Klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini

Koncul, Helena

Doctoral thesis / Disertacija

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:075130

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Helena Halas

Klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Helena Halas

Classification of the circular curves of the third class in the quasi-hyperbolic plane

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2015

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Helena Halas

Klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Ema Jurkin

Zagreb, 2015.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Helena Halas

Classification of the circular curves of the third class in the quasi-hyperbolic plane

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
doc. dr. sc. Ema Jurkin

Zagreb, 2015

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Ani Sliepčević koja je moj interes za geometrijom usmjeravala i podupirala, doc. dr. sc. Emi Jurkin na nesebičnom mentoriranju ovog rada, doc. dr. sc. Sonji Gorjanc na svim sugestijama i prof. dr. sc. Vladimiru Volenecu na svesrdnoj prodršci. Također se zahvaljujem svim najbližim prijateljima i rodbini koja me slušala i trpila kroz svo vrijeme nastajanja ovog rada pa čak i onda kad me nisu razumjeli o čemu govorim.

Sažetak

Cilj ovog rada je klasifikacija cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini i ispitivanje mogućnosti njihove tvorbe pravčastom inverzijom, nožišnom transformacijom te projektivnom tvorbom.

U uvodnom se poglavlju definiraju pojmovi i iznose tvrdnje o krivuljama u euklidskoj ravnini.

Drugo poglavlje posvećeno je kvazihiperboličkoj ravnini, odnosno osnovnim pojmovima, krivuljama 2. razreda te pojmovima vezanim uz cirkularnost razredne krivulje u kvazihiperboličkoj ravnini. Krivulje 3. razreda klasificirane su prema stupnju cirkularnosti na 1-cirkularne, 2-cirkularne i potpuno cirkularne krivulje te prema tipu cirkularnosti i vrsti izotropnih pravaca krivulje na sveukupno 18 tipova cirkularnih krivulja 3. razreda.

U preostala tri poglavlja obrađuje se po jedno preslikavanje odnosno način tvorbe krivulja 3. razreda: pravčasta inverzija, nožišna transformacija i projektivna tvorba. Za svako se preslikavanje prvo proučavaju njihova svojstva, a zatim se promatraju uvjeti tvorbe cirkularnih krivulja 3. razreda. Nadalje, za pravčastu inverziju i nožišnu transformaciju pokazana je međusobna veza te je dana konstrukcija dualne krivulje od krivulje dobivene s ta dva preslikavanja. Pri istraživanju korištena je sintetička i analitička metoda.

Pokazano je da je projektivnom tvorbom moguće konstruirati svih 18 tipova cirkularnih krivulja 3. razreda, a da je nožišnom transformacijom moguće konstruirati 5 tipova, dok je za pravčastu inverziju pokazano da se ne može konstruirati samo jedan tip cirkularnih krivulja 3. razreda.

Ključne riječi: kvazihiperbolička ravnina, krivulja 3. razreda, cirkularna krivulja, pravčasta inverzija, nožišna transformacija, projektivna tvorba

Summary

The main aim of this thesis is the classification of the circular curves of the 3rd class in the quasi-hyperbolic plane and the analysis of the possibilities of their construction obtained by the line inversion, pedal transformation and projective mapping.

The theory of the curves in the Euclidean plane has been given in the first chapter.

In the second chapter the quasi-hyperbolic plane has been studied i.e. the basics, the types of the 2nd class curves, and notions of the circular curves of class n in the quasi-hyperbolic plane are given. The circular curves of the 3rd class have been classified according to the degree of circularity into 1-circular, 2-circular or entirely circular curves and, within these types, according to the type of circularity and the type of the isotropic lines of the curve into 18 subtypes.

In each of the remaining chapters one mapping is observed - line inversion, pedal transformation and projective mapping. First, the properties of every mapping are investigated and then the conditions of obtaining the circular curves of the 3rd class by these mappings are observed. Furthermore, the connection between line inversion and pedal transformation is given and the construction of the curve dual to the curve obtained by these two mappings is explained. The synthetic and analytical methods have been used in the studies.

It is shown that every subtype of the circular curves of the 3rd class can be obtained by projective mapping and five subtypes can be obtained by pedal transformation, while only one subtype of the circular curves of the 3rd class can not be obtained by line inversion.

Keywords: quasi-hyperbolic plane, curve of the 3rd class, circular curve, line inversion, pedal transformation, projective mapping

Sadržaj

Uvod **1**

1 Krivulje trećeg razreda u euklidskoj ravnini **3**

1.1 Algebarske krivulje 3

1.2 Krivulje trećeg razreda 6

2 Kvazihiperbolička ravnina **8**

2.1 Osnovni pojmovi 8

2.2 Klasifikacija krivulja 2. razreda 10

2.2.1 Ortogonalne krivulje 2. razreda 14

2.3 Cirkularne krivulje 17

3 Pravčasta inverzija **20**

3.1 Pravčasta inverzija u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 20

3.2 Pravčasta inverzija u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ 26

3.3 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene pravčastom inverzijom 27

3.3.1 Tip I - Pravčasta inverzija s obzirom na kružnicu i njenu centralu . 27

3.3.2 Tip II - Pravčasta inverzija s obzirom na kružnicu i izotropni pravac 31

3.3.3 Tip III - Pravčasta inverzija s obzirom na ortogonalnu krivulju 2. razreda i izotropni pravac 36

4 Nožišna transformacija **44**

4.1 Nožišna transformacija u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ 44

4.2 Veza pravčaste inverzije i nožišne transformacije 46

4.3 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene nožišnom transformacijom 51

5 Projektivna tvorba **56**

5.1 Projektivna tvorba u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 56

5.2 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene projektivnom tvorbom u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. 63

Zaključak **70**

Literatura **75**

Životopis **78**

Uvod

Do početka 19. stoljeća istraživanje na području geometrije je pretežno podrazumijevalo proučavanje ravnine i prostora koristeći pritom preslikavanja koja su čuvala koncept sličnosti, kongruentnosti i metrike. Takvu geometriju danas nazivamo euklidskom geometrijom.

