Nelinearna Fourierova analiza sa SU (1,1) vrijednostima

Rupčić, Jelena

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Rupčić

NELINEARNA FOURIEROVA ANALIZA SA SU(1,1) VRIJEDNOSTIMA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2017.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Jelena Rupčić

NELINEARNA FOURIEROVA ANALIZA SA SU(1,1) VRIJEDNOSTIMA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Jelena Rupčić

NONLINEAR SU(1,1)-VALUED FOURIER ANALYSIS

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Asst Professor Vjekoslav Kovač

Zagreb, 2017

Mentor:

doc. dr. sc. Vjekoslav Kovač
Matematički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu
Bijenička cesta 30
10000 Zagreb
e-mail: vjekovac@math.hr

Supervisor:

Asst Professor Vjekoslav Kovač
Department of Mathematics
Faculty of Science
University of Zagreb
Bijenička cesta 30
10000 Zagreb
e-mail: vjekovac@math.hr

ZAHVALA

Željela bih zahvaliti svom mentoru doc. dr. sc. Vjekoslavu Kovaču na velikoj pomoći, podršci i strpljenju koje mi je pružao tijekom stvaranja i pisanja ove disertacije. Uvijek je imao vremena za sva moja pitanja i nesebično davao savjete. Također, željela bih mu posebno zahvaliti što je ponovno u meni probudio entuzijazam prema matematici i želju za novim znanjima.

Ovim putem željela bih zahvaliti i prof. dr. sc. Hrvoju Šikiću, mentoru mog diplomskog rada, na mnogim znanjima i uvođenju u svijet harmonijske analize te preporuci za nastavak doktorata uz mentorstvo doc. dr. sc. Vjekoslava Kovača.

Na kraju, od srca zahvaljujem svojoj obitelji na podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom ovog putovanja.

SAŽETAK

Nelinearna Fourierova analiza teorija je Fourierovih redova i Fourierove transformacije napravljena u slučaju grupe $\mathrm{SU}(1,1)$, sačinjene od matrica reda 2 posebnog oblika, koji se smatra najjednostavnijim netrivijalnim slučajem. U prvom dijelu rada ispituje se konvergencija lakunarnog SU(1,1) trigonometrijskog produkta s kvadratno sumabilnim koeficijentima po odgovarajućoj metrici i g.s. U tu svrhu definira se metrika na grupi $\mathrm{SU}(1,1)$, a zatim se definira i varijanta L^p metrike na skupu izmjerivih funkcija na jednodimenzionalnom torusu s vrijednostima u $\mathrm{SU}(1,1)$, s obzirom na koju se proučava konvergencija.

Drugi dio ovog rada proučava nelinearni analogon Hausdorff-Youngove nejednakosti. U postojećim dokazima te nejednakosti konstanta ovisi o $1 < p < 2$. Ispituje se ponašanje konstante za funkcije koje imaju dovoljno malu L^1 normu. Korištenjem profinjenja linearne Hausdorff-Youngove nejednakosti i perturbativnim tehnikama pokazuje se da nelinearna Hausdorff-Youngova nejednakost za fiksirani $1 < p < 2$ ima manju gornju među od linearne.

Ključne riječi: lakunarni trigonometrijski red, Diracova transformacija raspršenja, nelinearna Fourierova transformacija, Hausdorff-Youngova nejednakost

SUMMARY

Nonlinear Fourier analysis studies the Fourier series and the Fourier transform defined in the case of the group $\mathrm{SU}(1,1)$, whose elements are particular matrices of the order two. In the first part of the thesis we begin with some basic definitions, results and L^p estimates from functional and Fourier analysis, which will be intensively used throughout the thesis. We also explain a motivation for our study, which comes from orthogonal polynomials. Then we define the lacunary $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometric product, as a nonlinear analogue of the lacunary trigonometric series, and study two types of convergence of the product. For that purpose we first define a metric ρ on the group $\mathrm{SU}(1,1)$ and then define a metric d_p, a variant of L^p metric, on the set of all measurable $\mathrm{SU}(1,1)$-valued functions on one-dimensional torus. We characterize convergence in the metric d_p of lacunary $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometric product with square summable coefficients, i.e. give a nonlinear variant of Zygmund's result on the convergence of lacunary trigonometric series in L^p. Then we obtain a result on convergence a.e. of lacunary $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometric product with square summable coefficients and its partial converse.

The second part of the thesis begins with a short survey of the linear Fourier transform, followed by the definition of the nonlinear Fourier transform. Its different properties and estimates are given, as well as a motivation coming from eigenproblem for the Dirac operator and AKNS-ZS systems. We are focused on the nonlinear Hausdorff-Young inequality. In the statement of that inequality there is a constant C_p and the existing literature does not clarify how it depends on $1 < p < 2$. We study the behavior of that constant in a particular case of functions whose L^1 norm is sufficiently small. Proof of the obtained result is divided into two parts, depending on the closeness of the function to the set of Gaussians. Using the sharpened linear Hausdorff-Young inequality and perturbative techniques we show that the nonlinear Hausdorff-Young inequality, for a fixed $1 < p < 2$, has a lower upper bound than the linear one. The result implies the nonlinear Hausdorff-Young inequality with an optimal constant $C_p = B_p$, where B_p is the Babenko-Beckner constant.

Keywords: lacunary trigonometric series, Dirac scattering transform, nonlinear Fourier transform, Hausdorff-Young inequality

Sadržaj

Poglavlje 1

UVOD

Početkom 19. stoljeća J.-B. J. Fourier je, proučavajući jednadžbu topline, uveo razvoj funkcije u trigonometrijski red. S današnjeg stajališta rezultati do kojih je došao bili su u početku vrlo neformalno i neprecizno napisani te su ih poslije mnogi matematičari (poput P. G. L. Dirichleta i G. F. B. Riemanna) precizno formulirali i dokazali. Međutim, na mnoga pitanja do odgovora se došlo mnogo poslije, a neka su čak i danas otvorena. Među važnijim rezultatima svakako je Carlesonov dokaz [4] iz 1966. godine o konvergenciji g.s. Fourierovog reda s kvadratno sumabilnim koeficijentima.

U 70-im godinama 20. stoljeća pojavila se ideja da bi transformacija raspršenja mogla za neke nelinearne probleme igrati istu ulogu kao i Fourierova transformacija za linearne diferencijalne jednadžbe pa se tijekom vremena za tu transfomaciju uvriježio naziv *nelinearna Fourierova transformacija*. Rješavanjem svojstvenog problema za Diracov operator dolazimo do najčešće proučavanog modela, koji se onda naziva i *Diracova transformacija raspršenja*. S obzirom na to da taj model uzima funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a vraća funkciju također definiranu na $\mathbb{R}$, a s vrijednostima u matričnoj grupi $\mathrm{SU}(1,1)$, jedan od naziva za taj model je i $\mathrm{SU}(1,1)$ *transformacija raspršenja*. U ovoj disertaciji proučavat će se isključivo taj model. On je dio šire teorije o AKNS-ZS sistemima [1], [30].

Neki od rezultata, kao što je nelinearni Placherelov identitet, dokazani su prije uvođenja te discipline. Dokaz tog rezultata nalazi se u radu [29] iz 1935. godine, i to je dokaz u diskretnom slučaju, dok se za neprekidni slučaj dokaz nalazi u radu [3] iz 1960. godine. Formulacije takvih rezultata u analogiji s Fourierovom analizom dali su T. Tao i C. Thiele u preglednom radu [27] te nadalje i u zajedničkim radovima s C. Muscaluom [17], [18], [19], [20], [21]. Njihov rad [17] iz 2003. godine velika je inspiracija za daljnje istraživanje u ovom području. Nekim slutnjama koje su iznijeli u tom radu bavi se i ovo istraživanje. U tom radu proučava se nelinearna Fourierova transformacija kao neprekidni analogon $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta, a iz klasične Fourierove teorije znamo da su diskretni i neprekidni slučaj umnogome povezani. Oni su dokazali da u određenim modelima konačnih karakteristika $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt s kvadratno sumabilnim koeficijentima konvergira g.s. Za općeniti $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt s kvadratno sumabilnim koeficijentima konvergencija g.s. otvoreni je problem koji se često naziva i nelinearni Carlesonov problem, zbog analogije s gore spomenutim Carlesonovim rezultatom.

Kod proučavanja konvergencije Fourierovih redova povijesno su prvo dobiveni odgovori o konvergenciji (u L^p i g.s.) lakunarnih trigonometrijskih redova, koji su jednostavniji za promatranje i imaju dodatna svojstva. Za te rezultate iz prve polovine prošloga stoljeća zaslužni su A. N. Kolmogorov [11] i A. Zygmund [31], [32]. Inspirirani time, prvi dio rada posvetili smo svojstvima i tipovima konvergencije lakunarnih $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskih produkata. Tehnikama koje smo razvili zasad možemo obuhvatiti samo produkte s dovoljno velikim koeficijentom lakunarnosti (poput $q \geq 2$), ali napomenimo da dosad u literaturi nisu postojali ovakvi rezultati.

M. Christ i A. Kiselev [6], [7] 2001. godine dokazali su važan rezultat koji se smatra nelinearnim analogonom Hausdorff-Youngove nejednakosti. Njihov rezultat uključuje konstantu C_p koja ovisi o $1 < p < 2$ i eksplodira kada p slijeva teži prema 2. Slučajevi te nejednakosti za $p = 1$ i $p = 2$ već su bili poznati, ali zbog nelinearnosti nije se mogla koristiti interpolacija kako bi se došlo do tog rezultata o međuvrijednostima. C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele [17] postavili su pitanje o uniformnoj ograničenosti konstanti po svim p. Jednu od potvrda te slutnje dao je i V. Kovač [13] 2012. godine, kada je dokazao uniformnu ograničenost konstanti u modelima konačnih karakteristika. Ponašanju te konstante za dovoljno male funkcije posvećen je drugi dio istraživanja. Posebno, zanimalo nas je ponašanje nelinearnog Hausdorff-Youngovog omjera za "male" funkcije i usporedba s odgovarajućim omjerom u linearnom slučaju.

U drugom poglavlju ove disertacije najprije je dan kratki pregled nekih osnovnih definicija iz funkcionalne i Fourierove analize, te ocjena za L^p prostore kojima se koristimo u dokazima kroz disertaciju. Zatim su definirani $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkti te je dan uvid u neke rezultate i dokaze povezane s njima, kao i poveznica s ortogonalnim polinomima [24], [25].

U trećem poglavlju promatramo konvergenciju lakunarnih $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskih produkata, koju povezujemo s nekim rezultatima koji se odnose na konvergenciju lakunarnih trigonometrijskih redova. Definiramo pojam dovoljno lakunarnog niza i lakunarnog $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta. Zatim uvodimo metriku, u oznaci ρ, na grupi $\mathrm{SU}(1,1)$ te nakon toga definiramo metriku d_p na skupu svih izmjerivih funkcija na $\mathbb{T}$, jednodimenzionalnom torusu, s vrijednostima u $\mathrm{SU}(1,1)$. Metriku d_p promatramo kao varijantu L^p metrike na skupu razmatranih funkcija te pokazujemo da je ta metrika i potpuna. Dokazan je rezultat o konvergenciji lakunarnih $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskih produkata s kvadratno sumabilnim koeficijentima s obzirom na metriku d_p, kao nelinearna varijanta Zygmundovog rezultata o konvergenciji u L^p lakunarnih trigonometrijskih redova. Zatim je pokazan i rezultat o konvergenciji g.s. te njegov obrat.

U četvrtom poglavlju najprije je dan kratak osvrt na linearnu Fourierovu transformaciju, te jedan drugačiji pogled na nju, u analogiji s kojim je dana definicija nelinearne Fourierove transformacije. Nadalje, napisana su neka svojstva i L^p ocjene koje zadovoljava nelinearna Fourierova transformacija. Neka od njih su i dokazana u svrhu ilustriranja ideja i tehnika koje se koriste. Na kraju poglavlja dana je motivacija za proučavanje te transformacije iz svojstvenog problema za Diracov operator i AKNS-ZS sistema, spomenutih gore.

Peto poglavlje nadovezuje se na nelinearnu Hausdorff-Youngovu nejednakost. Posvećeno je dokazivanju rezultata o konstanti u toj nejednakosti za dovoljno male (u L^1 normi) funkcije. U dokazu se pojavljuje M. Christov rezultat iz 2014. godine, koji je profinjenje linearne Hausdorff-Youngove nejednakosti i u kojem se pojavljuje veličina koja mjeri udaljenost funkcije od skupa poopćenih Gaussovih funkcija. Tom veličinom koristimo se kako bismo podijelili skup funkcija koje promatramo na dva dijela. Time je i taj dokaz podijeljen na dva dijela, koja se nalaze u posljednja dva odjeljka disertacije, a taj materijal može se pronaći i u obliku preprinta članka [12].

Poglavlje 2

OSNOVE SU(1,1) TRIGONOMETRIJSKIH PRODUKATA

2.1 Fourierova analiza

U ovom odjeljku dan je sažeti uvod u osnovne definicije i tvrdnje iz funkcionalne i Fourierove analize. Opširniji pregled tih rezultata, kao i njihovi dokazi, mogu se pronaći u [8].

Definicija 2.1 Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $d\colon X \times X \to [0, \infty\rangle$ je *metrika* na X ako za sve $x, y, z \in X$ vrijedi:

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Uređeni par (X, d) nazivamo *metričkim prostorom.* Četvrto svojstvo naziva se još i *nejednakost trokuta.*

Ponekad u definiciji metrike dopuštamo da ona poprimi i vrijednost ∞. U takvim slučajevima obično restringiramo d na skup na kojem se poprimaju samo konačne vrijednosti. Često ćemo metrički prostor označavati samo s X ako je metrika jasna iz konteksta. Za metrički prostor X u kojem svaki Cauchyjev niz konvergira i limes mu je u X kažemo da je *potpun.*

Definicija 2.2 Neka je X vektorski prostor nad poljem F, pri čemu je F jednak skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty\rangle$, $x \mapsto \|x\|$, je *norma* na X ako za sve $x, y \in X$ i $\lambda \in F$ vrijedi:

(i) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo *normiranim vektorskim prostorom.* Četvrto svojstvo se i ovdje naziva *nejednakost trokuta.*

Za nenegativnu funkciju $\|\cdot\|$ koja zadovoljava prva dva svojstva iz definicije 2.2, a umjesto nejednakosti trokuta vrijedi da postoji konačna konstanta $C > 0$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi $\|x+y\| \leq C\,(\|x\| + \|y\|)$ kažemo da je *kvazinorma.* I ovdje je nekad praktično dopustiti da norma i kvazinorma poprimaju vrijednost ∞. Nadalje, i za normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ pisat ćemo često samo X ako se smatra da je norma poznata. Svaki normirani prostor X je i metrički prostor, pri čemu metriku definiramo s $d(x,y) := \|x-y\|$. Potpun normirani prostor naziva se *Banachov prostor.*

Definicija 2.3 Neka je X vektorski prostor nad poljem F, pri čemu je F jednak skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $\langle \cdot\,,\cdot \rangle : X \times X \to F$, $(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$, je *skalarni produkt* na X ako za sve $x, y, z \in X$ i $\alpha \in F$ vrijedi:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \;\; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Uređeni par $(X, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ nazivamo *unitarnim vektorskim prostorom.*

Svaki unitarni prostor je i normirani prostor, pri čemu se norma definira s $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Potpun unitarni prostor naziva se *Hilbertov prostor.*

Definirajmo sada neke od najvažnijih prostora matematičke analize, ℓ^p i L^p prostore. Za $X = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ i eksponent $1 \leq p \leq \infty$ definiramo $\|\cdot\|_{\ell^p}$ s

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell^p} &:= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|x\|_{\ell^\infty} &:= \sup \{\, |x_1|, |x_2|, \ldots \} \,. \end{aligned}$$

Zatim definiramo ℓ^p *prostore* s

$$\ell^p := \{ x \in X : \|x\|_{\ell^p} < \infty \} \,.$$

Za $1 \leq p \leq \infty$ svi ℓ^p prostori su Banachovi prostori s normom $\|\cdot\|_{\ell^p}$, a za $1 \leq p < \infty$ i separabilni su, tj. sadrže gust prebrojiv podskup.

S druge strane, L^p *prostori* definiraju se na sljedeći način. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $f\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M}$-izmjeriva funkcija. Za eksponent $0 < p < \infty$ definiramo $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ s

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} := \Big(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p},$$

dopuštajući da je $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \infty$ i zatim definiramo

$$\mathrm{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \Big\{ f\colon X \to \mathbb{C} : f \text{ je izmjeriva i } \|f\|_{\mathrm{L}^p} < \infty \Big\}.$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} &:= \inf \Big\{ \alpha \geq 0 : \mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\Big) = 0 \Big\}, \\ \mathrm{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) &:= \Big\{ f\colon X \to \mathbb{C} : f \text{ je izmjeriva i } \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} < \infty \Big\}. \end{aligned}$$

Za $0 < p \leq \infty$ skup $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ je kompleksni vektorski prostor i često ćemo ga kraće označavati s $\mathrm{L}^p(X)$, $\mathrm{L}^p(\mu)$ ili samo L^p. Napomenimo da su elementi prostora L^p klase ekvivalencije, pri čemu identificiramo one funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0. Imajući na umu da zapravo radimo s predstavnicima klasa ekvivalencije, elemente L^p prostora najčešće zovemo samo funkcijama te tako s njima i postupamo. Za $1 \leq p \leq \infty$ svi L^p prostori su Banachovi prostori s normom $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$. Specijalno, za $1 \leq p < \infty$ prostori $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ su i separabilni. Za $0 < p < 1$ nije zadovoljena nejednakost trokuta i u tom slučaju $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ je kvazinorma. Međutim, za $0 < p < 1$ s

$$d(f, g) := \int_X |f - g|^p \,\mathrm{d}\mu$$

definirana je metrika na L^p i (L^p, d) je potpun metrički prostor. Uočimo da su ℓ^p prostori, za $1 \leq p \leq \infty$, zapravo specijalan slučaj L^p prostora kada je $X = \mathbb{N}$ i μ brojeća mjera na $\mathbb{N}$. Također, prostor $\mathrm{L}^2(\mu)$ je Hilbertov za svaku mjeru μ, pri čemu je skalarni produkt dan s

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu.$$

Za $1 \leq p \leq \infty$ *konjugirani eksponent* od p je $1 \leq q \leq \infty$ takav da je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pritom uzimamo da je $1/0 = \infty$ i $1/\infty = 0$.

Napomena 2.4 Kroz veliki dio disertacije mi ćemo za X uzimati jednodimenzionalni torus $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ te ćemo se koristiti identifikacijom $\mathbb{T} \equiv [0, 1\rangle$.

Navedimo sada neke osnovne nejednakosti i svojstva koja vrijede za L^p prostore, a bit će nam korisna u daljnjim dokazima.

Teorem 2.5

(i) (Hölderova nejednakost) *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$ *i* q *konjugirani eksponent od* p*. Tada za sve izmjerive kompleksne funkcije* f *i* g *vrijedi*

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q} .$$

(ii) Neka su $0 < p < r < q \leq \infty$ *i neka je* $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ *određen s* $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$*. Tada za svaku izmjerivu kompleksnu funkciju* f *vrijedi*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^r} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{1-\theta} \|f\|_{\mathrm{L}^q}^{\theta} .$$

Teorem 2.6 (Nejednakost Minkowskog) *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$*. Za sve izmjerive kompleksne funkcije* f *i* g *vrijedi*

$$\|f + g\|_{\mathrm{L}^p} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} + \|g\|_{\mathrm{L}^p} .$$

Teorem 2.7 *Neka je* $\mu(X) < \infty$ *i* $0 < p < q \leq \infty$*. Tada je* $\mathrm{L}^p(\mu) \supseteq \mathrm{L}^q(\mu)$ *i za svaku izmjerivu kompleksnu funkciju* f *vrijedi*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^q} \mu(X)^{1/p - 1/q}.$$

Teorem 2.8 *Neka je* $E_\kappa(x) = e^{2\pi i x\cdot\kappa}$*. Tada je* $\{E_\kappa : \kappa \in \mathbb{Z}^n\}$ *ortonormirana baza za* $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n)$*, pri čemu* $x \cdot \kappa$ *označava standardni skalarni produkt na* $\mathbb{T}^n$*.*

Dakle, za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n)$ vrijedi

$$f = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \langle f, E_\kappa\rangle\, E_\kappa, \tag{2.1}$$

što znači da red na desnoj strani od (2.1) konvergira prema f u L^2 normi. Koeficijente

$$\hat{f}(\kappa) := \langle f, E_\kappa\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\kappa}\, \mathrm{d}x$$

zovemo *Fourierovim koeficijentima* od f, a red

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\kappa) E_\kappa$$

zovemo *Fourierov red* od f. Carleson je 1966. godine u [4] pokazao da Fourierov red funkcije $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ konvergira i g.s. prema f, ako je poredak sumacije $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Poslije ćemo formulirati i jednu kvantitativnu varijantu tog rezultata (vidi teorem 2.14). Nadalje, preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ je po teoremu 2.8 preslikavanje s $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n)$ u $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ i vrijedi

Parsevalova jednakost koja kaže

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n)} = \|\hat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)}. \tag{2.2}$$

Na kraju navedimo nekoliko klasičnih teorema funkcionalne analize koji nam trebaju kroz disertaciju, a kao što je navedeno, svi ti rezultati mogu se pronaći u [8].

Teorem 2.9 (Fatouova lema) *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih izmjerivih funkcija. Tada vrijedi*

$$\int \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Teorem 2.10 (Čebiševljeva nejednakost) *Neka je $f \in \mathrm{L}^p$, $0 < p < \infty$ i $\alpha > 0$. Tada vrijedi*

$$\mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\Big) \le \left(\frac{\|f\|_{\mathrm{L}^p}}{\alpha}\right)^p.$$

Teorem 2.11 *Neka je $0 < p < \infty$ i $\alpha > 0$. Tada vrijedi*

$$\int |f|^p\,\mathrm{d}\mu = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\mu\Big(\{x\in X : |f(x)| > \alpha\}\Big)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Teorem 2.12 (Borel-Cantellijeva lema) *Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{M}$ takav da je $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$. Tada je*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

S obzirom na to da se u nekoliko dokaza koristimo Grönwallovom lemom, zbog preglednosti i lakšeg praćenja disertacije navest ćemo i taj rezultat iz [28].

Teorem 2.13 (Grönwallova lema) *Neka je $u\colon [a,b] \to [0,\infty\rangle$ neprekidna funkcija i pretpostavimo da u zadovoljava sljedeću nejednakost:*

$$u(x) \le A + \int_a^x \beta(t)u(t)\,\mathrm{d}t,$$

za svaki $x \in [a,b]$, pri čemu je $A \ge 0$ i $\beta\colon [a,b] \to [0,\infty\rangle$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

$$u(x) \le Ae^{\int_a^x \beta(t)\,\mathrm{d}t}$$

za svaki $x \in [a,b]$.

Za iskaz sljedećeg teorema, koji ćemo također trebati u daljnjim dokazima, prisjetit ćemo se kratko definicije slabih L^p prostora. Neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $f\colon X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M}$-izmjeriva funkcija. Za eksponent $0 < p < \infty$ i $\alpha > 0$ definiramo $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}}$ s

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}} := \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \mu\Big(\{x\in X : |f(x)| > \alpha\}\Big)\right)^{1/p},$$

dopuštajući da je $\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}} = \infty$ i zatim definiramo *slabi* L^p *prostor* s

$$\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(X, \mathcal{M}, \mu) := \Big\{ f \colon X \to \mathbb{C} : f \text{ je izmjeriva i } \|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}} < \infty \Big\}$$

i to je kompleksni vektorski prostor, a funkcija $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}}$ je kvazinorma. Direktna posljedica Čebiševljeve nejednakosti veza je prostora $\mathrm{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ i $\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ te vrijedi

$$\mathrm{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \subseteq \mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(X, \mathcal{M}, \mu) \quad \text{i} \quad \|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Prije samog iskaza teorema uvedimo još neke oznake koje ćemo upotrijebiti u iskazu, ali i kroz cijelu disertaciju. Za dvije nenegativne veličine A i B pišemo $A \lesssim B$ ako postoji konstanta C takva da vrijedi $A \le CB$. Ako ta konstanta ovisi o nekoj veličini P, pisat ćemo $A \lesssim_P B$. Nadalje, pišemo $A \sim B$ ako postoje konstante C_1 i C_2 takve da vrijedi $C_1 B \le A \le C_2 B$. Ako te konstante ovise o nekoj veličini P, pisat ćemo $A \sim_P B$. Sada možemo iskazati teorem.

Teorem 2.14 (Linearni Carlesonov teorem, [4]) *Za* $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *niz u* ℓ^2 *označimo* $f_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$. *Operator maksimalnih Fourierovih suma zadovoljava slabu* L^2 *ocjenu, tj. vrijedi*

$$\Big\| \sup_{N\in\mathbb{N}} |f_N| \Big\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{w}}} \lesssim \|c\|_{\ell^2},$$

što zapravo znači da postoji konstanta $0 < C < \infty$ *takva da za svaki* $\alpha > 0$ *vrijedi*

$$\left| \left\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{N\in\mathbb{N}} |f_N(t)| > \alpha \right\} \right| \le C\alpha^{-2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Na kraju uvedimo još pojam lakunarnog niza i jedan rezultat povezan s lakunarnim trigonometrijskim redovima iz [31].

Definicija 2.15 Za niz prirodnih brojeva $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *lakunaran* ako postoji realni broj $q > 1$ tako da za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{m_{j+1}}{m_j} \ge q.$$

Lakunarni trigonometrijski red je trigonometrijski red u kojem koeficijenti čine lakunarni niz.

Teorem 2.16 (Zygmundova nejednakost) *Neka je* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *lakunarni niz prirodnih brojeva,* $N \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ *i* $0 < p < \infty$. *Tada vrijedi*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} \sim_{p,q} \left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Napomenimo da implicitne konstante (u skladu s oznakom) ovise samo o p i q, ali ne i o brojevima m_j, c_j i N.

2.2 Trigonometrijski produkti

U ovom odjeljku definirat ćemo nelinearni analogon trigonometrijskih redova, i to u matričnoj grupi $\mathrm{SU}(1,1)$ te iskazati i dokazati nelinearni analogon Parsevalove jednakosti (2.2) koji se pojavljuje još 1935. godine u [29]. Ovaj odjeljak koristi definicije preuzete iz preglednog rada [27], samo prilagođene našoj normalizaciji.

Definicija 2.17 Neka su $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz pozitivnih brojeva i $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz kompleksnih brojeva takvi da je $A_n^2 - |B_n|^2 = 1$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Beskonačni produkt

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} A_n & B_n e^{2\pi i n t} \\ \overline{B_n} e^{-2\pi i n t} & A_n \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

koji ovisi o varijabli $t \in \mathbb{T}$ zovemo $\mathrm{SU}(1,1)$ *trigonometrijski produkt.*

Napomena 2.18

(a) Konvergencija od (2.3) interpretira se kao $\lim\limits_{M,N\to\infty} \prod_{n=-M}^{N}$, ali o načinu konvergencije uz odgovarajuće uvjete na koeficijente A_n i B_n tek treba diskutirati.

(b) Naziv produkta (2.3) dolazi od oznake za matričnu grupu

$$\mathrm{SU}(1,1) := \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} : A, B \in \mathbb{C},\ |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\}.$$

Primijetimo da se i svi članovi i svi parcijalni produkti

$$\begin{bmatrix} a_N(t) & b_N(t) \\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)} \end{bmatrix} := \prod_{n=-N}^{N} \begin{bmatrix} A_n & B_n e^{2\pi i n t} \\ \overline{B_n} e^{-2\pi i n t} & A_n \end{bmatrix}, \quad N \in \mathbb{N},$$

beskonačnog produkta (2.3) nalaze u grupi $\mathrm{SU}(1,1)$. Dakle, za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi $|a_N(t)|^2 - |b_N(t)|^2 = 1$ pa je posebno $|a_N(t)| \geq 1$. Matrice $\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ \overline{B_n} & A_n \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$, iz definicije možemo zamišljati kao koeficijente produkta (2.3).

(c) Ako stavimo $F_n := \frac{B_n}{A_n}$, tada je $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz u jediničnom krugu $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i vrijedi

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{1-|F_n|^2}}, \quad B_n = \frac{F_n}{\sqrt{1-|F_n|^2}}. \tag{2.4}$$

Takva normalizacija koristi se u [27]. Alternativno, možemo naći niz nenegativnih brojeva $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i niz brojeva $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iz $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ tako da vrijedi

$$A_n = \operatorname{ch}\theta_n, \;\; B_n = \sigma_n \operatorname{sh}\theta_n. \tag{2.5}$$

Uvijek ćemo podrazumijevati da su paru (A_n, B_n) pridruženi F_n, θ_n i σ_n takvi da vrijede (2.4) i (2.5). Tome je razlog što će neki od njih biti praktičniji od ostalih ili u boljoj analogiji s Fourierovim redovima.

Definicija 2.19 Za neki $0 < p < \infty$ reći ćemo da beskonačni produkt (2.3) *ima ℓ^p koeficijente* ako vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty.$$

Lema 2.20 *(a) Činjenica da produkt* (2.3) *ima ℓ^p koeficijente ekvivalentna je s:*

(i) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^p < \infty$,

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n^p < \infty$.

(b) Posebno, činjenica da produkt (2.3) *ima ℓ^2 koeficijente je još ekvivalentna s:*

(i) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty$,

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log A_n < \infty$,

(iii) $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty$,

(iv) $\prod_{n\in\mathbb{Z}} A_n < \infty$.

Dokaz. (a) Dokažimo prvo ekvivalenciju (i):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^p < \infty.$$

Neka je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty$. Kako je

$$|F_n| = \frac{|B_n|}{A_n} = \frac{|B_n|}{\sqrt{1+|B_n|^2}} \leq |B_n|$$

i oba reda $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^p$ i $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p$ su redovi s nenegativnim realnim članovima, po usporednom kriteriju za konvergenciju takvih redova slijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^p < \infty.$$

Neka je sada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n|^p < \infty$. Iz te konvergencije slijedi $\lim_{n\to\infty} |F_n|^p = 0$ pa je i

$\lim_{n\to\infty} |F_n|^2 = 0$ te vrijedi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^p}{|F_n|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{F_n}{\sqrt{1-|F_n|^2}}\right|^p}{|F_n|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1-|F_n|^2}\right)^p} = 1 < \infty.$$

Sada po usporednom kriteriju za redove s nenegativnim realnim članovima vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty.$$

Dokažimo sada ekvivalenciju (ii):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n^p < \infty.$$

Pretpostavimo da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty$. Kako je niz $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz nenegativnih brojeva vrijedi

$$|B_n| = |\sigma_n \operatorname{sh}\theta_n| = |\operatorname{sh}\theta_n| = \operatorname{sh}\theta_n \geq \theta_n$$

pa po usporednom kriteriju za konvergenciju redova s nenegativnim realnim članovima vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n^p < \infty.$$

Obratno, neka je sada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n^p < \infty$. Iz te konvergencije slijedi $\lim_{n\to\infty} \theta_n^p = 0$ pa je i $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$. Iz toga i iz poznatog limesa $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ slijedi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^p}{\theta_n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma_n \operatorname{sh}\theta_n|^p}{\theta_n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}\theta_n}{\theta_n}\right)^p = 1 < \infty.$$

Sada ponovno po usporednom kriteriju za redove s nenegativnim realnim članovima vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^p < \infty.$$

(b) Dokažimo prvo ekvivalenciju (i):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty.$$

Pretpostavimo da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty$. Kako je

$$\log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) = \log\left(1 + 2\,|B_n|^2\right) \leq 2\,|B_n|^2$$

konvergencija reda $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right)$ opet slijedi po usporednom kriteriju.

Neka je sada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty$. Znamo da iz te konvergencije slijedi $\lim_{n\to\infty} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + 2|B_n|^2\right) = 0$, iz čega možemo zaključiti da vrijedi $\lim_{n\to\infty}\left(1 + 2|B_n|^2\right) = 1$ pa slijedi

$$\lim_{n\to\infty} 2|B_n|^2 = 0. \tag{2.6}$$

Iz (2.6) i poznatog limesa $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ slijedi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^2}{\log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^2}{\log\left(1 + 2\,|B_n|^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2\log\left(1+2|B_n|^2\right)}{2|B_n|^2}} = \frac{1}{2} < \infty$$

pa ponovno po usporednom kriteriju možemo zaključiti

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty.$$

Dokažimo sada ekvivalenciju *(*ii):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \log A_n < \infty.$$

Pretpostavimo prvo da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty$. Kako je, po definiciji, $A_n^2 - |B_n|^2 = 1$ vrijedi

$$2\log A_n = \log\left(1 + |B_n|^2\right) \leq |B_n|^2$$

pa konvergencija reda $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log A_n$ slijedi po usporednom kriteriju.

Neka je sada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log A_n < \infty$. Iz te konvergencije slijedi $\lim_{n\to\infty} \log A_n = 0$, te možemo zaključiti da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |B_n|^2 = 0. \tag{2.7}$$

Na isti način kao i gore, iz (2.7) i poznatog limesa $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ slijedi

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^2}{\log A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|B_n|^2}{\log\sqrt{1 + |B_n|^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{2}\log\left(1+|B_n|^2\right)}{|B_n|^2}} = 2 < \infty$$

pa ponovno po usporednom kriteriju možemo zaključiti

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty.$$

Nadalje, dokažimo ekvivalenciju (iii):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty \;\Leftrightarrow\; \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty. \tag{2.8}$$

Uočimo da vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \log\left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty \;\Leftrightarrow\; \log\prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty \;\Leftrightarrow\; \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(A_n^2 + |B_n|^2\right) < \infty$$

pa iz gore dokazane ekvivalencije (i) slijedi rezultat (2.8). Na potpuno analogan način, ali koristeći se dokazanom ekvivalencijom (ii), slijedi ekvivalencija (iv)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |B_n|^2 < \infty \;\Leftrightarrow\; \prod_{n\in\mathbb{Z}} A_n < \infty. \qquad \blacksquare$$

Dokažimo sada rezultat povezan s matricama s kojima ćemo raditi i nekim njihovim svojstvima.

