koji sadrže neku točku $T \in \mathcal{V}_i$ ne ovisi o izboru točke T,

(ii) broj točaka iz $\mathcal{V}_i$ koje su na nekom bloku $B \in \mathcal{B}_j$ ne ovisi o izboru bloka B.

Stoga možemo definirati brojeve:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= |\{B \in \mathcal{B}_j \mid T \in B\}|, \text{ za bilo koju točku } T \in \mathcal{V}_i, \\ b_{ij} &= |\{T \in \mathcal{V}_i \mid T \in B\}|, \text{ za bilo koji blok } B \in \mathcal{B}_j, \end{aligned} \tag{3.3}$$

te matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{N}_0)$ takve da je $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$.

Lema 3.5. *Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima (v, b, r, k, λ) te neka su brojevi $\nu_i, \beta_j, a_{ij}, b_{ij}$ definirani kao u* (3.1) *i* (3.3)*. Tada je*

$$\nu_i a_{ij} = \beta_j b_{ij}, \tag{3.4}$$

za sve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Dokaz. Dvostrukim prebrojavanjem parova u skupu $\{(T, B) \mid T \in B, T \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{B}_j\}$ dolazimo do jednadžbe (3.4). □

Propozicija 3.6. *Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima (v, b, r, k, λ) te neka su brojevi ν_i, β_j, a_{ij} definirani kao u* (3.1) *i* (3.3)*. Matrica $A = [a_{ij}]$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $0 \leq a_{ij} \leq \beta_j$, *za sve* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r$, *za svaki* $1 \leq i \leq m$,

(iii) $\sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i}{\beta_j} a_{ij} = k$, *za svaki* $1 \leq j \leq n$,

(iv) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{\beta_j} a_{ij} a_{i'j} = \begin{cases} \lambda\nu_i, & \text{ako je } i \neq i' \\ \lambda(\nu_i - 1) + r, & \text{ako je } i = i' \end{cases}$, *za sve* $1 \leq i, i' \leq m$.

Propozicija 3.7. *Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima (v, b, r, k, λ) te neka su brojevi ν_i, β_j, b_{ij} definirani kao u* (3.1) *i* (3.3). *Matrica $B = [b_{ij}]$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $0 \leq b_{ij} \leq \nu_i, \quad$ *za sve* $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

(ii) $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = k, \quad$ *za svaki* $1 \leq j \leq n$,

(iii) $\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\nu_i} b_{ij} = r, \quad$ *za svaki* $1 \leq i \leq m$,

(iv) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_j}{\nu_i'} b_{ij} b_{i'j} = \begin{cases} \lambda\nu_i, & \text{ako je } i \neq i' \\ \lambda(\nu_i - 1) + r, & \text{ako je } i = i' \end{cases}, \quad \text{za sve } 1 \leq i, i' \leq m.$$

Dokazi propozicija 3.6 i 3.7 mogu se naći u [62].

Svaka matrica $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{N}_0)$ koja ima svojstva iz propozicije 3.6 naziva se **točkovna orbitna matrica**, a svaka matrica $B = [b_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{N}_0)$ koja ima svojstva iz propozicije 3.7 naziva se **blokovna orbitna matrica**. U disertaciji za generiranje orbita koristimo samo blokovne orbitne matrice te ćemo u daljnjem radu pod pojmom **orbitna matrica** podrazumijevati da se radi o njima.

U slučaju kada je dizajn $\mathcal{D}$ kvazisimetričan s presječnim brojevima x i y, orbitna matrica ima dodatna svojstva.

Propozicija 3.8. *Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični dizajn s parametrima (v, b, r, k, λ) i presječnim brojevima x i y te neka su brojevi ν_i, β_j, b_{ij} definirani kao u* (3.1) *i* (3.3). *Tada matrica $B = [b_{ij}]$ ima svojstvo:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i}{\beta_j} b_{ij} b_{ij'} = \begin{cases} \xi x + (\beta_j - \xi) y, & \text{ako je } j \neq j',\ 0 \leq \xi \leq \beta_j, \\ \xi x + (\beta_j - \xi - 1) y + k, & \text{ako je } j = j',\ 0 \leq \xi \leq \beta_j, \end{cases} \tag{3.5}$$

za sve $1 \leq j, j' \leq n$.

Dokaz. Neka je $B' \in \mathcal{B}_{j'}$ neki čvrsti blok. Tada je:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i}{\beta_j} b_{ij} b_{ij'} &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ij'} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot |\{T \in \mathcal{V}_i \mid T \in B'\}| \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{T \in B' \cap \mathcal{V}_i} 1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{T \in B' \cap \mathcal{V}_i} a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{T \in B' \cap \mathcal{V}_i} |\{B \in \mathcal{B}_j \mid T \in B\}| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |\{(T, B) \mid T \in B' \cap \mathcal{V}_i,\ B \in \mathcal{B}_j,\ T \in B\}| \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} |\{T \in B' \cap \mathcal{V}_i \mid T \in B\}|$$
$$= \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \sum_{i=1}^{m} |\{T \in B' \cap \mathcal{V}_i \mid T \in B\}|$$
$$= \sum_{B \in \mathcal{B}_j} |\{T \in B' \mid T \in B\}| = \sum_{B \in \mathcal{B}_j} |B' \cap B|.$$

S ξ označimo broj blokova $B \in \mathcal{B}_j$ koji blok B' sijeku u x točaka. Ako je $j \neq j'$, onda su blokovi B i B' iz različitih orbita te se sijeku u x ili u y točaka, pri čemu je broj blokova koji se sijeku u y točaka jednak $\beta_j - \xi$. Ako je $j = j'$, onda su blokovi B i B' dio iste orbite te se sijeku u x ili u y točaka ako su različiti, ili u k točaka ako se podudaraju, pri čemu je broj blokova koji se sijeku u y točaka jednak $\beta_j - \xi - 1$. Iz toga slijedi jednadžba (3.5). □

Orbitnu matricu B koja zadovoljava jednadžbe (3.5) nazivamo **dobrom orbitnom matricom**.

Za konstrukciju orbitnih matrica koristimo program `tdmat` koji se temelji na algoritmu opisanom u [62]. Algoritam je također tipa Read-Faradževa. Ako broj stupaca n nije prevelik, možemo klasificirati sve orbitne matrice do na izomorfizam. Dvije orbitne matrice $C = [c_{ij}]$ i $D = [d_{ij}]$ su izomorfne ako postoji par permutacija $(\pi, \sigma) \in S_m \times S_n$ takve da je $\nu_i = \nu_{\pi(i)}$, $\beta_j = \beta_{\sigma(j)}$ i $d_{ij} = c_{\pi(i)\sigma(j)}$, za sve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Za sve dobivene orbitne matrice trebamo provjeriti jesu li dobre, a to radimo primjenom programa `coltest` koji se temelji na `GAP` implementaciji provjere jednadžbi (3.5).

Ako tražimo dizajne koji dolaze od orbitne matrice $B = [b_{ij}]$, onda je potrebno razmotriti samo orbite usklađene s njezinim stupcima. U orbitnoj matrici j-ti stupac određuje na koji su način točke na nekom bloku iz orbite $\mathcal{B}_j$ raspoređene u odnosu na točkovne orbite $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$. Za svaki blok $B \in \mathcal{B}_j$ treba vrijediti da je $|B \cap \mathcal{V}_i| = b_{ij}$, za svaki $1 \leq i \leq m$. S obzirom na tu činjenicu, algoritam za generiranje svih orbita 4 možemo prilagoditi da generira samo orbite usklađene s j-tim stupcem matrice B. Za generiranje orbita pomoću orbitnih matrica koristimo program `tdmat2rep` koji se temelji na algoritmu 5.

Koristeći algoritam 5 možemo smanjiti broj dobrih orbita te tako omogućiti daljnju konstrukciju dizajna. Za konstrukciju dizajna iz tako generiranih orbita koristimo *backtracking* program koji je napisan u programskom jeziku `C`, a njegov algoritam je opisan u poglavlju 3.3.3.

Koristeći orbitne matrice konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ o kojima ćemo nešto više reći u poglavlju 3.3.3.

ALGORITAM 5: Generiranje orbita usklađenih sa stupcem orbitne matrice

```
procedura DOBRE_ORBITE (U : podskup od {1,...,v})
    ako je |U| = k onda
        ako je |U ∩ g(U)| ∈ {x, y, k} za sve g ∈ G onda
            ispiši U
        kraj
    inače
        za e = max U + 1, ..., v napravi
            ako je |(U ∪ {e}) ∩ V_i| ≤ b_ij za sve i = 1, ..., m onda
                ako je m(U ∪ {e}) = U ∪ {e} onda
                    DOBRE_ORBITE (U ∪ {e})
                kraj
            kraj
        kraj
    kraj
kraj procedure

/*                          glavni program                          */
```

ulaz: grupa G, orbitna matrica B, indeks stupca j, parametri v, k, x, y
pozovi proceduru `DOBRE_ORBITE` ($\emptyset$)
izlaz: minimalni predstavnici orbita k-članih podskupova v-članog skupa usklađeni s j-tim stupcem matrice B

3.3 Metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna

Za konstrukciju dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima 2-(v, k, λ) i presječnim brojevima x i y potrebno je odabrati odgovarajuće generirane orbite. S računalne strane, taj korak je najzahtjevniji jer se u svim metodama koje ćemo opisati svodi na neki NP–potpun problem. Da bismo mogli konstruirati dizajn, broj generiranih orbita k-članih podskupova v-članog skupa ne smije biti prevelik. Jedan od načina smanjenja broja orbita u slučaju konstrukcije kvazisimetričnih dizajna je odbaciti orbite koje nisu dobre. Time nismo odbacili niti jedan kvazisimetrični dizajn. No bez obzira na to, među konstruiranim dizajnima mogu biti oni koji nisu kvazisimetrični. Da bi dizajn bio kvazisimetričan, sve izabrane orbite moraju biti međusobno kompatibilne.

Definicija 3.9. *Orbite $\mathcal{K}_i$ i $\mathcal{K}_j$, pri čemu su $i \neq j$, su **kompatibilne** ako je*

$$|K_1 \cap K_2| = x \quad ili \quad y,$$

za bilo koje podskupove $K_1 \in \mathcal{K}_i$ i $K_2 \in \mathcal{K}_j$.

S obzirom na ukupan broj orbita k-članih podskupova odabiremo jednu od metoda za konstrukciju, a to su Kramer-Mesnerova metoda (potpoglavlje 3.3.1), metoda temeljena

na traženju klika (potpoglavlje 3.3.2) te metoda temeljena na orbitnim matricama (potpoglavlje 3.3.3). Svakom od navedenih metoda možemo dobiti izomorfne dizajne te je na kraju konstrukcije potrebno provjeriti izomorfnost. Za tesiranje izomorfnosti među konstruiranim dizajnima koristimo program `incfilter` koji se temelji na algoritmu opisanom u [62], a koristi `nauty` [72].

3.3.1 Kramer-Mesnerova metoda

Kramer-Mesnerovu metodu za konstrukciju dizajna sa zadanom grupom automorfizama opisali smo u poglavlju 2.4. Metoda je često korištena za klasifikaciju t-dizajna, osobito jednostavnih s malim parametrima. U poglavlju 2.5 koristili smo je za konstrukciju 2-dizajna s parametrima kvazisimetričnih dizajna. S računalne strane, metoda se sastoji od dva problema:

1. generiranje Kramer-Mesnerove matrice A,
2. rješavanje Kramer-Mesnerovog sustava $A \cdot X = \lambda J_m$.

Kompleksnost svakog od problema ovisi o veličini parametara 2-(v, k, λ) dizajna te veličini grupe automorfizama G. Ukoliko su orbite 2-članih i k-članih podskupova generirane, prvi problem je jednostavan te za generiranje Kramer-Mesnerove matrice koristimo program `KMmat` napisan pomoću `GAP` naredbi. Drugi problem ovisi o broju generiranih orbita, a svodi se na traženje $\{0, 1\}$- rješenja sustava linearnih jednadžbi, što je NP–potpun problem. Kako bi taj postupak traženja rješenja bio izvediv, broj orbita $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ mora biti dovoljno mali. Ukupan broj svih mogućnosti za rješenje sustava je 2^n, iz čega vidimo da taj broj raste eksponencijalno u ovisnosti o n. Jedan od načina kako možemo poboljšati Kramer-Mesnerovu metodu za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna je da odbacimo sve orbite koje nisu dobre te tako smanjimo dimenziju sustava jednadžbi. Drugi način je da traženje rješenja Kramer-Mesnerovog sustava uskladimo s matricom kompatibilnosti

Definicija 3.10. ***Matrica kompatibilnosti*** *orbita* $\{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\}$ *je* $n \times n$ *matrica* $C = [c_{ij}]$ *takva da je*

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako su orbite } \mathcal{K}_i \textit{ i } \mathcal{K}_j \textit{ kompatibilne,} \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Algoritam za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna zasniva se na reduciranju rješenja Kramer-Mesnerova sustava pomoću matrice kompatibilnosti. Taj način prilagodbe za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna je vrlo učinkovit jer jednom kada je odabrana neka orbita $\mathcal{K}_i$, traženje rješenja je ograničeno na traženje kompatibilnih orbita $\mathcal{K}_j$ takvih da je $c_{ij} = 1$. Ovisno o matrici kompatibilnosti, na taj način možemo riješiti sustave s tisućama,

a ponekad i desetcima tisuća varijabli. Za traženje rješenja Kramer-Mesnerova sustava koristimo *backtracking* program [63] koji smo uskladili s matricom kompatibilnosti. Program `mysolvemat` napisan je u programskog jeziku `C`, a temelji se na sljedećem algoritmu:

ALGORITAM 6: Rješavanje Kramer-Mesnerova sustava

globalna varijabla: vektor X duljine n
procedura *TRAŽI* (i : *prirodan broj*)
  ako je $i = n + 1$ **onda**
    ako je $A \cdot X = \lambda J_m$ **onda**
      ispiši X
    kraj
  inače
    $X_i \leftarrow 0$
    `TRAŽI` $(i + 1)$
    $X_i \leftarrow 1$
    ako je $A \cdot X \leq \lambda J_m$ *i* $c_{ij} = 1$ *za sve* $j < i$ *td.* $X_j = 1$ **onda**
      `TRAŽI` $(i + 1)$
    kraj
  kraj
kraj procedure

`/*` `glavni program` `*/`

ulaz: Kramer-Mesnerova matrica A dimenzije $m \times n$, matrica kompatibilnosti C dimenzije $n \times n$, parametar λ
pozovi proceduru `TRAŽI` (1)
izlaz: rješenje sustava $A \cdot X = \lambda J_m$ takva da je $c_{ij} = 1$ za sve indekse $j < i$ za koje je $X_i = X_j = 1$

Različita rješenja Kramer-Mesnerova sustava mogu dati izomorfne dizajne te je na kraju potrebno ispitati njihovu izomorfnost i odrediti broj neizomorfnih dizajna dobivenih grupom automorfizama G, koristeći program `incfilter`.

Koristeći Kramer-Mesnerovu metodu koju smo prilagodili za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna, konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$, zatim 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$ te 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$, a rezultati su objavljeni u članku [64].

Za konstrukciju kvazisimetričnih 2-dizajna opisanom Kramer-Mesnerovom metodom potrebna nam je permutacijska grupa koja djeluje na skupu točaka dizajna $\mathcal{V} = \{1, \ldots, v\}$. S obzirom da grupa automorfizama dizajna djeluje i na blokovima, Kramer-Mesnerovu metodu možemo prilagoditi na način da promatramo dualnu strukturu kvazisimetričnih dizajna. Tu metodu iz tog razloga nazivamo još **dualnom Kramer-Mesnerovom metodom**, a temelji se na sljedećem:

Neka je G permutacijska grupa koja djeluje na skupu $B = \{1, \ldots, b\}$. Umjesto da promatramo podskupove točaka koji čine blokove, sada promatramo podskupove blokova koji sadrže neku točku dizajna, pri čemu znamo da svaka točka mora biti sadržana u točno r blokova. Neka su $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ orbite 2-članih podskupova skupa B, a $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ orbite r-članih podskupova skupa B pod djelovanjem grupe G. S obzirom da svake dvije točke moraju biti sadržane u točno λ blokova, orbita $\mathcal{R}$ koju čine r-člani podskupovi skupa B je dobra ako je $|R_1 \cap R_2| = \lambda$, za bilo koje $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$. Isto tako, dvije orbite $\mathcal{R}_i$ i $\mathcal{R}_j$ su kompatibilne ako je $|R_1 \cap R_2| = \lambda$, za bilo koje $R_1 \in \mathcal{R}_i$, $R_2 \in \mathcal{R}_j$. Kramer-Mesnerovu matricu i matricu kompatibilnosti orbita $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ definiramo analogno, dok Kramer-Mesnerov sustav definiramo drugačije. S obzirom da orbite 2-članih podskupova odgovaraju presječnim brojevima dizajna i na taj način trebaju biti prekriveni orbitama r-članih podskupova x ili y puta, konstrukcija kvazisimetričnih dizajna svodi se na traženje rješenja nejednadžbe

$$A \cdot X \leq yJ_m,$$

gdje je J_m vektor duljine m koji se sastoji samo od jedinica, a rješenje $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^t$ je vektor duljine n. Za svako dobiveno rješenje X potrebno je provjeriti je li umnožak $A \cdot X$ jednak vektoru koji sadrži samo brojeve x i y. Rješenja sustava X koja zadovoljavaju to svojstvo, odgovaraju dualima traženih kvazisimetričnih dizajna.

Dualna Kramer-Mesnerova metoda priklada je u slučaju kada je poznato da postoji jako regularni graf, ali egzistencija pridruženog kvazisimetričnog dizajna nije poznata.

