Ravnotežni model stenta temeljen na modelu nelinearnog hiperelastičnog štapa

Kosor, Mate

Doctoral thesis / Disertacija

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:170079

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

Mate Kosor

RAVNOTEŽNI MODEL STENTA TEMELJEN NA MODELU NELINEARNOG HIPERELASTIČNOG ŠTAPA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2014

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

Mate Kosor

STATIC MODEL OF STENT BASED ON THE MODEL OF NONLINEAR HYPERELASTIC ROD

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2014

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

Mate Kosor

RAVNOTEŽNI MODEL STENTA TEMELJEN NA MODELU NELINEARNOG HIPERELASTIČNOG ŠTAPA

DOKTORSKI RAD

Mentor: Josip Tambača

Zagreb, 2014

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

Mate Kosor

STATIC MODEL OF STENT BASED ON THE MODEL OF NONLINEAR HYPERELASTIC ROD

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Josip Tambača

Zagreb, 2014

Zahvale

Hvala Bogu što sam gotov.

Marijana, Pavao i Helena najviše su me čekali. Šime i Ana požurivali. Bake su molile. Hvala vam svima, vaša pažnja, razumijevanje i molitva ugrađene su u moj rad i studij.

Josipe, hvala ti što si me otrpio. Sada mi glavom prolaze misli na sve što sam dobio od tebe. Pokazao si mi što je primjenjena matematika: stvarni svijet, računala i matematika zajedno. I od tada mi je to najzabavnije što radim. Bio si otvoren prema meni i dao si mi priliku — točnije mnogo prilika. Zahvalan sam ti do neba!

Sažetak

Stent je mrežica koja zatvara oblik cjevčice, sa primjenom u medicini. Klinički ishodi procedure dobrim dijelom ovise o mehaničkim svojstvima stenta koji se implantira. Mehanička svojstva stenta ovise o obliku, načinu proizvodnje i materijalima od koji je napravljen. U ovom radu razvijen je matematički model koji se može primijeniti kod onih stentova koji ima oblik mrežice sastavljene od bridova (štapića), a gdje su krajevi bridova međusobno fiksno spojeni.

Spojevi krajeva raznih bridova nazivamo vrhovi. Kako bi se smanjili troškovi i ubrzao razvoj potrebno je procijeniti mehanička svojstva stenta još u fazi dizajna stanta. U tu svrhu provode se računalne simulacije koje su do sada počivale na 3D modelima elastičnosti ili elastoplastičnosti. Takve su simulacije izrazito zahtjevne za suvremena računala. Nedavno je razvijen linearan 1D model elastičnog stenta, tako da računalne simulacije koje se na njemu temelje zahtjevaju znatno manje računalnih resursa. Međutim, rezultati linearnog modela opravdani su samo kod malenih deformacija. Novi nelinearan 1D model elastičnog stenta, koji je u ovom radu razvijen i opravdan, može biti temelj za razvoj efikasnih numeričkih algoritama koji će biti točni i za veće deformacije.

Novi model stenta temelji se na poznatom 1D nelinearnom hiperelastičnom modelu štapa Scardia (2006), koji je formuliran kao problem minimizacije funkcionala tzv. unutarnje energije. U modelu stenta se prirodno koristi model štapova koji predstavljaju bridove mreže. Model dopušta savijanje i torziju bridova. Postojeći model štapa ovdje je poopćen na manje regularne geometrije, a zatim uparen s rubnim uvjetima. Postojanje rješenja rubnog problema pokazano je uz pomoć standardnih matematičkih tehnika varijacijskog računa i nekih novih geometrijskih rezultata o krivuljama u prostoru. Dalje je korištenjem teorije Γ-konvergencije pokazana jedna vrsta neprekidne ovisnosti rubnog problema štapa o njegovim parametrima. Ovaj rezultat stabilnosti može biti važan u praktičnim računalnim simulacijama jer otklanja mogućnost da malene promjene u geometriji stenta uzrokuju drastično različita mehanička svojstva. Nadalje, taj rezultat omogućuje aproksimaciju krivulja u računalnim simulacijama, npr. sa po dijelovima ravnim elementima.

Model stenta iskazan je u minimizacijskoj formulaciji, koja prirodno proizlazi iz formulacije modela štapa. Pokazano je kako se model može poopćiti i na druge strukture sastavljene od štapova (npr. građevine sastavljene od tankih štapova). Matematički rezultati sastoje se od dokaza postojanja rješenja i stabilnosti minimizacijske zadaće u odnosu na geometriju koju stent zauzima. Rezultati za stent prirodno se nadovezuju na pokazane rezultate za štap. Osim spomenutih matematičkih metoda korišteni su i drugi elementi: iz realne analize, topologije, geometrije i teorije grafova. U izdvojenom odjeljku diskutirana je sila i predloženo kako provesti mehaničko testiranje stenta i eksperimentalnu validaciju prikazanog matematičkog modela.

Extended abstract

Classical elasticity

Even though the current bioengineering literature models stent exclusively as a single 3D elastic body, we approach stent modeling by simulating slender stent struts as 1D nonlinear rods. Simulating slender stent struts using 3D approaches (3D Finite Elements) is computationally very expensive and time consuming. This makes testing of a large number of stents for optimal stent design computationally prohibitive, and often times produces simulation results with poor accuracy. This is where our approach could prove advantageous: it could speed up the computation by the order of magnitude while keeping the accuracy of results, even when deformations are large. The approach has been applied in Tambača *et al.* (2010) to model equilibrium deformation within the scope of the linearized elasticity. We are not aware of any research related to the 1D stent modeling using 1D nonlinear rod models. Thus this work is original indeed.

Main results

Nonlinear 1D stent models are based on the use of 1D model for struts plus junction conditions on vertices. We take the 1D nonlinear bending-torsion model for curved rods that was rigorously derived from nonlinear three-dimensional elasticity in Scardia (2006). This nonlinear curved rod model is derived by Γ–convergence techniques applied to the elastic energy and for the middle curve of the undeformed curved rod parameterized by a C^2 function. This is what we do:

1. generalize formulation of the 1D model of elastic curved rods to include Lipschitz middle curves,
2. prove existence of a solution of the boundary value problem for the generalized formulation of the nonlinear curved rod model,
3. prove continuity (stability) of the model with respect to the geometry of the undeformed rod,
4. formulate the 1D model for general structure that consists of rods and prove the existence of the solution,
5. formulate the 1D model for stent and prove the existence of the solution,
6. prove continuity (stability) of the stent model with respect to the geometry of the stent,
7. investigate the loads that can be replicated in an experiment and used in this stent model.

Junction of two curves is not necessarily smooth. Complex junctions appear naturally in stents: for example where three or more rods join together. Thus, in order to build a stent model, one first needs to reformulate the 1D model to be well defined for the Lipschitz curved rods. Analysis of the properties of the rod model serves as the good introduction in analysis of the more complex stent models. The results of this analysis also have their own merit. Continuity with respect to undeformed geometry is important feature of the model. It provides also a justification for our generalized model in case of less regular middle curve geometries mentioned above. Similar analysis for the linear Naghdi shell model for shells with little regularity is performed in Blouza, A. Le Dret (2001). This continuity is done using curves of the same and of different lengths. Obtained continuity property is important in order to simplify numerical approximation of the model. Formulation of the stent model is the starting point for the stent modeling. From the mathematical point of view the existence of the solution is important in order to have well posed problem. Continuity of the stent model with respect to the geometry is important from several points of view. It can be viewed as a stability result which is important in any kind of modeling. It also can be used to approximate the rod geometry by piecewise linear geometry which is easier to discretize.

Methodology

The formulation of this model is by minimization of the total energy functional on a suitably chosen set of admissible deformations. For this part of the project we will apply direct methods of the calculus of variations. The formulation of the boundary value problem of the nonlinear bending-torsion rod model for specific loads can be described as a minimization problem for $R \in W^{1,2}(0, l; SO(3))$ on a suitably chosen set of functions including boundary conditions. The columns of R are the tangent, normal and binormal, i.e., the Frenet frame, to the rod's deformed middle curve. As $R(s) \in SO(3)$ the rod is inextensible and unshearable. The strain in the model from Scardia (2006) is given as the difference $R^T.\dot{R} - Q^T.\dot{Q}$, where the columns of Q form the Frenet frame of the undeformed geometry. This formulation requires at least $Q \in W^{1,2}(0, l; SO(3))$. However, the rotation R can be viewed as a rotation P applied at the undeformed geometry, i.e., $R(s) = P(s).Q(s)$, $s \in [0, l]$. A simple calculation shows that the boundary value problems can be easily reformulated in terms of the 'transformation rotation' P. Such formulations have no derivatives on Q and the models are now well formulated for $P \in W^{1,2}(0, l; SO(3))$ and any measurable Q with values in $SO(3)$ almost everywhere, i.e., $Q \in L^1(0, l; SO(3))$. This implies that the new formulation includes Lipschitz middle curves. For example, the new formulation is well defined for undeformed geometries with corners. This is in agreement with the one-dimensional model of junction of rods Tambača & Velčić (2012).

As a consequence of general theory, Γ-limit functional is lower semicontinuous and if it

is bounded from below on a compact set it attains minima on the set. However, in Scardia (2006) no loads and boundary conditions are prescribed and additionally, as mentioned above, we have reformulated the model. We will prove the existence of the boundary value problem of the new formulation of the model by classical direct methods of calculus of variations. In the case of the boundary value problem for rods clamped at both ends the most difficult part, due to the inextensibility of the rod, is to show that the set of admissible functions is nonempty.

Let us consider a sequence of geometries described by $Q_n \in L^2$ that converge to Q in L^2. For the model with both ends clamped we will show that the sequence of total energy functionals associated with Q_n, in the appropriate topology (in which minimizers converge), Γ–converges to the total energy functional associated with Q, in case Q is somewhat special. As a consequence, limit points of a sequence of any minimizer of energy for the geometry Q_n are minimizers of the energy for the limit geometry Q. To prove this we build a complex result about approximation of the deformed geometry with precise estimates. In the case of rod clamped at only one end the situation is more simple as no special geometry result is necessary. The key step in construction of strongly convergent approximation sequence for use in the lim sup inequality of the Γ-convergence is based on the following result: for undeformed geometry Q, deformation rotation P, two endpoints v_0, v_1 of the curve given by $P.Q$ we get that for all $\tilde{Q}$, $\tilde{v}_0$, $\tilde{v}_1$ such that $\|Q-\tilde{Q}\|$, $\|\tilde{v}_0 - v_0\|$, $\|\tilde{v}_1 - v_1\|$ are small enough there is $\tilde{P}$ with the same values at ends as P, such that $\tilde{P}.\tilde{Q}$ connects $\tilde{v}_0$ and $\tilde{v}_1$ and furthermore which is close enough to P in $W^{1,2}$. We prove it using the inverse function theorem with precise estimates, see Xinghua (1999).

Finally, we use nonlinear bending-torsion curved rod model to model stent struts and more genereal structures. Junction conditions at vertices are given similarly as in the linear case by: continuity of the displacement of the middle curve of the struts joining in the vertex and continuity of the rotation of the cross-section of the struts joining in the vertex (this means that deformation rotation is well defined for vertices). Nonemptyness of the admissible function set is trivial as we suppose that the stent is already built and the reference position satisfies the junction conditions. Then the existence result follows using classical methods of calculus of variations.

We obtain the continuity of the stent model with respect to geometry by using Γ–convergence of the total energy functional, see e.g. Braides (2002) for details on Γ–convergence. The most delicate limsup result is obtained based on the geometrical approximation lemma stated earlier for one rod, and some delicate analysis. One hard case of continuity result is solved by introducing the notion of equivalence between stents.

Ključne riječi: stent, zakrivljeni štap, model sa savijenjem i torzijom, nelinearna elastičnost, stabilnost

Key words: stent, curved rod, bending-torsion model, nonlinear elasticity, stability

2000 Mathematics Subjects Classification: 74K10, 74B20, 74G65, 49J45

Sadržaj

Korištene oznake **i**

1. Uvod **1**
Opis stenta . . . 1
Dosadašnja istraživanja . . . 2
Cilj i hipoteze . . . 4
Pregled rada . . . 5
Znanstveni doprinos . . . 6

2. Model neproduljivog hiperelastičnog štapa **7**
2.1. Opis modela . . . 7
2.2. Rubni problem i postojanje rješenja . . . 14
2.3. Ovisnost rješenja o aproksimaciji geometrije štapa . . . 23

3. Varijacijski model stabilnosti stenta **43**
3.1. Općenita struktura štapova . . . 45
3.2. Postojanje rješenja zadaće strukture štapova . . . 48
3.3. Posebnosti modela stenta . . . 49
3.4. Relacija ekvivalencije stenta . . . 58
3.5. Ovisnost rješenja o aproksimaciji geometrije stenta . . . 63
3.6. Razmatranje potencijala sile . . . 73

Zaključak **85**

A. Dodatak **87**
A.1. Teorem o inverznoj funkciji . . . 87
A.2. Γ-konvergencija . . . 88
A.3. Funkcijski prostori Soboleva . . . 89
A.4. Slaba poluneprekidnost odozdo i konveksne funkcije . . . 90
A.5. Topologija . . . 91
A.6. Diferencijalna topologija . . . 92
A.7. Mjera . . . 93
A.8. O kutevima . . . 95

A.9. Istaknuti pojmovi teorije matrica 96
A.9.1. Istaknute matrične norme 96
A.9.2. Potenciranje s matricama 98
A.9.3. Lijeva grupa $SO(3)$ 99
A.10. Istaknuti prostori matričnih funkcija 103
A.10.1. Klasični Banachovi prostori $L^p(0, l; \mathbb{R}^{m\times n})$ i $W^{k,p}(0, l; \mathbb{R}^{m\times n})$ . . . 103
A.10.2. Metrički prostor i Lijeva grupa $\mathcal{L} = L^p(0, l; SO(3))$ 104
A.10.3. Metrički prostor i Lijeva grupa $\mathcal{W} = W^{1,2}(0, l; SO(3))$ 105
A.11. Posebni elementi prostora $\mathcal{W}$ 107
A.12. Konvolucija i izglađivanje 113
A.13. Osnove teorije grafova 115

Bibliografija **117**

Životopis autora s popisom objavljenih djela **121**

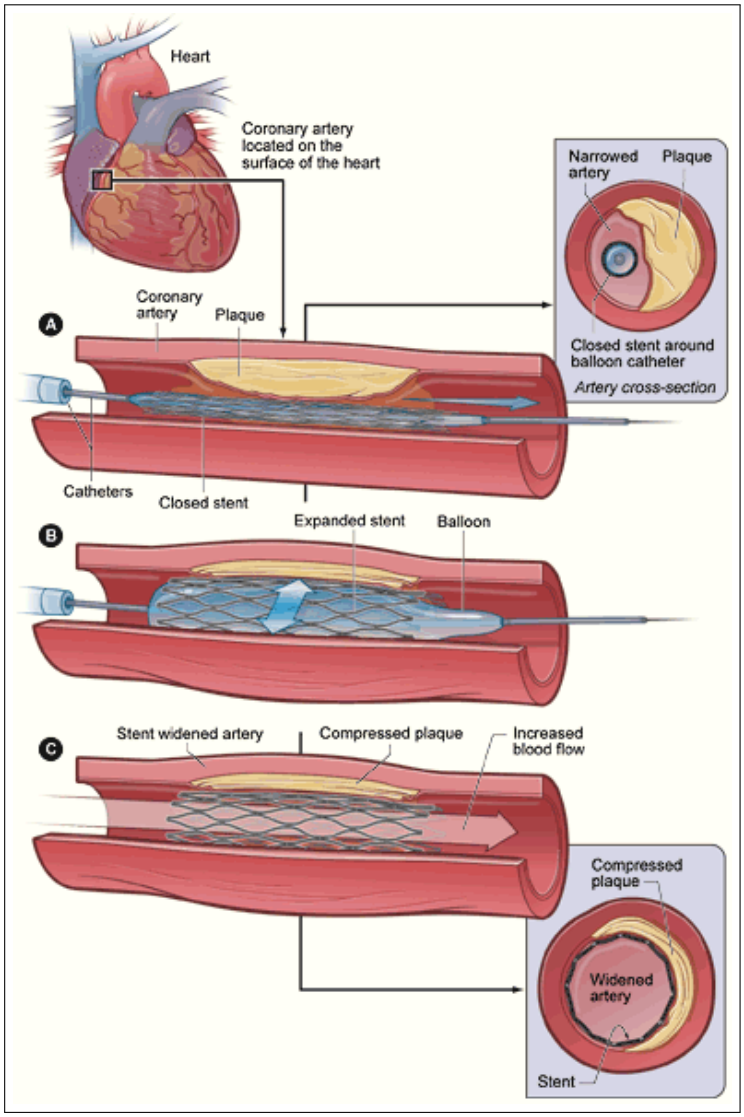
Korištene oznake

Id	Identiteta kao funkcija, matrica rotacije ili općenita jedinična matrica čija je dimenzija poznata iz konteksta
BSO	Bez smanjenja općenitosti
∂_x	Parcijalna derivacija, ukazuje da je riječ o funkciji više varijabli
$\dot{\square}$	Točkom iznad funkcije jednog parametra označena je derivacija funkcije, npr. $\dot{R}(t) = R'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)$
$\Gamma-\lim$	Γ limes kao u dodatku A.2
$\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$ i $\vec{\mathrm{k}}$	Standardni koordinatni vektori $\vec{\mathrm{i}} = (1\,0\,0)^T$, $\vec{\mathrm{j}} = (0\,1\,0)^T$ i $\vec{\mathrm{k}} = (0\,0\,1)^T$ Euklidskog 3D prostora.
$K_V(v, r)$	Otvorena kugla u V oko točke $v \in V$, s radijusom r.
$m\,\{\square\}$	mjera skupa koji se navodi kao argument ili u vitičastim zagradama neposredno nakon slova m
O	Ishodište, nulmatrica ili nulvektor čiju je dimenziju moguće odrediti iz konteksta
$\square.\square$	Točkom dolje između varijabli označena je primjena ili kompozicija linearnog operatora, npr. $A.B.v$ predstavlja matrično množenje matrica A, B i vektora v, što se u literaturi označava isključivo ABv. Ovaj odmak od standardnih oznaka doprinosi čitljivosti teksta.
$\square \cdot \square$	Točkom u sredini između dva vektora označen je njihov skalarni umnožak, npr. $x \cdot y$.
$\square^T$	Oznaka za transponiranje vektora ili matrice.
$\mathcal{W}$	$W^{1,2}\,(0, l;\, SO(3))$

1. Uvod

Opis stenta

Stent je mrežasta struktura u obliku cjevčice s istaknutom primjenom u liječenju začepljenja ili proširenja krvnih žila. Liječnik u krvnu žilu uvodi sondu na vrhu koje je balon okružen stentom. Vrh sonde dovodi se (kateterizira) na željeno mjesto, zatim se povećava pritisak unutar balona što dovodi do širenja balona i stenta koji se na njemu nalazi. U slučaju suženja krvne žile ovim postupkom žila se širi, a nakon vađenja sonde širinu žile održava sam stent. Ova procedura naziva se angioplastika. Kod proširenja krvnih žila stentom se može promijeniti patološko strujanje fluida i efektivno uspostaviti novi lumen krvnog suda. Stent se slično upotrebljava kod uspostava lumena uretera, uretre prostate, jednjaka, žučnih vodova, itd.



Okvir 1.1.: Umetanje stenta u krvnu zilu (A), sirenje (B) i stabilni polozaj (C). Izvor: National Institutes of Health (USA)

Mrežica stenta sastoji se od bridova koji su povezani u vrhovima (čvorovima). Deformacija stenta (prilikom napuhavanja balona) sastoji se ponajprije u poprečnom savijanju i uvrtanju bridova, dok je promjena u duljini (ratezanje) bridova relativno malena. Poprečni presjek brida stenta je često ujednačen, a površina je malena u odnosu na poprečni presjek cjevčice koju "zatvara" stent. Na primjer kod jednog modela stenta Saunders (2002) spominje se debljina stjenke cjevčice (tj. brida) oko 0.08 mm, polumjer nedeformirane cjevčice oko 1.5 mm, a deformirane od 2.5 mm na više. Deformacija stenta ovisi o materijalu iz kojeg je napravljen i

dizajnu strukture stenta: broju, duljini, obliku, zakrivljenosti i razmještaju štapova.

Postoji mnogo proizvođača i različitih dizajna stentova. U prvoj fazi proizvodnje može se iz tanke metalne cjevčice laserom izrezati "višak", tako da preostane stent Saunders (2002). Kod posebne vrste stentova koji se nakon postavljanja u žilu sami deformiraju do programiranog oblika (self-expandible), u prvom koraku proivodnje stent se može "plesti" od žice posebne legure nikla i titanija, a zatim se nekom tehnikom krajevi žice spajaju u krajevima stenta, ili još u drugim točkama, vidi Kim *et al.* (2008). U sljedećim fazama proizvodnje na površinu stenta može se nanositi lijek koji pomaže u liječenju bolesti na krvnom sudu i prevenira određene dugoročno negativne posljedice implantata na krvnom sudu. Ponekad se plaštem od nekog drugog materijala "dopunja" stent do pune cjevčice, što izgleda kao da je metalna mrežica gusto protkana tankom tkaninom. Proces proizvodnje na kraju može uključiti sabijanje stenta u položaj koji zauzima prilikom umetanja prije napuhavanja balona.

Pregled dosadašnjih istraživanja

Prve primjene stenta u liječenju začepljenih krvnih žila kod ljudi prije gotovo 3 desetljeća opisane su u Sigwart *et al.* (1987) i Palmaz *et al.* (1985). U širu upotrebu angioplastika ulazi devedesetih godina 20. stoljeća, a njena učinkovitost u liječenju i dugotrajne posljedice zahvata uvelike su određene mehaničkim svojstvima implantiranog stenta. Dobar dizajn stenta trebao bi omogućiti da se postavljeni stent nakon ispuhavanja balon i vađenja katetera što manje ponovno sakuplja i vraća prema položaju koji je zauzimao prije postavljanja. Raširen stent trebao bi zadržati oblik cjevčice s posvuda jednakim poprečnim presjekom. Veće širenje krajeva stenta u odnosu na središnji dio može uzrokovati ozljede tkiva žile. Još neke poželjne karakteristike su: da se duljina stenta ne mijenja sa širenjem i da je fleksibilan na savijanje u nerastegnutom položaju kako bi se lagano mogao savijati dok u kateteru putuje žilom do mjesta implantacije.

Najdostupniji način određivanja svojstava stenta su računalne simulacije. Za razliku od "in vitro" i "in vivo", "in silico" testiranje može se provesti još u fazi dizajna, prije proizvodne materijalnog modela stenta. Simulacije koje modeliraju širenje kod implantacije, zbog velikih deformacija stenta, uglavnom koriste mehanički model (Von Mises) trodimenzionalne elasto-plastičnosti materijala. Prve računalne numeričke simulacije (vidi Whitcher (1997), Dumoulin & Cochelin (2000), Etave *et al.* (2001), Auricchio *et al.* (2001) i Migliavacca *et al.* (2002)) bile su vrlo zahtjevne na računalne resurse (memorija, procesorska snaga) pa su ponekad pokušavale koristiti simetrije u strukturi stenta, što može ograničiti valjanost rezultata. Tehnološkim razvojem i dostupnošću sve boljih računala simulacije ponašanja stenta korištenjem trodimenzionalnih modela proširuju se na interakciju stenta s balonom, stjenkom žile i aterosklerotičnom naslagom (npr. Kiousis *et al.* (2007) i Zhao *et al.* (2012)). Sve do sada autoru poznate računalne simulacije ponašanja

stenta su ravnotežne, tj. ne uzimaju u obzir vremensku odrednicu. Na primjer, simulacija opisana u Shankaran & Karrupaswamy (2012) promatra tri sukcesivne ravnotežne simulacije: sakupljanje rastegnutog stenta u fazi proizvodnje, rastezanje stenta prilikom implantacije i ponovno djelomično sakupljanje nakon što je kateter s balonom izvađen iz žile. Takva serija simulacija uspjeva uzeti u obzir naprezanja koja mogu biti prisutna u materijalu prije početka rastezanja i ponovnog sakupljanja, što je u slučaju jedne statičke simulacije gotovo nemoguće. Pouzdanost apstraktnog modela i računalne simulacije svakog fizikalnog modela na kraju je potrebno potvrditi eksperimentalno: na primjer, "in vitro" ispitivanje koje je proveo Kim *et al.* (2008).

Okvir 1.2.: Dinamička simulacija pokazati će kako se stent ponaša u vremenu, uz moguće promjenjive vanjske uvjete (tlak u balonu, protok krvi, itd.). U posebnom slučaju, kada su vanjski uvjeti nepromjenjivi, ravnotežna simulacija pokazati će samo onaj krajnji položaj (ili više mogućih) koji će stent konačno zauzeti. Varijacijska zadaća pokazuje samo stabilne ravnotežne položaje (u kojima je energija sustava minimalna). Varijacijska zadaća dopušta samo poseban slučaj tzv. konzervativne sile, gdje rad sile ne ovisi o putu deformacije.

Matematiku kao znanost zanimaju svojstva modela koja se matematičkim tehnikama mogu dokazati. Temeljna su pitanja postojanja rješenja i broja različitih rješenja (jedinstvenost), regularnosti rješenja (npr. posjeduje li određenu glatkoću ili možda ima prekide) i stabilnosti modela (kako malene promjene parametara modela utječu na rješenje). U radu Tambača *et al.* (2010) prvi puta je prikazan jedan diskretizirani matematički opravdan model stenta. Ovaj model je zasnovan na lineariziranoj elastičnosti pa je njegova primjena ograničena na relativno malene deformacije, na primjer deformacije koje se javljaju pri ponovnom sakupljanju nakon postavljanja stenta u žilu. Egzistencija i jedinstvenost rješenja, te stabilnost ovog linearnog modela izravna je posljedica proslavljene Lax–Milgramove leme. U ovom modelu bridovi stenta predstavljeni su kao jednoparametarski objekti (tzv. štapovi) čija su mehanička svojstva izvedena iz trodimenzionalne (3D) elastičnosti. Kod jednoparametarskog modela, pomak točke na bridu funkcija je samo jednog parametra — longitudinalnog položaja točke, odnosno udaljenosti točke od početka brida. Posljedica je da se sve točke u jednom poprečnom presjeku brida deformiraju zajedno, a posmak brida nije dopušten. Kod ovog jednoparametarskog modela, kod i standardnog 3D, kodomena funkcije pomaka, tj. deformacije ostaje standardan trodimenzionalni Euklidski prostor. Jedna od prednosti jednoparametarskog modeliranja u odnosu na klasičan 3D jest u efikasnosti si-

mulacije koja zahtjeva manje računalnih resursa. Radovi Tambača, J; Čanić, S; Paniagua (2010) i Tambača *et al.* (2011) pomoću ovog modela testiraju mehanička svojstva nekoliko komercijalno dostupnih dizajna stenta. Usporedba između rezultata računalne simulacije korištenjem jednoparametarskog modela iz Tambača *et al.* (2010) i 3D modela linearizirane elastičnosti provedena je u Čanic & Tambača (2012). Kada je riječ o opterećenju stenta malenom silom koja daje deformacije reda veličine 10% ovo istraživanje je pokazalo, uz određena pojednostavljenja, da su relativne razlike pomaka između dva korištena modela oko 6%. U istom članku je istaknuto kako bi eventualni novi jednodimenzionalni modeli na načelima nelinearne elastičnosti ili elastoplastičnosti mogli omogućiti proučavanje mehaničkih svojstava endovaskularnih stentova koji su opterećeni većim silama, a koje rezultiraju i većim deformacijama. Drugi matematički rezultati glede jednoparametarskih modela stenta nisu poznati. U člancima Kim *et al.* (2008) i Zhao *et al.* (2012) bridovi stenta modeliraju se također jednoparametarski, ali modelom pseudoelastičnog materijala. Spomenuti diskretni jednoparametarski modeli zakrivljeni brid stenta aproksimiraju nizom ravnih štapova. Kod lineariziranog modela zakrivljenog elastičnog štapa Tambača (2006) je pokazao matematičku opravdanost takve aproksimacije.

Glede hipoteza ovog istraživanja stenta valja istaknuti da je u članku Scardia (2006) pokazano kako je teorija nelinearnog neproduljivog hiperelastičnog štapa na neki način usklađena s trodimenzionalnom teorijom elastičnosti kada je debljina štapa dovoljno malena. Pojam hiperelastičnost označava zapravo materijal sa elastičnim svojstvima koji dopušta minimizacijsku (energetsku) formulaciju problema. Nadalje, Tambača & Velčić (2012) dobili su da su sa stanovišta teorije elastičnosti, za dovoljno malene poprečne presjeke, opravdani uvjeti u spoju štapova: 1) bridovi spojeni u vrhu prije deformacije, ostaju spojeni zajedno i nakon deformacije, tj. nema pucanja u spojevima i 2) kut između tangenti na svaka dva brida spojena u vrhu ostaje isti prije i nakon deformacije.

Glede dostižnih budućih rezultata temeljenih na teoriji elastičnosti mehanike kontinuuma, ova teorija poznaje izobilje primjera koji dopuštaju nekoliko, pa čak i beskonačno rješenja (vidi (Ciarlet, 1988, poglavlje 5.8)). Npr. izvrtanje: sva rješenja ravnog štapa s okruglim poprečni presjekom pritisnutog na krajevima prema središtu razlikuju se do na rotaciju oko osi simetrije tog nedeformiranog štapa. Stoga je jedinstvenost rješenja kod novih nelinearnih modela izgledna samo u posebnim slučajevima (sila zadovoljava određene dodatne pretpostavke).

Cilj i hipoteze novog modela stenta

Cilj je doći do novog jednoparametarskog nelinearnog varijacijskog modela stenta te dokazati poželjna matematičkih svojstava: postojanje rješenja novog modela i stabilnost obzirom na geometriju koju stent zauzima. Nužno je da model dopušta testiranja mehaničkih svostava stenta, a poželjno je da postoji mogućnost simulacije složene interakcije

stenta s kateterom, balonom, krvnom žilom i naslagom na njoj, okolnim tkivom, itd.

Glavne pretpostavke ovog rada su:

1. stent je mrežasta struktura kod koja se sastoji od bridova spojenih u vrhovima, a vrhovi nisu nigdje dodatno fiksno učvršćeni,

2. sila koja djeluje na stent je konzervativna, a njen potencijal zadovoljava određene tehničke ocjene rasta i vrstu neprekidnosti obzirom na položaj,

3. ponašanje bridova stenta određeno je nelinearnom teorijom neproduljivog hiperelastičnog štapa što podrazumijeva da je brid poistovjećen s krivuljom u prostoru i

4. nema pucanja u spojevima štapova, a kutovi između tangenti na svaka dva brida spojena u vrhu ostaju isti prije i nakon deformacije.

Metodologija i pregled ovog rada

Prvi dio rada biti će posvećen ravnotežnom problemu jednog zakrivljenog neproduljivog hiperelastičnog štapa, kojem će biti postavljeni rubni uvjeti na oba kraja. Ovaj problem, kojem inače odgovara neka obična diferencijalna jednadžba uz rubne uvjete, u ovom radu biti će formuliran minimizacijskom zadaćom na odgovarajućem funkcijskom prostoru. U odnosu na formulaciju iz Scardia (2006) pokušati će se funkcijski prostor poopćiti na štapove čija je parametrizacija središnje linije Lipshitz neprekidna funkcija. Pretpostavka neproduljivosti štapa omogućiti će da se problem postavi na prostoru jednoparametarskih funkcija kojima su vrijednosti iz Lijeve grupe rotacija trodimenzionalnog prostora, $SO(3)$. Na temelju teorema o podupirućoj ravnini za konveksne funkcije pokazati će se donja nizovna poluneprekidnost funkcionala koji se minimizira. Koercitivnost funkcionala slijedi iz tehničkih ocjena na rast potencijala sile kojoj je štap izložen. Kod prve vrste praktičnog problema, referentni položaj već zadovoljava postavljene uvjete na položaj krajnjih točaka štapa. Tada se postojanje rješenja minimizacijske zadaće pokazuje tehnikom standardnog varijacijskog računa kao u (Evans, 2002, strana 443–445). U drugom slučaju štap inicijalno ne zadovoljava rubne uvjete i tada je potrebno pokazati da je prostor minimizacije neprazan, što se pokazuje kao netrivijalan zadatak.

U prvom dijelu rada plan je, također, pokazati da je razmatrani ravnotežni model štapa stabilan glede geometrije i rubnih uvjeta koji ga određuju. Stabilnost se planira pokazati u terminima Γ-konvergencije. Prema (Braides, 2002, bilješka 1.22) to znači da je određenim uvjetima U zadana minimizacijska zadaća za stent $Z(U)$, i to tako da se za svaki niz uvjeta U_n koji se približavaju prije spomenutim zadanim uvjetima U (u nekoj topologiji), globalni minimumi niza zadaća $Z(U_n)$ približavaju nekom globalnom minimumu zadaće $Z(U)$. Γ-konvergencija niza funkcionala f_n nekom gamma limesu f

zahtijeva dvije ocjene spomenute u dodatku A.2. Prva od tih ocjena slijedi standarnim tehnikama, dok je za drugu potrebno jako dobro kontrolirati deformacije neproduljivih krivulja u prostoru. Pojednostavljeno, za zadanu krivulju duljine 1 koja spaja određene dvije točke uz zadane tangente na početku i kraju krivulje, biti će nužno pronaći drugu krivulju iste duljine koja ima malo promijenjene, ali također zadane početne i krajnje točke, te tangente na početku i kraju krivulje. Štoviše, biti će potrebno pokazati da se udaljenost između pronađene i zadane krivulje može ograničiti u prikladnom funkcijskom prostoru.

Drugi dio rada obuhvaća ravnotežni problem stenta u varijacijskoj formulaciji. Stent je zadan kao unija zakrivljenih neproduljivih hiperelastičnih štapova, koji se spajaju u tzv. vrhovima. Prostor minimizacije biti će, u osnovi, kartezijev produkt prostora korištenih za jedan štap, uz uvjete kontakta u vrhovima. Postojanje rješenja pokazati ćemo, ne samo za stent, nego i za općenitu strukturu štapova. Međutim, stabilnost modela pokazana je samo za stent. Primjeniti ćemo iste matematičke tehnike korištene kod problema jednog štapa, uz još neke rezultate iz teorije grafova. Kako bi pokazali da je model iskoristiv u praksi, na kraju ćemo izložiti nekoliko jednostavnih primjera konzervativne sile, koji zadovoljavaju pretpostavke teorema egzistencije i stabilnosti, te omogućuju testiranje mehaničkih svojstava stenta. Na samom kraju, vrlo kratko ćemo diskutirati iskoristivost modela kod složenijih simulacija interakcije stenta s okolinom.

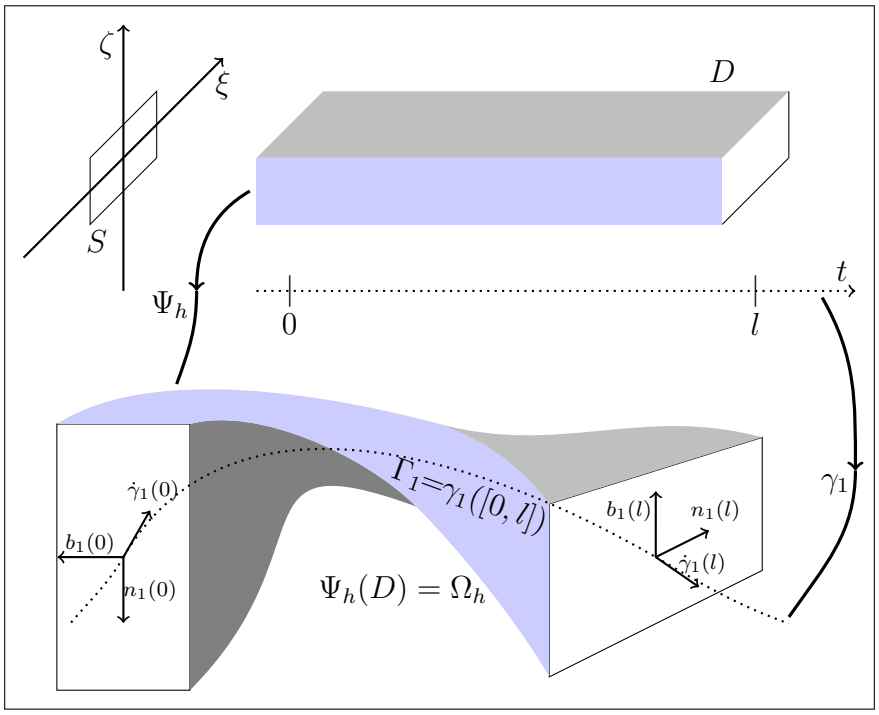
Znanstveni doprinos

Izložen je prvi matematički opravdan nelinearan model stenta s dokazanom egzistencijom i stabilnošću rješenja. Ovaj varijacijski model prilagođen je potrebama numeričkih simulacija i zadovoljava dio potreba za boljim jednoparametarskim modelom koje navodi (Čanic & Tambača, 2012, page 768).

Jedan dio rezultata može se primijeniti na proizvoljnu strukturu sastavljenu od štapova. Tehnike korištene u dokazu stabilnosti mogle bi pridonijeti boljem razumijevanju: mehanike stenta i sličnih problema zadanih na povezanim krivuljama uz uvjete na kontaktu.

2. Model neproduljivog hiperelastičnog štapa

2.1. Opis modela



Okvir 2.1.: Referentna krivulja sa TNB okvirom

Referentna konfiguracija štapa $\Omega_h = \Psi_h(D)$ zadana je preslikavanjem $\Psi_h : D \to \mathbb{R}^3$ takvim da

$$\Psi_h(t, \xi, \zeta) = \gamma_1(t) + h\xi n_1(t) + h\zeta b_1(t),$$

gdje je domena $D = [0, l] \times S$. Broj l nazivamo duljinom štapa, a $S \subset \mathbb{R}^2$ je poprečni presjek koji se ponavlja cijelom duljinom. Preslikavanje $\gamma_1 : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ čini jediničnu parametrizaciju krivulje $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^3$, dakle za svaki t, $\|\gamma'(t)\| = 1$ i $\gamma_1([0, l]) = \Gamma_1$. Vektorske funkcije $n_1, b_1 : [0, l] \to S_3 \subset \mathbb{R}^3$ su preslikavanja na jediničnu sferu takva da matrična funkcija čiju su stupci $Q = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 & n_1 & b_1 \end{pmatrix} : [0, l] \to SO(3)$ čini tzv. ortonormirani (poznat pod nazivima TNB i Frenet-Serret) okvir (drugim riječima tzv. desnu bazu) duž krivulje Γ_1 (vidi okvir 2.1).

Deformacija $\phi_h : \Omega_h \to \mathbb{R}^3$ premješta štap u deformirani položaj $\phi_h(\Omega_h)$, a u materijalu koji tvori štap javljaju se naprezanja. Pretpostavljamo hiperelastičan materijal, tj. kod kojeg se odnos naprezanja i deformacije izvodi iz funkcije gustoće deformacijom pohranjene energije $W : D \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to [0, +\infty]$, tako da ukupna energija pohranjena deformacijom štapa iznosi

$$\mathscr{E}(\phi_h) = \int_{\Omega_h} W\left(\Psi_h^{-1}(y), \nabla\phi_h(y)\right) \mathrm{d}y = h^2 \int_D W\left(x,\, R(x)\right) \mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

gdje je matrica zadanu stupcima $R(x) = \begin{pmatrix} \partial_t\varphi_h(x) & \frac{\partial_\xi\varphi_h(x)}{h} & \frac{\partial_\zeta\varphi_h(x)}{h} \end{pmatrix}$, uz oznaku $\varphi_h = \phi_h \circ \Psi_h$.

Tablica 2.1.: Pretpostavke na svojstva materijala

Svojstva materijala sadržana u W: $\forall F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\forall_{ss} x \in D$
ne ovisi o bazi: $\forall A \in SO(3)$, $W(x, A.F) = W(x, F)$,
nula na rotacijama: $\forall A \in SO(3)$, $W(x, A) = 0$,
neovisno o x postoji konstanta $K_1 > 0$ tako da $W(x, F) \geq K_1\, d^2\,(F, SO(3))$,
neovisno od x postoji $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ okolina $SO(3)$ tako da $W_x(\cdot) = W(x, \cdot)$ je klase C^2 na $\mathcal{O}$ i
neovisno od x postoji konstanta $K_2 > 0$ tako da $\forall G \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$, $\forall F \in \mathcal{O}$, $D^2 W_x(F)[G, G] \leq K_2 \left\|G\right\|_2^2$

Pretpostavljamo da je W kao u Scardia (2006) Caratheodoryjevog tipa, tj. za svaki $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $W(\cdot, F)$ izmjeriva i za svaki $x \in D$, $W(x, \cdot)$ je neprekidna; i da zadovoljava svojstva iz tablice 2.1.

Scardia je (vidi okvir 2.2) za krivulju Γ_1 bez samopresjeka klase C^2, tj. tako da je $Q \in C^1\,(0, l; SO(3))$, i za maleni parametar širine poprečnog presjeka $h \gtrapprox 0$ opravdala jednoparametarski model. U tom modelu se umjesto ukupne energija štapa $\mathscr{E}$ iz (2.1) promatra

$$\mathscr{E}_1(\phi_h) = h^4\, I_S\,(Q, R_h)\,. \quad (2.2)$$

Pritom se matrična funkcija $R_h : D \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ računa po stupcima iz ϕ_h slično kao u (2.1)

Teorem 1. *Uz oznake na str. 7-9, $\varphi_h = \phi_h \circ \Psi_h$, oznaku konvergencije $\varphi_{h_j} \xrightarrow[h]{*} (v, n, b)$ koja znači da $\varphi_{h_j} \to v$ u $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial_\xi \varphi_{h_j}}{h_j} \to n$ i $\frac{\partial_\xi \varphi_{h_j}}{h_j} \to b$ u $L^2(D, \mathbb{R}^3)$ te za I_S definiran u (2.5), kada $h_j \to 0_+$ tada:*

1. *za svaki niz $\phi_h \circ \Psi_h \xrightarrow[h]{*} (v, n, b)$ vrijedi*

$$I_S(Q, \begin{pmatrix} \partial_t v & n & b \end{pmatrix}) \leq \liminf_j \frac{1}{h_j^4} \mathscr{E}(\phi_{h_j}),$$

2. *za svaku trojku (v, n, b) koji ne ovise o ξ i ζ, te za koju matrica $\begin{pmatrix} \dot{v} & n & b \end{pmatrix} \in W^{1,2}\,(0, l; SO(3))$, postoji niz $\phi_h \circ \Psi_h \xrightarrow[h]{*} (v, n, b)$ tako da vrijedi*

$$I_S(Q, \begin{pmatrix} \dot{v} & n & b \end{pmatrix}) = \lim_j \frac{1}{h_j^4} \mathscr{E}(\phi_{h_j}).$$

Zaključak gore danog teorema veoma nalikuje definiciji Γ-konvergencije pa se u literaturi, npr. Mora & Muller (2003), kolokvijalno govori da je I_S Γ- limes funkcionala $\mathscr{E}/h^4$, kada $h \to 0$. Međutim treba biti pažljiv, jer ova sličnost ne opravdava zaključke o I_S koji bi slijedili iz Γ- konvergencije, npr. da postoje minimizatori od $I_S(Q, \cdot)$ (vidi A.2 na str. 88).

Okvir 2.2.: Zaključak članka Scardia (2006)

$$R_h = \begin{pmatrix} \partial_t\,(\phi_h \circ \Psi_h) \\ \frac{1}{h}\partial_\xi\,(\phi_h \circ \Psi_h) \\ \frac{1}{h}\partial_\zeta\,(\phi_h \circ \Psi_h) \end{pmatrix}^T . \quad (2.3)$$

Definiciju I_S pokazati ćemo u (2.5), nakon jedne digresije.

Kažemo da su $R : D \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ i $\tilde{R} : [0,l] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ ekvivalentne kada za svaki $(t,\xi,\zeta) \in D$ vrijedi $R(t,\xi,\zeta) = \tilde{R}(t)$. Klasa ekvivalencije koja time nastaje dopušta da istu oznaku R koristimo za funkcije različitog broja varijabli (i stoga različite domene), slično kao u članku (Scardia, 2006, vidi formulu (1.1) i tekst koji je okružuje na str. 318). Sada definiramo(vidi dodatak A.10.3)

$$\mathcal{W} = W^{1,2}\left(0,l;\, SO(3)\right). \tag{2.4}$$

U terminima spomenute klase ekvivalencije među funkcijama različitog broja varijabli možemo smatrati da je $\mathcal{W} \subset W^{1,2}\left(D, \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$. Drugim riječima, za klasu ekvivalencije $R \in W^{1,2}\left(D, \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ vrijedi da je $R \in \mathcal{W}$ kada za svaki $t \in [0,l]$, te svaki $(\xi_1,\zeta_1) \in S$ i svaki $(\xi_1,\zeta_1) \in S$ vrijedi $R(t,\xi_1,\zeta_1) = R(t,\xi_2,\zeta_2)$, tj. $R(t,\cancel{\xi},\cancel{\zeta}) = R(t)$. Ovo ćemo iskoristiti u formuli (2.5).

Funkcional $I_S : \mathcal{W} \times \mathfrak{U}$ zadan je sa

$$I_S(Q,R) = \begin{cases} \left\| R^T.\dot{R} - Q^T.\dot{Q} \right\|_{\mathfrak{q}}^2, & \text{za } R \in \mathcal{W}, \\ +\infty, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Slično kako je opisano za Q, također i $R \in \mathcal{W}$ zadaje ortonormalni okvir krivulje $\Gamma_R = \phi_h(\Gamma_1)$ što odgovara središnjoj liniji deformiranog štapa. Ako stupce matrice $R \in \mathcal{W}$ zbog jednostavnosti označimo sa $R = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} & n & b \end{pmatrix}$ tada vidimo da

$$R^T.\dot{R} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \ddot{\gamma}\cdot n & \ddot{\gamma}\cdot b \\ & 0 & \dot{n}\cdot b \\ & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow\!- \text{ savijanje prema } n \text{ i } b \\ \leftarrow\!- \quad \text{torzija} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Deriviranjem po jedinom parametru (označeno s jednom ili više točaka iznad imena) funkcije, iz jednakosti $R^T.R = \mathrm{Id}$ slijedi kako je $R^T.\dot{R} = -\dot{R}^T.R = -\left(R^T.\dot{R}\right)^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ antisimetrična matrica pa je bilo dovoljno otkriti kako izgleda iznad dijagonale.

Norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{q}}$ proizlazi iz neke pozitivno definitne kvadratične forme $\mathtt{Q}_2 : [0,l] \times \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}} \to \mathbb{R}$ na način da za sve $A \in L^2\left(0,l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$

$$\|A\|_{\mathfrak{q}}^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_0^l \mathtt{Q}_2\left(s, A(s)\right) \mathrm{d}s \tag{2.6}$$

$$\|A\|_{\mathfrak{q}}^2 \geq K_{\mathfrak{q}} \int_0^l \|A(s)\|^2 \,\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

$$\|A\|_{\mathfrak{q}}^2 \leq K^{\mathfrak{q}} \int_0^l \|A(s)\|^2 \,\mathrm{d}s$$

gdje simbol $\|\cdot\|$ unutar znaka integracije označava proizvoljnu matričnu normu. Sve matrične norme su ekvivalentne, međutim jasno je da konstante $K_{\mathfrak{q}}$ i $K^{\mathfrak{q}}$ ovise o konkretnom

odabiru matrične norme (vidi propoziciju 81 u A.10). Forma $\mathtt{Q}_2$ ovisi o parametrima materijala i poprečnom presjeku štapa (vidi okvir 2.3).

Kada je $R \in \mathcal{W}$, deformirani položaj štapa može se izračunati preko $\varphi_h = \phi_h \circ \Psi_h$ i $v = \gamma(0) = \varphi_h(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ iz

$$\varphi_h(t,\xi,\zeta) = v + \int_0^t R(\tau).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\tau + \xi h\, R(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta h\, R(t).\vec{\mathrm{k}}\,. \tag{2.8}$$

Obzirom da $R(\tau) \in SO(3)$ to će parametrizacija γ biti jedinična, odnosno središnja linija deformiranog štapa neproduljiva. Može se pokazati da su funkcionali energije (2.1) i (2.2) invarijantni na translaciju i rotaciju cijele deformacije, tako da će dodatne informacije biti nužne za određenje položaja.

Uzrok deformacija štapa je utjecaj vanjske sile. Ravnotežan položaj karakterizira ravnoteža vanjske sile i elastične sile kojom tijelo odgovara na deformaciju. Ovdje ćemo razmatrati samo (jednostavniji slučaj) tzv. konzervativnu silu: rad $\mathscr{W}$ vanjske sile ne ovisi o putu koji materijalna točka prelazi tokom deformacije, već samo o konačnom položaju.

Fizikalno je zanimljivo među ravnotežnim deformacijama birati stabilne, a među njima su osobito zanimljive deformacije koje minimiziraju ukupnu energiju, dakle rješenja zadaće:

$$\arg\min_{\phi_h \in \mathfrak{S}} \quad \mathscr{E}(\phi_h) - \mathscr{W}(\phi_h) \tag{2.9}$$

gdje je $\mathfrak{S}$ generički skup kojim su kodirani dodatni uvjeti na rješenje: npr. učvršćeni krajevi, glatkoća, itd. Za $h \gtrapprox 0$, (2.9) ćemo zamijeniti novom zadaćom u kojoj bi iskoristili aproksimaciju $\mathscr{E}$ danu sa (2.2). Oblik (2.5) sugerira da bi u minimizaciji aktivno sudjelovali samo $R \in \mathcal{W}$, a tada se ϕ_h može izraziti pomoću (2.8). Stoga ima smisla pretpostaviti da se potencijal rada sile može zapisati kao (vidi okvir 2.4)

$$\mathscr{W}(\phi_h) = h^4 F(R, v). \tag{2.10}$$

Blago parafrizirajući navedeno u uvodu (Mora & Müller, 2004, str. 273): kvadratna forma $\mathtt{Q}_2$ definirana je kroz odgovarajući minimizacijski problem koji se temelji na kvadratnoj formi linearizirane elastičnosti $\mathtt{Q}_3(z,G) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_2^2 W(z,\mathrm{Id})\,[G,G]$. Više o vezi $\mathtt{Q}_2$ i $\mathtt{Q}_3$ može se pronaći u (Mora & Müller, 2004, jednadžba (4.1)) i (Scardia, 2006, jednadžba (3.19)). Svojstva materijala dosad razmatrana kroz W, u modelu su efektivno uzeta u obzir upravo kroz $\mathtt{Q}_2$ (zajedno s oblikom poprečnog presjeka S). Kvadratna forma $\mathtt{Q}_2$ osobito je jednostavna kada je štap homogen (odnosno $W(\cancel{x}, F) = W(F)$) i izotropan (odnosno $W(F.R) = W(F)$ za rotaciju R). Tada za

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ & 0 & a_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}},$$

$\mathtt{Q}_2$ poprima oblik

$$\mathtt{Q}_2(s,A) = E\left(K_n a_{12}^2 + K_b a_{13}^2\right) + G K_t a_{23}^2,$$

gdje je $E > 0$ Youngov modul i $G > 0$ modul smicanja materijala (u matematičkoj literaturi češće označen sa μ), dok su K_n, K_b te K_t pozitivni koeficijenti krutosti na savijanje te torziju koji se računaju iz oblika poprečnog presjeka S. Npr. kada je S krug radijusa r tada je $K_n = K_b = \frac{r^4\pi}{4} = {}^{K_t}/_2$.

Okvir 2.3.: Kako može izgledati $\mathtt{Q}_2$?

Dalje, u glavnom dijelu rada bavimo se samo zadaćom do koje je došla Scardia (2006)

Zadaća Ⓢ

za zadani $Q \in \mathcal{W}$ i $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{W} \times \mathbb{R}^3$ pronaći

$$\underset{(R,v)\in\mathfrak{S}}{\arg\min} \quad I_S(Q,R) - F(R,v), \tag{2.11}$$

gdje je $\mathfrak{S}$ opet generički skup kojim su kodirani dodatni uvjeti na rješenje, slično kao ranije.

Spomenimo odmah pretpostavke na funkcional F. Obzirom na primjere u okviru 2.4 čini se da nije pretjerano zahtijevati ograničenost i neprekidnost na nekom kompaktnom $K \subset \mathbb{R}^3$ (vidi još okvir 2.5):

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall (R,v) \in L^1(0,l;\, SO(3)) \times K,\ F(R,v) \leq C \text{ i} \tag{2.12}$$

$$(R_n, v_n) \to (R,v) \text{ u } L^1\left(0,l;\mathbb{R}^{3\times 3}\right) \times K \quad \Longrightarrow \quad F(R_n,v_n) \to F(R,v) \tag{2.13}$$

Zadaća Ⓢ odgovara nelinearnoj ODJ drugog reda u nepoznanici R koja sadrži: $R^T.\ddot{R} + \dot{R}^T.\dot{R} + \ldots$ Vrijednosti R su rotacije koje se mogu parametrizirati sa tri skalarne varijable (vidi propoziciju 77) pa se ista zadaća može zapisati kao sustav nekoliko nelinearnih ODJ drugog reda sa tri skalarne varijable.