Lema 2.21 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}$. Vrijede sljedeće formule:*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|^2 - |B|^2}\begin{bmatrix} \overline{A} & -B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} \overline{A} & B \\ \overline{B} & A \end{bmatrix},$$

$$\left\| \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right\|_{op} = |A| + |B|, \qquad \left\| \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right\|_{HS} = \sqrt{2\left(|A|^2 + |B|^2\right)},$$

pri čemu u prvoj od njih pretpostavljamo $|A|^2 - |B|^2 \neq 0$. Pritom je

$$\|M\|_{op} := \sqrt{\max\sigma\left(M^*M\right)}$$

operatorska (spektralna) norma, a

$$\|M\|_{HS} := \sqrt{\operatorname{tr}\left(M^*M\right)}$$

je Hilbert-Schmidtova norma matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Dokaz. Formule za inverznu i hermitski konjugiranu matricu očite su jer se radi o poznatim tvrdnjama iz linearne algebre. Izračunajmo sada operatorsku normu:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}^{*} \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & B \\ \overline{B} & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\overline{A} + B\overline{B} & 2\overline{A}B \\ 2A\overline{B} & A\overline{A} + B\overline{B} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Dobivamo karakterističnu jednadžbu po λ:

$$\det\begin{bmatrix} A\overline{A} + B\overline{B} - \lambda & 2\overline{A}B \\ 2A\overline{B} & A\overline{A} + B\overline{B} - \lambda \end{bmatrix} = \left(A\overline{A} + B\overline{B} - \lambda\right)^2 - 4A\overline{A}B\overline{B} = 0.$$

Kada to raspišemo kao razliku kvadrata, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left(|A|^2+|B|^2-\lambda\right)^2-(2|A||B|)^2\\
&=\left(|A|^2+|B|^2-\lambda-2|A||B|\right)\left(|A|^2+|B|^2-\lambda+2|A||B|\right)\\
&=\left((|A|-|B|)^2-\lambda\right)\left((|A|+|B|)^2-\lambda\right)=0.
\end{aligned}$$

Iz toga dobivamo rješenja

$$\lambda_1=(|A|-|B|)^2,\ \ \lambda_2=(|A|+|B|)^2$$

pa zaključujemo

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\right\|_{op}=\sqrt{\max\left\{(|A|-|B|)^2,(|A|+|B|)^2\right\}}=|A|+|B|.$$

Pogledajmo sada Hilbert-Schmidtovu normu. Koristeći se (2.9) dobivamo da je

$$\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} A\overline{A}+B\overline{B} & 2\overline{A}B\\ 2A\overline{B} & A\overline{A}+B\overline{B}\end{bmatrix}\right)=2\left(A\overline{A}+B\overline{B}\right)$$

pa smo dobili

$$\left\|\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\right\|_{HS}=\sqrt{2\left(|A|^2+|B|^2\right)}.$$

■

Napomena 2.22 Uočimo da iz leme 2.21 slijedi da za $\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}\in \mathrm{SU}(1,1)$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} A & B\\ \overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \overline{A} & -B\\ -\overline{B} & A\end{bmatrix}.$$

2.2.1 Nelinearna Parsevalova jednakost

Kako smo najavili, ovdje ćemo iskazati i dokazati nelinearnu Parsevalovu jednakost, koja kaže

$$\left\|(\log|a_\infty|)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})}=\left\|(\log A_n)^{1/2}\right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})},\tag{2.10}$$

pri čemu smo za $t\in\mathbb{T}$ označili

$$\begin{bmatrix} a_\infty(t) & b_\infty(t)\\ \overline{b_\infty(t)} & \overline{a_\infty(t)}\end{bmatrix}:=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix} A_n & B_n e^{2\pi int}\\ \overline{B_n}e^{-2\pi int} & A_n\end{bmatrix}.\tag{2.11}$$

Funkcije a_∞ i b_∞ iz (2.11) zvat ćemo matričnim elementima $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta određenog nizovima $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iz definicije 2.17. Za potrebe dokaza upotrijebit ćemo supstituciju iz napomene 2.18(c) koja se koristi u [27], odakle je dokaz i preuzet. Prisjetimo se da, ako stavimo $F_n := \frac{B_n}{A_n}$, tada je $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz u jediničnom krugu $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i vrijede jednakosti (2.4). Nelinearna Parsevalova jednakost u terminima niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ glasi

$$\int_0^1 \log\left|a_\infty\left(e^{2\pi it}\right)\right| \mathrm{d}t = \sum_n \log\frac{1}{\sqrt{1-|F_n|^2}}. \tag{2.12}$$

Produkt (2.11) samo je formalno beskonačan produkt jer ćemo dodatno pretpostaviti da je niz $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ konačan, tj. da je $F_n = 0$ za sve osim za konačno mnogo n. Dakle, na funkcije a_∞ i b_∞ treba gledati kao na a_n i b_n za dovoljno veliki n. Nadalje, zbog potreba dokaza, prijeći ćemo na kompleksnu varijablu

$$z := e^{2\pi it}. \tag{2.13}$$

Uočimo da je s (2.13) zadan izomorfizam s $\mathbb{T}$ u S^1. Sada za kompleksnu varijablu $z \in S^1$ možemo $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt, upotrijebivši supstitucije dane s (2.4), zapisati kao

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-|F_n|^2}} \begin{bmatrix} 1 & F_n z^n \\ \overline{F_n} z^{-n} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Uočimo da za $z \in S^1$ vrijedi sljedeća, opet samo formalno beskonačna, rekurzija

$$\begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ \overline{b_n(z)} & \overline{a_n(z)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-|F_n|^2}} \begin{bmatrix} a_{n-1}(z) & b_{n-1}(z) \\ \overline{b_{n-1}(z)} & \overline{a_{n-1}(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & F_n z^n \\ \overline{F_n} z^{-n} & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

uz početni uvjet

$$\begin{bmatrix} a_{-\infty}(z) & b_{-\infty}(z) \\ \overline{b_{-\infty}(z)} & \overline{a_{-\infty}(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Uvjet (2.16) zapravo znači da je $a_n(z) = 1$ i $b_n(z) = 0$ za dovoljno mali n, što je u skladu s formulom rekurzije jer je matrica

$$\frac{1}{\sqrt{1-|F_n|^2}} \begin{bmatrix} 1 & F_n z^n \\ \overline{F_n} z^{-n} & 1 \end{bmatrix}$$

zapravo jedinična matrica za dovoljno male n zbog pretpostavke da je $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ konačan. Uočimo da su a_∞ i b_∞ Laurentovi polinomi te da su za $z \in S^1$ gornje matrice u $\mathrm{SU}(1,1)$.

Prijeđimo sada na dokaz nelinearne Parsevalove jednakosti. Dokažimo prvo sljedeću pomoćnu tvrdnju: neka je $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ konačan ne-nul niz čiji je $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt dan s (2.14) te neka je N_- najmanji cijeli broj takav da je $F_{N_-} \neq 0$, a N_+ najveći cijeli broj takav da je $F_{N_+} \neq 0$. Tada je

$$a_\infty(z) = \sum_{n=N_- - N_+}^{0} \tilde{a}_n z^n, \tag{2.17}$$

pri čemu je najmanji eksponent koji se pojavljuje u sumi jednak $N_- - N+$, a najveći je 0. Slobodni član ovog Laurentovog polinoma je

$$\tilde{a}_0 = \prod_n \frac{1}{\sqrt{1 - |F_n|^2}}. \tag{2.18}$$

Nadalje, b_∞ je oblika

$$b_\infty(z) = \sum_{n=N_-}^{N_+} \tilde{b}_n z^n, \tag{2.19}$$

pri čemu je najmanji eksponent u sumi jednak N_-, a najveći je N_+. Tvrdnju dokazujemo indukcijom, istodobno za a_∞ i b_∞, u ovisnosti o duljini l niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, koja je jednaka $N_+ - N_- + 1$. Ako je duljina niza jednaka 1, tada označimo $N \coloneqq N_+ = N_-$ te vrijedi

$$a_\infty(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - |F_N|^2}}, \quad b_\infty(z) = \frac{F_N}{\sqrt{1 - |F_N|^2}} z^N$$

pa je tvrdnja očigledno ispunjena. Pretpostavimo sada da je $l > 1$ i da tvrdnja vrijedi za sve duljine manje od l, te dokažimo da vrijedi ako je duljina jednaka l. Uočimo da tada imamo

$$a_\infty(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - |F_{N_+}|^2}} a'_\infty(z) + \frac{\overline{F_{N_+}}}{\sqrt{1 - |F_{N_+}|^2}} z^{-N_+} b'_\infty(z),$$

pri čemu su a'_∞ i b'_∞ matrični elementi SU$(1,1)$ trigonometrijskog produkta niza $(F'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ koji se podudara s $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ na svim mjestima osim na N_+-om. Na tom mjestu je $F'_{N_+} = 0$. Po pretpostavci indukcije b'_∞ ima stupanj najviše jednak $N_+ - 1$ pa $z^{-N_+} b'_\infty$ ima stupanj najviše -1 što znači da je slobodni član od a_∞ jednak umnošku slobodnog člana od a'_∞ s $1/\sqrt{1 - |F_{N_+}|^2}$. Time smo dokazali da slobodni član od a_∞ izgleda kako je i napisano u (2.18). Također, uočimo da smo pokazali i da u a_∞ nema pozitivnih potencija. Najmanji stupanj u a'_∞ je najmanje $N_- - N_+ + 1$, dok je najmanji stupanj u $z^{-N_+} b'_\infty$ točno jednak $N_- - N_+$, te slijedi tvrdnja za a_∞. Analogno se dokazuje korak indukcije i za b_∞.

U svrhu dokaza nelinearne Parsevalove jednakosti želimo proširiti a_n i b_n do funkcija kompleksne varijable $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zato prethodnu rekurziju (2.15) poopćujemo na

$$\begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ b_n^*(z) & a_n^*(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - |F_n|^2}} \begin{bmatrix} a_{n-1}(z) & b_{n-1}(z) \\ b_{n-1}^*(z) & a_{n-1}^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & F_n z^n \\ \overline{F_n} z^{-n} & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

uz početni uvjet

$$\begin{bmatrix} a_{-\infty}(z) & b_{-\infty}(z) \\ b^*_{-\infty}(z) & a^*_{-\infty}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je, općenito,

$$f^*(z) := \overline{f(\overline{z}^{-1})}.$$

Primijetimo da za $z \in S^1$ vrijedi

$$f^*(z) = \overline{f(z)}$$

pa se rekurzija (2.20) za takve z podudara s rekurzijom (2.15). Svi elementi u matricama iz (2.20) meromorfne su funkcije na cijeloj Riemannovoj sferi. Uočimo da za z izvan S^1 matrica

$$\begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ b^*_n(z) & a^*_n(z) \end{bmatrix}$$

ne mora nužno biti u grupi $\mathrm{SU}(1,1)$, međutim jednakost

$$a_n(z)a^*_n(z) - b_n(z)b^*_n(z) = 1$$

vrijedi na cijeloj kompleksnoj ravnini jer vrijedi na S^1.

Dokazanu pomoćnu tvrdnju koristit ćemo da pokažemo da a_∞ nema nultočaka u skupu $D^* := \{1/z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. To je dovoljno dokazati uz pretpostavku da je $F_n = 0$ za $n < 0$ jer vrijedi sljedeće svojstvo: ako su a_∞ i b_∞ matrični elementi $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tada za a^G_∞ i b^G_∞, matrične elemente $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta pomaknutog niza $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiranog s $G_n := F_{n+1}$, vrijedi

$$\begin{aligned} a^G_\infty(z) &= a_\infty(z), \\ b^G_\infty(z) &= b_\infty(z)z^{-1}. \end{aligned}$$

Nadalje, kako smo pokazali, a_∞ je Laurentov polinom u kojem je nula najveća potencija koja se pojavljuje i u kojem je slobodni član jednak

$$\tilde{a}_0 = \prod_n \frac{1}{\sqrt{1 - |F_n|^2}}$$

pa možemo zaključiti da je $\lim_{z\to\infty} a_\infty(z) = \tilde{a}_0$. Time smo pokazali da funkcija a_∞ ima u ∞ uklonjivi singularitet pa možemo definirati $a_\infty(\infty) := \tilde{a}_0$. Sada vidimo da ∞ nije nultočka funkcije a_∞ i pokažimo nadalje da ta funkcija nema nultočaka ni u skupu

$D^*\backslash\{\infty\}$. Iz rekurzije (2.20) dobivamo da je

$$a_n(z) = \frac{a_{n-1}(z) + \overline{F_n} b_{n-1}(z) z^{-n}}{\sqrt{1-|F_n|^2}},$$

$$b_n(z) = \frac{a_{n-1}(z) F_n z^n + b_{n-1}(z)}{\sqrt{1-|F_n|^2}}$$

pa je

$$|z^n a_n(z)|^2 = \frac{|z|^{2n}|a_{n-1}(z)|^2 + |F_n|^2|b_{n-1}(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(a_{n-1}(z)\overline{b_{n-1}(z)} F_n z^n\right)}{1-|F_n|^2}, \tag{2.21}$$

odnosno

$$|b_n(z)|^2 = \frac{|F_n|^2|z|^{2n}|a_{n-1}(z)|^2 + |b_{n-1}(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(a_{n-1}(z)\overline{b_{n-1}(z)} F_n z^n\right)}{1-|F_n|^2}. \tag{2.22}$$

Sada za $z \in D^*\backslash\{\infty\}$ vrijedi

$$|z^n a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2 = |z^n a_{n-1}|^2 - |b_{n-1}|^2 \geq |z^{n-1} a_{n-1}|^2 - |b_{n-1}|^2, \tag{2.23}$$

pri čemu jednakost slijedi iz (2.21) i (2.22), a nejednakost slijedi iz činjenice da za $z \in D^*\backslash\{\infty\}$ vrijedi $|z|^n \geq |z|^{n-1}$ pa indukcijom možemo dobiti da je

$$|z^n a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2 > 0. \tag{2.24}$$

Uočimo da je korak indukcije zapravo dokazan s (2.23). Za bazu indukcije iskoristit ćemo činjenicu da za $z \in D^*\backslash\{\infty\}$ vrijedi da je $|z| > 1$. Bazu indukcije zapravo pokazujemo za dovoljno male n za koje vrijede početni uvjeti, koji kažu da je $a_n(z) = 1$ i $b_n(z) = 0$, pa vrijedi da je $|z^n a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2 = |z^n| > 0$. Sada iz (2.24) slijedi da je $|a_\infty(z)| > 0$ za $z \in D^*\backslash\{\infty\}$ pa možemo zaključiti da a_∞ nema nultočaka u skupu $D^*\backslash\{\infty\}$. Sada znamo da za sve $z \in D^*$ vrijedi da je $a_\infty(z) \neq 0$ pa je dobro definirana funkcija $z \mapsto \log(a_\infty(z))$. Funkcija a_∞ je holomorfna na D^* pa je i funkcija $\log(a_\infty)$ holomorfna na istom skupu iz čega slijedi da je funkcija $\log\left(a_\infty\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ holomorfna na D. Sada vidimo da je funkcija

$$g(z) := \log\left|a_\infty\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \mathrm{Re}\log\left(a_\infty\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

harmonijska na D (jer je realni dio holomorfne funkcije) i neprekidna na $D \cup S^1$. Iz svojstva srednje vrijednosti za harmonijske funkcije iz [14] slijedi da je

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} g(z) \, \mathrm{d}s(z),$$

pri čemu ds označava integriranje s obzirom na lučnu mjeru na S^1 (tj. jednodimenzionalnu Hausdorffovu mjeru). Kako je $g(0) = \log |a_\infty(\infty)|$, imamo da je

$$\int_0^1 \log \left| a_\infty \left(e^{2\pi i t} \right) \right| \mathrm{d}t = \log |a_\infty(\infty)| = \log \prod_n \frac{1}{\sqrt{1 - |F_n|^2}} = \sum_n \log \frac{1}{\sqrt{1 - |F_n|^2}}$$

i time je dokaz završen, jer smo pokazali da vrijedi jednakost (2.12).

2.3 Ortogonalni polinomi

Neka je μ vjerojatnosna mjera na S^1, te neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor koji je upotpunjenje linearne ljuske skupa funkcija $\left\{1, z^1, z^2, \ldots\right\}$ sa skalarnim produktom definiranim standardno s

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu.$$

Nadalje, pretpostavit ćemo da μ ima beskonačan nosač. Zbog te pretpostavke znamo da su nam funkcije $1, z^1, z^2, \ldots$ linearno nezavisne u $\mathcal{H}$. Naime, ako je konačan skup $\left\{1, z^1, \ldots, z^n\right\}$ linearno zavisan u $\mathcal{H}$, tada nužno μ ima konačan nosač. Naime, ako je taj konačni skup linearno zavisan, to znači da postoji netrivijalna linearna kombinacija elemenata skupa, što je zapravo neki polinom $P(z)$, koja je ekvivalentna 0 u $\mathcal{H}$. To bi značilo da je

$$0 = \|P\|^2 = \langle P, P \rangle = \int |P|^2 \, \mathrm{d}\mu,$$

a kako su i $|P|^2$ i μ pozitivni, to se može dogoditi jedino ako je nosač od μ sadržan u skupu nultočaka od P, a to je konačan skup. Obratno, ako μ ima konačan nosač, onda bismo lako pronašli polinom kojemu su sve točke nosača nultočke pa bi on bio ekvivalentan nuli u $\mathcal{H}$.

Sada možemo upotrijebiti Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije da dođemo do skupa ortogonalnih polinoma $\{\Phi_n(z) : n \geq 0\}$, pri čemu je $\Phi_0(z) = 1$, a za $n \geq 1$ je $\Phi_n(z)$ polinom stupnja n kojemu je vodeći koeficijent jednak 1 i okomit je na sve polinome stupnja manjeg od n. Dakle, $\Phi_n(z)$ je oblika

$$\Phi_n(z) = z^n + \text{ polinom stupnja manjeg od } n,$$

a dijeleći svaki polinom $\Phi_n(z)$ s njegovom normom dolazimo do ortonormiranog skupa polinoma $\{\varphi_n(z) : n \geq 0\}$, tj.

$$\varphi_n(z) = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|}, \quad \varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \text{ polinom stupnja manjeg od } n.$$

Szegöva rekurzija [24] kaže nam da postoji niz skalara $(\alpha_n = \alpha_n(\mu))_{n\geq 0}$ takvih da za svaki $n \geq 0$ imamo $\alpha_n \in D$ i vrijedi

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{\alpha_n} z^n \Phi_n^*(z). \tag{2.25}$$

Taj niz skalara zovemo *Verblunskyjevim koeficijentima.* Nadalje, Verblunskyjev teorem [24] kaže nam da je funkcija $\mu \mapsto (\alpha_n)_{n\geq 0}$ bijekcija.

Krenimo sada od $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji zadovoljavaju $A_n^2 - |B_n|^2 = 1$ i stavimo $F_n := \frac{B_n}{A_n} \in D$. Kao i kod dokaza nelinearne Parsevalove jednakosti pretpostavit ćemo da je niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konačan. Cilj nam je pronaći ortogonalne polinome i vjerojatnosnu mjeru za koje je niz $(-F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pripadni niz Verblunskyjevih koeficijenata. Definirajmo prvo parcijalne produkte za $z \in S^1$ s

$$\begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ \overline{b_n(z)} & \overline{a_n(z)} \end{bmatrix} := \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} A_k & B_k z^k \\ \overline{B_k} z^{-k} & A_k \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} a_\infty(z) & b_\infty(z) \\ \overline{b_\infty(z)} & \overline{a_\infty(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ \overline{b_n(z)} & \overline{b_n(z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,\infty}(z) & b_{n,\infty}(z) \\ \overline{b_{n,\infty}(z)} & \overline{a_{n,\infty}(z)} \end{bmatrix},$$

pri čemu su

$$\begin{bmatrix} a_\infty(z) & b_\infty(z) \\ \overline{b_\infty(z)} & \overline{a_\infty(z)} \end{bmatrix} := \prod_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_k & B_k z^k \\ \overline{B_k} z^{-k} & A_k \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{n,\infty}(z) & b_{n,\infty}(z) \\ \overline{b_{n,\infty}(z)} & \overline{a_{n,\infty}(z)} \end{bmatrix} := \prod_{k=n+1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_k & B_k z^k \\ \overline{B_k} z^{-k} & A_k \end{bmatrix},$$

ali to su samo formalno beskonačni produkti. Kao u pododjeljku 2.2.1 proširimo a_n i b_n na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, za koje, naravno, vrijedi rekurzija (2.20). Koristeći se lemom 2.21 slijedi

$$\begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ b_n^*(z) & a_n^*(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\infty(z) & b_\infty(z) \\ b_\infty^*(z) & a_\infty^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,\infty}^*(z) & -b_{n,\infty}(z) \\ -b_{n,\infty}^*(z) & a_{n,\infty}(z) \end{bmatrix}.$$

Sada iz tog produkta vidimo da je

$$a_n(z) = a_\infty(z) a_{n,\infty}^*(z) - b_\infty(z) b_{n,\infty}^*(z)$$

$$b_n^*(z) = b_\infty^*(z)a_{n,\infty}^*(z) - a_\infty^*(z)b_{n,\infty}^*(z)$$

pa dobivamo jednakost

$$a_n(z) + b_n^*(z) = a_{n,\infty}^*(z)\left(a_\infty(z) + b_\infty^*(z)\right) - b_{n,\infty}^*(z)\left(a_\infty^*(z) + b_\infty(z)\right), \tag{2.26}$$

koja će nam biti korisna u daljnjem računu.

Definirajmo funkciju $m\colon D \to \mathbb{C}$ s

$$m(z) \coloneqq \frac{1 - \frac{b_\infty(z)}{a_\infty^*(z)}}{1 + \frac{b_\infty(z)}{a_\infty^*(z)}}.$$

Uočimo da je to holomorfna funkcija te da je $m(0) = 1$. Nadalje, kako je $\frac{b_\infty(z)}{a_\infty^*(z)} \in D$, vidimo da funkcija m ima pozitivan realni dio. Kako je, dakle, realni dio od m pozitivna harmonijska funkcija, možemo iskoristiti Herglotzov teorem pa znamo da postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera μ na S^1 čije je harmonijsko proširenje na D jednako realnom dijelu funkcije m. Izračunajmo sada $\operatorname{Re} m(z)$ za $z \in S^1$, koristeći da za takve z vrijedi $a_\infty^*(z) = \overline{a_\infty(z)}$ i $b_\infty^*(z) = \overline{b_\infty(z)}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} m(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2}\left(m(z) + \overline{m(z)}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{b_\infty(z)}{a_\infty^*(z)}}{1 + \frac{b_\infty(z)}{a_\infty^*(z)}} + \frac{1 - \frac{b_\infty^*(z)}{a_\infty(z)}}{1 + \frac{b_\infty^*(z)}{a_\infty(z)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a_\infty^*(z) - b_\infty(z)}{a_\infty^*(z) + b_\infty(z)} + \frac{a_\infty(z) - b_\infty^*(z)}{a_\infty(z) + b_\infty^*(z)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2(a_\infty(z)a_\infty^*(z) - b_\infty(z)b_\infty^*(z))}{(a_\infty^*(z) + b_\infty(z))(a_\infty(z) + b_\infty^*(z))}\right) \\
&= \frac{1}{(a_\infty^*(z) + b_\infty(z))(a_\infty(z) + b_\infty^*(z))}.
\end{aligned}$$

Time smo dobili vjerojatnosnu mjeru μ na S^1 te se sada okrećemo definiciji ortogonalnih polinoma. Definirajmo $\varphi_0(z) \coloneqq 1$, a za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$\varphi_n(z) \coloneqq z^n(a_n(z) + b_n^*(z)). \tag{2.27}$$

Uočimo da je φ_n doista polinom stupnja n, jer iz jednakosti (2.17) i (2.19), koje su dokazane u pododjeljku 2.2.1, vidimo da se u a_n nalaze potencije od $1-n$ do 0, a u b_n potencije od 1 do n, što znači da se u b_n^* nalaze potencije od $-n$ do -1. Množeći $a_n + b_n^*$ sa z^n, dobivamo polinom točno stupnja n kojemu je vodeći koeficijent, u oznaci κ_n, jednak slobodnom članu od a_n, a koji je dan s (2.18), što znači da je

$$\kappa_n = \prod_{k=1}^{n} A_k. \tag{2.28}$$

Dokažimo sada da je $\{\varphi_n(z) : n \geq 0\}$ ortonormirani skup polinoma. Izračunajmo sljedeći skalarni produkt s obzirom na gore dobivenu mjeru μ i to za $k < n$:

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi_n(z), z^k \right\rangle &= \int_{S^1} \varphi_n(z)\overline{z}^k \,\mathrm{d}\mu = \int_{S^1} \varphi_n(z) z^{-k} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{S^1} z^{n-k}(a_n(z) + b_n^*(z)) \frac{1}{(a_\infty^*(z) + b_\infty(z))(a_\infty(z) + b_\infty^*(z))} \,\mathrm{d}s(z)\end{aligned}$$

te iskoristimo (2.26) da dobijemo

$$\begin{aligned}&= \int_{S^1} z^{n-k} \left(\frac{a_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty^*(z) + b_\infty(z)} - \frac{b_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty(z) + b_\infty^*(z)} \right) \mathrm{d}s(z) \\ &= \int_{S^1} z^{n-k} \frac{a_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty^*(z) + b_\infty(z)} \mathrm{d}s(z) - \int_{S^1} z^{n-k} \frac{b_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty(z) + b_\infty^*(z)} \mathrm{d}s(z). \qquad (2.29)\end{aligned}$$

Funkcija $z \mapsto \frac{a_{n,\infty}^*}{a_\infty^* + b_\infty}$ holomorfna je na D i neprekidna na $D \cup S^1$, dok je funkcija $z \mapsto \frac{b_{n,\infty}^*}{a_\infty + b_\infty^*}$ holomorfna na D^* i neprekidna na $D^* \cup S^1$. Sada za funkcije

$$g_1(z) := z^{n-k} \frac{a_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty^*(z) + b_\infty(z)} \quad \text{i} \quad g_2(z) := z^{n-k} \frac{b_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty(z) + b_\infty^*(z)}$$

možemo iskoristiti svojstvo srednje vrijednosti, i to za funkciju g_1 tako da izračunamo vrijednost u nuli, dok za g_2 moramo izračunati vrijednost u ∞. Ako pogledamo funkciju g_1, iz (2.17) i (2.19) možemo zaključiti da su $a_{n,\infty}^*$, a_∞^* i b_∞ Laurentovi polinomi koji ne sadrže negativne potencije od z i posebno $a_{n,\infty}^*$ i a_∞^* imaju ne-nul slobodni član, a $b_\infty(0) = 0$ pa je $\frac{a_{n,\infty}^*(0)}{a_\infty^*(0) + b_\infty(0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kako je $k < n$, vrijedi da je

$$g_1(0) = 0$$

pa je prvi integral u (2.29) jednak nuli. Za funkciju g_2, opet iz (2.17) i (2.19), vidimo da su $b_{n,\infty}^*$, a_∞ i b_∞^* Laurentovi polinomi koji ne sadrže pozitivne potencije od z i da a_∞ ima ne-nul slobodni član. Posebno, $b_{n,\infty}^*$ ima u ∞ nultočku reda n pa polinom $z \mapsto z^{n-k} b_{n,\infty}^*(z)$ ima u ∞ nultočku reda k te je

$$g_2(\infty) := \lim_{z \to \infty} g_2(z) = 0$$

pa je i drugi integral u (2.29) jednak nuli, te smo dokazali ortogonalnost polinoma φ_n. Za $k = n$ analognom analizom dobivamo da je

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n(z), z^n \rangle &= \int_{S^1} \left(\frac{a_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty^*(z) + b_\infty(z)} - \frac{b_{n,\infty}^*(z)}{a_\infty(z) + b_\infty^*(z)} \right) \mathrm{d}s(z) \\ &= \frac{a_{n,\infty}^*(0)}{a_\infty^*(0) + b_\infty(0)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_{k=n+1}^{\infty} A_k}{\prod_{k=1}^{\infty} A_k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} A_k}.$$

Kako je vodeći koeficijent od φ_n jednak $\prod_{k=1}^{n} A_k$, imamo da je

$$\|\varphi_n\|^2 = \left\langle \prod_{k=1}^{n} A_k z^n, \varphi_n(z) \right\rangle = \prod_{k=1}^{n} A_k \left\langle z^n, \varphi_n(z) \right\rangle = 1$$

te smo sada dokazali da su polinomi φ_n i ortonormirani.

Pronađimo za kraj ovog odjeljka niz Verblunskyjevih koeficijenata pridružen skupu polinoma $\{\varphi_n(z) : n \geq 0\}$. Prvo uočimo da formulu (2.27) možemo zapisati i matrično:

$$\begin{bmatrix} z^{-n}\varphi_n(z) & z^n\varphi_n^*(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n(z) & b_n(z) \\ b_n^*(z) & a_n^*(z) \end{bmatrix}.$$

Sada iz rekurzije (2.20) imamo

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} z^{-n-1}\varphi_{n+1}(z) & z^{n+1}\varphi_{n+1}^*(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z^{-n}\varphi_n(z) & z^n\varphi_n^*(z) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-|F_{n+1}|^2}} \begin{bmatrix} 1 & F_{n+1}z^{n+1} \\ \overline{F_{n+1}}z^{-n-1} & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

iz čega dobivamo

$$z^{-n-1}\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-|F_{n+1}|^2}} \left(z^{-n}\varphi_n(z) + z^n\varphi_n^*(z)\overline{F_{n+1}}z^{-n-1} \right).$$

Množeći gornju jednakost sa z^{n+1} dalje dobivamo

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-|F_{n+1}|^2}} z\varphi_n(z) + \frac{\overline{F_{n+1}}}{\sqrt{1-|F_{n+1}|^2}} z^n\varphi_n^*(z),$$

tj.

$$\varphi_{n+1}(z) = A_{n+1}z\varphi_n(z) + \overline{B_{n+1}}z^n\varphi_n^*(z). \tag{2.30}$$

Sada iz (2.30) slijedi

$$\kappa_{n+1}\Phi_{n+1}(z) = A_{n+1}\kappa_n z\Phi_n(z) + \overline{B_{n+1}}\kappa_n z^n\Phi_n^*(z),$$

odnosno

$$\Phi_{n+1}(z) = \frac{A_{n+1}\kappa_n}{\kappa_{n+1}} z\Phi_n(z) + \frac{\overline{B_{n+1}}\kappa_n}{\kappa_{n+1}} z^n\Phi_n^*(z).$$

Uvrštavajući (2.28) u gornju jednakost dobivamo

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \overline{\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}} z^n \Phi_n^*(z)$$

pa slijedi da su Verblunskyjevi koeficijenti

$$\alpha_n = -\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}},$$

odnosno, u terminima niza $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dobivamo da je

$$\alpha_n = -F_{n+1}.$$

Poglavlje 3

LAKUNARNI SU(1,1) TRIGONOMETRIJSKI PRODUKTI

Za potrebe ovog poglavlja prisjetimo se definicije $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskih produkata (definicija 2.17), te ih povežimo s konceptom lakunarnih trigonometrijskih redova.

3.1 Uvodne definicije i rezultati

Na početku uvedimo definiciju jedne nelinearne varijante lakunarnog niza.

Definicija 3.1 Kažemo da je niz prirodnih brojeva $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ *dovoljno lakunaran* ako su sve frekvencije u konačnim produktima

$$\begin{bmatrix} a_N(t) & b_N(t) \\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)} \end{bmatrix} := \prod_{j=1}^{N} \begin{bmatrix} A_j & B_j e^{2\pi i m_j t} \\ \overline{B_j} e^{-2\pi i m_j t} & A_j \end{bmatrix}$$

međusobno različite za svaki $N \in \mathbb{N}$, kad god su $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva i $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva takvi da je $A_n^2 - |B_n|^2 = 1$.