Koristeći dualnu Kramer-Mesnerovu metodu konstruirali smo kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$.

Dizajni $(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$ i $(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$

Prvi kvazisimetrični dizajni s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$ i 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$ konstruirani su kao derivirani, odnosno rezidualni dizajni simetričnog $(64, 28, 12)$ dizajna [50, 53]. Ti dizajni imaju SDP svojstvo (*"symmetric difference property"*), tj. simetrična razlika bilo koja dva bloka je opet blok ili komplement bloka dizajna. U [50] je dokazano da postoji četiri kvazisimetrična dizajna do na izomorfizam s tim svojstvom. Njihove pune grupe automorfizama su reda 1 451 520, 10 752, 1 920 i 672 [77]. Ulaganjem tih dizajna u simetrični $(64, 28, 12)$ dizajn, konstruiran je niz novih kvazisimetričnih dizajna s tim parametrima [66]. Potom je u [30] napravljena klasifikacija kvazisimetričnih 2-$(28, 12, 11)$ dizajna automorfizmom reda 7 bez fiksnih točaka i blokova. Autori članka su dokazali da postoji točno 246 takvih dizajna. Osim toga, njihovim ulaganjem u simetrični $(64, 28, 12)$ dizajn kao derivirani dizajn, pokazali su da postoji barem 8 784 neizomorfnih simetričnih dizajna. Odgovarajući rezidulani dizajni su također neizomorfni te iz toga slijedi da ima barem toliko kvazisimetričnih 2-$(36, 16, 12)$ dizajna.

Za klasifikaciju kvazisimetričnih 2-$(28, 12, 11)$ dizajna s automorfizmom reda 7 korištena je metoda temeljena na orbitnim matricama. Konstrukcija dizajna pomoću Kramer-Mesnerove metode u tom slučaju ne bi bila moguća. Automorfizam reda 7 inducira $\binom{28}{12}/7 = 3\,067\,740$ svih orbita 12-članih podskupova. Među njima je samo 187 572 dobrih, no bez obzira na to, taj broj orbita je i dalje prevelik za rješavanje odgovarajućeg Kramer-Mesnerovog sustava. Kako bi konstrukcija dizajna pomoću Kramer-Mesnerove metode bila moguća, potrebno je izabrati grupe automorfizama većeg reda. Odabirući razne podgrupe punih grupa automorfizama već poznatih dizajna kao grupe automorfizama konstruirat ćemo nove kvazisimetrične dizajne koji su neizomorfni već poznatima.

Neka je $\mathcal{V} = \{1, \ldots, v\}$. Za generiranje orbita 2-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ koristimo program `makerep`. Ako je red grupe manji od broja blokova dizajna, za generiranje dobrih orbita k-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ koristimo program `forbrep`. U suprotnom, generiramo samo kratke dobre orbite koristeći program `replesize2`. Matricu kompatibilnosti računamo pomoću programa `cmat`, dok rješenja Kramer-Mesnerova sustava usklađena s matricom kompatibilnosti tražimo pomoću programa `mysolvemat`. Za testiranje izomorfnosti među konstruiranim dizajnima koristimo program `incfilter`.

Neka je $G_1 \cong D_{12}$ diedralna grupa reda 12 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(1,2,3,4,5,6)(7,8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17,18)(19,20,21,22,23,24)(25,26,27),\\ \beta =&(1,6)(2,5)(3,4)(7,11)(8,10)(13,17)(14,16)(19,23)(20,22)(25,27).\end{aligned}$$

Grupa G_1 inducira 47 orbita na 2-članih podskupovima i 1 097 dobrih orbita na 12-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 28\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 47×1097 ima 654 336 rješenja, od kojih dobivamo 13 656 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.11. *Postoji* 13 656 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(28, 12, 11)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je grupa* G_1 *grupa automorfizama.*

Neka je $G_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times A_4$ grupa reda 48 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}\alpha =&(2,12,13)(3,4,11,16,8,7)(5,9,15)(6,14)(17,24,19,18,21,22)(20,23)(25,28)\\ &(26,27)(29,41,53,39,32,55)(30,58,35,38,52,31)(33,54,34,50,42,36)(37,45)\\ &(40,48)(43,59)(44,49,57,56,46,51)(47,60)(61,80,66,83,67,77)(62,74,64,71,\\ &69,81)(65,86)(70,89)(72,88,85)(73,79,84)(75,87,76)(78,90,82),\\ \beta =&(1,10)(2,13,5)(3,20,11,22,14,24)(4,17)(6,21,16,23,7,19)(8,18)(9,12,15)\\ &(26,27)(29,69)(30,35,52,38,31,58)(32,62,48,64,53,70)(33,36,54)(34,42,50)\\ &(37,45)(39,74)(40,81,55,89,41,71)(44,86,57,80,47,83)(46,77)(49,66)(51,67,\\ &60,61,56,65)(63,91)(72,73,84,79,85,88)(75,76,90)(78,82,87).\end{aligned}$$

Grupa G_2 inducira 26 orbita na 2-članih podskupovima i 76 dobrih orbita na 12-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 28\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 26×76 ima 93 312 rješenja, od kojih dobivamo 1 049 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.12. *Postoji* 1 049 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(28, 12, 11)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je grupa* G_2 *grupa automorfizama.*

Neka je $G_3 \cong (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_4$ grupa reda 128 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,23,7,17)(2,24,9,25)(3,20,5,18)(4,27,6,21)(8,15,13,14)(22,28)(29,48,54,34)\\
&(30,63,58,61)(32,50)(33,82,53,75)(35,66,55,65)(36,90,42,80)(37,79,51,85)\\
&(38,40,39,52)(45,56)(46,68,47,64)(49,71,60,88)(57,69,59,70)(67,91)(72,73,89,74)\\
&(76,78,77,86)(83,87),\\
\beta =&(1,5,21,24)(2,18,9,20)(3,27,25,7)(10,22,19,12)(11,16,28,26)(17,23)(29,39,78,73)\\
&(30,42,65,69)(31,81,45,67)(32,44)(33,64,59,80)(34,52,77,89)(35,37)(36,66,70,58)\\
&(38,86,74,54)(40,76,72,48)(41,84,56,91)(43,50)(46,79,82,49)(47,85,75,60)(51,55)\\
&(43,50)(46,79,82,49)(47,85,75,60)(51,55).
\end{aligned}$$

Grupa G_3 inducira 13 orbita na 2-članih podskupovima i 24 dobrih kratkih orbita na 12-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 28\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 13×24 ima 512 rješenja, od kojih dobivamo 80 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.13. *Postoji* 80 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(28, 12, 11)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je grupa* G_3 *grupa automorfizama.*

Grupe G_1, G_2 i G_3 su podgrupe pune grupe automorfizama reda 1 451 520 dizajna $(28, 12, 11)$ sa SDP svojstvom. Na isti način ćemo konstruirati nove kvazisimetrične dizajne s parametrima $(36, 16, 12)$.

Neka je $G_4 \cong S_4$ grupa reda 24 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14,15)(16,17,18)(19,20,21)(22,23,24)\\
&(25,26,27)(28,29,30)(31,32,33),\\
\beta =&(1,4)(2,7)(5,9)(6,11)(8,10)(13,16)(14,19)(15,21)(17,22)(18,24)(20,23)(26,27)\\
&(29,30)(32,34).
\end{aligned}$$

Grupa G_4 inducira 50 orbita na 2-članih podskupovima i 1 300 dobrih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 36\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 50×1300 ima 886 528 rješenja, od kojih dobivamo 35 572 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.14. *Postoji* 35 572 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(36, 16, 12)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 6$ *i* $y = 8$ *kojima je grupa* G_4 *grupa automorfizama.*

Neka je $G_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$ grupa reda 48 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,21,28,35)(2,27,29,12)(3,24,14,19)(4,25,10,17)(5,13,18,34)\\
&(6,22,32,31)(8,26)(11,16)(15,20,33,23)(30,36)(37,52,77,68)(38,87,\\
&60,56)(39,44,61,69)(40,70,46,95)(41,81,85,48)(42,80,78,94)(43,82,\\
&45,54)(49,99,53,92)(51,66)(55,93)(57,72,90,89)(59,79,91,86)(62,73,\\
&71,67)(63,76,74,83)(65,75)(88,98),\\
\beta =&(1,35,30)(2,25,27,10,12,17)(3,5,24,18,14,34)(4,29)(6,16,22)(7,9)\\
&(8,23,15,26,20,33)(11,31,32)(13,19)(21,36,28)(37,39)(38,56,55)(40,92,\\
&70,99,46,53)(41,75,81,85,65,48)(42,72,78,90,94,57)(43,73,82,71,54,67)\\
&(44,68,61,52,69,77)(45,62)(49,95)(50,58)(51,74,83,66,63,76)(59,86,88)\\
&(60,87,93)(79,98,91)(80,89)(84,97).
\end{aligned}$$

Grupa G_5 inducira 43 orbite na 2-članih podskupovima i 205 dobrih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 36\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 43×205 ima 2 304 rješenja, od kojih dobivamo 31 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.15. *Postoji* 31 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(36, 16, 12)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 6$ *i* $y = 8$ *kojima je grupa* G_5 *grupa automorfizama.*

Neka je $G_6 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$ grupa reda 96 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,35,25,17)(2,34,11,26)(3,13,21,16)(4,20,24,6)(5,33)(7,10)\\
&(8,28,29,14)(9,22,36,15)(12,31)(19,30)(37,87,43,63)(38,67)\\
&(39,57,51,85)(40,64,42,75)(41,79,92,68)(44,76)(45,58)(46,72,78,49)\\
&(47,59,70,82)(48,93,90,62)(50,83,88,60)(52,99,91,81)(54,94,86,97)\\
&(55,96,61,80)(56,74)(66,95,71,84)(69,73)(77,98),\\
\beta =&(1,34,24)(2,4,35)(3,16,30)(5,12,27)(6,20,15)(7,14,8)(9,25,11)\\
&(10,28,29)(13,19,21)(17,26,36)(23,31,33)(37,72,43)(38,70,59)\\
&(39,86,74)(40,55,99)(41,63,71)(42,96,52)(44,93,90)(45,77,89)(46,66,68)\\
&(47,82,67)(48,76,62)(50,64,75)(51,54,69)(56,94,85)(57,73,97)(58,65,98)\\
&(60,80,81)(61,91,83)(78,84,92)(79,87,95).
\end{aligned}$$

Grupa G_6 inducira 31 orbita na 2-članih podskupovima i 128 dobrih orbita na 16-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 36\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 31×128 ima 11 520 rješenja, od kojih dobivamo 183 neizomorfnih dizajna.

Propozicija 3.16. *Postoji* 183 *neizomorfnih kvazisimetričnih* 2-$(36, 16, 12)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je grupa* G_6 *grupa automorfizama.*

S pomoću različitih podgrupa punih grupa automorfizama već poznatih dizajna dobili smo veliki broj novih. Osim Kramer-Mesnerovom metodom, kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(28, 12, 11)$ i 2-$(36, 16, 12)$ možemo dobiti i direktnom konstrukcijom temeljenom na Hadamardovim matricama i ortogonalnim latinskim kvadratima [11, 70]. Dizajne s navedenim parametrima dobivamo od Hadamardovih matrica reda 8 te s dva ili tri ortogonalna latinska kvadrata reda 8. Među svim konstruiranim dizajnima na ovaj način najviše je onih s trivijalnom grupom automorfizama. Uzevši u obzir sve konstruirane dizajne, bilo Kramer-Mesnerovom metodom bilo uz pomoć prethodno opisane konstrukcije, te odbacivši sve izomorfne kopije među njima, dolazimo do sljedećeg zaključka:

Teorem 3.17. *Postoji barem* 58 891 *kvazisimetričnih* 2-$(28, 12, 11)$ *dizajna i barem* 522 079 *kvazisimetričnih* 2-$(36, 16, 12)$ *dizajna do na izomorfizam.*

Distribucija svih poznatih kvazisimetričnih dizajna s navedenim parametrima obzirom na red njihove pune grupe automorfizama nalazi se u tablici 3.1.

Tablica 3.1: Distribucija kvazisimetričnih $(28, 12, 11)$ i $(36, 16, 12)$ dizajna obzirom na red pune grupe automorfizama

|Aut|	#28	#36	|Aut|	#28	#36	|Aut|	#28	#36
1451520	1	1	224	8	16	36	33	0
10752	1	3	192	652	7000	32	1299	0
4608	3	3	168	2	23	28	12	0
2304	0	4	160	564	5628	24	360	216596
1920	4	4	144	12	32	21	95	0
1536	13	61	128	4745	5084	20	26	70
1344	4	8	120	17	17	18	7	0
768	18	248	96	26039	5858	14	50	0
672	8	16	84	15	72	12	12908	5
640	1	3	80	372	3744	10	28	0
576	12	12	72	11	31	7	47	0
512	14	60	64	110	0	4	0	14
384	102	300	60	8	0	3	172	466
360	1	1	54	0	1	2	62	1080
320	4	12	48	1224	36114	1	9554	237018
288	10	14	42	3	0			
256	258	2456	40	2	4			

Dizajni $(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$

U tablici iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna [85] egzistencija 2-$(56, 16, 18)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 8$ nije bila poznata. Egzistenciju smo dokazali koristeći Kramer-Mesnerovu metodu koju smo prilagodili za kvazisimetrične dizajne.

Neka je $\mathcal{W}$ veliki Wittov dizajn s parametrima 5-$(24, 8, 1)$ te neka je $\mathcal{D} = \mathrm{der}(\mathrm{der}(\mathrm{res}\mathcal{W})))$. Tada je $\mathcal{D}$ kvazisimetričan dizajn s parametrima 2-$(21, 6, 4)$, $x = 0$, $y = 2$. Poznato je da postoji točno jedan dizajn s tim parametrima [91]. Njegova puna grupa automorfizama $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ je $\mathbb{M}_{21} \rtimes \mathbb{Z}_2$ reda 40 320. Označimo je s G. Grupa G djeluje kao permutacijska grupa na 56 blokova dizajna $\mathcal{D}$. Neka je $H \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_5$ podgrupa grupe G reda 960 generirana permutacijama

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)(11,12,13,14,15)(16,17,18,19,20)(21,22,23,24,25)\\
&(26,27,28,29,30)(31,32,33,34,35)(36,37,38,39,40)(41,42,43,44,45)\\
&(46,47,48,49,50)(51,52,53,54,55),\\
\beta =&(1,6,8)(2,21,26)(3,32,34)(4,11,5)(7,15,22)(9,16,13)(10,29,17)(12,33,30)\\
&(14,19,31)(18,23,35)(24,28,36)(25,37,39)(27,38,40)(42,51,49)(43,52,45)\\
&(44,46,47)(48,54,53)(50,56,55).
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je H grupa automorfizama kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna. Neka je $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 56\}$. Koristeći program `makerep` dobivamo da grupa H inducira 7 orbita 2-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$. Ukupan broj svih orbita 16-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$ je približno $\binom{56}{16}/960 \approx 4 \cdot 10^{10}$. Taj broj orbita je prevelik kako bismo iz njih konstruirali dizajne. Među tim orbitama nalaze se i orbite kojima je veličina veća od $b = 231$. Koristeći program `replesize`, dobivamo da grupa H inducira 1 242 kratkih orbita 16-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$. Nadalje, koristeći program `qsymstrip` dobivamo da je njih 40 dobrih, tj. svaka dva različita elementa im se sijeku u 4 ili u 8 točaka. Iz toga slijedi da je dimenzija Kramer-Mesnerove matrice A jednaka 7×40. Rješavanjem Kramer-Mesnerovog sustava $A \cdot X = 18\, J_7$ uz pomoć matrice kompatibilnosti C dimenzije 40×40 dobivamo 5 rješenja koja nam daju 3 neizomorfna kvazisimetrična dizajna s navedenim parametrima: $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_3$ i $\mathcal{D}_3$. Pune grupe automorfizama konstruiranih dizajna su grupa H, grupa $H \rtimes \mathbb{Z}_2$ reda 1920 i grupa G.

Teorem 3.18. *Postoje barem tri kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 18)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 8$.

Blokovni grafovi svih triju konstruiranih dizajna odgovaraju jako regularnom grafu s parametrima $SRG(231, 30, 9, 3)$. Taj graf je poznat pod nazivom Cameronov graf [15]. Njegova puna grupa automorfizama, označimo je s G_Γ, je permutacijska grupa koja djeluje na 231 vrhova, a izomorfna je grupi $\mathbb{M}_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$ reda 887 040. Grupa G_Γ ima tri podgrupe

reda 960 do na konjugaciju: G_1, G_2 i G_3.

Pretpostavimo da grupa G_1 djeluje na skupu $B = \{1, \ldots, 231\}$. Koristeći program `makerep` dobivamo da grupa G_1 inducira 63 orbite 2-članih podskupova skupa B. S obzirom da je red grupe veći od $v = 56$, koristeći program `replesize2` dobivamo 168 kratkih dobrih orbita 66-članih podskupova skupa B ($r = 66$) pod djelovanjem grupe G_1. Presjek bilo koja dva elementa orbita 66-članih podskupova jednak je $\lambda = 18$. Iz toga dobivamo da je Kramer-Mesnerova matrica A dimenzije 63×168. Za rješavanje Kramer-Mesnerovog sustava $A \cdot X \leq 8\, J_{63}$ uz pomoć matrice kompatibilnosti C dimenzije 168×168 koristimo algoritam 6 koji smo prilagodili za traženje rješenja nejednažbe. Ukupan broj rješenja je 96, od koji dobivamo dva neizomorfna dizajna koji odgovaraju prethodno opisanim dizajnima $\mathcal{D}_2$ i $\mathcal{D}_3$.