Rad konzervativne sile na materijalnoj točki x je

$$\int_{\text{put}} f_x \mathrm{d}s = \text{potencijal}\left(\phi_h(x), \nabla\phi_h(x)\right),$$

gdje je veza potencijala sa $\phi_h(x)$ uobičajena kod volumnih sila, a sa $\nabla\phi(x)$ kod sila koje djeluju na površini. Npr. ukupan rad vanjske volumne konzervativne sile iznosi

$$\mathscr{W}(\phi_h) = \int_{\Omega_h} \text{potencijal}\left(\phi_h(x), \cancel{\nabla\phi_h(x)}\right)$$

pa kada vrijedi (2.8) iz (2.10) slijedi

$$F(R,v) = \frac{1}{h^2}\int_D \int_0^l \text{potencijal}\left(\boxed{2.8}\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta.$$

Oznaka $\boxed{2.8}$ stoji mjesto izraza za $\varphi_h(t,\xi,\zeta)$ u jednakosti (2.8). Obzirom na povezanost $\nabla\phi_h(x)$ i R iz (2.3), slično je moguće i kod površinske sile.

Okvir 2.4.: Kako do F?

Scardia (2006) je pružila opravdanje za izraz (2.5), koji se koristi u (2.11), samo kada je $Q \in C^1(0,l;\, SO(3))$. Međutim, iz (2.5) slijedi da zadaća Ⓢ formalno podnosi $Q \in \mathcal{W}$, kako je stavljeno. Sljedeći odlomci pokazati će da je zadaću Ⓢ moguće barem formalno generalizirati za još općenitije geometrije.

Zamjenom varijabli $P = R.Q^T$, odnosno $R = P.Q$ dobivamo

$$\begin{aligned} R^T.\dot{R} - Q^T.\dot{Q} &= Q^T.P^T.\left(\dot{P}.Q + \cancel{P.\dot{Q}}\right) - \cancel{Q^T.\dot{Q}} \\ &= Q^T.P^T.\dot{P}.Q\,. \end{aligned}$$

Stoga I_S iz (2.5), kada su $P, Q, R \in \mathcal{W}$, odgovara sljedećem

$$I_T(Q,P) = \begin{cases} \left\| Q^T.P^T.\dot{P}.Q \right\|_{\mathfrak{q}}^2, & P \in \mathcal{W}, \\ +\infty, & P \notin \mathcal{W}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Kako I_T dobro prihvaća svaki $Q \in \mathcal{L}$ (vidi okvir 2.5), mjesto zadaće Ⓢ možemo ispitivati drugu zadaću koja formalno ne zahtijeva derivacije na referentnom TNB okviru Q:

ZADAĆA Ⓣ

za zadanu izmjerivu $Q : (0,l) \to SO(3)$ i $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{W} \times \mathbb{R}^3$ pronaći

$$\underset{(P,v)\in\mathfrak{T}}{\arg\min} \quad I_T(Q,P) - F(P.Q,v). \tag{2.15}$$

.

Propozicija 2. (Istoznačnost zadaća Ⓢ i Ⓣ) *Za $Q \in \mathcal{W}$ i $\mathfrak{S} = \{(P.Q,v) : (P,v) \in \mathfrak{T}\}$, (P_0, v_0) riješava Ⓣ ako i samo ako $(P_0.Q, v_0)$ riješava Ⓢ.*

Dokaz. Uvrštavanjem. □

Dalje ćemo istraživati uvjete u kojima zadaća Ⓣ ima rješenje, te stabilnost rješenja zadaće na male razlike u ulaznim parametrima modela.

Propozicija 3. *Svaka izmjeriva funkcija* $Q : (0, l) \to SO(3)$ *je integrabilna.*

Dokaz. Domena i kodomena su ograničeni skupovi. Stoga vrijede skupovne jednakosti između integrabilnih i izmjerivih funkcija, za svaki $p \in [1, \infty]$

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} L^1(0, l; SO(3)) = L^p\left(0, l;\, SO(3)\right) = \mathcal{M}\left(0, l;\, SO(3)\right) \leftarrow\text{--izmjerive.} \qquad \square$$

$Q \in \mathcal{L}$ ako i samo ako je Q izmjeriva i $Q(t) \in SO(3)$ skoro svuda. Na $\mathcal{L}$ koristimo metriku $d_{\mathcal{L}}(Q, P) = \|Q - P\|_{L^1} = \int_0^l \|Q(t) - P(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$. Spomenuta je standardna norma prostora $L^1(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3})$

$$\|T\|_{L^1} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^l \|T(s)\|_2 \,\mathrm{d}s. \tag{2.16}$$

Uz spomenutu metriku $\mathcal{L}$ je topološki prostor (vidi A.10.2 i propoziciju 81 u A.10). Pod topologijom koju označavamo sa $L^p\left(0, l;\, SO(3)\right) \subseteq L^p\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$, podrazumijeva se isti skup $\mathcal{L}$ s topologijom nasljeđenom iz norme

$$\|T\|_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\int_0^l \|T(s)\|_2^p \,\mathrm{d}s}.$$

Propozicija 4. $\mathcal{L}$ *je potpun i zatvoren unutar* $L^p(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3})$*, za* $p \in [1, \infty]$.

Dokaz. $L^p(0, l; \mathbb{R}^{3\times 3})$ je Banachov po teoremu Riesza i Fischera (Royden, 1989, vidi str. 125). Pokažimo da je $\mathcal{L}$ je potpun tako što ćemo pokazati da je zatvoren unutar $L^p(0, l; \mathbb{R}^{3\times 3})$. Svaki konvergentan niz u L^p ima podniz koji konvergira točkovno skoro svuda (Royden, 1989, vidi str. 95). Stoga, ako je $f \in L^p$ limes konvergentnog niza $(f_n) \in \mathcal{L}$, neka je (f_{n_k}) podniz koji konvergira točkovno skoro svuda na $[0, l]$. Osim na skupu mjere nule svi f_{n_k} imaju vrijednosti u $SO(3)$, koji je zatvoren skup u $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Stoga f ima vrijednosti u $SO(3)$ skoro svuda, pa $f \in \mathcal{L}$. $\square$

Jasno da $\mathcal{L}$ nije vektorski prostor, ali je Lijeva grupa uz matrično množenje. Može se uočiti da smo $\mathcal{L}$ već koristili u (2.12-2.13), gdje se traži ograničenost i neprekidnost F na $\mathcal{L} \times \mathcal{K}$.

Okvir 2.5.: Definicija prostora $\mathcal{L}$

2.2. Rubni problem i postojanje rješenja

Kada neopterećeni štap zadovoljava uvjete zadaće Ⓣ, tj. kada $(\mathrm{Id}, v) \in \mathfrak{T}$, gdje je $\mathfrak{T}$ u slaboj topologiji zatvoren podskup od $\mathcal{W} \times K$, tada znamo da je $\mathfrak{T}$ neprazan, pa postojanje rješenja zadaće Ⓣ slijedi direktnom primjenom propozicije 5. To je jednostavniji slučaj koji je riješen na ovoj stranici i sljedećoj. Npr. neopterećeni štap je postavljen tako da zadovoljava uvjete, a zatim se primjenjuje sila i traži deformacija koja zadovoljava uvjete.
Međutim, može se dogoditi da neopterećeni štap ne zadovoljava uvjete problema "kodirane" sa $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{W} \times K$. Npr. ako je proizveden ravan štap duljine 2, koji je predviđeno postaviti tako da povezuje fiksne točke udaljene 1. U tom primjeru kažemo da će štap biti spregnut kod postavljanja i zatim opterećen. U ovom slučaju propozicija 5 ne može se iskoristiti direktno, već tek posredno s rezultatom koji jamči da je prostor uvjeta $\mathfrak{T}$ neprazan. Primjer takvog rezultata je intuitivno jasna propozicija 7, čiji je dokaz međutim dosta zahtjevan i zauzima najveći dio ovog odjeljka.

Okvir 2.6.: O nepraznosti prostora $\mathfrak{T}$ iz uvjeta propozicije 5 i strukturi ovog odjeljka.

Propozicija 5. *Neka je $Q \in \mathcal{L}$, K kompaktan podskup $\mathbb{R}^3$ te F ograničena i neprekidna na $\mathcal{L} \times K$ kao u (2.12) i (2.13).*

Tada zadaća Ⓣ ima rješenje na svakom $\mathfrak{T}$ nepraznom i u slaboj topologiji zatvorenom podskupu od $\mathcal{W} \times K$.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{T}$ neprazan i u slaboj topologiji zatvoren podskup od $\mathcal{W} \times K$. Pokazujemo da postoji minimum tako što ćemo prvo pronaći kandidata za minimizator zadaće Ⓣ.

Zbog ograničenosti F i pozitivnosti I to je $I - F$ odozdo ograničen, dakle infimum iz zadaće Ⓣ $\in \mathbb{R}$. Zbog nepraznosti možemo uzeti jedan niz $(P_n, v_n) \in \mathfrak{T}$ za koji

$$I_T(Q, P_n) - F(P_n.Q, v_n) \underset{n}{\longrightarrow} \inf_{(P,v)\in\mathfrak{T}} I_T(Q, P) - F(P.Q, v).$$

Zbog kompaktnosti postoji gomilište v niza (v_n). BSO, pretpostavimo da smo odmah uzeli niz (P_n, v_n) gdje $v_n \to v$. Riječ je o minimizacijskom nizu, stoga je $I_T(Q, P_n) - F(P_n.Q, v_n)$ ograničen, pa zbog ograničenosti F kao u (2.12), to je $I_T(Q, P_n)$ ograničen. Prema (2.7) i (A.24) iz dodatka A.10.2

$$I_T(Q, P_n) = \left\| Q^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q \right\|_{\mathfrak{q}}^2 \geq K_{\mathfrak{q}} \int_0^l \left\| \dot{P}_n \right\|_2^2.$$

Stoga je P_n ograničen u $\mathcal{W}$ i postoji gomilište P u slaboj topologiji. BSO, pretpostavimo da smo od početka uzeli niz (P_n, v_n) gdje $P_n \rightharpoonup P$ slabo u $\mathcal{W}$. Po pretpostavci o zatvorenosti u slaboj topologiji to je $(P, v) \in \mathfrak{T}$.

Zbog poluneprekidnosti odozdo u slaboj topologiji (vidi dodatak A.4) koja je pokazana u lemi 6, imamo

$$\lim_{n\to\infty} I_T(Q, P_n) - F(P_n.Q,\ v_n) \geq I(Q, P) - F(P.Q, v), \tag{2.17}$$

pa je (P, v) doista minimizator. □

Lema 6. *Neka je F neprekidna na $\mathcal{L} \times K$ kao u (2.13) i $Q \subseteq \mathcal{L}$. Tada je*

$$(P, v) \longmapsto I_T(Q, P) - F(P.Q, v)$$

odozdo poluneprekidna u slaboj topologiji na $\mathcal{W} \times \mathbb{R}^3$.

Dokaz. Neka $P_n \to P$ slabo u $\mathcal{W}$ i $v_n \to v$ u $\mathbb{R}^3$. Po teoremu Kondrachova i Relicha o kompaktnosti ulaganja, zaključujemo $P_n \to P$ jako u topologiji $C\left(0, l; SO(3)\right)$, stoga i u topologiji prostora $\mathcal{L} = L^1(0, l;\, SO(3))$ (vidi (2.16) u okviru 2.5 na str. 13). Iz neprekidnosti F koja je zapisana u (2.13) tada slijedi $F\left(P_n.Q,\, v_n\right) \to F\left(P.Q,\, v\right)$.

Teorem o podupirućoj ravnini (vidi dodatak A.4) može se primijeniti na pozitivno definitnu kvadratnu formu $\mathtt{Q}_2$, pa za $A \in L^2\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ postoji $r \in L^2\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ tako da za svaki $A_n \in L^2\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ i svaki $t \in [0, l]$ vrijedi $\mathtt{Q}_2\left(t, A_n(t)\right) \geq \mathtt{Q}_2\left(t, A(t)\right) + r(s)\cdot\left(A_n(s) - A(s)\right)$. Koristeći definiciju (2.6) integriranjem prethodne jednakosti na $[0, l]$ slijedi

$$\|A_n\|^2_{\mathfrak{q}} \geq \|A\|^2_{\mathfrak{q}} + \mathcal{O}_A\left[A_n - A\right], \tag{2.18}$$

gdje je $\mathcal{O}_A$ ograničeni linearni funkcional na $L^2\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ koji ovisi o A. Kada $A_n \rightharpoonup A$ slabo na $L^2\left(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$, to po definiciji slabe konvergencije $\mathcal{O}_A\left[A_n - A\right] \to 0$. Uvrstimo u (2.18), $A_n = Q^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q$ i $A = Q^T.P^T.\dot{P}.Q$, te uzmimo $n \to \infty$, pa slijedi

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right\|^2_{\mathfrak{q}} \geq \left\|Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\|^2_{\mathfrak{q}}.$$

Oduzimanjem izraza $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} F(P_n.Q,\, v_n) = F(P.Q, v)$ na lijevoj i desnoj strani gornje nejednadžbe, dobije se tražena relacija

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}}\; I(Q, P_n) - F(P_n.Q,\, v_n) \geq I(Q, P) - F(P.Q,\, v). \qquad \square$$

Okvir 2.7.: Rubni uvjeti

Propozicija 5 omogućuje da u zadaći Ⓣ biramo između rubnih uvjeta koji generiraju zatvorene podskupove u slaboj topologiji prostora $\mathcal{W} \times \mathbb{R}^3$:

`V0`: postavi $\gamma(0) = v_0 \in \mathbb{R}^3$ **`P0`:** postavi $P(0) = A \in SO(3)$

`VL`: postavi $\gamma(l) = \gamma(0) + \int_0^l P.Q.\vec{\imath} = v_l \in \mathbb{R}^3$ **`PL`:** postavi $P(l) = B \in SO(3)$

Potrebno je još pokazati da odabrana kombinacija rubnih uvjeta koju pridružujemo zadaći Ⓣ generira neprazan prostor minimizacije. Ključan korak, da skup svih uvjeta zajedno (`V0-VL-P0-PL`) ima neprazan prostor minimizacije slijedi iz propozicije 7. Druge kombinacije rubnih uvjeta spominju se u korolaru 9.

Razmotrimo prostor minimizacije za skup uvjeta `V0-VL-P0-PL` (okvir 2.7). Pokažimo da je neprazan tako što ćemo za zadane $Q \in \mathcal{L}$, $A, B \in SO(3)$ i $v_0, v_l \in \mathbb{R}^3$ naći $\left(P, \cancel{v}\right)^{v_0} \in \mathcal{W}_{A,B} \times \cancel{\mathbb{R}^3}$, gdje je

$$\mathcal{W}_{A,B} = \left\{P \in \mathcal{W} \,:\, P(0) = A \text{ i } P(l) = B\right\}, \tag{2.19}$$

takav da $\cancel{\gamma(0) = v_0}$ i $\int_0^l P(t).Q(t)\mathrm{d}t = \cancel{v_l - v_0}.^{v}$ Odmah smo označili kako preostaje samo jedan uvjet na položaj deformiranog štapa, tj. za $v = v_l - v_0$ želimo s nekim $P \in \mathcal{W}_{A,B}$

postići

$$\Phi_Q(P) \overset{\text{def}}{=} \int_0^l P(t).Q(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t \overset{\text{želja}}{=} v \tag{2.20}$$

Radi jednostavnijeg zapisa koristimo oznaku $\Phi(R) \overset{\text{def}}{=} \Phi_Q(R.Q^T) = \int_0^l R(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t$.

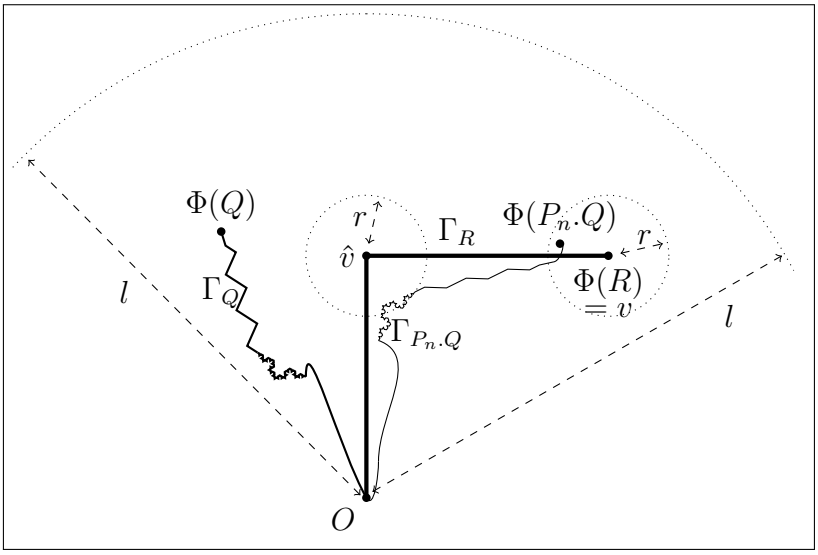
Propozicija 7. *Za svaki $Q \in \mathcal{L}$, $A, B \in SO(3)$ i svaki v iz otvorene kugle $K(O,l) \subseteq \mathbb{R}^3$ postoji $P \in \mathcal{W}_{A,B}$ takav da $\Phi_Q(P) = v$.*

Dokaz. Neka su zadani $Q \in \mathcal{L}$, $A, B \in SO(3)$ i $v \in K(O,l)$ kao u izreci. Neka je $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$ neka točka (ima ih više) udaljena $l/2$ od O i v, dakle $\|\hat{v}\| = l/2$ i $\|v - \hat{v}\| = l/2$. Neka je $\mathcal{K}_r \subseteq \mathcal{L}$ zadan sa

$$\mathcal{K}_r = \left\{ R \in \mathcal{L} \,:\, \int_0^{l/2} R(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t \in K(\hat{v}, r) \text{ i } \int_0^l R(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t \in K(v, r) \right\}. \tag{2.21}$$

Konstrukcija koja slijedi odgovara skici u okviru 2.8. Neka je $R \in \mathcal{K}_0$, što znači da je po dijelovima konstanta. Tada Γ_R, po dijelovima ravna krivulja duljine l s parametrizacijom $t \mapsto \int_0^t R(\tau).\mathrm{e}_1\mathrm{d}\tau$, spaja ishodište O sa v, prolazeći polovinom duljine kroz $\hat{v}$. Sada $\Phi_Q(R.Q^T) = v$, ali po svoj prilici $R.Q^T \notin \mathcal{W}_{A,B}$.

Konstruirajmo $P_n \in \mathcal{W}_{A,B}$ kao aproksimacije od $R.Q^T$, tj. takve da $\|P_n - R.Q^T\|_{L^1} \to 0$. Obzirom da $SO(3)$ nije vektorski prostor, konstrukcija će se obaviti posredno, koristeći vezu Lijeve grupe $\mathcal{L}$ s Lijevom algebrom iz leme 80. Tada je $t \mapsto \log\left(R(t).Q(t)^T\right)$ kompozicija Lebesgue mjerljive i Borelove funkcije (lema 80), pa stoga Lebesgue mjerljiva. Obzirom da je rezultat funkcije log, kako je definirana u definiciji 79, unutar zatvorene kugle oko ishodišta $O \in \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}$ i radijusa π u operatorskoj matričnoj 2-normi $K(\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}; O, \pi)$, to je onda $\log\left(R.Q^T\right) \in L^1\left(0, l; \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}\right)$. Sada možemo iskoristiti izglađivanje (vidi dodatak A.12) kako bi konstruirali niz $F_n \in C^\infty\left([0,l]\,,\, \mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}\right)$ takav da



Okvir 2.8: Skica uz dokaz propozicije 7. Krivulja Γ_Q je generička za $Q \in \mathcal{L}$. Krivulja Γ_R sastoji se od dva ravna dijela duljine $l/2$, počinje u O, prolazi kroz $\hat{v}$, a završava u v. Krivulja $\Gamma_{P_n.Q}$ je duljine l sa zadanim početkom u O, takva da je $P_n \in \mathcal{W}_{A,B}$ i relativno malenom normom $\|P_n - R.Q^T\|_{L^1}$.

$$F_n \to \log\left(R.Q^T\right) \in L^1\left(0, l; \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right). \tag{2.22}$$

Obzirom na definiciju izglađivanja (prosjek vrijednosti na skupu) i činjenicu da je

$$\left\|\log\left(R(t).Q^T(t)\right)\right\|_2 \leq \pi \tag{2.23}$$

može se zaključiti $\|F_n(t)\|_2 \leq \pi$. Standardno izglađivanje može se malo izmijeniti na krajevima segmenta tako da bude osigurano $F_n(0) = \log A$ i $F_n(l) = \log B$ (vidi napomenu 106 u dodatku A.12). Dalje, definiramo $P_n(t) = \exp\left(F_n(t)\right) \in SO(3)$. Eksponencijalna funkcija je glatka pa je stoga P_n glatka, kao kompozicija glatkih funkcija. Još vrijedi $P_n(0) = A$ i $P_n(l) = B$, dakle $P_n \in \mathcal{W}_{A,B}$. Primjeniti ćemo definiciju metrike na $\mathcal{L} = L^1(0, l;\, SO(3))$, a zatim poznatu ocjenu (A.12) na str. 98, pa na taj način slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathcal{L}}(P_n,\, R.Q^T) = \left\|P_n - R.Q^T\right\|_{L^1} &= \int_0^l \left\|\exp F_n(t) - \exp\log\left(R(t).Q(t)^T\right)\right\|_2 \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^l \left\|F_n(t) - \log\left(R(t).Q(t)^T\right)\right\|_2 \mathrm{e}^{\left\|\log\left(R(t).Q(t)^T\right)\right\|_2} \mathrm{e}^{\left\|F_n(t) - \log\left(R(t).Q(t)^T\right)\right\|_2} \mathrm{d}t \\
&\leq \left\|F_n - \log\left(R.Q^T\right)\right\|_{L^1} \mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{\pi+\pi} \to 0\,.
\end{aligned}$$

Kod zadnje nejednakosti iskoristili smo (2.23), $\|F_n(t)\|_2 \leq \pi$ i nejednakost trokuta za matričnu normu. Tako smo pokazali da zbog (2.22) vrijedi $P_n.Q \to R$ u $\mathcal{L}$.

Zatim

$$\Phi_Q(P_n) = \int_0^l P_n.Q.\vec{\mathrm{i}} = \underbrace{\int_0^l R.\vec{\mathrm{i}}}_{=v} - \int_0^l \left(R.Q^T - P_n\right).Q.\vec{\mathrm{i}},$$

pa korištenjem (A.21) slijedi

$$\|v - \Phi_Q(P_n)\|_2 \leq \int_0^l \left\|\left(R(t).Q^T(t) - P_n(t)\right).Q^T(t).\vec{\mathrm{i}}\right\|_2 \mathrm{d}t \leq \left\|R.Q^T - P_n\right\|_{L^1} \to 0.$$

Zaključujemo kako $\Phi_Q(P_n) \to v$, a na sličan način i $\int_0^{l/2} P_n.Q.\vec{\mathrm{i}} \to \hat{v}$. Stoga za svaki $r > 0$, postoji $n_r \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_r$ vrijedi $P_n.Q \in \mathcal{K}_r$.

Ključna lema 8 na osnovi v i $\hat{v}$ daje $r > 0$, takav da za svaki $P_n.Q \in \mathcal{K}_r$ postoji $S\left[P_n.Q\right] \in \mathcal{W}_{\mathrm{Id},\mathrm{Id}}$ za koji $\int_0^l S\left[P_n.Q\right].P_n.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$. Sada P iz tvrdnje ove propozicije možemo izabrati na način da $P = S\left[P_n.Q\right].P_n \in \mathcal{W}_{A,B}$, uz izbor bilo kojeg $n \geq n_r$. □

Lema 8. *Neka je $\triangle O\hat{v}v$ trokut pozitivne površine u standardnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ i neka je $\|\hat{v}\| = \|v - \hat{v}\| = l/2$. Tada postoji $r > 0$ takav da za svaki $Q \in \mathcal{K}_r$, definiran u (2.21), postoji $P \in \mathcal{W}_{\mathrm{Id},\mathrm{Id}}$ takav da $\Phi_Q(P) = v$.*

Dokaz. Ako su neki detalji ovog dokaza manje formalni nego bi čitatelj želio vidjeti, može se referirati na djelove dokaza leme 20, koji se temelji na istoj ideji ovog dokaza. Ovaj dokaz više će se oslanjanjati na geometrijski zor i intuiciju, dok se dokaz leme 20 provodi više kroz formalni račun.

Namjera je formalizirati intuiciju da kada $r \to 0$, tada su za $Q \in K_r$ krivulje Γ_Q (određene s Q) sve više razvučene u dvije stranice trokuta, odnosno vektor $Q(\tau).\mathrm{e}_1$ sve manje (u mjeri) odudara od smjerova vektora $\hat{v}$ ili $v - \hat{v}$.

Neka je $Q \in K_r$ i $E_1 = \left\{t \in \left[0, \frac{l}{2}\right] : \angle\left(Q(t).\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right) > \delta\right\}$, gdje je $\angle$ oznaka za kut među vektorima. E_1 je izmjeriv jer je $t \mapsto \angle\left(Q(t).\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right)$ Lebesgue izmjeriva kao kompozicija Lebesgue izmjerive Q i Borelove (neprekidne) funkcije $M \mapsto \angle\left(M.\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right)$. Zbog Cauchyjeve nejednakosti vrijedi

$$r > \left\| \hat{v} - \int_0^{l/2} Q.\vec{\mathrm{i}} \right\| \geq \left(\hat{v} - \int_0^{l/2} Q.\vec{\mathrm{i}} \right) \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}.$$

Dalje odmah slijedi

$$\underbrace{\|\hat{v}\|}_{=\frac{l}{2}} - r < \left(\int_0^{l/2} Q.\vec{\mathrm{i}} \right) \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|} = \underbrace{\int_{E_1} \underbrace{Q.\vec{\mathrm{i}} \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}}_{<\cos\delta}}_{<m(E_1)\cos\delta} + \underbrace{\int_{\left[0,\frac{l}{2}\right]\setminus E_1} \underbrace{Q.\vec{\mathrm{i}} \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}}_{\leq 1}}_{\leq \frac{l}{2} - m(E_1)} < \frac{l}{2} + (\cos\delta - 1)\, m\left(E_1\right).$$

Sada je za mjeru skupa E_1 jasno $m\left(E_1\right) < \frac{r}{1-\cos\delta}$. Na prvoj polovici krivulje Γ_Q kontroliran je početak, dok je završna točka prve polovice kontrolirana s tolerencijom r. Na drugoj polovici krivulje Γ_Q i početna i završna točka kontrolirane su tek s tolerancijom r. Stoga se sličnom analizom kao za ocjenu $m(E_1)$, ali uz faktor 2 može pokazati $m\left(E_2\right) < \frac{2r}{1-\cos\delta}$, za $E_2 = \left\{t \in \left[\frac{l}{2}, l\right] : \angle\left(Q(t).\vec{\mathrm{i}}, v - \hat{v}\right) > \delta\right\}$. Razabire se da za zadani $\delta > 0$ postoji $r > 0$ takav da za sve $Q \in \mathcal{K}_r$ vrijedi

$$m\left(E_1\right) + m\left(E_2\right) < \delta. \tag{2.24}$$

Definiramo sljedeće vektore jedinične duljine $b_2 = \frac{\hat{v}\times(v-\hat{v})}{\|\hat{v}\times(v-\hat{v})\|}$, $b_3 = b_2 \times \frac{(v-\hat{v})}{\|v-\hat{v}\|}$ i $b_1 = b_2 \times \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}$. Kutevi među vektorima su $b_2 \perp \{b_1, b_3\}$, $\angle\left(b_1, b_3\right) = \angle\left(\hat{v}, v - \hat{v}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \in \langle 0, \pi\rangle$. Kasnije ćemo iskoristiti posljedicu da $b_1 \times \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|} = -b_2$ i da je $\{b_i\}_{i=1}^3$ baza prostora. Štoviše, dokle god su tri vektora $(a_i)_{i=1}^3$ takva da su kutevi $\angle\left(a_i, b_i\right) \ll \varphi/2$ biti će $\{a_i\}_{i=1}^3$ baza prostora. Kut $\angle\left(b_1, b_3\right) = \varphi$, pa modifikacije a_1 i a_3 ne mogu postati kolinearne dok se ne odmaknu ukupno za φ od b_1 i b_3, a kada je još $\angle\left(a_i, b_i\right) \ll \varphi/2$ tada se ravnina zadana sa a_1 i a_3 ne mijenja mnogo od ravnine razapete sa b_1, b_3 pa a_2 ne može biti na ravnini razapetoj sa a_1, a_3.

Za b_1 postoji jedinstvena antisimetrična matica B_1 takva da $B_1.x = b_1 \times x$. Slično, neka je B_2 takva da $B_2.x = b_2 \times x$. Koristimo potenciranje matrica. Za $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\theta\, B_i\right)$ je rotacija oko osi b_i za kut $\theta\, \|b_i\| = \theta$.

Neka funkcija $\Lambda\left[x_1, x_2\right]$ ima graf koji izgleda kao krović visine 1 na segmentu $[x_1, x_2]$. Može se definirati preko $\Lambda\left[x_1, x_2\right](x) = 0$ za $x \notin [x_1, x_2]$, $\Lambda\left[x_1, x_2\right](x) = 2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ za $x \in \left[x_1, \frac{x_2+x_1}{2}\right]$ i $\Lambda\left[x_1, x_2\right](x) = 2\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ za $x \in \left[\frac{x_2+x_1}{2}, x_2\right]$. Definiramo funkcije $\lambda_1 = \Lambda\left[0, l/4\right]$, $\lambda_2 = \Lambda\left[l/4, l/2\right]$ i $\lambda_3 = \Lambda\left[l/2, l\right]$.

Definiramo funkcije $P_C \in \mathcal{W}_{\mathrm{Id},\mathrm{Id}}$ ovisno od parametra $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, formulom

$$P_C(t) = \begin{cases} \exp\left(c_1 \lambda_1(t)\, B_2\right), & t \in I_1 = [0, l/4]\,, \\ \exp\left(-c_2 \lambda_2(t)\, B_1\right), & t \in I_2 = [l/4, l/2]\,, \\ \exp\left(c_3 \lambda_3(t)\, B_2\right), & t \in I_3 = [l/2, l]\,. \end{cases}$$

Variranjem parametra C krivulja s parametrizacijom $t \mapsto \int_0^t P_C(\tau).Q(\tau).\mathrm{e}_1 \mathrm{d}\tau$ se "savija", a njen završetak označen sa

$$\Psi_Q(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l P_C(t).Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$$

se mijenja. Iz definicije slijedi kako je Ψ_Q glatka funkcija, klase C^∞.

U glavnom dijelu dokaza pokazati ćemo da se za odgovarajući izbor parametra C može postići $\Psi_Q(C) = v$. Za početak, $\Psi_Q(O) = \int_0^l Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t$. Od interesa je pokazati da $\{\partial_i \Psi_Q\,(O)\}_{i=1}^3$ čini bazu prostora, pa temeljem teorema o inverznoj funkciji, zaključiti da za svaki x iz neke okoline $\mathcal{O}$ oko $\Psi_Q(0)$ postoji C takav da $\Psi_Q(C) = x$. Glede zaključka teorema, nužno je pokazati kako se širina okoline $\mathcal{O}$ može direktno vezati za r, a bez izravne veze na izabrani $Q \in \mathcal{K}_r$. Razmatranje se neformalno može sažeti ovako:

$$\frac{\partial \Psi_Q}{\partial c_1}(O) = \int_{I_1} \lambda_1(t)\, B_2.Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = b_2 \times \underbrace{\underbrace{\int_0^{l/4} \overbrace{\lambda_1(t)}^{\geq 0}\, Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t}_{\text{skoro u smjeru } \hat{v}}}_{\text{skoro u smjeru } b_1}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial \Psi_Q}{\partial c_2}(O) = -b_1 \times \underbrace{\underbrace{\int_{l/4}^{l/2} \overbrace{\lambda_2(t)}^{\geq 0}\, Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t}_{\text{skoro u smjeru } \hat{v}}}_{\text{skoro u smjeru } b_2}, \quad \frac{\partial \Psi_Q}{\partial c_3}(O) = b_2 \times \underbrace{\underbrace{\int_{l/2}^{l} \overbrace{\lambda_3(t)}^{\geq 0}\, Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t}_{\text{skoro u smjeru } v-\hat{v}}}_{\text{skoro u smjeru } b_3}. \tag{2.26}$$

Sada pokažimo da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji odgovarajući (prije spomenuti) $\delta > 0$, koji može osigurati $\angle\left(\partial_i \Psi_Q(O), b_i\right) < \varepsilon$. Kada je ispunjeno (2.24), tada samo na $[0, l/4] \cap E_1$ vrijedi $Q.\mathrm{e}_1 \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|} < \cos\delta$, dok na ostatku $[0, l/4] \setminus E_1$ vrijedi $Q.\mathrm{e}_1 \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|} \geq \cos\delta$, uz $m\left([0, l/4] \cap E_1\right) < \delta$ pa možemo zaključivati

$$\begin{aligned} \cos\angle\left(\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right) &= \frac{\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}} \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}}{\left\|\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|} > \frac{\int_{[0,l/4]\setminus E_1} \lambda_1(t) \cos\delta \mathrm{d}t - m\left([0, l/4] \cap E_1\right)}{\int_0^{l/4} \left\|\lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|} \\ &\geq \frac{\cos\delta \int_0^{l/4} \lambda_1(t)\mathrm{d}t - m\left([0, l/4] \cap E_1\right) - m\left([0, l/4] \cap E_1\right)}{\int_0^{l/4} \lambda_1} \geq \cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}. \end{aligned}$$

Dalje po lemi 71 vrijedi

$$\angle\left(\partial_1\Psi_Q(O), b_1\right) = \angle\left(b_2 \times \int\limits_{I_1} \lambda_1 Q.\vec{\mathrm{i}},\ b_2 \times \hat{v}\right) \leq \angle\left(\int\limits_{I_1} \lambda_1 Q.\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right) < \arccos\left(\cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}\right)$$

pa kada $\delta \to 0$ tada $\angle\left(\partial_1\Psi_Q(O), b_1\right) \to 0$. Gotovo identično, može se zaključiti da kada $\delta \to 0$ tada $\angle\left(\partial_2\Psi_Q(O), b_2\right) \to 0$ i $\angle\left(\partial_3\Psi_Q(O), b_3\right) \to 0$:

$$\cos\angle\left(\int_{l/4}^{l/2} \lambda_2\, Q.\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\right) > \frac{\int_{[l/4,l/2]\setminus E_1} \lambda_2 \cos\delta - \delta}{\int_{l/4}^{l/2} \left\|\lambda_2\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|} \geq \cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}, \quad \angle\Big(\underbrace{\partial_2\Psi_Q(O)}_{-b_1\times\int_{I_2}\lambda_2 Q.\vec{\mathrm{i}}},\ \underbrace{b_2}_{-b_1\times\hat{v}/\|\hat{v}\|}\Big) \leq \underbrace{\angle\Big(\int_{I_2} \lambda_2 Q.\vec{\mathrm{i}}, \hat{v}\Big)}_{<\arccos\left(\cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}\right)}$$

$$\cos\angle\left(\int_{l/2}^{l} \lambda_3\, Q.\vec{\mathrm{i}}, v - \hat{v}\right) > \frac{\int_{[l/2,l]\setminus E_2} \lambda_3 \cos\delta - \delta}{\int_{l/2}^{l} \left\|\lambda_3\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|} \geq \cos\delta - \frac{2\delta}{l/4}, \quad \angle\Big(\underbrace{\partial_3\Psi_Q(O)}_{b_2\times\int_{I_3}\lambda_3 Q.\vec{\mathrm{i}}},\ \underbrace{b_3}_{b_2\times\frac{v-\hat{v}}{\|v-\hat{v}\|}}\Big) \leq \underbrace{\angle\Big(\int_{I_3} \lambda_3 Q.\vec{\mathrm{i}}, v - \hat{v}\Big)}_{<\arccos\left(\cos\delta - \frac{2\delta}{l/4}\right)}$$

Stoga kontrolom δ preko r u (2.24), dobijemo

$$\forall\varepsilon_1 > 0,\ \exists r > 0,\ \forall Q \in \mathcal{K}_r,\ \forall i \in \{1,2,3\},\ \angle\left(\partial_i\Psi_Q(O), b_i\right) < \varepsilon_1. \tag{2.27}$$

Elemente sljedećeg računa do sada smo već koristili

$$\left\|\frac{\partial\Psi_Q}{\partial c_1}(O)\right\| = \left\|b_2 \times \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\| = \sin\angle\left(b_2, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right)\left\|\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|,$$

$$\angle\left(b_2, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right) \in \left[\underbrace{\angle\left(b_2, \hat{v}\right)}_{\pi/2} - \angle\left(\hat{v}, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right), \underbrace{\angle\left(b_2, \hat{v}\right)}_{\pi/2} + \angle\left(\hat{v}, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right)\right],$$

$$\sin\angle\left(b_2, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right) \in \left\langle \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle\left(\hat{v}, \int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right)\right), 1\right] = \left\langle \cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}, 1\right],$$

$$\left\|\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right\| \in \left[\left(\int_0^{l/4} \lambda_1\, Q.\vec{\mathrm{i}}\right) \cdot \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}, \int_0^{l/4} \lambda_1\right] \subseteq \left\langle \cos\delta\, \frac{l}{8} - 2\delta, \frac{l}{8}\right]$$

$$\left\|\frac{\partial\Psi_Q}{\partial c_1}(O)\right\| \in \left\langle \left(\cos\delta - \frac{2\delta}{l/8}\right)\left(l/8 \cos\delta - 2\delta\right), \frac{l}{8}\right].$$

Identično se razabire

$$\left\|\frac{\partial\Psi_Q}{\partial c_2}(O)\right\| \in \left\langle \left(\cos\delta - \frac{\delta}{l/8}\right)\left(\frac{l}{8}\cos\delta - 2\delta\right), \frac{l}{8}\right] \text{ i } \left\|\frac{\partial\Psi_Q}{\partial c_3}(O)\right\| \in \left\langle \left(\cos\delta - \frac{\delta}{l/4}\right)\left(\frac{l}{4}\cos\delta - 2\delta\right), \frac{l}{4}\right].$$

Kontrolom δ preko r u (2.24), prethodni set ocjena uz (2.27) daje

$$\forall\varepsilon_2 > 0,\ \exists r > 0,\ \forall Q \in \mathcal{K}_r,\ \left\|\nabla\Psi_Q(O) - \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}\right\|_F < \varepsilon_2.$$

Obzirom da je matrični inverz neprekidna funkcija oko invertibilne matrice $\begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}$ u topologiji induciranoj svakom matričnom normom, to za svaki $\varepsilon_3 > 0$ i svaku matričnu normu u sljedećem retku postoji $r > 0$, tako da za $Q \in \mathcal{K}_r$

$$\left\| \nabla \Psi_Q(O)^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \right\| < \varepsilon_3. \tag{2.28}$$

S druge strane, pomoću (A.17), za $t \in I_i$ slijedi $\|P_C(t) - \mathrm{Id}\|_2 \leq d\left(P_C(t), \mathrm{Id}\right) \leq |c_i|$ i

$$\|\partial_1 \Psi_Q(C) - \partial_1 \Psi_Q(O)\| = \left\| b_2 \times \int_0^{l/4} \lambda_1(t) \left(P_C(t) - \mathrm{Id}\right) .Q(t).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t \right\| \leq \frac{l}{8} |c_1|$$

$$\|\partial_2 \Psi_Q(C) - \partial_2 \Psi_Q(O)\| \leq \frac{l}{8} |c_2|, \qquad \|\partial_3 \Psi_Q(C) - \partial_3 \Psi_Q(O)\| \leq \frac{l}{4} |c_3| .$$

Zaključujemo $\|\nabla \Psi_Q(C) - \nabla \Psi_Q(0)\|_F \leq {}^l\!/_4 \|C\|$. Slijedi da za svaki $\varepsilon_3 > 0$, postoji $r > 0$, tako da za $Q \in \mathcal{K}_r$ i sve $C \in \mathbb{R}^3$ vrijedi (2.28) i

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \Psi_Q(O)^{-1} \nabla \Psi_Q(C) - \mathrm{Id} \right\|_2 &\leq \left\| \nabla \Psi_Q(O)^{-1} \right\|_2 \|\nabla \Psi_Q(C) - \nabla \Psi_Q(O)\|_F \\ &\leq \left(\left\| \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \right\|_2 + \varepsilon_4 \right) \frac{l}{4} \|C\| . \end{aligned}$$

Kod prelaska u zadnji redak iskoristili smo ocjenu za $\|\nabla \Psi_Q(O)^{-1}\|_2$ koja proizlazi iz (2.28) i nejednakosti trokuta.

Uzmimo $\varepsilon_3 = 1$ i njemu odgovarajući $r = r_1$, pa iz posljednje nejednakosti, po teoremu o inverznoj funkciji (vidi teorem 54 u A.1) za $L = \left(\left\| \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \right\|_2 + \cancel{\varepsilon_3}^{\,1} \right) \frac{l}{4}$ za svaki $Q \in \mathcal{K}_{r_1}$ postoji i diferencijabilna je funkciji Ψ_Q inverzna funkcija Ψ_Q^{-1}, na

$$K\left(\Psi_Q(O), \left(2 \left(\left\| \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \right\|_2 + 1 \right)^2 \frac{l}{4} \right)^{-1} \right) \subseteq K\left(\Psi_Q(O), \frac{1}{2L \left\| \nabla \Psi_Q(O)^{-1} \right\|} \right).$$

Dakle $Q \in \mathcal{K}_{r_2}$, gdje je $r_2 = \min \left\{ r_1, \left(2 \left(\left\| \begin{pmatrix} \frac{b_1}{8} & \frac{b_2}{8} & \frac{b_3}{4} \end{pmatrix}^{-1} \right\|_2 + 1 \right)^2 \frac{l}{4} \right)^{-1} \right\}$ implicira $\Psi_Q(O) \in K(v, r_2)$, tj. za svaki $Q \in \mathcal{K}_{r_2}$ imamo v u domeni od Ψ_Q^{-1}. Dalje, za $C = \Psi_Q^{-1}(v)$ vrijedi $\Phi_Q(P_C) = \int_0^l P_C.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$ i $P_C \in \mathcal{W}_{\mathrm{Id},\mathrm{Id}}$. To je baš kao u iskazu leme. □

Napomena 9. Lako se vidi da zadaća Ⓣ ima rješenje kada $\mathfrak{T}$ kodira sljedeće kombinacije rubnih uvjeta iz okvira 2.7:

- sve kombinacije u kojima se ne javljaju oba uvjeta `VO` i `VL`,
- kombinacije u kojima se javlja `VO` i `VL` uz propisanu udaljenost između točaka $\|\gamma(l) - \gamma(0)\| < l$,
- kombinacije u kojima se javlja `VO` i `VL` uz propisanu udaljenost između točaka $\|\gamma(l) - \gamma(0)\| = l$, samo za poseban izbor Q, $P(0)$ i(li) $P(l)$ u koji nećemo detaljnije ulaziti.

Naime, kada je zadan uvjet `VO` i `VL`, uz $\|\gamma(l) - \gamma(0)\| > l$ prostor minimizacije zadaće Ⓣ je prazan, zbog neproduljivosti središnje linije štapa, pa zadaća nema rješenja.

Za kombinaciju `VO-VL-PO-PL` prostor minimizacije $\mathfrak{T}$ je podskup prostora minimizacije za svaku drugu kombinaciju spomenutih rubnih uvjeta, te neprazan po propoziciji 7. Stoga je $\mathfrak{T}$ neprazan i za druge kombinacije spomenutih rubnih uvjeta.

Uvjet $\|\gamma(l) - \gamma(0)\| = l$ može zadovoljiti samo ravni deformirani štap (uz dopuštenu torziju). Treba paziti da $P(0).Q(0).\vec{\mathrm{i}}$ i $P(l).Q(l).\vec{\mathrm{i}}$ pokazuju u smjeru vektora $\gamma(l) - \gamma(0)$. Mogu se javiti problemi kada $Q \notin \mathcal{W}$.

2.3. Ovisnost rješenja o aproksimaciji geometrije štapa

Stabilnost modela govori o tome da "male" promjene u njegovim parametrima neće "mnogo" utjecati na rezultate. S druge strane, ustoličen je pojam determinističkog kaosa, koji se parafrazirajući Edwarda Lorenza može opisati kao u Danforth (2013):

> "Kaos: kada parametri modela jednoznačno određuju rezultat, ali rješenje uz približno iste parametare nije niti blizu."

Gore dani opisi stabilnosti i kaotičnosti su neformalni, međutim važno je primijetiti kako podrazumijevaju determinizam — jedinstvenost rješenja. Glede jedinstvenosti rješenja, vrlo se lako može pokazati da neopterećeni ravni štap krajeva učvršćenih, ali ne ukrućenih, na udaljenosti manjoj od njegove duljine, modeliran zadaćom Ⓢ ili Ⓣ ima neprebrojivo mnogo rješenja (mig: jedno rješenje postoji i to nije ravna linija, primjeniti invarijantnu rotaciju deformirane središnje linije oko dužine koja spaja krajeve štapa). U navedenom primjeru nema ništa čudno jer je model štapa nastao asimptotskom analizom iz teorije elastičnosti mehanike kontinuuma u kojoj se također javljaju slični primjeri (Ciarlet, 1988, poglavlje 5.8).

U pojedinim posebnim slučajevima ipak intuitivno očekujemo jedinstvenost rješenja. Na primjer, kada je zadana ista ravna geometrija neopterećenog štapa i uvjeti na deformirani položaj u krajevima kao u prethodnom primjeru, ali sada uz opterećenje (silu) koja djeluje iz smjera neke normale dužine koja spaja krajeve. Obzirom da više od spomenutog u teoriji štapa nije poznato, te da u ovoj monografiji dalje o jedinstvenosti rješenja zadaće štapa nećemo više ništa ozbiljnije iskazati, jasno je da ne možemo pravo govoriti niti o klasičnoj stabilnosti modela štapa.

Formalno je, međutim, moguće definirati skup svih rješenja zadaće Ⓣ i razmatrati "stabilnost" temeljem neke mjere za udaljenost među skupovima. Za očekivati je da u tim terminima "stabilnost" ovisi o definiciji metrike na klasi svih skupova rješenja. Rezultati koji slijede mogu se utoliko interpretirati kao "stabilnost" skupa rješenja zadaće Ⓣ, u metrici $d(S_1, S_2) = \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in S_1 \text{ i } x_2 \in S_2\}$. Valja odmah napomenuti da je ova metrika vrlo "slaba" i neće biti dovoljno dobra za neke primjene. Međutim, uz eventualno poznatu informaciju da je rješenje u konkretnom slučaju jedinstveno, rezultati koji slijede daju klasičnu stabilnost modela.

Radi jednostavnosti iskaza do daljnjega ćemo kao na str. 15 fiksirati $\gamma(0) = O$. Stoga koristimo pokratu $F(\_) = F(\_, O)$. Ovdje ćemo razmatrati stabilnost zadaće uz postavljeni najsloženiji rubni uvjet `VO-VL-PO-PL`, ostali slijede znatno jednostavnije.

Za zadani $v \in \mathbb{R}^3$, $A, B \in SO(3)$ i $Q \in \mathcal{L}$ promatramo

$$\boxed{\begin{array}{c} \textsc{Zadaća } \textcircled{T}[v, A, B, Q] \\ \\ \underset{\substack{P \in \mathcal{W}_{A,B} \\ \int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} = v}}{\arg\min} \quad I_T(Q, P) - F(P.Q) \end{array}}$$

i istražujemo vezu između zadaća $\textcircled{T}$ $[v, A, B, Q]$ i $\textcircled{T}$ $[v_n, A_n, B_n, Q_n]$ kada $(v_n, A_n, B_n, Q_n) \to (v, A, B, Q)$ u odgovarajućem prostoru, koji ćemo naknadno specificirati. Želimo nešto reći barem o konvergenciji rješenja zadaće $\textcircled{T}[v_n, A_n, B_n, Q_n]$ k rješenju zadaće $\textcircled{T}[v, A, B, Q]$. Prirodno je koristiti teoriju Γ-konvegencije jer često nudi nekakav zaključak o konvergenciji minimuma i/li minimizatora (vidi teorem 58 u dodatku A.2).

Standarni postupak u teoriji je kodirati rubne uvjete u funkciju koja se minimizira.

Definicija 10. Za zadani $v \in \mathbb{R}^3$, $A, B \in SO(3)$ i $Q \in \mathcal{L}$ definiramo $J[v, A, B, Q] : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ formulom

$$J[v, A, B, Q](P) = \begin{cases} I_T(Q, P) - F(P.Q), & \text{kada } P \in \mathcal{W}_{A,B} \text{ i } \int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} = v, \\ +\infty, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.29}$$

gdje je $\mathfrak{U} \supseteq \mathcal{W}$ odgovarajući univerzalni skup.

Ekvivalentan zapis zadaće $\textcircled{T}[v, A, B, Q]$ sada glasi: za zadani $v \in \mathbb{R}^3$, $A, B \in SO(3)$ i $Q \in \mathcal{L}$ i J kao u (2.29) naći P_{m} tako da

$$J[v, A, B, Q](P_{\mathrm{m}}) = \min_{P \in \mathfrak{U}} J[v, A, B, Q](P) \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Kruna ovog odjeljka je teorem 12 (o konvergenciji minimizatora problema $\textcircled{T}$), dokazan na jednom posebnom podskupu prostora $\mathcal{L}$ uz topologiju prostora $L^2(0, l; \mathbb{R}^{3\times 3})$.

Definicija 11. Neka je i $F : [0, l] \to S_2$ Lebesgue izmjeriva funkcija (S_2 označava sferu u $\mathbb{R}^3$). Neka je $a \in [0, l]$. *Skup esencijalnih gomilišta* funkcije F u točki a označavamo $G_F(a)$, a sastoji se od svih $g \in S_2$ takvih da

$$\forall \varepsilon > 0, \quad m\{x : |x - a| < \varepsilon \text{ i } \|F(x) - g\| < \varepsilon\} > 0. \tag{2.31}$$

Kažemo da je F *esencijalno neprekidna* u a kada $G_F(a)$ ima samo jedan element, koji nazivamo *esencijalni limes* funkcije F u točki a i označavamo: $\operatorname{ess\,lim}_a F$. Neka je d metrika na skupu S_2 tada je *esencijalni skok* funkcije F u točki a

$$\operatorname{ess\,jump}_F^d(a) = \{d(g_1, g_2) : \{g_1, g_2\} \subseteq G_F(a)\}.$$

Pojam limesa (ili gomilišta) funkcije u točki standardno se javlja u analizi neprekidnih i po djelovima neprekidnih funkcija, dok isti pojam u analizi izmjerivih funkcija i L^p prostora funkcija nije uobičajeno koristiti. Elementi L^p prostora nisu prave funkcije, već klase ekvivalencije (jednake do na skupu mjere nula), pa se stoga klasične definicije iz teorije neprekidnih funkcija često ne mogu direktno preuzeti, npr. klasifikacija prekida. Rijedak primjer pojma iz klasične teorije neprekidnih funkcija koji je našao istaknuto mjesto u teoriji L^∞ prostora, jest supremum (najmanja gornja ograda) funkcije, koji je uz odgovarajuću izmjenjenu definiciju u kontekstu izmjerivih funkcija nazvan esencijalnim supremumom. Definicija esencijalnog supremuma nadahnula je definiciju 11, koja se prirodno može proširiti na općenita preslikavanja između potpunih prostora mjere. U nastavku monografije biti će zanimljivo vidjeti kako se pojmovi esencijalnog gomilišta i esencijalnog prekida (iz definicije 11) prirodno mogu koristiti kod izmjerivih funkcija, skoro kao kod neprekidnih, što se može usporediti s principima Johna Edensora Littlewooda (Royden, 1989, vidi 3.6).

Okvir 2.9.: Kontekst za definiciju esencijalne neprekidnosti

U definiciji istaknutih podskupova od $\mathcal{L}$, koji će poslužiti u rezultatu stabilnosti zadaće Ⓣ, koristimo essencijalni skok uz metriku određenu kutem između točaka na sferi:

$$C[0,l] = \left\{ Q \in \mathcal{L} \,:\, \forall a \in [0,l]\,, \quad \operatorname{ess\,jump}^{\angle}_{Q.\vec{\imath}}(a) = \{0\} \right\},$$

$$\mathrm{PST} = \left\{ Q \in \mathcal{L} \,:\, \exists a \in [0,l] \text{ takav da } \operatorname{ess\,jump}^{\angle}_{Q.\vec{\imath}}(a) \nsubseteq \{0,\pi\} \right\},$$

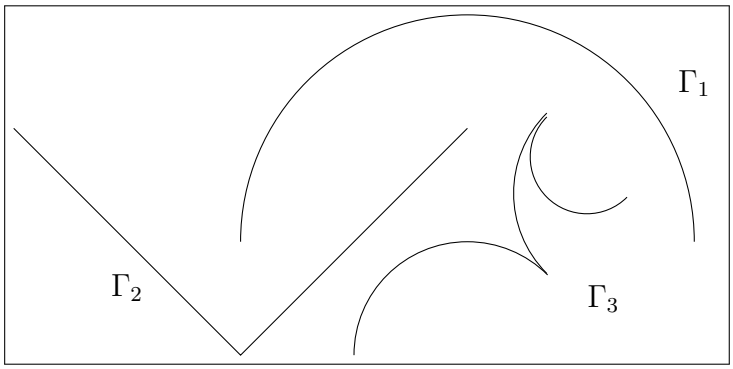
$$\begin{aligned}\mathrm{HARMONIKA}_y = \Big\{ Q \in \mathcal{L} \setminus (\mathrm{PST} \cup C[0,l]) \,:\, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l \\ \text{i jedino za } x_k \text{ vrijedi } \pi \in \operatorname{ess\,jump}^{\angle}_{Q.\vec{\imath}}(x_k),\ k = 1,\ldots,n-1, \\ \text{te još mora biti } \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^n (x_k - x_{k-1}) \right| \neq y \Big\}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{HARMONIKA} = \bigcup_{y \in [0,l]} \mathrm{HARMONIKA}_y$$

Skup $C[0,l]$ sadrži sve klase ekvivalencije koje se od neprekidnih funkcija mogu razlikovati samo na skupu mjere nula. Posebice, sve neprekidne funkcije spadaju u $C[0,l]$.