Uočimo da vrijede sljedeće rekurzivne formule:

$$a_N(t) = a_{N-1}(t)A_N + b_{N-1}(t)\overline{B_N}e^{-2\pi i m_N t}, \tag{3.1}$$

$$b_N(t) = a_{N-1}(t)B_N e^{2\pi i m_N t} + b_{N-1}(t)A_N. \tag{3.2}$$

Zapišimo radi ilustracije $a_N(t)$ i $b_N(t)$ za prvih nekoliko $N \in \mathbb{N}$:

$$a_1(t) = A_1,$$
$$b_1(t) = B_1 e^{2\pi i m_1 t},$$
$$a_2(t) = A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2} e^{2\pi i(m_1-m_2)t},$$
$$b_2(t) = A_1 B_2 e^{2\pi i m_2 t} + B_1 A_2 e^{2\pi i m_1 t},$$
$$a_3(t) = A_1 A_2 A_3 + B_1 \overline{B_2} A_3 e^{2\pi i(m_1-m_2)t} + A_1 B_2 \overline{B_3} e^{2\pi i(m_2-m_3)t} + B_1 A_2 \overline{B_3} e^{2\pi i(m_1-m_3)t},$$
$$b_3(t) = A_1 A_2 B_3 e^{2\pi i m_3 t} + A_1 B_2 A_3 e^{2\pi i m_2 t} + B_1 A_2 A_3 e^{2\pi i m_1 t} + B_1 \overline{B_2} B_3 e^{2\pi i(m_1-m_2+m_3)t}.$$

Nadalje, zapišimo posebno frekvencije koje se pojavljuju u tim produktima za $N \leq 4$ kako bismo uočili pravilnost koja će se pojaviti u produktima matrica i koju ćemo precizno i napisati:

(i) u $a_N(t)$:
$$\begin{aligned} N &= 1 : 0, \\ N &= 2 : 0, m_1 - m_2, \\ N &= 3 : 0, m_1 - m_2, m_1 - m_3, m_2 - m_3, \\ N &= 4 : 0, m_1 - m_2, m_1 - m_3, m_1 - m_4, m_2 - m_3, m_2 - m_4, m_3 - m_4, \\ &\quad m_1 - m_2 + m_3 - m_4; \end{aligned}$$

(ii) u $b_N(t)$:
$$\begin{aligned} N &= 1 : m_1, \\ N &= 2 : m_1, m_2, \\ N &= 3 : m_1, m_2, m_3, m_1 - m_2 + m_3, \\ N &= 4 : m_1, m_2, m_3, m_4, m_1 - m_2 + m_3, m_1 - m_2 + m_4, m_1 - m_3 + m_4, \\ &\quad m_2 - m_3 + m_4. \end{aligned}$$

Sada možemo precizno napisati frekvencije koje se pojavljuju u našim produktima te koristeći se rekurzivnim relacijama (3.1) i (3.2) to i dokazati. U a_N frekvencije su sume parnog broja sumanada m_j s alterniranim predznacima počevši od $+$. Dakle, za $N \in \mathbb{N}$ iz konačnog niza $(m_j)_{j=1}^N$ uzimamo podnizove $(m_{j_k})_{k=1}^{2n}$, $n \geq 1$ i $2n \leq N$ i među frekvencijama se tada nalaze sume oblika $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} m_{j_k}$, za sve n takve da je $n \geq 1$ i $2n \leq N$. Potom još uključujemo frekvenciju 0, koju možemo pridružiti praznom podnizu, tj. za $n = 0$. U b_N frekvencije su sume neparnog broja sumanada m_j s alterniranim predznacima, također počevši od $+$. Dakle, za $N \in \mathbb{N}$ iz konačnog niza $(m_j)_{j=1}^N$ uzimamo podnizove $(m_{j_k})_{k=1}^{2n-1}$, $n \geq 1$ i $2n-1 \leq N$ i među frekvencijama se tada nalaze sume oblika $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1} m_{j_k}$, za sve n takve da je $n \geq 1$ i $2n-1 \leq N$.

Dokažimo gornje tvrdnje indukcijom po N, istodobno i za a_N i za b_N. Za $N = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $N-1$ i dokažimo da ona vrijedi i za N. Iz prvog sumanda iz relacije (3.1) vidimo da se svakako u a_N nalaze sve one frekvencije koje se nalaze i u a_{N-1}, koje po pretpostavci indukcije zadovoljavaju gornju tvrdnju. Iz drugog sumanda te relacije vidimo da nove frekvencije koje se pojavljuju u

a_N nastaju tako da se svim frekvencijama iz b_{N-1} oduzme m_N. Dakle, zbog pretpostavke indukcije koja vrijedi za b_{N-1} nove frekvencije su oblika

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}m_{j_k} - m_N, \quad \text{za } n \geq 1 \text{ i } 2n-1 \leq N-1.$$

Kako se zbog pretpostavke indukcije u b_{N-1} nalaze gore opisane frekvencije, prvo vidimo da zbog neparnog broja članova u tim sumama zadnji član dolazi s predznakom $+$, i kada takvim sumama oduzmemo još na kraju m_N, suma ostaje alternirana i ima paran broj članova. Sada možemo sve frekvencije iz a_N napisati onako kako je i opisano u tvrdnji. Time smo dokazali tvrdnju za a_N. Analogno dokazujemo tvrdnju i za b_N. Uočimo i da su sve frekvencije u b_N strogo veće od 0, a u a_N manje ili jednake 0. Nadalje, sve frekvencije za fiksirani $N \in \mathbb{N}$ nalaze se u intervalu $[m_1 - m_N, m_N]$.

Dokažimo sada nekoliko tvrdnji povezanih s dovoljno lakunarnim nizovima koje će nam biti korisne u dokazima raznih teorema.

Propozicija 3.2 *Neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva. Ako je $m_{j+1} \geq 2m_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$, tada je on dovoljno lakunaran.*

Dokaz. Kako su sve frekvencije u b_N strogo veće od 0, a u a_N manje ili jednake od 0, svakako su frekvencije u a_N i b_N međusobno različite. Tvrdnju propozicije dokazujemo indukcijom po N za sve eksponente koji se pojavljuju, znači istodobno za one i u a_N i u b_N. Za $N = 1$ u a_1 i b_1 eksponenti su samo 0 i m_1. Dakle, baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo nadalje da tvrdnja vrijedi za sve $M \leq N$, $M \in \mathbb{N}$. Tada se sve frekvencije nalaze u intervalu $[m_1 - m_N, m_N]$. Korak indukcije provodimo u ovisnosti o tome pojavljuje li se u sumi m_{N+1}. Sve one frekvencije kojima se u sumi ne pojavljuje m_{N+1} po pretpostavci indukcije međusobno su različite pa promatrajmo sada one u kojima imamo m_{N+1} u sumi i to ćemo razdvojiti na dva slučaja.

(i) Ako u sumi imamo neparan broj članova, tj. suma je u b_{N+1}, tada vrijedi

$$m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots - m_{j_{2n}} + \underbrace{m_{N+1}}_{\geq 2m_N} \geq m_{j_1} \underbrace{-m_{j_2} + \cdots - m_{j_{2n}} + m_N}_{\geq 0} + m_N > m_N \quad (3.3)$$

pa su u b_{N+1} sve one frekvencije koje imaju m_{N+1} različite od onih koje ga nemaju. Preostaje još pokazati da su i one frekvencije koje imaju u sumi član m_{N+1} međusobno različite. Kada uspoređujemo dvije takve frekvencije, dovoljno je pokazati da su sume bez m_{N+1} različite, a to jesu po pretpostavci za a_M, $M \leq N$, jer tada uspoređujemo dvije sume s parnim brojem članova pri čemu je najveći član m_M.

(ii) Ako u sumi imamo paran broj članova, tj. suma je u a_{N+1}, tada vrijedi

$$\begin{aligned} m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n-1}} - \underbrace{m_{N+1}}_{\geq 2m_N} &\leq \underbrace{m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n}} - m_N}_{\leq 0} - m_N \\ &\leq -m_N < m_1 - m_N \end{aligned}$$

pa su i u a_{N+1} sve one frekvencije koje sadržavaju m_{N+1} različite od onih koje ga nemaju. Preostaje i ovdje još pokazati da su i one frekvencije koje imaju u sumi član m_{N+1} međusobno različite. Kada uspoređujemo dvije takve frekvencije, opet je dovoljno pokazati da su sume bez m_{N+1} različite, a to jesu po pretpostavci za b_M, $M \leq N$, jer tada uspoređujemo dvije sume s neparnim brojem članova pri čemu je najveći član m_M. ∎

Napomena 3.3 Za slučaj kada je $m_j = 2^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$ frekvencije pokrivaju točno sve cijele brojeve. Najprije uočimo da je to slučaj kada je zapravo $m_{j+1} = 2m_j$, $j \in \mathbb{N}$ i $m_1 = 1$ pa je taj niz po propoziciji 3.2 dovoljno lakunaran. Nadalje, za $N \in \mathbb{N}$ imamo točno 2^N različitih frekvencija koje se nalaze u intervalu $\left[1 - 2^{N-1}, 2^{N-1}\right]$. Kako je duljina tog intervala jednaka $2^{N-1} - (1 - 2^{N-1}) + 1 = 2^N$, vidimo da te frekvencije moraju onda pokrivati točno sve cijele brojeve u tom intervalu, i to vrijedi za svaki N.

Propozicija 3.4 *Ako je niz $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dovoljno lakunaran, tada vrijedi*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} \geq 2.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\limsup_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} < 2$. To znači da postoje $\varepsilon > 0$ i $M \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $j \geq M$ vrijedi $\frac{m_{j+1}}{m_j} \leq 2 - \varepsilon$. Posebno, za $N \geq M$ vrijedi

$$m_N \leq (2-\varepsilon)^{N-M} m_M. \tag{3.4}$$

Niz $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ je dovoljno lakunaran, što znači da su sve frekvencije različite, pa ih za $N \in \mathbb{N}$ mora biti točno 2^N i sve se nalaze u intervalu $[m_1 - m_N, m_N]$ koji je duljine $m_N - (m_1 - m_N) + 1 = 2m_N - m_1 + 1 \leq 2m_N$. Kako su sve one različite, mora biti

$$2m_N \geq 2^N, \text{ tj. } m_N \geq 2^{N-1}, \text{ za svaki } N. \tag{3.5}$$

Sada iz (3.4) i (3.5) slijedi

$$2^{N-1} \leq (2-\varepsilon)^{N-M} m_N,$$

odnosno

$$\left(\frac{2}{2-\varepsilon}\right)^N \leq 2(2-\varepsilon)^{-M} m_M.$$

Puštajući $N \to \infty$ iz prethodne nejednakosti dobivamo da je beskonačno manje od nečeg konačnog, što je kontradikcija pa smo dokazali tvrdnju. ■

Propozicija 3.5 *Neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva. Ako je $m_{j+1} \geq 2m_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$, tada se sve frekvencije iz* SU(1, 1) *trigonometrijskog produkta*

$$\prod_{j=M+1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_j & B_j e^{2\pi i m_j t} \\ \overline{B_j} e^{-2\pi i m_j t} & A_j \end{bmatrix}, \quad M \in \mathbb{N}_0,$$

međusobno razlikuju barem za m_{M+1}.

Dokaz. Prvo označimo

$$\begin{bmatrix} a_{M,N}(t) & b_{M,N}(t) \\ \overline{b_{M,N}(t)} & \overline{a_{M,N}(t)} \end{bmatrix} := \prod_{j=M+1}^{N} \begin{bmatrix} A_j & B_j e^{2\pi i m_j t} \\ \overline{B_j} e^{-2\pi i m_j t} & A_j \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

za $N \geq M + 1$. Ovaj dokaz ćemo provesti indukcijom po N. Dakle, baza indukcije je za $N = M + 1$ i tada tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve $N' \in \mathbb{N}$, $N' \leq N$ i dokažimo je za $N + 1$. Promatrajmo samo one frekvencije koje u svojoj sumi imaju član m_{N+1}, jer za one koje ga nemaju tvrdnja vrijedi po pretpostavci indukcije. Ako uzmemo jednu frekvenciju u $b_{M,N+1}$, a drugu u $a_{M,N+1}$ njihova razlika je, zato što su sve frekvencije u $a_{M,N+1}$ manje ili jednake 0, barem m_{M+1}. Naime, svaka frekvencija u $b_{M,N+1}$ alternirana je suma s neparnim brojem članova iz konačnog niza $(m_j)_{j=M+1}^{N+1}$, odnosno oblika

$$m_{j_1} - m_{j_2} + m_{j_3} - \cdots - m_{j_{2n}} + m_{j_{2n+1}}, \quad \text{za } n \geq 0 \text{ i } 2n + 1 \leq N - M + 1,$$

te vrijedi

$$\underbrace{m_{j_1}}_{\geq m_{M+1}} + \underbrace{\left(-m_{j_2} + m_{j_3}\right)}_{>0} - \cdots + \underbrace{\left(-m_{j_{2n}} + m_{j_{2n+1}}\right)}_{>0} \geq m_{M+1}.$$

Dakle, svaka frekvencija u $b_{M,N+1}$ veća je ili jednaka od m_{M+1} pa, ako joj oduzmemo bilo koju frekvenciju u $a_{M,N+1}$, koja je manja ili jednaka 0, zapravo je još više povećavamo pa je svakako veća ili jednaka od m_{M+1}.

Ako uzmemo dvije frekvencije u $b_{M,N+1}$ koje obje u svojoj sumi sadržavaju član m_{N+1}, tada se, kada ih oduzmemo, taj član pokrati, a razlika preostalih članova je po pretpostavci indukcije barem m_{M+1}. Ako uzmemo dvije frekvencije u $b_{M,N+1}$ od kojih samo jedna u svojoj sumi sadrži član m_{N+1}, tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&\Big(m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots - m_{j_{2n}} + \underbrace{m_{N+1}}_{\geq 2m_N}\Big) - \Big(m_{j_1'} - m_{j_2'} + \cdots - m_{j_{2n'}'} + m_{j_{2n'+1}'}\Big)\\
&\geq m_{j_1} + \Big(\underbrace{-m_{j_2} + \cdots - m_{j_{2n}} + m_N}_{\geq 0}\Big) + m_N + \Big(\underbrace{-m_{j_1'} + m_{j_2'} - \cdots + m_{j_{2n'}'}}_{\geq 0}\Big) - m_{j_{2n'+1}'}\\
&\geq m_{j_1} + m_N - m_{j_{2n'}'} \geq m_{j_1} \geq m_{M+1}.
\end{aligned}$$

Ako uzmemo dvije frekvencije u $a_{M,N+1}$ koje obje u svojoj sumi sadržavaju član m_{N+1} ponovno, zbog toga što će se taj član pokratiti, dobit ćemo da je razlika preostalih članova po pretpostavci indukcije barem m_{M+1}. Ako uzmemo dvije frekvencije u $a_{M,N+1}$ od kojih samo jedna u svojoj sumi sadrži član m_{N+1}, tada za onu koja u sebi sadrži član m_{N+1} vrijedi

$$\begin{aligned}
&m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n-1}} - \underbrace{m_{N+1}}_{\geq 2m_N}\\
&\leq \Big(\underbrace{m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n-1}} - m_N}_{\leq 0}\Big) - m_N \leq -m_N,
\end{aligned}$$

a, kako se ovdje radi o negativnim cijelim brojevima, to zapravo znači da je

$$\Big|m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n-1}} - m_{N+1}\Big| \geq |m_N|.$$

Sada kada gledamo razliku te dvije frekvencije imamo

$$\begin{aligned}
&\Big|m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_{2n-1}} - m_{N+1}\Big| - \underbrace{\Big|m_{j_1'} - m_{j_2'} + \cdots + m_{j_{2n'-1}'} - m_{j_{2n'}'}\Big|}_{\leq m_N - m_{j_1'}}\\
&\geq m_N - \Big(m_N - m_{j_1'}\Big) = m_{j_1'} \geq m_{M+1}.
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.6 *Ako je niz $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dovoljno lakunaran, tada vrijede sljedeće jednakosti:*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \Big(|a_N(t)|^2 + |b_N(t)|^2\Big)\,\mathrm{d}t = \prod_{j=1}^{N} \Big(A_j^2 + |B_j|^2\Big)$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \Big(|a_N(t) - A_1\cdots A_N|^2 + |b_N(t)|^2\Big)\,\mathrm{d}t = \prod_{j=1}^{N} \Big(A_j^2 + |B_j|^2\Big) - \prod_{j=1}^{N} A_j^2.$

Dokaz. (i) Dokažimo tvrdnju indukcijom po N. Za $N = 1$ tvrdnja vrijedi jer je

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(|a_1(t)|^2 + |b_1(t)|^2\Big)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \Big(A_1^2 + \Big|B_1 e^{2\pi i m_1 t}\Big|^2\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1^2 + |B_1|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{T}} \left| e^{2\pi i m_1 t} \right|^2 \mathrm{d}t}_{=1} \\
&= A_1^2 + |B_1|^2 .
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za N i dokažimo je za $N+1$. Po rekurzivnim jednakostima (3.1) i (3.2) vrijedi

$$
\begin{aligned}
\left\| a_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} &= \left\| a_N(t) A_{N+1} + b_N(t) \overline{B_{N+1}} e^{-2\pi i m_{N+1} t} \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} , \\
\left\| b_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} &= \left\| a_N(t) B_{N+1} e^{2\pi i m_{N+1} t} + b_N(t) A_{N+1} \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} .
\end{aligned}
$$

Sada zbog dovoljne lakunarnosti i teorema 2.8 vrijedi

$$
\begin{aligned}
\left\| a_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} &= \| a_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} A_{N+1}^2 + \| b_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} |B_{N+1}|^2, \\
\left\| b_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} &= \| a_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} |B_{N+1}|^2 + \| b_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} A_{N+1}^2 .
\end{aligned}
$$

Zbrajajući te dvije jednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\left\| a_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} + \left\| b_{N+1}(t) \right\|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} \\
&= \left(\| a_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} + \| b_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} \right) A_{N+1}^2 + \left(\| a_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} + \| b_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} \right) |B_{N+1}|^2 \\
&= \left(\| a_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} + \| b_N(t) \|^2_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})} \right) \left(A_{N+1}^2 + |B_{N+1}|^2 \right) ,
\end{aligned}
$$

pri čemu je prvi faktor po pretpostavci indukcije jednak $\prod_{j=1}^N \left(A_j^2 + |B_j|^2 \right)$ pa slijedi

$$
\int_{\mathbb{T}} \left(\left| a_{N+1}(t) \right|^2 + \left| b_{N+1}(t) \right|^2 \right) \mathrm{d}t = \prod_{j=1}^{N+1} \left(A_j^2 + |B_j|^2 \right) .
$$

(ii) Uočimo prvo da je

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} |a_N(t) - A_1 \cdots A_N|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \Big(a_N(t) - A_1 \cdots A_N \Big) \Big(\overline{a_N(t) - A_1 \cdots A_N} \Big) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(a_N(t) - A_1 \cdots A_N \right) \left(\overline{a_N(t)} - A_1 \cdots A_N \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(|a_N(t)|^2 - a_N(t) A_1 \cdots A_N - \overline{a_N(t)} A_1 \cdots A_N + (A_1 \cdots A_N)^2 \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} |a_N(t)|^2 \,\mathrm{d}t - (A_1 \cdots A_N)^2 ,
\end{aligned}
$$

jer je

$$
\int_{\mathbb{T}} a_N(t) \,\mathrm{d}t = A_1 \cdots A_N .
$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \left(|a_N(t) - A_1 \cdots A_N|^2 + |b_N(t)|^2\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} |a_N(t)|^2 \,\mathrm{d}t - (A_1 \cdots A_N)^2 + \int_{\mathbb{T}} |b_N(t)|^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(|a_N(t)|^2 + |b_N(t)|^2\right) \mathrm{d}t - (A_1 \cdots A_N)^2 ,
\end{aligned}$$

a to je koristeći (i) jednako

$$= \prod_{j=1}^{N} \left(A_j^2 + |B_j|^2\right) - \prod_{j=1}^{N} A_j^2. \qquad \blacksquare$$

Napomena 3.7 Zapišimo

$$a_N(t) = \sum_{n\in E_N} C_n e^{2\pi int} \tag{3.7}$$

pri čemu nam je $E_N \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija koje se pojavljuju u standardnom zapisu od a_N, odnosno to je skup svih frekvencija za koje Fourierovi koeficijenti od a_N nisu nula. Analogno, zapišimo i

$$b_N(t) = \sum_{n\in F_N} D_n e^{2\pi int}, \tag{3.8}$$

pri čemu nam je sada $F_N \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija koje se pojavljuju u standardnom zapisu od b_N. Uočimo da nam teorem 3.6 zapravo kaže

$$\sum_{n\in E_N\cup F_N} \left(|C_n|^2 + |D_n|^2\right) = \prod_{j=1}^{N} \left(A_j^2 + |B_j|^2\right),$$

uz uvjet da je polazni niz $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dovoljno lakunaran.

Lakunarni SU$(1,1)$ trigonometrijski produkti mogu se dovesti u vezu s lakunarnim (rijetkim) Verblunskyjevim koeficijentima, koji su pak proučavani u [9], [10], [24], [25].

3.2 Odabir metrike na SU(1,1)

Definirajmo funkciju $\rho\colon \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1) \to \mathbb{R}$ s

$$\rho(G_1, G_2) := \log\left(1 + \left\|G_1^{-1} G_2 - I_2\right\|_{op}\right),$$

pri čemu je I_2 jedinična matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Taj odabir metrike bit će geometrijski opravdan u pododjeljku 3.2.1. Napomenimo da je do istog odabira metrike nezavisno došao D. Oliveira e Silva u radu [23], koji se bavi nešto drukčijom tematikom (diskretnim varijacijskim

L^p ocjenama). Uočimo da iz leme 2.21 za $\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ slijedi

$$\left\| \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} - I_2 \right\|_{op} = |A-1| + |B|$$

pa za $G_1 := \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$ i $G_2 := \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\rho(G_1, G_2) &= \rho\left(\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix} \right) \\
&= \log\left(1 + \left\| \begin{bmatrix} \overline{A_1} & -B_1 \\ -\overline{B_1} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix} - I_2 \right\|_{op} \right) \\
&= \log\left(1 + \left\| \begin{bmatrix} \overline{A_1}A_2 - B_1\overline{B_2} & \overline{A_1}B_2 - B_1\overline{A_2} \\ -\overline{B_1}A_2 + A_1\overline{B_2} & -\overline{B_1}B_2 + A_1\overline{A_2} \end{bmatrix} - I_2 \right\|_{op} \right) \\
&= \log\left(1 + \left| \overline{A_1}A_2 - B_1\overline{B_2} - 1 \right| + \left| \overline{A_1}B_2 - B_1\overline{A_2} \right| \right).
\end{aligned}$$

Lema 3.8 *Funkcija ρ je potpuna metrika na* $\mathrm{SU}(1,1)$.

Dokaz. Pokažimo prvo da je ρ metrika. Neka su $G_1, G_2, G_3 \in \mathrm{SU}(1,1)$. Uočimo da je $\rho(G_1, G_2) \geq \log 1 = 0$. Provjerimo zatim da funkcija ρ zadovoljava svojstva iz definicije 2.1.

(i) Uočimo da vrijedi $G_1 = G_2 \Rightarrow \rho(G_1, G_2) = \log 1 = 0$. S druge strane, imamo $\rho(G_1, G_2) = 0 \Rightarrow \left\| G_1^{-1}G_2 - I_2 \right\|_{op} = 0 \Rightarrow G_1^{-1}G_2 = I_2 \Rightarrow G_1 = G_2$.

(ii) Zapišimo $G_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$ i $G_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix}$ i izračunajmo $\rho(G_1, G_2)$ i $\rho(G_2, G_1)$:

$$\rho(G_1, G_2) = \log\left(1 + \left| \overline{A_1}A_2 - B_1\overline{B_2} - 1 \right| + \left| \overline{A_1}B_2 - B_1\overline{A_2} \right| \right),$$

$$\begin{aligned}
\rho(G_2, G_1) &= \log\left(1 + \left| \overline{A_2}A_1 - B_2\overline{B_1} - 1 \right| + \left| \overline{A_2}B_1 - B_2\overline{A_1} \right| \right) \\
&= \log\left(1 + \left| \overline{\overline{A_2}A_1 - B_2\overline{B_1} - 1} \right| + \left| \overline{A_2}B_1 - B_2\overline{A_1} \right| \right) \\
&= \log\left(1 + \left| \overline{A_1}A_2 - B_1\overline{B_2} - 1 \right| + \left| (-1)\left(\overline{A_1}B_2 - B_1\overline{A_2} \right) \right| \right) \\
&= \log\left(1 + \left| \overline{A_1}A_2 - B_1\overline{B_2} - 1 \right| + \left| \overline{A_1}B_2 - B_1\overline{A_2} \right| \right).
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo $\rho(G_1, G_2) = \rho(G_2, G_1)$.

(iii) Uočimo da je

$$\rho(G_1, G_3) = \log\left(1 + \left\|G_1^{-1}G_3 - I_2\right\|_{op}\right) = \log\left(1 + \left\|G_1^{-1}G_2G_2^{-1}G_3 - I_2\right\|_{op}\right)$$

te označimo $G_1^{-1}G_2 := \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$, $G_2^{-1}G_3 := \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix}$. Tada je

$$\begin{aligned}\rho(G_1, G_2) &= \log\left(1 + \left\|G_1^{-1}G_2 - I_2\right\|_{op}\right) = \log\left(1 + \left\|\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix} - I_2\right\|_{op}\right) \\ &= \log\left(1 + |A_1 - 1| + |B_1|\right), \\ \rho(G_2, G_3) &= \log\left(1 + \left\|G_2^{-1}G_3 - I_2\right\|_{op}\right) = \log\left(1 + \left\|\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix} - I_2\right\|_{op}\right) \\ &= \log\left(1 + |A_2 - 1| + |B_2|\right).\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}&\rho(G_1, G_2) + \rho(G_2, G_3) = \log\left(1 + |A_1 - 1| + |B_1|\right) + \log\left(1 + |A_2 - 1| + |B_2|\right) \\ &= \log\Big(\left(1 + |A_1 - 1| + |B_1|\right)\left(1 + |A_2 - 1| + |B_2|\right)\Big) \\ &= \log\big(1 + |A_1 - 1| + |B_1| + |A_2 - 1| + |A_1 - 1||A_2 - 1| + |A_2 - 1||B_1| + \\ &\quad + |B_2| + |A_1 - 1||B_2| + |B_1||B_2|\big)\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\rho(G_1, G_3) &= \log\left(1 + \left\|\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{A_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ \overline{B_2} & \overline{A_2} \end{bmatrix} - I_2\right\|_{op}\right) \\ &= \log\left(1 + \left\|\begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1\overline{B_2} & A_1B_2 + B_1\overline{A_2} \\ \overline{B_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{B_2} & \overline{B_1}B_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2} \end{bmatrix} - I_2\right\|_{op}\right) \\ &= \log\left(1 + \left|A_1A_2 + B_1\overline{B_2} - 1\right| + \left|A_1B_2 + B_1\overline{A_2}\right|\right) \\ &= \log\Big(1 + \left|(A_1 - 1)(A_2 - 1) + (A_1 - 1) + (A_2 - 1) + B_1\overline{B_2}\right| + \\ &\quad + \left|(A_1 - 1)B_2 + B_2 + \overline{(A_2 - 1)}B_1 + B_1\right|\Big) \\ &\leq \log\big(1 + |A_1 - 1||A_2 - 1| + |A_1 - 1| + |A_2 - 1| + |B_1||B_2| + \\ &\quad + |A_1 - 1||B_2| + |B_2| + |A_2 - 1||B_1| + |B_1|\big) \\ &= \log\Big(\left(1 + |A_1 - 1| + |B_1|\right)\left(1 + |A_2 - 1| + |B_2|\right)\Big) \\ &= \rho(G_1, G_2) + \rho(G_2, G_3).\end{aligned}$$

Dokažimo sada potpunost metrike ρ. Neka je $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ \overline{B_n} & \overline{A_n} \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathrm{SU}(1,1)$. Pokažimo da taj niz i konvergira u $\mathrm{SU}(1,1)$. Iz pretpostavke da je niz Cauchyjev slijedi da je

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(G_n, G_m) = 0$$

te iz toga dobivamo sljedeće limese:

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n}A_m - B_n\overline{B_m} - 1\right) = 0, \tag{3.9}$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n}B_m - B_n\overline{A_m}\right) = 0. \tag{3.10}$$

Kako ograničenost u metrici ρ povlači ograničenost po elementima, smijemo pomnožiti (3.9) s $\overline{A_m}$ i (3.10) s $\overline{B_m}$ i dobivamo da je

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n}|A_m|^2 - B_n\overline{B_m A_m} - \overline{A_m}\right) = 0,$$
$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n}|B_m|^2 - B_n\overline{A_m B_m}\right) = 0.$$

Ako zbrojimo gornja dva limesa, slijedi da je

$$\lim_{n,m\to\infty} \Big(\overline{A_n}\big(\underbrace{|A_m|^2 - |B_m|^2}_{=1}\big) - \overline{A_m}\Big) = \lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n} - \overline{A_m}\right) = 0$$

pa je i

$$\lim_{n,m\to\infty} (A_n - A_m) = 0.$$

Dakle, niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev u $\mathbb{C}$ pa postoji

$$A := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Ako sada pomnožimo (3.9) s B_m, a (3.10) s A_m i oduzmemo ih, dobivamo

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\overline{A_n}A_m B_m - B_n|B_m|^2 - B_m - \overline{A_n}B_m A_m + B_n|A_m|^2\right) = \lim_{n,m\to\infty} (B_n - B_m) = 0,$$

što znači da je i niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathbb{C}$ pa postoji

$$B := \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Definirajmo sada $G := \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ te uočimo da vrijedi

$$|A|^2 - |B|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(|A_n|^2 - |B_n|^2\right) = 1$$

pa je $G \in \mathrm{SU}(1,1)$. Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{A_n}A - B_n\overline{B} - 1\right) = |A|^2 - |B|^2 - 1 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{A_n}B - B_n\overline{A}\right) = \overline{A}B - B\overline{A} = 0$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty}\rho(G_n,G) = \lim_{n\to\infty}\log\left(1 + |\overline{A_n}A - B_n\overline{B} - 1| + |\overline{A_n}B - B_n\overline{A}|\right) = 0,$$

odnosno pokazali smo da niz $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema G s obzirom na metriku ρ. ■

Napomena 3.9 Metrika ρ je invarijantna s obzirom na lijevo množenje, tj. vrijedi

$$\rho\left(GG_1, GG_2\right) = \rho\left(G_1, G_2\right), \text{ za } G, G_1, G_2 \in \mathrm{SU}(1,1).$$

Označimo skup svih izmjerivih funkcija $g\colon \mathbb{T} \to \mathrm{SU}(1,1)$ s $\mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1))$. Dakle,

$$\mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) := \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} : a,b\colon \mathbb{T}\to\mathbb{C} \text{ izmjerive, } |a(t)|^2 - |b(t)|^2 = 1, \forall t\in\mathbb{T} \right\}$$

te napomenimo da identificiramo funkcije koje se podudaraju g.s. Definirajmo sada funkciju $d_p\colon \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) \times \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) \to [0,\infty]$, za $p \ge 1$, s

$$d_p(g_1,g_2) := \left\| \rho\left(g_1(t), g_2(t)\right) \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}.$$

Za $0 < p < 1$ definiramo $d_p\colon \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) \times \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) \to [0,\infty]$ s

$$d_p(g_1,g_2) := \left\| \rho\left(g_1(t), g_2(t)\right) \right\|^p_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}.$$

Lema 3.10 *Funkcija d_p, za $p > 0$, zadovoljava svojstva metrike iz definicije 2.1.*

Napomena 3.11 Iz definicije vidimo da vrijednost funkcije d_p, za $p > 0$, ne mora biti konačna pa ona nije metrika, prema uobičajenoj definiciji, na cijelom skupu $\mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1))$.

Dokaz. Neka su $g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1))$. Dokažimo prvo tvrdnju za $p \ge 1$.

(i) Neka je $g_1 = g_2$, što znači da je $g_1(t) = g_2(t)$ za svaki $t\in\mathbb{T}$. Kako je ρ metrika, to znači da je $\rho(g_1(t), g_2(t)) = 0$ za svaki $t\in\mathbb{T}$ pa je $d_p(g_1,g_2) = 0$.
S druge strane, imamo

$$d_p(g_1,g_2) = 0 \Rightarrow \left\| \rho\left(g_1(t), g_2(t)\right) \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} = 0 \Rightarrow \rho(g_1(t), g_2(t)) = 0 \text{ za svaki } t\in\mathbb{T}.$$

Kako je ρ metrika, to znači da je $g_1(t) = g_2(t)$ za svaki $t\in\mathbb{T}$, odnosno vrijedi $g_1 = g_2$.

(ii) Uočimo da vrijedi

$$d_p(g_1,g_2) = \left\|\rho\left(g_1(t),g_2(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} = \left\|\rho\left(g_2(t),g_1(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} = d_p(g_2,g_1).$$

(iii) Koristeći se nejednakosti trokuta, prvo za metriku ρ, a zatim za L^p norme, dobivamo:

$$\begin{aligned}
d_p(g_1,g_3) &= \left\|\rho\left(g_1(t),g_3(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} \\
&\le \left\|\rho\left(g_1(t),g_2(t)\right)+\rho\left(g_2(t),g_3(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} \\
&\le \left\|\rho\left(g_1(t),g_2(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} + \left\|\rho\left(g_2(t),g_3(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} \\
&= d_p(g_1,g_2)+d_p(g_2,g_3).
\end{aligned}$$

Prisjetimo se da je, općenito, za $0<p<1$ s $d(f,g) \coloneqq \int_X |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu$ definirana metrika na L^p pa se dokaz da je i u ovom slučaju d_p metrika provodi slično kao i za $p\ge 1$. Prva dva svojstva dokazuju se potpuno analogno, dok se u dokazivanju nejednakosti trokuta u ovom slučaju koristi nejednakost trokuta za metriku d. ■

Uvedimo konstantnu funkciju $I\colon \mathbb{T}\to \mathrm{SU}(1,1)$ s $I(t)=I_2$ za svaki $t\in\mathbb{T}$. Definirajmo sada za $p>0$ skup

$$\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right) \coloneqq \left\{g\in \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) : d_p(I,g)<\infty\right\}.$$

Uočimo da je funkcija d_p metrika na $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right)$. Naime, vidjeli smo u lemi 3.10 da d_p zadovoljava svojstva metrike pa jedino još moramo vidjeti da je d_p konačna na $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right)$. Za $g_1,g_2\in \mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right)$ vrijedi nejednakost trokuta pa je

$$d_p(g_1,g_2)\le d_p(I,g_1)+d_p(I,g_2)<\infty.$$

Time smo pokazali da je $\left(\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right),d_p\right)$, za $p>0$, metrički prostor.