Analogno bismo proveli konstrukciju i za druge dvije grupe. Za grupu G_2 dobivamo da Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 63×60 ima 18 rješenja, od kojih dobivamo dva neizomorfna dizajna koji odgovaraju dizajnima $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_3$. Za grupu G_3 Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 60×24 ne daje rješenje.

3.3.2 Algoritam temeljen na traženju klika

Problem traženja (maksimalnih) klika ima važnu ulogu u mnogim kombinatornim problemima te ga možemo koristiti za konstrukciju podstruktura koje su dio neke veće strukture. U našem slučaju to je konstrukcija dizajna od odgovarajućih orbita koje biramo iz većeg skupa generiranih orbita.

Definicija 3.19. *Neka je Γ graf.* ***Klika*** *u grafu Γ je potpuni podgraf.*

Jedan od poznatih problema je traženje klika zadane težine u težinskom grafu G. Konstrukciju kvazisimetričnih dizajna možemo svesti na taj problem.

Neka je $\mathcal{D}$ kvazisimetrični 2-(v, k, λ) dizajn s presječnim brojevima x i y, te neka je b ukupan broj blokova dizajna $\mathcal{D}$. Neka su $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ dobre orbite k-članih podskupova v-članog skupa. Graf Γ definiramo na sljedeći način:

- vrhovi grafa su dobre orbite $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$,
- dva vrha su spojena bridom ako su odgovarajuće orbite kompatibilne,
- težina vrha je veličina orbite.

Time problem konstrukcije kvazisimetričnih dizajna svodimo na problem traženja klika težine b u grafu Γ. Graf Γ nazivamo **grafom kompatibilnosti** orbita $\{\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n\}$. Sve konstruirane klike ne daju nužno kvazisimetrične dizajne, već tvore kolekcije od b kompatibilnih blokova. Iz tog razloga, za svaku kolekciju b kompatibilnih blokova trebamo provjeriti je li dizajn, odnosno trebamo provjeriti da je svaki 2-člani podskup v-članog skupa točaka sadržan u točno λ blokova.

Koristeći ovu metodu konstruiramo strukture za koje unaprijed ne znamo hoće li biti dizajni, ali znamo da će se svi njihovi blokovi sjeći u x ili u y točaka. Uvjet kvazisimetričnosti je često puta jači od uvjeta balansiranosti, tj. uvjeta pokrivanja svih 2-članih podskupova λ puta. Iz tog razloga, efikasnije je konstruirati sve strukture koje zadovoljavaju uvjet kvazisimetričnosti te među njima odbaciti one koji ne čine dizajne, nego obrnuto.

Algoritam za traženje klika zadane težine opisan je u [76], a implementiran je u programu `cliquer` [75] napisan u programskom jeziku `C`. Na `cliquer`-u se temelji naš program `cliquesdes` koji koristimo za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna.

S računalne strane, problem traženja klika je NP–potpun problem. No, problem je jednostavniji što je gustoća grafa Γ manja.

Definicija 3.20. *Neka je V skup vrhova, a E skup bridova grafa Γ. Gustoća grafa Γ je definirana kao*

$$\frac{2|E|}{|V|(|V|-1)}. \tag{3.6}$$

Koristeći metodu koja se temelji na algoritmu za traženje klika konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$ i 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$.

Dizajni $(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$

Egzistenciju kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna utvrdili smo konstruirajući tri neizomorfna dizajna s navedenim parametrima koristeći Kramer-Mesnerovu metodu u poglavlju 3.3.1. Označimo ih s $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ i $\mathcal{D}_3$, pri čemu je $|\mathrm{Aut}\,(\mathcal{D}_1)| = 960$, $|\mathrm{Aut}\,(\mathcal{D}_2)| = 1\,920$ i $|\mathrm{Aut}\,(\mathcal{D}_3)| = 40\,320$. Uz pomoć algoritma za traženje klika konstruirali smo još jedan kvazisimetrični dizajn koji nije izomorfan prethodno konstruiranim dizajnima.

Puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}_1$ ima četiri podgrupe reda 48 do na konjugaciju. Neka je

$$G_{48} = \langle \alpha\beta\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\beta\alpha^2, \beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta \rangle \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$$

jedna njezina podgrupa reda 48, pri čemu su α i β generatori od $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}_1)$ zadani na stranici 80. Pretpostavimo da je grupa G_{48} grupa automorfizama kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna. S obzirom da je red grupe manji od broja blokova $b = 231$, ne možemo se ograničiti na generiranje samo kratkih orbita, već moramo generirati sve orbite 16-članih podskupova 56-članog skupa pod djelovanjem grupe G_{48}. Koristeći program `forbrep` dobivamo da je ukupan broj svih orbita 16-članih podskupova jednak 867 693 085 859. Među njima je 301 080 dobrih orbita kojima presjek bilo koja dva elementa jednak 4 ili 8. Za generiranje svih orbita bilo nam je potrebno približno 6 dana na procesoru radne

frekvencije 2.66 GHz. Broj dobivenih orbita je prevelik za korištenje Kramer-Mesnerove metode. Iz tog razloga za konstrukciju dizajna iz dobivenih orbita koristimo algoritam temeljen na traženju klika.

Neka je Γ graf kompatibilnosti kojemu su vrhovi generirane orbite. Broj bridova grafa Γ jednak je 21 193 946. Iako su brojevi vrhova i bridova veliki, gustoća grafa je mala i iznosi približno $4.676 \cdot 10^{-4}$. Kako bismo konstruirali dizajne s traženim parametrima, potrebno je naći sve klike težine 231 u grafu Γ. Korištenjem programa `cliquesdes` dobivamo ukupno 1 049 792 klika, odnosno struktura koje čini 231 kompatibilnih blokova. Za njihovu konstrukciju bilo nam je potrebno približno 2 sata procesorskog vremena. Među svim dobivenim strukturama nalazi se 1 216 dizajna, od kojih su četiri neizomorfna. Tri dizajna su izomorfna već konstruiranim dizajnima $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ i $\mathcal{D}_3$, dok je četvrti dizajn novi. Označimo ga s $\mathcal{D}_4$. Puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}_4$ je reda 192 i izomorfna je grupi $(((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.

Teorem 3.21. *Postoje barem četiri kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 18)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 8$.

Blokovni graf dizajna $\mathcal{D}_4$ je također izomorfan Cameronovu grafu [15].

Osim s grupom G_{48}, kvazisimetrične dizajne smo pokušali konstruirati i s preostalim podgrupama reda 48, no dobili smo samo već poznate dizajne. Isto tako, pokušali smo ih konstruirati i s podgrupama reda 32, kojih ima pet, ali ne dobivamo nove kvazisimetrične dizajne.

Distribucija svih poznatih kvazisimetričnih 2-$(56, 16, 18)$ dizajna obzirom na red njihove pune grupa automorfizama nalazi se u tablici 3.2.

Tablica 3.2: Distribucija kvazisimetričnih $(56, 16, 18)$ dizajna obzirom na red pune grupe automorfizama

|Aut|	#
40 320	1
1 920	1
960	1
192	1

Nove kvazisimetrične dizajne ponekad možemo konstruirati pomoću kodova pridruženih već poznatim kvazisimetričnim dizajnima. Na primjer, koristeći kodove A. Munemasa i V. D. Tonchev konstruirali su novi 2-$(56, 16, 6)$ dizajn [73] o kojem ćemo nešto više reći u nastavku rada.

Neka je C kod pridružen kvazisimetričnom 2-(v, k, λ) dizajnu s presječnim brojevima x i y te brojem blokova b. Kako bismo konstruirali kvazisimetrične dizajne, potrebno

je odabrati b odgovarajućih riječi težine k koda C. Taj problem također možemo svesti na problem traženja klika. Definiramo graf Γ_C tako su njegovi vrhovi riječi težine k, a dva vrha su spojena bridom ako je veličina presjeka odgovarajućih riječi x ili y. Time problem traženja b odgovarajućih riječi težine k svodimo na problem traženja klika težine b u grafu Γ_C. Za to koristimo `cliquer` [75]. Dobivene klike koje zadovoljavaju uvjet balansiranosti tvore kvazisimetrični dizajn s parametrima 2-(v, k, λ) i presječnim brojevima x i y. Efikasnost traženja klika u grafu ovisi o broju vrhova grafa Γ_C, ali i o njegovoj gustoći. Pretpostavivši da na dizajn djeluje neka grupa automorfizama G, riječi težine k u kodu C možemo particionirati u orbite pod djelovanjem grupe G. Time ćemo smanjiti broj vrhova grafa Γ_C, i pridružit ćemo im težine na isti način kao i ranije.

Neka je C_i linearni kod generiran karakterističnim vektorima blokova (retci transponirane incidencijske matrice) nad poljem $\mathbb{F}_2$ dizajna $\mathcal{D}_i$ s parametrima 2-$(56, 16, 18)$, $x = 4$, $y = 8$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Dobivamo da su kodovi C_1 i C_2 ekvivalentni dimenzije 23, kod C_3 je njihov podkod dimenzije 19, a kod C_4 ima istu dimenziju i minimalnu težinu kao i kodovi $C_{1,2}$, ali različiti težinski polinom. Koeficijenti težinskih polinoma $W_i(x) = \sum_{j=0}^{56} A_j x^j$ odgovarajućih kodova C_i, za $i = 1, 2, 3, 4$, pri čemu je A_j broj riječi težine j, prikazani su u sljedećoj tablici:

	dim	A_0	A_8	A_{12}	A_{16}	A_{20}	A_{24}	A_{28}
$C_{1,2}$	23	1	75	0	21 657	353 536	2 059 035	3 520 000
C_3	19	1	0	0	1 722	19 936	134 085	212 800
C_4	23	1	15	216	20 493	359 200	2 044 899	3 538 960

U tablici su naveden samo koeficijenti A_j za $j \leq 28$ jer je $A_{56-j} = A_j$. Za analizu kodova korišteni su softver `Magma` [8] i `GAP` paket `GUAVA` [3].

Svakom kodu C_i pridružimo graf Γ_{C_i}, $i = 1, 2, 3, 4$ kojemu su vrhovi riječi težine 16. Za konstrukciju dizajna, potrebno je naći klike veličine 77. Sve klike uspjeli smo pronaći samo u grafu Γ_{C_3} koji ima 1722 vrha. Na taj način dobili smo samo već poznati dizajn $\mathcal{D}_3$. Graf $\Gamma_{C_{1,2}}$ ima 21 657 vrhova i gustoću 0.5650, dok graf Γ_{C_4} ima 20 493 vrhova i gustoću 0.5497. U tim slučajevima traženje klika trajalo bi predugo jer je gustoća grafa velika. Kako bismo ubrzali traženje klika, pretpostavili smo da na dizajn djeluju razne grupe automofizama, ali time nismo dobili nove dizajne. Na primjer, pretpostavili smo na dizajn djeluje diedralna grupa reda 10 te smo iz koda $C_{1,2}$ dobili poznate dizajne $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ i $\mathcal{D}_3$. Iz koda C_4 dobili smo samo dizajn $\mathcal{D}_4$, pretpostaviviši da djeluju razne grupe automorfizama reda 3 i većeg.

Dakle, korištenjem kodova u slučaju kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna nismo povećali broj poznatih dizajna.

Dizajni $(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$

Egzistenciju kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 6)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 6$ utvrdio je V. D. Tonchev u [92]. U navedenom članku je ulaganjem deriviranog Wittovog 3-$(22, 6, 1)$ dizajna konstruiran simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn. Prvi poznati kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn, označimo ga s $\mathcal{D}_1$, V. D. Tonchev je pronašao kao rezidualni dizajn konstruiranog simetričnog dizajna. Njegova puna grupa automorfizama je reda 168. Osim dizajna $\mathcal{D}_1$, poznat je još jedan kojeg su A. Munemasa i V. D. Tonchev konstruirali koristeći kôd poznatog dizajna $\mathcal{D}_1$ [73]. Označimo ga s $\mathcal{D}_2$. Njegova puna grupa automorfizama je reda 24. Koristeći metodu koja se temelji na algoritmu za traženje klika, konstruirat ćemo nove kvazisimetrične dizajne s navedenim parametrima.

Neka je G_{48} grupa automorfizama s kojom smo konstruirali novi kvazisimetrični 2-$(56, 16, 18)$ dizajn. Pretpostavimo da ona djeluje na kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 6$ te brojem blokova $b = 77$. Neka je $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 56\}$. Grupa G_{48} inducira 867 693 085 859 orbita 16-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$. Među njima je 5 352 dobrih orbita kojima se svaka dva različita elementa orbite sijeku u $x = 4$ ili u $y = 6$ točaka. Za generiranje orbita koristimo program `forbrep` jer je red grupe manji od broja blokova $b = 77$. Neka je Γ graf kompatibilnosti kojemu su vrhovi generirane orbite. Broj bridova grafa Γ jednak je 379 369. Gustoća grafa je približno 0.02649. Korištenjem programa `cliquesdes` dobivamo ukupno 224 256 klika težine 77, odnosno struktura koje čini 77 kompatibilnih blokova. Sve te strukture su kvazisimetrični dizajni, a među njima je 876 neizomorfnih. Konstruirani dizajni nisu izomorfni već poznatim dizajnima $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$. Puna grupa automorfizama svih konstruiranih dizajna je grupa G_{48}.

Teorem 3.22. *Postoji točno* 876 *kvazisimetričnih* 2-$(56, 16, 6)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je* G_{48} *grupa automorfizama.*

3.3.3 Algoritam temeljen na orbitnim matricama

U potpoglavlju 3.2.3 opisali smo na koji način možemo smanjiti broj orbita k-članih podskupova v-članog skupa točaka koristeći orbitne matrice. Od dobivenih orbita koje su usklađene sa stupcima orbitne matrice možemo napraviti uniju te koristeći neku od opisanih metoda konstruirati dizajne. Bez obzira što je broj tako generiranih orbita manji od broja svih orbita koje bismo konstruirali bez orbitnih matrica, često je i dalje prevelik za konstrukciju. Osim toga, time ne bismo iskoristili informaciju koju nam daju orbitne matrice, a to je da moramo izabrati točno po jednu orbitu usklađenu s j-tim stupcem, za $j = 1, \ldots, n$. Za konstrukciju dizajna pomoću orbitnih matrica koristimo program `tdmsolve` koji se temelji na *backtracking* algoritmu 7.

ALGORITAM 7: Algoritam temeljen na orbitnim matricama

globalna varijabla: niz $[K_1, \ldots, K_n]$ koji sadrži predstavnike orbita
procedura *TRAŽI* (i : *prirodan broj*)
  ako je $i = n + 1$ **onda**
    ako je *familija* $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{n} K_i^G$ *balansirana* **onda**
      ispiši $\mathcal{D}$
    kraj
  inače
    za svaki $K_i \in \rho_i$ **napravi**
      ako je *orbita* K_i^G *kompatibilna s orbitama* K_j^G, *za* $j = 1, \ldots, i-1$
      onda
        TRAŽI $(i+1)$
      kraj
    kraj
  kraj
kraj procedure

/* glavni program */

ulaz: niz skupova predstavnika $[\rho_1, \ldots, \rho_n]$ (ρ_j sadrži predstavnike orbita k-članih podskupova usklađenih s j-tim stupcem orbitne matrice B, za svaki $j = 1, \ldots, n$), grupa G, parametar λ
pozovi proceduru TRAŽI (1)
izlaz: dizajni sastavljeni od orbita čiji su predstavnici dani na ulazu

Koristeći algoritam temeljen na orbitnim matricama konstruirali smo nove kvazisimetrične dizajne s parametrima 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$.

Dizajni $(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$

U poglavlju 3.3.2 smo konstruirali 876 novih kvazisimetričnih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 6$ koji su neizomorfni već poznatim dizajnima [73, 92]. Koristeći algoritam temeljen na orbitnim matricama možemo ih konstruirati još. Potpuno smo klasificirali dizajne s Frobeniusovom grupom reda 21, dok smo s grupom A_4 reda 12 konstruirali dodatnih 303 dizajna koji nisu izomorfni već prethodno konstruiranim.

Do na izomorfizam postoje točno dvije grupe reda 21. Jedna od njih je ciklička grupa $\mathbb{Z}_{21}$, a druga je nekomutativna grupa $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$. Grupa $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$ je Frobeniusova grupa reda 21, označimo je s Frob_{21}. Postoji nekoliko definicija Frobeniusovih grupa. Jedna od njih je sljedeća [31]:

Definicija 3.23. ***Frobeniusova grupa*** *je tranzitivna permutacijska grupa koja nije regularna, ali u kojoj samo identitet ima više od jedne fiksne točke.*

Ako s G označimo grupu koja djeluje na skupu X, onda za djelovanje grupe G kažemo da je **regularno** ako je tranzitivno i ako je $G_x = \{e_G\}$, za sve $x \in X$. Iz definicije 2.27 slijedi da skup X pod djelovanjem neke tranzitivne grupe G ima samo jednu orbitu, tj. da je $x^G = X$, za sve $x \in X$.

Druga definicija, koja ujedno govori nešto više o samoj strukturi Frobeniusove grupe, temelji se na sljedećem teoremu [24]:

Teorem 3.24. *(Frobeniusov teorem) Neka je G konačna grupa i $H \leq G$ njezina podgrupa takva da je $H \cap x^{-1}Hx = \{e_G\}$, za sve $x \in G \setminus H$. Tada grupa G ima normalnu podgrupu N takvu da je $G = HN$ i $H \cap N = \{e_G\}$.*

Definicija 3.25. ***Frobeniusova grupa*** *G je grupa koja ima podgrupu $H \leq G$ takvu da je $H \cap x^{-1}Hx = \{e_G\}$, za sve $x \in G \setminus H$.*

Odnosno, za grupu koja zadovoljava pretpostavke Frobeniusova teorema 3.24 kažemo da je Frobeniusova grupa. Iz Frobeniusova teorema vidimo da je Frobeniusova grupa semidirektan produkt grupa H i N. Dokaz teorema može se naći u [78]. Podgrupa H naziva se **Frobeniusov komplement**, a podgrupa N **Frobeniusova jezgra**. Iz teorema slijedi da je podgrupa H stabilizator elemenata $x \in G \setminus H$, a podgrupa N je regularna normalna podgrupa grupe G.