Funkcija $Q \in \mathrm{PST}$ određuje krivulju Γ_Q za koju negdje "postoji skok tangente" pod kutem manjim od π, odnosno tako da u svakoj okolini neke točke imamo tangente na krivulju koje nisu kolinearne. Primjer je graf funkcije $x \mapsto |x - l/2|$.

U skupu HARMONIKA nalaze se funkcije koje imaju samo konačno mnogo sko-



Okvir 2.10.: Primjeri krivulja: Γ_1 je neprekidno diferencijabilna, pa dozvoljava neprekidan TNB okvir, Γ_2 ima skok tangente pod kutem $\pi/2$ dok je TNB okvir krivulje Γ_3 nužno iz skupa HARMONIKA.

kova, a svi su skokovi esencijalno pod kutem π. Funkcije iz HARMONIKA$_y$ posebne su po tome da kada slažemo duljine segmenata između točaka esencijalnih prekida, naizmjence u suprotnim smjerovima (kao stolarski sklopivi metar) završetak bude udaljen od početka točno y. Skokovi funkcije $Q.\vec{\imath}$ pod kutem π pokazuju se kao bodlja ili trn na krivulji Γ_Q. Jedan primjer krivulje čiji je TNB okvir klase HARMONIKA$_y$ je graf funkcije $x \mapsto \sqrt{|x - l/2 - y/2|}$ za $0 < y < l$.

Skup $\mathcal{L} \setminus (C\,[0,l] \cup \mathrm{PST} \cup \mathrm{HARMONIKA})$ sačinjavaju funkcije koje imaju samo esencijalne skokove pod kutem π i to beskonačan broj takvih skokova. Rezultat stabilnosti u ovom poglavlju pokazati ćemo samo za $Q \in C\,[0,l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y \neq \|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$ dok će u idućem poglavlju, kod stenta, biti dovoljno $Q \in C\,[0,l] \cup \mathrm{PST} \cup \mathrm{HARMONIKA}$.

Teorem 12. *Neka je F ograničena i neprekidna na $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L} \times \{O\}$, kao u (2.12-2.13). Neka niz $(v_n, A_n, B_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (v, A, B, Q) u $K_{\mathbb{R}^3}(O,l) \times SO(3)^2 \times L^2\,(0,l;\, SO(3))$ (zabilješka 82), uz $Q \in C\,[0,l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y \neq \|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$. Neka je J kao u (2.29) i $P_n \in \mathcal{W}$ takvi da*

$$J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n) = \min_{S \in \mathcal{W}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n](S), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Tada niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima barem jedno gomilište u topologiji prostora $L^2\,([0,l]\,; SO(3))$. Svako takvo gomilište minimizira $J[v, A, B, Q]$.

Obratimo pažnju da i uz navedeni teorem, nije isključeno postojanje minimizatora $J[v, A, B, Q]$ koji nije gomilište niza $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sličan nedostatak uobičajen je kod rezultata temeljenih na tehnikama Γ-konvergencije. Međutim, vrijednost prethodno danog teorema jest što omogućuje da se iz rješenja aproksimacija problema Ⓣ, može "u limesu" isčitati neko rješenje problema kojem se aproksimacije približavaju. Teorem je dokazan pozivanjem na Γ-konvergenciju, koja je iskazana u teoremu 13 i dokazana pomoću niza pomoćnih rezultata koji se iznose sve do kraja ovog poglavlja.

Dokaz. Neka je $P \in \arg\min_{\mathcal{W}} J[v, A, B, Q]$. Obzirom da $\|v\| < l$ to prema propoziciji 7 postoji $S \in \mathcal{W}$ tako da $J[v, A, B, Q](S) < +\infty$ i stoga $P \in \mathcal{W}_{A,B}$ i $\Phi_Q(P) = v$. Prema propoziciji 19, za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji S_n tako da $S_n \in \mathcal{W}_{A_n,B_n}$, $\Phi_{Q_n}(S_n) = v_n$ i $S_n \to P$ u jakoj topologiji prostora $\mathcal{W}$. Stoga je niz $(J[v_n, A_n, B_n, Q_n](S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, pa je i za P_n kao u (2.32) niz $(J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Po lemi 15 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\mathcal{W}$, ulaganje $\mathcal{W} \hookrightarrow L^2\,([0,l]\,; \mathbb{R}^{3\times 3})$ je kompaktno (vidi A.3), pa je zatvorenje skupa, $K = \overline{\{P_n : n \in \mathbb{N}\}}$, kompaktno u $L^2\,([0,l]\,; \mathbb{R}^{3\times 3})$, odnosno $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je predkompaktan niz (skup). Možemo zaključiti i da $\forall n \in \mathbb{N}$: $\inf_{\mathcal{W}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n] = \inf_K J[v_n, A_n, B_n, Q_n]$. Obzirom na Γ-konvegrenciju $J[v_n, A_n, B_n, Q_n] \underset{\Gamma}{\to} J[v, A, B, Q]$ u $L^2\,([0,l]\,; \mathbb{R}^{3\times 3})$, koja je dokazana u teoremu 13, klasičan rezultat Γ-konvergencije (teorem 58 u A.2) daje zaključak teorema. $\square$

Teorem 13. *Neka je F ograničena i neprekidna na $\mathcal{L} = \mathcal{L} \times \{O\}$, kao u (2.12-2.13). Neka niz $(v_n, A_n, B_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (v, A, B, Q) u $K_{\mathbb{R}^3}(O, l) \times SO(3)^2 \times L^2(0, l;\, SO(3))$, uz $Q \in C[0, l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y\neq\|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$. Tada za J iz (2.29) vrijedi $J[v, A, B, Q] = \Gamma-\lim_n J[v_n, A_n, B_n, Q_n]$ u jakoj topologiji prostora $L^2([0, l]; \mathbb{R}^{3\times3})$.*

Dokaz. Dokaz teorema sačinjavaju dvije tvrdnje iz definicije 57 u A.2 (Γ-konvergencija): lema 14 i lema 18. □

Lema 14. *Neka je F ograničena i neprekidna na $\mathcal{L} = \mathcal{L} \times \{O\}$, kao u (2.12-2.13). Neka niz $(v_n, A_n, B_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (v, A, B, Q) u $K_{\mathbb{R}^3}(O, l) \times SO(3)^2 \times L^2(0, l;\, SO(3))$. Neka je J kao u (2.29) uz $\mathfrak{U} = L^2([0, l]; \mathbb{R}^{3\times3})$. Tada za svaki P i za svaki niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka P u jakoj topologiji prostora $L^2(0, l;\, \mathbb{R}^{3\times3})$, vrijedi*

$$J[v, A, B, Q](P) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n).$$

Dokaz. Neka niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka P u jakoj topologiji prostora $\mathfrak{U}$. Pokažimo zaključak leme za ovaj niz. Neka je oznaka $x_n = J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n)$. Ako $\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$ tada je zaključak trivijalan.

U suprotnom, postoji strogo rastući niz $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takav da je podniz $\left(x_{i(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen i konvergentan ka $\liminf_{n\in\mathbb{N}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n) \overset{\text{oznaka}}{=} x \in \mathbb{R}$. Stoga je prema (2.29), $x_{i(n)} = I_T(Q_{i(n)}, P_{i(n)}) - F(P_{i(n)}.Q_{i(n)})$. Po lemi 15 tada je $\left(P_{i(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u $\mathcal{W}$ i ima podniz $\left(P_{i(j(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koji u slaboj $W^{1,2}$ topologiji konvergira ka nekom elementu, a obzirom na pretpostavku $P_n \to P$ jako u $\mathfrak{U}$ (tj. L^2) i jedinstvenost limesa (vidi A.5), to limes mora biti baš

$$P_{i(j(n))} \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} P \quad \text{slabo u } \mathcal{W}. \tag{2.33}$$

Po lemi 15, još slijedi $P \in \mathcal{W}_{A,B}$ i $\int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$. Stoga je prema (2.29), $J[v, A, B, Q](P) = I_T(Q, P) - F(P.Q)$.

Obzirom na istaknuto svojstvo (2.33), te pretpostavke konvergencije $Q_n \to Q$ jako u L^2, prema lemi 16 niz $\left(Q^T_{i(j(n))}.P^T_{i(j(n))}.\dot{P}_{i(j(n))}.Q_{i(j(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koji označimo sa $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u slaboj L^2 topologiji konvergira k $A = Q^T.P^T.\dot{P}.Q$. Dalje možemo argumentirati slično kao u dokazu leme 6: uvrštavanjem članova niza $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u teorem o podupirućoj ravnini iskazan nejednakošću (2.18) i prelaskom na limes slijedi

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|Q^T_{i(j(n))}.P^T_{i(j(n))}.\dot{P}_{i(j(n))}.Q_{i(j(n))}\right\|^2_{\mathfrak{q}} \geq \left\|Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\|^2_{\mathfrak{q}}.$$

Sjetimo se istaknute pretpostavke (2.13) o neprekidnosti F na $\mathcal{L}$, navedene u teoremu 13, pa stoga aktivne i u ovoj lemi. Oduzimanjem izraza koji slijedi iz spomenute neprekidnosti, $\lim_{n\in\mathbb{N}} F(P_{i(j(n))}.Q_{i(j(n))}) = F(P.Q)$, na lijevoj i desnoj strani gornje nejednadžbe, dobije se

tražena relacija

$$\underbrace{\liminf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{I(Q_{i(j(n))}, P_{i(j(n))}) - F(P_{i(j(n))}.Q_{i(j(n))})}_{= x_{i(j(n))}}}_{= \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_{i(n)} = x = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n)} \geq \underbrace{I(Q,P) - F(P.Q,\, v)}_{= J[v, A, B, Q](P)}. \qquad \square$$

Lema 15. *Neka je F ograničena i neprekidna na $\mathcal{L} = \mathcal{L} \times \{O\}$, kao u (2.12-2.13). Neka niz $(v_n, A_n, B_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (v, A, B, Q) u $K_{\mathbb{R}^3}(O, l) \times SO(3)^2 \times L^2\,(0, l;\, SO(3))$. Neka je J kao u (2.29). Tada za svaki niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je realan niz $J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n)$ ograničen vrijedi:*

- $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz u $\mathcal{W}$ i postoji barem jedno njegovo gomilište u slaboj topologiji na $\mathcal{W}$,
- *ako je $\tilde{P}$ gomilište niza $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$* u slaboj topologiji na $\mathcal{W}$, tada $\tilde{P} \in \mathcal{W}_{A,B}$ *i* $\int_0^l \tilde{P}.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$.

Dokaz. Neka je $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je realan niz $J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n)$ ograničen. Iz definicije (2.29) proizlazi da je $P_n \in \mathcal{W}_{A_n,B_n}$, $\int_0^l P_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = v_n$ i $J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n) = I_T(Q_n, P_n) - F(P_n.Q_n)$. Obzirom na pretpostavku teorema 13 da je F ograničena, nužno je ograničen i realan niz

$$I_T(Q_n, P_n) = \left\|Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right\|_{\mathfrak{q}}^2 \geq K_{\mathfrak{q}} \int_0^l \left\|Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right\|_2^2 \mathrm{d}s = K_{\mathfrak{q}} \int_0^l \left\|\dot{P}_n\right\|_2^2.$$

Dakle, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\mathcal{W}$ i postoji barem jedan konvergentan podniz $\left(P_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ u slaboj topologiji na $\mathcal{W}$, pa neka je limes tog podniza označen P. $\mathcal{W}$ je zatvoren, vidi bilješku 87 u dodatku A.10.3, pa je $P \in \mathcal{W}$. Kada se još uzme u obzir konvergencija $A_n \to A$ i $B_n \to B$ slijedi $P \in \mathcal{W}_{A,B}$. Još k tome, zbog $Q_n \to Q$ u $\mathcal{L}$, slijedi $v = \lim\limits_n v_n = \lim\limits_n \int_0^l P_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = \int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}}$. $\square$

Lema 16. *Neka su Q_n, Q, P_n, $P \in \mathcal{L}$ takvi da $Q_n \to Q$ jako u $L^2\,(0, l;\, SO(3))$ (zabilješka 82) i $P_n \rightharpoonup P$ slabo u $\mathcal{W}$. Tada $Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} Q^T.P^T.\dot{P}.Q$ u slaboj L^2 topologiji.*

Dokaz. Zbog $P_n \rightharpoonup P$ slabo u $\mathcal{W}$ imamo da je $\dot{P}_n$ ograničeno u L^2 normi. Zbog toga je i $\left\|Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right\|_{L^2} = \left\|\dot{P}_n\right\|_{L^2}$ ograničeno (vidi (A.24) iz dodatka A.10.2). Stoga $\left(Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ima barem jedno gomilište u slaboj L^2 topologiji, označimo ga sa A. S druge strane zbog kompaktnosti ulaganja $L^\infty\,(0, l;\, SO(3))$ u $\mathcal{W}$, P je gomilište od $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u L^∞. Neka je $k(n)$ takav izbor indeksa da podniz $Q_{k(n)}^T.P_{k(n)}^T.\dot{P}_{k(n)}.Q_{k(n)} \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} A$ slabo u L^2 i $P_{k(n)} \underset{n}{\to} P$ jako u L^∞. Da uštedimo prostor označimo taj podniz s indekom k: $Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} A$ slabo u L^2 i $P_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\to} P$ jako u L^∞. Dalje ćemo pokazati da je nužno $A = Q^T.P^T.\dot{P}.Q$.

Obzirom na ekvivalenciju normi iz propozicije 81 ne diskriminiramo između standarne norme na $L^2\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ i norme spomenute u zabilješci 82, obje generiraju istu topologiju koju označavamo sa L^2.

Zbog $P_k \rightharpoonup P$ slabo u $\mathcal{W}$ i $P_k \to P$ jako u L^∞ imamo $\|\dot{P}_k\|$ ograničeno i za svaki $f \in L^2\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$

$$\begin{aligned}
|\left\langle f,\, P_k^T.\dot{P}_k - P^T.\dot{P}\right\rangle| &= |\left\langle f,\, (P_k-P)^T.\dot{P}_k + P^T.\left(\dot{P}_k-\dot{P}\right)\right\rangle| \\
&\le |\left\langle f,\, (P_k-P)^T.\dot{P}_k\right\rangle| + |\left\langle f,\, P^T.\left(\dot{P}_k-\dot{P}\right)\right\rangle| \\
&\le \underbrace{\|f\|_{L^2}\,\underbrace{\|\dot{P}_k\|_{L^2}}_{\text{ograničeno}}\,\underbrace{\|P_k-P\|_{L^\infty}}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{|\left\langle P.f,\, \dot{P}_k-\dot{P}\right\rangle|}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Tako smo pokazali $P_k^T.\dot{P}_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} P^T.\dot{P}$ slabo u L^2.

Zasebno razmatramo dva različita zapisa izraza $Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q$ u sljedećoj jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\left(Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right) - \left(Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q - Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right) \\
&\qquad = Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.\left(Q_k-Q\right) + \left(Q_k^T - Q^T\right).P_k^T.\dot{P}_k.Q \quad . \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Prvo pokažimo da izraz na lijevoj strani (2.34) ima limes u slaboj L^2 topologiji. Za svaki $f \in L^2\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ razmotrimo

$$\underbrace{\left\langle f,\, Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\rangle}_{\to\left\langle f,\, A - Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\rangle} - \underbrace{\left\langle f,\, Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q - Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\rangle}_{=\underbrace{\left\langle Q.f.Q^T,\, P_k^T.\dot{P}_k - P^T.\dot{P}\right\rangle}_{\to 0}} \qquad (2.35)$$

pa slijedi

$$Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q \rightharpoonup A - Q^T.P^T.\dot{P}.Q \quad \text{slabo u } L^2. \qquad (2.36)$$

Za desni dio jednakosti (2.34), kada $Q_k \to Q$ jako u L^2 tada

$$\begin{aligned}
&\left\|Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.\left(Q_k-Q\right) + \left(Q_k^T - Q^T\right).P_k^T.\dot{P}_k.Q\right\|_{L^1} \\
&\qquad \le \underbrace{\underbrace{\left\|Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.\left(Q_k-Q\right)\right\|_{L^1}}_{\le \underbrace{\left\|\dot{P}_k\right\|_{L^2}}_{\text{ograničeno}}\underbrace{\|(Q_k-Q)\|_{L^2}}_{\to 0}} + \underbrace{\left\|\left(Q_k^T - Q^T\right).P_k^T.\dot{P}_k.Q\right\|_{L^1}}_{\le \underbrace{\|(Q_k-Q)\|_{L^2}}_{\to 0}\underbrace{\left\|\dot{P}_k\right\|_{L^2}}_{\text{ograničeno}}}}_{\to 0} . \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Obzirom je izraz pod normom na lijevoj strani nejednakosti (2.34), prema (2.37) jednak

$Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q$ to slijedi da

$$Q_k^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q_k - Q^T.P_k^T.\dot{P}_k.Q \to 0 \quad \text{jako u } L^1. \tag{2.38}$$

Slaba topologija na L^1 je grublja od slabe topologije na L^2 i od jake topologije na L^1. Stoga obje konvergencije (2.36) i (2.38) vrijede i u slaboj topologiji na L^1. Ova, kao i svaka slaba topologija na Banachovom prostoru, je Hausdorffova, pa su limesi jednaki, tj. $A - Q^T.P^T.\dot{P}.Q = 0$, odnosno $A = Q^T.P^T.\dot{P}.Q$.

Do sada smo pokazali da $Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n$ ima točno jedno gomilište u slaboj L^2 topologiji i to upravo $Q^T.P^T.\dot{P}.Q$. Obzirom da za svaki podniz $k(n)$ također vrijedi $Q_{k(n)} \to Q$ jako u L^2 i $P_{k(n)} \rightharpoonup P$ to se isto može zaključiti da svaki podniz $Q_{k(n)}^T.P_{k(n)}^T.\dot{P}_{k(n)}.Q_{k(n)}$ ima točno jedno gomilište i to $Q^T.P^T.\dot{P}.Q$. Međutim, ako $Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n$ ne konvergira ka $Q^T.P^T.\dot{P}.Q$ postojao bi podniz kojem $Q^T.P^T.\dot{P}.Q$ nije gomilište. Iz prethodne dvije rečenice zaključujemo da $Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} Q^T.P^T.\dot{P}.Q$ u slaboj L^2 topologiji. □

Lema 17. *Neka $Q_n \to Q$ jako u $L^2(0,l;\, SO(3))$ i $P_n \to P$ jako u $\mathcal{W}$. Tada $I_T(Q_n, P_n) \to I_T(Q, P)$.*

Dokaz. U pretpostavkama stoji da su Q_n, Q, P_n i P elementi skupa $\mathcal{L}$ i $P_n \to P$ jako u $\mathcal{W}$, pa korištenjem (A.24) u dodatku A.10.2 slijedi

$$\left\|Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n\right\|_{L^2} = \left\|\dot{P}_n\right\|_{L^2} \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left\|\dot{P}\right\|_{L^2} = \left\|Q^T.P^T.\dot{P}.Q\right\|_{L^2}. \tag{2.39}$$

Iz leme 16 slijedi

$$Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} Q^T.P^T.\dot{P}.Q \text{ slabo u } L^2\left([0,l]\,;\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}\right) \tag{2.40}$$

Konvergencija norme (2.39) zajedno sa slabom konvergencijom (2.40) daje jaku konvergenciju (vidi propoziciju 67 u dodatku A.5)

$$Q_n^T.P_n^T.\dot{P}_n.Q_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} Q^T.P^T.\dot{P}.Q \text{ jako u } L^2\left([0,l]\,;\mathbb{R}^{3\times3}_{\text{skew}}\right). \tag{2.41}$$

Nakon što je pokazano (2.41), dalje iz definicije (2.14) slijedi $I_T(Q_{k(n)}, P_{k(n)}) \to I_T(Q, P)$. □

Lema 18. *Neka je F neprekidna na $\mathcal{L} = \mathcal{L} \times \{O\}$, kao u (2.13). Neka niz $(v_n, A_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (v, A, B) u $K_{\mathbb{R}^3}(O,l) \times SO(3)^2$ i $Q_n \to Q$ jako u $L^2(0,l;\, SO(3))$, uz $Q \in C[0,l] \cup \text{PST} \cup_{y\neq\|v\|} \text{HARMONIKA}_y$. Neka je J kao u (2.29). Tada za svaki $P \in L^2(0,l;\, \mathbb{R}^{3\times3})$, postoji niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka P u jakoj topologiji prostora $L^2(0,l;\, \mathbb{R}^{3\times3})$ i za koji vrijedi*

$$J[v, A, B, Q](P) \geq \limsup_{n\in\mathbb{N}} J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n).$$

Dokaz. Zaključak leme je trivijalan kada $P \notin \mathcal{W}_{A,B}$ ili $\int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} \neq v$, jer tada $J[v, A, B, Q](P) = +\infty$. Pretpostavimo stoga da smo u netrivijalnom slučaju, pa je $J[v, A, B, Q](P) = I_T(Q, P) - F(P.Q)$. Prema propoziciji 19 postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da za svaku četvorku (v_n, A_n, B_n, Q_n) koja je blizu (v, A, B, Q) u normi prostora $\mathbb{R}^3 \times SO(3)^2 \times \mathcal{L}$ postoji $P_n \in \mathcal{W}_{A_n,B_n}$, takav da $\int_0^l P_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = v_n$ i još

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{W}} \leq C \left(\|Q_n - Q\|_{L^1} + \|v_n - v\|_2 + \|A_n - A\|_2 + \|B_n - B\|_2 \right).$$

Zbog pretpostavki $A_n \to A$ i $B_n \to B$ u $SO(3)$, te $Q_n \to Q$ jako u $L^2(0, l; SO(3))$, time je zadan niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}$ takav da $P_n \to P$ jako u $\mathcal{W}$ i

$$J[v_n, A_n, B_n, Q_n](P_n) = I_T(Q_n, P_n) - F(P_n.Q_n).$$

Lema 17 daje $I_T(Q_n, P_n) \to I_T(Q, P)$. Osim toga, kako je navedeno u (2.13), a to je pretpostavka teorema 13, imamo $F(P_n.Q_n) \to F(P.Q)$. Zaključak leme slijedi temeljem

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} I_T(Q_n, P_n) - F(P_n.Q_n) = I_T(Q, P) - F(P.Q) = J[v, A, B, Q](P). \qquad \square$$

U nastavku često koristimo sljedeću mjeru kuta između dva vektora (vidi dodatak A.8):

$$\sphericalangle(a, b) = \arccos \frac{|a \cdot b\|}{\|a\| \, \|b\|} = \min \{\angle(a, b), \pi - \angle(a, b)\}.$$

Do kraja ovog poglavlja, kod norme vektora $\|a\|$ podrazumijevamo standardnu 2-normu, dok će kod matrica norma biti uvijek naznačena: $\|A\|_2$ je operatorska 2-norma.

Propozicija 19. *Neka je petorka* $(Q, A, B, v, P) \in \mathcal{L} \times SO(3)^2 \times K_{\mathbb{R}^3}(O, l) \times \mathcal{W}_{A,B}$ *tako da* $\int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$ *i* $Q \in C[0, l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y\neq\|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$. *Tada postoje konstante* $\kappa > 0$ *i* $r > 0$ *tako da za svaku četvorku* $(\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{v}) \in \mathcal{L} \times SO(3)^2 \times \mathbb{R}^3$ *takvu da* $\left\|\tilde{Q} - Q\right\|_{L^1} + \left\|\tilde{A} - A\right\|_2 + \left\|\tilde{B} - B\right\|_2 + \|\tilde{v} - v\| < r$ *postoji* $\tilde{P} \in \mathcal{W}_{\tilde{A},\tilde{B}}$ *takav da* $\int_0^l \tilde{P}.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} = \tilde{v}$ *i*

$$\left\|\tilde{P} - P\right\|_{W^{1,2}} \leq \kappa \left(\left\|\tilde{Q} - Q\right\|_{L^1} + \left\|\tilde{A} - A\right\|_2 + \left\|\tilde{B} - B\right\|_2 + \|\tilde{v} - v\| \right). \tag{2.42}$$

Dokaz. Dovoljno je iz pretpostavke $Q \in C[0, l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y\neq\|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$ zaključiti kako postoje $m_0 > 0$, u_1, $u_2 \in S_2$ takvi da $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle(u_1, u_2) > 0$ i izmjerivi skupovi E_1 i E_2 kao u (2.44), a zatim se pozvati na pomoćnu lemu 20.

Slučaj 1. Neka je $Q \in C\,[0,l]$. Zbog neprekidnosti P, tada je i $P.Q \in C\,[0,l]$. Direktno iz definicije 11 slijedi da u svakoj točki $a \in [0,l]$ postoji $\operatorname{ess\,lim}_a P.Q.\vec{\imath}$, odnosno $G_{P.Q.\vec{\imath}}(a)$ je jednočlan skup. Obzirom da $\|v\| < l$, to $P.Q.\vec{\imath}$ nije skoro svuda konstantne vrijednosti $\frac{\|v\|}{v}$. Drugim riječima, esencijalni limes nije baš uvijek jedan te isti za sve $a \in [0,l]$. Kada bi bilo

$$\overbrace{m\underbrace{\left\{t\,:\,P(t).Q(t).\vec{\imath}=\frac{v}{\|v\|}\right\}}_{=S_1}}^{>0}+\overbrace{m\underbrace{\left\{t\,:\,P(t).Q(t).\vec{\imath}=-\frac{v}{\|v\|}\right\}}_{=S_2}}^{>0}=l\,,$$

tada bi postojala barem jedna točka $t \in [0,l]$ čija bi svaka okolina $\mathcal{O}$ imala $m\,(\mathcal{O}\cap S_1) > 0$ i $m\,(\mathcal{O}\cap S_2) > 0$, što je kontradikcija s ranijim zaključkom da je $G_{P.Q.\vec{\imath}}(a)$ jednočlan skup. Mogućnost da postoji neki drugi $u \in S_2$, $u \neq \pm\frac{\|v\|}{v}$ tako da je $\operatorname{ess\,lim}_t P.Q.\vec{\imath}$ skoro svuda kolinearan sa u također otpada, jer se kosi sa $\int_0^l P.Q.\vec{\imath} = v$. Preostaje još samo mogućnost da postoje dva linearno nezavisno vektora $u_k \in S_2$ tako da $\operatorname{ess\,lim}_{a_k} P.Q.\vec{\imath} = u_k$ za neke točke a_k, $k = 1,2$. Zbog linearne nezavisnosti $\sphericalangle\,(u_1,u_2) = \varphi > 0$. Skupovi

$$E_i = \left\{x\,:\,\angle\left(P(x).Q(x).\vec{\imath},u_i\right) < \frac{\varphi}{9}\right\},\quad i=1,2;$$

tada su pozitivne mjere zbog formule (2.31) u definiciji 11 i činjenice da su metrike inducirane kutem i metrika nasljeđena sa $\mathbb{R}^3$ uniformno izomorfne na S_2 (vidi sličan primjer 76 na u dodatku A.9.3).

Slučaj 2. Neka je $Q \in \mathrm{PST}$. Po definiciji 11 tada postoji $t \in [0,l]$ tako da su neki nekolinearni g_1 i g_2 elementi skupa gomilišta $G_{Q.\vec{\imath}}(a)$. Obzirom da je $P \in \mathcal{W}$ neprekidna to će biti $u_k = P(t).g_k \in G_{P.Q.\vec{\imath}}(a)$. Zbog linearne nezavisnosti g_1 i g_2 to je

$$\sphericalangle\,(u_1,u_2) = \sphericalangle\,(P(t).g_1,P(t).g_2) = \sphericalangle\,(g_1,g_2) = \varphi > 0. \tag{2.43}$$

Isto kao u prethodnom slučaju, $u_k \in G_{P.Q.\vec{\imath}}(a)$ po definiciji garantira $m\left\{x\,:\,\angle\left(P(x).Q(x).\vec{\imath},u_k\right) < \frac{\varphi}{9}\right\} > 0$ za $k = 1,2$.

Slučaj 3. Neka je $Q \in \mathrm{HARMONIKA}_y$ za $y \neq \|v\|$. Zbog neprekidnosti $P \in \mathcal{W}$, jednako kao u (2.43), svi esencijalni skokovi u vrijednostima $P.Q.\vec{\imath}$ su istog iznosa kao kod $Q.\vec{\imath}$, što znači da je $P.Q \in \mathrm{HARMONIKA}_y$. Krivulja $\Gamma_{P.Q}$ ne može ocrtavati ravnu liniju jer bi po definiciji $\mathrm{HARMONIKA}_y$ početak i kraj krivulje tada bili udaljeni y, suprotno pretpostavkama $y \neq \|v\|$ i $\int_0^l P.Q.\vec{\imath} = v$. Slično kao u prvom slučaju preostaje još samo mogućnost da postoje dva linearno nezavisna vektora $u_k \in S_2$ tako da $\operatorname{ess\,lim}_{a_k} P.Q.\vec{\imath} = u_k$ za neke točke a_k, $k = 1,2$. Dalje zaključak slijedi kao u prvom slučaju.

Bilo je dakle dovoljno pronaći izmjerive skupove E_i koji zadovoljavaju (2.44). □

Postoji prostor da se zaključak prethodne propozicije, te povezani teoremi 12 i 13 proširе na odgovarajući širi skup TNB okvira Q van skupa $C\,[0,l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y \neq \|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$: dovoljno je osigurati da se za sve $P \in \mathcal{W}$ koji su od interesa mogu pronaći linearno neovisni vektori u_1 i u_2, te neki $m_0 > 0$ tako da vrijedi 2.44.

Lema 20. *Neka je petorka* $(Q, A, B, v, P) \in \mathcal{L} \times SO(3)^2 \times K_{\mathbb{R}^3}(O, l) \times \mathcal{W}_{A,B}$ *i* $\int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}} = v$, *još uz tehničke pretpostavke da postoje* $m_0 > 0$, u_1, $u_2 \in S_2$ *takvi da je* $\varphi \overset{\text{def}}{=} \sphericalangle\,(u_1, u_2) > 0$ *i izmjerivi skupovi*

$$E_i = \left\{ t \,:\, \angle\left(P(t).Q(t).\vec{\mathrm{i}},\, u_i\right) \leq \frac{\varphi}{9} \right\} \text{ tako da } m\,(E_i) > m_0, \quad \text{za } i = 1, 2. \tag{2.44}$$

Tada postoje konstante $\kappa > 0$ *i* $r > 0$ *tako da za svaku četvorku* $(\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{v}) \in \mathcal{L} \times SO(3)^2 \times \mathbb{R}^3$ *takvu da* $\left\|\tilde{Q} - Q\right\|_{L^1} + \left\|\tilde{A} - A\right\|_2 + \left\|\tilde{B} - B\right\|_2 + \|\tilde{v} - v\| < r$ *postoji* $\tilde{P} \in \mathcal{W}_{\tilde{A},\tilde{B}}$ *takav da* $\int_0^l \tilde{P}.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} = \tilde{v}$ *i (2.42), tj.*

$$\left\|\tilde{P} - P\right\|_{W^{1,2}} \leq \kappa \left(\left\|\tilde{Q} - Q\right\|_{L^1} + \left\|\tilde{A} - A\right\|_2 + \left\|\tilde{B} - B\right\|_2 + \|\tilde{v} - v\| \right).$$

Dokaz. Ispitivanjem toka funkcije može se pokazati da je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ funkcija $\varphi \mapsto \cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}$ rastuća i pozitivna. Zbog toga je $\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8} \leq \cos\frac{\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{16} \approx 0.004 \leq 1/200$.

Definirajmo $\tilde{E}_i = E_i \backslash \left(\left[0, \frac{m_0}{100}\right] \cup \left[l - \frac{m_0}{100}, l\right] \right)$. Tada je $m\left(\tilde{E}_i\right) > \frac{49}{50} m_0$. Prema prvom principu Johna Edensora Littlewooda (Royden, 1989, vidi 3.6), neformalno govoreći, izmjerivi skup je skoro konačna unija intervala. Preciznije prema propoziciji 69 u A.7, za zadani $\tilde{E}_i$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna unija intervala $U_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} I_{i,j}$ tako da $m\left(U_i \backslash \tilde{E}_i\right) + m\left(\tilde{E}_i \backslash U_i\right) < \varepsilon$. Zbog definicije (2.44), skupovi $\tilde{E}_i$ su međusobno disjunktni, pa se može zahtijevati i da U_i budu međusobno disjunktni (prvo postavimo duplo manji ε od konačno željenog, a potom zamijenimo U_2 sa $U_2 \backslash U_1$). Obzirom na poznati iznos $m\left(\tilde{E}_i\right) > \frac{49}{50} m_0$, odabirom $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right)$, zasigurno slijedi $m\,(U_i) \geq \frac{48}{50} m_0$. Štoviše, iz U_i se mogu izbaciti neki intervali i(li) dio nekog intervala koji je višak tako da se mjera U_i svede na $m\,(U_i) = \frac{48}{50} m_0$. Provedbom zadnje operacije na U_i mjera skupa $U_i \backslash \tilde{E}_i$ se smanjuje. Stoga za $i \in \{1, 2\}$, možemo naći brojeve $n_i \in \mathbb{N}$ i skupove $U_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} I_{i,j}$ sačinjenih kao konačne unije međusobno nepreklapajućih otvorenih intervala $I_{i,j}$, takve da $m\,(U_i) = \frac{48}{50} m_0$ i $\sum_{i=1}^{2} m\left(U_i \backslash \tilde{E}_i\right) < \frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right)$. Bez smanjenja općenitosti, još zahtijevamo da se U_i mogu podijeliti u dva jednaka dijela (ako treba renumerirano intervale i jedan od njih podijelimo na dva dijela pogodne veličine) na način da

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\tilde{n}_i} I_{i,j}\right) = \frac{m\,(U_1)}{2} = \frac{m\,(U_2)}{2} = m\left(\bigcup_{j=\tilde{n}_i+1}^{n_i} I_{i,j}\right) = \frac{24}{50} m_0.$$

Označimo sa $l_0 \in \langle 0, l/2]$ duljinu nakraćeg od spomenutih intervala $I_{i,j}$. Dakle, $m(I_{i,j}) \geq l_0$.

Dalje slijedimo ideju dokaza leme 8. Definiramo vektore jedinične duljine $b_2 = \frac{u_1 \times u_2}{\|u_1 \times u_2\|}$, $b_3 = b_2 \times u_2$ i $b_1 = b_2 \times u_1$. Kutevi među vektorima su

$$\{b_1, b_2\} \perp u_1,\ \{b_2, b_3\} \perp u_2,\ b_2 \perp \{b_1, b_3\} \quad \text{i} \quad \angle(b_1, b_3) = \angle(u_1, u_2) = \varphi. \tag{2.45}$$

Kasnije ćemo iskoristiti posljedicu da $b_1 \times u_1 = -b_2$. Označimo sa B_1 i B_2 antisimetrične matrice zadane djelovanjem na općeniti vektor x, $B_i.x = b_i \times x$, $i \in \{1, 2\}$. U (2.46) iskoristiti ćemo $\|B_i\|_2 = 1$. Koristimo standardne funkcije $\Lambda[I_{i,j}]$ koje izgledaju kao krovići visine 1 na intervalima $I_{i,j}$, a nula van tog intervala, kao na strani 18 u lemi 8. Definiramo

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \Lambda[I_{1,j}], \quad \lambda_2 = \sum_{j=\tilde{n}_1+1}^{n_1} \Lambda[I_{1,j}] \quad \text{i} \quad \lambda_3 = \sum_{j=1}^{\tilde{n}_2} \Lambda[I_{2,j}].$$

Ranije u dokazu osigurano je da se $I_{i,j}$ međusobno ne preklapaju, pa su nosači funkcija λ_k $(k = 1, 2, 3)$ međusobno disjunktni i mjere $\frac{24}{50} m_0$. Kasnije ćemo iskoristiti još $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_m(t)\right| \leq {}^{2}/_{l_0}$.

Definiramo funkciju $P_C \in \mathcal{W}_{\tilde{A},\tilde{B}}$ ovisnu o parametru $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, formulom (elementi V zadani su definicijom 98, a njihova svojstva iskazana su u propoziciji 100)

$$P_C(t) = \begin{cases} V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right](t).P(t), & t \in \left[0, \frac{m_0}{100}\right], \\ V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{B}.B^T, \mathrm{Id}\right](l-t).P(t), & t \in \left[l - \frac{m_0}{100}, l\right], \\ \exp(c_1\lambda_1(t)\, B_2).\exp(-c_2\lambda_2(t)\, B_1).\exp(c_3\lambda_3(t)\, B_2).P(t), & \text{inače.} \end{cases}$$

Dio u kojem ocijenjujemo $\|P_C - P\|_{\mathcal{W}}$. Operatorska 2-norma je invarijanta na rotacije kao u bilješki 72 pa na $\left[0, \frac{m_0}{100}\right]$ vrijedi $\|P_C - P\|_2 = \left\|V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right] - \mathrm{Id}\right\|_2 \leq d\left(V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right], \mathrm{Id}\right)$, gdje koristimo metriku prostora $SO(3)$, kao u (A.18) iz poglavlja A.9.3. Koristimo d_∞ metriku kao u bilješci 84. Treća tvrdnja propozicije 100 daje maksimum udaljenosti $d_\infty\left(V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right], \mathrm{Id}\right) \leq d(\tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}) = d(\tilde{A}, A)$ na segmentu $\left[0, \frac{m_0}{100}\right]$. Dakle,

$$\int_0^{\frac{m_0}{100}} \|P_C - P\|_2^2 = \int_0^{\frac{m_0}{100}} \underbrace{\left\|V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right] - \mathrm{Id}\right\|_2^2}_{\leq d(\tilde{A},A)^2} \leq \frac{m_0}{100}\, d\left(\tilde{A}, A\right)^2.$$

Zbog $\dot{P}_C - \dot{P} = \dot{V}\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right].P + V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right].\dot{P} - \dot{P}$ i $\left\|\dot{V}\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right].P\right\|_2 =$

$\left\|\dot{V}\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right]\right\|_2$, iz $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ te treće i pete tvrdnje propozicije 100 imamo

$$\int_0^{\frac{m_0}{100}} \left\|\dot{P}_C - \dot{P}\right\|_2^2 \leq 2 \underbrace{\int_0^{\frac{m_0}{100}} \left\|\dot{V}\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right]\right\|_2^2}_{\leq \frac{d^2(\tilde{A},A)}{m_0/100}} + 2\int_0^{\frac{m_0}{100}} \underbrace{\left\|\left(V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right] - \mathrm{Id}\right).\dot{P}\right\|_2^2}_{\leq d_\infty\left(V\left[\frac{m_0}{100}, \tilde{A}.A^T, \mathrm{Id}\right], \mathrm{Id}\right)^2 \left\|\dot{P}\right\|_2^2}$$

$$\leq 200\frac{d(\tilde{A},A)^2}{m_0} + 2d(\tilde{A},A)^2 \int_0^{\frac{m_0}{100}} \left\|\dot{P}\right\|_2^2 \leq d^2(\tilde{A},A)\left(\frac{200}{m_0} + 2\left\|P\right\|_{W^{1,2}}^2\right),$$

a slično je i na intervalu $\left[l - \frac{m_0}{100}, l\right]$. Primjetimo da je na $\left[\frac{m_0}{100}, l - \frac{m_0}{100}\right]$, osim na $U_1 \cup U_2$, $P_C - P = O$, pa

$$\int_{\frac{m_0}{100}}^{l-\frac{m_0}{100}} \left\|P_C - P\right\|_2^2 = \int_{U_1 \cup U_2} \left\|P_C - P\right\|_2^2.$$

Primijetimo još da na svakom $I_{i,j}$ vrijedi $P_C - P = (T - \mathrm{Id}).P$, gdje je T rotacija Id ili rotacija oblika $\exp\left(\pm c_k \lambda_m(t)\, B_n\right)$. U sljedećoj ocjeni koristimo Newton-Leibnitzovu formulu $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$ za $f(x) = \exp\left(x\, c_k \lambda_m(t)\, B_n\right)$

$$\left\|\exp\left(c_k \lambda_m(t)\, B_n\right) - \mathrm{Id}\right\|_2 = \left\|\int_0^1 c_k \lambda_m(t) B_n \exp\left(x\, c_k \lambda_m(t)\, B_n\right) \mathrm{d}x\right\|_2$$

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_m(t) \in [0,1] \\ \exp : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{skew}} \to SO(3) \end{array}\right\} \leq \int_0^1 \left|c_k\right| \left\|B_n\right\|_2 \mathrm{d}x = \left|c_k\right|. \tag{2.46}$$

Obzirom da su nosači različitih λ_m disjunktni i mjere $\frac{24}{50}m_0$ iz definicije P_C uz indekse $n(1) = n(3) = 2$, $n(2) = 1$ proizlazi

$$\int_{\frac{m_0}{100}}^{l-\frac{m_0}{100}} \left\|P_C - P\right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{3} \int_{U_1 \cup U_2} \underbrace{\left\|\exp\left(c_k \lambda_k(t)\, B_{n(k)}\right) - \mathrm{Id}\right\|_2^2}_{\{\text{prema (2.46)}\} \leq \left|c_k\right|^2} \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{3} \frac{24}{50} m_0 \left|c_k\right|^2 \leq \frac{m_0}{2}\left\|C\right\|_2^2,$$

$$\int_{\frac{m_0}{100}}^{l-\frac{m_0}{100}} \left\|P_C - P\right\|_2 = \left\{\begin{array}{c} \text{slično} \\ \text{kao iznad} \end{array}\right\} \leq \sum_{k=1}^{3} \frac{24}{50} m_0 \left|c_k\right| = \left\{\begin{array}{c} \text{za } x \in \mathbb{R}^3 \\ \left\|x\right\|_1 \leq \sqrt{3}\left\|x\right\|_2 \end{array}\right\} \leq \frac{42}{50} m_0 \left\|C\right\|_2.$$

S druge strane, na svakom $I_{i,j}$, slično kao što smo primijetili na $\left[0, \frac{m_0}{100}\right]$, vrijedi

$$\left\|\partial_t \exp\left(c_k \lambda_m(t)\, B_n\right)\right\|_2 = \left|c_k\right| \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_m(t)\right| \left\|B_n\right\|_2 \leq \left|c_k\right| \frac{2}{l_0}.$$

Dalje zbog oblika $P_C = T.P$ imamo $\left\|\dot{P}_C - \dot{P}\right\|_2^2 = \left\|\dot{T}.P + T.\dot{P} - \dot{P}\right\|_2^2 \leq 2\left\|\dot{T}\right\|_2^2 + \left\|T - \mathrm{Id}\right\|_2^2 \left\|\dot{P}\right\|_2^2$

i

$$\int_{\frac{m_0}{100}}^{l-\frac{m_0}{100}} \left\|\dot{P}_C - \dot{P}\right\|_2^2 \leq 2\sum_{k=1}^{3} \int\limits_{U_1\cup U_2} \underbrace{\left\|\partial_t \exp\left(c_k\lambda_k(t)\, B_{n(k)}\right)\right\|_2^2}_{\leq 4/l_0^2|c_k|^2} \mathrm{d}t$$

$$+ 2\underbrace{\max_{k=1,2,3} d_\infty\left(\exp(c_k\lambda_k B_{n(k)}), \mathrm{Id}\right)^2}_{=\max\limits_{k=1,2,3}|c_k|^2 \leq \|C\|_2^2} \int_0^l \left\|\dot{P}\right\|_2^2$$

$$\leq \frac{8}{l_0^2}\|C\|^2\,\frac{24}{50}m_0 + 2\,\|C\|_2^2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2 \leq \left(\frac{4m_0}{l_0^2} + 2\,\|P\|_{\mathcal{W}}^2\right)\|C\|_2^2$$

Sada možemo objediniti ocjene razlika $\|P_C - P\|_2$ i $\left\|\dot{P}_C - \dot{P}\right\|_2$ na segmentima $\left[0, \frac{m_0}{100}\right]$, $\left[\frac{m_0}{100}, l - \frac{m_0}{100}\right]$ i $\left[l - \frac{m_0}{100}, l\right]$ (pogodna norma je definirana u dodacima A.10.2 i A.10.3)

$$\|P_C - P\|_{W^{1,2}}^2 \leq \left(\tfrac{m_0}{2} + \tfrac{4m_0}{l_0^2} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2\right)\|C\|_2^2 + \left(\tfrac{m_0}{100} + \tfrac{200}{m_0} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2\right)\left(d(\tilde{A}, A)^2 + d(\tilde{B}, B)^2\right)$$

$$\leq \left(\frac{m_0}{2} + \frac{4m_0}{l_0^2} + \frac{200}{m_0} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2\right)\left(\|C\|_2^2 + d(\tilde{A}, A)^2 + d(\tilde{B}, B)^2\right) \tag{2.47}$$

$$\|P_C - P\|_{L^1} \leq \frac{m_0}{100}\left(d(\tilde{A}, A) + d(\tilde{B}, B)\right) + \frac{42}{50}m_0\,\|C\|_2 \leq m_0\left(d(\tilde{A}, A) + d(\tilde{B}, B) + \|C\|_2\right) \tag{2.48}$$

U glavnom dijelu dokaza, za četvorku $(\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{v})$ blizu (Q, A, B, v) ispitujemo funkciju $\Psi\left[\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}\right] : \mathbb{R}^3 \to \overline{K_{\mathbb{R}^3}(O, l)}$

$$\Psi\left[\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}\right](C) = \int_0^l P_C(t).\tilde{Q}(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t\,.$$

Želimo pokazati da se uz odgovarajući izbor parametra $C \in \mathbb{R}^3$ može postići $\Psi\left[\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}\right](C) = \tilde{v}$. Obzirom na teorem o inverznoj funkciji od interesa je pokazati da $\left\{\partial_i\Psi\left[\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B}\right]\right\}_{i=1}^3$ čini bazu prostora.

Neka je

$$\left\|\tilde{Q} - Q\right\|_{L^1} \leq \frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right), \quad d(\tilde{A}, A) < \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right), \tag{2.49}$$

$$d(\tilde{B}, B) < \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right), \quad \|C\| < \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right) \tag{2.50}$$

Tada iz prve nejednakosti u (2.48) i ocjene za $\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8} \leq \frac{1}{200}$ s početka dokaza ove leme

$$\|P_C - P\|_{L^1} \leq \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9} - \cos\frac{\varphi}{8}\right)\underbrace{\left(\frac{m_0}{100} + \frac{m_0}{100} + \frac{42m_0}{50}\right)}_{\leq m_0} \leq \frac{m_0}{2\cdot 10^4} \quad \text{i} \tag{2.51}$$

Obzirom na definiciju $P_C(t)$ možemo zaključiti da je $\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]\in C^\infty$. Parcijalne derivacije su oblika

$$\partial_i\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)=\pm\int_0^l\lambda_i\,B_k.P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}=\pm\int_{U_1\cup U_2}\lambda_i\,B_k.P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \tag{2.52}$$

gdje je predznak minus samo kod $i=2$, a odgovarajući $k=2,1,2$ kada $i=1,2,3$. Također smo iskoristili da je nosač λ_i podskup od $U_1\cup U_2$.