Napomena 3.12 Neka je $g=\begin{bmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}\in \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1))$. Tada je

$$d_p(I,g) = \left\|\log\left(1+\|g(t)-I_2\|_{op}\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})} = \left\|\log\left(1+|a(t)-1|+|b(t)|\right)\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})}.$$

Lema 3.13 $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right) = \left\{g\in \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)) : \left\|\log\|g(t)\|_{op}\right\|_{\mathrm{L}_t^p(\mathbb{T})}<\infty\right\}.$

Dokaz. Pretpostavimo da za $g\in \mathrm{M}(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1))$ vrijedi $d_p(I,g)<\infty$, tj. da je $g\in \mathrm{L}^p\left(\mathbb{T},\mathrm{SU}(1,1)\right)$. Uočimo

$$\|g(t)\|_{op}\le 1+\|g(t)-I_2\|_{op}$$

pa ako je $d_p(I,g) = \left\| \log\left(1 + \|g(t) - I_2\|_{op}\right) \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} < \infty$, vidimo da tada mora vrijediti i $\left\| \log \|g(t)\|_{op} \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} < \infty$.

S druge strane, pretpostavimo da za $g \in \mathrm{M}(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$ vrijedi $\left\| \log \|g(t)\|_{op} \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} < \infty$. Uočimo da je

$$1 + \|g(t) - I_2\|_{op} \leq \|g(t)\|_{op} + 2.$$

Kako za $x \geq 1$ vrijedi $x + 2 \leq 3x \Rightarrow \log(x+2) \leq \log x + \log 3$, a za $g \in \mathrm{M}(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$ iz leme 2.21 vidimo da je $\|g(t)\|_{op} \geq 1$ slijedi

$$\log\left(1 + \|g(t) - I_2\|_{op}\right) \leq \log \|g(t)\|_{op} + \log 3$$

te nadalje vrijedi

$$d_p(I,g) = \left\| \log\left(1 + \|g(t) - I_2\|_{op}\right) \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} \leq \left\| \log \|g(t)\|_{op} \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} + \log 3.$$

Dakle, ako za $g \in \mathrm{M}(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$ imamo $\left\| \log \|g(t)\|_{op} \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} < \infty$, slijedi da je onda i $d_p(I,g) < \infty$. ■

Teorem 3.14 *Metrički prostor* $\left(\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right), d_p\right)$*, za* $p > 0$*, je potpun.*

Dokaz. Želimo dokazati da svaki Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$ konvergira u $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$. Neka je prvo $p \geq 1$ te $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ \overline{b_n} & \overline{a_n} \end{bmatrix} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$. To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi

$$d_p\left(g_m, g_n\right) < \varepsilon.$$

Uzimamo li redom $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+k/p}}$, $k \in \mathbb{N}$, dobit ćemo podniz $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d_p\left(g_{n_k}, g_{n_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{k+k/p}}, \tag{3.11}$$

odnosno

$$\left\| \rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+1}}(t)\right) \right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2^{k+k/p}}.$$

Definirajmo $A_k := \left\{ t \in \mathbb{T} : \rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+1}}(t)\right) > \frac{1}{2^k} \right\}$, $k \in \mathbb{N}$. Tada po Čebiševljevoj nejednakosti vrijedi

$$|A_k| \leq \frac{\left\| \rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+1}}(t)\right) \right\|^p_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}}{\left(\frac{1}{2^k}\right)^p} = \frac{d_p\left(g_{n_k}, g_{n_{k+1}}\right)^p}{\left(\frac{1}{2^k}\right)^p} \leq \frac{\frac{1}{2^{pk+k}}}{\frac{1}{2^{pk}}} = \frac{1}{2^k}.$$

Nadalje, definirajmo $A := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$ pa imamo

$$|A| = \lim_{j\to\infty} \left| \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \right| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} |A_k| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0.$$

Uzmimo sada $t \in \mathbb{T}\backslash A$. To znači da postoji $k_0 = k_0(t) \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ vrijedi

$$\rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+1}}(t)\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Neka je sada $k \geq k_0$ i $j \geq 1$. Tada vrijedi

$$\rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+j}}(t)\right) \leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{k+i}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Iz toga vidimo da je $(g_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz s obzirom na metriku ρ. Kako smo pokazali, prostor $(\mathrm{SU}(1,1), \rho)$ je potpun što znači da za svaki $t \in \mathbb{T}\backslash A$ postoji

$$g(t) := \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$$

tako da je $\rho\left(g_{n_k}(t), g(t)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Iz dokaza leme 3.8 slijedi da su nizovi $(a_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ i $(b_{n_k}(t))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevi nizovi u $\mathbb{C}$, koji je potpun, pa su i konvergentni te je

$$a(t) = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}(t) \quad \text{i} \quad b(t) = \lim_{k\to\infty} b_{n_k}(t)$$

i funkcije a i b su izmjerive. Za $t \in A$ stavimo

$$a(t) := 1 \quad \text{i} \quad b(t) := 0$$

pa sada za sve $t \in \mathbb{T}$ vrijedi da je $g(t) \in \mathrm{SU}(1,1)$, odnosno $g \in \mathrm{M}(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$. Pokažimo sada da $g_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ s obzirom na metriku d_p te da je $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$. Iz gore pokazanog za g.s. $t \in \mathbb{T}$ slijedi

$$\rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+j}}(t)\right)^p \xrightarrow[j\to\infty]{} \rho\left(g_{n_k}(t), g(t)\right)^p,$$

dok zbog (3.11) imamo

$$d_p\left(g_{n_k}, g_{n_{k+j}}\right) \leq \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{2^{1+1/p}}\right)^{k+i} \leq \frac{\left(2^{1+1/p}\right)^{-k+1}}{2^{1+1/p} - 1}. \tag{3.12}$$

Fatouova lema daje

$$\begin{aligned}
d_p\left(g_{n_k}, g\right)^p &= \int_{\mathbb{T}} \lim_{j\to\infty} \rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+j}}(t)\right)^p \mathrm{d}t \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+j}}(t)\right)^p \mathrm{d}t \\
&= \liminf_{j\to\infty} d_p\left(g_{n_k}, g_{n_{k+j}}\right)^p,
\end{aligned}$$

a to je zbog (3.12)

$$\leq \frac{\left(2^{p+1}\right)^{-k+1}}{(2^{1+1/p}-1)^p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Usput primijetimo da je $d_p(g_{n_1}, g) < \infty$ pa je

$$d_p(I, g) \leq d_p(I, g_{n_1}) + d_p(g_{n_1}, g) < \infty,$$

tj. $g \in \mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$. Dakle, pronašli smo podniz Cauchyjevog niza koji konvergira s obzirom na metriku d_p prema g pa onda i cijeli niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema g s obzirom na istu metriku, odnosno vrijedi

$$d_p\left(g_n, g\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Za $0 < p < 1$ na početku uzimamo redom $\varepsilon = \frac{1}{2^{kp+k}}$, $k \in \mathbb{N}$ pa ćemo dobiti podniz $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$d_p\left(g_{n_k}, g_{n_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{kp+k}}.$$

Znači, opet smo kao i u prvom slučaju dobili da vrijedi

$$\left\|\rho\left(g_{n_k}(t), g_{n_{k+1}}(t)\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2^{k+k/p}},$$

te analognim postupkom na kraju dolazimo do podniza našeg Cauchyjevog niza, koji konvergira u $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$, pa onda i početni niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1)\right)$. ■

3.2.1 Veza metrike ρ i geometrije od SU(1,1)

Matrična grupa $\mathrm{SU}(1,1)$ je Liejeva grupa s pripadnom Liejevom algebrom

$$\mathfrak{su}(1,1) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} : A \in i\mathbb{R}, B \in \mathbb{C} \right\}.$$

To znači da je $\mathfrak{su}(1,1)$ tangencijalni prostor u jediničnoj matrici I_2. Uzmimo prvo proizvoljnu glatku krivulju $\gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathrm{SU}(1,1)$ za neki $\varepsilon > 0$ takvu da je $\gamma(0) = I_2$. Dakle,

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ \overline{B(t)} & \overline{A(t)} \end{bmatrix}$$

i za svaki $t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ vrijedi $|A(t)|^2 - |B(t)|^2 = 1$. Diferenciranjem te jednakosti dobivamo

$$A'(t)\overline{A(t)} + A(t)\overline{A'(t)} - B'(t)\overline{B(t)} - B(t)\overline{B'(t)} = 0,$$

odnosno

$$2\,\mathrm{Re}\Big(A'(t)\overline{A(t)} - B'(t)\overline{B(t)}\Big) = 0.$$

Uvrštavanjem $t = 0$ i korištenjem da je $A(0) = 1$ i $B(0) = 0$ slijedi $\mathrm{Re}\,A'(0) = 0$. Dakle,

$$\gamma'(0) = \begin{bmatrix} A'(0) & B'(0) \\ \overline{B'(0)} & \overline{A'(0)} \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} : A \in i\mathbb{R}, B \in \mathbb{C} \right\},$$

tj. cijeli tangencijalni prostor sadržan je u gornjem skupu. Obratno, taj je skup vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ čija baza je $\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Odabirom krivulja

$$\gamma_1(t) := \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1'(t) = \begin{bmatrix} ie^{it} & 0 \\ 0 & -ie^{-it} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1'(0) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2(t) := \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2'(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \\ \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3(t) := \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\, t & i\,\mathrm{sh}\, t \\ -i\,\mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_3'(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sh}\, t & i\,\mathrm{ch}\, t \\ -i\,\mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_3'(0) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da vektori brzina krivulja kroz I_2 doista razapinju cijeli gornji skup, odnosno tangencijalni prostor u I_2 baš je jednak tom skupu.

Eksponencijalno preslikavanje matrica možemo suziti na $\mathfrak{su}(1,1)$ tako da dobivamo preslikavanje $\exp\colon \mathfrak{su}(1,1) \to \mathrm{SU}(1,1)$ definirano uobičajenom formulom

$$\exp(M) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

Izračunajmo $\exp(M)$ za matrice $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(1,1)$ podjelom na tri slučaja.

(1) Ako je $|A| > |B|$, tada uz oznaku $D := \sqrt{|A|^2 - |B|^2}$ imamo

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos D + \frac{A \sin D}{D} & \frac{B \sin D}{D} \\ \frac{\overline{B} \sin D}{D} & \cos D + \frac{\overline{A} \sin D}{D} \end{bmatrix}.$$

(2) Ako je $|A| < |B|$, tada uz oznaku $D := \sqrt{|B|^2 - |A|^2}$ imamo

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} D + \frac{A \operatorname{sh} D}{D} & \frac{B \operatorname{sh} D}{D} \\ \frac{\overline{B} \operatorname{sh} D}{D} & \operatorname{ch} D + \frac{\overline{A} \operatorname{sh} D}{D} \end{bmatrix}.$$

(3) Ako je $|A| = |B|$, tada imamo

$$\exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + A & B \\ \overline{B} & 1 + \overline{A} \end{bmatrix}.$$

Vratimo se sada na metriku ρ i za $M = \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(1,1)$ izračunajmo

$$\rho\left(I_2, \exp(M)\right) = \log\left(1 + \left\|\exp(M) - I_2\right\|_{op}\right)$$

također diskutirajući o svakom od tri gore navedena slučaja. Nadalje, u svakom od tih slučajeva analizirat ćemo asimptotiku pojedinog izraza u okolini nul-matrice, tj. kada $\|M\|_{op} = |A| + |B| \to 0$. Pritom se u slučajevima (1) i (2) koristimo činjenicom da je $D \leq \max\{|A|, |B|\} \leq \|M\|_{op}$.

(1) Za $|A| > |B|$ imamo

$$\begin{aligned}
\rho\left(I_2, \exp(M)\right) &= \log\left(1 + \left|\cos D - 1 + \frac{A \sin D}{D}\right| + \left|\frac{B \sin D}{D}\right|\right) \\
&= \log\left(1 + \left|\mathcal{O}(D^2) + A(1 + \mathcal{O}(D^2))\right| + \left|B(1 + \mathcal{O}(D^2))\right|\right) \\
&= \log\left(1 + |A| + |B| + \mathcal{O}(D^2)\right) \\
&= |A| + |B| + \mathcal{O}\left((|A| + |B|)^2\right) \\
&= \|M\|_{op} + \mathcal{O}\left(\|M\|_{op}^2\right).
\end{aligned}$$

(2) Za $|A| < |B|$ imamo

$$\rho\left(I_2, \exp(M)\right) = \log\left(1 + \left|\operatorname{ch} D - 1 + \frac{A \operatorname{sh} D}{D}\right| + \left|\frac{B \operatorname{sh} D}{D}\right|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \log\left(1 + \left|\mathcal{O}(D^2) + A(1+\mathcal{O}(D^2))\right| + \left|B(1+\mathcal{O}(D^2))\right|\right) \\
&= \|M\|_{op} + \mathcal{O}\left(\|M\|_{op}^2\right).
\end{aligned}
$$

(3) Za $|A| = |B|$ imamo

$$
\begin{aligned}
\rho\left(I_2, \exp(M)\right) &= \log\left(1 + |A| + |B|\right) \\
&= |A| + |B| + \mathcal{O}\left((|A| + |B|)^2\right) \\
&= \|M\|_{op} + \mathcal{O}\left(\|M\|_{op}^2\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$
\rho\left(I_2, \exp(M)\right) = \|M\|_{op} + \mathcal{O}\left(\|M\|_{op}^2\right) \quad \text{kada} \quad \|M\|_{op} \to 0,
$$

tj. na nekoj okolini nul-matrice. Nadalje, prisjetimo se da je duljina glatke krivulje $\gamma\colon\ [\alpha, \beta] \to \mathrm{SU}(1,1)$ definirana s

$$
\ell(\gamma) := \int_\alpha^\beta \left\|\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\right\|_{op} \mathrm{d}t,
$$

pri čemu je na $\mathfrak{su}(1,1)$ bilo prirodno uzeti operatorsku normu. Ako su $G_1, G_2 \in \mathrm{SU}(1,1)$ "dovoljno blizu", tj. $G_1^{-1}G_2$ je iz neke okoline od I_2, tada postoji $M \in \mathfrak{su}(1,1)$ takva da je $G_1^{-1}G_2 = \exp(M)$. Definiramo li krivulju $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathrm{SU}(1,1)$ formulom

$$
\gamma(t) := G_1 \exp(tM),
$$

vidimo da je $\gamma(0) = G_1$, $\gamma(0) = G_1 \exp(M) = G_2$ te da vrijedi

$$
\gamma'(t) = G_1 \exp(tM)M = \gamma(t)M
$$

pa kažemo da je γ *integralna krivulja lijevo-invarijantnog vektorskog polja* pridruženog vektoru $M \in \mathfrak{su}(1,1)$ koja spaja G_1 i G_2. Posebno je

$$
\ell(G_1, G_2) := \ell(\gamma) = \int_0^1 \|M\|_{op} \,\mathrm{d}t = \|M\|_{op}.
$$

Iz već pokazanog slijedi

$$
\rho(G_1, G_2) = \rho(I_2, G_1^{-1}G_2) = \rho(I_2, \|M\|_{op}) = \|M\|_{op} + \mathcal{O}\left(\|M\|_{op}^2\right)
$$

pa imamo da je

$$
\rho(G_1, G_2) = \ell(G_1, G_2) + \mathcal{O}\left(\ell(G_1, G_2)^2\right)
$$

kada je $\ell(G_1, G_2)$ dovoljno malo. To znači da je $\rho(G_1, G_2)$ aproksimirano s $\ell(G_1, G_2)$ do na kvadratnu grešku.

Geodetska udaljenost između G_1 i G_2, u oznaci $\mathrm{geo}(G_1, G_2)$, definirana je kao infimum duljina svih glatkih krivulja od G_1 do G_2. U lemi C.1 iz [22] dokazano je da i za nju vrijedi

$$\mathrm{geo}(G_1, G_2) = \ell(G_1, G_2) + \mathcal{O}\left(\ell(G_1, G_2)^2\right)$$

kada je $\ell(G_1, G_2)$ dovoljno malo. Sve tri udaljenosti, ρ, ℓ i geo, na svoj su način prirodne i sve su lijevo-invarijantne. Premda bismo udaljenost od G_1 i G_2 mogli računati i kao $\|G_1 - G_2\|_{op}$, ta veličina nije prirodna jer nije lijevo-inavrijantna. Moguća modifikacija bila bi $\left\|I_2 - G_1^{-1}G_2\right\|_{op}$. Na kraju zaključimo da su sve "razumne" lijevo-invarijantne metrike približno jednake kada su G_1 i G_2 "međusobno blizu" i to do na kvadratnu grešku. Mi smo pažljivo odabrali varijantu koja će nam biti praktična kada su G_1 i G_2 "međusobno daleko".

3.3 Konvergencija s obzirom na metriku d_p

Promatrajmo *lakunarni* $\mathrm{SU}(1,1)$ *trigonometrijski produkt*, tj. beskonačni produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_j & B_j e^{2\pi i m_j t} \\ \overline{B_j} e^{-2\pi i m_j t} & A_j \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

za niz dovoljno lakunarnih frekvencija $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ s koeficijentima $A_j > 0$, $B_j \in \mathbb{C}$, $A_j^2 - |B_j|^2 = 1$. Prvo uočimo da su svi parcijalni produkti

$$\begin{bmatrix} a_N(t) & b_N(t) \\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)} \end{bmatrix} := \prod_{j=1}^{N} \begin{bmatrix} A_j & B_j e^{2\pi i m_j t} \\ \overline{B_j} e^{-2\pi i m_j t} & A_j \end{bmatrix},$$

za $N \in \mathbb{N}$ u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$. Naime, ako pogledamo zapise (3.7) i (3.8) od a_N i b_N, vidimo da je $|a_N(t)| \leq \sum_{n\in E_N} |C_n|$ i $|b_N(t)| \leq \sum_{n\in F_N} |D_n|$ pa je

$$d_p\left(I, \begin{bmatrix} a_N & b_N \\ \overline{b_N} & \overline{a_N} \end{bmatrix}\right) = \left\|\log\left(1 + |a_N(t) - 1| + |b_N(t)|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}$$

konačno. Nadalje, prisjetimo se da produkt (3.13) ima ℓ^2 koeficijente ako vrijedi jedna od ekvivalentnih tvrdnji iz leme 2.20, npr. ako vrijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\left(A_j^2 + |B_j|^2\right) < \infty. \tag{3.14}$$

Dokažimo prvo jedan rezultat povezan s redovima realnih brojeva koji će nam biti koristan u dokazima koji se odnose na konvergenciju, a koji slijede u ovom i sljedećim odjeljcima.

Lema 3.15 *Neka je* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *niz nenegativnih realnih brojeva takav da je* $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$ *i* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \infty$. *Tada postoje nizovi indeksâ* $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *i* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *takvi da je*

$$M_k < N_k, \ \lim_{k\to\infty} M_k = \infty, \ \lim_{k\to\infty} N_k = \infty, \ \lim_{k\to\infty} \sum_{j=M_k+1}^{N_k} x_j = 1.$$

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}$ uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{k}$ i pronađimo $j_k \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$j \geq j_k \ \Rightarrow \ x_j \leq \frac{1}{k}. \tag{3.15}$$

Uzmimo $M_k := \max\{j_k, k\}$ te $N_k := \min\Big\{n \in \mathbb{N}, n > M_k : \sum_{j=M_k+1}^{n} x_j \geq 1\Big\}$. Takav N_k postoji zbog pretpostavke da je $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \infty$. Uočimo da tada vrijedi

$$\sum_{j=M_k+1}^{N_k} x_j \geq 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=M_k+1}^{N_k-1} x_j < 1. \tag{3.16}$$

Koristeći (3.15) i (3.16) dobivamo

$$0 \leq \sum_{j=M_k+1}^{N_k} x_j - 1 = x_{N_k} + \underbrace{\sum_{j=M_k+1}^{N_k-1} x_j - 1}_{<0} < x_{N_k} \leq \frac{1}{k}$$

te sada po teoremu o sendviču za nizove vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \left| \sum_{j=M_k+1}^{N_k} x_j - 1 \right| = 0. \qquad \blacksquare$$

Dokažimo sada rezultat koji povezuje konvergenciju produkta (3.13) s uvjetom (3.14) i on je nelinearna varijanta Zygmundove ocjene za lakunarne trigonometrijske redove (teorem 2.16).

Teorem 3.16 *Neka je* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *niz dovoljno lakunarnih frekvencija i neka je* $p > 0$. *Beskonačni produkt* (3.13) *konvergira s obzirom na* d_p *prema nekom elementu od* $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$ *ako i samo ako vrijedi* (3.14).

Dokaz. Prisjetimo se da radi potpunosti od $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$ konvergencija od (3.13) s obzirom na d_p zapravo znači

$$\lim_{M,N\to\infty} d_p \left(\begin{bmatrix} a_M & b_M \\ \overline{b_M} & \overline{a_M} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_N & b_N \\ \overline{b_N} & \overline{a_N} \end{bmatrix} \right) = 0. \tag{3.17}$$

Pretpostavimo prvo da vrijedi uvjet (3.14) i uzmimo $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$. Primijetimo

$$\begin{aligned} d_p\left(\begin{bmatrix} a_M & b_M \\ \overline{b_M} & \overline{a_M} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_N & b_N \\ \overline{b_N} & \overline{a_N} \end{bmatrix}\right) &= d_p\left(I, \begin{bmatrix} a_{M,N} & b_{M,N} \\ \overline{b_{M,N}} & \overline{a_{M,N}} \end{bmatrix}\right) \\ &= \left\|\log\left(1 + \left|a_{M,N}(t) - 1\right| + \left|b_{M,N}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

pri čemu se koristimo oznakom za parcijalne $\mathrm{SU}(1,1)$ produkte iz (3.6), napomenom 3.9 i napomenom 3.12, a stavimo i

$$S_{M,N} := \sum_{j=M+1}^{N} \log\left(A_j^2 + |B_j|^2\right). \tag{3.18}$$

Zbog dovoljne lakunarnosti frekvencija po teoremu 3.6(ii), vrijedi

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\left|a_{M,N}(t) - A_{M+1}\cdots A_N\right|^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2\right) \mathrm{d}t = \prod_{j=M+1}^{N} \left(A_j^2 + |B_j|^2\right) - \prod_{j=M+1}^{N} A_j^2. \tag{3.19}$$

Nadalje, za $\alpha > 0$ označimo

$$\begin{aligned} E_\alpha &:= \left\{t \in \mathbb{T} : \left(\log\left(1 + \left|a_{M,N}(t) - 1\right| + \left|b_{M,N}(t)\right|\right)\right)^p > \alpha\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{T} : \left|a_{M,N}(t) - 1\right| + \left|b_{M,N}(t)\right| > e^{\alpha^{1/p}} - 1\right\} \\ &= \left\{t \in \mathbb{T} : \left(\left|a_{M,N}(t) - 1\right| + \left|b_{M,N}(t)\right|\right)^2 > \left(e^{\alpha^{1/p}} - 1\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Kako za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x+y)^2 \le 2x^2 + 2y^2$, imamo

$$E_\alpha \subseteq \left\{t \in \mathbb{T} : \left|a_{M,N}(t) - 1\right|^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2 > \frac{1}{2}\left(e^{\alpha^{1/p}} - 1\right)^2\right\}.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} \left(\left|a_{M,N}(t) - 1\right|^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2\right) \mathrm{d}t \\ &\le \int_{\mathbb{T}} \left(\left(\left|a_{M,N}(t) - A_{M+1}\cdots A_N\right| + \left|A_{M+1}\cdots A_N - 1\right|\right)^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2\right) \mathrm{d}t \\ &\le \int_{\mathbb{T}} \left(2\left|a_{M,N}(t) - A_{M+1}\cdots A_N\right|^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2\right) \mathrm{d}t + 2\left|A_{M+1}\cdots A_N - 1\right|^2 \\ &\le 2\int_{\mathbb{T}} \left(\left|a_{M,N}(t) - A_{M+1}\cdots A_N\right|^2 + \left|b_{M,N}(t)\right|^2\right) \mathrm{d}t + 2\left(A_{M+1}\cdots A_N - 1\right)^2, \end{aligned}$$

a to je koristeći (3.19)

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\prod_{j=M+1}^{N}\left(A_j^2+|B_j|^2\right)-\prod_{j=M+1}^{N}A_j^2\right)+2\left(\prod_{j=M+1}^{N}A_j-1\right)^2 \\
&= 2\left(e^{S_{M,N}}-2\prod_{j=M+1}^{N}\underbrace{A_j}_{\geq 1}+1\right) \\
&\leq 2\left(e^{S_{M,N}}-1\right).
\end{aligned}
$$

Sada po Čebiševljevoj nejednakosti imamo ocjenu za mjeru skupa E_α:

$$
\begin{aligned}
|E_\alpha| &\leq \frac{2}{\left(e^{\alpha^{1/p}}-1\right)^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\left|a_{M,N}(t)-1\right|^2+\left|b_{M,N}(t)\right|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{4\left(e^{S_{M,N}}-1\right)}{\left(e^{\alpha^{1/p}}-1\right)^2},
\end{aligned}
$$

odakle, koristeći se teoremom 2.11, slijedi

$$
\begin{aligned}
d_p\left(\begin{bmatrix} a_M & b_M \\ \overline{b_M} & \overline{a_M}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} a_N & b_N \\ \overline{b_N} & \overline{a_N}\end{bmatrix}\right)^p &= \int_0^\infty |E_\alpha|\,\mathrm{d}\alpha \\
&\leq \left(e^{S_{M,N}}-1\right)\int_0^\infty \frac{4\,\mathrm{d}\alpha}{\left(e^{\alpha^{1/p}}-1\right)^2}.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Ako je $2 < p < \infty$, tada vrijedi

$$
C_p := \int_0^\infty \frac{4\,\mathrm{d}\alpha}{\left(e^{\alpha^{1/p}}-1\right)^2} < \infty, \tag{3.21}
$$

s obzirom na to da je podintegralna funkcija asimptotski jednaka $\frac{4}{\alpha^{2/p}}$ kada $\alpha \to 0^+$, a pada brže od $\frac{1}{\alpha^2}$ kada $\alpha \to \infty$. Puštanjem $M, N \to \infty$ iz pretpostavke (3.14) dobivamo da vrijedi $\lim_{M,N\to\infty}\sum_{j=M+1}^{N}\log\left(A_j^2+|B_j|^2\right)=0$ pa je $\lim_{M,N\to\infty}\left(e^{S_{M,N}}-1\right)=0$, što znači da puštanjem $M, N \to \infty$ u (3.20) slijedi (4.18), odnosno da produkt (3.13) doista konvergira po metrici d_p, što pak znači da smo za $p > 2$ dokazali tvrdnju. Ako je $1 \leq p \leq 2$, tada (4.18) slijedi iz netom dokazanog slučaja i monotonosti L^p normi na $\mathbb{T}$ (a to znamo zbog teorema 2.5(iii)). Za $0 < p < 1$ vrijedi $d_p \leq d_1^p$ pa i ovdje (4.18) slijedi zbog monotonosti veličine $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}$ na $\mathbb{T}$ i dokazane konvergencije za d_1.

Obratno, pretpostavimo da beskonačni produkt (3.13) konvergira po metrici d_p u $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mathrm{SU}(1,1))$, tj. da vrijedi (4.18) te opet uzmimo $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$ i nastavimo upotrebljavati oznaku iz (3.18). Ovaj put je, opet zbog monotonosti od $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}$, dovoljno promatrati $0 < p < 1$. Neka je $0 < \theta < 1$ takav da je $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$. Kako za $x \geq 1$ vrijede sljedeće dvije nejednakosti:

$$\log\left(2x^2-1\right)\leq 4\log x,$$
$$\sqrt{\log x}\leq \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

koristeći se nelinearnom Parsevalovom jednakosti i teoremom 2.5(ii) možemo dobiti

$$\begin{aligned}
S_{M,N} &\leq 4\sum_{j=M+1}^{N}\log A_j \\
&= 4\int_{\mathbb{T}}\log\left|a_{M,N}(t)\right|\mathrm{d}t \\
&= 4\left\|\sqrt{\log\left|a_{M,N}(t)\right|}\right\|_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})}^2 \\
&\leq 4\left\|\log\left(1+\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^2_t(\mathbb{T})}^2 \\
&\leq 4\left\|\log\left(1+\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}^{2(1-\theta)} \\
&\quad\cdot\underbrace{\left\|\log\left(1+\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^4_t(\mathbb{T})}^{2\theta}}_{\leq\left(C_4\left(e^{S_{M,N}}-1\right)\right)^{\theta/2}},
\end{aligned}\tag{3.22}$$

pri čemu smo za drugi faktor upotrijebili (3.20) uz oznaku kao u (3.21) za $p=4$. Sada pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo $\sum_{j=1}^{\infty}\log\left(A_j^2+|B_j|^2\right)=\infty$. Uočimo da (4.18) uz $M=j-1$ i $N=j$ posebno implicira

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\log\left(1+|A_j-1|+|B_j|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}=0,$$

odnosno

$$\lim_{j\to\infty}\left(\log\left(A_j+|B_j|\right)\right)=0.\tag{3.23}$$

Kako je

$$\log\left(A_j^2+|B_j|^2\right)\leq 2\log\left(A_j+|B_j|\right)$$

slijedi po (3.23) da opći član reda $\sum_{j=1}^{\infty}\log\left(A_j^2+|B_j|^2\right)$ konvergira u 0. Nadalje, po lemi 3.15 slijedi da postoje nizovi indeksâ $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da je

$$M_k<N_k,\ \lim_{k\to\infty}M_k=\infty,\ \lim_{k\to\infty}N_k=\infty,\ \lim_{k\to\infty}S_{M_k,N_k}=1.\tag{3.24}$$

Iz (4.18) dobivamo

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\log\left(1+\left|a_{M_k,N_k}(t)-1\right|+\left|b_{M_k,N_k}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}=0. \tag{3.25}$$

Konačno, iz (3.22) slijedi

$$S_{M_k,N_k}\le 4C_4^{\theta/2}\left(e^{S_{M_k,N_k}}-1\right)^{\theta/2}\left\|\log\left(1+\left|a_{M_k,N_k}(t)-1\right|+\left|b_{M_k,N_k}(t)\right|\right)\right\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})}^{2(1-\theta)}$$

pa puštanjem $k\to\infty$ i korištenjem (3.24) i (3.25) dobivamo $1\le 0$, što je kontradikcija, pa zaključujemo da mora vrijediti (3.14). Tvrdnja vrijedi i za $p\ge 1$, iz netom dokazanog slučaja i jer za $q<1\le p$ vrijedi $d_q^{1/q}\le d_p$. ■

3.4 Konvergencija g.s.

Nakon konvergencije s obzirom na metriku, nastavljamo s ispitivanjem veze konvergencije g.s. lakunarnog $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijskog produkta s uvjetom (3.14) te, za početak, imamo sljedeći rezultat.