Definiciju 3.23 i Frobeniusov teorem 3.24 povezuje sljedeći teorem:

Teorem 3.26. *Neka je G konačna tranzitivna permutacijska grupa takva da je $G_x \cap G_y = \{e_G\}$, za sve $x \neq y$. Tada G ima regularnu normalnu podgrupu.*

Neka je Frob_{21} permutacijska grupa na v-članom skupu točaka $\mathcal{V}$ takva da je $\mathrm{Frob}_{21} \cong \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$. Prema teoremu 2.12, duljine orbita na skupu točaka na koje djeluje grupa Frob_{21} mogu poprimiti vrijednosti iz skupa $\{1, 3, 7, 21\}$. Grupa djeluje tranzitivno i vjerno samo na orbitama duljine 7 i 21. S obzirom da je $|S_3| = 6$, ulaganje grupe Frob_{21} u grupu S_3 je nemoguće.

Općenito, grupa G na skup X djeluje **vjerno** ako je neutralni element e grupe G jedini element za koji vrijedi da je $e(x) = x$, za sve $x \in X$.

Permutacijska reprezentacija grupe Frob_{21} na 21-članom skupu točaka, do na permutacijski izomorfizam, generirana je s

$$\alpha = (1,2,4)(3,8,16)(5,10,12)(6,14,7)(9,20,19)(11,21,15)(13,18,17),$$
$$\beta = (1,3,6,9,12,15,18)(2,5,8,11,14,17,20)(4,7,10,13,16,19,21),$$

a na 7-članom skupu s

$$\alpha = (1,2,3)(4,5,6),$$
$$\beta = (1,2,4,3,6,5,7).$$

S obzirom na djelovanje grupe Frob_{21} na 21-članom i 7-članom skupu, permutacijsku reprezentaciju grupe Frob_{21} možemo proširiti na bilo koji v-člani skup točaka.

Grupom Frob_{21} možemo konstruirati mnoge kvazisimetrične dizajne iz tablice 1.3 koji su izomorfni već poznatim dizajnima, a to su dizajni s parametrima: $(21, 6, 4)$, $(21, 7, 12)$, $(22, 6, 5)$, $(22, 7, 16)$, $(23, 7, 12)$, $(28, 12, 11)$, $(31, 7, 7)$, $(36, 16, 12)$, $(49, 9, 6)$. Prvi dizajn koji nismo uspjeli konstruirati s grupom Frob_{21}, a da on postoji, je dizajn s parametrima $(45, 9, 8)$. Taj dizajn je jedinstven, a njegova puna grupa automorfizama je ciklička grupa $\mathbb{Z}_3$ [42]. S obzirom da grupa Frob_{21} djeluje na mnoge kvazisimetrične dizajne, pretpostavimo da ona djeluje i na dizajn s parametrima 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$.

Neka je Frob_{21} grupa koja djeluje na skupu točaka $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 56\}$. Grupa Frob_{21} na skupu $\mathcal{V}$ može djelovati na više načina te je broj točkovnih vektora duljine orbita velik. Kako bismo smanjili broj mogućnosti za vektore ν, dokažimo sljedeću lemu:

Lema 3.27. *Automorfizam reda* 7 *dizajna* 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ *nema ni fiksnih točaka ni fiksnih blokova.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji $7m$ fiksnih točaka, gdje je $1 \leq m < 8$. Neka su F_1 i F_2 dvije fiksne točke. Automorfizam preslikava blok koji sadrži točke F_1 i F_2 u neki drugi blok koji ih također sadrži. S obzirom da je $\lambda = 6 < 7$, automorfizam reda 7 blokove koji prolaze kroz točke F_1 i F_2 preslikava u same sebe, tj. svi blokovi kroz neke dvije fiksne točke su fiksni. Nadalje, budući da su presječni brojevi 4 i 6, svaki od tih šest blokova dodatno sadrži još barem dvije fiksne točke. Iz toga slijedi da se na svakom fiksnom bloku nalazi maksimalno jedna orbita duljine 7 te da je broj fiksnih točaka jednak 9 ili 16. Isto tako, kroz svaku fiksnu točku prolazi 22, 15 ili 8 fiksnih blokova. Skup svih fiksnih točaka i blokova čine PBD (*"partially balance design"*) s parametrima 2-$(7m, \{9, 16\}, 6)$. S v_8, v_{15} i v_{22} označimo broj točaka PBD-a stupnja 8, 15, 22, a s b_9 i b_{16} označimo broj blokova stupnja 9 i 16. Očito vrijedi

$$v_8 + v_{15} + v_{22} = 7m. \tag{3.7}$$

Dvostrukim prebrojavanjem skupa incidentnih parova $\{(P, B) \mid P \in B\}$ dobivamo

$$8\, v_8 + 15\, v_{15} + 22\, v_{22} = 9\, b_9 + 16\, b_{16}. \tag{3.8}$$

Dvostrukim prebrojavanjem skupa trojki $\{(P, Q, B) \mid P, Q \in B,\ P \neq Q\}$ dobivamo

$$\binom{9}{2} b_9 + \binom{16}{2} b_{16} = 7m(7m - 1) \cdot 6,$$

odnosno

$$12\, b_9 + 40\, b_{16} = 7m(7m - 1). \tag{3.9}$$

Nadalje, kroz svaku točku PBD-a stupnja 8, osim 8 fiksnih blokova, prolazi još 14 blokova dizajna koji nisu fiksni. Isto tako, kroz svaku točku stupnja 15 prolazi 7 blokova koji nisu fiksni. Ti blokovi se međusobno ne podudaraju. Ukupan broj fiksnih i nefiksnih blokova ne može biti veći od ukupnog broja blokova dizajna, tj. treba vrijediti

$$14\,v_8 + 7\,v_{15} + b_9 + b_{16} \leq 77. \tag{3.10}$$

Jednadžba (3.9) nema cjelobrojnih rješenja takvih da je $b_9, b_{16} \geq 0$ i $b_9 + b_{16} \leq 77$ za $m \in \{1, 2, 5, 6\}$. Za $m \in \{3, 4, 7\}$ moguća rješenja jednadžbe (3.9) su prikazana u sljedećoj tablici:

m	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7
b_9	5	15	25	35	3	13	23	33	43	53	63	6	16	26
b_{16}	9	6	3	0	18	15	12	9	6	3	0	57	54	51

Izlučivanjem v_{22} iz jednadžbe (3.7) te uvrštavanjem u jednadžbu (3.8) dobivamo

$$14\,v_8 + 7\,v_{15} = 22 \cdot 7m - 9b_9 - 16b_{16}. \tag{3.11}$$

Uspoređivanjem dobivenog izraza (3.11) s nejednadžbom (3.10) dobivamo da za sve trojke parametara (m, b_9, b_{16}) treba vrijediti

$$8b_9 + 15b_{16} \leq 144m - 7. \tag{3.12}$$

Dobivenu nejednadžbu (3.12) ne zadovoljava niti jedna trojka iz tablice. Dakle, sustav (ne)jednadžbi (3.7)–(3.10) nema rješenje za $m = 1, \ldots, 7$. Iz toga slijedi da je $m = 0$ i da automorfizam reda 7 dizajna 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$ nema fiksnih točaka.

Preostaje dokazati da on nema niti fiksnih blokova. Pretpostavimo da postoji barem jedan fiksni blok. Tada bi on sadržavao maksimalno dvije orbite duljine 7 što znači da je broj fiksnih točaka na tom bloku barem dva, što je u kontradikciji s prethodno dokazanom činjenicom da dizajn nema fiksnih točaka. □

Iz leme 3.27 slijedi da grupa Frob_{21} na točke kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 6)$ dizajna djeluje u orbitama duljine 7 i 21. Djelovanje na svakoj od orbita je jedinstveno do na permutacijski izomorfizam. Time dobivamo tri mogućnosti za točkovne vektore duljina orbita:

$$\nu^{(1)} = (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7), \qquad \nu^{(2)} = (7, 7, 7, 7, 7, 21), \qquad \nu^{(3)} = (7, 7, 21, 21).$$

S obzirom da je red grupe Frob_{21} manji od ukupnog broja blokova $b = 77$, potrebno je konstruirati sve orbite 16-članih podskupova skupa $\mathcal{V}$. Za to koristimo program `forbrep`.

Za slučaj $\nu^{(1)}$ dobivamo ukupno 1 983 283 532 181 orbita, od kojih je 107 602 880 dobrih, kojima se svaka dva različita elementa sijeku u $x = 4$ ili u $y = 6$ točaka. Za slučaj $\nu^{(2)}$ dobivamo 1 983 283 449 525 orbita, od kojih je 98 909 810 dobrih. Za slučaj $\nu^{(3)}$ dobivamo 1 983 283 432 389 orbita, od kojih je 584 272 493 dobrih. Bez obzira na znatno manji broj dobrih orbita u odnosu na ukupan broj orbita, taj broj je i dalje prevelik za konstrukciju dizajna pomoću Kramer-Mesnerove metode ili metode temeljene na traženju klika. Kako bismo dodatno smanjili broj dobrih orbita, koristit ćemo orbitne matrice.

Za konstrukciju dizajna pomoću algoritma temeljenog na orbitnim matricama, osim točkovnih vektora duljina orbita pod djelovanjem grupe Frob_{21}, potrebni su nam i blokovni. Za blokovne vektore imamo četiri mogućnosti:

$$\beta^{(1)} = (7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7), \quad \beta^{(2)} = (7,7,7,7,7,7,7,7,7,21),$$
$$\beta^{(3)} = (7,7,7,7,7,21,21), \quad \beta^{(4)} = (7,7,21,21,21).$$

Za svaku kombinaciju točkovnih i blokovnih vektora duljina orbita pod djelovanjem grupe Frob_{21} trebamo konstruirati orbitne matrice. Za to koristimo program `tdmat`. Dobili smo da orbitne matrice postoje za pet od ukupno 12 mogućnosti. Za svaku dobivenu orbitnu matricu potrebno je provjeriti je li ona dobra, tj. zadovoljava li jednadžbe (3.5). Broj dobrih orbitnih matrica možemo dodatno smanjiti tako da odbacimo sve matrice kod kojih je $b_{ij} = 2$ ili $b_{ij} = 5$, pri čemu je $\nu_i = \beta_j = 7$. Orbita $\mathcal{B}_j$ duljine 7 je stabilizirana s podgrupom reda 3 grupe Frob_{21} koja ima jednu fiksnu točku i dvije orbite duljine 3 na 7-članom skupu točaka $\mathcal{V}_i$. Iz toga slijedi da b_{ij} mora biti broj koji dobijemo kao sumu brojeva 1, 3 i 3. Distribucija broja orbitnih matrica obzirom na odgovarajuće točkovne i blokovne vektore nalazi se u tablici 3.3:

Tablica 3.3: Distribucija broja orbitnih matrica za 2-$(56, 16, 6)$ dizajn s grupom Frob_{21}

$\nu^{(i)}$	$\beta^{(j)}$	Broj orbitnih matrica	Broj dobrih orbitnih matrica	Oznaka
$\nu^{(1)}$	$\beta^{(2)}$	26	2 (26)	B_1, B_2
$\nu^{(2)}$	$\beta^{(3)}$	501	0 (8)	–
$\nu^{(2)}$	$\beta^{(3)}$	8	6 (8)	$B_3 - B_8$
$\nu^{(3)}$	$\beta^{(3)}$	16	4 (4)	$B_9 - B_{12}$
$\nu^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	1	1 (1)	B_{13}

U trećem stupcu tablice 3.3 unutar zagrade nalazi se ukupan broj dobrih orbitnih matrica koje zadovoljavaju jednadžbe (3.5), dok se izvan zagrade nalazi broj dobrih orbitnih matrica koje dodatno zadovoljavaju svojstvo da je $b_{ij} \neq 2, 5$, za $\nu_i = \beta_j = 7$. Te orbitne matrice su:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 9 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 9 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 9 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad B_7 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad B_8 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 9 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 9 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B_{10} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 9 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 9 & 3 & 9 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & 9 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & 9 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Za svaku orbitnu matricu $B_1 - B_{13}$ generiramo dobre orbite usklađene s njezinim stupcima koristeći program `tdm2orb`. Dobivamo da za orbitne matrice $B_1 - B_8$ te B_{13} ne postoje dobre orbite usklađene s barem jednim njezinim stupcem. Na primjer, za orbitnu matricu B_{13} postoje dobre orbite koje su usklađene samo s njezinim četvrtim stupcem i ima ih 1 070 748. Za preostale stupce ne postoje dobre orbite koje su s njim usklađene. Iz toga zaključujemo da kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn koji bi odgovarao orbitnoj matrici B_{13} ne postoji. Isto tako, ne postoje niti kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajni koji bi odgovarali orbitnim matricama $B_1 - B_8$. Za orbitne matrice $B_9 - B_{12}$ postoje dobre orbite koje su usklađene sa svim njihovim stupcima. Broj dobrih orbita generiranih po stupcima matrica $B_9 - B_{12}$ je sljedeći:

$$
{B_9}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} \begin{matrix} 588 \text{ orbita} \\ 882 \text{ orbita} \\ 588 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 3\,628\,548 \text{ orbita} \\ 3\,628\,548 \text{ orbita} \end{matrix}, \quad
{B_{10}}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} \begin{matrix} 588 \text{ orbita} \\ 882 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 735 \text{ orbita} \\ 3\,674\,412 \text{ orbita} \\ 3\,628\,548 \text{ orbita} \end{matrix},
$$

$$
{B_{11}}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} \begin{matrix} 882 \text{ orbita} \\ 588 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 735 \text{ orbita} \\ 3\,674\,412 \text{ orbita} \\ 3\,628\,548 \text{ orbita} \end{matrix}, \quad
{B_{12}}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{matrix} \begin{matrix} 882 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 490 \text{ orbita} \\ 735 \text{ orbita} \\ 735 \text{ orbita} \\ 3\,674\,412 \text{ orbita} \\ 3\,674\,412 \text{ orbita} \end{matrix}.
$$

Iz dobivenih orbita konstruirat ćemo dizajne koristeći program `tdmsolve`. Bez obzira na veliki broj dobivenih dobrih orbita za svaku orbitnu matricu, uvjet da iz svakog stupca trebamo izabrati po jednu orbitu čini konstrukciju izvedivom.

Za orbitne matrice B_9 i B_{12} dobivamo da odgovarajući kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajni ne postoje. Iz dobrih orbita koje odgovaraju orbitnoj matrici B_{10} dobivamo 882 kvazisimetričnih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna, koji su svi izomorfni već poznatom dizajnu $\mathcal{D}_1$ s punom grupom automorfizama reda 168 [92]. Iz dobrih orbita koje odgovaraju orbitnoj matrici B_{11} također dobivamo 882 dizajna koji su svi međusobno izomorfni, ali nisu izomorfni već poznatim dizajnima $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ [73, 92] te dizajnima iz teorema 3.22. Puna grupa automorfizama tog dizajna je reda 21.

Teorem 3.28. *Postoje točno dva kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 6)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je* Frob_{21} *grupa automorfizama.*

Time smo potpuno klasificirali kvazisimetrične 2-$(56, 16, 6)$ dizajne s Frobeniusovom grupom reda 21.

Nove kvazisimetrične 2-$(56, 16, 6)$ dizajne konstruirali smo i s alternirajućom grupom A_4 reda 12. Grupa A_4 je podgrupa punih grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ [73, 92] te 876 dizajna s grupom G_{48} iz teorema 3.22.

Neka je A_4 grupa koja djeluje na skupu točaka $\mathcal{V} = \{1, \ldots, 56\}$. Prema teoremu 2.12, duljine orbita na skupu točaka na koje djeluje grupa A_4 mogu poprimiti vrijednosti iz skupa $\{1, 3, 4, 6, 12\}$. Grupa djeluje tranzitivno i vjerno na orbitama duljine 4, 6 i 12. S obzirom na moguće duljine orbita, broj mogućnosti za točkovne i blokovne vektore duljina orbita pod djelovanjem grupe A_4 je velik te bi ispitivanje svih mogućih njihovih kombinacija za konstrukciju 2-$(56, 16, 6)$ dizajna iziskivalo puno vremena. Grupa A_4 na spomenute dizajne djeluje na samo dva načina:

(1) $\nu^{(1)} = (4, 4, 6, 6, 6, 6, 12, 12)$, $\quad \beta^{(1)} = (1, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 12, 12, 12, 12)$,

(2) $\nu^{(2)} = (1, 3, 4, 6, 6, 12, 12, 12)$, $\quad \beta^{(2)} = (1, 1, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 12, 12, 12)$.