Sada pokušavamo formalno dokazati nešto poput (2.25) i (2.26). Koristiti ćemo

$$\left\|\int_0^l\lambda_1\,P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1\,P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|\le\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\underbrace{\left\|\lambda_1\,P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|}_{=|\lambda_1|}=\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\frac{m\left(I_{1,j}\right)}{2}=\frac{12}{50}m_0.$$

Zbog definicije E_i i $I_{i,j}$, nejednakosti trokuta i uvjeta koji rezultiraju sa (2.51) te prethodne nejednakosti

$$\cos\angle\left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1\,P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}},\,u_1\right)=\frac{\left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1\,P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}\right)\cdot u_1}{\left\|\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1\,P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}\right\|\underbrace{\|u_1\|}_{=1}}=$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\left(\int_{I_{1,j}\cap E_1}\lambda_1\left[P.Q+\left(P_C-P\right).Q+P_C.\left(Q-\tilde{Q}\right)\right].\vec{\mathrm{i}}\cdot u_1+\int_{I_{1,j}\setminus E_1}\lambda_1\,P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}\cdot u_1\right)}{\left\|\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1\,P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|}$$

$$\ge\frac{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\overbrace{\left(\int_{I_{1,j}\cap E_1}\lambda_1\,\cos\frac{\varphi}{9}\right)}^{\le\int_{I_{1,j}\cap E_1}\lambda_1\left(P.Q.\vec{\mathrm{i}}\cdot u_1\right)}\overbrace{-\left\|P_C-P\right\|_{\mathcal{L}}-\left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{\mathcal{L}}-m\left(U_1\setminus E_1\right)}^{\ge-3\frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)}}{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\left\|\lambda_1\,P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\|}$$

$$\{\text{zbog }\lambda_1\ge0\}\ge\frac{\cos\frac{\varphi}{9}\cancel{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1}}{\cancel{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}|\lambda_1|}}-\frac{\overbrace{\cos\frac{\varphi}{9}}^{\le1}\overbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}\setminus E_1}\lambda_1}^{\le m(U_1\setminus E_1)}}{\frac{12}{50}m_0}-\frac{3\frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)}{\frac{12}{50}m_0}$$

$$\ge\cos\frac{\varphi}{9}-\frac{\frac{4m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)}{\frac{12}{50}m_0}>\cos\frac{\varphi}{9}-\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)=\cos\frac{\varphi}{8}$$

Temeljem upravo pokazanog i leme 71 kada su ispunjeni uvjeti koji daju (2.51)

$$\angle\left(\partial_1\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C),b_1\right)=\angle\left(b_2\times\int_0^l\lambda_1P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}},\,b_2\times u_1\right)$$

$$\le\angle\left(\int_0^l\lambda_1P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}},\,u_1\right)<\arccos\cos\frac{\varphi}{8}=\frac{\varphi}{8}. \tag{2.53}$$

Dakle, dokazano je da (2.53) vrijedi i za $C=O$, odnosno $\angle\left(\int_0^l\lambda_1P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}},\,u_1\right)<\frac{\varphi}{8}$, pa

korištenjem nejednakosti trokuta za $\sphericalangle$ (propozicija 70 u dodatku A.8) unutar argumenta rastuće funkcije sinus (na $[0, \pi/2]$)

$$\underbrace{\sin \sphericalangle \Bigg(b_2, \overbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}}^{=\int_0^l \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}} \Bigg)}_{\leq \pi/2} \geq \sin \Bigg[\underbrace{\overbrace{\underbrace{\sphericalangle (b_2, u_1)}_{\overset{(2.45)}{=} \pi/2} - \underbrace{\sphericalangle \left(u_1, \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right)}_{\leq \varphi/8 < \pi/2}}^{\{\text{prop. } 70\} \leq \sphericalangle \left(b_2, \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right)}}_{>0} \Bigg] \geq \underbrace{\sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{8} \right]}_{=\cos \frac{\varphi}{8} \geq \cos \frac{\pi}{16}} \tag{2.54}$$

Dalje ćemo još u iskoristiti $\angle \left(u_1, \, P(t).Q(t).\vec{\mathrm{i}} \right) \leq \varphi/9$ za $t \in E_1$ pa obzirom da su u_1 i $P(t).Q(t).\vec{\mathrm{i}}$ jedinični vektori to je njihova udaljenost manja od kuta među njima: $\left\| u_1 - P(t).Q(t).\vec{\mathrm{i}} \right\|_2 \leq \varphi/9$, za sve $t \in E_1$. Nejednakost trokuta i monotonost integrala daje

$$\left\| \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right\| \geq \left\| \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \cap E_1} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right\| - \underbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \setminus E_1} \underbrace{\lambda_1}_{\in [0,1]} \underbrace{\left\| P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right\|}_{=1}}_{\leq m(U_1 \setminus E_1)}$$

$$\geq \underbrace{\| \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \cap E_1} \lambda_1 \, u_1 \|}_{=\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \cap E_1} \lambda_1} - \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \cap E_1} \lambda_1 \underbrace{\left\| u_1 - P.Q.\vec{\mathrm{i}} \right\|}_{\leq \varphi/9} - \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \cap E_1} \underbrace{\lambda_1}_{\leq 1} \underbrace{\left\| P.Q.\vec{\mathrm{i}} - P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \right\|}_{=\left\| (Q - \tilde{Q}).\vec{\mathrm{i}} \right\|} - m \left(U_1 \setminus E_1 \right)$$

$$\geq \underbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1}_{=m(U_1)/4 = \frac{12}{50} m_0} - \underbrace{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j} \setminus E_1} \lambda_1}_{\leq m(U_1 \setminus E_1)} - \underbrace{\frac{m(U_1)}{2} \underbrace{\frac{\varphi}{9}}_{\leq \frac{\pi}{18}}}_{\leq m(U_1)/11 \leq \frac{5}{50} m_0} - \underbrace{\left\| \tilde{Q} - Q \right\|_{\mathcal{L}}}_{\leq \frac{m_0}{100} \left(\cos \frac{\varphi}{9} - \cos \frac{\varphi}{8} \right)} - \underbrace{m \left(U_1 \setminus E_1 \right)}_{\leq \frac{m_0}{100} \left(\cos \frac{\varphi}{9} - \cos \frac{\varphi}{8} \right)}$$

Sjetimo se da smo već u (2.51) koristili $\frac{1}{100} \left(\cos \frac{\varphi}{9} - \cos \frac{\varphi}{8} \right) \leq \frac{1}{10^4}$ pa u nastavku prethodnog računa možemo zaključiti

$$\| \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \| \geq \left(\frac{12}{50} - \frac{5}{50} - \frac{3}{10^4} \right) m_0 \geq \frac{6}{50} m_0. \tag{2.55}$$

Koristeći (2.54) i (2.55) možemo zaključiti

$$\begin{aligned} \left\| \partial_1 \Psi \left[\tilde{Q}, \tilde{A}, \tilde{B} \right] (O) \right\| &= \| b_2 \times \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \| \\ &= \underbrace{\sin \sphericalangle \Bigg(b_2, \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \Bigg)}_{\geq \cos \frac{\pi}{16} \approx 0.98} \underbrace{\| b_2 \|}_{=1} \underbrace{\| \sum_{j=1}^{\tilde{n}_1} \int_{I_{1,j}} \lambda_1 \, P.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}} \|}_{\geq \frac{6}{50} m_0} \geq \frac{1}{9} m_0. \end{aligned}$$

Dalje ćemo trebati sljedeću ocjenu koja se dobije uz pomoć (2.51)

$$\left\|\partial_1\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)-\partial_1\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O)\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{\tilde{n}_1}\int_{I_{1,j}}\lambda_1 B_2.\left(P_C-P\right).\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}\right\|\leq\|P_C-P\|_{L^1}<\frac{m_0}{10^4}.$$

Gotovo identično kao u prethodnom računu (a slično je računato u lemi 8) može se izračunati za ostale $i\in\{1,2,3\}$

$$\angle\left(\partial_i\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C),b_i\right)<\frac{\varphi}{8},\qquad\left\|\partial_i\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O)\right\|>\frac{m_0}{9},\tag{2.56}$$

$$\left\|\partial_i\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C)\right\|\geq\underbrace{\left\|\partial_i\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|}_{>\frac{m_0}{9}}-\underbrace{\left\|\partial_i\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C)-\partial_i\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|}_{\leq\|P_C-P\|_{L^1}<\frac{m_0}{10^4}}>\frac{m_0}{10}.\tag{2.57}$$

Za $k=1,2,3$ koristimo oznake $w_k=\partial_k\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)$ i $a_k=\|w_k\|\,b_k$ te (2.57) pa razaznajemo da $\|a_k\|=\|w_k\|>\frac{m_0}{10}$. Zbog toga što su iste duljine, možemo reći da je razlika među vektorima manja od duljine luka kružnice radijusa $\|w_k\|$ koji ih spaja:

$$\|a_k-w_k\|\leq\|w_k\|\angle\left(w_k.a_k\right)=\|w_k\|\angle\left(\partial_k\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C),b_k\right)\overset{(2.56)}{<}\frac{\varphi}{8}\|w_k\|.\tag{2.58}$$

Iskoristimo dobro poznatu formulu za vrijednost determinante preko mješovitog umnoška vektora. Apsolutna vrijednost determinante neće se promijeniti ako zamijenimo poredak stupaca u matrici. Iskoristimo distributivnost skalarnog i vektorskog umnoška, nejednakost trokuta te prethodno dobivene ocjene

$$\begin{aligned}\left|\det\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\right|&=|w_2\cdot(w_1\times w_3)|\geq|a_2\cdot(w_1\times w_3)|-\underbrace{|(a_2-w_2)\cdot(w_1\times w_3)|}_{\overset{(2.58)}{<}\frac{\varphi}{8}\|w_2\|\|w_1\|\|w_3\|}\\&\geq|a_2\cdot(a_1\times w_3)|-\underbrace{|a_2\cdot((a_1-w_1)\times w_3)|}_{\overset{(2.58)}{<}\|w_2\|\frac{\varphi}{8}\|w_1\|\|w_3\|}-\frac{\varphi}{8}\prod_{k=1}^{3}\|w_k\|\\&\geq\underbrace{|a_2\cdot(a_1\times a_3)|}_{=\prod_{k=1}^{3}\|w_k\||b_2\cdot(b_1\times b_3)|}-\underbrace{|a_2\cdot(a_1\times(a_3-w_3))|}_{\overset{(2.58)}{<}\|w_2\|\|w_1\|\frac{\varphi}{8}\|w_3\|}-2\frac{\varphi}{8}\prod_{k=1}^{3}\|w_k\|\\&\geq\prod_{k=1}^{3}\|w_k\|\left(|b_2\cdot(b_1\times b_3)|-\frac{3\varphi}{8}\right)\overset{(2.57)}{>}\frac{m_0^3}{10^3}\left(|b_2\cdot(b_1\times b_3)|-\frac{3\varphi}{8}\right).\end{aligned}$$

Koristeći samo $\|b_k\|=1$, $b_2\perp\{b_1,b_3\}$ i $\angle(b_1,b_3)=\varphi$ iz (2.45), te formule za skalarni i vektorski umnožak preko kuta među vektorima može se zaključiti $|b_2\cdot(b_1\times b_3)|=\|b_2\|\,\|b_1\times b_3\|=\sin\varphi$. Ispitivanje toka funkcije sinus daje $\frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x$, za $x\in[0,\pi/2]$,

pa je $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$. Zbog toga se prethodni izračun determinante može zaključiti sa

$$\left|\det \nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\right| > \frac{m_0^3}{10^3}\underbrace{\left(\frac{2}{\pi}-\frac{3}{8}\right)}_{\approx 0.26}\varphi > \frac{m_0^3}{10^3}\frac{\varphi}{4}. \tag{2.59}$$

Determinanta (2.59) je umnožak singularnih vrijednosti matrice pa za najmanju $\sigma_{\min}$, srednju σ_{mid} i najveću $\sigma_{\max}$ singularnu vrijednost matrice $\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)$ vrijedi

$$\sigma_{\min} = \frac{\left|\det \nabla\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C)\right|}{\sigma_{\text{med}}\sigma_{\max}} \geq \frac{\left|\det \nabla\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C)\right|}{\sigma_{\max}^2} = \frac{\left|\det \nabla\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C)\right|}{\|\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\|_2^2}. \tag{2.60}$$

Krovići λ_i su visine 1 s nosačem mjere $\frac{24}{50}m_0$ tako da je $\int_{U_1\cup U_2}\lambda_i = \frac{12}{50}m_0$, a $\left\|B_k.P_C(t).\tilde{Q}(t).\vec{\mathrm{i}}\right\| \leq 1$ pa se iz (2.52) dobije

$$\left\|\partial_i\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\right\| \leq \int_{U_1\cup U_2}\lambda_i\left\|B_k.P_C.\tilde{Q}.\vec{\mathrm{i}}\right\| \leq \frac{12}{50}m_0 < \frac{m_0}{4},$$

gdje su $k = 2,1,2$ kada $i = 1,2,3$. Prethodna ocjena pomaže razlučiti da

$$\|\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{3}\|\partial_i\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\|^2 < \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{4}m_0\right)^2 = \frac{3m_0^2}{16} < \frac{m_0^2}{4}$$

pa korištenjem (2.59) i (2.60) slijedi

$$\|\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}} \leq \frac{\|\nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\|_2^2}{\left|\det \nabla\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)\right|} < \frac{\frac{\cancel{m_0^2}}{\cancel{4}}}{\frac{m_0^{\cancel{3}}}{10^3}\cdot\frac{\varphi}{\cancel{4}}} = \frac{10^3}{m_0\varphi} \overset{\text{def}}{=} \lambda. \tag{2.61}$$

U glavnom dijelu teorema smo pokazali da za svaku trojku $\left(\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right) \in \mathcal{L}\times SO(3)^2$ koja zadovoljava (2.49) i (2.50), slijedi kako je $\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]$ glatka funkcija, takva da za svaki $C \in K_{\mathbb{R}^3}\left(O, \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)\right)$ vrijedi (2.61). Direktno iz teorema 56 (o inverznoj funkciji) u A.1 slijedi da za

$$r = \frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\lambda^{-1}\right\} \tag{2.62}$$

na $K\left(\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O), r\right)$ postoji funkciji $\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]$ inverzna funkcija koju nazovimo $\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]^{-1}$ te

$$\overbrace{\|C\|}^{=\|C-O\|} \leq \lambda\left\|\tilde{v}-\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|, \forall\tilde{v} = \Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](C) \in K\left(\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O), r\right). \tag{2.63}$$

Kada je

$$\left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{L^1}+\left\|\tilde{A}-A\right\|_2+\left\|\tilde{B}-B\right\|_2+\|\tilde{v}-v\|<\min\left\{r,\frac{m_0}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)\right\} \quad (2.64)$$

biti će zadovoljene ocjene za trojku $\left(\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right)$ postavljene u (2.49) i (2.50) i stoga će vrijediti upravo spomenuti zaključci teorema o inverznoj funkciji. Nadalje, za svaku četvorku $\left(\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B},\tilde{v}\right)$ vrijedi

$$\left\|\tilde{v}-\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|\leq\left\|\tilde{v}-\underbrace{\Psi[Q,A,B](O)}_{=\Phi_Q(P)=v}\right\|+\left\|\underbrace{\Psi\left[Q,A,B\right](O)}_{=v}-\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|. \quad (2.65)$$

Posebno ocijenimo udaljenost između v i $\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O)$

$$\begin{aligned}\left\|v-\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O)\right\| &= \left\|\int_0^l P.Q.\vec{\imath}-P_O.Q.\vec{\imath}+P_O.Q.\vec{\imath}-P_O.\tilde{Q}.\vec{\imath}\right\| \\ \leq \int_0^l \left\|P_O.\left(Q-\tilde{Q}\right).\vec{\imath}\right\|+\int_0^l\left\|\left(P-P_O\right).Q.\vec{\imath}\right\| &\leq \int_0^l\left\|\tilde{Q}(t)-Q(t)\right\|_2\mathrm{d}t+\int_0^l\|P_O(t)-P(t)\|_2\,\mathrm{d}t \\ \leq \left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{L^1}+\|P_O-P\|_{L^1} &\overset{(2.48)}{\leq} \left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{L^1}+\frac{m_0}{100}\left(d(\tilde{A},A)+d(\tilde{B},B)\right). \quad (2.66)\end{aligned}$$

Objedinjavanjem (2.65) i (2.66) slijedi ocjena razlike vektora

$$\left\|\tilde{v}-\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|\leq\|\tilde{v}-v\|+\left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{L^1}+\frac{m_0}{100}\left(d(\tilde{A},A)+d(\tilde{B},B)\right). \quad (2.67)$$

Bez smanjenja općenitosti mogli smo od početka uzeti $m_0\leq 100$, pa bi uz r naveden u (2.62) uvjeti (2.64) primjenjeni na (2.67) pokazali da $\left\|\tilde{v}-\Psi[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}](O)\right\|\leq r$, odnosno $\tilde{v}\in K\left(\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](O),\,r\right)$. Uzmimo dakle da je tako, pa je dobro definiran $C=\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]^{-1}(\tilde{v})$. Iz (2.62) i (2.63) možemo razlučiti da tada

$$\overbrace{\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right]^{-1}(\tilde{v})}^{C=}\in K_{\mathbb{R}^3}\left(O,\,\frac{1}{100}\left(\cos\frac{\varphi}{9}-\cos\frac{\varphi}{8}\right)\right). \quad (2.68)$$

Sada (2.63) uz (2.67) i (BSO) pretpostavka $m_0\leq 100$ daje

$$\|C\|_2\leq\lambda\left(\|\tilde{v}-v\|+\left\|\tilde{Q}-Q\right\|_{L^1}+d(\tilde{A},A)+d(\tilde{B},B)\right). \quad (2.69)$$

Za C dan u (2.68) i $\tilde{P}=P_C$ biti će $\tilde{v}=\Psi\left[\tilde{Q},\tilde{A},\tilde{B}\right](C)=\int_0^l P_C(t).\tilde{Q}(t).\vec{\imath}\,\mathrm{d}t=\Phi_{\tilde{Q}}(\tilde{P})$ i $\tilde{P}\in\mathcal{W}_{\tilde{A},\tilde{B}}$. Na kraju, korištenjem (2.47) i (2.69) dobijemo sljedeću nejednakost, koja je

ekvivalentna sa (2.42) (vidi primjer 76 u dodatku A.9.3)

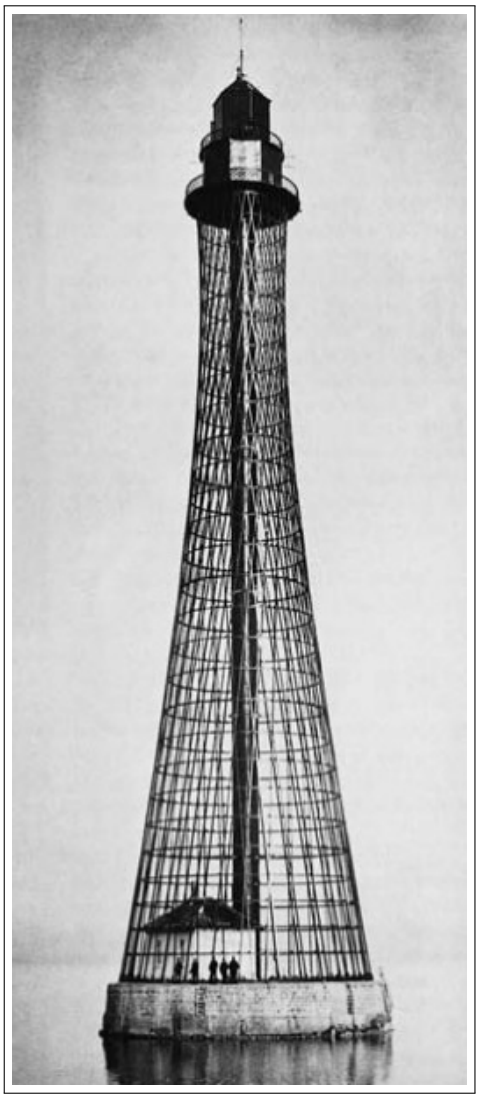
$$\|P_C - P\|_{W^{1,2}} \leq \sqrt{\frac{m_0}{2} + \frac{4m_0}{l_0^2} + \frac{200}{m_0} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2}\,\Big(\|C\| + d(\tilde{A}, A) + d(\tilde{B}, B)\Big)$$
$$\leq \sqrt{\frac{m_0}{2} + \frac{4m_0}{l_0^2} + \frac{200}{m_0} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2}\,\Big(\lambda\|\tilde{v} - v\| + \lambda\,\Big\|\tilde{Q} - Q\Big\|_{L^1} + (\lambda + 1)\,\Big(d(\tilde{A}, A) + d(\tilde{B}, B)\Big)\Big)$$
$$\leq (\lambda + 1)\sqrt{\frac{m_0}{2} + \frac{4m_0}{l_0^2} + \frac{200}{m_0} + 2\,\|P\|_{W^{1,2}}^2}\,\Big(\|\tilde{v} - v\| + \Big\|\tilde{Q} - Q\Big\|_{L^1} + d(\tilde{A}, A) + d(\tilde{B}, B)\Big). \quad \square$$

3. Varijacijski model stabilnosti stenta

U prvom dijelu razmatrali smo ravnotežni varijacijski problem deformacije jednog štapa koji zadovoljava neke uvjete na krajevima, pod utjecajem konzervativne sile. U ovom poglavlju zanima nas utjecaj konzervativne sile na ravnotežni položaj posebne strukture sastavljene od više štapova koji su međusobno povezani. Tu posebnu strukturu nazivamo model stenta, gdje štapovi čine mrežicu u obliku cjevčice koja nije nigdje učvršćena — što odgovara nekim primjenama medicinskog uređaja istog naziva *stent* koji se koristi u invazivnoj radiologiji.

Na fotografiji u okviru 3.1 prikazana je maketa jednog tipa stenta, gdje možemo prepoznati nekoliko kružnih zavojnica s gotovo uniformnim profilom koje tvore zaobljenu mrežu s otvorima u obliku romba. Za potrebe ovog modela važno je prepoznati mjesta spojeva, u kojoj se *žbice* zavojnice na neki način prožimaju, odnosno spajaju. Te točke koje ćemo nazivati vrhovi stenta, na fotografiji se ujedno mogu prepoznati kao vrhovi savinutih (idealiziranih) rombova koji tvore otvore u mreži stenta. Mreža stenta određuje koji su vrhovi povezani, a to svojstvo povezanosti dva vrha nazivati ćemo bridom. Odmah možemo razlučiti dvije značajke stenta: strukturu povezanosti vrhova i bridova, te položaj u prostoru. Deformacijom se mijenja položaj u prostoru, ali struktura povezanosti ostaje ista.

Okvir 3.1.: Izložak Anatomskog muzeja Sveučilišta u Baselu: maketa jednog tipa stenta u krvnoj žili. Izvor: Wikipedia Commons. Autor fotografije: Mattes.



Okvir 3.2.: Svjetionik Stanislav-Adzhyhol visok 64 metra izgrađen je 1911., a dizajnirao ga je 1910. godine svestrani ruski inženjer, znanstvenik i arhitekt Vladimir Grigoryevich Shukhov. Čelične šipke čine rešetkastu strukturu koja je učvršćena na kružnom temelju. Izvor: Wikipedia (preuzeto iz Vestnik AN SSSR, 1924). Autor fotografije nepoznat.

Koja je specifičnost stenta, kao posebne strukture štapova? Općenita struktura međusobno spojenih štapova može biti učvršćena i(li) ukrućena u pojedinim točkama. Na primjer, svjetionik prikazan na fotografiji u okviru 3.2 učvršćen je u temeljima. Sa druge strane, kod stenta koji se širi unutar krvne žile, niti jedna točka nije apsolutno učvršćena. Upravo će navedeno svojstvo stenta omogućiti rezultat stabilnosti za stent. Za općenitu strukturu rezultat stabilnosti ostati će još uvijek nedostupan. Nadalje, i kod stenta i općenito zasad je nedostupan rezultat jedinstvenosti. Dapače, u nekim primjerima pokazano je da nelinearni elastični model ima više različitih rješenja, vidi (Ciarlet, 1988, poglavlje 5.8). Međutim, kada sila djeluje okomito na središnju liniju strukture, kao u primjenama kod stenta, intuicija ukazuje da bi rješenje ipak trebalo biti jedinstveno. Zbog toga postoji nada da bi se u budućnosti u nekim slučajevima ipak mogao dobiti rezultat jedinstvenosti rješenja strukture.

Glede rezultata egzistencije rješenja za naš model, valja primijetiti da se stent vrlo često proizvodi od jednog valjkastog komada metala, preciznim izrezivanjem “rupa” (to je slučaj kod stenta na slici 3.1). Tada je jasno da inicijalni položaj štapova u stentu zadovoljava uvjete povezanosti, a to se može iskoristiti da se pokaže nepraznost prostora u kojem se vrši minimizacija funkcionala energije. Ovo svojstvo nepraznosti dalje omogućuje rezultat egzistencije rješenja za problem stabilnosti stenta. Za općenitu stukturu, poput svjetionika na slici 3.2, štapovi mogu biti zasebno proizvedeni u tvornici, a zatim transportirani na mjesto gradnje i sastavljeni u jednu cjelinu (strukturu) od pojedinačnih dijelova (šipki). Nepažljivo planiranje ili neprecizna proizvodnja pojedinih štapova može prouzrokovati da je na kraju nemoguće iz proizvedenih dijelova sastaviti planiranu strukturu koja zadovoljava postavljene zahtjeve povezanosti. Dakle, u praksi rezultat da skup štapova može zadovoljiti zadane uvjete povezanosti može biti netrivijalan. Efektivno, kod općenite strukture štapova potrebno je dodatno opravdati pretpostavku nepraznosti prostora minimizacije, koja je uvjet za postojanje minimizatora.

Struktura ovog poglavlja je sljedeća: u prva dva odjeljka razmatramo sasvim općenitu strukturu štapova, a kasnije strukturu specijaliziramo u stent. Zadnji odjeljak obrađuje svojstva sile u primjenama.

3.1. Općenita struktura štapova

U ovom odjeljku promatramo M povezanih nelinearnih hiperelastičnih štapova opisanih u prvom poglavlju, a čija je veza dana na sasvim općenit način. Referentna konfiguracija štapa m čija je duljina l_m, u oznaci $\Psi_{m,h} : D_m \to \mathbb{R}^3$, gdje je $D_m = [0, l_m] \times S_m$ i $S_m \subseteq \mathbb{R}^2$, može se zadati pomoću TNB okvira $Q_m \in L^1(0, l_m; SO(3))$, te točke $T_m \in \mathbb{R}^3$ tako da

$$\Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) = T_m + \int_0^t Q_m(\tau).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\tau + h\xi\, Q_m(t).\vec{\mathrm{j}} + h\zeta\, Q_m(t).\vec{\mathrm{k}} \quad t \in [0, l_m]\,,\ (\xi,\zeta) \in S_m. \tag{3.1}$$

Kako je već dano naslutiti svaki štap m može imati vlastitu duljinu l_m i vlastiti profil presjeka S_m, pa prema tome i domenu D_m. Prostor $L^1(0, l_m; SO(3))$ označimo sa $\mathcal{L}_m$ kao na stranici 13 i u dodatku A.10.2. Središnja linija štapa m odgovara usmjerenoj krivulji sa jediničnom parametrizacijom

$$\gamma_m(t) = T_m + \int_0^t Q_m(\tau).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\tau \quad .$$

Na neki način, možemo reći da je struktura štapova u referentnom položaju zadana s dvije m-torke $T = (T_1, \ldots, T_M) \in \mathbb{R}^{3\times M}$ i $Q = (Q_1, \ldots, Q_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$.

Nakon deformacije isti štap m zauzima položaj zadan preslikavanjem $\varphi_{m,h} : D_m \to \mathbb{R}^3$, koje se može iskazati uz pomoć TNB okvira $R_m \in \mathcal{L}_m$, te točke $V_m \in \mathbb{R}^3$ tako da

$$\varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta) = V_m + \int_0^t R_m(\tau).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\tau + h\xi\, R_m(t).\vec{\mathrm{j}} + h\zeta\, R_m(t).\vec{\mathrm{k}} \quad t \in [0, l_m]\,,\ (\xi,\zeta) \in S_m. \tag{3.2}$$

Dakle za početak, možemo smatrati da je deformacija opisana također s dvije m-torke $V = (V_1, \ldots, V_M) \in \mathbb{R}^{3\times M}$ i $R = (R_1, \ldots, R_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$. Kasnije ćemo još zahtijevati da deformacija mora zadovoljiti neke uvjete povezanosti strukture.

Ponašanje svakog pojedinog štapa pod opterećenjem može se propisati minimizacijskom zadaćom sličnom zadaći Ⓣ (vidi str. 12). Pri tome štapovi mogu imati različita materijalna svojstva (kao i presjek) što se uzima u obzir u definiciji funkcionala $I_m : \mathcal{L}_m \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$, gdje je $\mathfrak{U} \supseteq \mathcal{W}_m$ neki "univerzalni" skup. I_m daje pohranjenu unutarnju energiju prili-

kom deformacije štapa m iz položaja sa TNB okvirom Q_m u položaj sa TNB okvirom $R_m = P_m.Q_m$, slično kao u (2.5)

$$I_m(Q_m, P_m) = \begin{cases} \left\| Q_m^T.P_m^T.\dot{P}_m.Q_m \right\|_{(m)}^2 & P \in \mathcal{W}_m, \\ +\infty, , & P \notin \mathcal{W}_m. \end{cases} \tag{3.3}$$

gdje je $\mathcal{W}_m = W^{1,2}(0, l_m; SO(3))$ kao u dodatku A.10.3 i

$$\|A\|_{(m)}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_m} \underset{m}{\mathtt{Q}_2}(s, A(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{za } A \in W^{1,2}\left(0, l_m; \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right).$$

Profil presjeka S_m i fizikalna svojstva štapa m koriste se prilikom tvorbe kvadratne forme $\underset{m}{\mathtt{Q}_2}$ kao što je naznačeno u okviru 2.3 na stranici 10. Za daljnja razmatranja važno je da, slično kao u (2.6), postoje konstante $K_1 > 0$ i $K_2 \in \mathbb{R}$ takve da za svaku odabranu matričnu normu $\|\,.\,\|_{(m)}$, gdje je m iz nekog konačnog skupa indeksa, vrijedi

$$K_1 \int_0^l \|A(s)\|^2\, \mathrm{d}s \leq \|A\|_{(m)}^2 \leq K_2 \int_0^l \|A(s)\|^2\, \mathrm{d}s, \qquad \forall m \in \{1, \ldots, M\}. \tag{3.4}$$

Simbol $\|\cdot\|$ unutar znaka integracije označava proizvoljnu matričnu normu. Prethodna nejednakost biti će ispunjena kada je svaka kvadratna forma $\underset{m}{\mathtt{Q}_2}$ pozitivno definitna.

Struktura se promatra kao zatvoreni sustav, koji u stabilnom položaju minimizira ukupnu energiju

$$E_{\bar{\mathcal{S}}}(T, V, Q, P) = \sum_{m=1}^{M} I_m(Q_m, P_m) - F_{\bar{\mathcal{S}}}(T, V, Q, P) \tag{3.5}$$

gdje je $T = (T_1, \ldots, T_M) \in \mathbb{R}^{3\times M}$, $V = (V_1, \ldots, V_M) \in \mathbb{R}^{3\times M}$, $Q = (Q_1, \ldots, Q_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$, $P = (P_1, \ldots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Obzirom da je problem minimizacijski, definicija (3.3) implicira da je dovoljno promatrati $P_m \in \mathcal{W}_m \subset \mathcal{L}_m$. Obzirom na $R_m = P_m.Q_m$ i zbog oblika (3.5) u kojoj se R_m javlja preko P_m nadalje ćemo deformaciju strukture zadavati ne preko R, već preko $P = (P_1, \ldots, P_M)$.

Sila f_m koja uzrokuje deformaciju štapa s parametrom debljine h_m može biti vlastita svakom štapu m (usporedi sa okvirom 2.4 na strani 11). Sa $F_{\bar{\mathcal{S}}}(T, V, Q, P)$ označimo rad sile koja je rezultirala deformacijom strukture štapova, dakle zbog koje je m-ti štap iz referentnog položaja (3.1) prešao u deformirani položaj (3.2). Slično kao u prethodnom poglavlju, funkcional $F_{\bar{\mathcal{S}}} : \mathbb{R}^{3\times M} \times \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \to \mathbb{R}$ nastaje temeljem potencijala konzervativne sile. Npr. $F_{\bar{\mathcal{S}}}$ se može tvoriti integracijom potencijala konzervativne sile po svim materijalnim točkama svih M štapova. Kako bi uspostavili glavne rezultate ovog poglavlja, zahtjevati ćemo određenu vrstu neprekidnosti i ograničenosti od $F_{\bar{\mathcal{S}}}$, slično kao u (2.12) i (2.13). Ti zahtjevi istaknuti su u teoremu 23. U odjeljku 3.6 pokazati ćemo

da se spomenuti zahtjevi na $F_{\bar{\mathcal{S}}}$ mogu zadovoljiti u nekim praktičnim primjenama. Obzirom da namjeravamo minimizirati (3.5) i zbog oblika u (3.3), zapravo nam je nevažno kako se $F_{\bar{\mathcal{S}}}$ dalje ponaša za $P \in \prod_{m=1}^{M} (\mathcal{L}_m \backslash \mathcal{W}_m)$.

Važno svojstvo strukture štapova, po kojem se ona razlikuje od skupa pojedinačnih štapova, je njihova međuovisnost, odnosno veza između štapova. Općenito, povezanost se može zapisati jednadžbom

$$H_{\bar{\mathcal{S}}}(T, V, Q, P) = 0, \quad \text{gdje je } H_{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^{3\times M} \times \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Osnovom do sada izloženog prirodno dolazimo do sljedećih oznaka i zapisa problema strukture štapova.

Definicija 21. *Struktura štapova* je uređena trojka $\bar{\mathcal{S}} = \left((l_m)_{m=1}^{M}, E_{\bar{\mathcal{S}}}, H_{\bar{\mathcal{S}}}\right)$, gdje je M broj štapova u stentu, l_m duljina m-tog štapa, $H_{\bar{\mathcal{S}}}$ kao u (3.6) uvjeti koji povezuju referentni položaj i deformaciju strukture štapova, a $E_{\bar{\mathcal{S}}}$ kao u (3.3), (3.4) i (3.5), funkcional energije strukture štapova $\bar{\mathcal{S}}$ čija je referentna konfiguracija (T, Q) pod deformacijom (V, P). *Referentna konfiguracija strukture* štapova $\bar{\mathcal{S}}$ je uređeni par $(T, Q) \in \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$, a njena *deformacija* je svaki uređeni par $(V, P) \in \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ koji zadovoljava (3.6).

U definiciji 21 ne traži se da referentna konfiguracija zadovoljava (3.6) kako bi model mogao obuhvatiti strukture sa spregnutim štapovima, o čemu je bilo riječi u uvodu na str. 44. Primjetimo da po definiciji, struktura štapova ne sadrži u sebi referentnu konfiguraciju (treba je posebno specificirati), a sadrži sile i energetski odziv materijala. Ova definicija je prilagođena kasnijem istraživanju stabilnosti, gdje će se promatrati promjene deformacija koje su rezultat niza referentnih konfiguracija uz zadane duljine štapova, silu i unutarnju energiju. Temeljni zadatak je riješiti sljedeći problem:

Problem 22. Za zadanu strukturu štapova $\bar{\mathcal{S}} = \left((l_m)_{m=1}^{M}, E_{\bar{\mathcal{S}}}, H_{\bar{\mathcal{S}}}\right)$ i njenu referentnu konfiguraciju (T, Q), pronaći deformacije (V, P) koje minimiziraju $E_{\bar{\mathcal{S}}}$ iz (3.5).

3.2. Postojanje rješenja zadaće strukture štapova

Teorem 23. *Neka je (T, Q) referentni položaj strukture štapova $\bar{\mathcal{S}} = \left((l_m)_{m=1}^M, E_{\bar{\mathcal{S}}}, H_{\bar{\mathcal{S}}}\right)$ i neka vrijedi:*

1. *funkcional $H^{[T,Q]} \stackrel{\text{def}}{=} H_{\bar{\mathcal{S}}}(T, \,.\,, Q, \,.\,) : \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ je*
   - *neprekidan funkcional u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i*
   - *takav da jednadžba $H^{[T,Q]}(\,.\,,\,.\,) = 0$ ima neprazan prostor rješenja $\mathfrak{V} \subset \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$, a*
2. *funkcional $F^{[T,Q]} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\bar{\mathcal{S}}}(T, \,.\,, Q, \,.\,) : \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ koji se javlja u (3.5) je*
   - *neprekidan funkcional u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i*
   - *takav da postoje realni brojevi c_1, c_2, c_3 svi veći od nula, te $0 < \alpha < 2$ i $\beta > 0$ takvi da za svaki $\prod_{m=1}^{M} V_m \times \prod_{m=1}^{M} P_m \in \mathfrak{V}$ vrijedi*

$$F^{[T,Q]}(\prod_{m=1}^{M} V_m, \prod_{m=1}^{M} P_m) \leq c_1 + c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^{\alpha} - c_3 \sum_{m=1}^{M} \|V_m\|^{\beta}. \tag{3.7}$$

Tada postoji rješenje minimizacijske zadaće iskazane u problemu 22.

Zabilješka 24. Prije samog dokaza, komentar na upotrebljivost iskazanog teorema. Slično kao u propoziciji 5 za jedan štap, pokazati pretpostavku o nepraznosti skupa uvjeta u jednadžbi (3.6) može biti dosta zahtjevno. Međutim, u posebnom slučaju kada je poznato da referentna konfiguracija zadovoljava postavljene uvjete, odnosno kada

$$H_{\bar{\mathcal{S}}}(T, T, Q, \prod_{m=1}^{M} \mathrm{Id}_m) = 0,$$

gdje je $\mathrm{Id}_m \in \mathcal{W}_m$, $\mathrm{Id}_m(t) = \mathrm{Id} \in SO(3)$ za $t \in [0, l_m]$, tada je uvjet nepraznosti skupa rješenja (3.6) trivijalan.

Zabilješka 25. Možemo na neki način govoriti o tome da uvjet (3.7) propisuju ograničenje na rast potencijala sile $F_{\bar{\mathcal{S}}}$. U (3.7) mjesto $\|V_m\|^{\beta}$ može stajati $g_1(\|V_m\|)$ gdje je g_1 realna strogo rastuća funkcija, a mjesto $\left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^{\alpha}$ može stajati $g_2\left(\left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}\right)$ gdje je g_2 realna rastuća funkcija koja raste sporije od kvadratne funkcije; točnije, treba biti $\lim_{x\to\infty} \frac{g_2(x)}{x^2} = 0$. Sljedeći dokaz bi tekao na isti način.

Dokaz. (Teorem 23) Postupak dokaza u dobrom dijelu nalikuje dokazu propozicije 5.

Neka je (T, Q) referentna konfiguracija kao u pretpostavkama. Zbog uvjeta rasta funk-

cionala F iz pretpostavki teorema i (3.4), na $\mathfrak{V}$ vrijedi

$$E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T,V,Q,P\right) \geq K_1 \sum_{m=1}^{M} \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^2 - c_1 - c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^{\alpha} + c_3 \sum_{m=1}^{M} \left\|V_m\right\|^{\beta} . \tag{3.8}$$

Za proizvoljne $K_1 > 0$, $c_2 > 0$ i $0 \leq \alpha < 2$ funkcija $x \mapsto K_1 x^2 - c_2 x^{\alpha}$ je odozdo ograničena za $x \in [0, +\infty\rangle$. (minimum za $x = \sqrt[2-\alpha]{\frac{\alpha c_2}{2K_1}}$). Stoga je $E_{\bar{\mathcal{S}}}$ je ograničen odozdo na $\mathfrak{V}$. Po pretpostavci o nepraznom prostoru rješenja jednadžbe $H^{[T,Q]}\left(V,P\right) = 0$ i (3.8) postoji realni infimum $y \in \mathbb{R}$

$$y = \inf \left\{ E_{\bar{\mathcal{S}}}(T,V,Q,P) \,:\, H^{[T,Q]}\left(V,P\right) = 0 \right\} \tag{3.9}$$

i (minimizirajući) niz deformacija $\left(V\left[n\right], P\left[n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T, V\left[n\right], Q, P\left[n\right]\right) \underset{n}{\longrightarrow} y$ i $H^{[T,Q]}\left(V\left[n\right], P\left[n\right]\right) = 0$. Iz (3.8) slijedi da je $\left(V\left[n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u $\mathbb{R}^{3\times M}$. Iz ocjene (3.8) proizlazi da je niz $\left(P\left[n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u $\prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Stoga postoji gomilište niza $\left(V\left[n\right], P\left[n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ u slaboj topologiji prostora $\mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Označimo spomenuto gomilište sa $\left(V^{\bigstar}, P^{\bigstar}\right) \in \mathbb{R}^{3\times M} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Po pretpostavci teorema $H^{[T,Q]}$ je neprekidna u slaboj topologiji prostora pa za spomenuto gomilište vrijedi $H^{[T,Q]}\left(V^{\bigstar}, P^{\bigstar}\right) = 0$. Po definiciji (3.9) je

$$E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T, V^{\bigstar}, Q, P^{\bigstar}\right) \geq y. \tag{3.10}$$

Po lemi 6 (kada se uvrsti $F = 0$), funkcional $(V_m, P_m) \mapsto I_m(Q_m, P_m)$ je odozdo slabo poluneprekidan u $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{W}_m$ topologiji. Po pretpostavci teorema funkcional $(V,P) \mapsto -F_{\bar{\mathcal{S}}}(T,V,Q,P)$ je neprekidan u slaboj topologiji, pa je stoga i odozdo poluneprekidan. Stoga je i $(V,P) \mapsto E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T,V,Q,P\right)$ odozdo poluneprekinut funkcional kao suma odozdo poluneprekinutih funkcionala, vidi (3.5).

Kada u odozdo slabo poluneprekidnu funkciju $(V,P) \mapsto E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T,V,Q,P\right)$ uvrstimo podniz niza $\left(V\left[n\right], P\left[n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka $\left(V^{\bigstar}, P^{\bigstar}\right)$ u slaboj topologiji, slijedi identično kao u (2.17): $y \geq E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T, V^{\bigstar}, Q, P^{\bigstar}\right)$. Zaključujemo da je $E_{\bar{\mathcal{S}}}\left(T, V^{\bigstar}, Q, P^{\bigstar}\right) = y$ pa deformacija $\left(V^{\bigstar}, P^{\bigstar}\right)$ rješava problem 22. □

3.3. Posebnosti modela stenta

Stent je primjer (specijalizacija) strukture štapova. Uvjeti strukture (3.6) sada će poprimiti konkretan oblik. Ti uvjeti kod stenta će omogućiti da se smanji broj vrhova u odnosu na općenitu strukturu — uvjeti omogućuju da se položaj izbačenih vrhova izrazi pomoću položaja preostalih vrhova (nepoznanica) koji figuriraju u modelu stenta. Valja primjeti kako će eventualno samo jedna točka strukture (vrh, težište ili slično) biti učvršćena na

vanjsku fiksnu fizičku točku prostora, što će biti iskorišteno u rezultatu stabilnosti za stent. Nadalje, egzistencija rješenja za stent biti će posljedica razlika u problemu 22 za općenitu strukturu i problemu 30 za stent. Jednostavno govoreći, u problemu za stent osigurali smo da je prostor minimizacije neprazan, pa obstojnost rješenja slijedi kao u zabilješci 24.

Povezanost strukture štapova može se opisati usmjerenim grafom. Graf G daje informaciju o broju vrhova i bridova te o povezanosti (incidenciji) koja ostaje istom neovisno od položaja (vidi skicu deformacije kroz koju prolazi stent prilikom postavljanja u žilu na stranici 1). Nadalje će bridovi i vrhovi biti označeni brojevima: tako da oznaka M daje broj bridova (štapova), a N broj vrhova u grafu. Temeljem primjera u primjeni (npr. fotografija u okviru 3.1) namećemo sljedeći zahtjev na graf G koji je pridružen stentu:

$$\text{postoji barem jedan ciklus unutar svake komponente povezanosti.} \tag{3.11}$$

Obzirom da je u ciklusu broj vrhova i bridova jednak, zbog pretpostavke (3.11) nužno je $M \geq N$. BSO možemo još pretpostavljati:

- graf koji opisuje stent ima samo jednu komponentu povezanosti (odvojeni dijelovi stenta mogu se promatrati odvojeno) i
- niti jedan brid nema isti početak i kraj (ako treba, uvođenjem novog vrha štap se može podijeliti na dva dijela).

Usmjereni graf G možemo poistovjetiti s njegovom matricom incidencije B koja je tipa (M, N). Element na sjecištu m-tog retka i n-tog stupca matrice B označimo sa B_{mn}. Matrica $B \in \mathbb{R}^{M\times N}$ je takva da

$$B_{mn} = \begin{cases} -1, & \text{brid } m \text{ počinje u vrhu } n, \\ 1, & \text{brid } m \text{ završava u vrhu } n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na drugi način, isti usmjereni graf G možemo zadati kao uređeni par skupa vrhova i skupa bridova

$$\begin{aligned} G &= (\{1,\dots,N\}, \quad \{(\nu_1,\nu_2) : \text{postoji brid koji počinje u vrhu } \nu_1, \text{ a završava u } \nu_2\}). \\ &= (\{1,\dots,N\}, \quad \{(\nu_1(m),\nu_2(m)) : m \in \{1,\dots,M\}\}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

U tom smislu brid m možemo poistovjetiti sa uređenim parom $(\nu_1(m), \nu_2(m))$, gdje $\nu_1(m)$ daje indeks vrha u kojem brid m počinje, a $\nu_2(m)$ indeks vrha u kojem brid m završava.

Usmjerenje grafa G nije proizvoljno. Usmjerenje brida m u grafu usklađeno je s parametrizacijom centralne krivulje štapa, što proizlazi iz jediničnog tangencijalnog vektora $Q_m.\vec{\mathrm{i}}$.

Vrhu stenta koji je označen indeksom n pridružujemo položaj u prostoru: $u_n \in \mathbb{R}^3$. Položaj vrha poistovjećujemo s vektor stupcem, uz pomoć kojeg tvorimo matricu

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N\times 3}.$$

Ako želimo biti određeni i naznačiti da je položaj vrhova stenta upravo onaj referentni koristimo oznake[1] u_n i U. Činjenica da u referentnoj konfiguraciji stenta krivulja koja odgovara bridu m spaja položaje vrhova $\nu_1(m)$ i $\nu_2(m)$ može se zapisati jednakostima

$$\int_0^{l_m} Q_m.\vec{\mathrm{i}} = u_{\nu_2(m)} - u_{\nu_1(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M\}. \tag{3.13}$$

Desna strana od (3.13) je m-ti stupac u matričnom umnošku $U^T.B^T$.

Deformacija ne mijenja povezanost stenta, pa slično kao u (3.13) deformirani položaj vrhova V i TNB okviri deformiranih štapova moraju zadovoljavati uvjete

$$\int_0^{l_m} P_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}} = v_{\nu_2(m)} - v_{\nu_1(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M\}. \tag{3.14}$$

Desna strana od (3.14) čini m-ti stupac matričnog umnoška $V^T.B^T$. Ovu činjenicu pokušati ćemo iskoristiti u okviru 3.4 kako bi položaj vrhova izrazili pomoću položaja bridova.

Deformacija stenta mijenja referentni TNB okvir Q_m rotacijom P_m koja je vlastita svakoj fizičkoj točki na stentu. To znači da TNB okvir na bridu m nakon deformacije postaje $P_m.Q_m$ za neki $P_m \in \mathcal{W}_m$ (isto kao za štap i općenitu strukturu). Rotaciju kojom se mijenja TNB okvir u vrhu n označimo s $\phi_n \in SO(3)$, $n \in \{1, \ldots, N\}$. Početna točka štapa m odgovara položaju vrha$\nu_1(m)$, a završna točka istog štapa odgovara položaju vrha $\nu_2(m)$. Kako bi svakoj fizičkoj točki na stentu bila pridružena jedinstvena rotacija nužno je i dovoljno zahtijevati

$$P_m(0) = \phi_{\nu_1(m)} \qquad \text{i} \qquad P_m(l_m) = \phi_{\nu_2(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M\}. \tag{3.15}$$

Gornji uvjeti odgovaraju tzv. dinamičkim uvjetima na kontaktu, npr. jednadžbe (4.4) i (4.5) u (Tambača *et al.* , 2010, str. 1930). Ista činjenica može se zapisati korištenjem notacije kao u definiciji 90 iz dodatka A.10.3 na način

$$P = (P_1, \ldots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} W^{1,2}_{\phi_{\nu_1(m)},\phi_{\nu_2(m)}}(0, l_m;\, SO(3)). \tag{3.16}$$

[1]Namjerno se koriste oznake različite od oznaka za općenitu strukturu štapova, sada se T mijenja sa U:

- ranije su T i V označavali početke štapova pa se isti vrh mogao ponavljati kao početak više štapova, a sada (za stent) U i V čine položaje vrhova grafa među kojima su i svi počeci i svi završeci štapova, ali svaki vrh samo jednom naveden (koristimo incidenciju u grafu),
- za općenitu strukturu T nije nužno, a V jest zadovoljavao uvjete strukture, dok kod stenta i U i V zadovoljavaju uvjete povezanosti.

Iz spomenutih uvjeta moguće je izbaciti ϕ. Za matrice $\mathtt{D}_1 = \begin{bmatrix} \boxminus\left(\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)\right) & O \\ \underrightarrow{B}.\,\underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}} & -\mathrm{Id} \end{bmatrix}$ i $\mathtt{D}_2 = \underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}}$ (vidi okvir 3.3) uvjeti (3.16) ekvivalentni su

$$P \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m, \quad \text{t.d.} \quad \mathtt{D}_1.\left[\begin{array}{cccccc} P_1(0) & \dots & P_M(0) & P_1(l_1) & \dots & P_M(l_m) \end{array}\right]^T = O, \tag{3.17}$$
$$\text{uz} \quad \phi = \mathtt{D}_2.\left[\begin{array}{ccc} P_1(0) & \dots & P_M(0) \end{array}\right]^T.$$

Okvir 3.3.: Kako izostaviti nepoznanicu $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$?

Iz matrice incidencije B tvorimo blok matrice $\underrightarrow{B}$ i $\underleftarrow{B}$ tipa (M, N) čiji su elementi matrice reda 3. Neka $\underrightarrow{B}$ sadrži jediničnu blok matricu Id tamo gdje B ima jedinicu, a na ostalim mjestima nul-matrice. Neka $\underleftarrow{B}$ sadrži jediničnu blok matricu Id tamo gdje B ima element -1, a na ostalim mjestima nul-matrice. Drugim riječima, elementi $\underrightarrow{B}$ su O osim Id na sjecištima retka m sa stupcem $\nu_2(m)$, a elementi $\underleftarrow{B}$ su O osim Id na sjecištima retka m sa stupcem $\nu_1(m)$, $m \in \{1, \dots, M\}$. Uvjeti (3.15) mogu se zapisati sa

$$\underleftarrow{P} = \underleftarrow{B}.\phi \text{ i } \underrightarrow{P} = \underrightarrow{B}.\phi \tag{3.18}$$

gdje podrazumijevamo ϕ kao blok matricu tipa $(N, 1)$ čiji je element sa indeksom $(n, 1)$ upravo rotacija $\phi_n \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, a $\underleftarrow{P}$ i $\underrightarrow{P}$ blok matrice tipa $(M, 1)$ koje u retku m sadrže matricu $P_m(0)$, odnosno $P_m(l_m)$. Obzirom da su blokovi reda 3, ispravnije bi bilo reći da je ϕ matrica tipa $(3N, 3)$, a $\underleftarrow{P}$ i $\underrightarrow{P}$ tipa $(3M, 3)$.

BSO može se pretpostaviti da je usmjerenje štapova takvo da u svakom vrhu grafa G započinje barem jedan brid (teorem 107 na str. 115). Zbog toga je $\underleftarrow{B}$ punog ranga po stupcima: $\mathrm{rang}(\underleftarrow{B}) = 3N$. Označimo sa $\underleftarrow{B} = \mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right).\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right).\mathrm{svdV}\left(\underleftarrow{B}\right)$ njen rastav na singularne vrijednosti. Matrica $\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right)$ je dijagonalna tipa $(3M, 3N)$ sa singularnim vrijednostima (sve su pozitivne) od $\underleftarrow{B}$ na dijagonali. Označimo sa $\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right)^{-\mathrm{L}}$ lijevi inverz od $\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right)$, to je dijagonalna matrica tipa $(3N, 3M)$ koja na dijagonali ima inverze singularnih vrijednosti od $\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right)$. Neka je $\boxminus\left(\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)\right)$ matrica tipa $(3M, 3(M-N))$ koju čini $3M-3N$ sasvim desnih stupaca matrice $\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)$. Zbog ortogonalnosti vrijedi $\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)^{-1} = \mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)^T$ i $\mathrm{svdV}\left(\underleftarrow{B}\right)^{-1} = \mathrm{svdV}\left(\underleftarrow{B}\right)^T$. Lijevi inverz matrice $\underleftarrow{B}$ je $\underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}} = \mathrm{svdV}\left(\underleftarrow{B}\right)^T.\mathrm{svdD}\left(\underleftarrow{B}\right)^{-\mathrm{L}}.\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)^T$. Uvjeti (3.18) ekvivalentni su

$$\underbrace{\phi = \underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}}.\underleftarrow{P}}_{\dim=9N}, \quad \underbrace{\boxminus\left(\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)\right).\underleftarrow{P} = O}_{\dim=9(M-N)} \quad \text{i} \quad \underbrace{\underrightarrow{P} = \underrightarrow{B}.\,\underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}}.\underleftarrow{P}}_{\dim=9M}, \tag{3.19}$$

gdje smo, radi usporedbe sa (3.18), ispod jednakosti u (3.19) označili dimenziju.

Prva jednakost u (3.19) izražava rotacije u vrhovima pomoću rotacija na bridovima. Tako ϕ od slobodne postaje vezana varijabla. Druga i treća jednakost u (3.19) su uvjeti na dopuštene rotacije u krajevima bridova. Uvjeti (3.16) ekvivalentni su

$$P = (P_1, \dots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \text{ uz } \boxminus\left(\mathrm{svdU}\left(\underleftarrow{B}\right)\right).\underleftarrow{P} = O \text{ i } \underrightarrow{P} = \underrightarrow{B}.\,\underleftarrow{B}^{-\mathrm{L}}.\underleftarrow{P} \quad . \tag{3.20}$$

Strogo opravdanje uvjeta (3.16) i (3.14) u mjestu povezivanja štapova objavljeno je u članku Tambača & Velčić (2012), a isti uvjeti koriste se u modelu stenta Tambača *et al.* (2010, 2011) zasnovanom na modelu štapa linearizirane elastičnosti.

Dozvoljena sila u ovom modelu stenta, obzirom da je zasnovan na minimizacijskoj formulaciji energetskog funkcionala, je svaka konzervativna sila. Obzirom na specifičnosti stenta kao strukture štapova, smatrati ćemo rad sile kao funkcional $F : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$, gdje je sa $F(U,V,Q,P)$ označen rad sile koji uzrokuje deformaciju (V,P) referentnog položaja kodiranog sa (U,Q) (vidi odjeljak 3.6).

Slijedi formalni zapis modela stenta temeljenog na nelinearnom hiperelastičnom modelu štapa, a što je centralna tema ove monografije.

Po uzoru na okvir 3.3, može biti oportuno iz skupa nepoznanica izbaciti i V. G je povezan graf, pa B nije punog ranga po stupcima, točnije vrijedi (vidi lemu 1.6 i teorem 1.14 u Čaklović (n.d.)) $r = \mathrm{rang}(B) = N-1$.
Iz uvjeta (3.14) slijedi

$$\underbrace{\left[\int_0^{l_m} \left(P_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}}\right)^T\right]_{m=1}^{M}}_{\overset{\text{oznaka}}{=}\Phi_Q(P)} \in \mathrm{Slika}(B) \subseteq \mathbb{R}^{M\times 3}. \tag{3.21}$$

Preko dekompozicije singularnih vrijednosti[a] i pseudoinverza matrice B:

$$B = \mathtt{U}.\Sigma.\mathtt{V}^T = \mathtt{U}_r.\Sigma_r.\mathtt{V}_r^T,$$
$$B^+ = \mathtt{V}_r.\Sigma_r^{-1}.\mathtt{U}_r^T.$$

(3.21) je ekvivalentno

$$\mathtt{U}_0^T.\Phi_Q(P) = O, \tag{3.22}$$

gdje stupci matrice $\mathtt{U}_0 = [\mathtt{u}_N, \ldots, \mathtt{u}_M]$ čine dopunu do baze prostora stupaca matrice B (i $\mathtt{U}$). Iz (3.14) i (3.21) slijedi

$$V = B^+.\Phi_Q(P) + \left(\mathrm{Id} - B^+.B\right).w \tag{3.23}$$

$$\text{gdje je } w = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N\times 3},$$

a $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ slobodna varijabla. Štoviše, zajedno (3.21) i (3.23) ekvivalentni su (3.14).

[a] $U_r = [\mathtt{u}_1, \ldots, \mathtt{u}_r]$, $V_r = [\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_r]$, $\Sigma_r = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_r > 0$,

Okvir 3.4.: Kod diskretizacije optimizacijskog problema i rješavanja na računalu, korisno je "smanjiti dimenziju problema," što znači iskoristiti uvjete tako da se neke varijable izraze pomoću drugih. Pokazuje se da položaji N vrhova mogu biti izraženi preko samo 3 realne varijable.

Definicija 26. *Stent* je uređena trojka $\mathcal{S} = \left(B, (l_m)_{m=1}^{M}, E\right)$, gdje je B matrica incidencije usmjerenog grafa G sa M bridova i N vrhova, gdje $\nu_1(m)$ daje indeks vrha u kojem započinje brid m duljine $l_m > 0$, $m \in \{1, \ldots, M\}$, te $E : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ funkcional energije koji se računa po formuli sličnoj (3.5),

$$E(U,V,Q,P) = \sum_{m=1}^{M} I_m(Q_m, P_m) - F(U,V,Q,P). \tag{3.24}$$

Pri tome podrazumijevamo svojstva spomenuta u (3.3) i (3.4). *Referentna konfiguracija stenta* $\mathcal{S}$ je uređeni par $(U,Q) \in \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$ koji mora zadovoljavati (3.13), gdje kažemo

da u_n određuje položaj vrha n, a Q_m određuje TNB okvir na bridu (štapu) m. *Deformacija stenta* $\mathcal{S}$ s referentnom konfiguracijom (U, Q) je uređeni par $(V, P) \in \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ koji zadovoljava

$$0 = \left\| B.V - \begin{bmatrix} \int_0^{l_1} \left(P_1.Q_1.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \\ \vdots \\ \int_0^{l_M} \left(P_M.Q_M.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \end{bmatrix} \right\| + \left\| \mathtt{D}_1. \begin{bmatrix} P_1(0) \\ \vdots \\ P_M(0) \\ P_1(l_1) \\ \vdots \\ P_M(l_M) \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{oznaka}}{=} H_0(V, Q, P), \tag{3.25}$$

gdje je $\mathtt{D}_1$ tako da (3.17) bude ekvivalentno sa (3.16).