Prvi pomak u smjeru istraživanja geometrije općenitije od euklidske dolazi s djelom Jean-Victora Ponceleta *„Traité des propriétés projectives des figures"* (1822.) u kojem se istražuju odnosi između točaka, pravaca i konika pomoću projektivnog preslikavanja koje danas nazivamo polaritetom, [2], [41]. Vrijednost ovog rada, između ostalog, leži u ideji o beskonačno dalekim (idealnim) točkama i upotrebi dvoomjera koji čine harmoničke četvorke točaka čime se izbjegava koristiti koncept metrike. Pri samom istraživanju Poncelet je nove rezultate otkrivao i opisivao sintetičkom metodom preuzevši takav oblik istraživanja od Gasparda Mongea. Također, Poncelet je izložio ideju o principu dualnosti u projektivnoj geometriji koju je u pravom smislu otkrio Joseph Diaz Gergonne u *„Annales de Mathématiques pures et Appliquées"* (1827.), [22], [29].

Prvi rad kojime je uspostavljena neovisnost projektivne geometrije od euklidske jest rad Karla Georga Christiana von Staudta *„Geometrie der Lage"* (1847.), [2], [41]. U radu von Staudt koristi princip dualnosti, uvodi projektivno preslikavanje koje se danas naziva kolineacija i definira imaginarne elemente uz pomoć postojećih realnih tvorevina te su kao takvi postali ravnopravni realnim elementima, [6], [28].

Također, od važnosti za razvoj projektivne geometrije je djelo *„Der barycentrische calcul"* (1827.) u kojemu August Ferdinand Möbius uvodi baricentrične koordinate. Osnovna prednost baricentričnih koordinata nad Kartezijevim koordinatama je mogućnost opisa točaka u beskonačnosti, [6]. Nadalje, Möbius je opisao kako uz pomoć potpunog četverovrha, koncepta dvoomjera i projektivnog preslikavanja ostvariti koordinatizaciju projektivne ravnine. Njegov je rad zasjenio članak Juliusa Plückera *„Über ein neues Ko-*

ordinatensystem" (1830.) u kojem opisuje vlastitu teoriju homogenih koordinata, [1], [2]. Plückerovim najvećim doprinosom smatra se rad na teoriji krivulja, točnije istraživanju svojstava krivulje koristeći princip dualnosti.

Tokom 19. stoljeća razvio se, osim projektivne geometrije, i čitav niz drugih geometrija: inverzna (J. Steiner, A. F. Möbius, L. J. Magnus), afina (A. F. Möbius), hiperbolička (J. Bolyai, N. I. Lobačevski) i eliptična (B. Riemann). Takva raznolika podjela motivirala je mladog novoimenovanog profesora matematike u Erlangenu Felixa Kleina da 1871. godine, za svoje prvo predavanje, sustavno opiše sve te geometrije, [6]. Taj pokušaj klasifikacije geometrije poznat je pod nazivom *„Erlangenski program"*, gdje se geometrija definira kao *znanost koja proučava invarijante grupe transformacija*, [1], [2], [26], [41]. Sama ideja o tome da se geometrija definira pomoću grupe proizlazi iz veze između grupe i koncepta simetrije, a sastoji se u tome da se ne promatraju figure nad kojima se vrši preslikavanje već da se promatraju sama preslikavanja i svojstva koja njihovom primjenom ostaju nepromijenjena, odnosno invarijantna. Nadalje, prema radu Arthura Cayleya koji je smatrao da se u projektivnu ravninu može uvesti euklidska metrika, te njegovoj ideji o modelima neeuklidske geometrije, Klein je u svojim člancima *„Über die sogennante nicht-Euklidische geometrie I, II"* (1871., 1873.) inducirao metriku u modele projektivne ravnine koristeći se dvoomjerom, te je poopćio taj rezultat na prostoru dimenzije $n \geq 2$, [6]. Danas te geometrije nazivamo Cayley-Kleinovim metrikama, pri čemu je poznato da se one razlikuju ovisno o tipu inducirane metrike (eliptička, hiperbolička, parabolička) za pojedine elemente odnosno za udaljenost točaka te mjere kutova između pravaca i mjere kutova između ravnina [16], [17], [34], [42].

Poglavlje 1

Krivulje trećeg razreda u euklidskoj ravnini

1.1 Algebarske krivulje

U analitičkom modelu realne projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = PG(2,\mathbb{R})$ točke, odnosno pravci, su klase uređenih trojki realnih brojeva koje se nazivaju homogenim koordinatama točke, odnosno homogenim koordinatama pravca

$$\lambda(x_0,x_1,x_2) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}/\{0\},$$
$$\mu[u_0,u_1,u_2] = [\mu u_0, \mu u_1, \mu u_2], \quad \mu \in \mathbb{R}/\{0\},$$

s tim što je isključena trojka $(0,0,0)$, odnosno $[0,0,0]$. Dvije trojke (x_0,x_1,x_2) i (y_0,y_1,y_2) predstavljaju istu točku ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj $\lambda \neq 0$ takav da je $x_i = \lambda y_i$, $i \in \{0,1,2\}$. Analogno, dvije trojke $[u_0,u_1,u_2]$ i $[v_0,v_1,v_2]$ predstavljaju isti pravac ako pripadaju istoj klasi, tj. ako postoji realan broj $\mu \neq 0$ takav da je $u_i = \mu v_i$, $i \in \{0,1,2\}$, [22].

Napomena. Zbog praktičnih razloga, kao u [22], koristit će se jednaka oznaka za uređenu trojku homogenih koordinata točke, odnosno pravca, i jednostupčanu koordinatnu matricu iste točke, odnosno istog pravca.