Za obje kombinacije točkovnih i blokovnih vektora konstruiramo orbitne matrice pomoću programa `tdmat`. Za slučaj (1) dobivamo 64 orbitnih matrica, od koji su samo tri dobre, tj. zadovoljavaju jednadžbe (3.5). Označimo ih s B_1, B_2 i B_3. Za svaku orbitnu matricu generiramo dobre orbite koje su usklađene s njezinim stupcima koristeći program `tdm2rep` te dobivamo da je broj dobrih orbita generiranih po stupcima za matrice $B_1 - B_3$ sljedeći:

$$
{B_1}^{\tau} = \begin{bmatrix}
4 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\
2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 5
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 27 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 81 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 64 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 64 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 2\,304 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 4\,608 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 633\,856 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 887\,808 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 633\,856 \text{ orbita} \\
\rightarrow \quad 887\,808 \text{ orbita}
\end{array},
$$

$$B_2{}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 81 \text{ orbita} \\ \to \quad 81 \text{ orbita} \\ \to \quad 64 \text{ orbita} \\ \to \quad 64 \text{ orbita} \\ \to \quad 4\,608 \text{ orbita} \\ \to \quad 4\,608 \text{ orbita} \\ \to \quad 892\,416 \text{ orbita} \\ \to \quad 892\,416 \text{ orbita} \\ \to \quad 887\,808 \text{ orbita} \\ \to \quad 887\,808 \text{ orbita} \end{array},$$

$$B_3{}^\tau = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 1 \text{ orbita} \\ \to \quad 81 \text{ orbita} \\ \to \quad 81 \text{ orbita} \\ \to \quad 64 \text{ orbita} \\ \to \quad 96 \text{ orbita} \\ \to \quad 4\,608 \text{ orbita} \\ \to \quad 4\,608 \text{ orbita} \\ \to \quad 892\,416 \text{ orbita} \\ \to \quad 892\,416 \text{ orbita} \\ \to \quad 892\,416 \text{ orbita} \\ \to \quad 887\,808 \text{ orbita} \end{array}.$$

Iz dobivenih orbita konstruiramo dizajne koristeći program `tdmsolve`. Iako je konstrukcija svih dizajna sa zadanim djelovanjem na taj način izvediva, naš program njihovu konstrukciju nije dovršio niti nakon više od 6 mjeseci. Do sada smo na taj način konstruirali ukupno 253 neizomorfnih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna, pri čemu smo iz orbitne matrice B_1 konstruirali njih 10, dok smo iz orbitne matrice B_3 konstruirali njih 243. Orbitna matrica B_1 dala je do sada dva poznata dizajna $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ te 8 novih dizajna kojima je A_4 puna grupa automorfizama. Orbitna matrica B_2 do sada još nije dala dizajne s navedenim parametrima, dok je orbitna matrica B_3 dala 184 dizajna kojima je G_{48} puna grupa automorfizama, te su oni izomorfni već konstruiranim dizajnima, i 59 novih dizajna kojima je A_4 puna grupa automorfizama.

Pretpostavivši da grupa A_4 djeluje na 2-$(56, 16, 6)$ dizajna na način opisan slučajem (1) dobili smo 67 novih kvazisimetričnih dizajna s navedenim parametrima kojima je A_4 puna grupa automorfizama.

Na isti način konstruirali smo i nove dizajne za slučaj (2). U tom slučaju dobivamo 141 orbitnih matrica, od kojih je 13 dobrih. Označimo ih s $B_4 - B_{16}$. Broj dobrih orbita generiranih po stupcima pomoću programa `tdm2rep` je sljedeći:

$$B_4{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&3&0&3&3&6 \\ 0&3&1&3&0&3&3&3 \\ 1&1&2&0&2&4&4&2 \\ 1&1&0&1&3&2&4&4 \\ 0&0&2&3&3&4&2&2 \\ 0&0&0&2&2&6&2&4 \\ 0&1&2&1&2&3&3&4 \\ 0&1&1&2&1&3&5&3 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \end{bmatrix}, \quad B_5{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&3&0&3&3&6 \\ 0&3&1&3&0&3&3&3 \\ 1&1&0&0&2&4&4&4 \\ 1&1&2&1&3&2&4&2 \\ 0&0&0&3&3&4&2&4 \\ 0&0&2&2&2&6&2&2 \\ 0&1&2&1&2&3&3&4 \\ 0&1&1&2&1&3&5&3 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 27 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 192 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 7 776 orbita} \\ \to \text{ 10 368 orbita} \\ \to \text{ 6 912 orbita} \\ \to \text{ 2 592 orbita} \\ \to \text{ 1 695 744 orbita} \\ \to \text{ 1 387 008 orbita} \\ \to \text{ 1 387 008 orbita} \end{matrix},$$

$$B_6{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 1&3&0&0&0&0&12&0 \\ 0&0&0&4&4&4&4&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&3&0&3&3&6 \\ 0&3&1&3&0&3&3&3 \\ 1&1&2&1&3&4&2&2 \\ 1&1&0&1&3&2&4&4 \\ 0&0&2&1&1&4&6&2 \\ 0&0&0&1&1&6&4&4 \\ 0&1&2&1&2&3&3&4 \\ 0&1&1&3&2&3&3&3 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 27 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 192 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 10 368 orbita} \\ \to \text{ 10 368 orbita} \\ \to \text{ 4 032 orbita} \\ \to \text{ 4 608 orbita} \\ \to \text{ 1 695 744 orbita} \\ \to \text{ 520 704 orbita} \\ \to \text{ 1 387 008 orbita} \end{matrix},$$

$$B_7{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&3&0&3&3&3&3 \\ 0&0&1&3&3&6&0&3 \\ 1&1&0&3&1&2&4&4 \\ 1&1&0&0&2&4&4&4 \\ 0&2&2&2&0&4&4&2 \\ 0&2&2&1&3&2&4&2 \\ 0&1&1&2&1&3&3&5 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 1 orbita} \\ \to \text{ 27 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 128 orbita} \\ \to \text{ 96 orbita} \\ \to \text{ 10 368 orbita} \\ \to \text{ 7 776 orbita} \\ \to \text{ 7 776 orbita} \\ \to \text{ 10 368 orbita} \\ \to \text{ 1 387 008 orbita} \\ \to \text{ 1 387 008 orbita} \\ \to \text{ 1 166 976 orbita} \end{matrix},$$

$$B_8{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 1&3&0&0&0&0&12&0 \\ 0&0&0&4&4&4&4&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&3&0&3&3&3&3 \\ 0&0&1&0&0&6&6&3 \\ 1&1&0&3&1&4&2&4 \\ 1&1&0&1&3&2&4&4 \\ 0&2&2&3&1&2&4&2 \\ 0&2&2&1&3&4&2&2 \\ 0&1&1&2&1&3&3&5 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 27 \text{ orbita} \\ \to & 128 \text{ orbita} \\ \to & 128 \text{ orbita} \\ \to & 144 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 1\,387\,008 \text{ orbita} \\ \to & 1\,387\,008 \text{ orbita} \\ \to & 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{matrix},$$

$$B_9{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&3&0&3&3&6 \\ 0&0&1&3&3&6&0&3 \\ 1&1&2&0&2&4&4&2 \\ 1&1&0&1&3&2&4&4 \\ 0&2&2&3&1&2&4&2 \\ 0&2&0&2&0&4&4&4 \\ 0&1&2&1&2&3&3&4 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix}, \quad B_{11}{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&0&3&3&3&6 \\ 0&0&1&3&3&6&0&3 \\ 1&1&2&0&2&4&4&2 \\ 1&1&0&3&1&2&4&4 \\ 0&2&2&1&3&2&4&2 \\ 0&2&0&2&0&4&4&4 \\ 0&1&2&2&1&3&3&4 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 27 \text{ orbita} \\ \to & 128 \text{ orbita} \\ \to & 192 \text{ orbita} \\ \to & 96 \text{ orbita} \\ \to & 7\,776 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 7\,776 \text{ orbita} \\ \to & 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \to & 1\,387\,008 \text{ orbita} \\ \to & 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{matrix},$$

$$B_{10}{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&3&0&3&3&6 \\ 0&0&1&3&3&6&0&3 \\ 1&1&2&1&3&2&4&2 \\ 1&1&0&0&2&4&4&4 \\ 0&2&2&2&0&4&4&2 \\ 0&2&0&3&1&2&4&4 \\ 0&1&2&1&2&3&3&4 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix}, \quad B_{12}{}^\tau = \begin{bmatrix} 1&3&0&6&6&0&0&0 \\ 1&3&0&0&0&12&0&0 \\ 0&0&0&2&2&4&8&0 \\ 1&0&3&3&0&3&3&3 \\ 1&0&0&0&3&3&3&6 \\ 0&0&1&3&3&6&0&3 \\ 1&1&2&1&3&2&4&2 \\ 1&1&0&2&0&4&4&4 \\ 0&2&2&0&2&4&4&2 \\ 0&2&0&3&1&2&4&4 \\ 0&1&2&2&1&3&3&4 \\ 0&1&1&1&2&3&3&5 \\ 0&0&1&2&2&4&4&3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 1 \text{ orbita} \\ \to & 27 \text{ orbita} \\ \to & 128 \text{ orbita} \\ \to & 192 \text{ orbita} \\ \to & 96 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 7\,776 \text{ orbita} \\ \to & 7\,776 \text{ orbita} \\ \to & 10\,368 \text{ orbita} \\ \to & 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \to & 1\,387\,008 \text{ orbita} \\ \to & 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{matrix},$$

$$B_{13}{}^{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{14}{}^{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 27 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 128 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 192 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 144 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,387\,008 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{array},$$

$$B_{15}{}^{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 27 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 192 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 192 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 96 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 7\,776 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 7\,776 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{array},$$

$$B_{16}{}^{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{r} \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 27 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 192 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 192 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 144 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 10\,368 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,695\,744 \text{ orbita} \\ \rightarrow \quad 1\,166\,976 \text{ orbita} \end{array}.$$

Za svaku orbitnu matricu iz dobivenih orbita konstruiramo dizajne pomoću programa `tdmsolve`. Za orbitne matrice $B_4 - B_6$ traženje odgovorajućih orbita koje bi činile dizajn je završilo te za njih ne dobivamo niti jedan kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn. Traženje

odgovarajućih orbita za preostale orbitne matrice još nije završilo. Orbitne matrice B_8, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14} i B_{16} do sada nisu dale dizajne. Orbitne matrica B_7, B_9, B_{10} i B_{15} do sada su dale 264 kvazisimetričnih dizajna kojima je G_{48} puna grupa automorfizama, te su oni izomorfni već konstruiranim dizajnima, i 236 novih kvazisimetričnih dizajna s navedenim parametrima kojima je A_4 puna grupa automorfizama.

Teorem 3.29. *Postoji barem* 753 *kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 6)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je* A_4 *grupa automorfizama.*

S obzirom da konstrukcija dizajna nije još završila, pretpostavljamo da postoji još 2-$(56, 16, 6)$ dizajna kojima je A_4 grupa automorfizama

Podsjetimo se da su A. Munemasa i V. D. Tonchev konstruirali drugi poznati kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn $\mathcal{D}_2$ pomoću koda prvog poznatog dizajna $\mathcal{D}_1$ [73, 92]. Koristeći kodove svih do sad konstruiranih dizajna, konstruirat ćemo nove kvazisimetrične dizajne s navedenim parametrima.

S C_1 označimo linearni kod generiran karakterističnim vektorima blokova dizajna $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$. Njegova dimenzija je 26. Novi dizajn s punom grupom automorfizama Frob_{21} iz teorema 3.28 generira neekvivalentni kod dimenzije 26, označimo ga s C_2. Dizajni konstruirani s grupom G_{48} iz teorema 3.22 generiraju 23 neekvivalentna koda dimenzija od 22 do 25, označimo ih s $C_3, \ldots, C_{25}$. Dizajni konstruirani s grupom A_4 generiraju 16 neekvivalentnih kodova, pri čemu su dva od njih ekvivalentna već definiranim kodovima C_3 i C_8, a ostali su novi dimenzije 26 i 27. Označimo ih s $C_{26}, \ldots, C_{39}$. Koeficijenti težinskih polinoma $W_i(x) = \sum_{j=0}^{56} A_j x^j$ odgovarajućih kodova C_i za $i = 1, \ldots, 39$ prikazani su u sljedećoj tablici:

	dim	A_0	A_8	A_{12}	A_{16}	A_{20}	A_{24}	A_{28}
C_1	26	1	91	2 016	152 425	2 939 776	16 194 619	28 531 008
C_2	26	1	7	2 016	155 365	2 926 336	16 224 019	28 493 376
C_3	24	1	75	0	40 089	730 368	4 055 835	7 124 480
$C_{4\text{-}6,9,10}$	22	1	15	0	9 933	183 168	1 012 515	1 783 040
$C_{7,11\text{-}13}$	25	1	75	672	77 721	1 465 984	8 103 963	14 257 600
C_8	25	1	75	960	75 417	1 474 048	8 087 835	14 277 760
C_{14}	22	1	15	0	10 701	178 560	1 024 035	1 767 680
C_{15}	23	1	15	288	19 917	361 216	2 040 867	3 544 000
C_{16}	23	1	15	96	19 917	365 056	2 028 579	3 561 280
C_{17}	24	1	75	160	39 833	728 704	4 062 235	7 115 200
C_{18}	22	1	15	64	9 677	183 424	1 012 771	1 782 400
$C_{19,21,24}$	22	1	15	16	10 061	182 080	1 015 459	1 779 040
$C_{20,22}$	22	1	15	64	10 445	178 816	1 024 291	1 767 040
C_{23}	25	1	75	1 280	74 905	1 470 720	8 100 635	14 259 200

	dim	A_0	A_8	A_{12}	A_{16}	A_{20}	A_{24}	A_{28}
C_{25}	25	1	75	992	77 209	1 462 656	8 116 763	14 239 040
C_{26}	27	1	139	4 992	307 161	5 848 832	32 477 083	56 941 312
C_{27}	27	1	99	4 304	305 873	5 872 320	32 406 731	57 039 072
$C_{28,29}$	27	1	99	4 112	307 409	5 866 944	32 417 483	57 025 632
C_{30}	26	1	147	1 008	158 529	2 920 512	16 231 467	28 485 536
$C_{31,32,34,35}$	27	1	147	3 696	309 057	5 862 976	32 423 979	57 018 016
$C_{33,39}$	27	1	147	4 976	307 009	5 849 664	32 475 179	56 943 776
C_{36}	26	1	75	2 240	153 241	2 931 200	16 218 395	28 498 560
$C_{37,38}$	27	1	75	4 416	305 817	5 871 616	32 408 859	57 036 160

Vidimo da neki neekvivalentni kodovi imaju iste koeficijente u težinskom polinomu te je ukupan broj različitih težinski polinoma 23.

Za konstrukciju dizajna potrebne su nam riječi težine 16 iz generiranih kodova. S obzirom da je njihov broj u kodovima $C_3 - C_{25}$ relativno mali u odnosu na druge, svakom tom kodu pridružimo odgovarajući graf Γ_{C_i}, pri čemu je $i = 3, \ldots, 25$. Vrhovi grafa Γ_{C_i} su orbite riječi težine 16 generirane pod djelovanjem raznih podgrupa grupe G_{48}. Kako bismo konstruirali dizajne potrebno je pronaći klike težine 77 u navedenim grafovima. Za podgrupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \leq G_{48}$ dobivamo 228 novih kvazisimetričnih dizajna kojima je puna grupa automorfizama reda 16.

Teorem 3.30. *Postoji barem* 228 *kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 6)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$ *kojima je* $(\mathbb{Z}_2)^4$ *puna grupa automorfizama.*

Koristeći `nauty` [72] zaključujemo:

Korolar 3.31. *Postoji barem* 1 410 *kvazisimetrična* 2-$(56, 16, 6)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 4$ *i* $y = 6$.

Distribucija svih poznatih kvazisimetričnih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna obzirom na red njihove pune grupa automorfizama nalazi se u tablici 3.4.

Tablica 3.4: Distribucija kvazisimetričnih $(56, 16, 6)$ dizajna obzirom na red pune grupe automorfizama

|Aut|	#
168	1
48	876
24	1
21	1
16	228
12	303

Prvi kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn konstruiran je kao rezidualni dizajn simetričnog $(78, 22, 6)$ dizajna [92]. Njemu pridruženi blokovni graf je jako regularan s parametrima $(77, 16, 0, 4)$. A. E. Brouwer je u [14] dokazao da je to do na izomorfizam i komplementiranje jedini jako regularni graf sa 77 vrhova. Jedinstvenost tog jako regularnog grafa implicira da se svaki kvazisimetrični 2-$(56, 16, 6)$ dizajn može uložiti u simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn. Prvi simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn konstruirali su Z. Janko i T. van Trung [48]. Nakon toga, V. D. Tonchev je konstruirao dva nova međusobno dualna simetrična dizajna [92], a potom je zajedno s A. Munemasom konstruirao još dva [73]. Dodatnih 412 simetričnih 2-$(78, 22, 6)$ dizajna s automorfizmom reda 6 konstruirali su D. Crnković, D. Dumičić Danilović i S. Rukavina [28]. No, kvazisimetrični dizajn kao rezidualni možemo dobiti samo od simetričnih 2-$(78, 22, 6)$ dizajna konstruiranih u [73, 92]. To znači da ćemo ulaganjem novokonstruiranih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna u simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn dobiti nove simetrične dizajne koji su neizomorfni već poznatima.