Iz prethodne definicije slijede formula za parametrizaciju središnje linije m-tog štapa:

- u referentnom položaju $t \mapsto u_{\nu_1(m)} + \int_0^t Q_m.\vec{\mathrm{i}}$ i
- deformiranom položaju $t \mapsto v_{\nu_1(m)} + \int_0^t P_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}}$.

Tehnika kojom ćemo dokazati glavne rezultate ovog poglavlja dopušta postavljanje još nekih uvjeta na položaj stenta.

Definicija 27. Neka je $b_0 \in \mathbb{R}^N$ netrivijalan redak ($b_0 \neq O$) sa svim nenegativnim elementima i takav da $\|b_0\|_1 = 1$, te $y_0 \in \mathbb{R}^3$ proizvoljni redak. Neka je $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ vektor čiji su elementi samo nule i jedinice. *Dodatni uvjeti na stent* odgovaraju tada sljedećoj jednadžbi

$$H_{\text{dod}}(V, P) \overset{\text{oznaka}}{=} x_0 \|b_0.V - y_0\| + \sum_{n=1}^{N} x_n \|\phi_n - \mathrm{Id}\| = 0, \tag{3.26}$$

gdje se $\phi = (\phi_n)_{n=1}^N$ može izraziti preko $(P_m(0))_{m=1}^M$ uz pomoć jednadžbe (3.19).

Primjer 28. Prvi pribrojnik u H_{dod} može poslužiti radi postavljanja dodatnog uvjeta na vrhove stenta, a ostali za uvjet rotacije u spojevima. Na primjer:

- kada je $x_0 = 0$ tada efektivno nema dodatnih uvjeta na položaj vrhove, a kada su svi x_n nule tada efektivno nema nikakvih dodatnih uvjeta,
- kada je $x_0 = 1$:
  - tada $b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ čini da (3.26) propisuje položaj vrha $v_1 = y_0$,
  - tada $b_0 = \begin{pmatrix} 1/N & 1/N & \ldots & 1/N \end{pmatrix}$ čini da (3.26) propisuje zahtjev na težište vrhova koje se nalazi u y_0,
- kada je $x_n = 1$ za neki $n \in \{0, \ldots, 1\}$, tada je propisano $\phi_n = \mathrm{Id}$ što znači da se vrh n može samo translatirati, bez rotacija lokalno u tom vrhu.

Zabilješka 29. U (3.26) eventualno bi mogli stajati neki drugi uvjeti koji imaju fizikalnog smisla. Važno je da H_{dod} ostane neprekidan u slaboj topologiji na $\prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Po teoremu

o tragu za prostore Soboleva (vidi dodatak A.3), za fiksan t, $P \mapsto P(t)$ je ograničeni linearni funkcional u $W^{1,2}$. U slaboj topologiji svaki ograničeni linearni operator je i neprekidan. Stoga su uvjeti koji ispituju vrijednosti od P u točkama dovoljno dobri za korištenje u dodatnim uvjetima (koje uprisutnjuje H_{dod}). Međutim, treba voditi računa da su vrijednosti od P (pa tako i ϕ_n) rotacije. Zbog toga npr. dodatni uvjet $\prod_{n=1}^{N} \phi_n = \text{Id}$ (kompozicija rotacija) ima smisla, a $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \phi_n = \text{Id}$ (zbrajanje rotacija) nema smisla.

Problem 30. Za zadani stent $\mathcal{S}$ i njegovu referentnu konfiguraciju (U, Q) koja zadovoljava (3.13), pronaći deformaciju stenta (V, P) koja minimizira (3.24) na skupu svih deformacija koje zadovoljavaju (3.25) i još zadovoljava dodatni uvjete na stent (3.26).

U sljedećoj važnoj lemi pokazati ćemo da propisivanje $b_0.V = y_0$ u dodatnim uvjetima (3.26) problema 30 može oslabiti zahtjeve na potencijal sile F. To ćemo iskoristiti u korolaru 33, gdje ćemo u posebnom slučaju oslabiti zahtjev na silu potreban za rezultat egzistencije (propozicija 32).

Lema 31. *Neka je zadan stent $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q) koja zadovoljava dodatne uvjetima na stent* (3.26). *Neka u dodatnim uvjetima H_{dod} stoji $x_0 = 1$. Neka za funkcional $F^{[U,Q]} \stackrel{\text{def}}{=} F(U, \,.\,, Q, \,.\,) : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ koji se javlja u* (3.24) *postoje $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ i $0 \le \alpha < 2$ takvi da kadgod je $H_0(V, Q, P) = 0$ i $H_{\text{dod}}(V, P) = 0$ za $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_N \end{bmatrix}^T$ i $P = (P_1, \dots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ tada slijedi*

$$F^{[U,Q]}(V, P) \le c_1 + c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\| \dot{P}_m \right\|_{L^2}^{\alpha} . \tag{3.27}$$

Možemo zaključiti da postoje $\tilde{c}_1 > 0$ tako da kadgod je $H_0(V, Q, P) = 0$ i $H_{\text{dod}}(V, P) = 0$ za $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_N \end{bmatrix}^T$ i $P = (P_1, \dots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ tada slijedi

$$F^{[U,Q]}(V, P) \le \tilde{c}_1 + c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\| \dot{P}_m \right\|_{L^2}^{\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \|v_n\| .$$

Dokaz. Neka je (V, P) deformacija stenta kao u iskazu leme. Zbog $x_0 = 1$ u H_{dod} mora vrijediti $b_0.V = y_0$. Obzirom na povezanost stenta i činjenicu da je udaljenost među vrhovima manja od duljine bridova koji ih (posredno) spajaju, mora biti $\|v_i - v_j\| \le \sum_{m=1}^{M} l_m \stackrel{\text{def}}{=} d$, za svaki izbor i, j iz skupa vrhova. Posebno, razlika koordinata dva vrha

je najviše d. Za $b_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ iskoristimo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \|\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_N v_N\| &= \|y_0\| \\ \|\beta_2 v_1 - \beta_2 v_2 \qquad\qquad\qquad \| &\leq \beta_2\, d \\ &\ldots \\ \|\beta_N v_1 \qquad\qquad - \beta_N v_N\| &\leq \beta_N\, d \end{aligned}$$

da zaključimo (koristeći $1 = \|b_0\|_1 = \sum_{n=1}^N \beta_n$)

$$\|v_1\| = \|v_1\| \sum_{n=1}^N \beta_n = \left\| \sum_{n=1}^N \beta_n v_1 \right\| \leq \|y_0\| + d \sum_{n=2}^N \beta_n \leq \|y_0\| + d$$

i slično za $k \in \{2, \ldots, N\}$

$$\|v_k\| \leq \|y_0\| + d\,.$$

Dakle dodatni uvjet implicira da postoji kompaktan skup K izvan kojeg V ne može izaći, bez obzira na Q, U i potencijal sile F. Slijedi da $\sum_{n=1}^N \|v_n\| \leq N\,(\|y_0\| + d)$. Sada je jasno da za $\tilde{c}_1 = c_1 + N\,(\|y_0\| + d)$ vrijedi

$$c_1 + c_2 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^\alpha \leq \underbrace{c_1 + N\,(\|y_0\| + d)}_{=\tilde{c}_1} + c_2 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^\alpha - \sum_{n=1}^N \|v_n\|\ . \qquad \square$$

Propozicija 32. *Neka je stent $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q), takav da funkcional $F^{[U,Q]} \stackrel{\text{def}}{=} F\,(U, \,.\,, Q, \,.\,) : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^M \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ koji se javlja u (3.24)*

- *bude neprekidan funkcional u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^M \mathcal{W}_m$ i*
- *postoje $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$ i $\beta > 0$ takvi da kadgod je $H_0(V, Q, P) = 0$ i $H_{\text{dod}}(V, P) = 0$ za $V = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_N \end{bmatrix}^T$ i $P = (P_1, \ldots, P_M) \in \prod_{m=1}^M \mathcal{W}_m$, tada*

$$F^{[U,Q]}(V, P) \leq c_1 + c_2 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^\alpha - c_3 \sum_{n=1}^N \|v_n\|^\beta\ .$$

Tada minimizacijski problem 30 ima barem jedno rješenje.

Dokaz. Rezultat slijedi iz teorema 23, treba samo provjeriti njegove pretpostavke u ovom posebnom slučaju: $F_{\bar{\mathcal{S}}}$ neprekidna i zadovoljava uvjet rasta, $H_{\bar{\mathcal{S}}}$ je neprekidan i skup rješenja od $H_{\bar{\mathcal{S}}} = 0$ neprazan.

Razlika u broju vrhova u odnosu na opću strukturu dolazi do izražaja kod pretpostavki na F u ovoj propoziciji u odnosu na $F_{\bar{\mathcal{S}}}$ iz teorema 23. Navedenu razliku možemo zanemariti jer je riječ o istim svojstvima slabe neprekidnosti i ograničenog rasta na malo

modificiranoj domeni — procedura iz dokaza teorema 23 ako je potrebno može se proći sasvim jednako.

Dalje pokažimo neprekidnost funkcionala koji ograničava prostor rješenja. Izraz $P_m \mapsto \int_0^{l_m} P_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}}$ daje neprekidan funkcional u jakoj topologiji na $\mathcal{L}_m$, pa stoga i na slaboj u $\mathcal{W}_m$. Također, u slaboj topologiji na $\mathcal{W}_m$ neprekidni su i svi $P_m \mapsto P_m(0)$ temeljem kojih u (3.26) stoje sve oznake ϕ_n. Stoga je za svaki par (U, Q), u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ neprekidan funkcional

$$(V, P) \mapsto H_{\mathcal{S}}(V, Q, P) \stackrel{\text{def}}{=} H_0(V, Q, P) + H_{\text{dod}}(V, P)\,.$$

U odnosu na oznake korištene u teoremu 23, H_S ne ovisi direktno o referentnom položaju vrhova, dakle možemo poistovjetiti $H_{\mathcal{S}}(U, V, Q, P) \equiv H_{\mathcal{S}}(V, Q, P)$.

Još samo pokažimo pretpostavku nepraznosti skupa rješenja iz teorema 23. Neka je $T \in \mathbb{R}^{N\times 3}$ po retcima zadan sa $T = \left(u_n^T + w\right)_{n=1}^{N}$, gdje je

$$w \stackrel{\text{def}}{=} y_0 - b_0.U \in \mathbb{R}^3 \tag{3.28}$$

Neka je još definirano

$$\mathrm{Id}_m : [0, l_m] \to SO(3) \quad \text{i} \quad \mathrm{Id}_m(t) = \mathrm{Id} \in SO(3) \quad \text{za sve } t \in [0, l_m]\,. \tag{3.29}$$

Pokažimo da $H_{\mathcal{S}}(T, Q, (\mathrm{Id}_m)_{m=1}^{M}) = 0$. Retci od B imaju sve nule, osim jedne pozitive i jedne negativne jedinice: zbog toga $B.\begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{bmatrix} = O$ i dalje $B.T = B.U$. Obzirom da referentna konfiguracija stenta zadovoljava uvjete povezanosti (3.13) imamo da m-ti redak od $B.U$ odgovara transponiranom vektor stupcu $\int_0^{l_m} \mathrm{Id}_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}} = \int_0^{l_m} Q_m.\vec{\mathrm{i}}$. Nadalje, $(\mathrm{Id}_m)_{m=1}^{M}$ zadovoljava (3.16) uz $\phi = \mathrm{Id}^N \in SO(3)^N$, pa mora zadovoljiti i ekvivalentan uvjet zapisan u (3.17), te nulu u drugom i daljnjim pribrojnicima lijeve strane jednadžbe (3.26). Ako je $x_0 \neq 0$ još treba provjeriti

$$b_0.T = b_0.U - b_0.\begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{bmatrix} = b_0.U - w \stackrel{(3.28)}{=} y_0. \tag{3.30}$$

Stoga, $H_{\mathcal{S}}(U, T, Q, (\mathrm{Id}_m)_{m=1}^{M}) = 0$ pa je neprazan prostor uvjeta, označen u teoremu 23 sa $\mathfrak{V}$. □

Korolar 33. *Neka je stent $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q), takav da funkcional $F^{[U,Q]} \stackrel{\text{def}}{=} F(U, \,.\,, Q, \,.\,) : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m \to \mathbb{R}$ koji se javlja u* (3.24)

- *bude neprekidan funkcional u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i*
- *postoje $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ i $0 \le \alpha < 2$ takvi da kadgod je $H_0(V, Q, P) = 0$ i $H_{\text{dod}}(V, P) = 0$ za $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_N \end{bmatrix}^T$ i $P = (P_1, \dots, P_M) \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$, tada*

$$F^{[U,Q]}(V, P) \le c_1 + c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\| \dot{P}_m \right\|_{L^2}^{\alpha} .$$

Neka su pritom dodatni uvjeti na stent (3.26) *takvi da je $x_0 = 1$. Tada minimizacijski problem 30 ima barem jedno rješenje.*

Dokaz. Po lemi 31, pretpostavke na F iz ovog korolara uz H_{dod} takav da $x_0 = 1$ impliciraju da su zadovoljene pretpostavke propozicije 32. Zaključak spomenute propozicije sada daje obstojnost rješenja. □

3.4. Relacija ekvivalencije stenta

Dalje slijedi zanimljivo svojstvo stenta — bridovi se mogu dijeliti na manje dijelove, što na neki način ne utječe na rješenje problema stenta. U ovom odjeljku, iskoristiti ćemo definirati ćemo relaciju ekvivalencije stenta. Svojstva relacije ekvivalencije stenta značajno će olakšati dokaz stabilnosti: vrlo lako ćemo nedeformirane geometrije iz skupa HARMONIKA svesti na skup $C[0, l]$.

Definicija 34. (Podjela zadnjeg brida) Neka je stent $\mathcal{S}$ zadan matricom incidencije B usmjerenog grafa G sa M bridova i N vrhova, duljinama bridova $(l_m)_{m=1}^{M}$ te sa

$$E(U, V, Q, P) = \sum_{m=1}^{M} I_m(Q_m, P_m) - F(U, V, Q, P) . \tag{3.31}$$

Neka su vrhovi koje spaja brid M označeni indeksima ι_1 i ι_2. Stent $\tilde{\mathcal{S}}$ koji nastaje podjelom brida M duljine l_M na 2 dijela s duljinama $\tilde{l}_M > 0$ i $\tilde{l}_{M+1} > 0$, gdje je $\tilde{l}_M + \tilde{l}_{M+1} = l_M$ ima:

- usmjereni graf $\tilde{G}$ sa $\tilde{M} = M + 1$ bridova i $\tilde{N} = N + 1$ vrhova
- matricu incidencije grafa $\tilde{G}$, nazovimo je $\tilde{B}$, koja ima $\tilde{M}$ redaka i $\tilde{N}$ stupaca takvih da:
  - blok podmatrica tipa $(M - 1, N)$ gore lijevo u $\tilde{B}$ jednaka je kao kod B

- stupac $N+1$ u $\tilde{B}$ ima samo nule, osim jedinice u predzadnjem retku i negativne jedinice u zadnjem retku
- redak M u $\tilde{B}$ ima samo nule, osim negativne jedinice u stupcu ι_1 i jedinice u zadnjem stupcu
- redak $M+1$ u $\tilde{B}$ ima samo nule osim jedinice u stupcu ι_2 i negativne jedinice u zadnjem stupcu

- duljine bridova $(l_1, l_2, \ldots, l_{M-1}, \tilde{l}_M, \tilde{l}_{M+1})$
- funkcional energije $\tilde{E} : \mathbb{R}^{\tilde{N}\times 3} \times \mathbb{R}^{\tilde{N}\times 3} \times \prod_{m=1}^{\tilde{M}} \tilde{\mathcal{L}}_m \times \prod_{m=1}^{\tilde{M}} \tilde{\mathcal{W}}_m \to \mathbb{R}$ zadan sa

$$\tilde{E}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Q}, \tilde{P}) = \sum_{m=1}^{M-1} I_m(\tilde{Q}_m, \tilde{P}_m) + \tilde{I}_M(\tilde{Q}_M, \tilde{P}_M) + \tilde{I}_{M+1}(\tilde{Q}_{M+1}, \tilde{P}_{M+1}) - \tilde{F}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Q}, \tilde{P})$$

gdje su

- $\tilde{\mathcal{L}}_m$ isti kao $\mathcal{L}_m$, osim $\tilde{\mathcal{L}}_k = L^1\left(0, \tilde{l}_k; SO(3)\right)$ za $k \in \{M, M+1\}$,
- $\tilde{\mathcal{W}}_m$ isti kao $\mathcal{W}_m$, osim $\tilde{\mathcal{W}}_k = W^{1,2}\left(0, \tilde{l}_k; SO(3)\right)$ za $k \in \{M, M+1\}$,
- $\tilde{I}_m$ isti kao I_m, osim za $k \in \{M, M+1\}$:

$$\tilde{I}_k(\tilde{Q}, \tilde{P}) = \begin{cases} +\infty, & \tilde{P} \notin \tilde{\mathcal{W}}_k, \\ \left\|\tilde{Q}^T.\tilde{P}^T.\dot{\tilde{P}}.\tilde{Q}\right\|^2_{\{k\}}, & \tilde{P} \in \tilde{\mathcal{W}}_k, \end{cases} \quad \text{gdje su}$$

  * $\|A\|^2_{\{M\}} = \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{l}_M} \mathtt{Q}^2_M\,(s, A(s))\,\mathrm{d}s$ za $A \in W^{1,2}\left(0, \tilde{l}_M; \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$,
  * $\|A\|^2_{\{M+1\}} = \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{l}_{M+1}} \mathtt{Q}^2_M\left(\tilde{l}_M + s, A(s)\right)\mathrm{d}s$ za $A \in W^{1,2}\left(0, \tilde{l}_{M+1}; \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$ i
- $\tilde{F}$ zadan preko F sa

$$\tilde{F}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Q}, \tilde{P}) = F(U, V, Q, P)$$

gdje su veze između referentne konfiguracije $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ stenta $\tilde{\mathcal{S}}$ i referentne konfiguracije (U, Q) stenta $\mathcal{S}$, te između deformacije $(\tilde{V}, \tilde{P})$ stenta $\tilde{\mathcal{S}}$ i deformacije (V, P) stenta $\mathcal{S}$ zadane sa:

  * komponente $\tilde{Q}_m$ od $\tilde{Q}$ odgovaraju komponentama Q_m od Q za sve $m \in \{1, \ldots, M-1\}$, dok je $\tilde{Q}_M(t) = Q_M(t)$ za $t \in \left\langle 0, \tilde{l}_M\right\rangle$ i $\tilde{Q}_{M+1}(t) = Q_m(\tilde{l}_M + t)$ za $t \in \left\langle 0, \tilde{l}_{M+1}\right\rangle$,
  * komponente $\tilde{P}_m$ od $\tilde{P}$ odgovaraju komponentama P_m od P za sve $m \in \{1, \ldots, M-1\}$, dok je $\tilde{P}_M(t) = P_M(t)$ za $t \in \left[0, \tilde{l}_M\right]$ i $\tilde{P}_{M+1}(t) = P_m(\tilde{l}_M + t)$ za $t \in \left[0, \tilde{l}_{M+1}\right]$,

* prvih N redaka od $\tilde{U}$ čine cijeli U, a zadnji redak od $\tilde{U}$ odgovara zbroju retka ι_1 iz U i retka $\int_0^{\tilde{l}_M} \left(Q_M.\vec{\mathrm{i}}\right)^T$,
* prvih N redaka od $\tilde{V}$ čine cijeli V, a zadnji redak od $\tilde{V}$ odgovara zbroju retka ι_1 iz V i iznosa $\int_0^{\tilde{l}_M} \left(P_M.Q_M.\vec{\mathrm{i}}\right)^T$,

Prva i treća od prethodne 4 točke definiraju KONFIGURACIJU $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ KOJA JE NASTALA iz (U, Q) DIJELJENJEM ZADNJEG BRIDA u stentu $\mathcal{S}$. Druga i četvrta od prethodne 4 točke definiraju DEFORMACIJU $(\tilde{V}, \tilde{P})$ KOJA JE NASTALA iz (V, P) DIJELJENJEM ZADNJEG BRIDA u stentu $\mathcal{S}$.

Neka su dodatni uvjeti stenta zadani sa (3.26). Tada je kopija istih dodatnih uvjeta na stent $\tilde{S}$ koji je nastao iz $\mathcal{S}$ podjelom brida M definirana sa

$$\tilde{H}_{\mathrm{dod}}(\tilde{V}, \tilde{P}) = \tilde{x}_0 \left\|\tilde{b}_0.\tilde{U} - \tilde{y}_0\right\| + \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_n \left\|\tilde{\phi}_n - \mathrm{Id}\right\| = 0$$

gdje je $\tilde{x}_k = x_k$, za $k \in \{0, M\}$, $\tilde{x}_{M+1} = 0$, $\tilde{y}_0 = y_0$, a kod $\tilde{b}_0$ prvih M elemenata čini cijeli b_0 i zadnji element od $\tilde{b}_0$ je nula.

Definicija 35. (ZAMJENA DVA BRIDA ILI DVA VRHA) Neka je $\mathcal{S} = \left(B, (l_m)_{m=1}^M, E\right)$ stent, gdje je E definiran pomoću I_m i F kao u (3.31). Stent $\tilde{\mathcal{S}} = \left(\tilde{B}, \left(\tilde{l}_m\right)_{m=1}^M, \tilde{E}\right)$ nastao zamjenom bridova m_1 i m_2 definira se na način da:

- matrica $\tilde{B}$ ima u odnosu na B zamijenjena dva retka s indeksima m_1 i m_2,
- $\tilde{l}_m = l_m$ za sve indekse m, osim što je $\tilde{l}_{m_1} = l_{m_2}$ i $\tilde{l}_{m_2} = l_{m_1}$,
- $\tilde{E}(U, V, \tilde{Q}, \tilde{P}) = \sum_{m=1}^M \tilde{I}_m(\tilde{Q}_m, \tilde{P}_m) - \tilde{F}(U, V, \tilde{Q}, \tilde{P})$ definiran je preko $\tilde{I}_m = I_m$ za sve m, osim što je $\tilde{I}_{m_1} = I_{m_2}$ i $\tilde{I}_{m_2} = I_{m_1}$, te preko $\tilde{F}(U, V, \tilde{Q}, \tilde{P}) = F(U, V, Q, P)$, gdje su $\tilde{Q} = \left(\tilde{Q}_m\right)_{m=1}^M$ i $\tilde{P} = \left(\tilde{P}_m\right)_{m=1}^M$ takvi da je $\tilde{Q}_m = Q_m$ i $\tilde{P}_m = P_m$ za sve indekse m, osim što je $\tilde{Q}_{m_1} = Q_{m_2}$, $\tilde{Q}_{m_2} = Q_{m_1}$, $\tilde{P}_{m_1} = P_{m_2}$ i $\tilde{P}_{m_2} = P_{m_1}$.

Zadnja točka definira konfiguraciju $(U, \tilde{Q})$ koja je nastala zamjenom bridova i deformaciju $(V, \tilde{P})$ koja je nastala zamjenom bridova. Valja primijetiti da se zamjenom bridova niti položaj, a niti indeksi vrhova ne mijenjaju. Prirodno se definira kopija dodatnih uvjeta na novom stentu. Prirodno se definira i zamjena dva vrha u grafu, što utječe na zamjenu dva stupca u matrici incidencije, matricama U i V, te zamjenu indeksa u listi $(\phi_n)_{n=1}^N$.

Definicija 36. (TRANSFORMACIJA STENTA) Neka je $\mathcal{S}$ stent. Stent $\tilde{\mathcal{S}}$ nastao je transformacijom iz stenta $\mathcal{S}$ kada je $\tilde{\mathcal{S}}$ nastao od $\mathcal{S}$ kroz konačan broj zamjena bridova ili vrhova i podjela zadnjeg brida na dva dijela. Na sličan način definiramo konfiguracije i deformacije koje nastaju dijeljenjem bridova ili vrhova u stentu. DVA STENTA SU EKVIVALENTNA

ako postoji treći stent (ne nužno drugačiji od prvog i drugog) koji može nastati transformacijom stenta i iz prvog i iz drugog stenta. U kontekstu dva ekivivalentna stenta, DVIJE DEFORMACIJE ILI KONFIGURACIJE SU EKVIVALENTNE kada postoji treća koja može nastati transformacijama stenta iz prve i iz druge. Slično se definira ekvivalencija za kopije dodatnih uvjeta na ekvivalentnim stentovima.

Propozicija 37. *Neka je stent $\tilde{\mathcal{S}}$ nastao transformacijom iz stenta $\mathcal{S}$ Neka je (ne nužno referentna) konfiguracija $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ za stent $\tilde{\mathcal{S}}$ vezana s (ne nužno referentnom) konfiguracijom (U, Q) stenta $\mathcal{S}$ kao u definicijama 34, 35 i 36. Neka je deformacija $(\tilde{V}, \tilde{P})$ vezana s deformacijom (V, P) kao u definiciji 34. Neka su dodatni uvjeti $\tilde{H}_{\mathrm{dod}}$ za $\tilde{\mathcal{S}}$ vezani za dodatne uvjete H_{dod} kao u definiciji 34. Tada:*

1. *$(\tilde{U}, \tilde{Q})$ je referentna (zadovoljava osnovne uvjete povezanosti) za $\tilde{\mathcal{S}}$ ako i samo ako je (U, Q) referentna za $\tilde{S}$,*
2. *$(\tilde{V}, \tilde{P})$ je deformacija stenta $\tilde{\mathcal{S}}$ uz referentnu konfiguraciju $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ ako i samo ako je (V, P) deformacija stenta $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q), odnosno*
$$\tilde{H}_0\left(\tilde{V}, \tilde{Q}, \tilde{P}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad H_0(V, Q, P) = 0\,.$$
3. *$\tilde{H}_{\mathrm{dod}}(\tilde{V}, \tilde{P}) = 0$ ako i samo ako $H_{\mathrm{dod}}(V, P) = 0$,*
4. *Vrijedi da je $\tilde{E}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{Q}, \tilde{P}) = E(U, V, Q, P)$.*

Ekvivalencija stentova je relacija ekvivalencije na skupu svih stentova.

Neka su $\mathcal{S}$ i $\tilde{\mathcal{S}}$ ekivalentni stentovi, a $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ i (U, Q) ekvivalentne referentne konfiguracije. Tada deformacija (V, P) riješava problem 30 za stent $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q) i dodatne uvjete ako i samo ako ekvivalentna deformacija $(\tilde{V}, \tilde{P})$ riješava isti problem za stent $\tilde{\mathcal{S}}$ uz referentnu konfiguraciju $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ i kopiju dodatnih uvjeta.

Dokaz. Neka je stent $\tilde{\mathcal{S}}$ nastao iz stenta $\tilde{\mathcal{S}}$ dijeljenjem brida M.

1. Neka je oznaka (U, Q) za referentnu konfiguraciju od $\mathcal{S}$ koja dakle zadovoljava (3.13). Neka je $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ kao definiciji 34. Pokazati ćemo da je pretpostavka na (U, Q) nužna i dovoljna da bi $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ bila referentna konfiguracija za $\tilde{\mathcal{S}}$. Po definiciji 34 za sve $n \in \{1, \ldots, N\}$, U i $\tilde{U}$ imaju iste komponente u_n i $\tilde{u}_n$, dok za sve $m \in \{1, \ldots, M-1\}$, Q i $\tilde{Q}$ imaju iste komponente Q_m i $\tilde{Q}_m$. Stoga je prvih $M-1$ jednakosti u(3.13) ekvivalentno sa
$$\int_0^{l_m} \tilde{Q}_m . \vec{\mathrm{i}} = u_{\nu_2(m)} - u_{\nu_1(m)} = \tilde{u}_{\tilde{\nu}_2(m)} - \tilde{u}_{\tilde{\nu}_1(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M-1\}\,.$$
U predhodnoj jednakosti sa $\tilde{\nu}_1(m)$ i $\tilde{\nu}_2(m)$ označili smo vrhove incidentne sa bridom m. Također smo iskoristili da po definiciji matrice $\tilde{B}$ u definiciji 34, $\tilde{\nu}_1(m) = \nu_1(m)$ i $\tilde{\nu}_2(m) = \nu_2(m)$, za $m \in \{1, \ldots, M-1\}$. Iz iste definicije ispada još $\tilde{\nu}_1(M) = \iota_1 = \nu_1(M)$, $\tilde{\nu}_2(M) = \tilde{\nu}_1(M+1) = N+1$ i $\tilde{\nu}_2(M+1) = \iota_2 = \nu_2(M)$, te dalje

$$\tilde{u}_{\tilde{\nu}_2(M)} = \tilde{u}_{N+1} = u_{\iota_1} + \int_0^{\tilde{l}_M} Q_M.\vec{\mathrm{i}} = \tilde{u}_{\tilde{\nu}_1(M)} + \int_0^{\tilde{l}_M} \tilde{Q}_M.\vec{\mathrm{i}}. \tag{3.32}$$

Prethodna jednakost je ujedno predzadnja od jednakosti koji treba zadovoljavati $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ kako bi bila referentna. Ona je dakle zadovoljena po definiciji. Međutim, zadnja relacija u (3.13) ekvivalentna je sa

$$u_{\nu_2(M)} - u_{\nu_1(M)} = \int_0^{\tilde{l}_M + \tilde{l}_{M+1}} Q_m.\vec{\mathrm{i}} = \int_0^{\tilde{l}_M} \tilde{Q}_m.\vec{\mathrm{i}} + \int_0^{\tilde{l}_{M+1}} \tilde{Q}_m.\vec{\mathrm{i}}. \tag{3.33}$$

Lijeva strana u (3.33) može se zapisati kao

$$u_{\iota_2} - u_{\iota_1} = \tilde{u}_{\iota_2} - \tilde{u}_{\iota_1} = \tilde{u}_{\tilde{\nu}_2(M+1)} - \tilde{u}_{\tilde{\nu}_1(M+1)} + \tilde{u}_{\tilde{\nu}_2(M)} - \tilde{u}_{\tilde{\nu}_1(M)} \,. \tag{3.34}$$

Zbog toga je zadnja relacija u (3.13), preko (3.33) i (3.34), ekvivalentna sa

$$\tilde{u}_{\tilde{\nu}_2(M+1)} - \tilde{u}_{\tilde{\nu}_1(M+1)} = \int_0^{\tilde{l}_{M+1}} \tilde{Q}_m.\vec{\mathrm{i}}.$$

2. Neka je oznaka (V, P) za deformaciju od $\mathcal{S}$ uz referentnu konfiguraciju (U, Q) koja dakle zadovoljava (3.15) i (3.14), tj.

$$\int_0^{l_m} P_m.Q_m.\vec{\mathrm{i}} = v_{\nu_2(m)} - v_{\nu_1(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M\} \,, \tag{3.35}$$

gdje je $V = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_N \end{bmatrix}^T$. Neka je $(\tilde{U}, \tilde{P})$ oznaka kao u definiciji 34. Pokazati ćemo da su navedene pretpostavke nužne i dovoljne da $(\tilde{V}, \tilde{P})$ bude referentna konfiguracija za $\tilde{\mathcal{S}}$. Preuzmimo do sada korištene oznake iz dokaza prve tvrdnje. Međutim (3.13). Identično kao u dokazu prve tvrdnje možemo zaključiti da je (3.35) ekvivalentno sa

$$\int_0^{\tilde{l}_m} \tilde{P}_m.\tilde{Q}_m.\vec{\mathrm{i}} = \tilde{v}_{\tilde{\nu}_2(m)} - \tilde{v}_{\tilde{\nu}_1(m)}, \quad m \in \{1, \ldots, M+1\} \,,$$

gdje je $\tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \ldots & \tilde{v}_{N+1} \end{bmatrix}^T$. Sa druge strane, kada pogledamo kako je $\tilde{P}$ definirana u definiciji 34, tvrdnja da svakom vrhu na stentu $\tilde{\mathcal{S}}$ možemo pridružiti jedinstvenu rotaciju $\tilde{\phi}_n$, tako da $\tilde{\phi}_n = \phi_n$, za $n \in \{1, \ldots, N\}$ i $\tilde{\phi}_{N+1} = P_M(\tilde{l}_M)$ ekvivalentna je sa (3.15). Također iz definicije 34 slijedi $P \in \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ ako i samo ako $\tilde{P} \in \prod_{m=1}^{\tilde{M}} \tilde{\mathcal{W}}_m$.

3. Pogledajmo kako je definiran $\tilde{H}_{\mathrm{dod}}$ u definiciji 34. Zbog $\tilde{x}_{\tilde{N}} = 0$ te $\tilde{x}_n = x_n$ i $\tilde{\phi}_n = \phi_n$ za $n \in \{1, \ldots, N\}$ slijedi

$$\sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_n \left\| \tilde{\phi}_n - \mathrm{Id} \right\| = \sum_{n=1}^{N} x_n \left\| \phi_n - \mathrm{Id} \right\| \,.$$

Po definiciji imamo $\tilde{y}_0 = y_0$ pa još samo treba pokazati da $\tilde{b}_0.\tilde{V} = b_0.V$. No, $\tilde{b}_0$ i b_0 su gotovo isti osim što $\tilde{b}_0$ ima jedan element više na kraju i to upravo nula. Slično, $\tilde{V}$ ima upravo jedan redak više, a na ostatku je jednak V. Pribrojnik koji je množen

nulom ne pridonosio zbroju $\tilde{b}_0.\tilde{V}$, a svi ostali pribrojnici kod raspisivanja $\tilde{b}_0.\tilde{V}$ su isti kao i kod $b_0.V$.

4. Četvrta tvrdnja slijedi direktno iz definicija $\tilde{I}_m$ i $\tilde{F}$, svi pribrojnici u $\tilde{E}$ isti su kao kod E, osim što

$$I_M(Q_M, P_M) = \tilde{I}_M(\tilde{Q}_M, \tilde{P}_M) + \tilde{I}_{M+1}(\tilde{Q}_{M+1}, \tilde{P}_{M+1})\,.$$

Vrlo slično se dokazuje da tvrdnje 1–4 vrijede za stentove nastale zamijenom bridova. Dapače, zamjena bridova unosi manje preinake u stent nego podjela brida na dva dijela. Indukcijom kroz konačno koraka tvrdnje se dokazuju za stentove nastale dijeljenjem bridova.

Jasno da je stent ekvivalentan sam sa sobom, a direktno iz definicije ide i simetričnost ove relacije. Tranzitivnost slijedi prirodno. Ako su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ ekvivalentni to transformacijom može nastati neki $\mathcal{S}_{12}$, slično iz $\mathcal{S}_2$ i $\mathcal{S}_3$ neki $\mathcal{S}_{23}$. Možemo zamisliti da smo bridove od $\mathcal{S}_2$ prvom transformacijom razlomili (dijelili) u točkama iz skupa Π_1, a drugom transformacijom u točkama iz skupa Π_2. Dijeljenjem u svim točkama iz skupa $\Pi_1 \cup \Pi_2$ iz transformacijom iz stenta $\mathcal{S}_2$ nastaje $\mathcal{S}_{123}$. Međutim, jednako $\mathcal{S}_{123}$ može nastati transformacijom od $\mathcal{S}_1$ i od $\mathcal{S}_3$ u točkama iz skupa $\Pi_1 \cup \Pi_2$. Eventualno, treba pripaziti da se dodatnim zamjenama vrhova i bridova dobije potpuno isti stent $\mathcal{S}_{123}$.

Posljednja tvrdnja propozicije o ekvivalentnim riješenjima ekvivalentnih problema stenta slijedi direktno iz brojevima 1–4 označenih tvrdnji za ekvivalentene stentove, ekvivalentne konfiguracije, ekvivalentne deformacije i kopije dodatnih uvjeta na stent. □

3.5. Ovisnost rješenja o aproksimaciji geometrije stenta

U teoremu 39 pokazati ćemo ("slabu") vrstu stabilnosti modela stenta na "male" perturbacije referentne konfiguracije stenta. Taj glavni teorem dokazuje se preko Γ-konvergencije, po obrascu koji smo slijedili u odjeljku 2.3. Usko grlo koje bi trebalo nadići da se sličan rezultat pokaže za neku drugačiju strukturu štapova je u lemi 44. Za stent ćemo iskoristiti specifičan skupa rješenja jednadžbe $H = 0$, dok kod drugačijih uvjeta strukture odgovarajući postupak može biti zahtjevniji. Npr. već za jedan štap u teoremu 12 postavljeni su zahtjevi $\|v\| < l$ i da nedeformirani štap nije sasvim ravan ($Q \in C\,[0, l] \cup \mathrm{PST} \cup_{y \neq \|v\|} \mathrm{HARMONIKA}_y$).

Zahtjevi na neprekidnost i ograničenost potencijala sile F, koji se spominju, dovoljno su općeniti da dopuštaju neke aproksimacije scenarija opterećenja stenta iz prakse, o čemu više u odjeljku 3.6. Slično kao kod stabilnosti jednog štapa, koristimo topološki prostor $\mathscr{L}$ čime je označen skup $\prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m$ uz topologiju induciranu L^2 normom (vidi (A.23) u dodatku A.10.2).

Zabilješka 38. Zbog leme 31, kada su dodatni uvjeti na stent iz (3.26) takvi da $x_0 = 1$ tada u sljedećem teoremu stabilnosti umjesto postojećeg zahtjeva (3.36) može stajati slabiji uvjet (3.27).

Teorem 39. *Neka je* $\mathcal{S} = \left(B, (l_m)_{m=1}^M, E\right)$ *stent sa* M *bridova i* N *vrhova, te* $(U^\bigstar, Q^\bigstar)$ *jedna njegova referentna konfiguracija. Neka su komponente od* $Q^\bigstar = \left(Q_m^\bigstar\right)_{m=1}^M$ *takve da* $Q_m^\bigstar \in C\left[0, l_m\right] \cup \mathrm{PST} \cup \mathrm{HARMONIKA}$. *Neka je* F *koji se javlja u* (3.24) *takav da*

- (NEPREKIDNOST) *postoji okolina* $\mathcal{O}$ *od* $(U^\bigstar, Q^\bigstar)$ *tako da za svaki niz referentnih konfiguracija stenta* $(U\left[k\right], Q\left[k\right])_{k\in\mathbb{N}}$ *koji u jakoj topologiji na* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$ *konvergira k nekoj referentnoj konfiguraciji* $(U, Q) \in \mathcal{O}$, *za svaku deformaciju stenta* (V, P) *i za svaki niz deformacija stenta* $(V[k], P[k])$ *takav da* $V[k] \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} V$ *jako u* $\mathbb{R}^{N\times 3}$ *i* $P[k] \underset{k\in\mathbb{N}}{\rightharpoonup} P$ *slabo u* $\prod_{m=1}^M \mathcal{W}_m$: *vrijedi* $F\left(U[k], V[k], Q[k], P[k]\right) \to F\left(U, V, Q, P\right)$,
- (OGRANIČENJE RASTA) *za svaki* U *iz neke okoline od* $U^\bigstar$ *postoje* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, $0 \leq \alpha < 2$ *i* $\beta > 0$ *takvi da kadgod deformacija stenta* (V, P) *zadovoljava dodatne uvjete stenta* (3.26), *gdje je* $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_N \end{bmatrix}^T$ *i* $P = (P_m)_{m=1}^M$, *tada vrijedi*
$$F(U, V, Q, P) \leq c_1 + c_2 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^\alpha - c_3 \sum_{n=1}^N \|v_n\|^\beta \ . \tag{3.36}$$

Neka je $(U\left[k\right], Q\left[k\right])_{k\in\mathbb{N}}$ *niz referentnih konfiguracija za* $\mathcal{S}$ *takav da* $(U\left[k\right], Q\left[k\right]) \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ *u jakoj topologiji prostora* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$. *Tada možemo zaključiti:*

1. *postoji* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tako da za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $k \geq k_0$, *postoji barem jedna deformacija* $(V\left[k\right], P\left[k\right])$ *koja riješava problem 30 za stent* $\mathcal{S}$ *i referentnu konfiguraciju* $(U\left[k\right], Q\left[k\right])$,
2. *niz* $(V\left[k\right], P\left[k\right])_{k\in\mathbb{N}}$ *ima barem jedno gomilište u jakoj topologiji prostora* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$,
3. *svako gomilište niza* $(V\left[k\right], P\left[k\right])_{k\in\mathbb{N}}$ *u jakoj topologiji prostora* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$ *riješava problem 30 za stent* $\mathcal{S}$ *i referentnu konfiguraciju* $(U^\bigstar, Q^\bigstar)$.

Definicija 40. Familija funkcionala $J\left[U, Q\right] : \mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, gdje možemo birati (U, Q) između referentnih konfiguracija stenta $\mathcal{S}$, zadana je sa

$$J_{\mathcal{S}}\left[U, Q\right](V, P) \quad = \quad \begin{cases} E(U, V, Q, P), & \text{kada} \begin{cases} H_0(V, Q, P) = 0 & \text{i} \\ H_{\mathrm{dod}}(V, P) = 0 & \text{i} \\ P \in \displaystyle\prod_{m=1}^M \mathcal{W}_m, \end{cases} \\ +\infty, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.37}$$

gdje je E dan u (3.24).

Dokaz. Pokažimo da se BSO možemo svesti na $Q_m^\bigstar \in C\left[0, l_m\right] \cup \mathrm{PST}$, za sve bridove $m \in \{1, \ldots, M\}$. Ako je $Q_m^\bigstar \in \mathrm{HARMONIKA}$, tada ima esencijalne skokove u konačno mnogo točaka na bridu. Dalje ćemo promatrati ekvivalentan stent koji je nastao podjelom bridova upravo u spomenutim točkama esencijalnih prekida $Q_m^\bigstar$. Prema propoziciji 37, problemi stenta za ekvivalentne stentove uz ekvivalentne konfiguracije i kopije dodatnih uvjeta imaju ekvivalentna rješenja. Podjela domene na dijelove, kako se događa kod podjele bridova stenta na djelove, neće utjecati na jaku konvergenciju u $\mathscr{L}$, to je jasno iz primjera gdje $\int_0^2 \|f_k\|^2 \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0$ ako i samo ako $\int_0^1 \|f_k\|^2 \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0$ i $\int_1^2 \|f_k\|^2 \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0$. Međutim, sada stent ima veći broj bridova, a svaki je u prostoru $C\left[0, l_m\right]$. Također može biti i više novih vrhova. Konvergencija novonastalih vrhova je iz razloga što ako za neki vrh originalnog stenta imamo $v_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} v$ uz jaku konvergenciju brida oblika $\int_0^{l_m} \|R[k]_m - R_m^\star\|_2 \to 0$ i uvjete stenta koji su za novonastali vrh oblika $u_k = v_k + \int_0^{l_m} R[k]_m.\vec{\mathrm{i}}$, tada imamo $u_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} v + \int_0^{l_m} R_m^\star.\vec{\mathrm{i}} = u$.

Slijedi glavni dio dokaza, za $Q_m^\bigstar \in C\left[0, l_m\right] \cup \mathrm{PST}$. Zbog $U[k] \to U^\bigstar$ i pretpostavke ograničenog rasta od F, u nekom stražnjem dijelu niza $(U[k], Q[k])_{k\in\mathbb{N}}$ zadovoljena je druga pretpostavka propozicije 32 glede F. Prva pretpostavka ovog teorema glede F nadilazi odgovarajuću pretpostavku iz propozicije 32. Slijedi prvi zaključak teorema, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $k \in \mathbb{N}$ i $k \geq k_0$, postoji barem deformacija $(V\left[k\right], P\left[k\right])$ koja riješava problem 30 za stent S i referentnu konfiguraciju $(U\left[k\right], Q\left[k\right])$. S druge strane očito da rješenje problema 30 nužno minimizira $J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right]$, te da minimizator od $J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right]$ riješava problem 30 za stent $\mathcal{S}$ i referentnu konfiguraciju $\left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ — formulacije su ekvivalentne.

Kao što smo za jedan štap teorem stabilnosti 12 dokazali standardnom tehnikom preko Γ-konverencije, tako i ovdje, ostatak teorema 39 dokazujemo koristeći Γ-konverenciju iz teorema 41. Pretpostavke teorema 39 i 41 su potpuno iste — preuzimamo ih u nastavku ovog dokaza. Stoga možemo dalje koristiti: $J_{\mathcal{S}}[U^\bigstar, Q^\bigstar] = \Gamma - \lim_k J_{\mathcal{S}}[U\left[k\right], Q\left[k\right]]$ u jakoj topologiji prostora $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$.

Za svaku referentnu konfiguraciju (U, Q) stenta $\mathcal{S}$, u nastavku pokušavamo pokazati da vrijede pretpostavke teorema 58 iz dodatka A.2.

Po lemi 43, $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$, ulaganje $\mathcal{W}_m \hookrightarrow L^2\left(0, l_m; \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ je kompaktno (vidi A.3), pa je zatvorenje skupa, $K = \overline{\{(V[k], P[k]) \,:\, k \in \mathbb{N}\}}$, kompaktno u $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$, odnosno $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ je predkompaktan niz (skup). Možemo zaključiti i da $\forall k \in \mathbb{N}$: $\inf J_{\mathcal{S}}\left[V[k], P[k]\right] = \inf_K J_{\mathcal{S}}\left[V[k], P[k]\right]$. Obzirom na spomenutu Γ-konvegrenciju iz teorema 41, klasičan rezultat Γ-konvergencije (teorem 58 u A.2) daje drugi i treći zaključak teorema. $\square$

Teorem 41. *Neka je* $\mathcal{S} = \left(B, (l_m)_{m=1}^M, E\right)$ *stent sa* M *bridova i* N *vrhova, te* $(U^\bigstar, Q^\bigstar)$ *jedna njegova referentna konfiguracija. Neka su komponente od* $Q^\bigstar = \left(Q_m^\bigstar\right)_{m=1}^M$ *takve da* $Q_m^\bigstar \in C\left[0, l_m\right] \cup \mathrm{PST}$. *Neka je* F *koji se javlja u* (3.24) *kao u pretpostavkama neprekidnosti i ograničenja rasta u teoremu 39. Neka su* $(U\left[k\right], Q\left[k\right])$ *referentne konfiguracije za* $\mathcal{S}$ *takve da* $(U\left[k\right], Q\left[k\right]) \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ *u jakoj topologiji prostora* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$. *Tada* $J_{\mathcal{S}}[U^\bigstar, Q^\bigstar] = \Gamma - \lim_n J_{\mathcal{S}}[U\left[k\right], Q\left[k\right]]$ *u jakoj topologiji prostora* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$.

Dokaz. Dokaz teorema sačinjavaju dvije tvrdnje iz definicije Γ-konvergencije (vidi A.2): lema 42 i lema 44. □

Lema 42. *Neka je* F *kao u pretpostavkama neprekidnosti i ograničenja rasta u teoremu 39. Neka* $(U[k], Q[k]) \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ *u* $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$. *Tada za svaki* $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ *koji konvergira ka* (V, P) *u jakoj topologiji prostora* $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$ *vrijedi*

$$J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V, P) \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k]).$$

Dokaz. Dokaz slijedi obrazac dokaza leme 14 iz odjeljka 2.3. Neka niz $(V[n], P[n])_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka (V, P) u jakoj topologiji prostora $\mathfrak{U}$. Pokažimo zaključak leme za ovaj niz. Neka je oznaka $x_n = J_{\mathcal{S}}\left[U[n], Q[n]\right](P[n])$. Ako $\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$ tada je zaključak trivijalan.

U suprotnom, postoji strogo rastući niz $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takav da je podniz $\left(x_{i(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen i konvergentan ka $\liminf_{n\in\mathbb{N}} J_{\mathcal{S}}\left[U[n], Q[n]\right](P[n]) \overset{\text{oznaka}}{=} x \in \mathbb{R}$. Stoga je prema (3.37) i (3.24),

$$x_{i(n)} = \sum_{m=1}^{M} I_m\left(Q[i(n)]_m,\, P[i(n)]_m\right) - F\left(U[i(n)],\, V[i(n)],\, Q[i(n)],\, P[i(n)]\right).$$

Po lemi 43 tada je $(V[i(n)], P[i(n)])_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i ima podniz $(V[i(j(n))], P[i(j(n))])_{n\in\mathbb{N}}$ koji u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ konvergira ka nekom elementu, a obzirom na pretpostavku $(V[n], P[n]) \to (V, P)$ jako u $\mathfrak{U}$ (tj. L^2) i jedinstvenost limesa, to limes mora biti baš

$$(V[i(j(n))], P[i(j(n))]) \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} (V, P) \quad \text{slabo u } \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m. \tag{3.38}$$

Po lemi 43, još slijedi $H_0(V, Q^\bigstar, P) = 0$ i $H_{\mathrm{dod}}(V, P) = 0$. Stoga je prema (3.37), $J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V, P) = \sum_{m=1}^{M} I_m(Q_m^\bigstar, P_m) - F(U^\bigstar, V, Q^\bigstar, P)$.

Obzirom na istaknuto svojstvo (3.38), te pretpostavke konvergencije $Q[n] \to Q$ jako u $\mathscr{L}$, kada lemu 16 iskoristimo na svakoj od M komponenti, slijedi da niz $(A[n])_{n\in\mathbb{N}}$ čije su komponente $(A[n]_m)_{m=1}^M = \left(Q[i(j(n))]_m^T . P[i(j(n))]_m^T . \dot{P}[i(j(n))]_m . Q[i(j(n))]_m\right)_{m=1}^M$

u slaboj topologiji prostora $\mathscr{L}$ konvergira k $A = (A_m)_{m=1}^M = \left(Q_m^T.P_m^T.\dot{P}_m.Q_m\right)_{m=1}^M$. Dalje argumentiramo slično kao u dokazu leme 6: uvrštavanjem članova niza $(A[n])_{n\in\mathbb{N}}$ u teorem o podupirućoj ravnini iskazan nejednakošću (2.18) i prelaskom na limes slijedi

$$\liminf_{n\to\infty} \|A[n]_m\|_{(m)}^2 \geq \|A_m\|_{(m)}^2 = \left\|Q_m^T.P_m^T.\dot{P}_m.Q_m\right\|_{(m)}^2. \tag{3.39}$$

Pretpostavka o neprekidnosti F iz teoremu 39, aktivna je u ovoj lemi, zbog čega

$$f_n \stackrel{\text{def}}{=} F\left(U[i(j(n))], V[i(j(n))], Q[i(j(n))], P[i(j(n))]\right) \to F\left(U^\bigstar, V, Q^\bigstar, P\right). \tag{3.40}$$

Zbrajanjem (3.39) po m i oduzimanjem (3.40) dobije se tražena relacija

$$\underbrace{\liminf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sum_{m=1}^M I_m\left(Q[i(j(n))]_m, P[i(j(n))]_m\right) - f_n}_{= x_{i(j(n))}}}_{= \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_{i(n)} = x = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} J_{\mathcal{S}}\left[U[n], Q[n]\right](V[n], P[n])} \geq \underbrace{\sum_{m=1}^M I_m(Q_m, P_m) - F\left(U^\bigstar, V, Q^\bigstar, P\right)}_{= J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V, P)}.$$

□

Lema 43. *Neka je F kao u pretpostavkama neprekidnosti i ograničenja rasta u teoremu 39. Neka $(U[k], Q[k]) \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ u $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathscr{L}$. Tada za svaki niz $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je realan niz $\left(J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k])\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen vrijedi:*

- $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ je ograničen niz u $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod\limits_{m=1}^M \mathcal{W}_n$, pa postoji barem jedno njegovo gomilište u slaboj topologiji tog prostora,
- *ako je $(V^\star, P^\star)$ gomilište niza $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$* u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod\limits_{m=1}^M \mathcal{W}_n$, tada $H_0(V^\star, Q^\bigstar, P^\star) = 0$ *i* $H_{\text{dod}}(V^\star, P^\star) = 0$.

Dokaz. Neka je $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je realan niz $\left(J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Iz definicije (3.37) proizlazi da je $H_0(V[k], Q[k], P[k]) = 0$, $H_{\text{dod}}(V[k], P[k])$ i

$$J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k]) = \sum_{m=1}^M I_m\left(Q[k]_m, P[k]_m\right) - F\left(U[k], V[k], Q[k], P[k]\right).$$

Označimo $V[k] = \begin{bmatrix} v_1[k] & \dots & v_N[k] \end{bmatrix}^T$. Obzirom na (3.4) i ocjenu rasta za F iz pretpostavke teorema 39 imamo

$$J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k]) \geq \underbrace{K_1 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}[k]_m\right\|_{L^2}^2 - c_1 - c_2 \sum_{m=1}^M \left\|\dot{P}[k]_m\right\|_{L^2}^\alpha}_{\blacksquare_k} + c_3 \sum_{n=1}^N \|v_n[k]\|^\beta.$$

Zbog $\alpha < 2$, izraz označen sa $\blacksquare_k$ u prethodnoj nejednadžbi je ograničen odozdo. Obzirom da je lijeva strana ograničena, to je nužno odozgo ograničen $\sum\limits_{n=1}^N \|v_n[k]\|^\beta$. Sve norme

na $\mathbb{R}^{N\times 3}$ su ekvivalentne pa slijedi da je $(V[k])_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen u normi prostora $\mathbb{R}^{N\times 3}$. Ali sada iz iste nejednakosti zaključujemo da je i niz $(\blacksquare_k)_{k\in}$ odozgo ograničen. Opet koristimo $\alpha < 2$ da zaključimo kako je i $\left(\left\|\dot{P}[k]_m\right\|_{L^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen, pa slijedi $(P[n])_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\prod_{m=1}^{M}\mathcal{W}_m$. Stoga postoji barem jedan konvergentan podniz $(V[i(k)], P[i(k)])_{k\in\mathbb{N}}$ u slaboj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3}\times\prod_{m=1}^{M}\mathcal{W}_m$, pa neka je limes tog podniza označen $(V^\star, P^\star)$. Prostor $\prod_{m=1}^{M}\mathcal{W}_m$ je zatvoren, vidi bilješku 87 u dodatku A.10.3, pa je $P^\star\in\prod_{m=1}^{M}\mathcal{W}_m$.