Točka $X(x_0,x_1,x_2)$ i pravac $\mathbf{u}[u_0,u_1,u_2]$ su incidentni ako i samo ako vrijedi

$$x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 = 0, \text{ tj. } X^T\mathbf{u} = 0.$$

Koordinate pravca $\mathbf{u}[\hat{u}_0,\hat{u}_1,\hat{u}_2]$ zadanog točkama $X(x_0,x_1,x_2)$ i $Y(y_0,y_1,y_2)$, u oznaci

$\mathbf{u} \sim X \wedge Y$ [14], računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata točaka

$$[\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2] \sim (x_0, x_1, x_2) \wedge (y_0, y_1, y_2) = [x_1y_2 - x_2y_1, x_2y_0 - x_0y_2, x_0y_1 - x_1y_0],$$

pri čemu jednadžba pravca $\mathbf{u}$ ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{x}_0 + (x_2y_0 - x_0y_2)\hat{x}_1 + (x_0y_1 - x_1y_0)\hat{x}_2 = 0.$$

Analogno koordinate točke $X(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ zadane kao sjecište pravaca $\mathbf{u}[u_0, u_1, u_2]$ i $\mathbf{v}[v_0, v_1, v_2]$, u oznaci $X \sim \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, računaju se kao vektorski produkt iz homogenih koordinata pravaca

$$(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2) \sim [u_0, u_1, u_2] \wedge [v_0, v_1, v_2] = (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_0 - u_0v_2, u_0v_1 - u_1v_0),$$

pri čemu jednadžba točke X ima oblik

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{u}_0 + (u_2v_0 - u_0v_2)\hat{u}_1 + (u_0v_1 - u_1v_0)\hat{u}_2 = 0.$$

Neka je $f(x_0, x_1, x_2)$ homogeni polinom stupnja n nad poljem $\mathbb{R}$. Skup svih točaka projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.1}$$

naziva se *algebarskom krivuljom n-tog reda*, dok se skup svih pravaca projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu

$$f(u_0, u_1, u_2) = 0 \tag{1.2}$$

naziva *algebarskom krivuljom (omotaljkom) n-tog razreda.* Algebarska krivulja prikazana jednadžbom (1.1) ili (1.2) je nedegenerirana ili neraspadnuta ako je pripadni homogeni polinom ireducibilan nad poljem $\mathbb{R}$. Ako je homogeni polinom reducibilan, odnosno može se rastaviti na dva ili više ireducibilnih polinoma stupnja nižeg od n nad poljem $\mathbb{R}$, tada je krivulja degenerirana ili raspadnuta, [4], [22].

Algebarska jednadžba n-tog stupnja podijeljena ili pomnožena nekim realnim brojem različitim od 0 predstavlja istu algebarsku krivulju n-tog reda, odnosno n-tog razreda, te je broj uvjeta za određivanje algebarske krivulje n-tog reda, odnosno razreda, za jedan manji

od broja koeficijenata u jednadžbi (1.1), odnosno (1.2), točnije $\frac{n(n+3)}{2}$. Stoga, algebarska krivulja može biti određena s $\frac{n(n+3)}{2}$ točaka, odnosno pravaca, međutim taj broj uvjeta nije uvijek dovoljan, [27], [28].

Dvije nedegenerirane algebarske krivulje reda m i n, odnosno razreda m i n, sijeku se u $m \cdot n$ točaka, odnosno pravaca, koji mogu biti realni i/ili u parovima konjugirano imaginarni, [4], [27], [28].

Skup tangenata u svim točkama algebarske krivulje reda n čini algebarsku krivulju nekog razreda k, i obratno algebarska krivulja razreda k omata neku algebarsku krivulju reda n, te će se takve dvije algebarske krivulje nazivati *dualnima*. Ako je nekoj algebarskoj krivulji red i razred jednak te iznosi n tada kažemo da je algebarska krivulja *stupnja* n.

Napomena. Dvije dualne algebarske krivulje nisu dualne u smislu principa dualnosti u projektivnoj ravnini $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Naime, prema principu dualnosti točke i pravci su dualni elementi u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, odnosno zamijeni li se u nekoj tvrdnji projektivne ravnine pojam točke s pojmom pravca, a pojam incidencije ostavi nepromijenjen, tada se dobiva dualna tvrdnja projektivne ravnine, [22]. Stoga, prema principu dualnosti slijedi da je algebarskoj krivulji reda n i razreda k dualna algebarska krivulja razreda n i reda k, dok će se u ovom radu dualnim algebarskim krivuljama nazivati redna i razredna krivulja koje imaju isti red n i isti razred k te se međusobno omataju.

Nedegenerirana algebarska krivulja može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dvostrukih elemenata, pri čemu neki mogu biti i m-struki elementi te se računaju kao $\frac{m(m-1)}{2}$ dvostrukih. Dvostruki elementi algebarske krivulje n-tog reda su dvostruke točke (čvorovi, šiljci ili izolirane dvostruke točke), dok su za algebarsku krivulju n-tog razreda dvostruki elementi dvostruki pravci (dvostruke tangente, infleksijski pravci ili izolirani dvostruki pravci). Nadalje, algebarska krivulja n-tog reda može imati i dvostruke pravce, pri čemu oni nemaju isti algebarski značaj kao dvostruke točke, te se općenito ne smatraju dvostrukim elementima redne krivulje. Analogno vrijedi i za algebarske krivulje n-tog razreda, [4].

Povezanost karakterističnih osobina algebarske krivulje dane su sljedećim relacijama koje se zovu *Plückerove formule*:

$$\begin{aligned} k &= n(n-1) - 2d - 3r, \\ n &= k(k-1) - 2t - 3w, \\ w &= 3n(n-2) - 6d - 8r, \\ r &= 3k(k-2) - 6t - 8w, \end{aligned}$$

gdje je n red krivulje, k razred krivulje, d broj dvostrukih točaka (čvorova i izoliranih dvostrukih točaka), r broj šiljaka, t broj dvostrukih pravaca (dvostrukih tangenata i izoliranih dvostrukih pravaca) i w broj infleksijskih točaka (infleksijskih pravaca) krivulje, [4], [27], [28].