Teorem 3.17 *Neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1}\ge 2m_j$ za svaki $j\in\mathbb{N}$ i neka vrijedi uvjet* (3.14)*. Tada beskonačni produkt* (3.13) *konvergira točkovno za g.s. $t\in\mathbb{T}$.*

Dokaz. Zbog potpunosti metričkog prostora $(\mathrm{SU}(1,1),\rho)$ uočimo da za konvergenciju beskonačnog produkta (3.13) u točki $t\in\mathbb{T}$ zapravo trebamo provjeriti da je

$$\lim_{M,N\to\infty}\underbrace{\rho\left(\begin{bmatrix}a_M(t) & b_M(t)\\ \overline{b_M(t)} & \overline{a_M(t)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_N(t) & b_N(t)\\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)}\end{bmatrix}\right)}_{\log\left(1+\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\right)}=0,$$

tj. ekvivalentno

$$\lim_{M,N\to\infty}\left|a_{M,N}(t)-1\right|=0 \quad \text{i} \quad \lim_{M,N\to\infty}\left|b_{M,N}(t)\right|=0. \tag{3.26}$$

Uvedimo za $M,N\in\mathbb{N}$, $M<N$ oznaku

$$\widetilde{a}_{M,N}(t):=a_{M,N}(t)-\prod_{j=M+1}^{N}A_j.$$

Također, zapišimo

$$\widetilde{a}_{M,N}(t)=\sum_{n\in E_{M,N}}C_n e^{2\pi int},$$

pri čemu nam je $E_{M,N} \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija koje se pojavljuju u standardnom zapisu od $\widetilde{a}_{M,N}$, odnosno to je skup svih frekvencija za koje Fourierovi koeficijenti od $\widetilde{a}_{M,N}$ nisu nula. Analogno i za

$$b_{M,N}(t) = \sum_{n \in F_{M,N}} D_n e^{2\pi i n t},$$

pri čemu nam je sada $F_{M,N} \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija koje se pojavljuju u standardnom zapisu od $b_{M,N}$. Uočimo da za dani $k \in \mathbb{N}$ zbog pretpostavke (3.14) postoji $K_k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $M, N \geq K_k$ vrijedi $e^{S_{M,N}} - 1 \leq \frac{1}{k^2 2^k}$. Možemo pretpostaviti $K_1 < K_2 < \ldots$. Označimo nadalje

$$\widetilde{G}_k := \left\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N > K_k}} \left| \widetilde{a}_{K_k,N}(t) \right| > \frac{1}{k} \right\},$$

$$G_k := \left\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N > K_k}} \left| b_{K_k,N}(t) \right| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Primijetimo da su, zbog $m_{j+1} \geq 2m_j$, trigonometrijski polinomi $\widetilde{a}_{K_k,N}$ svi parcijalne sume istog trigonometrijskog reda. Primjenom linearnog Carlesonovog teorema na taj trigonometrijski red te koristeći se napomenom 3.7 i činjenicom da je $A_j \geq 1$ slijedi

$$\begin{aligned} \left| \left\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N > K_k}} \left| \widetilde{a}_{K_k,N}(t) \right| > \alpha \right\} \right| &\leq C\alpha^{-2} \sum_{n \in E_{K_k,\infty}} |C_n|^2 \\ &\leq C\alpha^{-2} \left(\prod_{j=K_k+1}^{\infty} \left(A_j^2 + |B_j|^2 \right) - 1 \right), \end{aligned}$$

pri čemu je $E_{K_k,\infty} := \bigcup\limits_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N > K_k}} E_{K_k,N}$. Sada za $\alpha = \frac{1}{k}$ dobijemo ocjenu

$$\left| \widetilde{G}_k \right| \leq C \left(\frac{1}{k} \right)^{-2} \left(e^{S_{K_k,\infty}} - 1 \right) \leq C \left(\frac{1}{k} \right)^{-2} \frac{1}{k^2 2^k} = \frac{C}{2^k},$$

pri čemu smo za $M \in \mathbb{N}$ označili $S_{M,\infty} := \sum_{j=M+1}^{\infty} \log \left(A_j^2 + |B_j|^2 \right)$. Analogno dobijemo

$$\begin{aligned} \left| \left\{ t \in \mathbb{T} : \sup_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ N > K_k}} \left| b_{K_k,N}(t) \right| > \alpha \right\} \right| &\leq C\alpha^{-2} \sum_{n \in F_{K_k,\infty}} |D_n|^2 \\ &\leq C\alpha^{-2} \left(\prod_{j=K_k+1}^{\infty} \left(A_j^2 + |B_j|^2 \right) - 1 \right), \end{aligned}$$

pri čemu je $F_{K_k,\infty} := \bigcup_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N>K_k}} F_{K_k,N}$, pa opet za $\alpha = \frac{1}{k}$ dobijemo ocjenu

$$|G_k| \le C\left(\frac{1}{k}\right)^{-2}\left(e^{S_{K_k,\infty}}-1\right) \le \frac{C}{2^k}.$$

Iz $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{G}_k\right| < \infty$ po Borel-Cantellijevoj lemi slijedi $\left|\cap_{l=1}^{\infty}\cup_{k=l}^{\infty}\widetilde{G}_k\right| = 0$ pa se g.s. $t\in\mathbb{T}$ nalazi samo u konačno mnogo skupova $\widetilde{G}_k$, tj. za g.s. $t\in\mathbb{T}$ za sve osim konačno mnogo $k\in\mathbb{N}$ za svaki $N > K_k$ vrijedi

$$\begin{aligned}\left|a_{K_k,N}(t)-1\right| &\le \left|\widetilde{a}_{K_k,N}(t)\right| + \prod_{j=K_k+1}^{N} A_j - 1\\
&\le \frac{1}{k} + \prod_{j=K_k+1}^{N}\left(A_j^2+|B_j|^2\right)-1\\
&\le \frac{1}{k} + \underbrace{e^{S_{K_k,\infty}}-1}_{\le\frac{1}{k^2 2^k}}\\
&\le \frac{2}{k},\end{aligned}$$

odnosno, dobili smo

$$\sup_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N>K_k}}\left|a_{K_k,N}(t)-1\right| \le \frac{2}{k}.$$

Analogno, iz $\sum_{k=1}^{\infty}|G_k| < \infty$ po Borel-Cantellijevoj lemi slijedi $|\cap_{l=1}^{\infty}\cup_{k=l}^{\infty}G_k| = 0$ pa se dobije da za g.s. $t\in\mathbb{T}$ za sve osim konačno mnogo $k\in\mathbb{N}$ za svaki $N > K_k$ vrijedi

$$\sup_{\substack{N\in\mathbb{N}\\ N>K_k}}\left|b_{K_k,N}(t)\right| \le \frac{1}{k}.$$

Uzmimo sada $M,N\in\mathbb{N}$ i $t\in\mathbb{T}$ takve da je $K_k \le M < N$ te $t\notin\cap_{l=1}^{\infty}\cup_{k=l}^{\infty}\widetilde{G}_k$ i $t\notin\cap_{l=1}^{\infty}\cup_{k=l}^{\infty}G_k$ pa označimo $g_N(t) := \begin{bmatrix}\frac{a_N(t)}{b_N(t)} & \frac{b_N(t)}{a_N(t)}\end{bmatrix}$. Nejednakost trokuta za ρ daje

$$\rho\left(g_M(t),g_N(t)\right) \le \rho\left(g_{K_k}(t),g_M(t)\right) + \rho\left(g_{K_k}(t),g_N(t)\right),$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}&1+\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\\
&\le\left(1+\left|a_{K_k,M}(t)-1\right|+\left|b_{K_k,M}(t)\right|\right)\left(1+\left|a_{K_k,N}(t)-1\right|+\left|b_{K_k,N}(t)\right|\right)\\
&\le\left(1+\frac{3}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)\end{aligned}$$

te nadalje

$$\left|a_{M,N}(t)-1\right|+\left|b_{M,N}(t)\right|\le\frac{15}{k}.$$

Sada je

$$\sup_{\substack{M,N\in\mathbb{N}\\K_k\le M<N}}\left|a_{M,N}(t)-1\right|\le\frac{15}{k}\quad\text{i}\quad\sup_{\substack{M,N\in\mathbb{N}\\K_k\le M<N}}\left|b_{M,N}(t)\right|\le\frac{15}{k},$$

što konačno daje konvergenciju (3.26). ■

Dokažimo sada dvije pomoćne tvrdnje koje će nam trebati za djelomični obrat teorema 3.17.

Lema 3.18 *Neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1}\ge 3m_j$ za svaki $j\in\mathbb{N}$.*

(i) Pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{aligned}&\Big(m_{j_1}-m_{j_2}+\cdots+(-1)^{J-1}m_{j_J}\Big)-\Big(m_{k_1}-m_{k_2}+\cdots+(-1)^{K-1}m_{k_K}\Big)\\&=\Big(m_{j'_1}-m_{j'_2}+\cdots+(-1)^{J'-1}m_{j'_{J'}}\Big)-\Big(m_{k'_1}-m_{k'_2}+\cdots+(-1)^{K'-1}m_{k'_{K'}}\Big),\end{aligned}\tag{3.27}$$

za neke $J,J',K,K'\in\mathbb{N}_0$, $J+K$ i $J'+K'$ iste parnosti te neke indekse $j_1<j_2<\cdots<j_J$, $j'_1<j'_2<\cdots<j'_{J'}$, $k_1<k_2<\cdots<k_K$, $k'_1<k'_2<\cdots<k'_{K'}$. Ako su obje strane maksimalno skraćene, tada lijeva i desna strana imaju iste članove (nakon rješavanja zagrada i preslagivanja).

(ii) Svaki $n\in\mathbb{Z}$ ima najviše jedan maksimalno skraćeni prikaz oblika

$$n=\Big(m_{j_1}-m_{j_2}+\cdots+m_{j_J}\Big)-\Big(m_{k_1}-m_{k_2}+\cdots+m_{k_K}\Big),\tag{3.28}$$

pri čemu su $J,K\in\mathbb{N}$ neparni brojevi, te $j_1<j_2<\cdots<j_J$ i $k_1<k_2<\cdots<k_K$.

Napomena 3.19 Ako je $J=0$ ili $K=0$ ili $J'=0$ ili $K'=0$, tada odgovarajuća zagrada u (3.27) uopće ne postoji. Radi elegantnijeg zapisa, smatrat ćemo $j_0=k_0=j'_0=k'_0=0$ te $m_0=0$.

Dokaz. Dokažimo prvo (i), i to indukcijom po $J+J'+K+K'\in\mathbb{N}_0$. Baza indukcije je trivijalna jer iz $J+J'+K+K'=0$ slijedi $J=J'=K=K'=0$. Uzmimo sada neku gore opisanu jednakost i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $j_J\ge 1$ najveći od brojeva $j_J, j'_{J'}, k_K, k'_{K'}$. Uočimo da ne može biti $(-1)^{J-1}m_{j_J}=(-1)^{K-1}m_{k_K}$ jer bi inače došlo do kraćenja tih elemenata na lijevoj strani. Ako je $(-1)^{J-1}m_{j_J}=(-1)^{J'-1}m_{j'_{J'}}$ ili $(-1)^{J-1}m_{j_J}=-(-1)^{K'-1}m_{k'_{K'}}$, tada taj broj možemo oduzeti od obje strane te iskoristiti pretpostavku indukcije. Zato pretpostavimo sada da nije tako te označimo lijevu stranu od (3.27) sa LS, a desnu sa DS. Pogledajmo nadalje koje sve mogućnosti dobivamo u ovisnosti o parnosti brojeva J,J',K,K':

(1) J, K, J', K' neparni $\Rightarrow k_K < j_J,\ \ j'_{J'} < j_J$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &> m_{j_J} - m_{j_J-1} - m_{k_K} \geq m_{j_J} - \frac{1}{3}m_{j_J} - \frac{1}{3}m_{j_J} = \frac{1}{3}m_{j_J}, \\ \mathrm{DS} &< m_{j'_{J'}} \leq \frac{1}{3}m_{j_J}, \end{aligned}$$

a to nas vodi na kontradikciju.

(2) J, K neparni, J', K' parni $\Rightarrow k_K < j_J,\ \ k'_{K'} < j_J$ pa kao i u (1) slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &> \frac{1}{3}m_{j_J},\ \text{dok je desna strana} \\ \mathrm{DS} &\leq m_{k'_{K'}} \leq \frac{1}{3}m_{j_J}\ \text{i ustvari je čak DS} < \frac{1}{3}m_{j_J}, \end{aligned}$$

a to nas opet vodi na kontradikciju.

(3) J, K parni, J', K' neparni $\Rightarrow k_K < j_J,\ \ k'_{K'} < j_J$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &\leq -m_{j_J} + m_{j_J-1} + m_{k_K} \leq -\frac{1}{3}m_{j_J},\ \text{a ustvari je LS} < -\frac{1}{3}m_{j_J}\ \text{te} \\ \mathrm{DS} &> -m_{k'_{K'}} \geq -\frac{1}{3}m_{j_J} \end{aligned}$$

pa opet imamo kontradikciju.

(4) J, K, J', K' parni $\Rightarrow k_K < j_J,\ \ j'_{J'} < j_J$ pa kao i u (3) slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &< -\frac{1}{3}m_{j_J},\ \text{dok za desnu stranu imamo} \\ \mathrm{DS} &\geq -m_{j'_{J'}} \geq -\frac{1}{3}m_{j_J},\ \text{a ustvari je čak DS} > -\frac{1}{3}m_{j_J}, \end{aligned}$$

što je opet kontradikcija.

(5) J, J' neparni, K, K' parni $\Rightarrow j'_{J'} < j_J,\ \ k'_{K'} < j_J$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &> m_{j_J} - m_{j_J-1} \geq m_{j_J} - \frac{1}{3}m_{j_J} = \frac{2}{3}m_{j_J}, \\ \mathrm{DS} &\leq m_{j'_{J'}} + m_{k'_{K'}} \leq \frac{1}{3}m_{j_J} + \frac{1}{3}m_{j_J} = \frac{2}{3}m_{j_J},\ \text{a ustvari je čak DS} < \frac{2}{3}m_{j_J}, \end{aligned}$$

što je opet kontradikcija.

(6) J, J' parni, K, K' neparni $\Rightarrow j'_{J'} < j_J,\ \ k'_{K'} < j_J$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &< -m_{j_J} + m_{j_J-1} \leq -\frac{2}{3}m_{j_J}, \\ \mathrm{DS} &\geq -m_{j'_{J'}} - m_{k'_{K'}} \geq -\frac{2}{3}m_{j_J},\ \text{a čak je DS} > -\frac{2}{3}m_{j_J}, \end{aligned}$$

što je opet kontradikcija.

(7) J, K' neparni, J', K parni $\Rightarrow$ LS > 0, DS < 0, što nas opet vodi do kontradikcije.

(8) J, K' parni, J', K neparni $\Rightarrow$ LS < 0, DS > 0, što nas također opet vodi do kontradikcije.

Dakle, u svim slučajevima dobili smo kontradikciju pa se doista može iskoristiti pretpostavka indukcije, čime smo završili dokaz od (i).

Tvrdnja (ii) direktna je posljedica od (i). ■

Lema 3.20 *Neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1} \geq 3m_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$ te neka su $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$. Nadalje, pretpostavimo da je $b_{M,N}(t) = \sum_{n\in F} D_n e^{2\pi int}$, pri čemu je $F \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija za koje Fourierovi koeficijenti od $b_{M,N}$ nisu nula. Tada vrijedi*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}} \Big|^2 \leq e^{C\sum_{j=M+1}^{N}|B_j|^2},$$

za neku apsolutnu konstantu C.

Dokaz. Za fiksirani $n \in \mathbb{Z}$ gledamo sve prikaze u obliku (3.28), tj. prikaze

$$n = n_2 - n_1 = \left(m_{j_1} - m_{j_2} + \cdots + m_{j_J}\right) - \left(m_{k_1} - m_{k_2} + \cdots + m_{k_K}\right), \tag{3.29}$$

pri čemu su $J, K \in \mathbb{N}$ neparni brojevi, te $j_1, j_2 \ldots, j_J \in \mathbb{N}$ i $k_1, k_2, \ldots, k_K \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $j_1 < j_2 < \cdots < j_J$ i $k_1 < k_2 < \cdots < k_K$. Nadalje označimo

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n^l := \Big\{ &\text{skup svih } M+1 \leq j \leq N \text{ takvih da se frekvencija } m_j \\ &\text{pojavljuje u maksimalno skraćenom prikazu od } n \text{ točno } l \text{ puta}\Big\}, \quad l = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Primijetimo da je $\{M+1, \ldots, N\}$ disjunktna unija od $\mathcal{S}_n^0$, $\mathcal{S}_n^1$ i $\mathcal{S}_n^2$. S obzirom na to da se svaki prikaz (3.29), $n = n_2 - n_1$, $n_1, n_2 \in F$, može dobiti iz maksimalno skraćenog prikaza dodavanjem članova koji odgovaraju indeksima iz $\mathcal{S}_n^0$, možemo zaključiti

$$\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} \left|D_{n_1}D_{n_2}\right| \leq \left(\prod_{j\in\mathcal{S}_n^0}\left(A_j^2 + |B_j|^2\right)\right)\left(\prod_{j\in\mathcal{S}_n^1}|A_jB_j|\right)\left(\prod_{j\in\mathcal{S}_n^2}|B_j|^2\right). \tag{3.30}$$

Nadalje, uočimo da za bilo koju particiju $\left(\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2\right)$ od $\{M+1, \ldots, N\}$ ima najviše $2^{|\mathcal{S}_n^1|}$ brojeva $n \in \mathbb{Z}$ takvih da je

$$\left(\mathcal{S}_n^0, \mathcal{S}_n^1, \mathcal{S}_n^2\right) = \left(\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2\right).$$

Naime, $j \in \mathcal{S}_n^1$ znači da frekvenciju m_j moramo staviti ili u prvu ili u drugu zagradu. Sve drugo je jednoznačno određeno. Posebno, predznaci frekvencija jednoznačno su određeni ako zagrade popunjavamo zdesna nalijevo. Kvadriranjem (3.30) i zbrajanjem po takvim n koji imaju iste skupove $\mathcal{S}_n^0$, $\mathcal{S}_n^1$ i $\mathcal{S}_n^2$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \left(\mathcal{S}_n^0,\mathcal{S}_n^1,\mathcal{S}_n^2\right)=\left(\mathcal{S}^0,\mathcal{S}^1,\mathcal{S}^2\right)}} \Bigg(\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} \left|D_{n_1}D_{n_2}\right|\Bigg)^2 \\
&\le 2^{|\mathcal{S}^1|}\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^0}\left(A_j^2+|B_j|^2\right)^2\Big)\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^1}A_j^2|B_j|^2\Big)\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^2}|B_j|^4\Big) \\
&= \Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^0}\left(A_j^2+|B_j|^2\right)^2\Big)\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^1}2A_j^2|B_j|^2\Big)\Big(\prod_{j\in\mathcal{S}^2}|B_j|^4\Big).
\end{aligned}$$

Konačno, sumiranjem po svim izborima particija $\left(\mathcal{S}^0,\mathcal{S}^1,\mathcal{S}^2\right)$ od $\{M+1,\ldots,N\}$ koristeći se gornjom nejednakosti, činjenicom da je $A_j^2-|B_j|^2=1$ i nejednakosti $1+x\le e^x$, koja vrijedi za sve $x\in\mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Bigg|\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}}\Bigg|^2 &\le \sum_{\left(\mathcal{S}^0,\mathcal{S}^1,\mathcal{S}^2\right)}\ \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \left(\mathcal{S}_n^0,\mathcal{S}_n^1,\mathcal{S}_n^2\right)=\left(\mathcal{S}^0,\mathcal{S}^1,\mathcal{S}^2\right)}} \Bigg(\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} \left|D_{n_1}D_{n_2}\right|\Bigg)^2 \\
&\le \prod_{j=M+1}^{N}\Big(\left(A_j^2+|B_j|^2\right)^2+2A_j^2|B_j|^2+|B_j|^4\Big) \\
&\le \prod_{j=M+1}^{N}\left(A_j^4+6A_j^2|B_j|^2\right) \\
&= \prod_{j=M+1}^{N}\Big(A_j^2\left(A_j^2+6|B_j|^2\right)\Big) \\
&= \Big(\prod_{j=M+1}^{N}\left(1+|B_j|^2\right)\Big)\Big(\prod_{j=M+1}^{N}\left(1+7|B_j|^2\right)\Big) \\
&\le e^{8\sum_{j=M+1}^{N}|B_j|^2}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorem 3.21 *Neka je* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *niz prirodnih brojeva takav da je* $m_{j+1}\ge 3m_j$ *za svaki* $j\in\mathbb{N}$ *i neka beskonačni produkt* (3.13) *konvergira za sve* t *iz nekog skupa pozitivne mjere. Tada vrijedi uvjet* (3.14).

Dokaz. Pronađimo prvo skup $E\subseteq\mathbb{T}$ pozitivne mjere takav da vrijedi

$$\lim_{M,N\to\infty}\sup_{t\in E}\left|b_{M,N}(t)\right|=0. \tag{3.31}$$

Naime, znamo da $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ i $(b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiraju po točkama na nekom skupu $Z\subseteq\mathbb{T}$ pozitivne mjere. Po Egorovljevom teoremu [8] ti nizovi konvergiraju i uniformno na nekom podskupu $E\subseteq Z$ koji ima pozitivnu mjeru. Također, možemo postići i da su ti nizovi uniformno ograničeni na skupu E. Stavimo $b(t) := \lim_{N\to\infty} b_N(t)$ i $a(t) := \lim_{N\to\infty} a_N(t)$, za $t \in E$. Prisjetimo se, za $M \le N$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a_N(t) & b_N(t) \\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_M(t) & b_M(t) \\ \overline{b_M(t)} & \overline{a_M(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{M,N}(t) & b_{M,N}(t) \\ \overline{b_{M,N}(t)} & \overline{a_{M,N}(t)} \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{M,N}(t) & b_{M,N}(t) \\ \overline{b_{M,N}(t)} & \overline{a_{M,N}(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a_M(t)} & -b_M(t) \\ -\overline{b_M(t)} & a_M(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N(t) & b_N(t) \\ \overline{b_N(t)} & \overline{a_N(t)} \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow b_{M,N}(t) = \overline{a_M(t)} b_N(t) - b_M(t) \overline{a_N(t)}.
\end{aligned}$$

Uočimo

$$\begin{aligned}
b_{M,N}(t) = &\left(\overline{a_M(t) - a(t)}\right) b_N(t) + \overline{a(t)}\,(b_N(t) - b(t)) \\
&- b_M(t) \left(\overline{a_N(t) - a(t)}\right) - \overline{a(t)}\,(b_M(t) - b(t))
\end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in E} \left| b_{M,N}(t) \right| \le &\sup_{t\in E} |a_M(t) - a(t)| \sup_{t\in E} |b_N(t)| + \sup_{t\in E} |a(t)| \sup_{t\in E} |b_N(t) - b(t)| \\
&+ \sup_{t\in E} |b_M(t)| \sup_{t\in E} |a_N(t) - a(t)| + \sup_{t\in E} |a(t)| \sup_{t\in E} |b_M(t) - b(t)| \,. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Zbog uniformne ograničenosti i uniformne konvergencije od a_N i b_N na E vrijedi da je

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in E} |a_N(t)| < \infty, \quad \lim_{N\to\infty} \sup_{t\in E} |b_N(t)| < \infty, \quad \sup_{t\in E} |a(t)| < \infty, \quad \sup_{t\in E} |b(t)| < \infty$$

te nadalje vrijedi i

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in E} |a_N(t) - a(t)| = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \sup_{t\in E} |b_N(t) - b(t)| = 0$$

pa puštajući $M, N \to \infty$ u (3.32) slijedi (3.31).

Nadalje, zapišimo $b_{M,N}(t) = \sum_{n\in F} D_n e^{2\pi i n t}$, pri čemu je $F \subseteq \mathbb{Z}$ skup svih frekvencija koje se pojavljuju u standardnom zapisu od $b_{M,N}$. Tada imamo

$$\int_E \left| b_{M,N}(t) \right|^2 \mathrm{d}t = |E| \sum_{n\in F} |D_n|^2 + \sum_{\substack{n_1, n_2 \in F \\ n_1 \ne n_2}} D_{n_1} \overline{D_{n_2}} \int_E e^{2\pi i (n_1 - n_2) t} \,\mathrm{d}t.$$

Za prvi pribrojnik u gornjoj jednakosti vrijedi

$$|E| \sum_{n\in F} |D_n|^2 \ge |E| \sum_{j=M+1}^{N} |B_j|^2 \prod_{\substack{M<k\le N \\ k\ne j}} A_k^2 \ge |E| \sum_{j=M+1}^{N} |B_j|^2$$

pa je sada

$$|E|\sum_{j=M+1}^{N}|B_j|^2 \leq \int_E \left|b_{M,N}(t)\right|^2 \mathrm{d}t + \left|\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_1\neq n_2}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}} \int_E e^{2\pi i(n_1-n_2)t}\,\mathrm{d}t\right|. \tag{3.33}$$

Za drugi pribrojnik u (3.33), koristeći se propozicijom 3.5 i Cauchy-Schwarzovom nejednakosti, vrijedi

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_1\neq n_2}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}} \int_E e^{2\pi i(n_1-n_2)t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\geq m_{M+1}}} \Bigg(\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}}\Bigg)\int_E e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \Bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Bigg|\sum_{\substack{n_1,n_2\in F\\ n_2-n_1=n}} D_{n_1}\overline{D_{n_2}}\Bigg|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\geq m_{M+1}}}\left|\int_E e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Po Parsevalovoj jednakosti primijenjenoj na funkciju 1_E imamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_E e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_{\mathbb{T}} 1_E(t)e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right|^2 = \|1_E\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{T})} = |E| < \infty$$

pa posebno sada za drugi faktor u (3.34) vrijedi

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\geq m_{M+1}}}\left|\int_E e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right|^2 = 0. \tag{3.35}$$

Pretpostavimo sada da je $\sum_{j=1}^{\infty}|B_j|^2 = \infty$. Po lemi 2.20(b) to zapravo znači da smo pretpostavili da ne vrijedi uvjet (3.14). Nadalje, zbog potpunosti iz konvergencije u jednoj točki $t \in E \subseteq Z$ slijedi da za tu točku vrijedi (3.26) pa za $M = j-1$ i $N = j$ iz toga slijedi da je $\lim_{j\to\infty}|B_j| = 0$. Primijenimo sada lemu 3.15 na niz $\big(|B_j|^2\big)_{j\in\mathbb{N}}$. To znači da postoje nizovi indeksâ $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvi da je

$$M_k < N_k,\ \lim_{k\to\infty} M_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty} N_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty}\sum_{j=M_k+1}^{N_k}|B_j|^2 = 1. \tag{3.36}$$

Sada iz (3.33), (3.34) i leme 3.20 slijedi

$$|E|\sum_{j=M_k+1}^{N_k}|B_j|^2 \leq |E|\left(\sup_{t\in E}\left|b_{M_k,N_k}(t)\right|\right)^2 + e^{\frac{1}{2}C\sum_{j=M_k+1}^{N_k}|B_j|^2}\Bigg(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\geq m_{M_k+1}}}\left|\int_E e^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t\right|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

pa puštanjem $k \to \infty$ u prethodnoj nejednakosti iz (3.31), (3.35) i (3.36) dobivamo da je $|E| \leq 0$, što je kontradikcija pa je dokaz time završen. ■

Poglavlje 4

NELINEARNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

4.1 Fourierova transformacija

U ovom poglavlju krećemo od definicije Fourierove transformacije na $\mathbb{R}^d$ te ćemo zatim uvesti jedan drugačiji pogled na tu transformaciju. Također, navest ćemo neka njena važna svojstva i L^p ocjene koje zadovoljava.

Definicija 4.1 *Fourierova transformacija* od $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ je funkcija $\hat{f} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ dana formulom

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}x,$$

pri čemu $x \cdot \xi$ označava standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^d$.

Navedimo neke od rezultata koji vrijede za Fourierovu transformaciju, koji su preuzeti iz [8], a za koje postoje analogoni za nelinearnu Fourierovu transformaciju, koje ćemo navesti u odjeljku 4.3. Prvo, za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi sljedeća tzv. *Riemann-Lebesgueova nejednakost*:

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.1}$$

Nadalje, za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi *Plancherelov identitet* koji kaže da je

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.2}$$

Fourierova transformacija se, štoviše, jedinstveno proširuje po neprekidnosti do unitarnog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, odnosno za $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f, g \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Kada znamo što vrijedi u slučajevima $p = 1$ i $p = 2$, primjenom Riesz-Thorinova teorema interpolacije dobivamo da za $1 \leq p \leq 2$, q konjugirani eksponent od p i $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

Hausdorff-Youngova nejednakost, koja kaže da je

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.3}$$

Sada vidimo da se preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ proširuje na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 \leq p \leq 2$. Napomenimo da konstanta 1 u Hausdorff-Youngovoj nejednakosti nije optimalna. Za $1 < p < 2$ vrijedi *Babenko-Becknerova nejednakost* [2]

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq B_p^d \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.4}$$

pri čemu je

$$B_p = \frac{p^{1/2p}}{q^{1/2q}}.$$

Jednakost u (4.4) postiže se za poopćene Gaussove funkcije. Npr. za $d = 1$ to su funkcije oblika

$$g(x) = ce^{-ax^2+bx}, \tag{4.5}$$

za $a > 0$ i $b, c \in \mathbb{C}$, a Lieb [15] je pokazao da su sve funkcije za koje se postiže jednakost upravo oblika (4.5).

Uvedimo sada jedan drugačiji pogled na Fourierovu transformaciju na $\mathbb{R}$ i u analogiji s tim pogledom doći ćemo i do definicije nelinearne Fourierove transformacije. Pretpostavimo prvo da funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ima kompaktan nosač i da je integrabilna. Napomenimo da ne zahtijevamo da f bude neprekidna. Sada za fiksirani $\xi \in \mathbb{R}$ promotrimo običnu diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,\xi) &= f(x)e^{-2\pi i x\xi}, \\ u(-\infty,\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo da, ako f ima nosač u $[\alpha, \beta]$, tada rješenje $u(x,\xi)$ gornje diferencijalne jednadžbe mora biti konstantno na $\langle -\infty, \alpha]$ i na $[\beta, \infty\rangle$. U tom slučaju početni uvjet $u(-\infty,\xi) = 0$ možemo interpretirati kao $u(\alpha,\xi) = 0$. Također, $u(+\infty,\xi)$ jednostavno će nam značiti $u(\beta,\xi)$. Gornji problem može se riješiti eksplicitno, a rješenje $x \mapsto u(x,\xi)$ postoji u klasi apsolutno neprekidnih funkcija te vrijedi

$$u(x,\xi) = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\,\mathrm{d}t.$$

Posebno, uočimo da je

$$\hat{f}(\xi) = u(+\infty,\xi).$$

Zapišimo neka poznata svojstva preslikavanja $f \mapsto \hat{f}$, a zajedno s tim i svojstva preslikavanja $f \mapsto u$.

(i) (Linearnost) Ako je $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ za neke $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tada vrijedi

$$u(x,\xi) = \alpha_1 u_1(x,\xi) + \alpha_2 u_2(x,\xi),$$
$$\hat{f}(\xi) = \alpha_1 \hat{f}_1(\xi) + \alpha_2 \hat{f}_2(\xi).$$

(ii) (Modulacija) Ako je $f(x) = e^{2\pi i x \xi_0} f_1(x)$ za neki $\xi_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$u(x,\xi) = u_1(x, \xi - \xi_0),$$
$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi - \xi_0).$$

(iii) (Translacija) Ako je $f(x) = f_1(x - x_0)$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$u(x,\xi) = e^{-2\pi i x_0 \xi} u_1(x - x_0, \xi),$$
$$\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{f}_1(\xi).$$

(iv) (Dilatacija) Ako je $f(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ za neki $\lambda > 0$, tada vrijedi

$$u(x,\xi) = u_1\left(\frac{x}{\lambda}, \lambda\xi\right),$$
$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\lambda\xi).$$

(v) Ako je $f(x) = \overline{f_1(x)}$, tada vrijedi

$$u(x,\xi) = \overline{u_1(x,-\xi)},$$
$$\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}_1(-\xi)}.$$

Kako ćemo se nadalje baviti nelinearnom Fourierovom transformacijom napomenimo da ćemo Fourierovu transformaciju iz definicije 4.1 nekada zvati *linearna Fourierova transformacija* kako bismo naglasili razliku i kako ne bi došlo do zabune u daljnjem tekstu.

4.2 Definicija i svojstva nelinearne Fourierove transformacije

Od sada nadalje pretpostavljat ćemo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabilna s kompaktnim nosačem. Takve funkcije guste su u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ pa to nije ograničavajuća restrikcija. Sada za fiksirani $\xi \in \mathbb{R}$ promatramo običnu diferencijalnu jednažbu s početnim uvjetom

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} a(x,\xi) \\ b(x,\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{f(x)}e^{2\pi i x\xi} \\ f(x)e^{-2\pi i x\xi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a(x,\xi) \\ b(x,\xi) \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a(-\infty,\xi) \\ b(-\infty,\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

što možemo napisati i u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} &\partial_x a(x,\xi) = \overline{f(x)}e^{2\pi i x\xi} b(x,\xi), \quad \partial_x b(x,\xi) = f(x)e^{-2\pi i x\xi} a(x,\xi), \\ &a(-\infty,\xi) = 1, \quad b(-\infty,\xi) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Za svaki $\xi \in \mathbb{R}$ rješenja $x \mapsto a(x,\xi)$ i $x \mapsto b(x,\xi)$ postoje opet u klasi apsolutno neprekidnih funkcija. Nadalje, vidimo da su integralne jednadžbe koje odgovaraju ovom sistemu sljedeće:

$$a(x,\xi) = 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)}e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t, \tag{4.7}$$
$$b(x,\xi) = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

Kako ćemo poslije uvidjeti, bit će nam korisno pisati sistem diferencijalnih jednadžbi (4.6) uz iste početne uvjete u sljedećem matričnom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} a(x,\xi) & b(x,\xi) \\ \overline{b(x,\xi)} & \overline{a(x,\xi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x,\xi) & b(x,\xi) \\ \overline{b(x,\xi)} & \overline{a(x,\xi)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & f(x)e^{-2\pi i x\xi} \\ \overline{f(x)}e^{2\pi i x\xi} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} a(-\infty,\xi) & b(-\infty,\xi) \\ \overline{b(-\infty,\xi)} & \overline{a(-\infty,\xi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} &\partial_x \left(|a(x,\xi)|^2 - |b(x,\xi)|^2\right) \\ &= \partial_x a(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} + a(x,\xi)\partial_x\overline{a(x,\xi)} - \partial_x b(x,\xi)\overline{b(x,\xi)} - b(x,\xi)\partial_x\overline{b(x,\xi)} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\partial_x a(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} - \partial_x b(x,\xi)\overline{b(x,\xi)}\right) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{f(x)}e^{2\pi i x\xi} b(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} - f(x)e^{-2\pi i x\xi} a(x,\xi)\overline{b(x,\xi)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pa mora biti

$$|a(x,\xi)|^2 - |b(x,\xi)|^2 = |a(-\infty,\xi)|^2 - |b(-\infty,\xi)|^2 = 1,$$

za sve $x, \xi \in \mathbb{R}$. Time smo pokazali da sve matrice $\begin{bmatrix} a(x,\xi) & b(x,\xi) \\ \overline{b(x,\xi)} & \overline{a(x,\xi)} \end{bmatrix}$ pripadaju grupi $\mathrm{SU}(1,1)$.

Definicija 4.2 *Nelinearna Fourierova transformacija* je funkcija $\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(1,1)$ definirana s

$$\widehat{f}(\xi) := \begin{bmatrix} a(+\infty,\xi) & b(+\infty,\xi) \\ \overline{b(+\infty,\xi)} & \overline{a(+\infty,\xi)} \end{bmatrix},$$

tj. za dovoljno velike x, odnosno za x desno od nosača od f.

Napomenimo da ćemo umjesto $a(+\infty,\xi)$ i $b(+\infty,\xi)$ pisati samo kraće $a(\xi)$ i $b(\xi)$. Zapišimo i dokažimo sada osnovna svojstva nelinearne Fourierove transformacije koja su analogoni svojstava linearne Fourierove transformacije.