Neka je $\mathcal{D}_{78}$ simetrični 2-$(78, 22, 6)$ dizajn i neka je B_0 neki njegov blok. Tada njegov redizualni dizajn

$$\mathcal{D}_{56} = \mathrm{res}_{B_0}\mathcal{D}_{78} = (\mathcal{V} \setminus B_0, \{B \setminus B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\})$$

ima parametre 2-$(56, 16, 6)$, a njegov derivirani dizajn

$$\mathcal{D}_{22} = \mathrm{der}_{B_0}\mathcal{D}_{78} = (B_0, \{B \cap B_0 \mid B \in \mathcal{B}, B \neq B_0\})$$

ima parametre 2-$(22, 6, 5)$. V. D. Tonchev dokazao je da kvazisimetričan dizajn s tim parametrima i presječnim brojevima $x = 0$ i $y = 2$ jedinstven do na izomorfizam [91]. Njegova puna grupa automorfizama je Mathieuova grupa $\mathbb{M}_{22}$. Blokovni graf kvazisimetričnog 2-$(22, 6, 5)$ dizajna je jako regularan s parametrima $(77, 60, 47, 50)$ te je on komplement jako regularnog grafa $(77, 16, 0, 4)$. Iz toga slijedi da svaki 2-$(56, 16, 6)$ dizajn možemo proširiti do simetričnog 2-$(78, 22, 6)$ dizajna pomoću 2-$(22, 6, 5)$ dizajna. S obzirom da je jako regularni graf $(77, 16, 0, 4)$ jedinstven, postoji izomorfizam φ između blokovnog grafa 2-$(56, 16, 6)$ dizajna i komplementarng blokovnog grafa 2-$(22, 6, 5)$ dizajna. Točke dizajna $\mathcal{D}_{56}$ i $\mathcal{D}_{22}$ čine točke dizajna $\mathcal{D}_{78}$, a disjunktna unija svih odgovarajućih blokova $B \in \mathcal{D}_{56}$ i $B' \in \mathcal{D}_{22}$ takvih da je $\varphi(B') = B$, zajedno s blokom koji se sastoji od 22 točke 2-$(22, 6, 5)$ dizajna, čini blokove simetričnog dizajna $\mathcal{D}_{78}$.

Na taj način smo svih 1 408 novih 2-$(56, 16, 6)$ dizajna proširili do simetričnih 2-$(78, 22, 6)$ dizajna te time povećali njihov broj. Neki među njima su samodualni, dok smo od nekih simetričnih konstruirali nove simetrične dizajne koji su im dualni. Koristeći `nauty` [72] zaključujemo:

Teorem 3.32. *Postoji barem* 3 141 *simetričnih* $(78, 22, 6)$ *dizajna.*

Distribucija svih poznatih simetričnih 2-$(78, 22, 6)$ dizajna obzirom na red njihove pune grupa automorfizama nalazi se u tablici 3.5.

Tablica 3.5: Distribucija kvazisimetričnih $(78, 22, 6)$ dizajna obzirom na red pune grupe automorfizama

|Aut|	#
168	2
78	1
48	1664
24	378
21	2
16	456
12	606
6	32

3.4 Kvazisimetrični dizajni s projektivnim parametrima

Kvazisimetrični dizajni s projektivnim parametrima pripadaju onima s iznimnim parametrima o kojima smo više rekli u poglavlju 1.4. U tablici 1.3 se nalaze četiri takva kvazisimetrična dizajna:

(1) kvazisimetrični 2-$(31, 7, 7)$ dizajni s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 3$ imaju parametre kao $PG_2(4, 2)$ - poznato je da postoji točno pet takvih kvazisimetričnih dizajna [90],

(2) kvazisimetrični 2-$(63, 15, 35)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 3$ i $y = 7$ ima parametre kao $PG_3(5, 2)$ - poznat je samo jedan dizajn,

(3) kvazisimetrični 2-$(121, 13, 13)$ dizajni s presječnim brojevima $x = 1$ i $y = 4$ imaju parametre kao $PG_2(4, 3)$ - poznata su samo dva dizajna [51],

(4) kvazisimetrični 2-$(127, 31, 155)$ dizajn s presječnim brojevima $x = 7$ i $y = 15$ ima parametre kao $PG_4(6, 2)$ - poznat je samo jedan dizajn.

Vidimo da je poznato vrlo malo kvazisimetričnih dizajna s projektivnim parametrima, dok općenito ukupan broj takvih dizajna raste eksponencijalno [52]. Koristeći metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna sa zadanom grupom automorfizama opisane u poglavljima 3.3.1 i 3.3.2 pokušat ćemo konstruirati nove kvazisimetrične dizajne s projektivnim parametrima za slučaj (2) i (3). Za grupe automorfizama biramo podgrupe punih grupa automorfizama poznatih kvazisimetričnih dizajna. To nam osigurava da ćemo

u svakom slučaju dobiti barem dizajn od čije smo pune grupe automorfizama krenuli, ali možemo dobiti i nove dizajne. Za generiranje (dobrih) orbita koristimo programe `makerep`, `replesize2` ili `forbrep`. Za konstrukciju dizajna iz dobivenih orbita koristimo programe `KMmat`, `cmat` i `mysolvemat`, ako dizajne konstruiramo pomoću Kramer-Mesnerove metode, ili `cliquesdes`, ako ih konstruiramo pomoću metode temeljene na traženju klika. Kramer-Mesnerovu metodu koristimo ako je broj dobrih orbita manji od 1 000, a u suprotnom koristimo metodu temeljenu na traženju klika. Dobiveni rezultati iskazani su sljedećim propozicijama:

Propozicija 3.33. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes A_5$ *grupa reda* 960 *generirana permutacijama*

$$\begin{aligned}\alpha =&(4,17)(5,16)(6,19)(7,18)(8,48)(9,49)(10,50)(11,51)(12,33)(13,32)(14,35)\\ &(15,34)(24,53)(25,52)(26,55)(27,54)(28,36)(29,37)(30,38)(31,39)(40,61)\\ &(41,60)(42,63)(43,62),\\ \beta =&(4,57,51,5,56,50)(6,59,49,7,58,48)(8,52,63)(9,53,62)(10,54,61)(11,55,60)\\ &(12,13)(14,15)(16,26,44,17,27,45)(18,24,46,19,25,47)(20,35,31)(21,34,30)\\ &(22,33,29)(23,32,28)(36,37)(38,39).\end{aligned}$$

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(63, 15, 35)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 3$ *i* $y = 7$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_3(5, 2)$.

Dokaz. Grupa G inducira 40 orbita na 2-članim podskupovima i 301 dobrih orbita veličine najviše $b = 651$ na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 63\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 40×301 ima 192 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan projektivnom dizajnu $PG_3(5, 2)$. □

Propozicija 3.34. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong S_6$ *grupa reda* 720 *generirana permutacijama*

$$\begin{aligned}\alpha =&(2,36)(3,37)(6,32)(7,33)(8,46)(9,47)(12,42)(13,43)(18,52)(19,53)(22,48)(23,49)\\ &(24,62)(25,63)(28,58)(29,59),\\ \beta =&(2,26,60,8,44)(3,27,61,9,45)(4,42,50,20,32)(5,43,51,21,33)(6,48,14,28,12)\\ &(7,49,15,29,13)(10,54,62,18,16)(11,55,63,19,17)(22,58,56,34,30)\\ &(23,59,57,35,31)(24,38,52,36,46)(25,39,53,37,47).\end{aligned}$$

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(63, 15, 35)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 3$ *i* $y = 7$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_3(5, 2)$.

Dokaz. Grupa G inducira 41 orbitu na 2-članim podskupovima i 281 dobrih orbita veličine najviše $b = 651$ na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 63\}$. Kramer-Mesnerov

sustav dimenzije 41×281 ima 96 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan projektivnom dizajnu $PG_3(5,2)$. □

Propozicija 3.35. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_7 \times S_3$ *grupa reda* 168 *generirana permutacijama*

$$\begin{aligned}
\alpha =&(3,63,13)(4,57,14)(6,25,31)(8,29,41)(9,36,33)(11,39,32)(12,45,27)(15,47,48)(16,\\
&35,20)(17,62,28)(19,61,60)(22,46,51)(24,44,30)(26,58,59)(37,54,43)(50,56,53),\\
\beta =&(3,13,35,16)(4,14,50,53)(6,31,46,22)(8,41,19,60)(9,48)(11,30,44,39)\\
&(12,27,28,62)(15,33,36,47)(17,45)(20,63)(24,32)(25,51)(26,59,37,43)\\
&(29,61)(54,58)(56,57),\\
\gamma =&(1,18,5,23,7,42,10)(2,21,34,38,55,40,52)(4,26,19,12,39,46,33)\\
&(6,47,50,37,8,28,30)(9,57,58,61,45,32,51)(11,22,36,14,59,60,27)\\
&(15,53,43,41,62,44,31)(17,24,25,48,56,54,29).
\end{aligned}$$

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(63,15,35)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 3$ *i* $y = 7$ *na kojem grupa* G *djeluje na blokovima u orbitama veličine najviše* 84 *i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_3(5,2)$.

Dokaz. Grupa G inducira 13 756 dobrih orbita veličine najviše 84 na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1,2,...,63\}$. Neka je Γ graf kompatibilnosti kojima su vrhovi dobre orbite. Broj bridova grafa Γ je 464 061, a njegova gustoća je približno 0.0049. Dobivamo ukupno 784 klika težine 651, odnosno struktura koje čine 651 kompatibilnih blokova. Od njih dobivamo jedan dizajn do na izomorfizam koji odgovara projektivnom dizajnu $PG_3(5,2)$. □

Propozicija 3.36. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong PSL(3,2)$ *grupa reda* 168 *generirana permutacijama*

$$\begin{aligned}
\alpha =&(1,4)(3,49)(5,19)(7,39)(9,15)(10,33)(12,23)(16,63)(18,26)(31,51)(32,44)\\
&(41,61)(42,46)(43,58)(45,62)(53,57),\\
\beta =&(3,13,63)(4,14,57)(6,31,25)(8,41,29)(9,33,36)(11,32,39)(12,27,45)\\
&(15,48,47)(16,20,35)(17,28,62)(19,60,61)(22,51,46)(24,30,44)(26,59,58)\\
&(37,43,54)(50,53,56).
\end{aligned}$$

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(63,15,35)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 3$ *i* $y = 7$ *na kojem grupa* G *djeluje na blokovima u orbitama veličine najviše* 32 *i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_3(5,2)$.

Dokaz. Grupa G inducira 17 585 dobrih orbita veličine najviše 42 na 15-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 63\}$. Neka je Γ graf kompatibilnosti kojima su vrhovi dobre orbite. Broj bridova grafa Γ je 24 317 643, a njegova gustoća je približno 0.1573. Dobivamo ukupno 1 209 600 klika težine 651, odnosno struktura koje čine 651 kompatibilnih blokova. Od njih dobivamo jedan dizajn do na izomorfizam koji odgovara projektivnom dizajnu $PG_3(5, 2)$. □

Propozicija 3.37. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong (((\mathbb{Z}_3)^4 \rtimes \mathbb{Q}_8) \rtimes \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_8$ *grupa reda* 8 748 *generirana permutacijama*

$\alpha =$(2, 23, 22, 85)(3, 24, 20, 83, 4, 25, 21, 84)(5, 87, 55, 41, 7, 88, 54, 42)(6, 86, 53, 43)(8, 51, 78, 31, 10, 52, 77, 30)(9, 50, 79, 29)(11, 96, 110, 117, 13, 97, 112, 116)(12, 95, 111, 118)(14, 119, 17, 47, 15, 120, 18, 48)(16, 121, 19, 49)(26, 36, 108, 82)(27, 35, 109, 80, 28, 37, 107, 81)(32, 64, 106, 44, 34, 62, 104, 45)(33, 63, 105, 46)(38, 73, 57, 114, 40, 71, 58, 113)(39, 72, 56, 115)(59, 68, 103, 67, 61, 70, 102, 65)(60, 69, 101, 66)(74, 94, 90, 100, 76, 93, 91, 99)(75, 92, 89, 98),

$\beta =$(14, 20, 17)(15, 21, 18)(16, 22, 19)(23, 29, 26)(24, 30, 27)(25, 31, 28)(32, 38, 35)(33, 39, 36)(34, 40, 37)(41, 47, 44)(42, 48, 45)(43, 49, 46)(50, 56, 53)(51, 57, 54)(52, 58, 55)(59, 65, 62)(60, 66, 63)(61, 67, 64)(68, 71, 74)(69, 72, 75)(70, 73, 76)(77, 80, 83)(78, 81, 84)(79, 82, 85)(86, 89, 92)(87, 90, 93)(88, 91, 94).

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-(121, 13, 13) *dizajn s presječnim brojevima* $x = 1$ *i* $y = 4$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_2(4, 3)$.

Dokaz. Grupa G inducira 27 orbita na 2-članim podskupovima i 100 dobrih orbita veličine najviše $b = 1210$ na 13-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 121\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 27×100 ima 32 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan projektivnom dizajnu $PG_2(4, 3)$. □

Propozicija 3.38. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong (((\mathbb{Z}_3)^3 \rtimes \mathbb{Z}_{13}) \rtimes \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$ *grupa reda* 2 106 *generirana permutacijama*

$\alpha =$(5, 37, 63, 9, 38, 59, 13, 33, 67)(6, 35, 62, 10, 39, 61, 11, 34, 66)(7, 36, 64, 8, 40, 60, 12, 32, 65)(14, 99, 55, 22, 103, 56, 18, 95, 51)(15, 98, 54, 20, 102, 58, 19, 97, 50)(16, 100, 53, 21, 101, 57, 17, 96, 52)(23, 79, 44)(24, 78, 45)(25, 77, 46)(26, 85, 47)(27, 84, 48)(28, 83, 49)(29, 82, 41)(30, 81, 42)(31, 80, 43)(68, 93, 109, 76, 88, 105, 72, 89, 110)(69, 92, 107, 74, 87, 106, 73, 91, 111)(70, 94, 108, 75, 86, 104, 71, 90, 112)(113, 121, 117)(114, 119, 118)(115, 120, 116),

β =(5, 26, 79, 6, 27, 77)(7, 28, 78)(8, 29, 82, 12, 24, 83)(9, 30, 80, 11, 23, 85)(10, 31, 81, 13, 25, 84)(14, 46, 89, 20, 43, 92)(15, 44, 91, 22, 42, 93)(16, 45, 90, 21, 41, 94)(17, 49, 86)(18, 47, 88, 19, 48, 87)(32, 115, 75, 40, 120, 71)(33, 113, 76, 39, 119, 73)(34, 114, 74, 38, 121, 72)(35, 118, 69, 37, 117, 68)(36, 116, 70)(50, 55)(51, 54)(52, 53)(56, 58)(59, 97, 105, 62, 103, 111)(60, 96, 104, 64, 101, 112)(61, 95, 106, 63, 102, 110)(65, 100, 108)(66, 99, 107, 67, 98, 109).

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(121, 13, 13)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 1$ *i* $y = 4$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_2(4, 3)$.

Dokaz. Grupa G inducira 32 orbite na 2-članim podskupovima i 303 dobrih orbita veličine najviše $b = 1210$ na 13-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 121\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 32×303 ima 24 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan projektivnom dizajnu $PG_2(4, 3)$. □

Propozicija 3.39. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong PSL(3, 3)$ *grupa reda* 5 616 *generirana permutacijama*

α =(5, 6)(8, 12)(9, 11)(10, 13)(14, 15)(17, 21)(18, 20)(19, 22)(23, 25)(26, 31)(27, 30)(28, 29)(33, 34)(35, 38)(36, 40)(37, 39)(41, 52)(42, 50)(43, 51)(44, 55)(45, 53)(46, 54)(47, 58)(48, 56)(49, 57)(68, 105)(69, 106)(70, 104)(71, 108)(72, 109)(73, 107)(74, 111)(75, 112)(76, 110)(77, 95)(78, 96)(79, 97)(80, 98)(81, 99)(82, 100)(83, 101)(84, 102)(85, 103)(86, 115)(87, 113)(88, 114)(89, 118)(90, 116)(91, 117)(92, 121)(93, 119)(94, 120),

β =(5, 119, 34)(6, 121, 33)(7, 120, 32)(8, 116, 40)(9, 118, 39)(10, 117, 38)(11, 113, 37)(12, 115, 36)(13, 114, 35)(14, 103, 76)(15, 102, 74)(16, 101, 75)(17, 100, 70)(18, 99, 68)(19, 98, 69)(20, 97, 73)(21, 96, 71)(22, 95, 72)(23, 111, 56)(24, 112, 57)(25, 110, 58)(26, 105, 50)(27, 106, 51)(28, 104, 52)(29, 108, 53)(30, 109, 54)(31, 107, 55)(59, 80, 88)(60, 82, 86)(61, 81, 87)(62, 77, 91)(63, 79, 89)(64, 78, 90)(65, 83, 94)(66, 85, 92)(67, 84, 93).

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-$(121, 13, 13)$ *dizajn s presječnim brojevima* $x = 1$ *i* $y = 4$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_2(4, 3)$.

Dokaz. Grupa G inducira 61 orbitu na 2-članim podskupovima i 94 dobrih orbita veličine najviše $b = 1210$ na 13-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 121\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 61×94 ima 192 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan projektivnom dizajnu $PG_2(4, 3)$. □

Propozicija 3.40. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong PSL(3,3)$ *grupa reda* 5 616 *generirana permutacijama*

$\alpha =$(2, 27)(3, 28)(4, 26)(5, 22)(6, 20)(7, 21)(8, 32)(9, 34)(10, 33)(11, 13)(14, 37)(15, 35)
(16, 36)(18, 19)(23, 25)(38, 39)(41, 101)(42, 87)(43, 55)(44, 59)(45, 108)(46, 76)(47, 80)
(49, 115)(50, 68)(51, 63)(52, 112)(53, 116)(54, 84)(57, 96)(58, 91)(60, 120)(61, 79)
(62, 92)(64, 100)(65, 104)(66, 72)(69, 99)(70, 94)(73, 106)(74, 119)(75, 78)(77, 107)
(81, 114)(83, 86)(85, 103)(88, 118)(89, 95)(93, 111)(98, 110)(102, 117)(109, 121),

$\beta =$(2, 9, 30)(3, 10, 31)(4, 8, 29)(5, 19, 28)(6, 17, 27)(7, 18, 26)(11, 33, 23)(12, 34, 24)(13, 32,
25)(14, 40, 20)(15, 39, 22)(16, 38, 21)(41, 89, 77)(42, 75, 99)(43, 79, 67)(44, 104, 116)
(45, 117, 57)(46, 103, 70)(48, 51, 87)(49, 64, 109)(50, 83, 107)(52, 73, 88)(53, 98, 65)
(54, 111, 78)(55, 115, 100)(56, 59, 68)(60, 81, 69)(61, 94, 118)(62, 119, 86)(63, 96, 108)
(72, 84, 120)(74, 113, 110)(76, 112, 91)(80, 92, 101)(85, 97, 121)(93, 105, 102).