Rod algebarske krivulje određuje se brojem p koji je razlika između najvećeg mogućeg broja dvostrukih elemenata koje može imati krivulja tog reda, odnosno razreda, i stvarnog broja dvostrukih elemenata promatrane krivulje. Veza ostalih karekterističnih osobina algebarske krivulje roda p prikazan je sljedećim relacijama:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r,$$
$$p = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - w.$$

Ako je krivulja roda 0 tada se može izraziti racionalnim funkcijama nekog parametra, stoga se takve algebarske krivulje nazivaju *racionalnim krivuljama*, [28]. Međutim obratno ne vrijedi, nije svaka racionalna krivulja roda 0.

1.2 Krivulje trećeg razreda

Prema prethodnim svojstvima algebarskih krivulja za krivulje 3. razreda može se zaključiti da ima najviše jedan dvostruki pravac te da je roda 0 ili 1, pa prema Plückerovim relacijama slijedi

$$3 = n(n-1) - 2d - 3r,$$
$$n = 6 - 2t - 3w,$$
$$r = 9 - 6t - 8w.$$

Dakle, krivulje 3. razreda prema karakterističnim osobinama možemo podijeliti u 3 tipa:

Tablica 1.1

razred	red	rod	broj dvostrukih pravaca	broj infleksijskih pravaca	broj dvostrukih točaka	broj šiljaka
3	6	1	0	0	0	9
3	4	0	1	0	0	3
3	3	0	0	1	0	1

U euklidskoj ravnini veća je pažnja posvećena krivuljama 3. reda nego krivuljama 3. razreda, te se njihove opće klasifikacije, karakteristike ili karakteristike pojedine vrste krivulje 3. reda mogu naći npr. u [4], [15], [27], [28], [39], [40].

Posebnu skupinu rednih krivulja u euklidskoj ravnini zauzimaju *cirkularne krivulje*. To su one krivulje koje prolaze apsolutnim točkama ravnine, pri čemu su u modelu euklidske ravnine na $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ apsolutne točke definirane kao dvostruke točke eliptičke involucije na beskonačno dalekom pravcu, [21], [23]. Stoga, cirkularne krivulje 3. reda s beskonačno dalekim pravcem, osim apsolutnih točaka, imaju još jednu zajedničku realnu točku, pa je njihova raznolikost ograničena.

Cirkularne krivulje 3. reda u euklidskoj ravnini mogu se konstruirati inverzijom [18] ili nožišnom transformacijom [39]. Odnosno točnije, cirkularna krivulja 3. reda može se dobiti na dva načina inverzijom, [35]

- običnom inverzijom neke krivulje 2. reda koja nije kružnica i koja prolazi polom inverzije,
- poopćenom inverzijom s obzirom na kružnicu gdje je generatorna krivulja kružnica koja sadrži jednu od temeljnih točaka inverzije,

te nožišnom transformacijom kao nožišna krivulja parabole, [28], [39].

Također, cirkularnost krivulja može se definirati i u neeuklidskim ravninama te su cirkularne krivulje proučavane u hiperboličkoj ravnini [8], [25], [32], [35], [37], izotropnoj ravnini [8], [24], [33], [35], [36], i pseudoeuklidskoj ravnini [9]-[11], [13], [31]. U člancima [14] i [38] posebno su obrađena preslikavanja koja zovemo inverzijom u pseudoeuklidskoj i izotropnoj ravnini. Iz ovoga se može uvidjeti da su obrađivane krivulje 3. i 4. reda te da su razredne krivulje zapostavljene, stoga će se u ovom radu proučavati cirkularne krivulje 3. razreda.

Poglavlje 2

Kvazihiperbolička ravnina

2.1 Osnovni pojmovi

Kvazihiperbolička ravnina je projektivna ravnina $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s hiperboličkom metrikom na pravcu i paraboličkom metrikom na pramenu [16], [17], kojoj je apsolutna figura realna degenerirana krivulja 2. stupnja, odnosno par realnih pravaca $\mathbf{f_1}$ i $\mathbf{f_2}$ koji se sijeku u realnoj točki F. Apsolutna figura označava se s $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}} = \{\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, F\}$, pri čemu se pravci $\mathbf{f_1}$ i $\mathbf{f_2}$ nazivaju *apsolutnim pravcima*, a točka F *apsolutnom točkom*.

Točke u Cayley-Kleinovom modelu kvazihiperboličke ravnine su samo one točke ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ koje se nalaze unutar jednog kuta što ga čine pravci apsolutne figure, dok su pravci samo oni pravci, tj. odsječci pravaca, koji nisu incidentni s točkom F i unutar su spomenutog kuta. U ovom radu promatrat će se Cayley-Kleinov model kvazihiperboličke ravnine proširen na cijelu ravninu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ te će se nazivati *projektivno proširena kvazihiperbolička ravnina* i označavat će se s $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Za analitičku obradu projektivno proširene kvazihiperboličke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koristit će se apsolutna figura $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}}$ ili $\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$ čije su homogene koordinate

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{QH}}: &\quad F(1,0,0), \quad \mathbf{f_1}[0,1,1], \quad \mathbf{f_2}[0,-1,1], \\ \mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}: &\quad F(1,0,0), \quad \mathbf{f_1}[0,0,1], \quad \mathbf{f_2}[0,1,0]. \end{aligned}$$

Pri tome će se kasnije, osim ako nije posebno istaknuto, uvijek koristiti apsolutna figura $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}}$, dok će se $\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$ koristiti samo u slučajevima kada taj odabir omogućuje jednostavniji algebarski zapis.