Lema 4.3 *(i) Ako je $f(x) = e^{2\pi i\theta} f_1(x)$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= a_1(x,\xi), & b(x,\xi) &= e^{2\pi i\theta} b_1(x,\xi), \\ a(\xi) &= a_1(\xi), & b(\xi) &= e^{2\pi i\theta} b_1(\xi), \end{aligned}$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{bmatrix} e^{2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \widehat{f_1}(\xi) \begin{bmatrix} e^{-2\pi i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Ako je $f(x) = e^{2\pi i x\xi_0} f_1(x)$ za neki $\xi_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= a_1(x,\xi-\xi_0), & b(x,\xi) &= b_1(x,\xi-\xi_0), \\ a(\xi) &= a_1(\xi-\xi_0), & b(\xi) &= b_1(\xi-\xi_0), \end{aligned}$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi-\xi_0).$$

(iii) Ako je $f(x) = f_1(x-x_0)$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= a_1(x-x_0,\xi), & b(x,\xi) &= e^{-2\pi i x_0\xi} b_1(x-x_0,\xi), \\ a(\xi) &= a_1(\xi), & b(\xi) &= e^{-2\pi i x_0\xi} b_1(\xi), \end{aligned}$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i x_0\xi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \widehat{f_1}(\xi) \begin{bmatrix} e^{2\pi i x_0\xi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(iv) Ako je $f(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ za neki $\lambda > 0$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= a_1\left(\tfrac{x}{\lambda},\lambda\xi\right), & b(x,\xi) &= b_1\left(\tfrac{x}{\lambda},\lambda\xi\right), \\ a(\xi) &= a_1(\lambda\xi), & b(\xi) &= b_1(\lambda\xi), \end{aligned}$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\lambda\xi).$$

(v) Ako je $f(x) = \overline{f_1(x)}$, tada vrijedi

$$a(x,\xi) = \overline{a_1(x,-\xi)}, \qquad b(x,\xi) = \overline{b_1(x,-\xi)},$$
$$a(\xi) = \overline{a_1(-\xi)}, \qquad b(\xi) = \overline{b_1(-\xi)},$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f_1}}(-\xi).$$

(vi) Ako je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ i nosač od f_1 je lijevo od nosača od f_2, tada vrijedi

$$a(\xi) = a_1(\xi)a_2(\xi) + b_1(\xi)\overline{b_2(\xi)},$$
$$b(\xi) = a_1(\xi)b_2(\xi) + b_1(\xi)\overline{a_2(\xi)},$$

odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi)\,\widehat{f_2}(\xi).$$

Dokaz. U svim tvrdnjama leme pretpostavljamo da su a_1 i b_1 rješenja integralnih jednadžbi (4.7) i (4.8) za funkciju f_1.

(i) Neka je $f(x) = e^{2\pi i\theta} f_1(x)$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$. Provjerimo sada jesu li a i b iz iskaza leme rješenja tih integralnih jednadžbi za funkciju f. Prvo provjerimo zadovoljavaju li jednadžbu (4.7). Dakle, imamo

$$\begin{aligned} a(x,\xi) = a_1(x,\xi) &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\xi} b_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{x} e^{-2\pi i\theta}\overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\xi} e^{2\pi i\theta} b_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

S druge strane, za provjeru jednadžbe (4.8) imamo

$$\begin{aligned} b(x,\xi) = e^{2\pi i\theta} b_1(x,\xi) &= e^{2\pi i\theta} \int_{-\infty}^{x} f_1(t) e^{-2\pi i t\xi} a_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{2\pi i\theta} f_1(t) e^{-2\pi i t\xi} a_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puštajući $x \to \infty$ sada dobivamo da je $a(\xi) = a_1(\xi)$ i $b(\xi) = e^{2\pi i\theta} b_1(\xi)$, iz čega direktno slijedi jednakost za $\widehat{f}(\xi)$.

(ii) Neka je $f(x) = e^{2\pi i x \xi_0} f_1(x)$ za neki $\xi_0 \in \mathbb{R}$ i pokažimo da su a i b rješenja integralnih jednadžbi za funkciju f. Prvo za (4.7) imamo da je

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) = a_1(x, \xi - \xi_0) &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t(\xi - \xi_0)} b_1(t, \xi - \xi_0)\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} e^{-2\pi i t \xi_0} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t \xi} b_1(t, \xi - \xi_0)\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t \xi} b(t,\xi)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Za integralnu jednadžbu (4.8) imamo

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) = b_1(x, \xi - \xi_0) &= \int_{-\infty}^{x} f_1(t) e^{-2\pi i t(\xi - \xi_0)} a_1(t, \xi - \xi_0)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} e^{2\pi i t \xi_0} f_1(t) e^{-2\pi i t \xi} a_1(t, \xi - \xi_0)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t \xi} a(t,\xi)\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Puštajući $x \to \infty$ dobivamo da je $a(\xi) = a_1(\xi - \xi_0)$ i $b(\xi) = b_1(\xi - \xi_0)$, iz čega direktno slijedi da je $\overbrace{f}(\xi) = \overbrace{f_1}(\xi - \xi_0)$.

(iii) Neka je $f(x) = f_1(x - x_0)$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$ i opet pokažimo da su a i b rješenja integralnih jednadžbi za f. Dakle, imamo da je

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) = a_1(x - x_0, \xi) &= 1 + \int_{-\infty}^{x - x_0} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t \xi} b_1(t,\xi)\, \mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(u - x_0)} e^{2\pi i (u - x_0)\xi} b_1(u - x_0, \xi)\, \mathrm{d}u \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(u - x_0)} e^{2\pi i u \xi} e^{-2\pi i x_0 \xi} b_1(u - x_0, \xi)\, \mathrm{d}u \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(u)} e^{2\pi i u \xi} b(u,\xi)\, \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) = e^{-2\pi i x_0 \xi} b_1(x - x_0, \xi) &= e^{-2\pi i x_0 \xi} \int_{-\infty}^{x - x_0} f_1(t) e^{-2\pi i t \xi} a_1(t,\xi)\, \mathrm{d}t \\
&= e^{-2\pi i x_0 \xi} \int_{-\infty}^{x} f_1(u - x_0) e^{-2\pi i (u - x_0)\xi} a_1(u - x_0, \xi)\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(u) e^{-2\pi i u \xi} a(u,\xi)\, \mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u obje jednadžbe upotrijebili supstituciju $u = t + x_0$. Puštajući $x \to \infty$ dobivamo da je $a(\xi) = a_1(\xi)$ i $b(\xi) = e^{-2\pi i x_0 \xi} b_1(\xi)$, iz čega slijedi i tvrdnja za $\overbrace{f}(\xi)$.

(iv) Neka je $f(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ za neki $\lambda > 0$. Provjerimo jesu li tada a i b rješenja integralnih jednadžbi za f. Naime, vrijedi da je

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) = a_1\left(\tfrac{x}{\lambda},\lambda\xi\right) &= 1 + \int_{-\infty}^{\frac{x}{\lambda}} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\lambda\xi} b_1(t,\lambda\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\lambda}\overline{f_1\left(\tfrac{u}{\lambda}\right)} e^{2\pi i u\xi} b_1\left(\tfrac{u}{\lambda},\lambda\xi\right)\mathrm{d}u \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(u)} e^{2\pi i u\xi} b(u,\xi)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

S druge strane, za $b(x,\xi)$ imamo

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) = b_1\left(\tfrac{x}{\lambda},\lambda\xi\right) &= \int_{-\infty}^{\frac{x}{\lambda}} f_1(t) e^{-2\pi i t\lambda\xi} a_1(t,\lambda\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\lambda} f_1\left(\tfrac{u}{\lambda}\right) e^{-2\pi i t\xi} a_1\left(\tfrac{u}{\lambda},\lambda\xi\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(u) e^{-2\pi i u\xi} a(u,\xi)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

pri čemu smo se u obje jednadžbe koristili supstitucijom $u = \lambda t$. Puštajući $x \to \infty$ sada dobivamo da vrijedi $a(\xi) = a_1(\lambda\xi)$ i $b(\xi) = b_1(\lambda\xi)$ pa vrijedi i $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_1}(\lambda\xi)$.

(v) Neka je $f(x) = \overline{f_1(x)}$ i provjerimo jesu li i u ovom slučaju a i b iz iskaza leme rješenja jednadžbi (4.7) i (4.8) za funkciju f. Naime, za $a(x,\xi)$ imamo

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) = \overline{a_1(x,-\xi)} &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{\overline{f_1(t)} e^{-2\pi i t\xi} b_1(t,-\xi)}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Za $b(x,\xi)$ imamo

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) = \overline{b_1(x,-\xi)} &= \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(t) e^{2\pi i t\xi} a_1(t,-\xi)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Kao i u prethodnim slučajevima, puštajući $x \to \infty$ dobivamo da je $a(\xi) = \overline{a_1(-\xi)}$ i $b(\xi) = \overline{b_1(-\xi)}$. Nadalje, iz toga slijedi da je $\widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f_1}(-\xi)}$.

(vi) Neka je $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ i neka je nosač od f_1 lijevo od nosača od f_2. To znači da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da je nosač od f_1 sadržan u $\langle -\infty, x_0]$, a nosač od f_2 sadržan u $[x_0, +\infty\rangle$. Prvo pokažimo da su rješenja integralnih jednadžbi za funkciju f dana s:

$$a(x,\xi) := \begin{cases} a_1(x,\xi) & \text{za } x \le x_0, \\ a_1(\xi)a_2(x,\xi) + b_1(\xi)\overline{b_2(x,\xi)} & \text{za } x > x_0, \end{cases}$$

$$b(x,\xi) := \begin{cases} b_1(x,\xi) & \text{za } x \le x_0, \\ a_1(\xi)b_2(x,\xi) + b_1(\xi)\overline{a_2(x,\xi)} & \text{za } x > x_0. \end{cases}$$

Neka je sada $x \le x_0$ i pokažimo prvo da gore definirani a i b zadovoljavaju jednadžbu (4.7). Imamo

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) = a_1(x,\xi) &= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\xi} b_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \left(\overline{f_1(t) + f_2(t)}\right) e^{2\pi i t\xi} b_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Za jednadžbu (4.8) slično imamo

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) = b_1(x,\xi) &= \int_{-\infty}^{x} f_1(t) e^{-2\pi i t\xi} a_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} \left(f_1(t) + f_2(t)\right) e^{-2\pi i t\xi} a_1(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Neka je sada $x > x_0$. Za $a(x,\xi)$ imamo

$$\begin{aligned}
a(x,\xi) &= a_1(\xi) a_2(x,\xi) + b_1(\xi) \overline{b_2(x,\xi)} \\
&= a_1(\xi) + a_1(\xi) \int_{-\infty}^{x} \overline{f_2(t)} e^{2\pi i t\xi} b_2(t,\xi)\,\mathrm{d}t + b_1(\xi) \int_{-\infty}^{x} \overline{f_2(t)} e^{2\pi i t\xi} \overline{a_2(t,\xi)}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x_0} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\xi} b_1(\xi)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \overline{f_2(t)} e^{2\pi i t\xi} \left(a_1(\xi) b_2(t,\xi) + b_1(\xi) \overline{a_2(t,\xi)}\right)\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x_0} \overline{f_1(t)} e^{2\pi i t\xi} \Big(a_1(\xi) \underbrace{b_2(t,\xi)}_{=0} + b_1(\xi) \underbrace{\overline{a_2(t,\xi)}}_{=1}\Big)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \overline{f_2(t)} e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x_0} \left(\overline{f_1(t) + f_2(t)}\right) e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \left(\overline{f_1(t) + f_2(t)}\right) e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t\xi} b(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Slično, za $b(x,\xi)$ imamo

$$\begin{aligned}
b(x,\xi) &= a_1(\xi) b_2(x,\xi) + b_1(\xi) \overline{a_2(x,\xi)} \\
&= a_1(\xi) \int_{-\infty}^{x} f_2(t) e^{-2\pi i t\xi} a_2(t,\xi)\,\mathrm{d}t + b_1(\xi) + b_1(\xi) \int_{-\infty}^{x} f_2(t) e^{-2\pi i t\xi} \overline{b_2(t,\xi)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(t) e^{-2\pi i t\xi} a_1(\xi)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} f_2(t) e^{-2\pi i t\xi} \left(a_1(\xi) a_2(t,\xi) + b_1(\xi) \overline{b_2(t,\xi)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(t) e^{-2\pi i t\xi} \Big(a_1(\xi) \underbrace{a_2(t,\xi)}_{=1} + b_1(\xi) \underbrace{\overline{b_2(t,\xi)}}_{=0}\Big)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} f_2(t) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x_0} \left(f_1(t) + f_2(t)\right) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} \left(f_1(t) + f_2(t)\right) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi} a(t,\xi)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Puštajući $x \to \infty$ dobivamo jednakosti za $a(\xi)$ i $b(\xi)$, a iz toga direktno slijedi i jednakost za $\widehat{\widehat{f}}(\xi)$. ■

Nekad je, umjesto da promatramo $a(x,\xi)$ i $b(x,\xi)$, jednostavnije promatrati *koeficijent refleksije* definiran s

$$r(x,\xi) := \frac{b(x,\xi)}{a(x,\xi)}.$$

Uočimo da iz definicije slijedi da je $|r(x,\xi)| < 1$ za sve $x, \xi \in \mathbb{R}$. Posebno vrijedi da je $r(-\infty,\xi) = 0$. Za fiksirani ξ derivirajući gornju jednadžbu i koristeći se formulama (4.6) za $\partial_x a$ i $\partial_x b$ dobivamo da je

$$\begin{aligned}\partial_x r(x,\xi) &= \frac{\partial_x b(x,\xi) a(x,\xi) - b(x,\xi)\partial_x a(x,\xi)}{a(x,\xi)^2} \\ &= \frac{f(x)e^{-2\pi i x\xi} a(x,\xi)^2 - \overline{f(x)} e^{2\pi i x\xi} b(x,\xi)^2}{a(x,\xi)^2}\end{aligned}$$

pa sada vidimo da r zadovoljava sljedeću Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom:

$$\begin{aligned}&\partial_x r(x,\xi) = f(x)e^{-2\pi i x\xi} - \overline{f(x)} e^{2\pi i x\xi} r(x,\xi)^2, \\ &r(-\infty,\xi) = 0.\end{aligned}$$

Integralna jednadžba koja odgovara ovom sistemu je

$$r(x,\xi) = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\, dt - \int_{-\infty}^{x} \overline{f(t)} e^{2\pi i t\xi} r(t,\xi)^2\, dt. \tag{4.9}$$

Nadalje, i ovdje ćemo umjesto $r(+\infty,\xi)$ pisati samo $r(\xi)$. Za kraj ovog odjeljka napišimo svojstva koja zadovoljava koeficijent refleksije.

Lema 4.4 *(i) Ako je $f(x) = e^{2\pi i\theta} f_1(x)$ za neki $\theta \in \mathbb{R}$, tada vrijedi*

$$\begin{aligned}r(x,\xi) &= e^{2\pi i\theta} r_1(x,\xi), \\ r(\xi) &= e^{2\pi i\theta} r_1(\xi).\end{aligned}$$

(ii) Ako je $f(x) = e^{2\pi i x\xi_0} f_1(x)$ za neki $\xi_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\begin{aligned}r(x,\xi) &= r_1(x,\xi-\xi_0), \\ r(\xi) &= r_1(\xi-\xi_0).\end{aligned}$$

(iii) Ako je $f(x) = f_1(x-x_0)$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\begin{aligned}r(x,\xi) &= e^{-2\pi i x_0\xi} r_1(x-x_0,\xi), \\ r(\xi) &= e^{-2\pi i x_0\xi} r_1(\xi).\end{aligned}$$

(iv) Ako je $f(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ *za neki* $\lambda > 0$*, tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
r(x,\xi) &= r_1\left(\tfrac{x}{\lambda}, \lambda\xi\right), \\
r(\xi) &= r_1(\lambda\xi).
\end{aligned}
$$

(v) Ako je $f(x) = \overline{f_1(x)}$*, tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
r(x,\xi) &= \overline{r_1(x,-\xi)}, \\
r(\xi) &= \overline{r_1(-\xi)}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Sva svojstva slijede direktno iz prvih pet tvrdnji leme 4.3. ■

4.3 Nelinearni analogoni nekih rezultata za Fourierovu transformaciju

Prirodno je zapitati se vrijede li za nelinearnu Fourierovu transformaciju neke tvrdnje koje bi se mogle protumačiti kao nelinearni analogoni npr. Plancherelova identiteta ili Hausdorff-Youngove nejednakosti. Posvetimo se sada nekim L^p ocjenama koje zadovoljava nelinearna Fourierova transformacija.

Uočimo da iz integralnih jednadžbi (4.7) i (4.8) slijede nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
|a(x,\xi)| &\le 1 + \int_{-\infty}^{x} |f(t)||b(t,\xi)|\,\mathrm{d}t, \\
|b(x,\xi)| &\le \int_{-\infty}^{x} |f(t)||a(t,\xi)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Zbrajajući gornje nejednakosti dobivamo da je

$$
|a(x,\xi)| + |b(x,\xi)| \le 1 + \int_{-\infty}^{x} |f(t)|\left(|a(t,\xi)| + |b(t,\xi)|\right)\mathrm{d}t
$$

pa iz Grönwallove leme sada slijedi da je

$$
|a(x,\xi)| + |b(x,\xi)| \le e^{\int_{-\infty}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t}, \tag{4.10}
$$

te puštanjem $x \to \infty$ dobivamo

$$
\left\| \log\left(|a(\xi)| + |b(\xi)|\right) \right\|_{\mathrm{L}^\infty_\xi(\mathbb{R})} \le \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}, \tag{4.11}
$$

na što zapravo možemo gledati kao na nelinearni analogon ocjene (4.1). Posebno, iz (4.10) slijedi da je

$$
\|a(\xi)\|_{\mathrm{L}^\infty_\xi(\mathbb{R})} \le e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} < \infty \quad \text{i} \quad \|b(\xi)\|_{\mathrm{L}^\infty_\xi(\mathbb{R})} \le e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} < \infty.
$$

Kako za $a, b \in \mathbb{C}$ za koje je $|a|^2 - |b|^2 = 1$ vrijedi $(\log|a|^2)^{1/2} \leq \log(|a| + |b|)$, primijetimo da iz (4.11) slijedi

$$\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^\infty_\xi(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

Sada ćemo pokazati da za a i b vrijede sljedeći multilinearni razvoji:

$$a(x,\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2k-1}>t_{2k}\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \cdots \overline{f(t_{2k-1})} f(t_{2k}) \\ e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2k-1}+t_{2k})\xi}\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-1} \mathrm{d}t_{2k}, \tag{4.13}$$

$$b(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2k-2}>t_{2k-1}\}} f(t_1) \overline{f(t_2)} \cdots \overline{f(t_{2k-2})} f(t_{2k-1}) \\ e^{-2\pi i(t_1-t_2+\cdots-t_{2k-2}+t_{2k-1})\xi}\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-2} \mathrm{d}t_{2k-1}. \tag{4.14}$$

Pokažimo prvo da redovi s desne strane u gornjim formulama apsolutno konvergiraju. Naime, puštajući $x \to \infty$ dobivamo da za svaki $K \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 1 &+ \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\{t_1>t_2>\cdots>t_{2k-1}>t_{2k}\}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2k})|\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{(2k)!} \int_{\mathbb{R}^{2k}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2k})|\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2K} \frac{1}{k!} \|f\|^k_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \xrightarrow[K\to\infty]{} e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} \end{aligned}$$

pa vidimo da red u (4.13) apsolutno konvergira. Analogno, za red u (4.14) apsolutna konvergencija slijedi iz

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\{t_1>t_2>\cdots>t_{2k-2}>t_{2k-1}\}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2k-1})|\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{(2k-1)!} \int_{\mathbb{R}^{2k-1}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2k-1})|\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2K-1} \frac{1}{k!} \|f\|^k_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \xrightarrow[K\to\infty]{} e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}}. \end{aligned}$$

Nadalje, Picardovim iteriranjem, tj. uzastopnim supstitucijama jedne integralne jednadžbe u drugu dobivamo da za svaki $K \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$a(x,\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2k-1}>t_{2k}\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \cdots \overline{f(t_{2k-1})} f(t_{2k}) \\ e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2k-1}+t_{2k})\xi}\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-1} \mathrm{d}t_{2k}$$

$$+ \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2K+2}\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \cdots \overline{f(t_{2K+1})} f(t_{2K+2})$$
$$e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2K+1}+t_{2K+2})\xi} a(t_{2K+2},\xi)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K+1}\mathrm{d}t_{2K+2}, \tag{4.15}$$

$$b(x,\xi) = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2k-2}>t_{2k-1}\}} f(t_1)\overline{f(t_2)}\cdots\overline{f(t_{2k-2})} f(t_{2k-1})$$
$$e^{-2\pi i(t_1-t_2+\cdots-t_{2k-2}+t_{2k-1})\xi}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2k}\mathrm{d}t_{2k+1}$$
$$+ \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2K+1}\}} f(t_1)\overline{f(t_2)}\cdots\overline{f(t_{2K})} f(t_{2K+1})$$
$$e^{-2\pi i(t_1-t_2+\cdots-t_{2K}+t_{2K+1})\xi} a(t_{2K+1},\xi)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K}\mathrm{d}t_{2K+1}. \tag{4.16}$$

Označimo za $K \in \mathbb{N}$ sa $S_K^a(x,\xi)$ i $S_K^b(x,\xi)$ K-tu parcijalnu sumu redova u (4.13) i (4.14) redom. Uočimo da sada za svaki $K \in \mathbb{N}$ koristeći se formulom (4.15) za $a(x,\xi)$ vrijedi

$$a(x,\xi) - S_K^a(x,\xi)$$
$$= \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2K+2}\}} \overline{f(t_1)} f(t_2)\cdots\overline{f(t_{2K+1})} f(t_{2K+2})$$
$$e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2K+1}+t_{2K+2})\xi} a(t_{2K+2},\xi)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K+1}\mathrm{d}t_{2K+2}$$

pa puštajući $x \to \infty$ imamo da je

$$|a(\xi) - S_K^a(+\infty,\xi)|$$
$$\leq \int\limits_{\{t_1>t_2>\cdots>t_{2K+2}\}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2K+1})f(t_{2K+2})a(t_{2K+2},\xi)|\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K+1}\mathrm{d}t_{2K+2}$$
$$\leq e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} \frac{1}{(2K+2)!} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^{2K+2} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$$

pa smo dokazali da vrijedi (4.13) i to čak uz uniformnu konvergenciju s obzirom na $\xi \in \mathbb{R}$. Analogno, za $K \in \mathbb{N}$ koristeći (4.16) imamo da je

$$b(x,\xi) - S_K^b(x,\xi)$$
$$= \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2K+1}\}} f(t_1)\overline{f(t_2)}\cdots\overline{f(t_{2K})} f(t_{2K+1})$$
$$e^{-2\pi i(t_1-t_2+\cdots-t_{2K}+t_{2K+1})\xi} a(t_{2K+1},\xi)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K}\mathrm{d}t_{2K+1}.$$

Dakle, kada $x \to \infty$ imamo

$$\left|b(\xi) - S_K^b(+\infty,\xi)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\{t_1>t_2>\cdots>t_{2K+1}\}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2K})f(t_{2K+1})a(t_{2K+1},\xi)|\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2K}\mathrm{d}t_{2K+1} \\
&\leq e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} \frac{1}{(2K+1)!}\,\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^{2K+1} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

pa vrijedi i (4.14), opet uniformno po $\xi \in \mathbb{R}$. Kao što ćemo vidjeti kroz ovo i sljedeće poglavlje, upravo pokazani multilinearni razvoji iznimno su korisni u dokazima raznih tvrdnji, a direktna posljedica tih razvoja su tzv. *Bornove aproksimacije*:

$$
\begin{aligned}
a(\xi) &= 1 + \mathcal{O}\Big(\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2\Big), \\
b(\xi) &= \hat{f}(\xi) + \mathcal{O}\Big(\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^3\Big),
\end{aligned}
$$

kada $\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \to 0$. To nam sada na neki način potvrđuje da smo uistinu u prošlom odjeljku 4.2 definirali nelinearnu varijantu Fourierove transformacije.

Sljedeća tvrdnja je nelinearni analogon Plancherelova identiteta koji kaže

$$
\Big\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^2_\xi(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}. \tag{4.17}
$$

Ovdje ćemo dati dokaz te tvrdnje, čiji su glavni koraci preuzeti iz [17], a jedna od varijanti ovog dokaza pojavljuje se 1960. godine u [3]. Za funkciju f pretpostavit ćemo još dodatno i da je glatka. Prvo uočimo da sistem diferencijalnih jednadžbi (4.6) uz iste početne uvjete ima smisla i kada je ξ kompleksan broj te za rješenja ima isto apsolutno neprekidne funkcije. Uzmimo sada kompleksni broj $\xi = \alpha + i\beta$, pri čemu su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\beta \in [0,\infty\rangle$ i računajmo

$$
\begin{aligned}
&\partial_x\Big(|a(x,\xi)|^2 - e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2\Big) = \\
&= \partial_x a(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} + a(x,\xi)\partial_x\overline{a(x,\xi)} - e^{-4\pi x\beta}\partial_x b(x,\xi)\overline{b(x,\xi)} \\
&\quad - e^{-4\pi x\beta} b(x,\xi)\partial_x\overline{b(x,\xi)} + 4\pi\beta e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\Big(\partial_x a(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} - e^{-4\pi x\beta}\partial_x b(x,\xi)\overline{b(x,\xi)}\Big) + 4\pi\beta e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2 \\
&= 2e^{-2\pi x\beta}\underbrace{\mathrm{Re}\Big(\overline{f(x)}e^{2\pi i x\alpha}b(x,\xi)\overline{a(x,\xi)} - f(x)e^{-2\pi i x\alpha}a(x,\xi)\overline{b(x,\xi)}\Big)}_{=0} + 4\pi\beta e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2 \\
&= 4\pi\beta e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Iz gornjeg računa slijedi da je funkcija $x \mapsto |a(x,\xi)|^2 - e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2$ rastuća na $\mathbb{R}$. Kako je, zbog početnih uvjeta, vrijednost te funkcije za dovoljno male x jednaka 1, možemo zaključiti da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$
|a(x,\xi)|^2 - e^{-4\pi x\beta}|b(x,\xi)|^2 \geq 1.
$$

Sada je, posebno,

$$|a(x,\xi)|^2 \geq 1 \quad \text{i} \quad |a(\xi)|^2 \geq 1.$$

Također, i multilinearni razvoj (4.13) vrijedi kada je ξ kompleksan broj te uzmimo ξ kao u prvom dijelu dokaza. U tom slučaju multilinearni razvoj za funkciju $a(x,\xi)$ glasi

$$a(x,\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\{x>t_1>t_2>\cdots>t_{2k-1}>t_{2k}\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \cdots \overline{f(t_{2k-1})} f(t_{2k}) \\ e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2k-1}+t_{2k})(\alpha+i\beta)}\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{2k-1} \mathrm{d}t_{2k}.$$

Realni dio eksponenta eksponencijalne funkcije u gornjem razvoju jednak je

$$2\pi\beta(-t_1+t_2-t_3+t_4-\cdots-t_{2k-1}+t_{2k}),$$

te vrijedi

$$2\pi \underbrace{\beta}_{\geq 0} \Big(\underbrace{(-t_1+t_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(-t_3+t_4)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-t_{2k-1}+t_{2k})}_{\leq 0} \Big) \leq 0$$

pa je

$$\left| e^{-2\pi i(-t_1+t_2-\cdots-t_{2k-1}+t_{2k})(\alpha+i\beta)} \right| \leq 1.$$

Pustimo sada $x \to \infty$ pa, kao i u dokazu multilinearnih razvoja, dobivamo da je

$$|a(\xi)| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\{t_1>t_2>\cdots>t_{2k-1}>t_{2k}\}} |f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_{2k})|\, \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{2k} < \infty$$

čime smo pokazali da je red apsolutno i uniformno konvergentan za $\xi \in \mathbb{R}\times[0,+\infty\rangle$. Sada neprekidnost od $\xi \mapsto a(\xi)$ na $\mathbb{R}\times[0,\infty\rangle$ slijedi iz holomorfnosti eksponencijalne funkcije, a iz Weierstrassova teorema slijedi holomorfnost od $\xi \mapsto a(\xi)$ na $\mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle$. Zbog upravo dokazanog, funkcija

$$\xi \mapsto \log a(\xi)$$

dobro je definirana te je neprekidna na $\mathbb{R}\times[0,\infty\rangle$ i holomorfna na $\mathbb{R}\times\langle 0,\infty\rangle$. Također, možemo izabrati granu logaritma tako da vrijedi $\lim_{|\xi|\to\infty} \log a(\xi) = 0$.

Promotrimo sada konturu $C = C_1 + C_2$, pri čemu je $C_1 = [-R, R]$, a C_2 polukružnica u gornjoj poluravnini sa središtem u ishodištu i polumjerom $R > 0$. Znamo da je

$$\int_C \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 0 \tag{4.18}$$

po Cauchyjevu teoremu. Izračunajmo sada integral po C_2. Prisjetimo se da vrijedi

$$a(\xi) = 1 + \int\limits_{\{t_1>t_2\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) e^{-2\pi i(-t_1+t_2)\xi}\, \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$+ \int\limits_{\{t_1>t_2>t_3>t_4\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \overline{f(t_3)} f(t_4) e^{-2\pi i(-t_1+t_2-t_3+t_4)\xi} a(t_4,\xi)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 \mathrm{d}t_4. \quad (4.19)$$

Za prvi integral u gornjoj sumi upotrebljavajući supstituciju $s = t_2 - t_1$, a zatim parcijalnu integraciju, dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{t_1>t_2\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) e^{-2\pi i(-t_1+t_2)\xi}\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} f(t+s) e^{-2\pi i s\xi}\, \mathrm{d}t \mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} f(t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi i\xi} \int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} \partial_s f(t+s) e^{-2\pi i s\xi}\, \mathrm{d}t \mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}),
\end{aligned}$$

pri čemu smo složenost drugog člana sume dobili primjenom još jedne parcijalne integracije. Nadalje, za drugi integral u (4.19) supstitucijama $s_1 = t_2 - t_1$ i $s_2 = t_4 - t_3$ pa parcijalnom integracijom dobivamo da je

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{t_1>t_2>t_3>t_4\}} \overline{f(t_1)} f(t_2) \overline{f(t_3)} f(t_4) e^{-2\pi i(-t_1+t_2-t_3+t_4)\xi} a(t_4,\xi)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 \mathrm{d}t_4 \\
&= \int\limits_{\{s_1,s_2<0\}} \underbrace{\left(\int\limits_{\{t_1-t_3>s_1\}} \overline{f(t_1)} f(t_1+s_1) \overline{f(t_3)} f(t_3+s_2) a(t_3+s_2,\xi)\, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_3 \right)}_{\text{označimo sa } \Phi(s_1,s_2)} e^{-2\pi i(s_1+s_2)\xi}\, \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(-\frac{1}{2\pi i\xi} \Phi(s_1,0) e^{-2\pi i s_1\xi} + \frac{1}{2\pi i\xi} \int_{-\infty}^{0} \partial_{s_2} \Phi(s_1,s_2) e^{-2\pi i(s_1+s_2)\xi}\, \mathrm{d}s_2 \right) \mathrm{d}s_1.
\end{aligned}$$

Ako ponovno napravimo parcijalnu integraciju, dobit ćemo da je taj član reda veličine $\mathcal{O}(|\xi|^{-2})$ pa imamo da je

$$a(\xi) = 1 - \frac{1}{2\pi i\xi} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}).$$

Kada $|\xi| \to \infty$, iz činjenice da je $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ za $|z| < 1$, slijedi da je

$$\log a(\xi) = -\frac{1}{2\pi i\xi} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}). \quad (4.20)$$

Kako vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \frac{1}{2\pi i\xi} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2\, \mathrm{d}\xi &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi i(R\cos t + iR\sin t)} (-R\sin t + iR\cos t) \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

integrirajući (4.20) po C_2 dobivamo da je

$$\int_{C_2} \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(R^{-1}).$$

Iz (4.18) slijedi da je

$$\int_{C_1} \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi = -\int_{C_2} \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

a kako je integral po C_1 zapravo integral $\int_{-R}^{R} \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ kada $R \to \infty$ imamo da je

$$\int_{\mathbb{R}} \log a(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Na kraju uzmimo još realni dio gornje jednakosti da dobijemo

$$\int_{\mathbb{R}} \log |a(\xi)|\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},$$

iz čega slijedi (4.17).

Jedna od najvažnijih ocjena svakako je nelinearna Hausdorff-Youngova nejednakost koju su dokazali Christ i Kiselev [6], [7] 2001. godine, koja kaže da za $1 < p < 2$ i q konjugirani eksponent od p postoji konstanta $C_p > 0$ tako da vrijedi

$$\left\| (\log |a(\xi)|^2)^{1/2} \right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{4.21}$$

Ovdje nećemo iznositi detalje tog dokaza, nego samo napominjemo da dokaz nije jednostavan i da se u njemu koriste multilinearni razvoji (4.13) i (4.14). Razmatrajući funkcije

$$g(x) = e^{-(Nx)^2} 1_{[-1,1]}(x)$$

kada $N \to \infty$ i linearizirajući može se pokazati da je $C_p \geq B_p$, pri čemu je B_p Babenko-Becknerova konstanta.

Pristup Christa i Kiseleva ne funkcionira za $p = 2$ i štoviše konstanta C_p eksplodira kada $p \to 2^-$ te je otvoreni problem može li se konstanta C_p zamijeniti s nekom apsolutnom konstantom C. Djelomična potvrda te slutnje dana je u [13] u kojem je pokazano da se to može napraviti u Cantorovu modelu. Napomenimo na kraju da se (4.21) ne može dobiti interpolacijom iz rubnih slučajeva, (4.12) i (4.17), jer preslikavanje $f \mapsto (\log |a(\xi)|^2)^{1/2}$ nije linearno. Nelinearnom Hausdorff-Youngovom nejednakosti detaljno ćemo se baviti u sljedećem poglavlju i to za funkcije koje imaju dovoljno malu L^1 normu.