Postoji točno jedan kvazisimetrični 2-(121, 13, 13) *dizajn s presječnim brojevima* $x = 1$ *i* $y = 4$ *kojem je* G *grupa automorfizama i on je izomorfan "polarity" dizajnu iz [51].*

Dokaz. Grupa G inducira 61 orbitu na 2-članim podskupovima i 132 dobrih orbita veličine najviše $b = 1210$ na 13-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 121\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 61×132 ima 192 rješenja, od kojih dobivamo jedan dizajn koji je izomorfan već poznatom *polarity* dizajnu. □

Propozicija 3.41. *Neka je* $G = \langle \alpha, \beta \rangle \cong (((\mathbb{Z}_3)^2 \rtimes \mathbb{Q}_8) \rtimes \mathbb{Z}_3) \times S_3$ *grupa reda* 1 296 *generirana permutacijama*

$\alpha =$(1, 35)(2, 33, 38, 34)(3, 4, 40, 39)(5, 28, 7, 18)(8, 20, 22, 10)(9, 23, 21, 24)(11, 13, 30, 29)
(12, 16, 31, 14)(17, 26, 27, 19)(36, 37)(41, 112, 52, 47, 74, 55, 85, 71, 98, 79, 109, 95)(42,
(42, 61, 96, 80, 75, 94, 48, 104, 99, 118, 72, 56)(43, 73, 86, 113, 76, 97, 119, 65, 100, 49, 62,
89)(44, 66, 58, 120, 68, 90, 82, 63, 101, 114, 106, 87)(45, 69, 102)(46, 108, 92, 78, 70, 51,
116, 111, 103, 84, 59, 54)(50, 77, 67, 88, 83, 110, 91, 121, 107, 53, 115, 64)(57, 81, 105)
(60, 93, 117),

$\beta =$(1, 37, 36)(2, 31, 9, 38, 12, 21)(3, 16, 22, 40, 14, 8)(4, 11, 23, 39, 30, 24)(5, 27, 26, 7, 17, 19)
(10, 33, 29, 20, 34, 13)(15, 25, 32)(18, 28)(41, 94, 109, 110, 58, 121)(42, 44, 50, 66, 104, 95)
(43, 105, 84, 76, 81, 108)(45, 120, 91, 60, 72, 55)(46, 73, 113, 70, 49, 65)(47, 99, 68, 107, 90,
80)(48, 79, 102, 63, 67, 93)(51, 100, 57)(52, 77, 82, 88, 74, 61)(53, 106, 64, 98, 118, 85)
(54, 92, 86)(56, 71, 75, 101, 83, 114)(59, 119, 111, 116, 62, 78)(69, 87, 115, 117, 96, 112)
(89, 103, 97).

Postoji točno dva kvazisimetrična 2-$(121, 13, 13)$ *dizajna s presječnim brojevima* $x = 1$ *i* $y = 4$ *kojima je* G *grupa automorfizama, pri čemu je jedan izomorfan projektivnom dizajnu* $PG_2(4, 3)$*, a drugi je izomorfan "polarity dizajnu" iz [51].*

Dokaz. Grupa G inducira 59 orbita na 2-članim podskupovima i 926 dobrih orbita veličine najviše $b = 1210$ na 13-članim podskupovima skupa $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 121\}$. Kramer-Mesnerov sustav dimenzije 59×926 ima 288 rješenja, od kojih dobivamo dva dizajna do na izomorfizam, jedan izomorfan projektivnom dizajnu $PG_2(4, 3)$, a drugi izomorfan *polarity* dizajnu. □

Iz prethodnih propozicija vidimo da izborom određenih podgrupa nismo dobili nove kvazisimetrične dizajne s projektivnim parametrima. Birali smo i neke druge podgrupe punih grupa automorfizama poznatih dizajna, ali u svim slučajevima u kojima je konstrukcija bila računalno izvediva nismo pronašli nove dizajne.

Zaključak

Pitanje egzistencije kvazisimetričnih dizajna i njihove konstrukcije je težak problem. Iako je poznato više metoda kojima su konstruirani kvazisimetrični dizajni s određenim parametrima i koje bi se mogle primijeniti i na druge parametre, broj iznimnih parametara za koje je egzistencija dizajna otvoreno pitanje je i dalje velik.

U disertaciji su razrađene metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna sa zadanom grupom automorfizama koje do sada nisu korištene u tom obliku, uključujući način generiranja orbita te način biranja odgovarajućih orbita kako bismo konstruirali dizajn. Pritom, originalni doprinos čine algoritam za generiranje kratkih orbita te prilagodba Kramer-Mesnerove metode za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna uz pomoć matrice kompatibilnosti. Prilagođene su i druge algoritamske metode za brzo generiranje dobrih orbita i konstrukciju dizajna traženjem klika u grafu kompatibilnosti i pomoću orbitnih matrica na slučaj konstrukcije kvazisimetričnih dizajna. Isto tako, doprinos čine i novi kvazisimetrični dizajni koji su konstruirani opisanim metodama. Znatno je povećan broj poznatih kvazisimetričnih dizajna s parametrima 2-$(28, 12, 11)$, $x = 4$, $y = 6$, zatim 2-$(36, 16, 12)$, $x = 6$, $y = 8$ te 2-$(56, 16, 6)$, $x = 4$, $y = 6$. Utvrđena je egzistencija kvazisimetričnog 2-$(56, 16, 18)$ dizajna s presječnim brojevima $x = 4$ i $y = 8$ koja ranije nije bila poznata.

Metode koje smo opisali u disertaciji otvaraju dodatne mogućnosti za konstrukciju kvazisimetričnih dizajna s nekim drugim parametrima. Očekujemo da se njihovom primjenom mogu konstruirati i drugi kvazisimetrični dizajni, pri čemu su osobito zanimljivi oni čija egzistencija još uvijek nije poznata. Bilo bi također zanimljivo konstruirati i dizajne čije smo parametre dodatno uključili u tablicu iznimnih parametara, no pretpostavljamo da je zbog velikih parametara potrebno dodatno prilagoditi opisane metode kako bi konstrukcija bila računalno izvediva.

Dodatak A

Tablica iznimnih parametara kvazisimetričnih 2-dizajna - wxMaxima

```
/* KORAK 1: Generiramo trojke parametara (v,k,λ) koje zadovoljavaju nužne u-
vjete za egzistenciju kvazisimetričnih 2-dizajna koji proizlaze iz leme 1.39,
korolara 1.31 i 1.3 te teorema 1.8. */

tab1: makelist() ;
for v: 1 thru 150 do
   for k: 3 thru (v/2) do
     for λ: 1 thru binomial(k,2) do
        (b:λ*v*(v-1)/(k*(k-1)),
         r:λ*(v-1)/(k-1),
         if ((b>v) and integerp(b) and integerp(r)) then
             tab1: append(tab1,[[v,k,λ]])
        );
print("Broj parametara:",length(tab1));

/* Odbacujemo parametre simetričnih dizajna za koje je v=b. */

bb(par):=par[3]*par[1]*(par[1]-1)/(par[2]*(par[2]-1))$
sym(par):=par[1]≠bb(par)$
tab2: sublist(tab1,sym);
print("Broj parametara:",length(tab2));

/* KORAK 2: Odbacujemo trojke parametara (v,k,λ) kod kojih se dostiže ocjena
iz teorema 1.33, a različiti su od parametara 2-(23,7,21). */

ggb(par):=bb(par)≠binomial(par[1],2)$
```

```
tab3:sort(append(sublist(tab2,ggb),[[23,7,21 ]]));
print("Broj parametara:",length(tab3));

/* KORAK 3: Generiramo dopustive parove presječnih brojeva (x,y) koji zado-
voljavaju nužne uvjete iz propozicija 1.40 i 1.41 te korolara 1.49, i doda-
jemo ih na trojke parametara (v,k,λ). */

rr(par):=par[3]*(par[1]-1)/(par[2]-1)$
xy(par):=block([v:par[1],k:par[2],λ:par[3],b:bb(par),r:rr(par),x:0,y:0,lpb:[]],
   for x: 0 thru k*(r-1)/(b-1) do
      (if k*(r-1)+x*(1-b)≠0 then
        (y:(k*(k-1)*(λ-1)-k*(r-1)*(x-1))/(k*(r-1)+x*(1-b)),
         if integerp(y) then
          lpb:append(lpb,makelist([v,k,λ,x,y]))
         )
       ),
     lpb)$
tab4:full_listify(apply(union,map(setify,map(xy,tab3))))$

uvjet_1(par):=(par[2]-par[4])/(par[5]-par[4])$
uvjet_2(par):=(rr(par)-par[3])/(par[5]-par[4])$
djeljivost(par):=integerp(uvjet_1(par)) and integerp(uvjet_2(par))$
tab5: sublist(tab4,djeljivost);
print("Broj parametara:",length(tab5));

/* KORAK 4: Odbacujemo petorke parametara (v,k,λ,x,y) koje ne zadovoljavaju
uvjete iz teorema 1.42. */

A(par):=(par[1]-1)*(par[1]-2)$
B(par):=rr(par)*(par[2]-1)*(par[2]-2)$
C(par):=rr(par)*D(par)*(par[5]-1)*(par[5]-2)+rr(par)*(rr(par)-1-D(par))*
        (par[4]-1)*(par[4]-2)$
D(par):=((par[2]-1)*(par[3]-1)-(rr(par)-1)*(par[4]-1))/(par[5]-par[4])$
nej(par):=B(par)*(B(par)-A(par))<=A(par)*C(par)$
tab6: sublist(tab5,nej);
print("Broj parametara:",length(tab6));

/* KORAK 5: Odbacujemo petorke parametara (v,k,λ,x,y) koje pripadaju klasama
kvazisimetričnih 2-dizajna opisanim u poglavlju 1.4. */
```

```
nvsim(par):=par[5]<par[2]$
njr(par):=par[4]≠par[2]−rr(par)+par[3]$
nS(par):=par[3]≠1$
nrd(par):=par[3]≠2$
klase(par):=nvsim(par)and njr(par)and nS(par)and nrd(par)$
tab_dp: sublist(tab6,klase);
print("Broj parametara:",length(tab_dp));

/* KORAK 6: Generiramo parametre pridruženih blokovnih grafova SRG(b,a,c,d)
koristeći teorem 1.47 za sve petorke iznimnih parametara (v,k,λ,x,y). */

theta_0(par):=(par[2]*(rr(par)−1)−par[4]*(bb(par)−1))/(par[5]−par[4])$
theta_1(par):=(rr(par)−par[3]−par[2]+par[4])/(par[5]−par[4])$
theta_2(par):=−(par[2]−par[4])/(par[5]−par[4])$
a(par):=theta_0(par)$
c(par):=theta_0(par)+theta_1(par)+theta_2(par)+theta_1(par)*theta_2(par)$
d(par):=theta_0(par)+theta_1(par)*theta_2(par)$

srg(par):=block([v:par[1],k:par[2],λ:par[3],x:par[4],y:par[5],b:bb(par),
          r:rr(par),a:a(par),c:c(par),d:d(par),tab_srg:[]],
          tab_srg:=append(tab_srg,makelist([v,k,λ,x,y,r,b,a,c,d])),
          tab_srg)$
tab_dp_srg:full_listify(apply(union,map(setify,map(srg,tab_dp))))$
print("Broj parametara:",length(tab_dp_srg));
```

Dodatak B

Grupa $AGL(1, p^n)$, $n \in \mathbb{N}$

Permutacijske reprezentacije grupa $AGL(1, p^n)$, $n \in \mathbb{N}$ kojima su generirani bazni blokovi dizajna iz tablice 2.1:

$\boxed{AGL(1, 7^2)}$

$G = \langle (1,2,4,3,6,7,5)(8,12,41,39,9,17,35)(10,47,44,43,32,28,34)(11,22,23,26,31,13,49)(14,38,30,18,20,33,29)(15,24,46,19,42,16,48)(21,40,25,45,36,27,37), (2,8,9,10,11,12,13,14,3,15,16,17,18,19,20,21,4,22,23,24,25,26,27,28,5,29,30,31,32,33,34,35,6,36,37,38,39,40,41,42,7,43,44,45,46,47,48,49) \rangle$

$\boxed{AGL(1, 2^6)}$

$G = \langle (1,2)(3,4)(5,7)(6,10)(8,9)(11,58)(12,52)(13,22)(14,41)(15,36)(16,33)(17,18)(19,62)(20,30)(21,55)(23,25)(24,40)(26,44)(27,51)(28,59)(29,49)(31,46)(32,60)(34,38)(35,48)(37,61)(39,43)(42,47)(45,54)(50,63)(53,56)(57,64), (2,11,12,13,14,15,16,17,18,5,19,20,21,22,23,24,25,26,6,27,28,3,29,30,31,32,33,7,34,35,36,37,38,39,40,41,8,42,43,44,45,46,4,47,48,9,49,50,51,52,53,54,55,56,10,57,58,59,60,61,62,63,64) \rangle$

$\boxed{AGL(1, 3^4)}$

$G = \langle (1,2,3)(4,5,9)(6,8,7)(10,35,79)(11,62,32)(12,13,73)(14,19,63)(15,22,77)(16,65,31)(17,36,76)(18,20,57)(21,56,54)(23,39,25)(24,44,30)(26,47,68)(27,55,50)(28,33,74)(29,52,67)(34,42,81)(37,49,48)(38,69,64)(40,72,53)(41,58,51)(43,71,46)(45,78,70)(59,61,75)(60,66,80), (2,10,11,12,13,14,15,16,17,18,4,19,20,21,22,23,24,25,26,27,5,28,29,30,31,32,33,34,35,36,6,37,38,39,40,41,42,43,44,45,$

$3, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 7, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 8, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 9, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81)\rangle$

$\boxed{AGL(1, 11^2)}$

$G = \langle (1, 2, 3, 10, 4, 6, 11, 9, 5, 8, 7)(12, 36, 65, 85, 103, 101, 119, 77, 71, 72, 62)(13, 93, 34, 107, 31, 94, 58, 15, 99, 84, 87)(14, 79, 50, 43, 97, 40, 63, 55, 100, 81, 49)(16, 22, 64, 46, 48, 30, 120, 91, 67, 117, 17)(18, 59, 28, 41, 27, 21, 33, 102, 75, 78, 57)(19, 80, 106, 115, 53, 37, 109, 56, 116, 121, 35)(20, 47, 88, 76, 82, 96, 83, 114, 73, 112, 23)(24, 69, 104, 26, 45, 110, 118, 95, 42, 98, 105)(25, 74, 90, 66, 61, 111, 54, 92, 108, 60, 51)(29, 44, 70, 113, 39, 86, 52, 89, 38, 68, 32), (2, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 3, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 4, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 5, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 6, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 7, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 8, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 9, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 10, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 11, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121)\rangle$

$\boxed{AGL(1, 5^3)}$

$G = \langle (1, 2, 3, 5, 4)(6, 98, 79, 121, 105)(7, 74, 60, 35, 78)(8, 15, 109, 36, 31)(9, 89, 81, 26, 27)(10, 110, 13, 101, 24)(11, 20, 54, 43, 40)(12, 64, 76, 88, 123)(14, 67, 18, 95, 120)(16, 124, 72, 63, 28)(17, 92, 22, 53, 55)(19, 38, 66, 45, 61)(21, 29, 69, 87, 86)(23, 107, 112, 25, 62)(30, 48, 44, 125, 97)(32, 77, 115, 113, 82)(33, 106, 42, 118, 94)(34, 58, 102, 46, 93)(37, 65, 104, 108, 90)(39, 56, 119, 57, 111)(41, 73, 50, 70, 84)(47, 83, 122, 85, 52)(49, 75, 68, 91, 96)(51, 117, 59, 116, 99)(71, 100, 103, 114, 80), (2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 3, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 4, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 5, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125)\rangle$

Bibliografija

[1] ASSMUS Jr., E. F. i J. D. KEY: *Designs and their codes*, svezak 103 iz *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2] AZARIJA, J. i T. MARC: *There is no* $(95, 40, 12, 20)$ *strongly regular graph*. arXiv:1603.02032v2, 2016. `https://arxiv.org/pdf/1603.02032v2.pdf`.

[3] BAART, R. i dr.: *GUAVA –a GAP package for computing with error-correcting codese, Verzija 3.12*. 2012. `https://www.gap-system.org/Packages/guava.html`.

[4] BAARTMANS, A. i M. S. SHRIKHANDE: *Designs with no three mutually disjoint blocks*. Discrete Math., 40(2-3):129–139, 1982.

[5] BLOKHUIS, A. i W. H. HAEMERS: *An infinite family of quasi-symmetric designs*. J. Statist. Plann. Inference, 95(1-2):117–119, 2001.

[6] BOSE, R. C.: *On the construction of balanced incomplete block designs*. Ann. Eugenics, 9:353–399, 1939.

[7] BOSE, R. C.: *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*. Pacific J. Math., 13:389–419, 1963.

[8] BOSMA, W., J. CANNON i C. PLAYOUST: *The Magma algebra system. I. The user language*. J. Symbolic Comput., 24(3-4):235–265, 1997.