Zaključujemo $\lim_n V[i(k)] = V^\star$, $\lim_n P[i(k)]_m(0) = P^\star(0)$, $\lim_n P[i(k)]_m(l_m) = P^\star(l_m)$ i $\lim_n \int_0^{l_m} P[i(k)]_m.Q[i(k)]_m.\vec{\imath} = \int_0^{l_m} P^\star_m.Q^\bigstar_m.\vec{\imath}$. Preko definicije (3.25) vidi se neprekidnost za H_0 i H_{dod} u sljedećem kontekstu

$$0 = \lim_n H_0\left(V[k(n)], Q[k(n)], P[k(n)]\right) = H\left(V^\star, Q^\bigstar, P^\star\right),$$
$$0 = \lim_n H_{\text{dod}}\left(V[k(n)], P[k(n)]\right) = H\left(V^\star, P^\star\right). \qquad \square$$

Lema 44. *Neka je F kao u pretpostavkama neprekidnosti i ograničenja rasta teorema 39. Neka su referentne konfiguracije stenta $\mathcal{S}$ takve da $(U[k], Q[k]) \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \left(U^\bigstar, Q^\bigstar\right)$ u $\mathbb{R}^{N\times 3}\times\mathscr{L}$. Neka su komponente od $Q^\bigstar = \left(Q^\bigstar_m\right)_{m=1}^{M}$ takve da $Q^\bigstar_m \in C\left[0, l_m\right]\cup\text{PST}$. Tada za svaki $(V,P)\in\mathfrak{U} = \mathbb{R}^{N\times 3}\times\prod_{m=1}^{M} L^2\left(0, l_m; \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$, postoji niz $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka (V,P) u jakoj topologiji prostora $\mathfrak{U}$ i za koji vrijedi*

$$J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V,P) \geq \limsup_{k\in\mathbb{N}} J_{\mathcal{S}}\left[U[k], Q[k]\right](V[k], P[k]). \tag{3.41}$$

Dokaz. Zaključak leme je trivijalan kada $H_0\left(V, Q^\bigstar, P\right) \neq 0$ ili $H_{\text{dod}}(V,P)\neq 0$ jer tada $J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V,P) = +\infty$. Pretpostavimo stoga da smo u netrivijalnom slučaju, pa je $H_0\left(V, Q^\bigstar, P\right) = H_{\text{dod}}(V,P) = 0$, (V,P) deformacija stenta i

$$J_{\mathcal{S}}\left[U^\bigstar, Q^\bigstar\right](V,P) = \sum_{m=1}^{M} I_m\left(Q^\bigstar_m, P_m\right) - F\left(U^\bigstar, V, Q^\bigstar, P\right)\in\mathbb{R}.$$

Pokazati ćemo *(ključno!)* da čak i u općenitijem slučaju kada $Q[k] \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} Q^\bigstar$ u $\prod_{m=1}^{M}\mathcal{L}_m$ uz topologiju induciranu L^1 normom, možemo naći niz $(V[k], P[k])_{k\in\mathbb{N}}$ za koji vrijedi $H_0\left(V[k], Q[k], P[k]\right) = 0$ i $H_{\text{dod}}\left(V[k], P[k]\right) = 0$, koji konvergira ka (V,P) čak u jakoj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3}\times\prod_{m=1}^{M}\mathcal{W}_m$. Za dokaz (3.41), biti će ipak nužno $Q[k] \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} Q^\bigstar$ u topologiji induciranoj L^2 normom (kao u pretpostavi leme).

Pokažimo prvi slučaj: kada je $H_{\text{dod}} = 0$ trivijalna funkcija. Iz $H_0\left(V, Q^\bigstar, P\right) = 0$ i (3.25) slijedi kako je

$$\begin{bmatrix} P_1(0)^T & \dots & P_M(0)^T & P_1(l_1)^T & \dots & P_M(l_m)^T \end{bmatrix}^T \in \text{Jezgra}\left(\mathtt{D}_1\right)\subseteq\mathbb{R}^{3N\times 3}$$

i još

$$B.V = \begin{bmatrix} \left(\int_0^{l_1} P_1.Q_1^{\bigstar}.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\int_0^{l_m} P_M.Q_M^{\bigstar}.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Nadalje možemo promatrati točke

$$T_m = \int_0^{l_m} P_m.Q_m^{\bigstar}.\vec{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.43}$$

Za svaki $m \in \{1, \ldots, M\}$, neka je $\left(k_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući, ali ne nužno strogo rastući, niz prirodnih brojeva koji slijedi iz propozicije 45 na temelju l_m, T_m, $Q_m^{\bigstar}$, P_m i $(Q[n]_m)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je niz $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran pomoću $j_n = \min\left\{k_n^{(1)}, \ldots, k_n^{(M)}\right\}$. Tada za sve $m \in \{1, \ldots, M\}$ i sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $j_n \leq k_n^{(m)}$, uz $\lim_{n\in\mathbb{N}} j_n = +\infty$. Dalje možemo iskoristiti završnu tvrdnju propozicije 45, koja za svaki $m \in \{1, \ldots, M\}$ daje postojanje niza $(P[n]_m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}$ i $n_m \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_m$ vrijedi $\int_0^{l_m} P[n]_m.Q[n]_m.\vec{\mathrm{i}} = (1 - {}^1\!/_{j_n})\, T_m$, $P[n]_m(0) = P_m(0)$, $P[n]_m(l) = P_m(l_m)$ i $P[n]_m \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} P_m$ u jakoj topologiji prostora $\mathcal{W}_m$. Definiramo

$$V[n] \overset{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{1}{j_n}\right) V \tag{3.44}$$

pa iz nabrojanih svojstava niza $(P[n]_m)_{n\in\mathbb{N}}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq \max\{n_1, \ldots, n_M\}$ slijedi

$$B.V[n] = \left(1 - \frac{1}{j_n}\right) B.V \underset{(3.43)}{\overset{(3.42)}{=}} \begin{bmatrix} (1 - {}^1\!/_{j_n})T_1^T \\ \vdots \\ (1 - {}^1\!/_{j_n})T_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\int_0^{l_1} P[n]_1.Q[n]_1.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\int_0^{l_m} P[n]_M.Q[n]_M.\vec{\mathrm{i}}\right)^T \end{bmatrix}, \tag{3.45}$$

$$\begin{bmatrix} P[n]_1(0)^T & \ldots & P[n]_M(0)^T & P[n]_1(l_1)^T & \ldots & P[n]_M(l_M)^T \end{bmatrix}^T \in \text{Jezgra}\,(\mathtt{D}_1)\ .$$

Tako smo pokazali da $(V[n], P[n]) \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} (V, P)$ u jakoj topologiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$, te da za svaki prirodan broj $n \geq \max\{n_1, \ldots, n_M\}$ vrijedi $H_0\,(V[n], Q[n], P[n]) = 0$. Dalje, zbog pretpostavke $Q[n]_m \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} Q_m^{\bigstar}$ jako u $\mathscr{L}$ po lemi 17 slijedi $I_m(Q[n]_m, P[n]_m) \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} I_m(Q_m^{\bigstar}, P_m)$, za svaki $m \in \{1, \ldots, M\}$. Primjenom definicija (3.37) i (3.24), te na kraju neprekidnosti od F imamo

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{S}}\,[U[n], Q[n]]\,(V[n], P[n]) &= E(U[n], V[n], Q[n], P[n]) \\ &= \sum_{m=1}^{M} \underbrace{I_m(Q[n]_m, P[n]_m)}_{\underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} I_m(Q_m^{\bigstar}, P_m)} - \underbrace{F(U[n], V[n], Q[n], P[n])}_{\underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} F(U^{\bigstar}, V, Q^{\bigstar}, P)}\ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Zaključimo

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} J_{\mathcal{S}}\left[U[n], Q[n]\right](V[n], P[n]) = \underbrace{\sum_{m=1}^{M} I_m(Q_m^{\bigstar}, P_m) - F(U^{\bigstar}, V, Q^{\bigstar}, P)}_{=J_{\mathcal{S}}[U^{\bigstar},Q^{\bigstar}](V,P)} .$$

Time je pokazana tražena tvrdnja u prvom slučaju.

Pretpostavimo da smo u drugom slučaju: kada H_{dod} nije trivijalna, nego propisuje uvjet $b_0.V = y_0$ (vidi definiciju 27). Sada modificiramo definiciju $V[n]$ iz (3.44), na način da

$$V[n] \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \frac{1}{j_n}\right) V + \frac{1}{j_n} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} .$$

Opet imamo $V[n] \to V$. Zbog posebnog oblika matrice B koja u retcima ima samo nule, uz jednu pozitivnu i jednu negativnu jedinicu imamo $B.V[n]$ opet jednako kao u (3.45). Slično kao u (3.30) računamo

$$b_0.V[n] = (1 - {}^1\!/_{j_n})\, \underbrace{b_0.V}_{=y_0} + \underbrace{\frac{1}{j_n}\, b_0. \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}}_{=\frac{1}{j_n}\, y_0} = y_0.$$

U ovom slučaju nismo mijenjali $P[n]$ u odnosu a prvi slučaj. Stoga je i ovaj slučaj zaključen.

Pretpostavimo sada treći slučaj: da H_{dod} propisuje uvjet na jednu ili više $\phi_m = \text{Id}$. Pokazati ćemo da ista konstrukcija niza kao ranije prolazi i u ovom slučaju. Zbog $H_{\text{dod}}(V, P) = 0$, efektivno je za neke indekse m time propisano $P_m(0) = \text{Id}$ i/ili $P_m(l_m) = \text{Id}$. Načinimo istu konstrukciju kao u prvom i drugom slučaju, pa zbog $P[n]_m(0) = P_m(0)$ i $P[n]_m(l) = P_m(l_m)$, za iste indekse m vrijedi $P[n]_m(0) = \text{Id}$ i/ili $P[n]_m(l_m) = \text{Id}$. □

Treba primijetiti da nam kod jednog štapa učvršenog u oba kraja slučaj $\|v\| = l$ nije bio interesantan. Kod stenta pak imamo mogućnost ravnih bridova i stoga je nužno obraditi i slučaj $\|v\| = l$. Naravno kod stenta vrhovi nisu učvršćeni, pa tako u sljedećoj propoziciji imamo dosta slobode u "pomicanju" vrha v.

Propozicija 45. *Neka je $l > 0$, $v \in \mathbb{R}^3$ tako da $\|v\| \leq l$, $Q \in C\,[0, l] \cup \text{PST}$, i $P \in \mathcal{W}$ tako da $\int_0^l P.Q.\vec{\imath} = v$. Neka je $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $Q_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} Q$ u jakoj topologiji na $\mathcal{L}$. Tada postoji niz $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}$, nepadajući divergirajući niz prirodnih brojeva $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_0$ vrijedi $\int_0^l P_n.Q_n.\vec{\imath} = (1 - {}^1\!/_{k_n})\, v$, $P_n(0) = P(0)$, $P_n(l) = P(l)$ i $P_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} P$ u jakoj topologiji na $\mathcal{W}$.*

Štoviše, za svaki drugi nepadajući divergirajući niz prirodnih brojeva $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da

$j_n \leq k_n$, postoji niz $\left(\tilde{P}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_1$ vrijedi $\int_0^l \tilde{P}_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = (1 - {}^1\!/_{j_n})\, v$, $\tilde{P}_n(0) = P(0)$, $\tilde{P}_n(l) = P(l)$ i $\tilde{P}_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} P$ u jakoj topologiji na $\mathcal{W}$.

Dokaz. Dokaz razlikuje dva slučaja: prvi kada $\|v\| < l$ i drugi kada $\|v\| = l$. Oba slučaja slijede iz temeljne geometrijske propozicije 19, prvi direktno, a za drugi je potrebno više truda. U oba slučaja koristimo oznake $A = P(0)$ te $B = P(l)$.

U prvom slučaju, zbog $\|v\| < l$, $Q_n \underset{n}{\longrightarrow} Q$ i $\left(1 - \frac{1}{n}\right) v \underset{n}{\longrightarrow} v$, spomenuta propozicija 19 daje $\kappa \geq 0$ i $r > 0$ tako da čim je $\|Q_n - Q\|_{\mathcal{L}} + \frac{1}{n}\|v\|_2 < r$ tada postoji $P_n \in \mathcal{W}_{A,B}$ takav da $\int_0^l P_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) v$ i

$$\|P_n - P\|_{\mathcal{W}} \leq c\left(\|Q_n - Q\|_{\mathcal{L}} + \left\|\left(1 - \frac{1}{n}\right) v - v\right\|\right) \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0.$$

Slično, čim $j_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} \infty$, možemo dobiti $\int_0^l P_n.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \frac{1}{j_n}\right) v$ i $\left(1 - \frac{1}{j_n}\right) v \underset{n}{\longrightarrow} v$.

U drugom slučaju, zbog $\left\|\int_0^l P.Q.\vec{\mathrm{i}}\right\| = l$ mora biti skoro svuda $P.Q.\vec{\mathrm{i}} = \frac{1}{l} v$. Koristimo elemente za trošenje duljine $S_k = S\left[b, (1 - \frac{1}{k})l, l\right]$ iz definicije 102 u dodatku A.11, gdje je b neki jedinični vektor okomit na v. Direktno iz leme 103 čitamo

$$\int_0^l S_k.P.Q.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \tfrac{1}{k}\right) v, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Iz leme 103 još slijedi da je $S_k(0) = \mathrm{Id} = S_k(l)$. Sada za fiksni $k \in \mathbb{N}$, zbog $\left\|(1 - \frac{1}{k})v\right\| = \left(1 - \frac{1}{k}\right) l < l$, $Q_n \to Q$ i (3.47), propozicija 19 daje $c_k > 0$ tako da $(\exists n_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_k)$ za sve elemente u nekom stražnjem dijelu niza $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, postoji $P_{k,n} \in \mathcal{W}$ takav da $P_{k,n}(0) = A$, $P_{k,n}(l) = B$, $\int_0^l P_{k,n}.Q_n.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) v$ i

$$\|P_{k,n} - S_k.P\|_{\mathcal{W}} \leq c_k \|Q_n - Q\|_{\mathcal{L}}, \qquad \forall n \geq n_k.$$

Dalje ćemo iskoristiti lemu 46 za $y_{k,n} = \|P_{k,n} - S_k.P\|_{\mathcal{W}}$ i $x_n = \|Q_n - Q\|_{\mathcal{L}}$ kako bi proveli, matematičkim žargonom rečeno, "dijagonalni postupak." Lema 46 daje nepadajući niz prirodnih brojeva $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, takav da $\lim_{k\in\mathbb{N}} m_k = +\infty$ i

$$\|P_{m_k,k} - S_{m_k}.P\|_{\mathcal{W}} \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{i} \quad \int_0^l P_{m_k,k}.Q_k.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \tfrac{1}{m_k}\right) v, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

Koristimo (A.27) i (A.24) da pokažemo

$$\begin{aligned}\|S_j.P - P\|_{\mathcal{W}}^2 &= \|S_j.P - P\|_{L^2}^2 + \left\|\dot{S}_j.P + S_j.\dot{P} - \dot{P}\right\|_{L^2}^2 \\ \{\text{lema } 103\} &\leq \underbrace{\|S_j - \mathrm{Id}\|_{L^2}^2}_{\leq l\left(\Psi^{-1}\left(1-\frac{1}{j}\right)\right)^2} + 2 \underbrace{\left\|\dot{S}_j\right\|_{L^2}^2}_{=\frac{16}{l}\left(\Psi^{-1}\left(1-\frac{1}{j}\right)\right)^2} + 2\|P\|_{\mathcal{W}}^2 \underbrace{\|S_j - \mathrm{Id}\|_{L^2}^2}_{\leq l\left(\Psi^{-1}\left(1-\frac{1}{j}\right)\right)^2},\end{aligned}$$

pa dalje preko nejednakosti trokuta i leme 101 ($\lim_{t\to 1} \Psi^{-1}(t) = 0$)

$$\|P_{m_k,k} - P\|_{\mathcal{W}}^2 \leq \underbrace{\|P_{m_k,k} - S_{m_k}.P\|_{\mathcal{W}}}_{\underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\|S_{m_k}.P - P\|_{\mathcal{W}}}_{\underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0}.$$

Tako smo pokazali da za $\|v\| = l$ postoji niz $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{W}$ i nepadajući realni divergirajući niz $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, posebice da može biti zadano $P_k = P_{m_k,k}$, i tada je $P_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} P$ u jakoj topologiji na $\mathcal{W}$, $\int_0^l P_k.Q_k.\vec{\mathrm{i}} = \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) v$, $P_k(0) = P(0)$ i $P_k(l) = P(l)$.

Pokažimo završnu tvrdnju propozicije u drugom slučaju. Za svaki nepadajući niz prirodnih brojeva $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koji divergira u beskonačno uz $j_k \leq m_k$, posljednja tvrdnja leme 46, uz $\tilde{P}_k = P_{j_k,k}$ daje zaključak sličan (3.48):

$$\left\|\tilde{P}_k - S_{j_k}.P\right\|_{\mathcal{W}} \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0.$$

Zbog definicije $P_{n,k}$, vrijedi $\int_0^l \tilde{P}_k.Q_k.\vec{\imath} = \left(1 - \frac{1}{j_k}\right) v$, $\tilde{P}_k(0) = P(0)$ i $\tilde{P}_k(l) = P(l)$. □

Lema 46. *Neka je $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ realan nenegativan niz takav da $\lim_n x_n = 0$. Neka je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan realni nenegativan niz. Neka je $(y_{k,n})_{k\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ realna nenegativna mreža takva da*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq y_{k,n} \leq c_k\, x_n)\,. \tag{3.49}$$

Tada postoji strogo rastući niz prirodnih $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tako da za podmrežu (niz) $(y_{k,n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vrijedi $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} y_{k,n_k} = 0$ i (ne nužno strogo) rastući niz prirodnih brojeva $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koji divergira u beskonačno i takav da za podmrežu (niz) $(y_{m_k,k})_{k\in\mathbb{N}}$ vrijedi $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} y_{m_k,k} = 0$.

Za realni niz $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ koji divergira u beskonačno i takav da $j_k \leq m_k$, također vrijedi $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} y_{j_k,k} = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo kako je dano u iskazu leme. BSO $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je pozitivan niz. Za $k \in \mathbb{N}$ induktivno odaberemo $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n_{k-1}$ tako da za $n \geq n_k$, $0 \leq y_{k,n} \leq c_k\, x_n$ i $x_n \leq \frac{1}{k\, c_k}$. Tada je

$$0 \leq y_{k,n_k} \leq \underbrace{\cancel{c_k}\,\frac{1}{k\,\cancel{c_k}}}_{\underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0}\,. \tag{3.50}$$

Niz $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiramo također induktivno: $m_1 = 1$ i dalje za $k \geq 2$

$$m_k = \begin{cases} m_{k-1} + 1, & k = n_{m_{k-1}+1}, \\ m_{k-1}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Lako se vidi da je taj niz nepadajući. Niz raste za jedan na svakom elementu s indeksom koji je element niza $(n_k)_{k=2}^{\infty}$, a takvih je beskonačno mnogo zbog činjenice da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strogo raste. Time je pokazano $m_k \underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} +\infty$. Na kraju, iz $x_n \leq \frac{1}{k\, c_k}$ za $n \geq n_k$ i (3.49) slijedi

$$y_{k,n} \leq c_k\, \frac{1}{k\, c_k} = \frac{1}{k}, \quad \text{za } n \geq n_k. \tag{3.51}$$

Kada je $k \geq n_1$ iz definicije se vidi da $k \geq n_{m_k}$. Stoga za poseban izbor indeksa iz (3.51) čitamo

$$y_{m_k,k} \leq \underbrace{\frac{1}{m_k}}_{\underset{k\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} 0}\,.$$

Kada je $j_k \leq m_k$ i $k \geq n_1$ tada zbog strogog rasta niza n_k slijedi $k \geq n_{m_k} \geq n_{j_k}$ pa iz

(3.51) imamo

$$y_{j_k,k} \leq \underbrace{\frac{1}{j_k}}_{\xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{}0} . \qquad \square$$

3.6. Razmatranje potencijala sile

Model stenta koji smo iznijeli u prethodnim odjeljcima opisuje odgovor samog stenta na djelovanje konzervativne sile. Ostale čimbenike koji određuju deformirani položaj preostaje uzeti u obzir kroz odgovarajući odabir potencijala sile F u (3.24). Temeljni zahtjev koji nije moguće nadići, da je sila konzervativna, proizlazi iz energetske formulacije modela. Po definiciji, konzervativna sila znači da za svaku materijalnu točku referentne konfiguracije, rad koji je sila obavila kroz deformaciju ne ovisi putu deformacije, već samo o početnoj (referentni položaj) i završnoj točki puta (deformirani položaj). Druga karakterizacija konzervativne sile je da rad koji je obavila sila na zatvorenom putu deformacije (ista početna i završna točka) mora biti nula.

Osim navedenog, u rezultatima za stent (korolar 23 i teorem 39) javljaju se dodatni zahtjevi na potencijal sile, pa se postavlja pitanje da li se isti mogu ostvariti kod uobičajenih primjena simulacija stenta, odnosno koliko je ovdje prikazan model iskoristiv u praksi. Pokazati ćemo da je zahtjeve na potencijal sile moguće ostvariti kod primjena kao što su ispitivanje mehaničkih svojstava stenta i simulacija interakcije stenta s okolinom, odnosno da postoji značajan potencijal primjene ovog modela.

Ispitivanje mehaničkih svojstava stenta

Ne samo da je ispitivanje mehničkih svojstava stenta nezaobilazan dio dizajna i kontrole kvalitete stenta, već usporedba rezultata simulacija i mehaničkih ispitivanja daje konačnu validaciju korisnosti modela. Stoga je nužno omogućiti da se model stenta može iskoristiti kod simulacija koje će vjerno opisivati uvjete i opterećenja mehaničkih ispitivanja.

U člancima Tambača, J; Čanić, S; Paniagua (2010) i Tambača *et al.* (2011) istražuje se odgovor stenta na posebnu vrstu opterećenja: sabijanje, širenje i savijanje. Stentovi testirani u spomenutim člancima zauzimaju po prilici oblik valjkasto položene mrežice, koja ima svoju centralnu zraku (rotaciona os tog "valjka"). Kako bi se raširio, stent se opterećuje silom koja je neovisna o deformaciji (engl. "dead load") i pruža se radijalno iz centralne zrake stenta prema van, tj. okomito na centralnu zraku i okomito na tangentu u točki stenta. Slična sila koja djeluje prema unutra testira odgovor stenta na sabijanje. Savijanje stenta testira se opterećenjem silom u suprotnim smjerovima u sredini i na krajevima štapa.

Primjer 47. Savijanje u računalnom modelu može se postići izborom jednog vektora okomitog na centralnu os stenta, te djelovanjem sile u smjeru tog vektora u sredini, a u

suprotnom smjeru na krajevima stenta. Naš model omogućuje da se ne vodi računa o iznosima sile u sredini i krajevima, već je dovoljno propisati težište. Kod mehaničkih "in vitro" eksperimenata, testiranje savijanja može se jednostavno izvesti ovješanjem mase m u dvije točke na suprotnim krajevima stenta, te fiksiranjem (s ukrućivanjem) jednog vrha u središnjem dijelu. U ovom modelu stenta takvi mehanički uvjeti prevode se u $H_{\text{dod}} = \|v_1 - y_0\| + \|\phi_1 - \text{Id}\|$, gdje je indeksom 1 označen upravo vrh u sredini stenta, a y_0 predstavlja točku prostora u kojoj je taj vrh učvršćen. Sila odgovara točkovnoj sili u dva vrha (BSO vrhovi 2 i 3), a potencijal je

$$F_1(U, V, Q, P) = m\,\vec{g} \cdot (v_2 + v_3)\,. \tag{3.52}$$

Sljedeća propozicija govori da je izloženi model stenta prilagođen simulacijama kao u prethodnom primjeru.

Propozicija 48. *Potencijal $F = F_1$ iz (3.52), uz $H_{\mathcal{S}} = H_0 + H_{\text{dod}}$, gdje je H_0 kao u (3.25), a H_{dod} kao (3.26), uz $x_0 = 1$ odgovara zahtjevima propozicije 32 i teorema 39, pa se stoga prikladan za korištenje u našem modelu stenta.*

Dokaz. Obzirom da je F_1 konstanta to je zasigurno neprekidna pa udovoljava zahtjevima neprekidnosti u propoziciji 23 i teoremu 39. Dalje je zbog svojstva pozitivnosti norme i (3.52)

$$F_1(U, V, Q, P) \leq m\,\vec{g} \cdot (v_2 + v_3) \left(1 + \sum_{m=1}^{M} \|\dot{P}_m\|_{L^2}^{\alpha}\right). \tag{3.53}$$

Međutim u dokazu propozicije 31 pokazano je da iz (3.53) i $x_0 = 1$ slijedi ograničenje rasta sile kao u odgovarajućoj pretpostavci korolara 33 i teorema 39. □

Primjer 49. *Simulacija širenja stenta kao u Tambača* et al. *(2011).* Neka je x-os centralna zraka stenta, a smjer jedinične sile radijalan iz tog pravca kroz točku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ referentne konfiguracije stenta. Nek je h fiksan. Za materijalnu točku koja odgovara spomenutoj točki T_0 nedeformiranog stenta sila je neovisna o položaju:

$$f_{T_0}(x, y, z) = \frac{(0, y_0, z_0)}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}},$$

a potencijal je $\tilde{f}_{T_0}(x, y, z) = \dfrac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}\, y + \dfrac{z_0}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}}\, z = f_{T_0}(x, y, z) \cdot (x, y, z)$. Ova sila će djelovati na način da širi stent. Uzmimo stoga da je ukupan potencijal sile na stentu , vidi (3.1) i (3.2),

$$F_2(U, V, Q, P) = \sum_{m=1}^{M} \iiint_{D_m} \tilde{f}_{(t,\xi,\zeta)} \circ \varphi_{m,h}\,(t, \xi, \zeta) \cdot \varphi_{m,h}\,(t, \xi, \zeta)\; \mathrm{d}t\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta. \tag{3.54}$$

Kako su množenje, kompozicija i integriranje neprekidne operacije, ispada da je F_2 neprekidna u smislu zahtjeva korolara 33 i teorema 39. Zahtjevi ograničenosti rasta sile mogu se nadići, kao u spomenutom korolaru, propisivanjem težišta vrhova (vidi dokaz leme 31). Spomenuti su svi bitni sastojci dokaza sljedeće propozicije.

Propozicija 50. *Potencijal $F = F_2$ iz* (3.54)*, uz $H_{\mathcal{S}} = H_0 + H_{\text{dod}}$, gdje je H_0 kao u* (3.25)*, a H_{dod} kao* (3.26)*, uz $x_0 = 1$ odgovara zahtjevima korolara 33 i teorema 39, pa je stoga prikladan za korištenje u našem modelu stenta.*

Zabilješka 51. Kod mehaničkih ispitivanja stenta biti će vrlo teško primijeniti iste uvjete kao u članku *Tambača* et al. *(2011)*:

1. u tom članku je model stenta opterećen 1D mrtvom linijskom silom, čime taj model simulira širenje fizikalnog stenta opterećenog mrtvom volumnom silom u svakoj točki, što je u praksi teško ostvarivo;

2. gotovo je neizvedivo kod mehaničkog ispitivanja nekako zadržati težište svih vrhova, a da se ne unose nikakve dodatne restrikcije na pomake, npr. pomake bridova ili pomake pojedinih vrhova.

Simulacija interakcije stenta s okolinom

U primjeni, kod umetanja stenta u krvnu žilu, njegovo širenje se događa zbog napuhavanja balona na čijoj stjenci stent "leži" (vidi ilustraciju na stranici 1). Balon se nalazi na kateteru uz pomoć kojeg se podiže tlak unutar balona. Preko stjenke balona sila djeluje na stent koji se širi. Kada stent i balon svojim širenjem počinju pritiskati na unutarnju stjenku žile i na masne naslage koje su joj smanjile lumen, tada dolazi do složenog međuodnosa u djelovanju balona, katetera na kojem se nalazi balon, stenta, žile i naslaga na njoj, te okolnog tkiva.

Najznačajniji doprinos širenju stenta daje balon. Voditelj operacije umetanja stenta ima mogućnost regulirati tlak unutar balona. Tlak u balonu prenosi se kao sila na unutarnju stijenku stenta. Sila je okomita na opnu balona, dakle posredno i na granicu stenta na koju balon priliježe (skica u okviru 3.5).

Iznosimo nekoliko mogućnosti modeliranja sile balona na stent, od jednostavnijih prema složenijima:

1. <u>sila neovisna o deformaciji (engl. "dead load")</u>

   Za svaku materijalnu točku koja je na rubu štapa m, (neka je taj rub označen sa $\{(t,\xi,\zeta) : (t,\zeta) \in \Omega'_m, \xi = -1\}$) sila je konstantna — ista neovisno od deformacije:

   $$f_{m,(t,-1,\zeta)}(x) = (f_1(t,-1,\zeta),\ f_2(t,-1,\zeta),\ f_3(t,-1,\zeta))\,. \tag{3.55}$$

   Tada je rad potreban za premještaj iz točke T_0 u točku T po krivulji Γ jednak $W(t,\xi,\zeta) = \int_\Gamma f(t,\xi,\zeta)\,\mathrm{d}\mathbf{r} = f_{T_0}(t,\xi,\zeta)\cdot(T - T_0)$, a potencijal sile na stentu je

$$F_3(U,V,Q,P) = \sum_{m=1}^{M} \iint\limits_{\Omega'_m} f_{m,(t,-1,\zeta)}\left(\text{deformacija}_m\left(t,-1,\zeta\right)\right) \cdot \text{pomak}_m\left(t,-1,\zeta\right)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}\zeta \tag{3.56}$$

gdje je

$$\text{pomak}_m\left(t,\xi,\zeta\right) = \underbrace{\left(v_{\nu_1(m)} + \int\limits_0^t P_m(s).Q_m(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi P_m(t).Q_m(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta P_m(t).Q_m(t).\vec{\mathrm{k}}\right)}_{=\text{deformacija}_m(t,\xi,\zeta)} - \underbrace{\left(u_{\nu_1(m)} + \int\limits_0^t Q_m(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi Q_m(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta Q_m(t).\vec{\mathrm{k}}\right)}_{\text{početni položaj}}$$

2. <u>konzervativna sila koja se pruža radijalno iz centralne zrake</u>

   Pretpostavi li se da je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ konzervativna sila — takva koja se može zadati potencijalom sile $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, treba biti $f = \nabla\tilde{f}$. Slijedi da rad sile za svaku materijalnu točku odgovara kriviljnom integralu 2. vrste: $W = \int_\Gamma f\,\mathrm{d}\mathbf{r} = f_p(T) - f_p(T_0)$, gdje je $\mathbf{r}(t)$ parametrizacija krivulje Γ s početkom u T_0 i krajem u T po kojoj se materijalna točka deformira. Poseban slučaj je sila koja ovisi samo o položaju središnje linije. Potencijal se računa po formuli

$$F_4(U,V,Q,P) = \sum_{m=1}^{M} \int_0^{l_m} \underbrace{f_p\left(v_{\nu_1(m)} + \int\limits_0^t P_m(s).Q_m(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s\right)}_{\text{potencijal sile u točki deformacije}} - \underbrace{f_p\left(u_{\nu_1(m)} + \int\limits_0^t Q_m(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s\right)}_{\text{potencijal sile u referentnoj točki (prije deformacije)}} \mathrm{d}t\,. \tag{3.57}$$

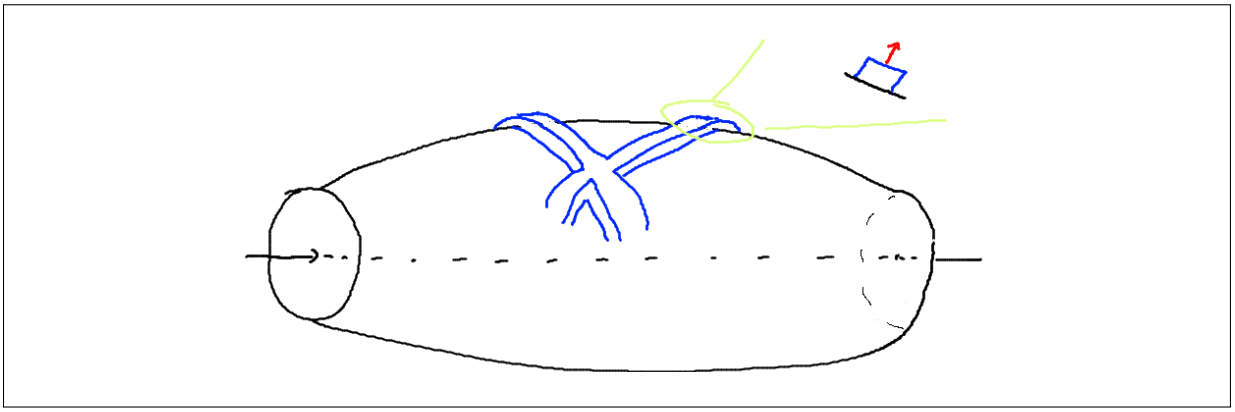
   Volumni integral može se lako zamijeniti integralom po nekom dijelu granice stenta.

3. <u>sila u smjeru normale brida koja ostaje koplanarna centralnoj zraci</u>

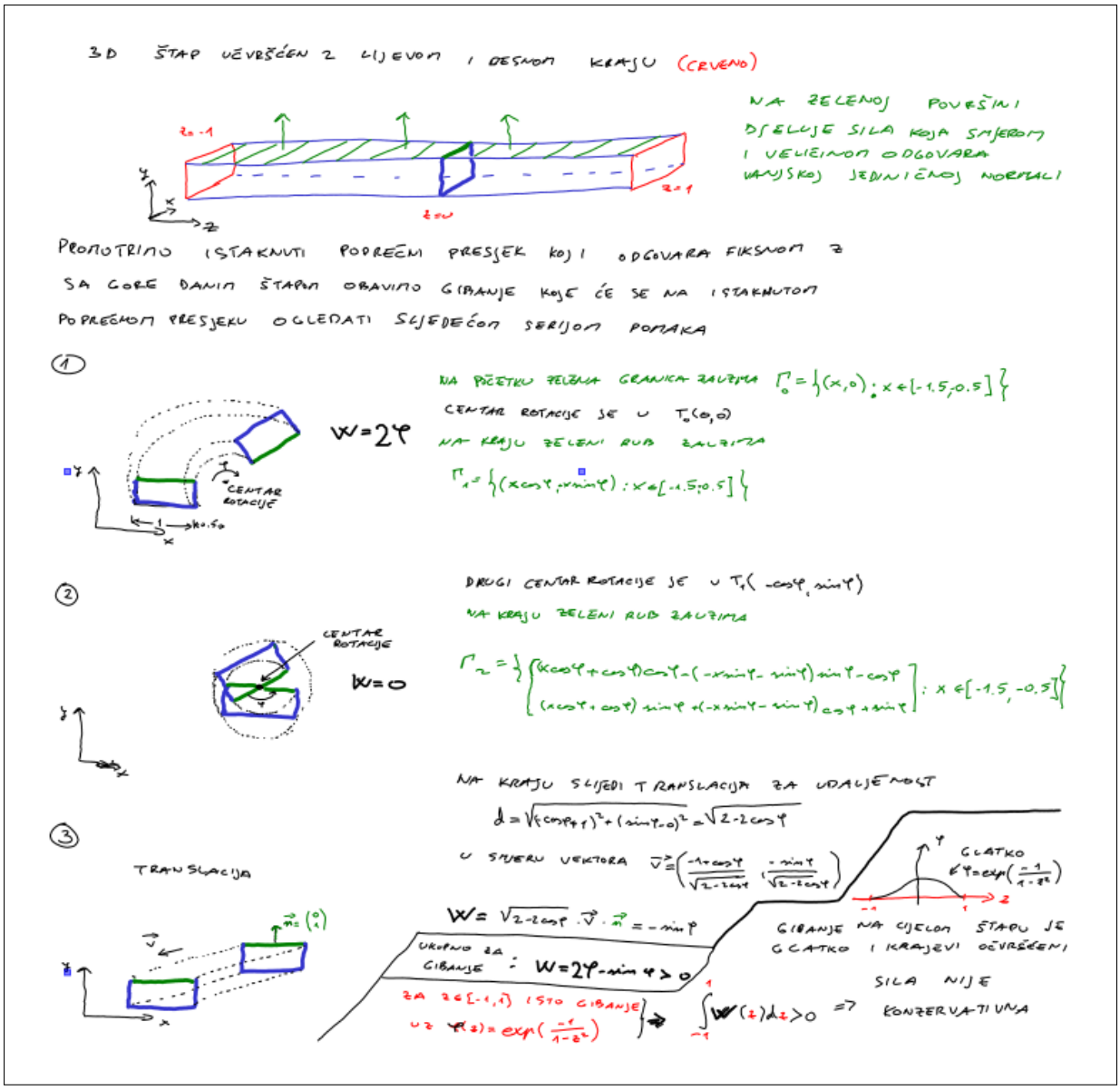
   Skica u okviru 3.5 može sugerirati da normala ostaje u istoj ravnini kao centralna zraka balona, a to podrazumijeva određenu centralnu simetriju u konfiguraciji strukture stenta. Na primjer, po dijelovima ravni štapovi koji tvore stent ne bi zadovoljavali ovaj uvjet. Međutim, čini se da u ovom slučaju sila nije konzervativna. U tu svrhu dovoljno je promotriti gibanje presjeka kao na skici iz okvira 3.6, ali gdje je xy-ravnina rasprostrta tako da sadrži os simetrije (vidi razmatranje u sljedećoj točki).

4. sila u smjeru jedne normale brida bez uvjeta

Ovdje je riječ o sili koja nije konzervativna. U skici iz okvira 3.6 pokazano je kako rad sile po zatvorenoj krivulji može biti različit od nule.



Okvir 3.5.: Dio stenta (plavo) na balonu (crno) prilikom napuhivanja. Izdvojen je poprečni presjek štapa na kojem se sila (crveno) ne pruža radijalno iz centralne zrake, već u smjeru normale $R_m.\vec{\mathrm{j}}$. U stvarnosti na vanjskom rubu stenta još djeluje sila koja gura stent prema unutra.



Okvir 3.6.: Ravni štap pravokutnog presjeka sa tlakom koji djeluje samo na jednu gornju stranicu deformira se putem deformacije nakon čega obavljeni rad sile tlaka nije nula što pokazuje da ovakva sila na površinu nije konzervativna.

Do sada, kada smo pisali da sila izvire radijalno iz osi simetrije strukture, prešutno smo pretpostavljali da balon zadržava položaj centralne zrake ("*os simetrije*"). Nadalje, nedostatak sila F_3 i F_4 jest što, bez dodatnih uvjeta iz propozicije 31, ne zadovoljavaju uvjete teorema egzistencije i neprekidne ovisnosti rješenja stenta: stent može "otploviti" daleko bez utjecaja na potencijal.

Međutim, lumen žile, zajedno sa okolnim tkivom i kateterom na kojem je balon učvršćen snažno se opiru deformacijama stenta koje ne zadržavaju *"težište"* i *"generalnu orijentaciju"* duž osi simetrije. Na primjer, fizikalno je opravdano očekivanje da sila uzrokovana tlakom u balonu neće uzrokovati rotaciju cijelog stenta. Dalje ćemo pokušati formalizirati navedeno. Na kraju ćemo dobiti potencijale F_5 i F_6 koje je moguće iskoristiti tako da se

u zbroju sa F_3 ili F_4 dobije potencijal koji zadovoljava uvjet spomenutih teorema. Tako će na kraju model stenta, uz $F = F_4 + F_6$ biti dobro definiran (egzistencija, neprekidna ovisnost) i moći će pružiti određenu aproksimaciju realnih uvjeta kod implantacije stenta.

U prvoj iteraciji razmotrimo samo položaje vrhova stenta. Promatra se rotacija S i translacija C čija primjena na nedeformirani položaj vrhova $S.u_i + C = X_{\phi_1}.Y_{\phi_2}.Z_{\phi_3}.u_i + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ najbolje opisuju položaj vrhova nakon deformacije stenta (X_{ϕ_1}, Y_{ϕ_2} i Z_{ϕ_3} mogu biti rotacije tzv. Eulerovih kuteva). U tom smislu obzirom na spomenuta fizikalna očekivanja najbolje bi bilo da $\min\limits_{(\phi,c)} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (v_i - S.u_i - C)^2}}_{=h(S,c)}$ bude postignut baš za nulrotaciju (identitetu) $S = \mathrm{Id} \in SO(3)$ ($\phi_i = 0$) i translaciju nulvektorom $C = O$. Prethodno navedeni uvjet prevodi se u nužan uvjet

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial c} & = -\sum_{i=1}^{N} 2\,(v_i - S.u_i - cC) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \phi_j} & = -\sum_{i=1}^{N} 2\,(v_i - S.u_i - C)\,.\frac{\partial S}{\partial \phi_j}.u_i = 0 \end{cases} \text{za} \begin{cases} S = \mathrm{Id} & \text{i}\,\phi_j = 0, \\ C = O & . \end{cases}$$

Zbog $\frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & \\ -\sin\phi & \cos\phi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underset{\phi=0}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ i slično za rotacije oko drugih osi kada gore postavimo $S = \mathrm{Id}$ i $C = O$, dalje slijedi šest uvjeta na deformirani položaj vrhova koje treba

$$\sum_{i=1}^{N} (v_i - u_i) = O \implies \sum_{i=1}^{N} v_i = \sum_{i=1}^{N} u_i\,,$$
$$\sum_{i=1}^{N} (v_i - u_i) \times u_i = O \implies \sum_{i=1}^{N} v_i \times u_i = O\,.$$

Raspisano vektorski:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 1 & & & \cdots \\ & 1 & & & 1 & & \cdots \\ & & 1 & & & 1 & \cdots \\ & u_{1,z} & -u_{1,y} & & u_{2,z} & -u_{2,y} & \cdots \\ -u_{1,z} & & u_{1,x} & -u_{2,z} & & u_{2,x} & \cdots \\ u_{1,y} & -u_{1,x} & & u_{2,y} & -u_{2,x} & & \cdots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,z} \\ v_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,z} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=B_0.V} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} u_{i,x} \\ \sum_{i=1}^{N} u_{i,y} \\ \sum_{i=1}^{N} u_{i,z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X(U)} \tag{3.58}$$

Odmah vidimo da je $B_0.U = X(U)$. Tako smo došli do jednog primjera kako bi se

mogao opisati otpor okolnog tkiva na mjestu širenja stenta i opiranje katetera na rotaciju i pomak:

$$F_5(U,V) = -\left(B_0.V - X(U)\right)^T .\mathrm{diag}\left(k_1,\ldots,k_6\right).\left(B_0.V - X(U)\right), \tag{3.59}$$

gdje konstante $k_i > 0$ opisuju elastičan otpor na pomake težišta i rotacije cijele strukture.

Propozicija 52. *Neka je zadan stant $\mathcal{S}$ sa referentnom konfiguracijom (U,Q). Neka je F_3 zadana sa* (3.55) *i* (3.56)*. Dalje pretpostavimo da je f ograničena, odnosno da postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $\| \left(f_{m,(t,-1,\zeta)}(x)\right) \| < c$ za sve m i $(t,-1,\zeta) \in \Omega'_m$, $m \in \{1,\ldots,M\}$. Neka je F_5 kao u* (3.59)*, uz $k_i > 0$ za $i \in \{1,\ldots,6\}$. Tada sila $F = F_3 + F_5$ udovoljavaju zahtjevima propozicije 32 i teorema 39, odnosno F je neprekidna u* (jako, jako, jako, slaboj) *toplogiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i takva da postoje pozitivne konstante c_1, c_2, c_3 za koje*

$$F(U,V,Q,P) \leq c_1 + c_2 \sum_{m=1}^{M} \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^0 - c_3 \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 .$$

Stoga je F prikladna za korištenje u modelu stenta, čak i bez dodatnih uvjeta.

Dokaz. Neprekidnost je očigledna za F_5. Slaba topologija na $\mathbb{R}^{N\times 3}$ je ujedno i jaka. Glede F_3 možemo vidjeti da pomak ne ovisi o $\dot{P}_m$, već samo o P_m. Još k tome, konvergencija u slaboj topologiji na $\mathcal{W}_m$ povlači konvergenciju po točkama, dakle i jako u L^∞. Međutim, $P_m(t).Q_m(t)$ javlja se pod integralom $\iint_{\Omega'_m} \square \mathrm{d}t\mathrm{d}\zeta$ pa je osigurana tražena neprekidnost.

Neka je $d = \sum_{m=1}^{M} l_m$. Jasno da za svaku materijalnu točku x deformiranog stenta tada vrijedi $\|x\| \leq \|v_1\| + d$. Zbog $\| \left(f_{m,(t,-1,\zeta)}(x)\right) \| < c$ sada slijedi

$$F_3(U,V,Q,P) \leq pc\left(\|v_1\| + d + \|u_1\| + d\right), \tag{3.60}$$

gdje je $p = \sum_{m=1}^{M} \text{površina}\left(\Omega'_m\right)$. Iz prve tri jednakosti u (3.58) imamo

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} u_n \overset{\text{def}}{=} y,$$

gdje smo desnu stranu mogli označiti sa y budući je U fiksan. Sada iz (3.59) slijedi

$$F_5(U,V) \leq -k_{\min} \| \sum_{n=1}^{N} v_n - y \|^2, \tag{3.61}$$

gdje je $k_{\min}$ najmanji među $k_1,\ldots,k_6$. Slično kao u dokazu leme 31 želimo ocijeniti težište pomoću koordinata, pa iz

$$\|v_n\| \leq \| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n \| + d = \frac{1}{N}\|y\| + d$$

dobijemo $\| \sum_{n=1}^{N} v_n - y\|^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 - (Nd + \|y\|)^2$. Odmah iz (3.61) slijedi

$$F_5(U,V) \leq -\frac{k_{\min}}{2} \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 + k_{\min} (Nd + \|y\|)^2$$

i dalje za $F = F_3 + F_5$ imamo

$$\begin{aligned} F(U,V,Q,P) &\leq pc\,(\|u_1\| + 2d) + k_{\min} (Nd + \|y\|)^2 + pc\|v_1\| - \frac{k_{\min}}{2} \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 \\ &\leq pc\,(\|u_1\| + 2d) + k_{\min} (Nd + \|y\|)^2 + \left(\frac{2pc}{k_{\min}}\right)^2 - \frac{k_{\min}}{4} \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 . \qquad \square \end{aligned}$$

Propozicija 53. *Neka je zadan stant $\mathcal{S}$ sa referentnom konfiguracijom (U,Q). Neka je F_4 zadana sa (3.57) gdje je f_p neprekidna i takva da za neke pozitivne c_1 i c_2, $\beta < 2$ i sve x vrijedi $f_p(x) \leq c_1 + c_2\|x\|^\beta$. Neka je F_5 kao u (3.59), uz $k_i > 0$ za $i \in \{1,\ldots,6\}$. Tada sila $F = F_4 + F_5$ udovoljavaju zahtjevima propozicije 32 i teorema 39, odnosno F je neprekidna u* (jako, jako, jako, slaboj) *toplogiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$ i takva da postoje pozitivne konstante c_3, c_4, c_5 za koje*

$$F(U,V,Q,P) \leq c_3 + c_4 \sum_{m=1}^{M} \left\|\dot{P}_m\right\|_{L^2}^0 - c_5 \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 .$$

Stoga je F prikladna za korištenje u modelu stenta, čak i bez dodatnih uvjeta.

Dokaz. Svojstva F_5 možemo uzeti iz dokaza propozicije 52. Također, jednako kao u propoziciji 52 vidimo da je točka deformacije neprekidno ovisna o V, Q, P u (jako, jako, slaboj) toplogiji na $\mathbb{R}^{N\times 3} \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{L}_m \times \prod_{m=1}^{M} \mathcal{W}_m$. Za F_4 imamo

$$F_4(U,V,Q,P) \leq c_1 + c_2\,(\|v_1\| + d)^\beta .$$

Jasno je da se može ocijeniti $(\|v_1\| + d)^\beta \leq c_3\|v_1\|^\beta + c_4$ za neke pozitivne konstante c_3 i c_4. Također se može ocijeniti

$$c_3\|v_1\|^\beta - \frac{k_{\min}}{4}\|v_1\|^2 \leq c_5$$

za neki $c_5 > 0$. Stoga slijedi

$$F(U,V,Q,P) \leq k_{\min} (Nd + \|y\|)^2 + c_4 + c_5 - \frac{k_{\min}}{4} \sum_{n=1}^{N} \|v_n\|^2 . \qquad \square$$

Već smo spomenuli da se odziv stenta ne može opisati samo položajem vrhova, bez razmatranja bridova. Stoga se nameće promatrati položaj cijele strukture i minimizirati

sljedeću funkciju (za $R = P.Q$)

$$h(S,c) = \sum_{m=1}^{M} \iiint_{\Omega_m} \Big(\underbrace{\varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta)}_{\text{(položaj nakon)}} - S. \underbrace{\Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta)}_{\text{(položaj prije)}} - C \Big)^2 .$$

Ako se minimum postiže za nulrotaciju i nultranslaciju tada se prethodni uvjet prevodi u nužan uvjet

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial c_k} & = -2\sum_{i=1}^{M} \iint_{\Omega_i} \left(\varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta) - S.\Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) - C\right) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \phi_j} & = -2\sum_{i=1}^{M} \iint_{\Omega_i} \left(\varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta) - S.\Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) - C\right).\frac{\partial S}{\partial \phi_j}.\Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) = 0 \end{cases}$$

$$\text{za} \begin{cases} S = I & \text{i}\, \phi_j = 0, \\ C = O & . \end{cases}$$

Odatle slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta) &= \sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) \\ \sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \varphi_{m,h}(t,\xi,\zeta) \times \Psi_{m,h}(t,\xi,\zeta) &= 0 \end{aligned}$$

Raspisano:

$$\sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \left(v_{\nu_1(m)} + \int_0^t P(s).Q(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi P(t).Q(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta P(t).Q(t).\vec{\mathrm{k}} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \left(u_{\nu_1(m)} + \int_0^t Q(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi Q(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta Q(t).\vec{\mathrm{k}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \iiint_{\Omega_i} \left(v_{\nu_1(m)} + \int_0^t P(s).Q(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi P(t).Q(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta P(t).Q(t).\vec{\mathrm{k}} \right)$$
$$\times \left(u_{\nu_1(m)} + \int_0^t Q(s).\vec{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}s + \xi Q(t).\vec{\mathrm{j}} + \zeta Q(t).\vec{\mathrm{k}} \right) = 0$$

Sada sa $\Upsilon(V,U,Q,P)$ označimo razliku lijeve i desne strane u prethodnim jednakostima (dim=6). Slično kao prije kod F_5, nameće se razmišljati o sili oblika

$$F_6(V,U,Q,P) = \Upsilon(V,U,Q,P)^T.\mathrm{diag}\left(k_1,\ldots,k_6\right).\Upsilon(V,U,Q,P).$$

Slično kao kod F_5, može se pokazati da i F_6 zadovoljava asimptotske ocjene potrebne za rezultate egzistencije i stabilnosti stenta.

Zaključak

Poopćen je postojeći nelinearni model hiperelastičnog štapa Scardia (2006) i na njemu zasnovan model strukture štapova. Modeli su dopustili dokaz postojanja rješenja, a otprije su poznati neki slučajevi kada rješenje nije jedinstveno. Kod općenite strukture štapova složena povezanost strukture i fiksirani vrhovi trenutno predstavljaju problem za rezultat stabilnosti. Međutim, kada je riječ o jednom štapu s učvršćenim krajevima, kao i kod strukture štapova gdje je najviše jedan vrh fiksan, pokazali smo da na neki način, približavanje parametara koji zadaju nedeformirani položaj u modelu uzrokuje približavanje među rezultatima modela.

Model strukture štapova primijenjen je na stent. Prikazani model ima potencijal da se na njemu izgrade efikasni numerički algoritmi za računalnu simulaciju statike stenta koji će biti brži i točniji od postojećih metoda za relativno velike deformacije. Stabilnost modela omogućava da se krivulje koje određuju položaj prije deformacije pojednostave aproksimacijom ravnim dijelovima, te da takva aproksimacija mnogo ne utječe na grešku simulacije. Ograničenje modela, obzirom da ničim ne priječi međusobnu penetraciju štapova, jest da se može primijeniti samo za mreže štapova koji su fiksno spojeni u mjestima dodira. Nadalje, za validaciju modela u fizikalnom svijetu biti će potrebno u pažljivo odabranim slučajevima usporediti rezultate simulacija sa laboratorijskim mjerenjima.