4.4 Motivacija

Kroz ovaj odjeljak cilj nam je dati uvid u dva problema u kojima se pojavljuje sistem diferencijalnih jednadžbi (4.6) koji mi promatramo. S obzirom na to da se ova varijanta nelinearne Fourierove transformacije koju proučavamo nekad zove i *Diracova nelinearna Fourierova transformacija* te da ona spada pod teoriju AKNS-ZS sistema, dat ćemo uvid i u svojstveni problem za Diracov operator [26] i u AKNS-ZS sisteme [1], [30].

4.4.1 Diracov operator

Diracov operator $L = L(f)$ definiran je s

$$L := \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & -\overline{f} \\ f & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabilna funkcija s kompaktnim nosačem, kao i dosad. Diracov operator djeluje na parovima Schwartzovih funkcija, tj.

$$L \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi' - \overline{f}\psi \\ f\varphi - \psi' \end{bmatrix}.$$

Za proizvoljne Schwartzove funkcije φ_1, ψ_1, φ_2 i ψ_2 dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\langle L \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \Big((\varphi_1' - \overline{f}\psi_1)\overline{\varphi_2} + (f\varphi_1 - \psi_1')\overline{\psi_2} \Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi_1'\overline{\varphi_2} - \overline{f}\psi_1\overline{\varphi_2} + f\varphi_1\overline{\psi_2} - \psi_1'\overline{\psi_2} \Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi_1\overline{\varphi_2'} - \overline{f}\psi_1\overline{\varphi_2} + f\varphi_1\overline{\psi_2} - \psi_1\overline{\psi_2'} \Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(-\varphi_1(\overline{\varphi_2' - \overline{f}\psi_2}) - \psi_1(\overline{f\varphi_2 - \psi_2'}) \Big) \\
&= -\left\langle \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, L \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

pri čemu smo se u trećoj jednakosti koristili parcijalnom integracijom i činjenicom da su funkcije Schwartzove. Iz toga slijedi da je L (neograničeni) antihermitski operator pa su njegove svojstvene vrijednosti čisto imaginarni brojevi. Svojstvena jednadžba za Diracov operator je

$$L \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$$

pa uz supstituciju $\lambda = -\pi i\xi$ za $\xi \in \mathbb{R}$ ona postaje

$$L \begin{bmatrix} \varphi(x,\xi) \\ \psi(x,\xi) \end{bmatrix} = -\pi i\xi \begin{bmatrix} \varphi(x,\xi) \\ \psi(x,\xi) \end{bmatrix}.$$

Dakle, dobili smo sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned} \partial_x\varphi(x,\xi) - \overline{f(x)}\psi(x,\xi) &= -\pi i\xi\varphi(x,\xi), \\ f(x)\varphi(x,\xi) - \partial_x\psi(x,\xi) &= -\pi i\xi\psi(x,\xi), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \partial_x\varphi(x,\xi) + \pi i\xi\varphi(x,\xi) &= \overline{f(x)}\psi(x,\xi), \\ \partial_x\psi(x,\xi) - \pi i\xi\psi(x,\xi) &= f(x)\varphi(x,\xi). \end{aligned}$$

Zatim, ako pomnožimo prvu jednadžbu s $e^{\pi ix\xi}$, a drugu s $e^{-\pi ix\xi}$, dobivamo da je

$$\begin{aligned} \partial_x\left(\varphi(x,\xi)e^{\pi ix\xi}\right) &= \overline{f(x)}e^{2\pi ix\xi}\psi(x,\xi)e^{-\pi ix\xi}, \\ \partial_x\left(\psi(x,\xi)e^{-\pi ix\xi}\right) &= f(x)e^{-2\pi ix\xi}\varphi(x,\xi)e^{\pi ix\xi}. \end{aligned}$$

Na kraju, supstitucijama

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= \varphi(x,\xi)e^{\pi ix\xi}, \\ b(x,\xi) &= \psi(x,\xi)e^{-\pi ix\xi} \end{aligned}$$

uistinu dobivamo naš sistem (4.6).

4.4.2 AKNS-ZS sistemi

Pregled o ovim sistemima preuzet je iz [16]. Pretpostavimo da se n tijela giba slobodno po kružnim putanjama u fiksiranoj ravnini različitim brzinama oko fiksirane točke (ishodišta). Najprije promatramo model kada tijela nemaju međusobnih interakcija. Označimo brzinu svakog tijela s d_j, za $j = 1, \dots, n$. Dakle, d_j su nam realni brojevi. Njihova gibanja možemo parametrizirati preslikavanjima $t \mapsto C_j e^{id_j t}$, pri čemu su nam C_j kompleksni brojevi. Ako s $u_j(t)$ označimo poziciju j-tog tijela u trenutku t, tada ona zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$u_j'(t) = id_j u_j(t),$$

za $j = 1, \dots, n$. Promatrajmo sada složeniji model kada postoji interakcija među tijelima. Sada putanje više neće nužno biti kružne. Dakle, pretpostavimo da na brzinu $u_j'(t)$ j-tog tijela utječu i pozicije $u_k(t)$ za $k = 1, \dots, n$ i $k \neq j$ drugih tijela na sljedeći način:

$$u_j'(t) = id_j u_j(t) + \sum_{k \neq j} a_{jk}(t) u_k(t),$$

i tako za svaki $j = 1, \dots, n$, pri čemu su a_{jk} izmjerive funkcije s kompleksnim vrijednostima. Gornji sistem diferencijalnih jednadžbi možemo zapisati matrično

$$u' = iDu + Au,$$

pri čemu je $u = [u_1 \cdots u_n]^\tau$ kompleksni vektor-stupac, $D = [d_{jk}]$ je $n \times n$ dijagonalna matrica za koju je $d_{jj} = d_j$, a $A = [a_{jk}]$ je $n \times n$ matrica čiji su elementi za $j \neq k$ gore uvedene funkcije a_{jk}, a posebno je $a_{jj} \equiv 0$. Gornji sistem je veoma teško (a nekad i nemoguće) eksplicitno riješiti. Ako pretpostavimo da rješenje postoji, postavlja se pitanje koje bi uvjete trebala matrica A zadovoljavati da nijedno tijelo ne ode izvan svoje putanje, tj. da je $\|u_j\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ za svaki $j = 1, \dots, n$. Uložimo sada gornji sistem u neprekidnu familiju sistema

$$u' = i\lambda Du + Au \tag{4.22}$$

koja ovisi o realnom parametru λ te se sada pitamo jesu li za g.s. $\lambda \in \mathbb{R}$ rješenja u_j sistema (4.22) ograničena, za $j = 1, \dots, n$. Familiju (4.22) zovemo *AKNS-ZS* (Ablowitz, Kaup, Newell, Segur, Zakharov, Shabat) *sistem*. Ako matrica A nije nul-matrica, ubacujući supstitucije

$$u_j(x) = e^{i\lambda d_j x} v_j(x),$$

za $j = 1, \dots, n$ u sistem (4.22) dobivamo da je

$$e^{i\lambda d_j x} i\lambda d_j v_j(x) + e^{i\lambda d_j x} v_j'(x) = i\lambda d_j e^{i\lambda d_j x} v_j(x) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) e^{i\lambda d_k x} v_k(x),$$

odnosno da je

$$v_j'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) e^{i\lambda(d_k - d_j)x} v_k(x).$$

Dakle, tim supstitucijama sistem (4.22) postaje sistem

$$v' = Wv, \tag{4.23}$$

pri čemu je $v = [v_1 \cdots v_n]^\tau$ kompleksni vektor-stupac, a elementi $n \times n$ matrice $W = [w_{jk}]$ dani su s

$$w_{jk}(x) = a_{jk}(x) e^{i\lambda(d_k - d_j)x}.$$

Sada je pitanje kada su rješenja od (4.23) ograničena. Razmotrimo nekoliko posebnih gore opisanih slučajeva.

1. slučaj. Neka je matrica A gornje trokutasta matrica dimenzije 2×2, tj. neka je $a_{11} = a_{21} = a_{22} \equiv 0$ i $a_{12}(x) \coloneqq f(x)$, pri čemu je f proizvoljna izmjeriva funkcija. Sistem (4.23) u ovom slučaju dan je s

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(x)e^{i\lambda(d_2-d_1)x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}.$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= v_2(x)f(x)e^{i\lambda(d_2-d_1)x}, \\ v_2'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Očito je funkcija v_2 ograničena jer je jednaka konstanti, koja ovisi o λ, pa ćemo je označiti s C_λ. Nadalje je

$$v_1(x) = C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{i\lambda(d_2-d_1)t}\,\mathrm{d}t + \widetilde{C}_\lambda,$$

za neku konstantu $\widetilde{C}_\lambda$ pa je

$$\|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} \leq |C_\lambda| \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{i\lambda(d_2-d_1)t}\,\mathrm{d}t \right| + |\widetilde{C}_\lambda|.$$

Pretpostavimo sada radi jednostavnosti da je $d_2 - d_1 = 1$. Znači, pitanje ograničenosti od v_1 sada se zapravo svodi na pitanje ograničenosti integrala u gornjoj nejednakosti. Definirajmo sada operator

$$(Mf)(\lambda) \coloneqq \sup_N \left| \int_{\{t<N\}} f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \right|. \tag{4.24}$$

Poznata Menshov-Paley-Zygmundova ocjena kaže da za $1 \leq p < 2$ i q konjugirani eksponent od p postoji konstanta $M_p > 0$ tako da je

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \leq M_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Sada vidimo da za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, za $1 \leq p < 2$, vrijedi da je $(Mf)(\lambda) < \infty$ za g.s. $\lambda \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je za te funkcije f i $\|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$ konačno za g.s. $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. slučaj. Pogledajmo sada slučaj kada je A gornje trokutasta 3×3 matrica i neka su $a_{12} \coloneqq f_1(x)$, $a_{13} \coloneqq f_2(x)$ i $a_{23} \coloneqq f_3(x)$ izmjerive funkcije. Sada je sistem (4.23) dan s

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ v_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_1(x)e^{i\lambda(d_2-d_1)x} & f_2(x)e^{i\lambda(d_3-d_1)x} \\ 0 & 0 & f_3(x)e^{i\lambda(d_3-d_2)x} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{bmatrix},$$

što nam dalje daje

$$
\begin{aligned}
v_1'(x) &= v_2(x) f_1(x) e^{i\lambda(d_2-d_1)x} + v_3(x) f_2(x) e^{i\lambda(d_3-d_1)x},\\
v_2'(x) &= v_3(x) f_3(x) e^{i\lambda(d_3-d_2)x},\\
v_3'(x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je v_3 ograničena funkcija jer je jednaka konstanti, koju ćemo označiti s C_λ, pa je nadalje

$$v_2(x) = C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f_3(t) e^{i\lambda(d_3-d_2)t}\,\mathrm{d}t + \widetilde{C}_\lambda.$$

Sada za v_1' vrijedi da je

$$
\begin{aligned}
v_1'(x) = C_\lambda \Big(\int_{-\infty}^{x} f_3(t) e^{i\lambda(d_3-d_2)t}\,\mathrm{d}t \Big) f_1(x) e^{i\lambda(d_2-d_1)x} + \widetilde{C}_\lambda f_1(x) e^{i\lambda(d_2-d_1)x}\\
+ C_\lambda f_2(x) e^{i\lambda(d_3-d_1)x}
\end{aligned}
$$

pa integrirajući dobijemo

$$
\begin{aligned}
v_1(x) = C_\lambda &\int_{-\infty}^{x} f_1(t_1) e^{i\lambda(d_2-d_1)t_1} \Big(\int_{-\infty}^{t_1} f_3(t_2) e^{i\lambda(d_3-d_2)t_2}\,\mathrm{d}t_2 \Big)\,\mathrm{d}t_1\\
&+ \widetilde{C}_\lambda \int_{-\infty}^{x} f_1(t_1) e^{i\lambda(d_2-d_1)t_1}\,\mathrm{d}t_1 + C_\lambda \int_{-\infty}^{x} f_2(t_1) e^{i\lambda(d_3-d_1)t_1}\,\mathrm{d}t_1 + \widetilde{\widetilde{C}}_\lambda.
\end{aligned}
$$

Christ i Kiselev [6], [7] dokazali su da je za $1 \le p_1, p_2 < 2$ operator

$$(f, g) \mapsto \sup_N \Big| \int_{\{t_1<t_2<N\}} f(t_1) g(t_2) e^{i\lambda(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)}\,\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \Big| \tag{4.25}$$

ograničen s $\mathrm{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}^{p_2}(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^{r}(\mathbb{R})$, pri čemu je $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}$ te je $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Uočimo da su drugi i treći član gornje sume jednaki onome što smo imali i u prvom slučaju pa na kraju imamo da su za eksponente $1 \le p_1, p_2, p_3 < 2$ i funkcije $f_1 \in \mathrm{L}^{p_1}(\mathbb{R})$, $f_2 \in \mathrm{L}^{p_2}(\mathbb{R})$ i $f_3 \in \mathrm{L}^{p_3}(\mathbb{R})$ izrazi $\|v_1\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$, $\|v_2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$ i $\|v_3\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}$ konačni za g.s. $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. slučaj. Recimo sada ukratko o općenitom slučaju kada je matrica A $n \times n$ gornje trokutasta matrica, za $n \ge 2$. U ispitivanju ograničenosti od v_k, za $k = 1, \ldots, n$ pojavit će se analogon operatora (4.25), tj. za izmjerive funkcije $f_1, \ldots, f_n$ pojavit će se pitanje ograničenosti operatora

$$(f_1, \ldots, f_n) \mapsto \sup_N \Big| \int_{\{t_1<\cdots<t_n<N\}} f(t_1) \cdots f(t_n) e^{i\lambda(\alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_n t_n)}\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \Big|, \tag{4.26}$$

pri čemu vrijedi da je $\alpha_j + \alpha_{j+1} \neq 0$ za sve $1 \le j < n$. I u općenitom slučaju taj operator ograničen je u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, za $1 \le p < 2$ ([6], [7]).

Napomenimo da su u gore opisanim slučajevima gornje trokutastih matrica dani potvrdni odgovori o ograničenosti rješenja sustava i kada su sve funkcije iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. U slučaju $n = 2$ odgovor slijedi iz Carlesonova teorema [4], [16], a u općenitom slučaju ograničenost je pokazana u nekoliko radova koje su napisali Muscalu, Tao i Thiele [19], [20], ali ovdje nećemo ulaziti u detalje tih rezultata. Samo ćemo napomenuti da su oni u svom radu [18] pokazali da pristup Christa i Kiseleva o ograničavanju operatora oblika (4.26) ne funkcionira za funkcije iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

4. slučaj. Neka je sada A matrica dimenzije 2×2 za koju je $a_{12}(x) := \overline{f(x)}$ i $a_{21}(x) := f(x)$, pri čemu je f proizvoljna izmjeriva funkcija f i neka je $d_2 - d_1 = 1$. U ovom slučaju sistem (4.23) je dan s

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{f(x)}e^{i\lambda x} \\ f(x)e^{-i\lambda x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}.$$

Supstitucijom $\lambda = 2\pi\xi$ dobivamo sistem

$$\begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{f(x)}e^{2\pi i x\xi} \\ f(x)e^{-2\pi i x\xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}$$

od kojeg smo zapravo i krenuli pri definiranju nelinearne Fourierove transformacije. Ovdje je g.s. ograničenost za funkcije iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ otvoreni problem, koji se popularno naziva *nelinearni Carlesonov problem*, zbog analogije s prethodnim slučajem gornje trokutaste 2×2 matrice.

Poglavlje 5

PERTURBATIVNO POJAČANJE HAUSDORFF-YOUNGOVE NEJEDNAKOSTI

5.1 Iskaz rezultata

Kako smo najavili, u ovom poglavlju detaljno ćemo se baviti nelinearnom Hausdorff-Youngovom nejednakosti. Sadržaj ovog poglavlja dostupan je i u obliku preprinta [12]. Cilj nam je dokazati sljedeću tvrdnju.

Teorem 5.1 *Neka je $1 < p < 2$, q konjugirani eksponent od p i neka su $L, H > 0$. Tada postoje $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ koji ovise o p, L i H takvi da vrijedi: ako je $I \subset \mathbb{R}$ interval duljine L, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija takva da je $|f| \le H\mathbb{1}_I$ i $\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \le \delta$, tada je*

$$\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \le \left(B_p - \varepsilon\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\right)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}, \tag{5.1}$$

pri čemu je B_p Babenko-Becknerova konstanta.

Za $p = 1$ i $p = 2$ nemamo poboljšanje nego jednostavno nejednakost s konstantom 1, vidjeti (4.12) i (4.17).

Dokaz teorema podijeljen je na dva dijela koji se nalaze u iduća dva odjeljka, u ovisnosti o tome je li za funkciju f veličina

$$\frac{\operatorname{dist}_p(f, \mathfrak{G})}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}}$$

veća ili manja od određenog broja koji ćemo definirati u prvom dijelu dokaza. Ovdje smo s $\mathfrak{G}$ označili skup svih poopćenih Gaussovih funkcija na $\mathbb{R}$, tj. funkcija oblika (4.5), a s

$$\operatorname{dist}_p(f, \mathfrak{G}) := \inf_{g \in \mathfrak{G}} \|f - g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

prirodno je definirana udaljenost funkcije $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ od tog skupa.

Parametri L i H daju nam, redom, gornje granice za "širinu" i "visinu" funkcije f. Oni su fiksirani, ali mogu biti proizvoljno veliki.

Nadalje, uočimo da nejednakost (5.1) povlači nelinearnu Hausdorff-Youngovu nejednakost i to s $C_p = B_p$, no, naravno, to vrijedi samo u familiji funkcija promatranih u teoremu 5.1, koja ovisi o p. Dakle, teorem nam ne daje uniformnu ograničenost konstanti C_p u (4.17), već za fiksirani p pokazuje da nelinearna Hausdorff-Youngova nejednakost ima manju gornju granicu od linearne kada $\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \to 0$.

Nejednakost (5.1) invarijantna je s obzirom na dilatacije, tj. ako je $f(x) = \frac{1}{\lambda} f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ za neki $\lambda > 0$, tada je

$$\frac{\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} = \frac{\left\|(\log|a_1(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \lambda^{-1/q}}{\|f_1\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\lambda^{-1+1/p}} = \frac{\left\|(\log|a_1(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})}}{\|f_1\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}},$$

pri čemu smo jednakost u brojniku dobili primjenom supstitucije $u = \lambda\xi$, a u nazivniku supstitucijom $v = \frac{x}{\lambda}$. To znači da možemo mijenjati širinu za visinu i obratno, što nam daje da δ i ε zapravo ovise samo o p i produktu LH.

Prije početka dokaza napomenimo još da ćemo podrazumijevati da sve konstante koje se pojavljuju mogu ovisiti o p, L i H, što onda nećemo naglašavati njihovim oznakama.

5.2 Funkcije daleko od Gaussovih

U ovom dijelu dokaza trebat će nam Christov rezultat [5] koji kaže da postoji konstanta $c_p > 0$ tako da za svaku ne-nul funkciju $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$ vrijedi

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \le \left(B_p - c_p\left(\frac{\mathrm{dist}_p(f,\mathfrak{G})}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}}\right)^2\right)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.2}$$

To je zapravo daljnje profinjenje Babenko-Becknerove nejednakosti.

Neka f zadovoljava pretpostavke teorema 5.1 i neka je

$$\frac{\mathrm{dist}_p(f,\mathfrak{G})}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} \ge \gamma,$$

pri čemu je

$$\gamma := \left(\frac{8B_p\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}}{c_p}\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Prvo uočimo da iz integralnih jednadžbi za a i b, (4.7) i (4.8), slijede nejednakosti:

$$|a(x,\xi) - 1| \le \int_{-\infty}^{x} |f(t)||b(t,\xi)|\,\mathrm{d}t,$$
$$|b(x,\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{x} f(t)\,(a(t,\xi)+1-1)\,e^{-2\pi it\xi}\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Big| \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi}\, \mathrm{d}t \Big| + \int_{-\infty}^{x} |f(t)||a(t,\xi)-1|\, \mathrm{d}t \\
&= \Big| \widehat{f\mathbb{1}}_{\langle -\infty, x]}(\xi) \Big| + \int_{-\infty}^{x} |f(t)||a(t,\xi)-1|\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ako zbrojimo gornje dvije nejednakosti, dobivamo

$$|a(x,\xi)-1| + |b(x,\xi)| \leq \Big| \widehat{f\mathbb{1}}_{\langle -\infty, x]}(\xi) \Big| + \int_{-\infty}^{x} |f(t)| \left(|b(t,\xi)| + |a(t,\xi)-1| \right) \mathrm{d}t,$$

te ako zatim uzmemo L^q normu u varijabli ξ i iskoristimo nejednakost Minkowskog, slijedi

$$\Big\| |a(x,\xi)-1| + |b(x,\xi)| \Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq \Big\| \widehat{f\mathbb{1}}_{\langle -\infty, x]} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \int_{-\infty}^{x} |f(t)| \Big\| |b(t,\xi)| + |a(t,\xi)-1| \Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \mathrm{d}t.$$

Za $x \in \mathbb{R}$ ocijenimo $\Big\| \widehat{f\mathbb{1}}_{\langle -\infty, x]} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}$ podjelom na dva slučaja.

(i) Ako je $\big\| f\mathbb{1}_{\langle x, \infty\rangle} \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} < \frac{\gamma}{2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$, tada za svaku funkciju $g \in \mathfrak{G}$ iz nejednakosti trokuta slijedi da je

$$\big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} - g \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \geq \underbrace{\|f-g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}}_{\geq \gamma \|f\|_{\mathrm{L}^p}} - \big\| f\mathbb{1}_{\langle x, \infty\rangle} \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \geq \left(\gamma - \frac{\gamma}{2} \right) \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \frac{\gamma}{2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

pa je

$$\frac{\big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} - g \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}}{\big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} \geq \frac{\gamma}{2}.$$

Iz toga i iz Christove ocjene (5.2) slijedi

$$\Big\| \widehat{f\mathbb{1}}_{\langle -\infty, x]} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \leq \left(B_p - c_p \frac{\gamma^2}{4} \right) \big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \widetilde{B}_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},$$

pri čemu smo definirali

$$\widetilde{B}_p := B_p - c_p \frac{\gamma^2}{4} = B_p \big(1 - 2\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \big).$$

(ii) Ako je $\big\| f\mathbb{1}_{\langle x, \infty\rangle} \big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \geq \frac{\gamma}{2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$, tada iz činjenice da je

$$\big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} \big\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \big\| f\mathbb{1}_{\langle x, \infty\rangle} \big\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

slijedi

$$\big\| f\mathbb{1}_{\langle -\infty, x]} \big\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} - \big\| f\mathbb{1}_{\langle x, \infty\rangle} \big\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^p \|f\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Sada, koristeći se Babenko-Becknerovom te gornjom nejednakosti dobivamo

$$\left\|\widehat{f1}_{\langle-\infty,x]}\right\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \leq B_p\left\|f1_{\langle-\infty,x]}\right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq B_p\Big(1-\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^p\Big)^{1/p}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Prvo prema Bernoullijevoj nejednakosti, koja nam kaže da za eksponent $0 \leq r \leq 1$ i $y > -1$ vrijedi

$$(1+y)^r \leq 1+ry,$$

a zatim ako je $\delta > 0$ dovoljno mali tako da je

$$\gamma^{2-p} \leq \frac{B_p 2^{2-p}}{c_p p}$$

imamo da je

$$B_p\Big(1-\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^p\Big)^{1/p} \leq B_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^p\Big) \leq \widetilde{B}_p.$$

Uočimo da smo sada i u ovom slučaju dobili da je

$$\left\|\widehat{f1}_{\langle-\infty,x]}\right\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \leq \widetilde{B}_p\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Dakle, imamo

$$\Big\||a(x,\xi)-1|+|b(x,\xi)|\Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq \widetilde{B}_p\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}+\int_{-\infty}^x|f(t)|\Big\||b(t,\xi)|+|a(t,\xi)-1|\Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})}\mathrm{d}t.$$

Sada možemo primijeniti Grönwallovu lemu da dobijemo

$$\Big\||a(x,\xi)-1|+|b(x,\xi)|\Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq \widetilde{B}_p\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}e^{\int_{-\infty}^x|f(t)|\,\mathrm{d}t}.$$

Kada pustimo $x \to \infty$, koristeći da je $(\log|a|^2)^{1/2} \leq |b|$, dobijemo

$$\Big\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq \widetilde{B}_p e^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.4}$$

Uočimo da iz definicije od $\widetilde{B}_p$ i zatim primjenom L'Hospitalova pravila slijedi da je

$$\lim_{s\to0^+}\frac{B_p-\widetilde{B}_pe^s}{s^2} = \lim_{s\to0^+}\frac{B_p\left(1-(1-2s)e^s\right)}{s^2} = +\infty$$

pa za bilo koji $0 < \varepsilon \leq 1$ i dovoljno mali δ imamo da je

$$B_p-\widetilde{B}_pe^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} \geq \varepsilon\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})},$$

odnosno

$$\widetilde{B}_pe^{\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}} \leq B_p-\varepsilon\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Koristeći se tom nejednakosti i (5.4) dobivamo da je

$$\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \leq \left(B_p - \varepsilon\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\right)\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Napomenimo da će idući odjeljak postaviti dodatne uvjete na δ i ε.

5.3 Funkcije blizu Gaussovih

Dokažimo prvo jednu ocjenu koja vrijedi za realne brojeve, a koja će nam biti potrebna u ovom dijelu dokaza.

Lema 5.2 *(i) Za eksponent $q > 2$, $u \geq 0$ i $v \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$|u+v|^{\frac{q}{2}} \leq \begin{cases} u^{\frac{q}{2}} + \frac{q}{2}vu^{\frac{q}{2}-1} + D_q|v|^{\frac{q}{2}} & \text{za } 2 < q \leq 4, \\ u^{\frac{q}{2}} + \frac{q}{2}vu^{\frac{q}{2}-1} + D_q|v|^{\frac{q}{2}} + D_q|v|^2u^{\frac{q}{2}-2} & \text{za } q > 4, \end{cases}$$

pri čemu je $D_q > 0$ konstanta koja ovisi o q.

(ii) Za eksponent $q > 2$, $u \geq 0$ i $v \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left||u+v|^{q-2} - u^{q-2}\right| \leq E_q \begin{cases} |v|^{q-2} & \text{za } 2 < q \leq 3, \\ |v|^{q-2} + |v|u^{q-3} & \text{za } q > 3, \end{cases}$$

pri čemu je $E_q > 0$ konstanta koja ovisi o q.

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $u \neq 0$ te podijelimo nejednakost s $u^{\frac{q}{2}}$. Ako stavimo $t = \frac{v}{u}$, dobivamo sljedeću nejednakost koju trebamo dokazati:

$$|1+t|^{\frac{q}{2}} \leq \begin{cases} 1 + \frac{q}{2}t + D_q|t|^{\frac{q}{2}} & \text{za } 2 < q \leq 4, \\ 1 + \frac{q}{2}t + D_q|t|^{\frac{q}{2}} + D_q|t|^2 & \text{za } q > 4, \end{cases}$$

odnosno

$$|1+t|^{\frac{q}{2}} - 1 - \frac{q}{2}t \lesssim_q \begin{cases} |t|^{\frac{q}{2}} & \text{za } 2 < q \leq 4, \\ |t|^{\frac{q}{2}} + t^2 & \text{za } q > 4. \end{cases}$$

Ako s $Q(t)$ označimo kvocijent lijeve i desne strane gornje nejednakosti, tj.

$$Q(t) := \begin{cases} \frac{|1+t|^{q/2} - 1 - \frac{q}{2}t}{|t|^{q/2}} & \text{za } 2 < q \leq 4, \\ \frac{|1+t|^{q/2} - 1 - \frac{q}{2}t}{|t|^{q/2} + t^2} & \text{za } q > 4, \end{cases}$$

zapravo trebamo dokazati ograničenost odozgo funkcije Q na skupu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Uočimo da to slijedi iz neprekidnosti funkcije Q i konačnosti limesa:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} Q(t) &= \begin{cases} 0 & \text{za } 2 < q < 4, \\ \frac{q(q-2)}{8} & \text{za } q \geq 4, \end{cases} \\ \lim_{t\to\pm\infty} Q(t) &= 1.\end{aligned}$$

(ii) U ovom slučaju, upotrebljavajući supstituciju $t = \frac{v}{u}$, dobivamo sljedeću nejednakost koju trebamo dokazati:

$$\Big||1+t|^{q-2} - 1\Big| \lesssim_q \begin{cases} |t|^{q-2} & \text{za } 2 < q \leq 3, \\ |t|^{q-2} + |t| & \text{za } q > 3. \end{cases}$$

Analogno kao i u dokazu od (i), ako s $Q(t)$ označimo kvocijent lijeve i desne strane gornje nejednakosti, tada tvrdnja slijedi iz neprekidnosti od Q i konačnosti limesa:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} Q(t) &= \begin{cases} 0 & \text{za } 2 < q < 3, \\ q-2 & \text{za } q \geq 3, \end{cases} \\ \lim_{t\to\pm\infty} Q(t) &= 1.\end{aligned}$$

■

Neka f zadovoljava pretpostavke teorema 5.1 i neka je sada

$$\frac{\operatorname{dist}_p(f, \mathfrak{G})}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} < \gamma.$$

Uočimo da to, posebno, znači da postoji $g \in \mathfrak{G}$ takva da je

$$\frac{\|f-g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} < \gamma, \tag{5.5}$$

te iz te relacije, za $\gamma < \frac{1}{2}$, dobivamo da je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq 2\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.6}$$

Naime, vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \|f-g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.7}$$

Nadalje, vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\|f-g\|_{\mathrm{L}^1(I)} \lesssim \|f-g\|_{\mathrm{L}^p(I)} \leq \|f-g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} < \gamma\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \gamma\|f\|_{\mathrm{L}^p(I)},$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz teorema 2.7, a treća slijedi iz naše pretpostavke (5.5), te je to dalje

$$\lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^1(I)}^{1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(I)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(I)}^{1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^1(I)}^{1/p} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}^{1/q} \lesssim \delta^{1/p-1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^1(I)},$$

pri čemu sada prva nejednakost slijedi iz definicije od γ (5.3), druga iz teorema 2.5(ii), a treća iz pretpostavki na f iz iskaza teorema. Dakle, pokazali smo da postoji konstanta $C_1 > 0$ tako da vrijedi $\|f-g\|_{\mathrm{L}^1(I)} \leq C_1 \delta^{1/p-1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^1(I)}$. Ako je sada δ dovoljno mali tako da bude $C_1 \delta^{1/p-1/2} < \frac{1}{2}$, možemo, analogno kao u (5.7), dobiti da je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(I)} \leq 2\|g\|_{\mathrm{L}^1(I)},$$

a to nam dalje daje

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \leq 2\|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}. \tag{5.8}$$

Okrenimo se sada ocjenjivanju $\left\|(\log |a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})}$, za $q > 2$. Prvo uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \log |a(x,\xi)|^2 &= \log \frac{|a(x,\xi)|^2}{|a(x,\xi)|^2 - |b(x,\xi)|^2} \\ &= -\log \frac{|a(x,\xi)|^2 - |b(x,\xi)|^2}{|a(x,\xi)|^2} \\ &= -\log \left(1 - |r(x,\xi)|^2\right), \end{aligned}$$

iz čega dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_x \log |a(x,\xi)|^2 &= -\frac{\partial_x \left(1 - |r(x,\xi)|^2\right)}{1 - |r(x,\xi)|^2} \\ &= \frac{\partial_x \overline{r(x,\xi)} r(x,\xi) + \overline{r(x,\xi)} \partial_x r(x,\xi)}{1 - |r(x,\xi)|^2} \\ &= \frac{2\,\mathrm{Re}\left(\overline{r(x,\xi)} \partial_x r(x,\xi)\right)}{1 - |r(x,\xi)|^2} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\, \frac{\overline{r(x,\xi)} \left(f(x)e^{-2\pi i x\xi} - \overline{f(x)} e^{2\pi i x\xi} r(x,\xi)^2\right)}{1 - |r(x,\xi)|^2} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\, \frac{f(x)e^{-2\pi i x\xi}\overline{r(x,\xi)} - f(x)e^{-2\pi i x\xi}\overline{r(x,\xi)} |r(x,\xi)|^2}{1 - |r(x,\xi)|^2} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(f(x)e^{-2\pi i x\xi}\overline{r(x,\xi)}\right) \end{aligned}$$

pa je

$$\log |a(x,\xi)|^2 = 2\,\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{x} f(t) e^{-2\pi i t\xi} \overline{r(t,\xi)}\, \mathrm{d}t$$

i posebno je

$$\log|a(\xi)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\overline{r(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

Kada u gornju jednakost za $r(x,\xi)$ ubacimo integralnu jednadžbu (4.9), dobijemo

$$\begin{aligned}\log|a(\xi)|^2 &= 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1\\ &\quad - 2\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1)f(x_2)e^{-2\pi i(x_1+x_2)\xi}\,\overline{r(x_2,\xi)^2}\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1. \end{aligned}\tag{5.9}$$

Prvi pribrojnik u gornjoj jednakosti jednak je

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1 + \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_1} \overline{f(x_1)}f(x_2)e^{2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1\\ &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1 + \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{x_2} \overline{f(x_2)}f(x_1)e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_1\Big)\mathrm{d}x_2\\ &= \int\limits_{\{x_1>x_2\}} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \int\limits_{\{x_2>x_1\}} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1)\overline{f(x_2)}e^{-2\pi i(x_1-x_2)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= |\hat{f}(\xi)|^2.\end{aligned}$$