Projektivne transformacije koje apsolutnu figuru preslikavaju u nju samu čine 4-

parametarsku grupu projektivnih automorfizama apsolutne figure kvazihiperboličke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koja se naziva *opća kvazihiperbolička grupa sličnosti*. Jednadžbe tih projektivnih transformacija imaju sljedeći oblik:

$\mathcal{F}_{\mathbb{QH}}$	$\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$
$\rho\widehat{u}_0 = au_0$	$\rho\widehat{u}_0 = \bar{a}u_0$
$\rho\widehat{u}_1 = bu_0 + cu_1 + du_2$	$\rho\widehat{u}_1 = \bar{b}u_0 + \bar{c}u_1$
$\rho\widehat{u}_2 = eu_0 \pm du_1 \pm cu_2$	$\rho\widehat{u}_2 = \bar{d}u_0 + \bar{e}u_2$

gdje je $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & d \\ e & d & c \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} \bar{a} & 0 & 0 \\ \bar{b} & \bar{c} & 0 \\ \bar{d} & 0 & \bar{e} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Definicija 2.1.1. *Pravci ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koji su incidentni s apsolutnom točkom F nazivaju se **izotropnim pravcima**.*

*Točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ koje su incidentne s apsolutnim pravcem $\mathbf{f_1}$ ili $\mathbf{f_2}$ nazivaju se **izotropnim točkama**.*

*Dvije točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nazivaju se **paralelnima** ako su incidentne s istim izotropnim pravcem.*

*Dvije točke ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nazivaju se **okomitima** ako leže na paru izotropnih pravaca koji su u harmonitetu s apsolutnim pravcima $\mathbf{f_1}$ i $\mathbf{f_2}$.*

Uvjet paralelnosti dviju točaka $X(x_0, x_1, x_2)$ i $Y(y_0, y_1, y_2)$ je

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Za dva pravca $\mathbf{u}[0, u_1, u_2]$ i $\mathbf{v}[0, v_1, v_2]$ koji s apsolutnim pravcima $\mathbf{f_i}$, $i \in \{1, 2\}$, čine harmoničku četvorku vrijedi, [22]

$$\begin{aligned} (\mathbf{f_1f_2}, \mathbf{uv}) &= -1, \\ \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} &= -1, \\ u_1v_1 - u_2v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Iz čega slijedi uvjet okomitosti dviju točaka $X(x_0, x_1, x_2)$ i $Y(y_0, y_1, y_2)$

$$x_2y_2 - x_1y_1 = 0. \tag{2.2}$$

Posebno, svake dvije izotropne točke na istom apsolutnom pravcu su međusobno okomite i paralelne, te je svaka točka ravnine okomita i paralelna s apsolutnom točkom F.

Napomena. Ako je aposlutna figura $\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$ uvjet paralelnosti je isti, dok je uvjet okomitosti $x_2y_1 + x_1y_2 = 0$, jer su dva pravca u harmonitetu s apsolutnim pravcima ako vrijedi $u_1v_2 + u_2v_1 = 0$.

Hiperbolička involucija na pramenu pravaca (F) kojoj su apsolutni pravci fiksni pravci naziva se *apsolutna involucija* i označava se s $\mathcal{I}_{\mathbb{QH}}$. Kako fiksni pravci neke involucije zajedno s bilo kojim parom pridruženih pravaca čine harmoničku četvorku pravaca, [21], [22], slijedi da je apsolutnom involucijom određena okomitost točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Stoga prema [23], apsolutna involucija je cirkularna involucija kvazihiperboličke ravnine. Analitički zapis apsolutne involucije za apsolutnu figuru $\mathcal{F}_{\mathbb{QH}}$ tj. $\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$ je

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathbb{QH}} &: \quad [0, u_1, u_2] \mapsto [0, u_2, u_1], \\ \mathcal{I}^*_{\mathbb{QH}} &: \quad [0, u_1, u_2] \mapsto [0, -u_1, u_2]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

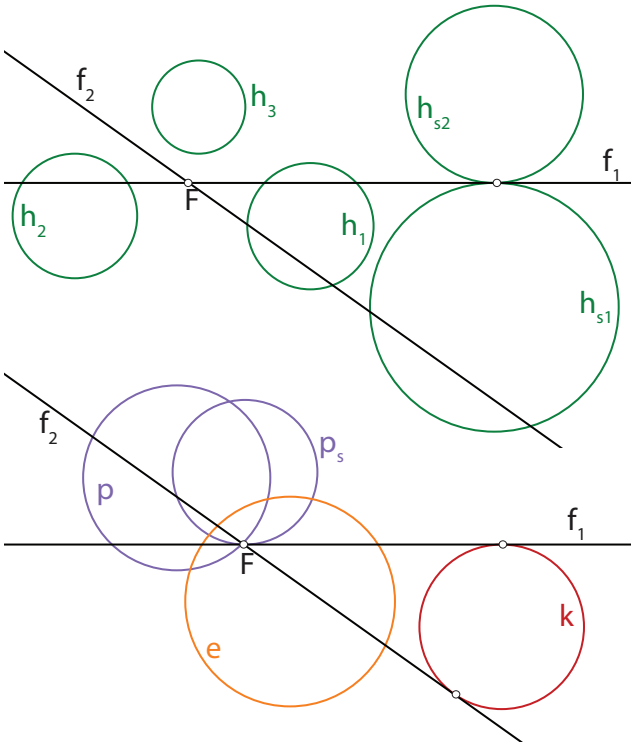
2.2 Klasifikacija krivulja 2. razreda

S obzirom na položaj krivulje 2. razreda u odnosu na apsolutnu figuru kvazihiperboličke ravnine razlikujemo 9 tipova krivulja 2. razreda (vidi sl. 2.1)[2], [30]:

- *hiperbola* - krivulja 2. razreda koja ima par realnih i različitih izotropnih pravaca,
  - *hiperbola tipa 1* (h_1) - siječe svaki od apsolutnih pravaca u dvije realne i različite točke,
  - *hiperbola tipa 2* (h_2) - siječe jedan apsolutni pravac u dvije realne i različite točke, a drugi u paru konjugirano imaginarnih točaka,
  - *hiperbola tipa 3* (h_3) - siječe svaki od apsolutnih pravaca u paru konjugirano imaginarnih točaka,
  - *specijalna hiperbola tipa 1* (h_{s_1}) - hiperbola kojoj je jedan izotropni pravac apsolutan, a drugi apsolutni pravac siječe u dvije realne i različite točke,
  - *specijalna hiperbola tipa 2* (h_{s_2}) - hiperbola kojoj je jedan izotropni pravac apsolutan, a drugi apsolutni pravac siječe u paru konjugirano imaginarnih točaka,

[2]Radi preglednosti slike razredne krivulje su prikazane pripadnom dualnom rednom krivuljom.

- *kružnica* (k) - krivulja 2. razreda kojoj su izotropni pravci apsolutni pravci,
- *elipsa* (e) - realna ili imaginarna krivulja 2. razreda koja ima par konjugirano imaginarnih izotropnih pravaca,
- *parabola* (p) - krivulja 2. razreda koja ima samo jedan izotropni pravac, odnosno izotopni pravci se podudaraju,
  - *specijalna parabola* (p_s) - parabola kojoj je izotropni pravac apsolutan.



Slika 2.1: Tipovi krivulja 2. razreda u projektivnom modelu $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

Krivulja 2. razreda ζ može se zapisati u homogenim pravčastim koordinatama

$$c_{00}u_0^2 + c_{11}u_1^2 + c_{22}u_2^2 + 2c_{01}u_0u_1 + 2c_{02}u_0u_2 + 2c_{12}u_1u_2 = 0 \tag{2.4}$$

ili prikazati pripadnom kvadratnom formom

$$\mathbf{u}^T C \mathbf{u} = 0, \tag{2.5}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix},$$

gdje je **u** jednostupčana koordinatna matrica pravca, a C simetrična matrica 3. reda pridružena krivulji ζ koja se naziva *matricom konike*.

Analogno, krivulja 2. reda $\bar{\zeta}$ može se zapisati u homogenim točkovnim koordinatama

$$\bar{c}_{00}x_0^2 + \bar{c}_{11}x_1^2 + \bar{c}_{22}x_2^2 + 2\bar{c}_{01}x_0x_1 + 2\bar{c}_{02}x_0x_2 + 2\bar{c}_{12}x_1x_2 = 0 \tag{2.6}$$

ili prikazati pripadnom kvadratnom formom

$$X^T C^{-1} X = 0,$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{c}_{00} & \bar{c}_{01} & \bar{c}_{02} \\ \bar{c}_{01} & \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} \\ \bar{c}_{02} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} \end{pmatrix},$$

gdje je X jednostupčana koordinatna matrica točke, a C^{-1} matrica konike pridružena krivulji $\bar{\zeta}$.

Ako je krivulja 2. razreda ζ nedegenerirana tada je pripadna matrica konike C regularna matrica, u suprotnom je matrica konike singularna matrica. Isto vrijedi i za krivulju 2. reda $\bar{\zeta}$ i pripadnu matricu konike C^{-1}. Nadalje, ako su krivulje ζ i $\bar{\zeta}$ dualne krivulje tada je matrica konike C^{-1} krivulje $\bar{\zeta}$ zaista inverz matrice C pridružene krivulji ζ, [22].

Izotropni pravci $[0, u_1, u_2]$ krivulje 2. razreda ζ zadovoljavaju jednadžbu

$$c_{11}u_1^2 + c_{22}u_2^2 + 2c_{12}u_1u_2 = 0 \tag{2.7}$$

koja je presjek pramena (F) danog jednadžbom $u_0 = 0$ i krivulje ζ dane jednadžbom (2.4). Dakle, uvjeti za koeficijente pojedinog tipa krivulje 2. razreda dani su u sljedećoj tablici:

Tablica 2.1

	$\mathcal{F}_{\mathbb{QH}}$	$\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$
hiperbola	$c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$	
parabola	$c_{12}^2 - c_{11}c_{22} = 0$	
elipsa	$c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$	
specijalna hiperbola	$c_{11} + c_{22} \pm 2c_{12} = 0$	$c_{11} = 0$ ili $c_{22} = 0$
specijalna parabola	$c_{11} = c_{22} = \pm c_{12}$	$c_{11} = c_{12} = 0$ ili $c_{22} = c_{12} = 0$
kružnica	$c_{12} = 0,\ c_{11} = -c_{22}$	$c_{11} = c_{22} = 0$

Svakom nedegeneriranom krivuljom 2. razreda ζ koja je prikazana kvadratnom formom (2.5), odnosno pripadnom matricom konike C, određen je točno jedan polaritet π_ζ. Polaritet π_ζ s obzirom na krivulju 2. razreda ζ je involutivna korelacija realne projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ koja pridružuje pravce i točke na sljedeći način:

$$U = \pi_\zeta(\mathbf{u}) := C\mathbf{u},$$
$$\mathbf{x} = \pi_\zeta^{-1}(X) := C^{-1}X.$$

Kažemo da je pravcu $\mathbf{u}$ pridružen pol U, te točki X pridružena polara $\mathbf{x}$ s obzirom na danu krivulju 2. razreda ζ, [22].

Nadalje, pravci $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ su konjugirani pravci u odnosu na krivulju 2. razreda ζ ako vrijedi

$$\mathbf{u}^T C\mathbf{v} = 0,$$

a $X,\ Y$ konjugirane točke u odnosu na krivulju 2. razreda ζ ako vrijedi

$$X^T C^{-1} Y = 0.$$

Ako su dva pravca $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ konjugirani u odnosu na neku krivulju 2. razreda tada je pol pravca $\mathbf{u}$ incidentan s pravcem $\mathbf{v}$ i obratno. Analogno vrijedi i za konjugirane točke, odnosno ako su dvije točke X i Y konjugirane u odnosu na neku krivulju 2. razreda tada je polara točke X incidentna s točkom Y i obratno, [22].