Modeli povezanih štapova su bogate matematičke strukture u kojima se isprepliću pojmovi iz teorije grafova, realne analize, topologije i geometrije. Na primjer, kako bi se pokazali rezultati egzistencije i stabilnosti za model, trebalo je ocijeniti razliku među deformacijama krivulja temeljem razlika u nedeformiranim položajima i razlika u deformiranom položaju njihovih krajeva. Za taj dokaz koristila se istančana definicija esencijalnog prekida izmjerive funkcije, što se rijetko nalazi. Spomenuto dočarava prožimanje matematičkih teorija, te povezanost razvoja teorijske matematike s primjenama.

A. Dodatak

U dodatku su objedinjeni elementi različitih teorija na koje se oslanjamo u glavnom dijelu ove radnje.

A.1. Teorem o inverznoj funkciji

Klasičan teorem o inverznoj funkciji tvrdi da ako je diferencijal funkcije u točki invertibilan linearni operator, tada je i sama funkcija invertibilna na nekoj okolini te točke. Pojedine verzije pružaju eksplicitne ocjene na domenu i kodomenu inverzne funkcije. Sljedeći teorem dokazan je u (Xinghua, 1999, teorem 4.1).

Teorem 54. *Neka je $L > 0$, neka su X i Y Banahovi prostori, $f : U \subseteq X \to Y$ ima neprekidnu (Frechet) derivaciju (diferencijal) f' na otvorenoj kugli $K(x_0, 1/L)$, neka je $f'(x_0)$ invertibilna i*

$$\left\| f'(x_0)^{-1} f'(x) - I \right\| \leq L \left\| x - x_0 \right\|, \qquad \forall x \in K(x_0, 1/L).$$

Tada postoji i derivabilan je lokalni inverz $f_{x_0}^{-1} : K\left(f(x_0), \frac{1}{2L\|f'(x_0)^{-1}\|}\right) \to K(x_0, 1/L)$.
Uz navedene pretpostavke radijus kugle spomenut u definiciji $f_{x_0}^{-1}$ je najveći mogući.

Teorem o inverznoj funkciji redovito dolazi u paru sa teoremom o implicitno zadanoj funkciji. Nedavni rezultati, poput (Papi, 2005, teorem 3.1) kojeg sljedećeg iznosimo, pokazuju da je eksplicitne ocjene na veličinu domene, poput onih teoremu 54, moguće dobiti i u slučaju Lipschitzove funkcije. Koristi se diferencijal $Df(x_0)$ u generaliziranom smislu koji je uveo Frank H. Clarke (npr. vidi Clarke (1976)). Lipschitzove funkcije su skoro svuda diferencijabilne, pa ima smisla definirati

$$Df(x) = \operatorname{co}\left\{ \lim_{n\in\mathbb{N}} Df(x_n) \,:\, x_n \to x,\ f \text{ diferencijabilna u } x_n \right\},$$

gdje je sa $\operatorname{co} S$ označena konveksna ljuska skupa S. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$, tada je definirano $\|S\|_2 = \sup_{A\in S} \|A\|_2$.

Teorem 55. *Neka je $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova funkcija. Neka su $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$, $L > 0$, $\lambda > 0$, $r > 0$, $K_{\mathbb{R}^m}(x_0, r) \times K_{\mathbb{R}^n}(y_0, r) \subseteq \mathcal{O}$, $F(x_0, y_0) = 0$, $\left\| (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} \right\|_2 < \lambda$,*

$\|\partial_x F\left(K(x_0,r)\times K(y_0,r)\right)\|_2 \le L$, $l=\max\{1,\lambda(1+L)\}$,

$$\mathcal{S}(\lambda)=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ :\ A \textit{ je invertibilna i } \left\|A^{-1}\right\|_2<\lambda\right\},$$
$$r_1=\sup\left\{\rho\in[0,r]:\operatorname{co}\left\{\partial_y F\left(K(x_0,\rho)\times K(y_0,\rho)\right)\right\}\subseteq\mathcal{S}(\lambda)\right\}$$

i $r_2={}^{r_1}/_{2l}$. *Tada postoji i jedinstvena je neprekidna funkcija* $g:K(x_0,r_2)\to K(y_0,r_1)$ *takva da* $g(x_0)=y_0$ *i*

$$F(x,g(x))=0.$$

Također vrijedi

$$\|g(x_1)-g(x_2)\|\le\lambda L\|x_1-x_2\|,\qquad\forall\{x_1,x_2\}\subseteq K(x_0,r_2).$$

Teorem 56. *Neka je* $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *Lipschitzova funkcija,* $x_0\in X$, $r>0$, $\|A^{-1}\|_2<\lambda$ *za svaki* $A\in Df(x)$ *i* $x\in K(x_0,r)$. *Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija* $g:K(f(x_0),r\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\lambda^{-1}\right\})\to K(x_0,r)$ *takva da* $f(g(y))=y$ *za sve* $y\in K\left(f(x_0),r\min\{{}^1/_2,{}^1/_{4\lambda}\}\right)$ *i*

$$\|g(y_1)-g(y_2)\|\le\lambda\|y_1-y_2\|,\qquad\forall\{y_1,y_2\}\subseteq K\left(f(x_0),r\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4\lambda}\right\}\right).$$

Dokaz. Na osnovi teorema o implicitnoj funkciji 55 koji donosi Papi (2005) standardnim putem se dobije iskazani teorem o inverznoj funkciji.

U dokazu će biti zamjenjena imena varijabli x_0 i y_0 u odnosu na iskaz teorema. Neka je $F(x,y)=f(y)-x$. Označimo $x_0=f(y_0)$, $\|\partial_x F\|=1=L$, $\partial_y F(x,y)=Df(y)$, $l=\max\{1,2\lambda\}$, $r_1=r$ i $r_2={}^{r_1}/_{2l}=r\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4\lambda}\right\}$. Zaključak slijedi uvrštavanjem u teorem 55. □

A.2. Γ-konvergencija

Ove su činjenice dobro poznate i elementarne. Donosimo ih zbog potpunosti ove monografije. Cjelovit i pristupačan prikaz s dokazima tvrdnji i primjerima može se naći u Braides (2002).

Definicija 57. $f(x)=\Gamma-\lim_n f_n(x)$ kada

1. za svaki niz $x_n\to x$ vrijedi: $f(x)\le\liminf_n f_n(x_n)$
2. postoji niz $x_n\to x$ takav da: $f(x)=\lim_n f_n(x_n)$

Kažemo $f=\Gamma-\lim_n f_n$ kada sve uključene funkcije imaju istu domenu X i kada $f(x)=\Gamma-\lim_n f_n(x)$ za svaki $x\in X$.

Vrlo važna posljedica Γ-konvergencije jest što Γ-limes dopušta minimizaciju. Sljedeći teorem može se naći u (Braides, 2002, teorem 1.21).

Teorem 58. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka postoji neprazni kompaktni skup $K \subseteq X$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija takvih da $\forall n \in \mathbb{N}$: $\inf_X f_n = \inf_K f_n$, te neka $f = \Gamma \lim_n f_n$ u topologiji induciranoj metrikom prostora X. Tada f poprima minimum (!) i*

$$\min_X f = \lim_n \inf_X f_n.$$

Štoviše, ako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $\lim_n f_n(x_n) = \lim_n \inf_X f_n$, tada su sva gomilišta niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koja eventualno postoje ujedno minimizatori za f.

Zabilješka 59. Za prethodnu tvrdnju mora vrijediti $f = \Gamma \lim_n f_n$ u topologiji koja je metrizabilna, što isključuje slabe topologije na Banachovim prostorima.

Zabilješka 60. Neka je sve kao u gore danom teoremu. Neka za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup I_n indeksira minimume od f_n i $A(n, \iota) \in X$ označava minimum od f_n indeksiran sa $\iota \in I_n$. Moguće da je neki $I_n = \emptyset$ ili neprebrojiv, itd. Skup $S = \{(n, \iota) : n \in \mathbb{N}, \iota \in I_n\}$ uredimo parcijalnim uređajem tako da $(n_1, \iota_1) < (n_2, \iota_2)$ samo kada za prirodne brojeve vrijedi $n_1 < n_2$. Tada je A jedna mreža na X, a gomilišta te mreže prema zaključku teorema čine podskup minimizatora funkcije $f = \Gamma \lim_n f_n$. Međutim, f može imati i drugih minimizatora koji nisu u vezi sa mrežom minimiratora od f_j. Naravno, ukoliko f ima samo jedan minimizator to se ne može dogoditi.

A.3. Funkcijski prostori Soboleva

Radi potpunosti monografije iskazujemo neke klasične rezultate iz teorije prostora Soboleva, koji se mogu pronaći u Adams (1975) i Evans (2002).

Definicija 61. Skup je predkompaktan ako je njegovo zatvorenje kompaktno. Niz je predkompaktan ako njegovi elementi čine predkompaktan skup. Drugim riječima, ako postoji Cauchyjev podniz.

Neka su X i Y Banachovi prostori, uz $X \subseteq Y$. Kažemo da je X kompaktno uložen u Y kada

- $\exists \kappa \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$, $\|x\|_Y \leq \kappa \|x\|_X$,
- svaki ograničeni niz u X je predkompaktan u Y.

Teorem 62. *(Sobolevljeva kompaktna ulaganja — vidi Adams (1975)) Neka je U otvoren i ograničen podskup $\mathbb{R}^n$ čija je granica ∂U klase C^1 i $1 \leq p < n$. Tada je*

1. *za $mp < n$ i $m - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$ prostor $W^{j+m,p}(U)$ kompaktno uložen u $W^{j,q}(U)$.*
2. *za $mp > n$ prostor $W^{j+m,p}(U)$ kompaktno uložen u $C^j(\overline{U})$.*

Teorem o tragu osobito je jednostavan na Sobolevljevim prostorima funkcija čija je domena segment.

Teorem 63. *Za zadani $l > 0$ postoji $C > 0$ tako da za svaki $t \in [0, l]$ i $f \in W^{1,2}(0, l)$ vrijedi $f(t) \leq C \|f\|_{W^{1,2}(0,l)}$.*

Dokaz. Neka je $t \in [l/2, l]$ i $y(x) = \frac{x}{t}$. Tada iz $\int_0^t (f^2 y)'$ i Youngove nejednakosti slijedi

$$f(t)^2 = \int_0^t 2f\, f'\, y + f^2\, y' \leq \left\|f^2\right\|_{L^2} + \left\|f'^2\right\|_{L^2} + \frac{2}{l}\left\|f^2\right\|_{L^2}.$$

Slično se za $t \in [0, l/2]$ i $y(x) = \frac{l-x}{l-t}$ promatra $\int_t^l (f^2 y)'$. U oba slučaja slijedi $C = \sqrt{1 + \frac{2}{l}}$. □

A.4. Slaba poluneprekidnost odozdo i konveksne funkcije

Radi potpunosti preuzimamo standardne rezultate iz (Evans, 2002, poglavlje 8.2 i dodatak B.1).

Definicija 64. Kažemo da je funkcija F na Banachovom prostoru B odozdo slabo (nizovno) poluneprekidna kada za svaki niz x_k koji u slaboj topologiji na B konvergira k x vrijedi

$$F(x) \leq \liminf_{k\to\infty} F(x_k) \tag{A.1}$$

Slaba odozdo neprekidnost od F, uz odgovarajuće druge uvjete, omogućuje postojanje minimizatora. Naime, pretpostavimo da postoji ograničeni niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji minimizira F. Tada je neki podniz $x_{k(n)}$ konvergentan u slaboj topologiji na B, označimo limes sa x. Ako F zadovoljava (A.1) tada imamo

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_{k(n)}) = \inf_{y\in B} F(y),$$

odnosno x je upravo minimizator.

Definicija 65. Neka je V vektorski prostor. Funkcija $f : V \to \mathbb{R}$ je konveksna kada

$$f(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau f(x) + (1-\tau) f(y), \quad \text{za sve } x, y \in V \text{ i } \tau \in [0, 1].$$

Na primjer, poznato je da su pozitivno semidefinitne kvadratne forme konveksne.

Teorem 66. *(O podupirućoj ravnini) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ postoji $r \in \mathbb{R}^n$ tako da*

$$f(y) \geq f(x) + r \cdot (y - x), \qquad \textit{za sve } y \in \mathbb{R}^n.$$

A.5. Topologija

Topološki prostor je skup X zajedno sa familijom podskupova od X, a koje nazivamo otvorenim skupovima, i to tako da:

1. prazan skup $\emptyset$ i cijeli skup X su otvoreni skupovi,
2. svaka unija otvorenih skupova je otvoren skup i
3. svaki konačan presjek otvorenih skupova je otvoren skup.

Okolina točke je svaki otvoreni skup koji sadrži tu točku.

Funkcija među topološkim prostorima je neprekidna ako je praslika (inverzna slika) svakog otvorenog skupa opet otvoren skup. Homeomorfizam je neprekidna funkcija među topološkim prostorima, koja je bijekcija i to takva da je inverz također neprekidna funkcija. Lokalni homeomorfizam je takva funkcija $f : X \to Y$ između dva topološka prostora, da za svaku točku $x \in X$, postoji njena okolina $U \ni x$, takva da je $f(U)$ otvoren skup i da je restrikcija $f|_U : U \to f(U)$ homeomorfizam.

Topološki vektorski prostor X je vektorski prostor nad topološkim poljem K (najčešće $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ sa standardnim topologijama) u topologiji u kojoj su zbrajanje vektora i množenje skalarom neprekidne funkcije. Mnogostrukost je topološki prostor lokalno homeomorfan topološkom vektorskom prostoru. Koordinatna karta na topološkom prostoru je homeomorfizam sa otvorenog podskupa topološkog prostora na otvoren podskup Euklidskog prostora. Po definiciji mnogostrukosti svaka točka je sadržana u nekoj karti. Atlas za topološki prostor je svaka kolekcija koordinatnih karata čija je unija domena cijeli topološki prostor. Ako je kodomena svake karte u atlasu n-dimenzionalni Euklidski prostor i ako su domene karata u atlasu povezane, tada kažemo da je topološki prostor (nad kojim je dan atlas) n-dimenzionalna mnogostrukost.

Hausdofova topologija je takva da svake dvije različite točke topološkog prostora imaju disjunktne (nepreklapajuće) okoline. U Hausdorfovoj topologiji, ako postoji, limes je jedinstven.

Slabu topologiju na Banachovom prostoru X generiraju skupovi $f^{\leftarrow}(A)$ za ograničene linearne funkcionale f na X i otvorene skupove $A \subset \mathbb{R}$. Slaba topologija je ujedno najgrublja topologija za koju je svaki ograničeni linearni operator neprekidna funkcija. Stoga kažemo da $f_n \rightharpoonup f$ slabo na X kada $\lim_{n\in\mathbb{N}} B(f_n - f) \to 0$ za svaki ograničeni linearni funkcional $B : X \to \mathbb{R}$. Poznato je da je slaba topologija na Banachovim prostorima Hausdorfova. Također je poznato da je svaki ograničeni i zatvoreni podskup u slaboj topologiji kompaktan, odnosno ograničen niz u X ima u slaboj topologiji konvergentan podniz. Konvergenciju u normi prostora X često zovemo jakom, kako bi je razlikovali od konvergencije u slaboj topologiji na X. Jaka konvergencija implicira slabu, a kod slabe konvergencije vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 67. *Neka je H Hilbertov prostor, $x_n \rightharpoonup x$ u slaboj topologiji prostora H i $\|x_n\| \to \|x\|$. Tada $x_n \to x$ u jakoj topologiji prostora H.*

Dokaz. Neka je sve kao u pretpostavkama propozicije. Tada

$$\|x - x_n\|^2 = \langle x - x_n, x - x_n\rangle = \underbrace{\langle x, x\rangle}_{=\|x\|^2} + \underbrace{\langle x_n, x_n\rangle}_{=\|x_n\|^2} - \underbrace{\langle x_n, x\rangle}_{\to\|x\|^2} - \underbrace{\langle x, x_n\rangle}_{\to\|x\|^2} \to 0. \qquad \square$$

Definicija 68. Za metrike d_1 i d_2 na prostoru X kažemo da su topološki ekvivalentne kada generiraju istu topologiju, odnosno kada za svaka kugla u d_1 metrici sadrži neku kuglu u d_2 metrici i obratno. Metrike su ekvivalentne u jakom (metričkom) smislu kada postoje pozitivni realni brojevi a i b takvi da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$a\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b\, d_1(x, y).$$

A.6. Diferencijalna topologija

Ovdje sažimamo neke osnovne pojmove koji su nužni za razumijevanje propozicije 77. Na hrvatskom jeziku dostupna je skripta Milin Šipuš & Šiftar (2009) koja na početku navodi nekoliko standardnih stranih udžbenika.

Za dvije karte (U, φ) i (V, ψ) na mnogostrukosti M kažemo da su glatko povezane ako je presjek $U \cap V$ prazan ili ako je $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ glatka (diferencijabilna) funkcija. Atlas se naziva glatkim ako su svake dvije karte koje sadrži glatko povezane. Dva atlasa mogu se objediniti u jedan veći atlas koji sadrži sve karte iz oba atlasa. Međutim, može se dogoditi da rezultat objedinjavanja dva glatka atlasa ne bude više gladak. Ako se dva ili više atlasa mogu objediniti tako da rezultat ipak bude glatki atlas, skup takvih atlasa naziva se skupom kompatibilnih atlasa. Može se pokazati da je relacija kompatibilnosti relacija ekvivalencije, tako da se objedinjavanjem svih kompatibilnih glatkih atlasa može dobiti maksimalni glatki atlas.

Uz dani maksimalni glatki atlas, mnogostrukost se naziva (glatkom ili) diferencijabilnom mnogostrukošću. Drugim riječima: mnogostrukost uz različite, a kompatibilne glatke atlase čini jednu te istu diferencijabilnu mnogostrukost.

Funkcija $f : M \to N$ između dvije diferencijabilne (glatke) mnogostrukosti po definiciji je diferencijabilna (glatka) kada za svaki par koordinatnih karata (U, φ) iz atlasa za M i (V, ψ) iz atlasa za N vrijedi da je kompozicija $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka (diferencijabilna) u klasičnom smislu funkcije na Euklidskom prostoru.

Lijeva grupa $(G, .)$ je naziv za diferencijabilnu mnogostrukost G sa strukturom grupe u odnosu na operaciju "množenja" $. : G \times G \to G$ tako da

1. operacija "množenja" je diferencijabilna funkcija između mnogostrukosti $G \times G$ i G,
2. inverz na "množenje" je diferencijabilne funkcija između mnogostrukosti G i G.

Difeomorfizam je naziv za homeomorfizam između diferencijalnih mnogostrukosti koji je diferencijabilna funkcija i kojoj je inverz diferencijabilna funkcija. Lokalni difeomorfizam je takva funkcija $f : M \to N$ između dvije diferencijabilne mnogostrukosti da za svaku točku $x \in M$, postoji njena okolina $U \ni x$, takva da je $f(U)$ otvoren skup u N i da je restrikcija $f|_U : U \to f(U)$ difeomorfizam.

Neka je M diferencijabilna mnogostrukost, $x \in M$ i (U, φ) koordinatna karta takva da $x \in U$. Tangencijalni prostor mnogostrukosti M u točki x je skup

$$T_x M = \{\varphi(\gamma(0))' : \gamma : [-1, 1] \to M \text{ je glatka krivulja takva da } \gamma(0) = x\}.$$

Može se pokazati da prethodna definicija ne ovisi o karti. Gornja definicija odudara od standardne, utoliko što je uobičajeno definirati tangencijalni prostor kao prostor svih krivulja do na klasu ekvivalencije (dvije krivulje γ_1 i γ_2 ekvivalente kada $\varphi(\gamma_1(0))' = \varphi(\gamma_2(0))'$). Neka je $f : M \to N$ diferencijabilna funkcija između diferencijabilnih mnogostrukosti i $x \in M$. Diferencijal od f u točki x je linearno preslikavanje $\mathrm{d}f_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ koje se može računati po formuli

$$\mathrm{d}f_x \left((\varphi \circ \gamma)' (0) \right) = (\psi \circ f \circ \gamma)' (0), \tag{A.2}$$

gdje je $\gamma : [-1, 1] \to M$ glatka krivulja takva da $\gamma(0) = x$, (U, φ) koordinatna karta koja sadrži x, a (V, ψ) koordinatna karta koja sadrži $f(x)$. Ova definicija odudara od standardne koja koristi tangencijalne prostore kao klase ekvivalencije krivulja, gdje se definira $\mathrm{d}f_x (\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)' (0)$. Koristimo je u dokazu propozicije 77.

A.7. Mjera

Ovdje sažimamo neke osnovne pojmove teorije mjere. Za širi uvid upućujemo u Royden (1989) i [dodaj Antonić-Vrdoljak,Mjera i integral].

σ-algebra Σ na skupu X je neprazna kolekcija podskupova od X zatvorena na prebrojivo mnogo skupovnih operacija komplementa, unije i presjeka. Preciznije, definicija zahtijeva:

1. $\Sigma \neq \emptyset$,
2. $A \in \Sigma \quad \Longrightarrow \quad X \backslash A \in \Sigma$,
3. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$,

iz čega se mogu izvesti ostala svojstva.

(X, Σ) naziva se izmjerivi prostor, a elementi od Σ izmjerivi skupovi. Funkcija $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ je izmjeriva kada je original (praslika) izmjerivog skupa $S_2 \in \Sigma_2$ baš uvijek izmjerivi skup $f^{\leftarrow}(S_2) \in \Sigma_1$.

Svaka familija $\mathcal{F}$ podskupova od X određuje jedinstvenu najmanju σ-algebru koja sa-

drži $\mathcal{F}$ — to je presjek svih σ-algebri koje sadrže $\mathcal{F}$. Istaknuti primjer je Borelova algebra određena topološkim prostorom — Borelovu algebru određuju svi otvoreni skupovi (temeljem topologije). Borelova algebra sadrži i sve zatvorene skupove, ali općenito nije jednaka cijelom partitivnom skupu. Borelova algebra je toliko korištena da, kada se ne specificira σ-algebra za kodomenu izmjerive funkcije podrazumijevamo Borelovu algebru. Elemente Borelove algebre nazivamo Borelovim skupovima.

Drugi istaknuti primjer σ-algebre jest Lebesgueova algebra, do koje dolazimo preko pojma Lebesgueove mjere. Standardna konstrukcija, općenito počinje definicijom vanjske mjere na hiper-kvadrima (kvadar u $\mathbb{R}^3$, pravokutnik u $\mathbb{R}^2$ i interval u $\mathbb{R}$), familiju kojih koje ćemo dalje označavati sa $\mathcal{K}$. Na tim jednostavnim oblicima iz $\mathcal{K}$ vanjsku mjeru skupa $m^*(K)$ je jednostavno definirati: npr. umnožak duljine, širine, visine i slično. Posebno, u ovoj monografiji koristimo samo vanjsku mjeru na intervalima, koja je određena sa $m^*([a,b]) = b - a$. Na općenitom podskupu $S \subseteq X$ vanjska mjera $m^*(S)$ je određena kao infimum

$$m^*(S) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(K_n) \,:\, K_n \in \mathcal{K} \text{ i } S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \right\}.$$

Lebesgueovu algebru čine svi oni podskupovi $E \subseteq X$ takvi da za svaki $A \subseteq X$

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E).$$

Elemente Lebesgueve algebre nazivamo Lebesgue izmjerivi skupovi. Restrikciju vanjske mjere na Lebesgueovu algebru nazivamo mjera i označavamo slovom m bez zvjezdice. Može se pokazati da Lebesgueova algebra sadrži Borelovu. K tome, Lebesgueova algebra sadrži sve podskupove $S \subseteq X$ vanjske mjere nula, tj. takve da $m^*(S) = 0$.

Funkcija je Lebesgue izmjeriva ako je praslika svakog otvorenog (ili Borelovog) skupa iz kodomene baš Lebesgue izmjeriv skup, a Borel izmjeriva ako je praslika svakog otvorenog (ili Borelovog) skupa Borelov skup. Sve Lebesgue izmjerive funkcije na segmentu na stanici 13 označili smo slovom $\mathcal{M}$. Kako bi kompozicija funkcija $f \circ g$ bila Lebesgue izmjeriva dovoljno da je f Lebesgue izmjeriva i g Borel izmjeriva.

Sljedeća propozicija navedena u (Royden, 1989, str. 63) daje precizniji iskaz prvog principa Johna Edensora Littlewooda: svaki izmjerivi skup je skoro konačna unija intervala.

Propozicija 69. *Za izmjeriv skup E konačne mjere i svaki $\varepsilon > 0$, postoji konačna unija U otvorenih intervala tako da $m(U \backslash E) + m(E \backslash U) < \varepsilon$.*

A.8. O kutevima

Poznato je da za standardnu mjeru kuta $\angle$ među proizvoljnim vektorima a, b i c (različitima od nulvektora) vrijedi nejednakost trokuta:

$$\angle(a,b) \leq \angle(a,c) + \angle(c,b). \tag{A.3}$$

Međutim, ponekad je dosta korisna mjera kuta između dva pravca p_a i p_b razapeta vektorima a i b:

$$\angle\left(p_a, p_b\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle\left(a,b\right) \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{|a \cdot b\|}{\|a\|\,\|b\|} = \min\left\{\angle\left(a,b\right), \pi - \angle\left(a,b\right)\right\}, \tag{A.4}$$

gdje je $\angle(a,b) = \arccos \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$ uobičajena mjera kuta među vektorima. Jasno je da uvijek vrijedi $0 \leq \sphericalangle\left(a,b\right) \leq \pi/2$.

Propozicija 70. *Pokažimo da za mjeru kuta $\sphericalangle$ također vrijedi nejednakost trokuta:*

$$\sphericalangle\left(a,b\right) \leq \sphericalangle\left(a,c\right) + \sphericalangle\left(c,b\right). \tag{A.5}$$

Dokaz. Neka su nadalje a, b i c fiksni vektori različiti od nulvektora. Pretpostavimo prvo da je $\angle\left(a,c\right) \leq \pi/2$, odnosno $\pi - \angle\left(a,c\right) \geq \pi/2$ i stoga $\min\left\{\angle\left(a,c\right), \pi - \angle\left(a,c\right)\right\} = \angle\left(a,c\right)$. Koristimo $\pi - \angle\left(a,b\right) = \angle\left(a,-b\right)$ i $\angle\left(-c,-b\right) = \angle\left(c,b\right)$. Iz definicije (A.4) i nejednakosti trokuta za $\angle$ (A.3) slijedi

$$\begin{aligned}
\sphericalangle\left(a,b\right) &= \min\left\{\quad \angle\left(a,b\right) \quad , \quad \pi - \angle\left(a,b\right) \quad\right\} \\
&\leq \min\left\{\angle(a,c) + \angle(c,b), \quad \angle\left(a,-b\right) \quad\right\} \\
&\leq \min\left\{\angle(a,c) + \angle(c,b), \angle\left(a,c\right) + \angle\left(c,-b\right)\right\} \\
&= \min\left\{\angle(a,c) + \angle(c,b), \angle\left(a,c\right) + \pi - \angle\left(c,b\right)\right\} \\
&= \angle\left(a,c\right) + \min\left\{\angle(c,b), \pi - \angle(c,b)\right\} \\
&= \min\left\{\angle\left(a,c\right), \pi - \angle\left(a,c\right)\right\} + \min\left\{\angle(c,b), \pi - \angle(c,b)\right\} \\
&= \sphericalangle\left(a,c\right) + \sphericalangle\left(c,b\right).
\end{aligned}$$

Time je pokazana nejednakost trokuta za $\sphericalangle$ uz pretpostavku $\angle\left(a,c\right) \leq \pi/2$. Slično se dokazuje tražena nejednakost uz pretpostavku $\angle\left(c,b\right) \leq \pi/2$.

Preostaje još samo pokazati nejednakost trokuta za $\sphericalangle$ kada $\angle\left(a,c\right) > \pi/2$ i $\angle\left(c,b\right) > \pi/2$. Tada je $\sphericalangle\left(a,c\right) = \angle\left(a,-c\right)$ i $\sphericalangle\left(c,b\right) = \angle\left(-c,b\right)$. Iz definicije (A.4) raspoznajemo da uvijek vrijedi $\sphericalangle\left(a,b\right) \leq \angle\left(a,b\right)$. Kada još primijenimo nejednakost trokuta za standardnu

mjeru kuta slijedi

$$\sphericalangle(a,b) \leq \angle(a,b) \overset{(A.3)}{\leq} \underbrace{\angle(a,-c)}_{=\sphericalangle(a,c)} + \underbrace{\angle(-c,b)}_{\sphericalangle(c,b)}.$$

Time je nejednakost trokuta dokazana u posljednjem pobrojanom slučaju. □

Lema 71. *Za sve linearno nezavisne vektore a i b, te svaki c takav da je $c \cdot a = 0$ vrijedi*

$$\sphericalangle(a \times b, a \times c) \leq \sphericalangle(b,c).$$

Dokaz. Po pretpostavkama teorema $\|a\| \neq 0$ i $\|b\| \neq 0$ i $\|a \times b\| \neq 0$. Ako je $c = 0$ tvrdnja je trivijalna. Neka je dalje $\|c\| \neq 0$, tada

$$\cos\sphericalangle(a \times b, a \times c) = \frac{|(a \times c) \cdot (a \times b)|}{\|a \times c\| \, \|a \times b\|} \geq \frac{|b \cdot ((a \times c) \times a)|}{\|a\|^2 \, \|c\| \, \|b\|} = \frac{\cancel{\|a\|^2} \, |b \cdot c|}{\cancel{\|a\|^2} \, \|c\| \, \|b\|} = \cos\sphericalangle(b,c)$$

□

A.9. Istaknuti pojmovi teorije matrica

A.9.1. Istaknute matrične norme

Koristimo Frobeniusovu normu tako da za matricu tipa $m \times n$ sa elementima $A = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ vrijedi

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2 \quad .$$

gdje su σ_i singularne vrijednosti matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Zabilješka 72. U glavnom dijelu monografije mnogo se puta koristi invarijantnost operatorske 2-norme na rotacije. Štoviše, pokažimo da je svaka matrična norma koja se može definirati preko singularnih vrijednosti matrice invarijantna na rotacije: tako npr. Frobeniusova norma. Neka je $A = U.\Sigma.V$ dekompozicija singularnih vrijednosti matrice A, te Q ortogonalna matrica tipa m i R ortogonalna matrica tipa n. Tada je $Q.A = (Q.U)\,\Sigma.V$ i $A.R = U.\Sigma.(V.R)$, te da su $Q.U$ i $V.R$ ortogonalne matrice, pa su stoga singularne vrijednosti ostale nepromijenjene nakon množenja sa Q i R.

Frobeniusova norma je samo poseban slučaj za $p = 2$ opće matrične p norme po ele-

mentima koja za matricu $A = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ glasi

$$\left\|\vec{A}\right\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \max_{i,j} |a_{ij}|, & p = +\infty. \end{cases} \tag{A.6}$$

Navedenu p normu po elementima treba razlikovati od inducirane operatorske p norme čija je definicija

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A.x\|_p}{\|x\|_p} \tag{A.7}$$

gdje se na desnoj strani definicije koristi vektorska p norma

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \max_j |x_j|, & p = +\infty. \end{cases}$$

U matričnoj normi u (A.6), promatra se matrica kao vektor, po elementima, pa je stoga iskorištena strelica iznad imena matrice u oznaci na lijevoj strani, kako bi se oznake u (A.6) i (A.7) razlikovale.

Sve matrične norme su ekvivalentne, a inducirane metrike su uniformno izomorfne. Poznata je ocjena

$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{r}\, \|A\|_2 \tag{A.8}$$

gdje je r rang matrice općenite A. Međutim, za antisimetrične matrice ($\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ je izomorfno sa $\mathbb{R}^3$) vrijedi jednakost

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = \max_{\|v\|=1} \left\| \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} .v \right\|_2 = \max_{\|v\|=1} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times v \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\|_2$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \right\|_F .$$

Glede odnosa pojedinih matričnih normi po elementima, vrijedi spomenuti

$$\left\|\vec{A}\right\|_\infty \le \left\|\vec{A}\right\|_2 = \|A\|_F \le \left\|\vec{A}\right\|_1 . \tag{A.9}$$

A.9.2. Potenciranje s matricama

Poznato je da se potenciranje može definirati sa kvadratnom matricom u potenciji:

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Navedeni red uvijek konvergira.

Zabilješka 73. Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{skew}$ vrijedi $\mathrm{e}^A \in SO(n)$. Ako je $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{skew}}$, a vektor $\theta\,(x,y,z) = (\theta x, \theta y, \theta z)$ koji vektorskim umnoškom simulira djelovanje matrice A, određen tako da je $A.v = \theta\,(x,y,z) \times v$ i $x^2+y^2+z^2 = 1$ tada uz korištenje skraćenica $s = \sin\frac{\theta}{2}$ i $c = \cos\frac{\theta}{2}$ vrijedi

$$\mathrm{e}^A = \exp\left(\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -z\theta & y\theta \\ z\theta & 0 & -x\theta \\ -y\theta & x\theta & 0 \end{bmatrix}}^{A=}\right) = \begin{bmatrix} 2(x^2-1)s^2+1 & 2xys^2-2zcs & 2xzs^2+2ycs \\ 2xys^2+2zcs & 2(y^2-1)s^2+1 & 2yzs^2-2xcs \\ 2xzs^2-2ycs & 2yzs^2+2xcs & 2(z^2-1)s^2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{Id} + \frac{\sin\theta}{\theta} A + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} A^2 \dashrightarrow \text{Rodriguesova rotaciona formula} \tag{A.10}$$

$$= \mathrm{Id} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}^2 \tag{A.11}$$

Preslikavanje nije injektivno, singulariteti su sfere radijusa $2n\pi$ (u euklidskoj normi) koje se preslikavaju u identitetu. Otvorena kugla radijusa 2π je dvostruki pokrivač, osim što identitetu pokriva samo nulmatrica. Rotacija za kut θ oko $\mathbf{v}$ jednaka je rotaciji za kut $2\pi - \theta$ oko vektora $-\mathbf{v}$.

Sljedeću korisnu ocjenu prenosimo iz knjige (Horn & Johnson, 1994, korolar 6.2.32 na str. 430).

Propozicija 74. *Za svake dvije kvadratne matrice X i Y, te svaku matričnu normu vrijedi*

$$\|\exp(X+Y) - \exp(X)\| \le \left(\mathrm{e}^{\|Y\|} - 1\right) \mathrm{e}^{\|X\|} \le \|Y\|\, \mathrm{e}^{\|X\|} \mathrm{e}^{\|Y\|}. \tag{A.12}$$

Funkcija $A \mapsto \mathrm{e}^A$ je neprekidna na skupu kvadratnih matrica i Lipschitz neprekidna na svakom njegovom kompaktnom podskupu.

Temeljem prethodne ocjene zbog $\mathrm{Id} = \mathrm{e}^O$ možemo zaključiti

$$\|\exp(A) - \mathrm{Id}\| \le \|A\|\, \mathrm{e}^{\|A\|}. \tag{A.13}$$

A.9.3. Lijeva grupa $SO(3)$

Rotacije $SO(3)$ imaju dupli pokrivač u sferi S^3 koja je dio $\mathbb{R}^4$ — prostoru jediničnih kvaterniona. Ako su P i Q dvije rotacije reprezentirane kvaternionima $p = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{p}$ i q definiramo udaljenost

$$\begin{aligned} d(P, \mathrm{Id}) &= d(p, 1) = \left|\frac{\varphi}{2}\right| && \text{(A.14)} \\ &= \max_{v \neq O} \angle(v,\ P.v) \\ d(P, Q) &= d(PQ^{-1}, \mathrm{Id}) && \text{(A.15)} \\ d(P.R, Q.R) &= d(P, Q) && \text{(A.16)} \end{aligned}$$

Istaknuti kut $\varphi/2$ u (A.14) je upravo onaj kut θ koji uz odgovarajuću os v karakterizira rotaciju $P(v, \theta)$. Stoga ista metrika odgovara izrazima

$$\begin{aligned} d(P, \mathrm{Id}) = |\theta| &= \left|\arccos\left(\frac{\mathrm{trag}\,(P) - 1}{2}\right)\right| \\ d(P, Q) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\log\left(P^T Q\right)\right\|_F && \text{(A.17)} \end{aligned}$$

gdje se koristi matrična Frobeniusova norma. Drugi dvostruki pokrivač $SO(3)$ jest

Uz ovo je $SO(3)$ kompaktan metrički prostor. Dalje $SO(3)^n$ je također kompaktan metrički prostor za $n \in \mathbb{N}$. Posljedica će biti da diskretizirani problem stenta ima rješenje jer minimizator minimizacije neprekidne funkcije postoji na kompaktnom skupu.

Zabilješka 75. Metrika se mogla definirati na drugi način: naslijeđivanjem matrične norme $\|P - Q\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Općenito sve norme na konačno dimenzionalnom prostoru su ekvivalentne, induciraju istu topologiju.

Primjer 76. Izvodi se da su metrike d kao gore i metrika iducirana 2 normom uniformno izomorfne, te općenito $\|P - Q\|_2 \leq d(P, Q)$. Slijedi iz

$$\frac{d(P,Q)}{\|P-Q\|_2} = \frac{d(P, R.P)}{\|P - R.P\|_2} = \frac{d(R^{-1}, \mathrm{Id})}{\|\mathrm{Id} - R\|_2} = \frac{d(R, \mathrm{Id})}{\max\limits_{\|x\|_2 = 1} \|x - R.x\|} = \frac{\theta}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}} \in \left\langle 1, \frac{\pi}{2}\right] \tag{A.18}$$

gdje je R tako da $Q = R.P$ i θ kut za koji rotacija R rotira vektore okomite na os rotacije.

Matrična eksponencijalna funkcija $\exp : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{skew}} \to SO(3)$ nije bijekcija. Sfere radijusa radijusa u operatorskoj 2-normi $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ preslikavaju se u Id. Poznato je da je kugla radijusa π najveća otvorena kugla u operatorskoj 2-normi na kojoj jeexp difeomorfizam. Međutim exp je lokalni difeomorfizam na čitavoj otvorenoj kugli radijusa 2π u operatorskoj 2-normi. Ova otvorena kugla je dvostruki pokrivač skoro cijelog $SO(3)$, osim što je Id pokriven samo jednom (nulom). Za svaki $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{skew}}$ vrijedi $\exp A = \exp\left(-\frac{2\pi - \|A\|_2}{\|A\|_2} A\right)$. Autor nažalost nije našao referencu s dokazom, pa radi potpunosti monografije smatra

nužnim uključiti sljedeću propoziciju.

Propozicija 77. *Matrična eksponencijalna funkcija* $\exp : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}} \to SO(3)$ *je lokalni difeomorfizam osim na sferama radijusa* $2n\pi$ *u operatorskoj* 2*-normi.*

Dokaz. Kako je navedeno u dodatku A.6 diferencijal se može računati po formuli (A.2). Tražimo najbolju bazu koja će rezultirati najjednostavnijim rezultatom na desnoj strani (nakon deriviranja). Neka je $X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ zadan, tada za svaki $y \in \mathbb{R}^3$ imamo $X.y = (x_1\, x_2\, x_3)^T \times y$. Ako je $X \neq O$, biramo $a = (a_1\, a_2\, a_3)^T$ i $b = (b_1\, b_2\, b_3)$ tako da $\|a\| = 1 = \|b\|$ i $a \times \frac{x}{\|x\|} = b$, $\frac{x}{\|x\|} \times b = a$ (imamo $a \perp b$, $a \perp x$ i $b \perp x$). Neka

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je $A.y = a \times y$ i $B.y = b \times y$. Neka su sada γ_i parametrizacije krivulja takve da

$$\gamma_1(t) = X + tX, \gamma_1'(0) = X, \quad \gamma_2(t) = X + tA, \gamma'(0) = A, \quad \gamma_2(t) = X + tB, \gamma'(0) = B.$$

Možemo provjeriti da je $\{X, A, B\}$ ortogonalna baza u $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ uz sljedeći skalarni produkt na matricama: $A : B = \frac{1}{2}\text{Tr}\left(A^T.B\right)$, gdje Tr označava trag matrice. Imamo $A : B = a \cdot b = 0$, $A : X = a \cdot x = 0$ i $B : X = b \cdot x = 0$ (točka označava skalarni umnožak vektora). Slijedi $A \perp B$, $A \perp X$ i $B \perp X$.

Napravimo digresiju zbog činjenica koje će se kasnije pokazati korisnima. Pokažimo da $\{X,\, A,\, B,\, X^2,\, X.A,\, X.B\}$ je linearno nezavisan (čak ortogonalan) skup. Iskoristimo svojstvo vektorskog umnoška tri vektora da $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$ i distributivnost vektorskog množenja pa računajmo

$$\begin{aligned} x \times (x \times (x \times y)) &= x \times (x\,(x \cdot y) - y\,(x \cdot x))\,, \\ \{\text{distributivnost}\} &= (x \cdot y)\, x \times x - (x \cdot x)\, x \times y, \\ &= -\,\|x\|^2\, x \times y \quad . \end{aligned}$$

Iz gornjeg računa možemo zaključiti $X^3 = -\,\|X\|^2\, X \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{Skew}}$. Odatle slijedi $X : X^2 = \frac{1}{2}\text{Tr}\left(X^T.X^2\right) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left(-X^3\right) = 0$. S druge strane, koristeći istu formulu za vektorski umnožak tri vektora i ortogonalnost između x, a i b dobije se

$$\begin{aligned} X^2.A.y &= x \times (x \times (a \times y)) = x \times ((x \cdot y)\, a) = \|x\|\,(x \cdot y)\, b, \\ X.B.y &= x \times (b \times y) = (x \cdot y)\, b\ . \end{aligned}$$

Zbog toga $X^2.A = X.B$, pa zajedno sa $X : X.A = -\text{Tr}\,(X^2.A) = -X^2 : A$ dobijemo

$X : X.A = -X^2 : A = -\mathrm{Tr}\,(X.B) = X : B = 0$. Na isti način može se dobiti da su sve parove među $\{X,\, A,\, B,\, X^2,\, X.A,\, X.B\}$ ortogonalni.

Vratimo se našem diferencijalu, iz Rodriguesove formule (A.10) slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\varphi(X)}X &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(X+tX\right)_{t=0} = \left(f(\|X\|)\,\|X\| + \frac{\sin\|X\|}{\|X\|} + g(\|X\|)\,\|X\|\right)X + 2\frac{1-\cos\|X\|}{\|X\|^2}X^2,\\
\mathrm{d}_{\varphi(X)}A &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(X+tA\right)_{t=0} = \frac{\sin\|X\|}{\|X\|}A + 2\frac{1-\cos\|X\|}{\|X\|^2}X.A,\\
\mathrm{d}_{\varphi(X)}B &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(X+tB\right)_{t=0} = \frac{\sin\|X\|}{\|X\|}B + 2\frac{1-\cos\|X\|}{\|X\|^2}X.B\,.
\end{aligned}$$

Želimo zaključiti da je $\{\mathrm{d}_{\varphi(X)}X,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}A,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}B\}$ linearno nezavisan skup, dapače ortogonalan. Primijetimo da je svaki među $\{\mathrm{d}_{\varphi(X)}X,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}A,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}B\}$ linearna kombinacija dva različita elementa od šest u ortogonalnom skupu $\{X,\, A,\, B,\, X^2,\, X.A,\, X.B\}$. Zbog toga, osim ako neki među $\{\mathrm{d}_{\varphi(X)}X,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}A,\, \mathrm{d}_{\varphi(X)}B\}$ nije baš trivijalna kombinacija, pokazali smo da je $\mathrm{d}_{\varphi(X)}$ izometrija, odnosno exp lokalni difeomorfizam. Treba primijetiti da $\mathrm{d}_{\varphi(X)}A = O = \mathrm{d}_{\varphi(X)}B$ ako i samo ako $\|X\|_2 = \|x\|_2 = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. K tome, $\mathrm{d}_{\varphi(X)}X$ ne može biti nula osim ako faktor $\frac{1-\cos\|X\|}{\|X\|^2}$ nije nula, što nije moguće kada $\|X\|_2 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Tako smo pokazali da je exp lokalni difeomorfizam na $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{Skew}}$, osim eventualno u nuli i na sferama radijusa $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Pokazati da je exp lokalni difeomorfizam oko nule je jednostavno ako se uzme $\gamma_i(t) = X + tA_i$, tako da $\gamma_i'(0) = A_i$ gdje je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada, za $X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$ preko Rodriguesove formule slijedi

$$\mathrm{d}_{\varphi(X)}A_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left(X+tA_i\right)_{t=0} = \frac{f(\|X\|)x_i}{\|X\|}X + \frac{\sin\|X\|}{\|X\|}A_i + \frac{g(\|X\|)x_i}{\|X\|}X + \frac{1-\cos\|X\|}{\|X\|^2}2X.A_i$$

gdje je $f(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{u\cos u - \sin u}{u^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\sin u}{u}\right)$ i $g(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{u\sin u - 2 + 2\cos u}{u^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1-\cos u}{u^2}\right)$ i $X.A_i$ matrični umnožak. Sada je jasno da za $X = O$ uz $\frac{\sin 0}{0} = 1$ u limesu imamo da je $\{\mathrm{d}_{\varphi(X)}A_i\}_{i=1}^3$ linearno nezavisan skup kada $X = O$.

Preostaju još samo sfere radijusa $2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, kako se i tvrdi u iskazu propozicije. Iz Rodriguesove formule slijedi da je na ovim sferama exp poprima vrijednost Id, pa jasno da nije niti bijekcija. □

Primjer 78. Problem definicije matričnog logaritma kao inverzne funkcije eksponenci-

jalnoj standardno se riješava restrikcijom eksponencijalne funkcije na najveću moguću otvorenu kuglu oko ishodišta u $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$. Međutim, najveća moguća otvorena kugla oko ishodišta u $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ nije pokrivač $SO(3)$, što će u primjeni (dokaz propozicije 7) biti potrebno. Stoga ćemo u sljedećoj definiciji matrični logaritam izgraditi preko restrikcije eksponencijalne funkcije na veći skup: osim otvorene kugle oko ishodišta, domeni ćemo pridodati i polovicu ruba te kugle (pola sfere). Za primjenu u lemi 80 biti će bitno da je odabrana polovice sfere Borel izmjeriv skup i da ne sadrži centralno simetrične točke. Do na spomenute zahtjeve odabir $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ u sljedećoj definiciji je proizvoljan.

Definicija 79. Izdvojimo tri matrice A_1, A_2 i A_3 koje čine ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$, uz skalarni produkt $(A,B)_F = \frac{1}{2}\text{trag}\left(A^T B\right)$. Dana su tri podskupa u $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}} \,:\, \|A\|_2 < \pi\right\}\\
\mathcal{A}_1 &= \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}} \,:\, \|A\|_2 = \pi \text{ i } (A,A_1)_F > 0\right\}\\
\mathcal{A}_2 &= \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}} \,:\, \|A\|_2 = \pi \text{ i } (A,A_1)_F = 0 \text{ i } (A,A_2)_F > 0\right\}\\
\mathcal{A}_3 &= \{A_3\}
\end{aligned}$$

Sada je $\mathcal{A} = \cup_{i=0}^{3}\mathcal{A}_i$ jednostruki pokrivač skupa $SO(3)$ i $\exp : \mathcal{A} \to SO(3)$ bijekcija. Funkcija matričnog logaritma $\log : SO(3) \to \mathcal{A} = \cup_{i=0}^{3}\mathcal{A}_i$ je bijekcija definirana kao inverz matrične eksponencijalne funkcije $\exp : \mathcal{A} \to SO(3)$.

Lema 80. *Funkcija matričnog logaritma kako je definirana u definiciji 79 jest Borel izmjeriva.*

Dokaz. Pokazat ćemo da za svaki $\mathcal{O}$ otvoren podskup od $\mathcal{A}$, original od $\mathcal{O}$ za log (skup $\log^{\leftarrow}(\mathcal{O})$) je Borelov skup. Skup $\mathcal{A}_0$ je otvoren, pa kada je $A \in \mathcal{A}_0$, tada je log neprekidna na $\mathcal{U}_R$. Može se zaključiti da je log neprekidna (posljedično Borelova) na $\{\exp(A) \,:\, A \in \mathcal{A}_0\} = \{R \in SO(3) \,:\, d(R,\text{Id}) < \pi\}$.

Skup $\mathcal{A} = \cup_{i=0}^{3}\mathcal{A}_i$ je Borel izmjeriv, jer je unija otvorenih i zatvorenih skupova. Izabran je tako da je $\exp : \mathcal{A} \to SO(3)$ bijekcija. Poznato je (vidi propoziciju 77) kako je eksponencijalna funkcija na $\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$ lokalni difeomorfizam osim na sferama oko nulmatrice radijusa $2n\pi$ u operatorskoj 2-normi, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, oko matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$, koja nije na spomenutim sferama, postoji okolina $\mathcal{O}_A$ i okolina $\mathcal{U}_R$ oko $R = \exp(A)$, te lokalni inverz $\overset{A}{\log} : \mathcal{U}_R \to \mathcal{O}_A$. Kada $A \in \mathcal{A}$, tada $\log(\exp(A)) = \overset{A}{\log}(\exp(A))$.

Preostaje samo ispitati ponašanje za $A \in \cup_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i$ i odgovarajući $R = \exp(A)$. Lokalni inverz, $\overset{A}{\log}$ je neprekidna (dakle Borel izmjeriva) funkcija, a skup $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{A}$ je presjek Borelovih, dakle Borelov. Stoga po definiciji Borelove funkcije, $\overset{A}{\log}^{\leftarrow}(\mathcal{O}_A \cap \mathcal{A})$ je Borelov skup. Još preostaje primjetiti da $\log^{\leftarrow}(\mathcal{O}_A \cap \mathcal{A}) = \exp(\mathcal{O}_A \cap \mathcal{A}) = \overset{A}{\log}^{\leftarrow}(\mathcal{O}_A \cap \mathcal{A})$. Može se zaključiti kako za svaki unutar $\mathcal{A}$ otvoren podskup $\mathcal{O}$, $\log^{\leftarrow}(\mathcal{O})$ je Borelov skup. $\square$

A.10. Istaknuti prostori matričnih funkcija

A.10.1. Klasični Banachovi prostori $L^p\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ i $W^{k,p}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$

Neka je $1 \leq p < +\infty$. Banachov prostor $L^p\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ sastoji se od svih vektorskih funkcija $T\,:\,[0,l] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ čiji su matrični elementi označeni sa $T(s) = (t_{ij}(s))_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$, takvih da uz normu

$$\|T\|_{L^p} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^l |t_{ij}(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} = \left(\int_0^l \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|_p^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}. \tag{A.19}$$

vrijedi $\|T\|_{L^p} < +\infty$. Na primjer, za $T \in L^2\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ vrijedi

$$\|T\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_0^l |t_{ij}(s)|^2\,\mathrm{d}s} = \sqrt{\int_0^l \|T(s)\|_F^2\,\mathrm{d}s}\quad. \tag{A.20}$$

Vrijedi spomenuti kako zbog (A.8), (A.9) i (A.19) možemo zaključiti za sve $T \in L^1\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$

$$\int_0^l \|T(s)\|_2\,\mathrm{d}s \leq \int_0^l \|T(s)\|_F\,\mathrm{d}s \leq \int_0^l \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|_1 \mathrm{d}s = \|T\|_{L^1}. \tag{A.21}$$

Propozicija 81. *Neka je* $\|\quad\|_{☺}$ *proizvoljna matrična norma. Tada je standardnoj normi na* $L^p\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ *definiranoj sa* (A.19) *ekvivalentna norma definirana sa*

$$\|T\|_{☻} = \left(\int_0^l \|T(s)\|_{☺}^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}.$$

Slično vrijedi i za L^∞ *normu kojoj je ekvivalentna norma definirana sa* $\|T\|_{☻} = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,l]} \|T(s)\|_{☺}$.