[9] BOUYUKLIEV, I., S. BOUYUKLIEVA i S. DODUNEKOV: *On binary self-complementary [120, 9, 56] codes having an automorphism of order 3 and associated SDP designs*. Probl. Inf. Transm., 43(2):89–96, 2007.

[10] BOUYUKLIEVA, S. i M. HARADA: *Extremal self-dual [50, 25, 10] codes with automorphisms of order 3 and quasi-symmetric 2-(49, 9, 6) designs*. Des. Codes Cryptography, 28(2):163–169, 2003.

[11] BRACKEN, C., G. MCGUIRE i H. WARD: *New quasi-symmetric designs constructed using mutually orthogonal Latin squares and Hadamard matrices*. Des. Codes Cryptogr., 41(2):195–198, 2006.

[12] BREMNER, A.: *A Diophantine equation arising from tight* 4*-designs.* Osaka J. Math., 16(2):353–356, 1979.

[13] BROUWER, A. E.: *Parameters of strongly regular graphs.* `https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html`.

[14] BROUWER, A. E.: *The uniqueness of the strongly regular graph on* 77 *points.* J. Graph Theory, 7(4):455–461, 1983.

[15] BROUWER, A. E.: *Uniqueness and nonexistence of some graphs related to* M_{22}. Graphs Combin., 2(1):21–29, 1986.

[16] BROUWER, A. E. i A. R. CALDERBANK: *An Erdős-Ko-Rado theorem for regular intersecting families of octads.* Graphs Combin., 2(4):309–316, 1986.

[17] CALDERBANK, A. R.: *The application of invariant theory to the existence of quasisymmetric designs.* J. Combin. Theory Ser. A, 44(1):94–109, 1987.

[18] CALDERBANK, A. R.: *Geometric invariants for quasisymmetric designs.* J. Combin. Theory Ser. A, 47(1):101–110, 1988.

[19] CALDERBANK, A. R.: *Inequalities for quasisymmetric designs.* J. Combin. Theory Ser. A, 48(1):53–64, 1988.

[20] CALDERBANK, A. R. i P. FRANKL: *Binary codes and quasisymmetric designs.* Discrete Math., 83(2-3):201–204, 1990.

[21] CALDERBANK, A. R. i P. MORTON: *Quasi-symmetric* 3*-designs and elliptic curves.* SIAM J. Discrete Math., 3(2):178–196, 1990.

[22] CAMERON, P. J.: *Extending symmetric designs.* J. Combinatorial Theory Ser. A, 14:215–220, 1973.

[23] CAMERON, P. J.: *Near-regularity conditions for designs.* Geometriae Dedicata, 2:213–223, 1973.

[24] CAMERON, P.J.: *Permutation groups*, svezak 45 iz *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[25] CAMERON, P.J. i J. H. VAN LINT: *Designs, graphs, codes and their links*, svezak 22 iz *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[26] COLBOURN, C. J. i J. H. DINITZ (urednici): *Handbook of combinatorial designs.* Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2. izdanje, 2007.

[27] COSTER, M. J. i W. H. HAEMERS: *Quasi-symmetric designs related to the triangular graph.* Des. Codes Cryptography, 5(1):27–42, 1995.

[28] CRNKOVIĆ, D., D. DANILOVIĆ DUMIČIĆ i S. RUKAVINA: *On symmetric* $(78, 22, 6)$ *designs and related self-orthogonal codes.* Util. Math., 109:227–253, 2018.

[29] CRNKOVIĆ, D., B. G. RODRIGUES, S. RUKAVINA i V. D. TONCHEV: *Quasi-symmetric 2-*$(64, 24, 46)$ *designs derived from* $AG(3, 4)$. Discrete Math., 340(10):2472–2478, 2017.

[30] DING, Y., S. HOUGHTEN, C. LAM, S. SMITH, L. THIEL i V. D. TONCHEV: *Quasi-symmetric* 2-$(28, 12, 11)$ *designs with an automorphism of order* 7. J. Combin. Des., 6(3):213–223, 1998.

[31] DIXON, J. D. i B. MORTIMER: *Permutation groups*, svezak 163 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[32] ENOMOTO, H., N. ITO i R. NODA: *Tight* 4*-designs.* Osaka J. Math., 16(1):39–43, 1979.

[33] FARADŽEV, I. A.: *Constructive enumeration of combinatorial objects.* U *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, svezak 260 iz *Colloq. Internat. CNRS*, stranice 131–135. CNRS, Paris, 1978.

[34] FISHER, R. A.: *The design of experiments.* Edinburgh: Oliver & Boyd, 1935.

[35] FISHER, R. A.: *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks.* Ann. Eugenics, 10:52–75, 1940.

[36] FISHER, R. A. i F. YATES: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1938.

[37] *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Verzija 4.8.10*, 2018. `https://www.gap-system.org`.

[38] GOETHALS, J. M. i J. J. SEIDEL: *Strongly regular graphs derived from combinatorial designs.* Canad. J. Math., 22:597–614, 1970.

[39] GULLIVER, T. A. i M. HARADA: *Codes of lengths 120 and 136 meeting the Grey-Rankin bound and quasi-symmetric designs.* IEEE Trans. Inf. Theory, 45(2):703–706, 1999.

[40] HAEMERS, W. H.: *There exists no* $(76, 21, 2, 7)$ *strongly regular graph.* Finite Geometry and Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Note Ser, 191:175–176, 1993.

[41] HARADA, M., A. MUNEMASA i V. D. TONCHEV: *A characterization of designs related to an extremal doubly-even self-dual code of length 48.* Ann. Comb., 9(2):189–198, 2005.

[42] HARADA, M., A. MUNEMASA i V. D. TONCHEV: *Self-dual codes and the nonexistence of a quasi-symmetric 2-*$(37, 9, 8)$ *design with intersection numbers 1 and 3.* J. Combin. Des., 25(10):469–476, 2017.

[43] HUGHES, D. R. i F. C. PIPER: *On resolutions and Bose's theorem.* Geometriae Dedicata, 5(1):129–133, 1976.

[44] IONIN, Y. J. i M. S. SHRIKHANDE: *Combinatorics of symmetric designs*, svezak 5 iz *New Mathematical Monographs.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[45] ITO, N.: *On tight* 4*-designs.* Osaka J. Math., 12(2):493–522, 1975.

[46] ITO, N.: *Corrections and supplements to: "On tight* 4*-designs" (Osaka J. Math.* **12** *(1975), 493–522).* Osaka J. Math., 15(3):693–697, 1978.

[47] JANKO, Z.: *Coset enumeration in groups and constructions of symmetric designs.* U *Combinatorics '90 (Gaeta, 1990)*, svezak 52 iz *Ann. Discrete Math.*, stranice 275–277. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[48] JANKO, Z. i T. VAN TRUNG: *Construction of a new symmetric block design for* $(78, 22, 6)$ *with the help of tactical decompositions.* J. Combin. Theory Ser. A, 40(2):451–455, 1985, ISSN 0097-3165. `https://doi.org/10.1016/0097-3165(85)90107-4`.

[49] JONES, G. A.: *Permutation groups.* Belianum, Vydavatel'stvo Univerzity Mateja Bela, Banská Bystrica, 2015. Theory and applications, Lecture notes from the Summer School on Coherent Configurations, Permutation Groups and Applications in Algebraic Graph Theory held in Nový Smokovec, September 2014.

[50] JUNGNICKEL, D. i V D. TONCHEV: *On symmetric and quasi-symmetric designs with the symmetric difference property and their codes.* J. Combin. Theory Ser. A, 59(1):40–50, 1992.

[51] JUNGNICKEL, D. i V D. TONCHEV: *Polarities, quasi-symmetric designs, and Hamada's conjecture.* Des. Codes Cryptogr., 51(2):131–140, 2009.

[52] JUNGNICKEL, D. i V D. TONCHEV: *The number of designs with geometric parameters grows exponentially.* Des. Codes Cryptogr., 55(2-3):131–140, 2010.

[53] KANTOR, W. M.: *Symplectic groups, symmetric designs, and line ovals.* J. Algebra, 33:43–58, 1975.

[54] KASKI, P. i P. R. J. ÖSTERGÅRD: *Classification algorithms for codes and designs*, svezak 15 iz *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[55] KASKI, P. i P. R. J. ÖSTERGÅRD: *There are exactly five biplanes with* $k = 11$. J. Combin. Des., 16(2):117–127, 2008.

[56] KRAMER, E. S.: *Some* t*-designs for* $t \geq 4$ *and* $v = 17, 18$. Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1975.

[57] KRAMER, E. S. i D. M. MESNER: *t-designs on hypergraphs*. Discrete Math., 15(3):263–296, 1976.

[58] KRČADINAC, V.: *Constructing block designs by tabu search*. `https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/results/tabubibd.html`.

[59] KRČADINAC, V.: *Konstrukcija i klasifikacija konačnih struktura pomoću računala*. Doktorska disertacija, 2004.

[60] KRČADINAC, V.: *Kvazisimetrični dizajni*. PMF-Matematički odsjek, 2017. `https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/kvazisim.pdf`.

[61] KRČADINAC, V.: *Steiner 2-designs* $S(2, 4, 28)$ *with nontrivial automorphisms*. Glas. Mat. Ser. III, 37(57)(2):259–268.

[62] KRČADINAC, V.: *Steinerovi* 2*-dizajni* $S(2, 2k^2 - 2k + 1)$. Magistarski rad, 1999.

[63] KRČADINAC, V., A. NAKIĆ i M. O. PAVČEVIĆ: *The Kramer-Mesner method with tactical decompositions: some new unitals on 65 points*. J. Combin. Des., 19(4):290–303, 2011.

[64] KRČADINAC, V. i R. VLAHOVIĆ: *New quasi-symmetric designs by the Kramer-Mesner method*. Discrete Math., 339(12):2884–2890, 2016.

[65] KRČADINAC, V. i J. ŠIFTAR: *Konačne geometrije*. PMF-Matematički odsjek, 2013., `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf`.

[66] LAM, C., L. THIEL i V. D. TONCHEV: *On quasi-symmetric* 2*-*$(28, 12, 11)$ *and* 2*-*$(36, 16, 12)$ *designs*. Des. Codes Cryptogr., 5(1):43–55, 1995.

[67] LAM, C. W. H., L. THIEL i S. SWIERCZ: *The nonexistence of finite projective planes of order* 10. Canad. J. Math., 41(6):1117–1123, 1989.

[68] LANG, S.: *Algebra*, svezak 211 iz *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3. izdanje, 2002.

[69] MATHON, R. i A. ROSA: 2-(v, k, λ) *Designs of Small Order*. U Colbourn, Charles J. i Jeffrey H. Dinitz (urednici): *Handbook of combinatorial designs*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), stranice 578–582. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2. izdanje, 2007.

[70] MCDONOUGH, T. P., V. C. MAVRON i H. N. WARD: *Amalgams of designs and nets*. Bull. Lond. Math. Soc., 41(5):841–852, 2009.

[71] MCKAY, B. D.: *Isomorph-free exhaustive generation*. J. Algorithms, 26(2):306–324, 1998, ISSN 0196-6774. https://doi.org/10.1006/jagm.1997.0898.

[72] MCKAY, B. D. i A. PIPERNO: *Practical graph isomorphism, II*. J. Symbolic Comput., 60:94–112, 2014.

[73] MUNEMASA, A. i V. D. TONCHEV: *A new quasi-symmetric 2-(56,16,6) design obtained from codes*. Discrete Math., 284(1-3):231–234, 2004.

[74] NEUMAIER, A.: *Regular sets and quasisymmetric* 2*-designs*. U *Combinatorial theory (Schloss Rauischholzhausen, 1982)*, svezak 969 iz *Lecture Notes in Math.*, stranice 258–275. Springer, Berlin-New York, 1982.

[75] NISKANEN, S. i P. R. J. ÖSTERGÅRD: *Cliquer User's Guide, Verzija 1.0*. Communications Laboratory, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland, Tech. Rep. T48, 2003.

[76] ÖSTERGÅRD, P. R. J.: *A fast algorithm for the maximum clique problem*. Discrete Appl. Math., 120(1-3):197–207, 2002. Sixth Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999).

[77] PARKER, C., E. SPENCE i V. D. TONCHEV: *Designs with the symmetric difference property on* 64 *points and their groups*. J. Combin. Theory Ser. A, 67(1):23–43, 1994.

[78] PASSMAN, D. S.: *Permutation groups*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2012. Revised reprint of the 1968 original.

[79] PAWALE, R. M. i S. S. SANE: *A short proof of a conjecture on quasi-symmetric 3-designs*. Discrete Math., 96(1):71–74, 1991.

[80] RAY-CHAUDHURI, D. K. i R. M. WILSON: *On t-designs*. Osaka J. Math., 12(3):737–744, 1975.

[81] READ, R. C.: *Every one a winner or how to avoid isomorphism search when cataloguing combinatorial configurations*. Ann. Discrete Math., 2:107–120, 1978.

[82] SANE, S. S.: *On extendable planes of order ten.* J. Combin. Theory Ser. A, 38(1):91–93, 1985.

[83] SANE, S. S. i S. S. SHRIKHANDE: *Quasisymmetric* $2, 3, 4$*-designs.* Combinatorica, 7(3):291–301, 1987.

[84] SHRIKHANDE, M. S. i S. S. SANE: *Quasi-symmetric designs*, svezak 164 iz *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[85] SHRIKHANDE, S. S.: *Quasi-symmetric designs.* U Colbourn, Charles J. i Jeffrey H. Dinitz (urednici): *Handbook of combinatorial designs*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), stranice 578–582. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2. izdanje, 2007.

[86] SHRIKHANDE, S. S. i BHAGWANDAS: *Duals of incomplete block designs.* J. Indian Statist. Assoc., 3:30–37, 1965.

[87] STINSON, D. R.: *Combinatorial designs.* Springer-Verlag, New York, 2004. Constructions and analysis, With a foreword by Charles J. Colbourn.

[88] TEIRLINCK, L.: *Nontrivial* t*-designs without repeated blocks exist for all* t*.* Discrete Math., 65(3):301–311, 1987.

[89] TEIRLINCK, L.: *Large sets of disjoint designs and related structures.* U *Contemporary design theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., stranice 561–592. Wiley, New York, 1992.

[90] TONCHEV, V. D.: *Quasisymmetric* 2*-*$(31, 7, 7)$ *designs and a revision of Hamada's conjecture.* J. Combin. Theory Ser. A, 42(1):104–110, 1986.

[91] TONCHEV, V. D.: *Quasisymmetric designs and self-dual codes.* European J. Combin., 7(1):67–73, 1986.

[92] TONCHEV, V. D.: *Embedding of the Witt-Mathieu system* $S(3, 6, 22)$ *in a symmetric* 2*-*$(78, 22, 6)$ *design.* Geom. Dedicata, 22(1):49–75, 1987.

[93] TONCHEV, V. D.: *Self-orthogonal designs.* U *Finite geometries and combinatorial designs (Lincoln, NE, 1987)*, svezak 111 iz *Contemp. Math.*, stranice 219–235. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[94] WILSON, R. M.: *The necessary conditions for* t*-designs are sufficient for something.* Utilitas Math., 4:207–215, 1973.

[95] WILSON, R. M.: *An existence theory for pairwise balanced designs. III. Proof of the existence conjectures*. J. Combinatorial Theory Ser. A, 18:71–79, 1975.

[96] WITT, E.: *Uber Steinersche Systeme*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2012. Revised reprint of the 1968 original.

[97] *WxMAXIMA, Verzija 16.04.2*, 2018.
`http://wxmaxima.soft112.com`.

Životopis

Renata Vlahović Kruc rođena je 14. svibnja 1990. u Koprivnici. Osnovnu školu završila je u Pitomači, a prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Virovitici. Godine 2009. upisuje preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, a 2012. istoimeni diplomski sveučilišni studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomirala je 2014. godine s temom *Matematičko modeliranje u biologiji* pod mentorstvom prof. dr. sc. Željke Milin Šipuš i doc. dr. sc. Pavla Goldsteina. Doktorski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu upisuje 2015. godine.

Tijekom preddiplomskog i diplomskog studija bila je demonstratorica iz kolegija Analitička geometrija, Linearna algebra 1, Linearna algebra 2 i Euklidski prostori, a 2012. godine primila je Pohvalnicu Fakultetskog vijeća Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za izniman uspjeh na studiju te Priznanje Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh na studiju u akademskoj godini 2011./2012.

Od 2014.–2015. bila je zaposlena u Gimnaziji Petra Preradovića Virovitica kao profesorica matematike. Od 2015.–2017. je zaposlena kao stručni suradnik, a od 2017. kao asistent na projektu *Kodovi i s njima povezane kombinatoričke strukture* financiranom od Hrvatske zaklade za znanost (IP1637), na Zavodu za geometriju Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Na Matematičkom odsjeku držala je vježbe iz kolegija Metodika nastave matematike 1 - 4, Računarski praktikum 1 te Osnove algoritama.

Od 2015. godine aktivno sudjeluje na *Seminaru za geometriju* i *Seminaru za konačne geometrije i grupe*. Članica je *Hrvatskog matematičkog društva*. Sudjelovala je na 9 znanstvenih skupova i jednom stručnom skupu te održala šest znanstvenih i jedno stručno izlaganje.

Koautorica je jednog znanstvenog članka:

- V. Krčadinac, R. Vlahović, *New quasi-symmetric designs by the Kramer-Mesner method*, Discrete Mathematics 339 (2016), 2884-2890.
- V. Krčadinac, R. Vlahović Kruc, *Quasi-symmetric designs on 56 points*, u postupku recenzije.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Renata Vlahović Kruc, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted] ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom: *Neki rezultati o kvazisimetričnim dizajnima s iznimnim parametrima,* isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

Zagreb, srpanj 2019.

_____

Potpis