Definicija 2.2.1. *Centrala krivulje 2. razreda ζ je polara apsolutne točke F s obzirom na krivulju ζ.*

Centrala $\mathbf{c}$ krivulje 2. razreda ζ zadane jednadžbom (2.4) ima koordinate

$$\mathbf{c} = \pi_\zeta^{-1}(F) = \begin{pmatrix} c_{11}c_{22} - c_{12}^2 & c_{02}c_{12} - c_{01}c_{22} & c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11} \\ c_{02}c_{12} - c_{01}c_{22} & c_{00}c_{22} - c_{02}^2 & c_{01}c_{02} - c_{00}c_{12} \\ c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11} & c_{01}c_{02} - c_{00}c_{12} & c_{00}c_{11} - c_{01}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \\ c_{02}c_{12} - c_{01}c_{22} \\ c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Ortogonalne krivulje 2. razreda

Svaka krivulja 2. razreda ζ, osim parabole, inducira involuciju ϕ_C na pramenu pravaca (F) gdje su izotropni pravci krivulje ζ fiksni pravci te involucije. Izotropnom pravcu $\mathbf{u}$ involucija ϕ_C inducirana krivuljom ζ pridružuje izotropni pravac $\mathbf{v}$ na sljedeći način

$$\mathbf{v} = \phi_C(\mathbf{u}) := \pi_\zeta(\mathbf{u}) \wedge F.$$

Definicija 2.2.2. *Ako za involuciju ϕ_C induciranu krivuljom 2. razreda ζ vrijedi*

$$\mathcal{I}_{\mathbb{QH}} \circ \phi_C = \phi_C \circ \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}$$

tada se krivulja ζ naziva ortogonalna krivulja 2. razreda.

Općenito, dvije će involucije komutirati ako se podudaraju ili ako njihovi fiksni elementi čine harmoničku četvorku, [3], [22]. Dakle, postoje dvije klase ortogonalnih krivulja 2. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$.

Prvu klasu čine sve kružnice jer induciraju involuciju koja se podudara s apsolutnom involucijom, tj. vrijedi $\phi_C = \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}$. Svaka kružnica može se dopuštenom transformacijom oblika

$$[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_0, -\frac{c_{01}}{c_{11}}u_0 + u_1, \frac{c_{02}}{c_{11}}u_0 + u_2] \quad \text{za } c_{11} \neq 0$$

prikazati sljedećom jednadžbom

$$au_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.8}$$

pri čemu je pravac $\mathbf{c}[1, 0, 0]$ centrala kružnice.

Druga klasa ortogonalnih krivulja su krivulje 2. razreda kojima su izotropni pravci u harmonitetu s apsolutnim pravcima. Za određivanje koeficijenata c_{ij}, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, ortogonalne krivulje iz druge klase promotrimo opću krivulju 2. razreda ζ, zadanu jednadžbom (2.4), koja inducira involuciju ϕ_C i proizvoljan izotropni pravac $\mathbf{p}[0, p_1, p_2]$. Tada je

$$\mathbf{q} = \mathcal{I}_{\mathbb{QH}} \circ \phi_C(\mathbf{p}) = \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}(\phi_C(\mathbf{p})) = \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}(\pi_\zeta(\mathbf{p}) \wedge F),$$

$$\pi_\zeta(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1c_{01} + p_2c_{02} \\ p_1c_{11} + p_2c_{12} \\ p_1c_{12} + p_2c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\pi_\zeta(\mathbf{p}) \wedge F = [0, p_1c_{12} + p_2c_{22}, -p_1c_{11} - p_2c_{12}],$$
$$\mathbf{q} = [0, -p_1c_{11} - p_2c_{12}, p_1c_{12} + p_2c_{22}].$$

Pravci $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ su u harmonitetu s apsolutnim pravcima $\mathbf{f_i},\ i \in \{1,2\}$, ako prema (2.1) vrijedi

$$c_{11}p_1^2 + 2c_{12}p_1p_2 + c_{22}p_2^2 = 0. \tag{2.9}$$

S druge strane vrijedi

$$\mathbf{q}' = \phi_C \circ \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}(\mathbf{p}) = \phi_C(\mathcal{I}_{\mathbb{QH}}(\mathbf{p})) = \phi_C([0, p_2, p_1]) = \pi_\zeta([0, p_2, p_1]) \wedge F,$$

$$\pi_\zeta([0, p_2, p_1]) = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2c_{01} + p_1c_{02} \\ p_2c_{11} + p_1c_{12} \\ p_2c_{12} + p_1c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q}' = [0, p_2c_{12} + p_1c_{22}, -p_2c_{11} - p_1c_{12}].$$

Stoga su pravci $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}'$ u harmonitetu s apsolutnim pravcima $\mathbf{f_i},\ i \in \{1,2\}$, ako prema (2.1) vrijedi

$$c_{11}p_2^2 + 2c_{12}p_1p_2 + c_{22}p_1^2 = 0. \tag{2.10}$$

Nadalje, da bi vrijedilo $\mathcal{I}_{\mathbb{QH}} \circ \phi_C = \phi_C \circ \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}$ pravci $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}'$ moraju se podudarati, pa izjednačavanjem (2.9) i (2.10) slijedi

$$c_{11} = c_{22},$$

te jednadžba ortogonalne krivulje druge klase ima sljedeći oblik

$$c_{00}u_0^2 + c_{11}u_1^2 + c_{11}u_2^2 + 2c_{01}u_0u_1 + 2c_{02}u_0u_2 + 2c_{12}u_1u_2 = 0. \tag{2.11}$$