Dokaz. Poznato je kako su sve norme na konačno dimenzionalnim prostorima ekvivalentne, dok na prostorima funkcija to nije nužno. Međutim, zbog ekvivalencije matričnih normi za neke pozitivne realne brojeve a i b vrijedi $a\,\|A\|_{☺} \leq \left\|\overrightarrow{A}\right\|_p \leq b\,\|A\|_{☺}$ za proizvoljnu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dalje rezultat slijedi kroz tri monotone operacije na odgovarajućim parcijalno uređenim skupovima: potenciranjem pozitivnih realnih brojeva, integriranjem

mjerljivih funkcija i korijenovanjem pozitivnih realnih brojeva

$$\forall T(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad a^p \left\|T(s)\right\|_{☺}^p \leq \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|_p^p \leq b^p \left\|T(s)\right\|_{☺}^p$$

$$\forall T \in \mathcal{M}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right), a^p \int_0^l \left\|T(s)\right\|_{☺}^p \,\mathrm{d}s \leq \int_0^l \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\|_p^p \mathrm{d}s \leq b^p \int_0^l \left\|T(s)\right\|_{☺}^p \mathrm{d}s$$

$$\forall T \in \mathcal{M}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right), \qquad a\left\|T\right\|_{☻} \leq \left\|T\right\|_{L^p} \leq b\left\|T\right\|_{☻}$$

Slično prethodnom setu nejednakosti može se pokazati i ekvivalencija standardne L^∞ norme sa $\left\|T\right\|_{☻} = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,l]} \left\|T(s)\right\|_{☺}$. □

Skup $W^{k,p}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$ sastoji se od svih vektorskih funkcija $T : [0,l] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ takvih da su svi $T, \dot{T}, \ldots, T^{(k)}$ elementi prostora $L^p\left(0,l;\,\mathbb{R}^{m\times n}\right)$. Ovi skupovi čine Banachov prostor uz normu

$$\left\|T\right\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{\iota=0}^{k} \left\|T^{(\iota)}\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p} .$$

Na primjer, za $T \in W^{1,2}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ vrijedi

$$\left\|T\right\|_{W^{1,2}} = \sqrt{\left\|T\right\|_{L^2}^2 + \left\|\dot{T}\right\|_{L^2}^2} = \sqrt{\int_0^l \left\|T(s)\right\|_F^2 \,\mathrm{d}s + \int_0^l \left\|\dot{T}(s)\right\|_F^2 \,\mathrm{d}s} .$$

Za poseban $p = \infty$ i $T : [0,l] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ čiji su matrični elementi označeni sa $T(s) = \left(t_{ij}(s)\right)_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ definiramo ($T^{(\iota)}$ je ι-ta derivacija)

$$\left\|T\right\|_{L^\infty} = \max_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\langle 0,l\rangle} t_{ij}(s) \qquad \text{i} \qquad \left\|T\right\|_{W^{k,\infty}} = \max_{\iota=1,\ldots,k} \left\|T^{(\iota)}\right\|_{L^\infty} .$$

A.10.2. Metrički prostor i Lijeva grupa $\mathcal{L} = L^p\left(0,l;\,SO(3)\right)$

Skup $L^p\left(0,l;\,SO(3)\right)$ sastoji se od svih vektorskih funkcija $P : [0,l] \to SO(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ takvih da je $P \in L^p\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right)$. Posebnost je da svi $L^p\left(0,l;\,SO(3)\right)$ čine jedan te isti skup, koji se sastoji upravo od svih izmjerivih funkcija sa $[0,l]$ na $SO(3)$, a koji smo nazvali $\mathcal{L}$. Vidi okvir 2.5 na strani 13. Skup $L^p\left(0,l;\,SO(3)\right)$ je Lijeva grupa na množenje i potpuni metrički prostor uz metriku induciranu svakom L^p normom. Obzirom na propoziciju 81, standardna metrika (A.19) na $L^1\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ je ekvivalentna metrici na $\mathcal{L}$ koju smo koristili u glavnom dijelu monografije

$$\left\|T\right\|_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l \left\|T(s)\right\|_2 \mathrm{d}s. \tag{A.22}$$

Zabilješka 82. Na nekim mjestima spominje se $L^2(0,l;\, SO(3))$, pri čemu se podrazumijeva isti skup $\mathcal{L}$ sa topologijom nasljeđenom iz norme

$$\|T\|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_0^l \|T(s)\|_2^2 \,\mathrm{d}s}. \tag{A.23}$$

Zbog propozicije 81 i činjenice $SO(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ možemo reći da je topologija $L^2(0,l;\, SO(3))$ naslijeđena sa $L^2(0,l;\, \mathbb{R}^{3\times 3})$.

Zabilješka 83. Neka su proizvoljni $R \in \mathcal{L}$ i $T \in \mathcal{M}(0,l;\, \mathbb{R}^{3\times 3})$. Zbog spomenutog u A.9.1 vrijedi $\|R(t).A(t)\|_F = \|A(t).R(t)\|_F = \|A(t)\|_F$ i $\|R(t).A(t)\|_2 = \|A(t).R(t)\|_2 = \|A(t)\|_2$ za svaki $t \in [0,l]$. Dalje iz (A.20) i (A.22) slijede jednakosti koje koristimo na nebrojeno mjesta u glavnom dijelu monografije

$$\|T.R\|_{L^2} = \|T\|_{L^2} = \|R.T\|_{L^2} \quad \text{i} \quad \|T.R\|_{\mathcal{L}} = \|T\|_{\mathcal{L}} = \|R.T\|_{\mathcal{L}} \tag{A.24}$$

Zabilješka 84. Posebna d_∞ metrika na $\mathcal{L}$ definirana sa

$$d_\infty(P,Q) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,l]} d\left(P(t),\, Q(t)\right), \quad \text{za } P,Q \in \mathcal{L}$$

ekvivalentna je metrici induciranoj L^∞ normom (vidi (A.8), (A.18) i propoziciju 81).

A.10.3. Metrički prostor i Lijeva grupa $\mathcal{W} = W^{1,2}(0,l;\, SO(3))$

Neka je $P : [0,l] \to SO(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ vektorska funkcija, a sa $\dot{P}$ označena derivacija vektorske funkcije u slabom smislu. Neka je $A_P \stackrel{\text{def}}{=} P^T.\dot{P}$, tada derivacija jednakosti $P^T.P = \mathrm{Id}$ otkriva kako je A_P antisimetrična matrica. Zbog $\dot{P} = P.A_P$ vrijedi $\dot{P}$ je kompozicija rotacije i antisimetrične matrice, a zbog napomene 83 u A.10.2 imamo

$$\left\|\dot{P}\right\|_{L^2} = \|P.A_P\|_{L^2} = \|A_P\|_{L^2} \tag{A.25}$$

Napomena 85. Dobro je poznato da se sustav običnih diferencialnih jednadžbi sa konstantnim koeficijentima $\dot{y} = A.y$ uz uvjete $y(0) = y_0$ može riješiti izrazom: $y(t) = \mathrm{e}^{At}.y_0$. Ako $\forall t,s \in [0,l]$ vrijedi $A(t).A(s) = A(s).A(t)$ tada $y(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right).y(0)$ rješava ODJ $y'(t) = A(t).y(t)$, što općenito nije slučaj. U općenitom slučaju rješenje je dano izrazom $y(t) = \exp(\Omega(t)).y(0)$ gdje je $\Omega(t) = \sum_{k=1}^\infty \Omega_k(t)$ Magnusov razvoj. Dovoljan uvjet za konvergenciju Magnusovog razvoja je $\int_0^T \|A(s)\|\,\mathrm{d}s < \pi$. Za kratki prikaz vidi contributors (2012), a za detaljni uvid vidi Blanes *et al.* (2009).

Kao jednostavno poopćenje na matričnu ODJ, uz primjenu napomene 73, slijedi da se gore spomenuta matrična jednakost $\dot{P} = P.A_P$ može jednostavno riješiti za P kada je A_P konstanta:

$$P(s) = P(0).\mathrm{e}^{A_P t} = P(0).\left(\mathrm{Id} + \frac{\sin(t\theta)}{\theta} A_P + \frac{1-\cos(t\theta)}{\theta^2} A_p^2\right).$$

Definicija 86. Sve funkcije $P : [0,l] \to SO(3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ koje su ujedno u prostoru $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$ čine skup $W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$, odnosno vrijedi skupovna jednakost

$$W^{1,2}(0,l;\,SO(3)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(0,l;\,SO(3)) \cap W^{1,2}\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}\right). \tag{A.26}$$

Uz metriku nasljeđenu sa $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$, skup $W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$ čini metrički prostor koji smo u (2.4) na strani 9 označili sa $\mathcal{W}$. Metrika na $\mathcal{W}$ definirana je preko

$$d_{\mathcal{W}}(P,Q) = \|P-Q\|_{\mathcal{W}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_0^l \|P(t)-Q(t)\|_2^2 + \left\|\dot{P}(t)-\dot{Q}(t)\right\|_2^2 \mathrm{d}t} \tag{A.27}$$

Propozicija 81 otkriva nam da je metrika na $\mathcal{W}$ ekvivalentna (u jakom metričkom smislu) metrici nasljeđenoj sa $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$.

Zabilješka 87. Obzirom na pokazano u (A.25) i okviru 2.5 na strani 13, $P \in W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$ ako i samo ako $P \in L^p(0,l;\,SO(3))$ i $A_P \in L^2\left(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}\right)$. Obzirom na relaciju (**??**) na strani **??** i propoziciju 4 slijedi da je, kao presjek potpunih metričkih prostora u (A.26), $W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$ potpun metrički podprostor od $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$. Klasičan je rezultat (Evans, 2002, teorem 2 u odjeljku 5.9.2.) $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}) \subseteq C(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$, što znači da je svaka $P \in W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$ neprekidna.

Definicija 88. $C^{0,\alpha}([0,l];SO(3))$ je normirani prostor funkcija f sa $[0,l]$ u $SO(3)$ koje su Holder neprekidne, odnosno za koje je norma $|f|_{C^{0,\alpha}} = \sup\limits_{x_1,x_2\in[0,l]} \dfrac{d(f(x_1),f(x_2))}{d(x_1,x_2)^\alpha}$ konačna.

Propozicija 89. *Ulaganje $W^{1,2}(0,l;\,SO(3)) \subset\subset L^p(0,l;\,SO(3))$ je kompaktno, tj. svaki ograničeni niz u $W^{1,2}([0,l];SO(3))$ ima konvergentan podniz u $L^p(0,l;\,SO(3))$.*

Dokaz. Rellich-Kondrachov teorem (Dacorogna, 2008, strana 512.) daje $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}) \subset\subset C^{0,\alpha}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$ za $0 \le \alpha < 1/2$. Zbog $C^{0,\alpha}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}) \subseteq L^p(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$ i definicije normi na tim prostorima svaki konvergentan niz u prvom prostoru, konvergira i u drugom. Dakle, ograničeni niz u $W^{1,2}(0,l;\,SO(3))$ ima konvergentan podniz u $L^p(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$. Isti podniz ujedno je Cauchyjev podniz u $L^p(0,l;\,SO(3))$, zbog potpunosti prostora stoga i konvergentan istom limesu. □

Definicija 90. Zbog ulaganja $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3}) \subset\subset C^{0,\alpha}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$ funkcije iz $W^{1,2}(0,l;\,\mathbb{R}^{3\times 3})$ su tek generalizirane funkcije, već ih možemo poistovjetiti sa funkcijama u pravom smislu koje su neprekidne. Zbog toga su dobro definirani prostori (vidi 2.19)

$$W^{1,2}_{A,B}(0,l\,;\,SO(3)) = \left\{f \in W^{1,2}(0,l;\,SO(3)) \,:\, f(0) = A \text{ i } f(l) = B\right\}.$$

A.11. Posebni elementi prostora $\mathcal{W}$

Lema 91. *Neka su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori iz $\mathbb{R}^3$. Tada za $\mathcal{R} = \left\{R \,:\, R \in SO(3),\, R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$ vrijedi*

$$d(\mathcal{R}, Id) = \min_{R\in\mathcal{R}} d(R, Id) = \min\left\{\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right), \pi - \angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)\right\}. \tag{A.28}$$

Dokaz. Rodriguezova formula koju zadovoljava $\vec{j}$ kao rezultat rotacije R sa osi ω i kutem θ vektora $\vec{i}$ glasi:

$$\vec{j} = \vec{i}\cos\theta + \omega \times \vec{i}\sin\theta + \omega\left(\omega\cdot\vec{i}\right)(1-\cos\theta). \tag{A.29}$$

Skalarnim množenjem (A.29) sa ω slijedi $\cos\angle\left(\vec{j},\omega\right) = \cos\angle\left(\vec{i},\omega\right)$, pa obzirom da su kutevi između vektora po definiciji pozitivni u intervalu $[0,\pi]$ slijedi

$$\angle\left(\vec{j},\omega\right) = \angle\left(\vec{i},\omega\right), \tag{A.30}$$

iz čega slijedi da se os svake rotacije iz $\mathcal{R}$ nalazi na kružnici koja leži na jediničnoj sferi, a sve točke su joj jednako udaljene od $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Skalarno množenje (A.29) sa $\omega \times \vec{i}$ daje $\left\|\omega\times\vec{i}\right\|^2 \sin\theta = \vec{j}\cdot\left(\omega\times\vec{i}\right) = \omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$ pri čemu je iskorišteno svojstvo mješovitog umnoška. Dalje se može napisati

$$\sin\theta = \frac{\omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)}{\sin^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)} \tag{A.31}$$

Skalarnim množenjem formule sa $\vec{i}$ slijedi $\vec{i}\cdot\vec{j} = \cos\theta + \left(\vec{i}\cdot\omega\right)^2(1-\cos\theta)$ i dalje

$$\frac{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) - \cos\theta}{1-\cos\theta} = \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)$$

Ako je $\vec{i} = \vec{j}$ tada prethodni izraz pokazuje da $\omega = \vec{i}$ za proizvoljan $\theta \in [0, 2\pi]$, a ako je $\vec{i} = -\vec{j}$ tada prethodni izraz pokazuje da $\theta = \pi$ za proizvoljan $\omega \perp \vec{i}$. Inače, ako $\vec{i} \neq \vec{j} \neq -\vec{i}$ tada isti izraz daje

$$\cos\theta = \frac{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) - \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)}{1-\cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)} = 1 - \frac{1-\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)}{\sin^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)} = \frac{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) - \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)}{\sin^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)}. \tag{A.32}$$

Minimizator (A.28) može se pronaći kao maksimizator (A.32), odnosno maksimizator $\sin^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)$, a to je svaki $\omega \perp \vec{i}$.Iz $\omega \perp \vec{i}$ to $\sin\angle\left(\vec{i},\omega\right) = 1$, a preko (A.30) slijedi još $\omega \perp \vec{j}$, $\omega \parallel \vec{i}\times\vec{j}$ i $\cos\angle\left(\omega, \vec{i}\times\vec{j}\right) = \pm 1$ pa se iz (A.31) dobije $\sin\theta = \pm\sin\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. Dakle, minimum (A.28) se postiže za $\omega = \pm\vec{i}\times\vec{j}$ i $\theta = \pm\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)$. □

Zabilješka 92. Iz (A.31) i (A.32), kada $\vec{i} \nparallel \vec{j}$ može se za svaki jedinični ω koji zadovoljava

(A.30) dobiti jedinstven kut $\theta \in \langle -\pi, \pi]$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{\omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)-\cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)}, & \text{ako } \cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) > \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right) \\ \arctan \frac{\omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)-\cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)} + \pi & \text{ako } \cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) < \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right) \text{ i } \omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) \geq 0 \\ \arctan \frac{\omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)-\cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right)} - \pi & \text{ako } \cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) < \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right) \text{ i } \omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ako } \cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) = \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right) \text{ i } \omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ako } \cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) = \cos^2\angle\left(\vec{i},\omega\right) \text{ i } \omega\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) < 0 \end{cases} \tag{A.33}$$

Napomena 93. Neka je $\vec{i} \nparallel \vec{j}$. Tada $\vec{i}+\vec{j} \perp \vec{i}\times\vec{j}$. Tada se $\mathcal{R}$ može opisati parametarski:

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathrm{e}^{\theta(t)[\omega(t)]_\times} \,:\, \omega(t) = \frac{\vec{i}\times\vec{j}}{\left\|\vec{i}\times\vec{j}\right\|}\cos t + \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|}\sin t,\ \theta = \text{(A.33)},\ t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{A.34}$$

Zbog periodičnosti sinusa i kosinusa to se (A.34) iscrpljuje parametrima $t \in \langle -\pi, \pi]$. Parametrizaciji ω u (A.34) odgovara sljedeća parametrizacija kuta θ:

$$\begin{aligned} \tan\theta(t) &= \frac{\left(\frac{\vec{i}\times\vec{j}}{\left\|\vec{i}\times\vec{j}\right\|}\cos t + \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|}\sin t\right)\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) - \cos^2\angle\left(\vec{i}, \frac{\vec{i}\times\vec{j}}{\left\|\vec{i}\times\vec{j}\right\|}\cos t + \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|}\sin t\right)} \\ &= \frac{\sin\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)\cos t}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right) - \frac{1+\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)}{2}\sin^2 t} = \frac{2\sin\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)\cos t}{\cos\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)\left(1+\cos^2 t\right) - \sin^2 t} \end{aligned} \tag{A.35}$$

Propozicija 94. *Neka su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični vektori iz $\mathbb{R}^3$, neka je $R \in \mathcal{R} = \left\{R \,:\, R \in SO(3),\ R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$ takav da je $d(R, Id) = d(\mathcal{R}, Id)$. Tada je $Q \in \mathcal{R}$ ako i samo ako postoji $\vartheta \in \langle -\pi, \pi]$ tako da $Q = R.\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}$.*

Dokaz. Uvjet je dovoljan jer $\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}.\vec{i} = \vec{i}$ pa $R.\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}.\vec{i} = \vec{j}$.

U nastavku je dokaz nužnosti. Ako je $Q \in \mathcal{R}$ tada $R^T.Q.\vec{i} = R^T.\vec{j} = \vec{i}$ pa je $\vec{i}$ os rotacije $R^T.Q$. Stoga postoji $\vartheta \in \mathbb{R}$ tako da $R^T.Q = \mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}$. Ograničenje na kut $\vartheta \in \langle -\pi, \pi]$ proizlazi iz svojstva periodičnosti eksponencijalne funkcije $\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times} = \mathrm{e}^{(\vartheta+2\pi)[\vec{i}]_\times}$. □

Korolar 95. $\mathcal{R} = \left\{R \,:\, R \in SO(3),\ R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$ *je jednodimenzionalan povezan podskup od $SO(3)$.*

Propozicija 96. *Ako je $R \in \mathcal{R} = \left\{R \,:\, R \in SO(3),\ R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$ minimizator udaljenosti $\mathcal{R}$ od Id tada Id, R $R.\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}$ čine sferni trokut sa pravim kutem kod R i vrijedi*

$$d(R.\mathrm{e}^{\vartheta[\vec{i}]_\times}, Id) = \arccos\left(\cos\left(\min\left\{\angle\left(\vec{i},\vec{j}\right), \pi - \angle\left(\vec{i},\vec{j}\right)\right\}\right)\cos\vartheta\right).$$

Dokaz. Obzirom da metrika na $SO(3)$ odgovara sferi može se iskoristiti kosinusna formula na sferi. Kut između luka $\overline{\mathrm{Id}R}$ i glavne kružnice koja odgovara skupu $\mathcal{R}$ je $\pi/2$ zbog činjenice da R minimizira udaljenost od Id do R. Duljina luka $\overline{R\,R.\mathrm{e}^{\vartheta\left[\vec{i}\right]_\times}}$ iznosi ϑ, a duljina luka $\overline{\mathrm{Id}R}$ iznosi $d(\mathrm{Id}, R) = \angle\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Kosinusna formula daje

$$\cos d(\mathrm{Id}, R.\mathrm{e}^{\vartheta\left[\vec{i}\right]_\times}) = \cos d(\mathrm{Id}, R)\cos\vartheta + \sin d(\mathrm{Id}, R)\sin\vartheta\cos\frac{\pi}{2} = \cos d(\mathrm{Id}, R)\cos\vartheta\,. \qquad \square$$

Lema 97. *Neka $l \in \mathbb{R}$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$ vektori iz $\mathbb{R}^3$, $R \in \mathcal{R}$ minimizator udaljenosti $\mathcal{R} = \left\{R : R \in SO(3),\, R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$ od Id, te $R.\mathrm{e}^{\vartheta_1\left[\vec{i}\right]_\times} = R_1 \in \mathcal{R} \ni R_2 = R.\mathrm{e}^{\vartheta_2\left[\vec{i}\right]_\times}$, gdje su $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \langle -\pi, \pi]$. Vrijedi:*

$$\max\left\{d\left(R.\mathrm{e}^{\vartheta\left[\vec{i}\right]_\times}, Id\right) : \vartheta \in \left[\min_{i=1}^{2}\vartheta_i, \max_{i=1}^{2}\vartheta_i\right]\right\} = \max_{i=1}^{2} d(R_i, Id) \tag{A.36}$$

Dokaz. Prema propoziciji 96 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}d\left(R.\mathrm{e}^{\vartheta\left[\vec{i}\right]_\times}, \mathrm{Id}\right) = \frac{\cos d(\mathrm{Id},R)\sin\vartheta}{\sqrt{1-\cos^2 d(\mathrm{Id},R)\cos^2\vartheta}}$. Obzirom iz leme 91 slijedi $d(\mathrm{Id}, R) \geq 0$ to $\cos d(\mathrm{Id}, R) \geq 0$. Ako je $\cos d(\mathrm{Id}, R) = 0$ zaključak je trivijalan, a inače je lokalni ekstrem koji se poprima za $\vartheta = 0$ lokalni minimum. Stoga se lokalni maksimum postiže na rubu intervala $\vartheta \in [\min_{i=1}^2 \vartheta_i, \max_{i=1}^2 \vartheta_i] \subseteq \langle -\pi, \pi]$. $\square$

Definicija 98. Neka $l \in \mathbb{R}$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$ vektori iz $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{R} = \left\{R : R \in SO(3),\, R.\vec{i} = \vec{j}\right\}$, R minimizator udaljenosti $\mathcal{R}$ do Id, $R.\mathrm{e}^{\vartheta_1\left[\vec{i}\right]_\times} = R_1 \in \mathcal{R} \ni R_2 = R.\mathrm{e}^{\vartheta_2\left[\vec{i}\right]_\times}$. Element duljine l koji spaja vrijednosti R_1 i R_2 je funkcija $V[l, R_1, R_2] : [0, l] \to \mathcal{R}$ takva da $V[l, R_1, R_2](t) = R.\mathrm{e}^{\left(\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{l}t\right)\left[\vec{i}\right]_\times}$,

Zabilješka 99. Elementi bi se mogli definirati pomoću $\omega(t)$ iz formule (A.34), a $\theta(t)$ bi se računalo po formuli (A.33) gdje je $\omega = \omega(t)$.

Propozicija 100. *Vrijedi:*

1. $V[l, R_1, R_2]$ je neprekidna s vrijednostima $V[l, R_1, R_2](0) = R_1$ i $V[l, R_1, R_2](l) = R_2$,
2. $V[l, R_1, R_2](t).\vec{i} = \vec{j}$,
3. $\|V[l, R_1, R_2] - \mathrm{Id}\|_{L^\infty[0,l]} \leq d_\infty(V[l, R_1, R_2], \mathrm{Id}) = \max_{i=1}^2 d(R_i, \mathrm{Id})$,
4. *do na predznak vrijedi*

$$A_{V[l,R_1,R_2]} = V[l, R_1, R_2]^T.\dot{V}[l, R_1, R_2] = \left(\pm\arccos\frac{\cos d(R_2, \mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R}, \mathrm{Id})} \mp \arccos\frac{\cos d(R_1, \mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R}, \mathrm{Id})}\right)\frac{\left[\vec{i}\right]_\times}{l},$$

5. $\int_0^l \left\|\dot{V}[l, R_1, R_2](t)\right\|_2^2 \mathrm{d}t = \int_0^l \left\|A_{V[l,R_1,R_2]}(t)\right\|_2^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{l}\left(d(R_1, \mathrm{Id}) + d(R_2, \mathrm{Id})\right)^2$

Dokaz. Prva tvrdnja proizlazi iz definicije. Druga tvrdnja slijedi jer svi elementi iz $R \in \mathcal{R}$ koji je razapet sa R_1 i R_2 održavaju $R.\vec{i} = \vec{j}$. Treća tvrdnja je ponovljena lema 97 uz notaciju kao u bilješci 84.

Četvrta tvrdnja ima podlogu u

$$V[l,R_1,R_2]^T.\dot{V}[l,R_1,R_2] =$$
$$\exp\left(-\left(\vartheta_1+\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{l}t\right)\left[\vec{i}\right]_\times\right).R^T.R.\exp\left(\left(\vartheta_1+\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{l}t\right)\left[\vec{i}\right]_\times\right).\left[\vec{i}\right]_\times\left(\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{l}\right)=\left(\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{l}\right)\left[\vec{i}\right]_\times.$$

Iz propozicije 96 slijedi $\cos d(\mathrm{Id}, R.\mathrm{e}^{\vartheta\left[\vec{i}\right]_\times}) = \cos d(\mathrm{Id},R)\cos\vartheta$ pa za $\vartheta_i \in [0,\pi]$ vrijedi $\vartheta_i = \arccos\frac{\cos d(R_i,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})}$, dok je za $\vartheta_i \in [-\pi,0]$ predznak suprotan.

Obzirom na invarijantnost norme na rotaciju za svaki t vrijedi $\left\|V[l,R_1,R_2]^T.\dot{V}[l,R_1,R_2]\right\|_2 = \left\|\dot{V}[l,R_1,R_2](t)\right\|_2$. Peta tvrdnja dalje slijedi iz $\frac{\cos a}{\cos b} \geq \cos a$ pa jer je arkus kosinus padajuća: $\arccos\frac{\cos a}{\cos b} \leq a$ za $a \in [0,\pi]$:

$$\sqrt{\int_0^l \frac{1}{l^2}\left(\pm\arccos\frac{\cos d(R_2,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})} \mp \arccos\frac{\cos d(R_1,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})}\right)^2} = \frac{\left|\pm\arccos\frac{\cos d(R_2,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})} \mp \arccos\frac{\cos d(R_1,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})}\right|}{\sqrt{l}}$$
$$\leq \frac{\arccos\frac{\cos d(R_1,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})} + \arccos\frac{\cos d(R_2,\mathrm{Id})}{\cos d(\mathcal{R},\mathrm{Id})}}{\sqrt{l}} \leq \frac{\sum_{i=1}^2 d(R_i,\mathrm{Id})}{\sqrt{l}}. \quad \square$$

Lema 101. *Funkcija* $\Psi : [0,\pi/2] \to [2/\pi, 1]$ *definirana pravilom* $\Psi(0) = 1$, *a inače* $\Psi(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ *je neprekidna, analitička u nuli, strogo padajuća i postoji okolina nule* $[0,\xi]$ *na kojoj* $1 - x^2/6 \leq \Psi(x) \leq 1 - x^2/7$ *i također* $\Psi^{-1}(1 - x^2/6) \geq x \geq \Psi^{-1}(1 - x^2/7)$.

Dokaz. Analitičnost: n-ti član u Taylorovom razvoju za Ψ oko nule je $n+1$ član u Taylorovom razvoju sinusa oko nule. Derivacija $\Psi'(\varphi) = (\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)/\varphi^2$ je neprekidna, njen brojnik je nula samo kada $\varphi = \tan\varphi$, dakle za $\varphi = 0$, a na ostatku domene je istog, negativnog predznaka. Odatle strogi pad. Ocjena na Ψ može se dobiti iz Taylorovog razvoja oko nule: $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^6)$. Ocjena za Ψ^{-1} slijedi iz prethodne ocjene zbog toga jer je funkcija padajuća. $\square$

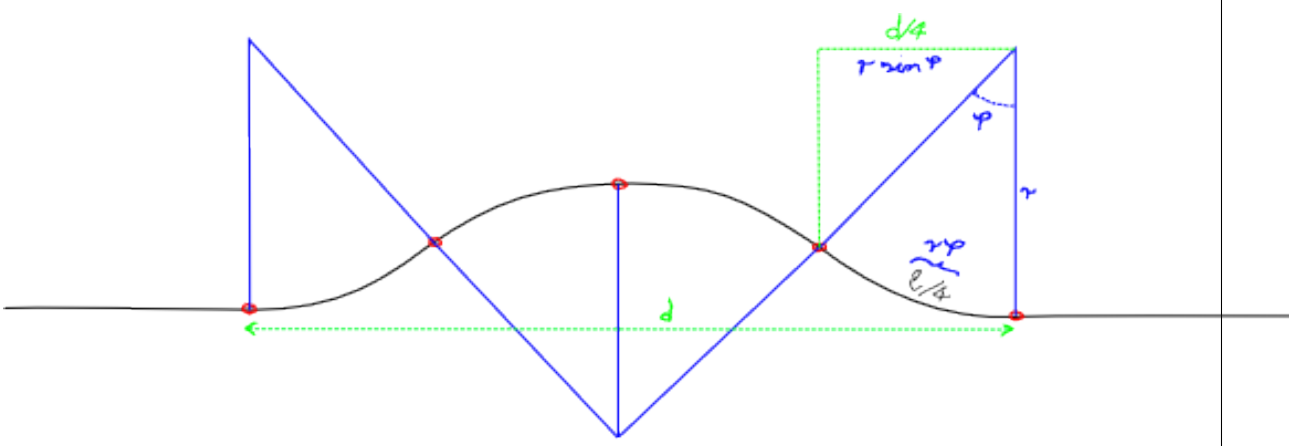
Definicija 102. Rotacija za kružni element koja koristi duljinu $l \in \mathbb{R}$ na udaljenosti $d \leq l$ okomito na jedinični vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je preslikavanje $S[\vec{b},d,l] : [0,l] \to SO(3)$, definirano po dijelovima i po slučajevima:

- kada $0 \leq l \leq (\pi/2 - 1)\,d$: $S\left[\vec{b},d,l\right](t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\left[\vec{b}\right]_\times}, & 0 \leq t \leq \frac{l}{4} \\ \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\left[\vec{b}\right]_\times}, & \frac{l}{4} \leq t \leq \frac{3l}{4} \\ \mathrm{e}^{\frac{4t-4l}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\left[\vec{b}\right]_\times}, & \frac{3l}{4} \leq t \leq l \end{cases}$

- kada $\pi/2d \leq l$: $S\left[\vec{b}, d, l\right](t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{4t}{d}\left[\vec{b}\right]_\times}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi d}{8} \\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\left[\vec{b}\right]_\times}, & \frac{\pi d}{8} \leq t \leq \frac{l}{2} - \frac{\pi d}{8} \\ \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{d}\left[\vec{b}\right]_\times}, & \frac{l}{2} - \frac{\pi d}{8} \leq t \leq \frac{l}{2} + \frac{\pi d}{8} \\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\left[\vec{b}\right]_\times}, & \frac{l}{2} + \frac{\pi d}{8} \leq t \leq l - \frac{\pi d}{8} \\ \mathrm{e}^{\frac{4t-4l}{d}\left[\vec{b}\right]_\times}, & l - \frac{\pi d}{8} \leq t \leq l \end{cases}$

Kružni element koji troši višak duljine kod l u odnosu na d okomito na jedinični vektor $\vec{b}$ je je krivulja sa parametrizacijom $r(t) = \int_0^\tau S\left[\vec{b}, d, l\right](\tau).e_1 \,\mathrm{d}\tau$, vidi sliku A.1. Ponekad je potrebno (gotovo) ravnu krivulju koja se pruža okomito na $\vec{b}$ na fiksnom intervalu $I = \langle a_I, b_I \rangle$ duljine $l_I = b_I - a_I$, skratiti za faktor $\varsigma \in [0, 1\rangle$. U tu svrhu definiramo

$$\check{S}_I\left[\vec{b}, \varsigma\right](t) = \begin{cases} S\left[\vec{b}, l_I\left(1-\varsigma\right), l_I\right](t - a_I), & t \in I, \\ \mathrm{Id}, & \text{inače.} \end{cases}$$



Okvir A.1.: Element za trošenje duljine na ravnom dijelu duljine d postavlja krivulju duljine l. Nova krivulja se sastoji od 4 kružna luka duljine $l/4$, koji odgovaraju radijusu r i kutu φ: $l/4 = r\varphi$. Sa slike se vidi da se $d/4$ također može izraziti pomoću kuta φ i radijusa r: $d/4 = r \sin\varphi$. Rješavanjem dvije jednadžbe s poznatim parametrima d i l za dvije nepoznanice r i φ slijedi jednadžba za φ: $\Psi(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin\varphi}{\phi} = \frac{d}{l}$ $(\Psi : [0, \pi/2] \to [2/\pi, 1])$, sa jednim rješenjem $\varphi = \Psi^{-1}(d/l) \in [1, \pi/2]$. Slika također potvrđuje da se konstrukcija se može izvesti kada je $d/l \in [2/\pi, 1]$, odnosno $\varphi \in [0, \pi/2]$ gdje u graničnom slučaju $\varphi = 0$ kružni lukovi postaju dužine, odnosno stara krivulja se ne mijenja. Promotrimo jedan od 4 dijela kružnog luka: smjer tangente mijenja se jednoliko s prolaskom duljine ukupno za kut φ — prolaskom duljine t tagenta se zakrenula za $4t\varphi/l$.
U slučaju kada $l > \pi d/2$ elementi za trošenje duljine su takvi da kružni lukovi opisuju kutom $\pi/2$ i troše ukupnu duljinu $4\pi/2r$, a višak duljine troši se na dva ravna dijela u smjeru okomitom na prvotni smjer pružanja krivulje koji se umeđu na mjesta druge i četvrte crvene točke, tako da središnji dio ostaje kružna kapa.

Lema 103. *Uz oznake kao u definiciji 102 vrijedi* $d_\infty(S\left[b,d,l\right],Id) = \begin{cases} \Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right), & d \le l \le \frac{\pi d}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi d}{2} \le l \end{cases}$

i

$$A_{S[b,d,l]} = S\left[b,d,l\right]^T.\dot{S}\left[b,d,l\right] = \begin{cases} \pm\frac{4}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times, & d \le l \le \frac{\pi d}{2} \\ O, & \pi/2d \le l \ \ i \ \frac{\pi d}{8} \le t \le \frac{l}{2} - \frac{\pi d}{8} \ \ ili \ \frac{l}{2} + \frac{\pi d}{8} \le t \le l - \frac{\pi d}{8} \\ \pm\frac{4}{d}[b]_\times & , \pi/2d \le l, \ \ inače \end{cases}$$

Vrijedi:

1. $S\left[b,d,l\right]$ je neprekidna s vrijednostima $S\left[b,d,l\right](0) = S\left[b,d,l\right](l) = \mathrm{Id}$,
2. *ako je* $v \perp b$ *tada* $\int_0^l S\left[b,d,l\right](t).v\,\mathrm{d}t = d\,v$ *i* $\int_I \check{S}_I\left[b,\varsigma\right](t).v\,\mathrm{d}t = (1-\varsigma)l_I\,v$,
3. $d_\infty(S\left[b,d,l\right],\mathrm{Id}) = \begin{cases} \Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right), & d \le l \le \frac{\pi d}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi d}{2} \le l \end{cases}$,

   $\|S\left[b,d,l\right] - \mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}} \le \begin{cases} l\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right), & d \le l \le \frac{\pi d}{2} \\ l\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi d}{2} \le l \end{cases}$,

   $\|S\left[b,d,l\right] - \mathrm{Id}\|_{L^2} \le \begin{cases} \sqrt{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right), & d \le l \le \frac{\pi d}{2} \\ \sqrt{l}\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi d}{2} \le l \end{cases}$,
4. $\left\|\dot{S}\left[b,d,l\right]\right\|_{L^2(0,l)} = \left\|A_{S[b,d,l]}\right\|_{L^2(0,l)} = \sqrt{l\left(\frac{4}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{l}}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)$ *kada* $d \le l \le \frac{\pi d}{2}$

   $\left\|\dot{S}\left[b,d,l\right]\right\|_{L^2(0,l)} = \left\|A_{S[b,d,l]}\right\|_{L^2(0,l)} = \sqrt{\left(l - \frac{\pi d}{2}\right)\left(\frac{4}{d}\right)^2} = \frac{4}{d}\sqrt{l - \frac{\pi d}{2}} \le \frac{4}{d}\sqrt{l}$ *kada* $\pi/2d \le l$
5. $\left\|A_{S[b,d,l]}\right\|_{L^\infty_A(0,l)} = l\left(\frac{4}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\right) = 4l\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)$ *kada* $d \le l \le \frac{\pi d}{2}$

   $\left\|A_{S[b,d,l]}\right\|_{L^2_A(0,l)} = \left(l - \frac{\pi d}{2}\right)\frac{4}{d} \le \frac{4l}{d}$ *kada* $\pi/2d \le l$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi inspekcijom definicije 102. Također: treća i četvrta tvrdnja. Peta tvrdnja je dokazana u iskazu na temelju četvrte. Preostaje dokazati drugu tvrdnju.

Pretpostavimo prvo da je riječ o prvom slučaju u definiciji 102. Tada uz zamjene varijabli u prvom integralu $z = l/2 - t$ i $z = 3l/2 - t$

$$\int_0^{l/4} \mathrm{e}^{\frac{4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t + \int_{3l/4}^{l} \mathrm{e}^{\frac{4t-4l}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int_{l/2}^{l/4} \mathrm{e}^{\frac{2l-4z}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}z - \int_{3l/4}^{l/2} \mathrm{e}^{\frac{2l-4z}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}z = \left\{\begin{array}{c}\text{okretanje granica} \\ \text{integracije, zbrajanje}\end{array}\right\}$$

$$= \int_{l/4}^{l/2} \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t + \int_{l/2}^{3l/4} \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t = \int_{l/4}^{3l/4} \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t\,.$$

Sada iz definicije $S\left[b,d,l\right]$ po dijelovima slijedi da $\int_0^l S\left[b,d,l\right](t).v\mathrm{d}t = 2\int_{l/4}^{3l/4} \mathrm{e}^{\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)[b]_\times}.v\,\mathrm{d}t$.

Dalje će se iskoristiti pretpostavka $v \perp b$ (tj. $v \cdot b = 0$) u Rodriguezovoj rotacionoj formuli:

$$\begin{aligned}
\int_0^l S\left[b,d,l\right](t).v\mathrm{d}t &= 2\int_{l/4}^{3l/4} v\cos\left(\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\right) + (b\times v)\sin\left(\frac{2l-4t}{l}\Psi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\right)\mathrm{d}t \\
\left\{\begin{array}{c}\text{integracija}\\ \text{supstitucijom}\end{array}\right\} &= 2\left(-\frac{l\sin\left(-\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right) - l\sin\left(\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right)}{4\Psi^{-1}\left(d/l\right)}v\right. \\
&\qquad \left. + (b\times v)\frac{l\cos\left(-\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right) - l\cos\left(\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right)}{4\Psi^{-1}\left(d/l\right)}\right)
\end{aligned}$$

Treba primijetiti da obzirom na definiciju $\Psi\left(x\right) = {\sin x}/{x}$ to $a = \Psi\left(\Psi^{-1}\left(a\right)\right) = {\sin\Psi^{-1}(a)}/{\Psi^{-1}(a)}$ pa $\sin\left(\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right) = d/l\Psi^{-1}\left(d/l\right)$. Dalje obzirom na neparnost sinusa $\sin\left(-\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right) = -\sin\left(\Psi^{-1}\left(d/l\right)\right) = -d/l\Psi^{-1}\left(d/l\right)$. Kada se još k tome primijeti da je kosinus parna funkcija prethodni račun se svede na

$$\int_0^l S\left[b,d,l\right](t).v\mathrm{d}t = \frac{d\Psi^{-1}\left(d/l\right) + d\Psi^{-1}\left(d/l\right)}{2\Psi^{-1}\left(d/l\right)}v = d\,v.$$

Druga tvrdnja u drugom slučaj definicije 102 izvodi se kao i u prvom slučaju uz napomenu da zbog $v \perp b$ po Rodriguezovoj rotacionoj formuli: $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}[b]_\times}.v = b\times v$ pa $\int_a^b \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}[b]_\times}.v\mathrm{d}t + \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}[-b]_\times}.v\mathrm{d}t = (b-a)\left(b\times v - b\times v\right) = O$ pa taj dio ne doprinosi u integralu $\int_0^l S\left[b,d,l\right](t).v\mathrm{d}t$.

□

A.12. Konvolucija i izglađivanje

Konvolucija se može iskoristiti za aproksimaciju funcije glatkom. Sljedeća definicija i rezultat su standardni (Evans, 2002, C.4, str. 629-631). Za ovu monografiju potreban je samo poseban slučaj u kojem je domena segment.

Definicija 104. Standardno izglađivanje (molifikator) je

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

gdje se konstanta C bira tako da $\int_{-1}^1 \eta(x)\mathrm{d}x = 1$. Za svaki $\varepsilon > 0$, definiramo izglađivanje

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Za funkciju $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je integrabilna, izglađivanje $f^\varepsilon : [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \to \mathbb{R}$

računa se po pravilu $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, tj.

$$f^\varepsilon(x) = \int_a^b \eta_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(y)f(x-y)\mathrm{d}y.$$

Teorem 105. *Izglađivanje integrabilne funkcije $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima sljedeća svojstva:*

1. $f^\varepsilon \in C^\infty([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$,

2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f^\varepsilon = f$ *skoro svuda na* $[a,b]$,

3. *ako* $f \in L^p([a,b])$ *za* $p \in [1,\infty\rangle$, *tada* $f^\varepsilon \to f$ *u* $L^p([a,b])$.

Napomena 106. Ako je potrebno formalno osigurati $f^\varepsilon \in C^\infty([a,b])$, može se izgladiti lokalno integrabilno proširenje funkcije f,

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Zatim proglasimo izglađivanjem f^ε restrikciju "originalnog" izglađivanja $\eta_\varepsilon * g$ na $[a,b]$.

Sljedeću malu izmjenu izglađivanja autor nije našao standarnom u literaturi. Želja je osigurati glatke aproksimacije funkcije f takve da je $f^\varepsilon_{A,B}(a) = A$ i $f^\varepsilon_{A,B}(b) = B$. Može se iskoristiti lokalno integrabilna funkcija

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \\ A, & t < a+\varepsilon, \\ B, & t > b-\varepsilon. \end{cases}$$

i definirati $f^\varepsilon_{A,B} = \eta_\varepsilon * g_\varepsilon$.

Uz spomenute pretpostavke očito vrijedi $f^\varepsilon_{A,B} \in C^\infty([a,b])$, na isti način kao u teoremu 105. Za proizvoljan fiksan $t \in \langle a,b\rangle$ i $\varepsilon < \min\{x-a,\, b-x\}$ vrijedi $g_\varepsilon(t) = f(t)$, dok za $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{x-a,\, b-x\}$ vrijedi $(\eta_\varepsilon * g_\varepsilon)(t) = (\eta_\varepsilon * f)(t)$. Tako dolazimo do zaključka

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f^\varepsilon_{A,B}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\eta_\varepsilon * g_\varepsilon)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\eta_\varepsilon * f)(t) = f(t)$$

skoro svuda za $t \in [a,b]$, što odgovara drugoj tvrdnji teorema 105.

Dalje, jer je $f^\varepsilon_{A,B}$ neprekidna i ograničena, to je po N-L teoremu element iz L^p prostora. Neka je k tome još i $f \in L^p(a,b)$ pa pokažimo treću tvrdnju iz teorema 105, odnosno da $f^\varepsilon_{A,B} \to f$ u L^p. Izravno iz definicije g_ε slijedi $f(t) - \max\{|A|, |B|\} \le g_\varepsilon(t) \le f(t) +$

$\max\{|A|, |B|\}$ pa

$$\left|f^{\varepsilon}_{A,B}(t)\right| \leq \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) g(x-y)\mathrm{d}y\right| \leq \underbrace{\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\mathrm{d}y\right|}_{=|f^\varepsilon(t)|} + \max\{|A|, |B|\} \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(y)\mathrm{d}y}_{=1}.$$

Obzirom na ovu ocjenu i da $f^\varepsilon = f^\varepsilon_{A,B}$ na $[a+2\varepsilon, b-2\varepsilon]$ možemo zaključiti

$$\begin{aligned}\left\|f - f^\varepsilon_{A,B}\right\|^p_{L^p(a,b)} &= \int_a^{a+2\varepsilon} \underbrace{\left|f - f^\varepsilon_{A,B}\right|^p}_{\leq 2^{p-1}|f-f^\varepsilon|^p + 2^{p-1}|A|^p} + \int_{a+2\varepsilon}^{b-2\varepsilon} \underbrace{\left|f - f^\varepsilon_{A,B}\right|^p}_{=|f-f^\varepsilon|^p} + \int_{b-2\varepsilon}^{b} \underbrace{\left|f - f^\varepsilon_{A,B}\right|^p}_{\leq 2^{p-1}|f-f^\varepsilon|^p + 2^{p-1}|B|^p} \\ &\leq \underbrace{2^{p-1} \underbrace{\|f - f^\varepsilon\|^p_{L^p(a,b)}}_{\{\text{Tm. } 105\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} + 2\varepsilon \underbrace{\left(2^{p-1}|A|^p + 2^{p-1}|B|^p\right)}_{\text{konstanta}}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}.\end{aligned}$$

Sve navedeno može se iskoristiti i u slučaju lokalno integrabilne $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{V}$ kada je $\mathbb{V}$ izomorfno sa $\mathbb{R}^n$, koristeći izglađivanje po komponentama.

A.13. Osnove teorije grafova

Graf je matematička struktura koja se sastoji od vrhova (čvorova) i bridova koji ih povezuju.

Teorem 107. *Ako je G povezan graf koji sadrži ciklus tada se bridovi mogu orijentirati na način da je svaki vrh barem jednom početni.*

Dokaz. Pokažimo da svaki vrh može biti završni. Iterativno orijeniramo bridove sve dok svi vrhovi barem jednom nisu bili završni.

1. korak. Bridove u ciklusu orijentirati sukcesivno ("u krug") počevši od jednog vrha dalje, dok se po bridovima ne vratimo natrag do vrha gdje smo započeli označavanje. Sada su svi vrhovi u ciklusu barem jednom završni.

2. korak. Ako neki vrh još nije završni proći najkraćim putem koji ga povezuje ga povezuje sa dijelom grafa koji je već orijentiran. Bridove na tom putu orijenitrati počevši od ciklusa na dalje, tako da je zadnji završni vrh upravo odabrani.

Ponavljati 2. korak dok nismo iscrpili sve vrhove.

Suprotna orjentacija od konstruirane daje da svaki vrh bude barem jednom početni. □

Bibliografija

Adams, R.A. 1975. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York.

Auricchio, F., Loreto, M. D. I., & Sacco, E. 2001. Finite-element Analysis of a Stenotic Artery Revascularization Through a Stent Insertion. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, **4**(3), 249–263.

Blanes, S, Casas, F, Oteo, J A, & Ros, J. 2009. The Magnus expansion and some of its applications. *Phys. Rep.*, **470**(5-6), 151–238.

Blouza, A. Le Dret, H. 2001. Nagdhi's shell model: Existence, uniqueness and continuous dependence on the midsurface. *Journal of Elasticity*, **64**, 199–216.

Braides, Andrea. 2002. *Gamma-convergence for Beginners (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 22).* Oxford University Press, USA.

Ciarlet, PG. 1988. *Mathematical elasticity: Three-dimensional elasticity.* Second imp edn. Elsevier B.V.

Clarke, Francis. 1976. On the inverse function theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, **64**(1), 97–102.

contributors, Wikipedia. 2012. *Magnus expansion.*

Dacorogna, Bernard. 2008. *No Title.* Second edi edn. New York: Springer.

Danforth, Christopher M. 2013. *Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall.*

Dumoulin, C, & Cochelin, B. 2000. Mechanical behaviour modelling of balloon-expandable stents. *Journal of Biomechanics*, **33**(11), 1461–1470.

Etave, Frédérique, Finet, Gérard, Boivin, Maurice, Boyer, Jean-Claude, Rioufol, Gilles, & Thollet, Gilbert. 2001. Mechanical properties of coronary stents determined by using finite element analysis. *Journal of Biomechanics*, **34**(8), 1065–1075.

Evans, Lawrence C. 2002. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

Horn, Roger A., & Johnson, Charles R. 1994. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press.

Kim, Ju Hyun, Kang, Tae Jin, & Yu, Woong-Ryeol. 2008. Mechanical modeling of self-expandable stent fabricated using braiding technology. *Journal of biomechanics*, **41**(15), 3202–12.

Kiousis, DE, Gasser, TC, & Holzapfel, GA. 2007. A numerical model to study the interaction of vascular stents with human atherosclerotic lesions. *Annals of biomedical engineering*, **35**(11), 1857–1869.

Migliavacca, Francesco, Petrini, Lorenza, Colombo, Maurizio, Auricchio, Ferdinando, & Pietrabissa, Riccardo. 2002. Mechanical behavior of coronary stents investigated through the finite element method. *Journal of biomechanics*, **35**(6), 803–11.

Milin Šipuš, Željka, & Šiftar, Juraj. 2009. *Glatke i riemannove mnogostrukosti.*

Mora, Maria Giovanna, & Muller, Stefan. 2003. Derivation of the nonlinear bending-torsion theory for inextensible rods by Gamma-convergence. *Calculus of Variations & Partial Differential Equations*, **18**(3), 287.

Mora, Maria Giovanna, & Müller, Stefan. 2004. A nonlinear model for inextensible rods as a low energy Γ-limit of three-dimensional nonlinear elasticity. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, **21**(3), 271–293.

Palmaz, JC, Sibbitt, RR, Reuter, SR, Tio, FO, & Rice, WJ. 1985. Expandable intraluminal graft: a preliminary study. Work in progress. *Radiology*, **156**(1), 73–77.

Papi, Marco. 2005. On the domain of the implicit function and applications. *Journal of Inequalities and Applications*, **2005**(3), 373250.

Royden, H. L. 1989. *Real Analysis.* 3rd edn. Prentice-Hall Inc.

Saunders, Richard J. 2002. *Method and apparatus for direct laser cutting of metal stents.*

Scardia, Lucia. 2006. The nonlinear bending-torsion theory for curved rods as Gamma-limit of three-dimensional elasticity. *Asymptotic Analysis*, **47**(3-4), 317–343.

Shankaran, Karthik, & Karrupaswamy, Senthil. 2012. *Parameterization and Optimization of balloon expandable Stent.*

Sigwart, Ulrich, Puel, Jacques, Mirkovitch, Velimir, Joffre, Francis, & Kappenberger, Lukas. 1987. Intravascular Stents to Prevent Occlusion and Re-Stenosis after Transluminal Angioplasty. *New England Journal of Medicine*, **316**(12), 701–706.

Tambača, J. 2006. A numerical method for solving the curved rod model. *ZAMM*, **86**(3), 210–221.

Tambača, J, & Velčić, I. 2012. Derivation of the nonlinear bending–torsion model for a junction of elastic rods. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **14**(3), 633–664.

Tambača, J, Kosor, M, Čanić, S, & Paniagua, D. 2010. Mathematical modeling of vascular stents. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **70**(6), 1922–1952.

Tambača, Josip, Čanić, Sunčica, Kosor, Mate, Fish, R David, & Paniagua, David. 2011. Mechanical behavior of fully expanded commercially available endovascular coronary stents. *Texas Heart Institute journal from the Texas Heart Institute of St Lukes Episcopal Hospital Texas Childrens Hospital*, **38**(5), 491–501.

Tambača, J; Čanić, S; Paniagua, D. 2010. A Novel Approach to Modeling Coronary Stents Using a Slender Curved Rod Model: A Comparison Between Fractured Xience-like and Palmaz-like Stents. *Chap. 5, pages 41–58 of:* W. Fitzgibbon, Y.A. Kuznetsov, Pekka Neittaanmäki, Jacques Périaux, Olivier Pironneau (ed), *Applied and Numerical Partial Differential Equations: Scientific Computing in Simulation, Optimization and Control in a Multidisciplinary Context*, computatio edn. Springer.

Čaklović, Lavoslav. *Matematičko modeliranje, skripta.*

Čanic, S., & Tambača, J. 2012. Cardiovascular stents as PDE nets: 1D vs. 3D. *IMA Journal of Applied Mathematics*, **77**(6), 748–770.

Whitcher, F.D. 1997. Simulation of in vivo loading conditions of nitinol vascular stent structures. *Computers & Structures*, **64**(5-6), 1005–1011.

Xinghua, Wang. 1999. Convergence of Newton's method and inverse function theorem in Banach space. *Mathematics of Computation*, **68**(225), 169–187.

Zhao, Shijia, Gu, Linxia, & Froemming, Stacey R. 2012. Finite Element Analysis of the Implantation of a Self-Expanding Stent: Impact of Lesion Calcification. *Journal of Medical Devices*, **6**(2), 021001.

Životopis

Mate Kosor rođen je u Zadru 1981. godine. Osnovnu školu i gimnaziju polazio je u rodnom gradu, te vrlo kratko u Crikvenici i Kaštelima. Na Prirodoslovno matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu stekao je 2003. godine zvanje dipl. inženjer matematike. Na University of Houston stekao je 2007. godine naslov magistra znanosti iz matematike. Oženjen je i ima troje djece.

Objavljena djela

1. Goldstein, Pavle; Karaga, Maja; Kosor, Mate; Nižetić, Ivana; Tadić, Marija; Vlah, Domagoj. Hidden Markov Models and Multiple Alignments of Protein Sequences // Proceedings of the Conference Applied Mathematics and Scientific Computing / Drmač, Zlatko ; Marušić, Miljenko ; Tutek, Zvonimir (ur.). Berlin : Springer, 2005. (predavanje,međunarodna recenzija,objavljeni rad,znanstveni).

2. Tambača, Josip; Kosor, Mate; Čanić, Sunčica; Paniagua, David. Mathematical Modeling of Vascular Stents. // SIAM journal on applied mathematics. 70 (2010), 6; 1922-1952 (članak, znanstveni).

3. Tambača, Josip; Čanić, Sunčica; Kosor, Mate; Fish, R. David; Paniagua, David. Mechanical Behavior of Fully Expanded Commercially Available Endovascular Coronary Stents. // Texas Heart Institute journal. 38 (2011), 5; 491-501 (članak, znanstveni).

4. Kosor, Mate. Osvrt na predloženi model monetizacije autocesta u Hrvatskoj. // Oeconomica Jadertina. 3 (2013), 2; 90-123 (prethodno priopćenje, znanstveni).