Sada za $r(x_2,\xi)$ u (5.9) ubacimo integralnu jednadžbu (4.9) i dobijemo da je

$$\log|a(\xi)|^2 = |\hat{f}(\xi)|^2 - (\Phi f)(\xi) + (\mathcal{E}f)(\xi),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}&(\Phi f)(\xi)\\ &= 2\,\mathrm{Re}\int\limits_{\{x_1>x_2>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)f(x_4)}e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\\ &= \mathrm{Re}\int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)f(x_4)}e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}f)(\xi) = 4\,\mathrm{Re}&\int\limits_{\{x_1>x_2>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)}f(x_4)\\ &\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3-x_4)\xi}\,\overline{r(x_4,\xi)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\\ - 2\,\mathrm{Re}&\int\limits_{\{x_1>x_2>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)\\ &\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2-x_3-x_4)\xi}\,\overline{r(x_3,\xi)^2 r(x_4,\xi)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,\mathrm{Re} \int_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)}f(x_4) \\
&\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3-x_4)\xi}\overline{r(x_4,\xi)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\
&\quad - \mathrm{Re} \int_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) \\
&\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2-x_3-x_4)\xi}\overline{r(x_3,\xi)^2 r(x_4,\xi)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4.
\end{aligned}
$$

Uvrštavajući sada $u = |\hat{f}(\xi)|^2$ i $v = -(\Phi f)(\xi) + (\mathcal{E}f)(\xi)$ u nejednakost iz leme 5.2(i) dobivamo

$$
\begin{aligned}
\Big|\log|a(\xi)|^2\Big|^{q/2} \le |\hat{f}(\xi)|^q &+ \frac{q}{2}\left(-(\Phi f)(\xi) + (\mathcal{E}f)(\xi)\right)|\hat{f}(\xi)|^{q-2} \\
&+ D_q\left|-(\Phi f)(\xi) + (\mathcal{E}f)(\xi)\right|^{q/2} + D_q\left|-(\Phi f)(\xi) + (\mathcal{E}f)(\xi)\right|^2|\hat{f}(\xi)|^{q-4},
\end{aligned}
$$

pri čemu zadnji pribrojnik imamo samo ako je $q > 4$. Integrirajući gornju nejednakost dobivamo

$$
\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|^q_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \le \|\hat{f}\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \frac{q}{2}\mathcal{H}(f) + \mathcal{R}(f), \tag{5.10}
$$

pri čemu je

$$
\mathcal{H}(f) := \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)|\hat{f}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi,
$$

a $\mathcal{R}(f)$ je, ako je $2 < q \le 4$, omeđen odozgo linearnom kombinacija integrala

$$
\int_{\mathbb{R}} |(\Phi f)(\xi)|^{q/2}\,\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)|^{q/2}\,\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)||\hat{f}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi, \tag{5.11}
$$

te, ako je $q > 4$, još i s

$$
\int_{\mathbb{R}} |(\Phi f)(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^{q-4}\,\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^{q-4}\,\mathrm{d}\xi. \tag{5.12}
$$

Za daljni dio dokaza bit će nam potreban operator M definiran s

$$
(Mf)(\xi) := \sup_J \left|\int_J f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x\right|,
$$

pri čemu supremum uzimamo po svim intervalima $J \subseteq \mathbb{R}$. Prisjetimo se da smo operator M zapravo definirali i u (4.24) u prošlom poglavlju i da za njega vrijedi Menshov-Paley-Zygmundova ocjena koja kaže da za $1 < p < 2$ i $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ vrijedi

$$
\|Mf\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.13}
$$

Naime, prelaskom s intervala oblika $\langle -\infty, x]$ na općenite intervale J najviše gubimo faktor

2 u konstanti. Sada za Φf vrijedi

$$\begin{aligned}|(\Phi f)(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_x^{+\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}\,\mathrm{d}y \right|^2 |f(x_3)||f(x_4)|\,\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ &= \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf)^2(\xi)\end{aligned}$$

pa nadalje imamo

$$|(\Phi f)(\xi)|^{q/2} \leq \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf)^q(\xi). \tag{5.14}$$

Za ocjenu od $\mathcal{E}f$ prvo uočimo da za koeficijent refleksije vrijedi da je $|r(x,\xi)| \leq 1$ pa iz integralne jednadžbe (4.9) slijedi da je $|r(x,\xi)| \leq 2\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}$. Sada imamo da je

$$\begin{aligned}|(\mathcal{E}f)(\xi)| &\leq 3\int_{\mathbb{R}^2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_x^{+\infty} f(y)e^{-2\pi i y_1\xi}\,\mathrm{d}y \right|^2 |f(x_3)||f(x_4)||r(x_4,\xi)|^2\,\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ &\leq 12\|f\|^4_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf)^2(\xi)\end{aligned}$$

pa je

$$|(\mathcal{E}f)(\xi)|^{q/2} \leq 4^q\|f\|^{2q}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf)^q(\xi). \tag{5.15}$$

Dokažimo sada tri tvrdnje iz kojih će slijediti rezultat teorema.
Tvrdnja 1: Vrijedi sljedeća nejednakost

$$|\mathcal{R}(f)| \lesssim \delta^{\min\{q-2,2\}}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Za prva dva integrala u (5.11) koristeći se (5.13), (5.14) i (5.15) vrijede sljedeće ocjene

$$\int_{\mathbb{R}} |(\Phi f)(\xi)|^{q/2}\,\mathrm{d}\xi = \|\Phi f\|^{q/2}_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} \leq \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mf\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \tag{5.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)|^{q/2}\,\mathrm{d}\xi = \|\mathcal{E}f\|^{q/2}_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} \leq 4^q\|f\|^{2q}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mf\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \lesssim \|f\|^{2q}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}, \tag{5.17}$$

dok za treći koristeći se Hölderovom nejednakosti, Hausdorff-Youngovom nejednakosti i (5.17) vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)||\hat{f}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi &\leq \|\mathcal{E}f\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\left\||\hat{f}|^{q-2}\right\|_{\mathrm{L}^{q/(q-2)}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \left(\|f\|^{2q}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\right)^{2/q}\|\hat{f}\|^{q-2}_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f\|^4_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|f\|^{q-2}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \|f\|^4_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Za dodatna dva integrala iz (5.12) analogno, uz korištenje ocjena i (5.16) i (5.17), vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(\Phi f)(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^{q-4}\,\mathrm{d}\xi &\leq \|(\Phi f)^2\|_{\mathrm{L}^{q/4}(\mathbb{R})}\left\||\hat{f}|^{q-4}\right\|_{\mathrm{L}^{q/(q-4)}(\mathbb{R})} \\ &= \|\Phi f\|^2_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\|\hat{f}\|^{q-4}_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

$$\lesssim \left(\|f\|^q_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\right)^{4/q}\|f\|^{q-4}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \|f\|^4_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

i

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{E}f)(\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^{q-4}\,\mathrm{d}\xi &\le \|(\mathcal{E}f)^2\|_{\mathrm{L}^{q/4}(\mathbb{R})}\left\||\hat{f}|^{q-4}\right\|_{\mathrm{L}^{q/(q-4)}(\mathbb{R})}\\ &= \|\mathcal{E}f\|^2_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\|\hat{f}\|^{q-4}_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\\ &\lesssim \left(\|f\|^{2q}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\right)^{4/q}\|f\|^{q-4}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \|f\|^8_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Iz svih ovih ocjena, koristeći se pretpostavkom da je $\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \le \delta < 1$, vidimo da je

$$|\mathcal{R}(f)| \lesssim \delta^{\min\{q-2,2\}}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Tvrdnja 2: Vrijedi sljedeća nejednakost

$$|\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g)| \lesssim \gamma^{\min\{q-2,1\}}\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g) = \int_{\mathbb{R}} ((\Phi f)(\xi) - (\Phi g)(\xi))\,|\hat{g}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)\left(|\hat{f}(\xi)|^{q-2} - |\hat{g}(\xi)|^{q-2}\right)\mathrm{d}\xi \tag{5.18}$$

i definirajmo $h \coloneqq f - g$. Drugi integral u gornjoj formuli možemo ocijeniti pomoću leme 5.2(ii) da dobijemo

$$\int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)\left||\hat{f}(\xi)|^{q-2} - |\hat{g}(\xi)|^{q-2}\right|\mathrm{d}\xi \le E_q \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)\left(|\hat{h}(\xi)|^{q-2} + |\hat{h}(\xi)||\hat{g}(\xi)|^{q-3}\right)\mathrm{d}\xi,$$

pri čemu član $|\hat{h}(\xi)|\hat{g}(\xi)|^{q-3}$ imamo samo ako je $q > 3$. Koristeći se Hölderovom nejednakosti, Hausdorff-Youngovom nejednakosti i (5.16) dobivamo da je

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)|\hat{h}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi &\le \|\Phi f\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\left\||\hat{h}|^{q-2}\right\|_{\mathrm{L}^{q/(q-2)}(\mathbb{R})}\\ &\lesssim \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|h\|^{q-2}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\ &\lesssim \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\gamma^{q-2}\|g\|^{q-2}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\ &= \gamma^{q-2}\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{5.19}$$

pri čemu smo zadnju nejednakost dobili koristeći se (5.5), (5.6) i (5.8). Slično dobijemo i sljedeću ocjenu:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)|\hat{h}(\xi)||\hat{g}(\xi)|^{q-3}\,\mathrm{d}\xi &\le \left\|(\Phi f)|\hat{h}|\right\|_{\mathrm{L}^{q/3}(\mathbb{R})}\left\||\hat{g}|^{q-3}\right\|_{\mathrm{L}^{q/(q-3)}(\mathbb{R})}\\ &\le \left\||\Phi f|^{q/3}\right\|^{3/q}_{\mathrm{L}^{3/2}(\mathbb{R})}\left\||\hat{h}|^{q/3}\right\|^{3/q}_{\mathrm{L}^3(\mathbb{R})}\|g\|^{q-3}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|h\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|^{q-3}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\gamma\|g\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|^{q-3}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \\
&= \gamma\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Ocijenimo sada prvi integral u (5.18). Uvedimo prvo operator $\mathcal{Q}$ definiran s

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(f_1,f_2,f_3,f_4)(\xi) \\
&:= \mathrm{Re} \int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f_1(x_1)f_2(x_2)\overline{f_3(x_3)f_4(x_4)}e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4.
\end{aligned}$$

Uočimo da je $\Phi(f) = \mathcal{Q}(f,f,f,f)$. Nadalje vrijedi

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{Q}(f_1,f_2,f_3,f_4)(\xi)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_1)||f_2(x_2)| \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \int_{-\infty}^{x} f_3(y)e^{-2\pi i y\xi}\,\mathrm{d}y \Big| \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \int_{-\infty}^{x} f_4(y)e^{-2\pi i y\xi}\,\mathrm{d}y \Big| \,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \|f_1\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f_2\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf_3)(\xi)(Mf_4)(\xi). \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Analogno dobijemo i da je

$$|\mathcal{Q}(f_1,f_2,f_3,f_4)(\xi)| \leq \|f_3\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f_4\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mf_1)(\xi)(Mf_2)(\xi). \qquad (5.22)$$

Multilinearnost nam sada daje

$$\begin{aligned}
\Phi f &= \mathcal{Q}(h,f,f,f) + \mathcal{Q}(g,f,f,f) \\
&= \mathcal{Q}(h,f,f,f) + \mathcal{Q}(g,h,f,f) + \mathcal{Q}(g,g,f,f) \\
&= \mathcal{Q}(h,f,f,f) + \mathcal{Q}(g,h,f,f) + \mathcal{Q}(g,g,h,f) + \mathcal{Q}(g,g,g,f) \\
&= \mathcal{Q}(h,f,f,f) + \mathcal{Q}(g,h,f,f) + \mathcal{Q}(g,g,h,f) + \mathcal{Q}(g,g,g,h) + \mathcal{Q}(g,g,g,g)
\end{aligned}$$

pa je

$$\Phi f - \Phi g = \mathcal{Q}(g,g,g,h) + \mathcal{Q}(g,g,h,f) + \mathcal{Q}(g,h,f,f) + \mathcal{Q}(h,f,f,f).$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned}
|(\Phi f - \Phi g)(\xi)| &\leq \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mg)(\xi)(Mh)(\xi) + \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mh)(\xi)(Mf)(\xi) \\
&\quad + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mg)(\xi)(Mh)(\xi) + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}(Mh)(\xi)(Mf)(\xi) \\
&= \Big(\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\Big)\Big((Mg)(\xi)(Mh)(\xi) + (Mh)(\xi)(Mf)(\xi)\Big),
\end{aligned}$$

pri čemu smo se za prva dva člana koristili (5.21), a za druga dva (5.22). Sada za

$\|\Phi f - \Phi g\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}$ koristeći se nejednakosti Minkowskog i Hölderovom nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
\|\Phi f - \Phi g\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} &\leq \Big(\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\Big)\|(Mg)(Mh) + (Mh)(Mf)\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} \\
&\leq \Big(\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\Big)\Big(\|(Mg)(Mh)\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} + \|(Mh)(Mf)\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\Big) \\
&\leq \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mg\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|Mh\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mh\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|Mf\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} \\
&\quad + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mg\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|Mh\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|Mh\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}\|Mf\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Sada iz (5.5), (5.6), (5.8) i Menshov-Paley-Zygmundove nejednakosti slijedi

$$\|\Phi f - \Phi g\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})} \lesssim \gamma\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Dakle, za prvi integral u (5.18) sada koristeći se Hölderovom, Hausdorff-Youngovom te gornjom nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} ((\Phi f)(\xi) - (\Phi g)(\xi))\, |\hat{g}(\xi)|^{q-2}\, \mathrm{d}\xi &\leq \|\Phi f - \Phi g\|_{\mathrm{L}^{q/2}(\mathbb{R})}\Big\||\hat{g}|^{q-2}\Big\|_{\mathrm{L}^{q/(q-2)}(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \gamma\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^2_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|^{q-2}_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \\
&= \gamma\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

Konačno, iz (5.19), (5.20) i (5.23) slijedi tvrdnja 2.
Tvrdnja 3: Vrijedi

$$\mathcal{H}(g) \gtrsim \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \qquad (5.24)$$

Prvo ćemo pokazati da je kvocijent

$$\frac{\mathcal{H}(f)}{\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}} \qquad (5.25)$$

invarijantan s obzirom na množenje skalarom, modulacije, translacije i dilatacije.

(i) Ako je $f(x) = cf_1(x)$ za neki $c \in \mathbb{C}$, uočimo da iz svojstva norme sijedi da je

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = |c|^{q+2}\|f_1\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f_1\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \qquad (5.26)$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}
(\Phi f)(\xi) = \operatorname{Re} \int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} & cf_1(x_1)cf_1(x_2)\overline{cf_1(x_3)cf_1(x_4)} \\
& e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\
= |c|^4(\Phi f_1)(\xi),&
\end{aligned}$$

a iz svojstva linearne Fourierove transformacije slijedi da je $|\hat{f}(\xi)|^{q-2} = |c|^{q-2}|\hat{f}_1(\xi)|^{q-2}$

pa je

$$\mathcal{H}(f) = |c|^{q+2}\mathcal{H}(f_1)$$

te iz toga i iz (5.26) slijedi invarijantnost kvocijenta na množenje skalarom.

(ii) Ako je $f(x) = e^{2\pi i x\xi_0} f_1(x)$ za neki $\xi_0 \in \mathbb{R}$, tada je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2 \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}^q = \|f_1\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2 \|f_1\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}^q. \tag{5.27}$$

Nadalje vrijedi

$$\begin{aligned}
&(\Phi f)(\xi)\\
&= \mathrm{Re} \int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} e^{2\pi i x_1\xi_0} f_1(x_1) e^{2\pi i x_2 \xi_0} f_1(x_2) e^{-2\pi i x_3\xi_0}\overline{f_1(x_3)} e^{-2\pi i x_4\xi_0}\overline{f_1(x_4)}\\
&\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\\
&= \mathrm{Re} \int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f_1(x_1)f_1(x_2)\overline{f_1(x_3)f_1(x_4)}\\
&\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)(\xi-\xi_0)}\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\\
&= (\Phi f_1)(\xi-\xi_0)
\end{aligned}$$

i $|\hat{f}(\xi)|^{q-2} = |\hat{f}_1(\xi-\xi_0)|^{q-2}$ pa supstitucijom $\eta = \xi - \xi_0$ dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi)|\hat{f}(\xi)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f_1)(\xi-\xi_0)|\hat{f}(\xi-\xi_0)|^{q-2}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f_1)(\eta)|\hat{f}(\eta)|^{q-2}\,\mathrm{d}\eta\\
&= \mathcal{H}(f_1).
\end{aligned}$$

Sada iz gornje jednakosti i (5.27) slijedi invarijantnost na modulacije.

(iii) Ako je $f(x) = f_1(x-x_0)$ za neki $x_0 \in \mathbb{R}$, tada supstitucijom $u = x - x_0$ dobivamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2 \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}^q = \|f_1\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2 \|f_1\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}^q.$$

S druge strane, supstitucijama $u_i = x_i - x_0$, za $i = 1,2,3,4$ dobivamo da je

$$\begin{aligned}
&(\Phi f)(\xi)\\
&= \mathrm{Re} \int\limits_{\{\min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\}} f_1(x_1-x_0)f_1(x_2-x_0)\overline{f_1(x_3-x_0)f_1(x_4-x_0)}\\
&\qquad e^{2\pi i(-x_1-x_2+x_3+x_4)\xi}\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \int_{\{\min\{u_1,u_2\}>\max\{u_3,u_4\}\}} f_1(u_1)f_1(u_2)\overline{f_1(u_3)f_1(u_4)}$$
$$e^{2\pi i(-u_1-u_2+u_3+u_4)\xi}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\mathrm{d}u_4$$
$$= (\Phi f_1)(\xi),$$

a vrijedi i $|\hat{f}(\xi)|^{q-2} = |e^{-2\pi i x_0\xi}\hat{f}_1(\xi)|^{q-2} = |\hat{f}_1(\xi)|^{q-2}$ pa je

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f_1)$$

te slijedi invarijantnost na translacije.

(iv) Ako je $f(x) = \frac{1}{\lambda}f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ za neki $\lambda > 0$, tada uočimo da suspstitucijom $u = \frac{x}{\lambda}$ dobivamo da je

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}x\right)^2 = \tfrac{1}{\lambda^2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_1(u)|\lambda\,\mathrm{d}u\right)^2 = \|f_1\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})},$$
$$\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x}{\lambda}\right)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{q/p} = \tfrac{1}{\lambda^q}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_1(u)|^p\lambda\,\mathrm{d}u\right)^{q/p}$$
$$= \tfrac{\lambda^{q/p}}{\lambda^q}\|f_1\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \tfrac{1}{\lambda}\|f_1\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

pa je

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{\lambda}\|f_1\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f_1\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{5.28}$$

Nadalje, zapišimo Φf kao Fourierovu transformaciju funkcije φ, odnosno vrijedi da je

$$(\Phi f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i t\xi}\,\mathrm{d}t, \tag{5.29}$$

pri čemu je

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_{\substack{\{x_1+x_2-x_3-x_4=t,\\ \min\{x_1,x_2\}>\max\{x_3,x_4\}\\ \text{ili}\\ \max\{x_1,x_2\}<\min\{x_3,x_4\}\}}} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)f(x_4)}\,\mathrm{d}\sigma_3(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{5.30}$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{x_1-t}^{x_1}\left(\int_{\frac{1}{2}(x_1+x_2-t)}^{x_2} f(x_1)f(x_2)\overline{f(x_3)f(x_1+x_2-x_3-t)}\,\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1,$$

pri čemu u (5.30) integriramo s obzirom na trodimenzionalnu Hausdorffovu mjeru σ_3. Sada uvrštavajući u gornji integral za $f(x) = \frac{1}{\lambda}f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ te supstitucijama $u_i = \frac{x_i}{\lambda}$, za $i = 1, 2, 3$ dobivamo da je

$$\varphi(t)$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{x_1-t}^{x_1}\left(\int_{\frac{1}{2}(x_1+x_2-t)}^{x_2} \tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x_1}{\lambda}\right)\tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x_2}{\lambda}\right)\overline{\tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x_3}{\lambda}\right)\tfrac{1}{\lambda}f_1\left(\tfrac{x_1+x_2-x_3-t}{\lambda}\right)}\,\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1$$

$$= \tfrac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{u_1 - \frac{t}{\lambda}}^{u_1} \left(\int_{\frac{1}{2}\left(u_1+u_2-\frac{t}{\lambda}\right)}^{u_2} f_1(u_1) f_1(u_2) \overline{f_1(u_3) f_1 \left(u_1+u_2-u_3-\tfrac{t}{\lambda}\right)} \, \mathrm{d}u_3 \right) \mathrm{d}u_2 \right) \mathrm{d}u_1$$

tj. dobili smo da je

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda} \varphi_1 \left(\frac{t}{\lambda} \right).$$

Sada uvrštavajući tu jednakost u (5.29) i koristeći se supstitucijom $u = \frac{t}{\lambda}$ slijedi da je

$$(\Phi f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{\lambda} \varphi_1 \left(\tfrac{t}{\lambda}\right) e^{-2\pi i t \xi} \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(u) e^{-2\pi i u \lambda \xi} \, \mathrm{d}u = (\Phi f_1)(\lambda \xi).$$

Kako iz svojstava linearne Fourierove transformacije znamo da je $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\lambda\xi)$ sada koristeći se tom i gornjom jednakosti te supstitucijom $\eta = \lambda\xi$ dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f) &= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(\xi) |\hat{f}(\xi)|^{q-2} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f_1)(\lambda\xi) |\hat{f}_1(\lambda\xi)|^{q-2} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\Phi f_1)(\eta) |\hat{f}_1(\eta)|^{q-2} \tfrac{1}{\lambda} \, \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\lambda} \mathcal{H}(f_1)
\end{aligned}$$

pa iz toga i iz (5.28) slijedi invarijantnost na dilatacije.

Time smo završli dokaz da je kvocijent (5.25) uistinu invarijantan s obzirom na množenje skalarom, modulacije, translacije i dilatacije. Nadalje, uočimo da iz zapisa poopćene Gaussove funkcije

$$g(x) = c e^{-ax^2 + bx} = c e^{\frac{\mathrm{Re}(b)}{4a}} e^{i \,\mathrm{Im}(b) x} e^{-(x - \frac{\mathrm{Re}(b)}{2a})^2},$$

za $a > 0$ i $b, c \in \mathbb{C}$, slijedi da svaku takvu funkciju možemo primjenom određenih množenja skalarom, modulacija, translacija i dilatacija dovesti do standardne Gaussove funkcije definirane s

$$G(x) = e^{-\pi x^2}$$

pa je, s obzirom na upravo dokazana svojstva od (5.25), dovoljno dokazati (5.24) za G, i u tom slučaju moramo zapravo pokazati da je $\mathcal{H}(G) > 0$. Ako napišemo ΦG kao Fourierovu transformaciju neke funkcije φ, vidimo iz (5.30) da je φ nenegativna funkcija i nije identički jednaka nuli. Također, i $|\hat{G}(\xi)|^{q-2}$ Fourierova je transformacija Gaussove funkcije ψ dane formulom

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{q-2}} e^{-\frac{\pi x^2}{q-2}},$$

koja je strogo pozitivna. Sada zbog unitarnosti Fourierove transformacije slijedi da je

$$\mathcal{H}(G) = \left\langle \Phi G, |\hat{G}|^{q-2} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} > 0$$

pa je i tvrdnja 3 dokazana.

Konačno, pokažimo kako će nam te tri tvrdnje pomoći da dokažemo teorem. Uočimo da iz (5.10) slijedi da je

$$\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|^q_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} \le \|\hat{f}\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \frac{q}{2}\mathcal{H}(g) + \frac{q}{2}|\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g)| + |\mathcal{R}(f)|, \tag{5.31}$$

a dokazane tri tvrdnje zajedno s (5.6) i (5.8), ako je δ, a time i γ, dovoljno mali, povlače da je

$$\frac{q}{2}|\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g)| + |\mathcal{R}(f)| \le \frac{q}{4}\mathcal{H}(g). \tag{5.32}$$

Naime, tri tvrdnje nam kažu da postoje konstante $K_1, K_2, K_3 > 0$ takve da je

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{R}(f)| \le K_1\delta^{\min\{q-2,2\}}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},\\
&|\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g)| \le K_2\gamma^{\min\{q-2,1\}}\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},\\
&\mathcal{H}(g) \ge K_3\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{2}|\mathcal{H}(f) - \mathcal{H}(g)| + |\mathcal{R}(f)|\\
&\le \frac{q}{2}K_2\gamma^{\min\{q-2,1\}}\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + K_1\delta^{\min\{q-2,2\}}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\
&\le \|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\Big(\frac{q}{2}K_2\gamma^{\min\{q-2,1\}} + K_1\delta^{\min\{q-2,2\}}2^{q+2}\Big)\\
&\le \mathcal{H}(g)\frac{1}{K_3}\Big(\frac{q}{2}K_2\gamma^{\min\{q-2,1\}} + K_1\delta^{\min\{q-2,2\}}2^{q+2}\Big).
\end{aligned}$$

Neka je sada δ dovoljno mali da vrijedi

$$\frac{1}{K_3}\Big(\frac{q}{2}K_2\gamma^{\min\{q-2,1\}} + K_1\delta^{\min\{q-2,2\}}2^{q+2}\Big) \le \frac{q}{4}$$

tako da doista vrijedi (5.32). Ako je sada

$$\varepsilon \le \frac{K_3}{2^{q+4}B_p^{q-1}},$$

tada iz (5.31), tvrdnje 3, (5.6), (5.8) i Babenko-Becknerove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
\left\|(\log|a(\xi)|^2)^{1/2}\right\|^q_{\mathrm{L}^q_\xi(\mathbb{R})} &\le \|\hat{f}\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \frac{q}{4}\mathcal{H}(g)\\
&\le \|\hat{f}\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \frac{q}{4}K_3\|g\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|g\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\
&\le \|\hat{f}\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \frac{q}{4}K_3 2^{-2-q}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\
&\le B_p^q\|f\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})} - \varepsilon q B_p^{q-1}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\\
&= \Big(B_p^q - \varepsilon q B_p^{q-1}\|f\|^2_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\Big)\|f\|^q_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Koristeći se Bernoullijevom nejednakosti dobivamo da je

$$\Big(B_p^q - \varepsilon q B_p^{q-1} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2\Big)^{1/q} = B^p\Big(1 - \varepsilon q B_p^{-1} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2\Big)^{1/q} \leq B_p - \varepsilon \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}^2$$

pa, i u ovom slučaju kada smo blizu Gaussovih funkcija, slijedi tvrdnja teorema.

ZAKLJUČAK

U ovom radu pokazano je da lakunarni $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt u kojem frekvencije čine dovoljno lakunarni niz konvergira s obzirom na uvedenu metriku d_p ako i samo ako taj produkt ima kvadratno sumabilne koeficijente. Nadalje, pokazano je da za lakunarni $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt s kvadratno sumabilnim koeficijentima za koji je q iz definicije lakunarnih nizova veći ili jednak 2 konvergira g.s. Obratno, pokazano je da, ako lakunarni $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt za koji je q veći ili jednak 3 konvergira g.s. na skupu pozitivne mjere, tada on ima kvadratno sumabilne koeficijente. Ti rezultati mala su potvrda poznate slutnje da svaki $\mathrm{SU}(1,1)$ trigonometrijski produkt s kvadratno sumabilnim koeficijentima konvergira g.s.

Nadalje, dokazano je da nelinearna Hausdorff-Youngova nejednakost nadilazi linearnu za funkcije koje imaju dovoljno malu L^1 normu. Dobiveni rezultat, za tu klasu funkcija koja ovisi o p, povlači nelinearnu Hausdorff-Youngovu nejednakost i to s optimalnom konstantom $C_p = B_p$, pri čemu je B_p Babenko-Becknerova konstanta.

Bibliografija

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell i H. Segur. “The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems”. *Studies in Appl. Math.* 53.4 (1974), str. 249–315.

[2] W. Beckner. “Inequalities in Fourier analysis”. *Ann. of Math. (2)* 102.1 (1975), str. 159–182.

[3] V. S. Buslaev i L. D. Faddeev. “On formulas for traces of a Sturm-Liouville singular differential operator”. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 132 (1960), str. 13–16.

[4] L. Carleson. “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”. *Acta Math.* 116 (1966), str. 135–157.

[5] M. Christ. “A sharpened Hausdorff-Young inequality”. Preprint, dostupno na arXiv: 1406.1210. 2014.

[6] M. Christ i A. Kiselev. “Maximal functions associated to filtrations”. *J. Funct. Anal.* 179.2 (2001), str. 409–425.

[7] M. Christ i A. Kiselev. “WKB asymptotic behavior of almost all generalized eigenfunctions for one-dimensional Schrödinger operators with slowly decaying potentials”. *J. Funct. Anal.* 179.2 (2001), str. 426–447.

[8] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd edition. Wiley, New York, 2007.

[9] L. Golinskii. “Absolutely continuous measures on the unit circle with sparse Verblunsky coefficients”. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 11.4 (2004), str. 408–420.

[10] A. Kiselev, Y. Last i B. Simon. “Modified Prüfer and EFGP transforms and the spectral analysis of one-dimensional Schrödinger operators”. *Comm. Math. Phys.* 194.1 (1998), str. 1–45.

[11] A. Kolmogorov. “Une contribution à l’étude de la convergence des séries de Fourier”. *Fund. Math.* 5 (1924), str. 96–97.

[12] V. Kovač, D. Oliveira e Silva i J. Rupčić. “A sharp nonlinear Hausdorff-Young inequality for small potentials”. Preprint, dostupno na arXiv:1703.05557. 2017.

[13] V. Kovač. "Uniform constants in Hausdorff-Young inequalities for the Cantor group model of the scattering transform". *Proc. Amer. Math. Soc.* 140.3 (2012), str. 915–926.

[14] S. Kurepa i H. Kraljević. *Matematička analiza 4/I: Funkcije kompleksne varijable.* Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[15] E. H. Lieb. "Gaussian kernels have only Gaussian maximizers". *Invent. Math.* 102.1 (1990), str. 179–208.

[16] C. Muscalu i W. Schlag. *Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Volume II.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[17] C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele. "A Carleson theorem for a Cantor group model of the scattering transform". *Nonlinearity* 16.1 (2003), str. 219–246.

[18] C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele. "A counterexample to a multilinear endpoint question of Christ and Kiselev". *Math. Res. Lett.* 10.2 (2003), str. 237–246.

[19] C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele. "L^p estimates for the biest. I. The Walsh case". *Math. Ann.* 329.3 (2004), str. 401–426.

[20] C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele. "L^p estimates for the biest. II. The Fourier case". *Math. Ann.* 329.3 (2004), str. 427–461.

[21] C. Muscalu, T. Tao i C. Thiele. "Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length". *Advances in analysis: the legacy of Elias M. Stein.* Sv. 50. Princeton Math. Ser., Princeton Univ. Press, Princeton, 2014, str. 346–401.

[22] R. Oberlin, A. Seeger, T. Tao, C. Thiele i J. Wright. "A variation norm Carleson theorem". *J. Eur. Math. Soc.* 14.2 (2012), str. 421–464.

[23] D. Oliveira e Silva. "A variational nonlinear Hausdorff-Young inequality in the discrete setting". Preprint, dostupno na arXiv:1704.00688. 2017.

[24] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory.* Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, 2004.

[25] B. Simon. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 2: Spectral Theory.* Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, 2004.

[26] T. Tao. *An introduction to the nonlinear Fourier transform.* Neobjavljena zabilješka, dostupno na `http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/nonlinear_ft.dvi`, 2002.

[27] T. Tao i C. Thiele. *Nonlinear Fourier Analysis.* IAS/Park City Math. Institute, Graduate Summer School. Skripta, dostupno na arXiv:1201.5129, 2003.

[28] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2012.

[29] S. Verblunsky. “On positive harmonic functions II”. *Proc. London Math. Soc.* 40 (1935), str. 290–320.

[30] V. E. Zakharov i A. B. Shabat. “A refined theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61 (1971), str. 118–134.

[31] A. Zygmund. *Trigonometric Series*. 3rd edition. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[32] A. Zygmund. “On convergence of lacunary trigonometric series”. *Fund. Math.* 16 (1930), str. 90–107.

ŽIVOTOPIS

Jelena Rupčić rođena je 8. rujna 1984. godine u Splitu, gdje je završila osnovnu školu i matematičku gimnaziju. Godine 2003. upisuje Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, gdje i diplomira na smjeru Matematička statistika i računarstvo u prosincu 2009. godine diplomskim radom *Teorija potencijala tranzijentnih Markovljevih lanaca* pod voditeljstvom prof. dr. sc. Hrvoja Šikića. Akademske godine 2008./2009. upisuje doktorski studij matematike pri Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

Od siječnja 2010. godine do ožujka 2017. godine zaposlena je na Fakultetu prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu u suradničkom zvanju asistenta, gdje je sudjelovala u izvođenju auditornih vježbi iz nekoliko matematičkih i statističkih kolegija. Nekoliko akademskih godina kao vanjski suradnik sudjelovala je u izvođenju auditornih vježbi iz matematičkih kolegija na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu i na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

Sudjelovala je na *Šestom hrvatskom matematičkom kongresu* u lipnju 2016. godine. U prosincu 2016. godine imala je priopćenje na međunarodnom znanstvenom skupu *Young Women in Harmonic Analysis and PDE* održanom u Bonnu u Njemačkoj. Koautorica je sveučilišnog udžbenika *Matematika 2 – odabrana poglavlja za primjenu u prometu*, izdanog 2015. godine i recenzentica je znanstvenog časopisa *PROMET – Traffic&Transportation.*

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, Jelena Rupčić, studentica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi [redacted], ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj doktorski rad pod naslovom:

Nelinearna Fourierova analiza sa SU(1,1) *vrijednostima*,

isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, 19. lipnja 2017.

Potpis