Ovisno da li je inducirana involucija ϕ_C hiperbolička ili eliptička, tj. da li je diskriminanta $\Delta = c_{12}^2 - c_{11}^2$ pozitivna ili negativna [14], [30], ortogonalna krivulja druge klase je hiperbola ili elipsa. Svaka ortogonalna krivulja druge klase dana jednadžbom (2.11) može se pomoću dopuštene transformacije

$$[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_0, \frac{c_{02}c_{12} - c_{01}c_{11}}{c_{11}^2 - c_{12}^2}u_0 + u_1, \frac{c_{01}c_{12} - c_{02}c_{11}}{c_{11}^2 - c_{12}^2}u_0 + u_2] \quad \text{za } c_{11}^2 - c_{12}^2 \neq 0$$

zapisati jednadžbom

$$\hat{c}_{00}u_0^2 + \hat{c}_{11}u_1^2 + \hat{c}_{11}u_2^2 + 2\hat{c}_{12}u_1u_2 = 0. \tag{2.12}$$

Dakle, može se zaključiti npr. da je jednadžba (2.12) za $\hat{c}_{11} = 0$ hiperbola oblika

$$au_0^2 + 2u_1u_2 = 0, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.13}$$

a za $\hat{c}_{12} = 0$ elipsa oblika

$$au_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.14}$$

pri čemu je za obje krivulje centrala pravac $\mathbf{c}[1, 0, 0]$.

Propozicija 2.2.1. *Pol apsolutnog pravca u odnosu na ortogonalnu krivulju 2. razreda je izotropna točka.*

Dokaz. Za kružnicu κ danu jednadžbom (2.8) i apsolutne pravce $\mathbf{f_i},\ i \in \{1, 2\}$ vrijedi

$$\pi_\kappa(\mathbf{f_i}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Za ortogonalnu krivulju ζ danu jednadžbom (2.12) i apsolutne pravce vrijedi

$$\pi_\zeta(\mathbf{f_i}) = \begin{pmatrix} \hat{c}_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} \\ 0 & \hat{c}_{12} & \hat{c}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\hat{c}_{11} + \hat{c}_{12} \\ \pm\hat{c}_{12} + \hat{c}_{11} \end{pmatrix}.$$

Kako za izotropnu točku $X(x_0, x_1, x_2)$ mora vrijediti $X^T\mathbf{f_1} = 0$ ili $X^T\mathbf{f_2} = 0$, tada se lako pokaže da tvrdnja vrijedi. □

Napomena. Ako je apsolutna figura $\mathcal{F}^*_{\mathbf{QH}}$ tada se svaka kružnica dopuštenom transformacijom oblika $[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_0, -\frac{c_{02}}{c_{12}}u_0 + u_1, -\frac{c_{01}}{c_{12}}u_0 + u_2]$ za $c_{12} \neq 0$ može prikazati jednadžbom $au_0^2 + 2u_1u_2 = 0,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, te one čine prvu klasu ortogonalnih krivulja 2. razreda. Analogno prethodnom postupku, prema uvjetu okomitosti točaka i apsolutnoj involuciji za apsolutnu figuru $\mathcal{F}^*_{\mathbf{QH}}$, može se izračunati da drugu klasu ortogonalnih krivulja 2. razreda čine krivulje za koje vrijedi $c_{12} = 0$. Ovisno da li je diskriminanta $\Delta = -c_{11}c_{22}$ pozitivna ili negativna ortogonalna krivulja 2. klase je hiperbola ili elipsa. Dopuštenom transformacijom $[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_0, -\frac{c_{01}}{c_{11}}u_0 + u_1, -\frac{c_{02}}{c_{22}}u_0 + u_2]$ za $c_{11}, c_{22} \neq 0$ ortogonalne krivulje druge klase mogu se prikazati jednadžbom $\hat{c}_{00}u_0^2 + \hat{c}_{11}u_1^2 + \hat{c}_{22}u_2^2 = 0$. Stoga npr. krivulja oblika $au_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je ortogonalna hiperbola, a $au_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = 0,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ortogonalna elipsa.

2.3 Cirkularne krivulje

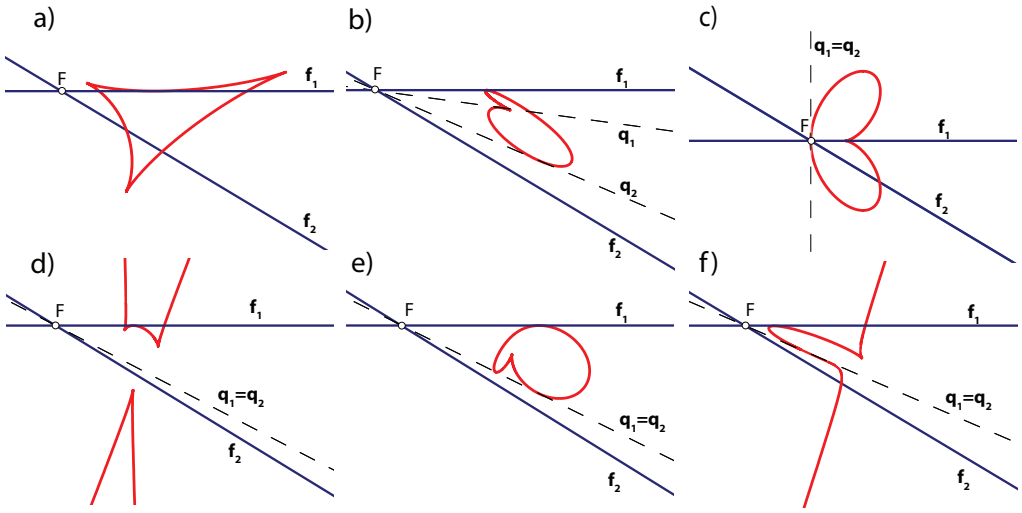
Definicija 2.3.1. *Razredna krivulja je* ***cirkularna*** *ako je barem jedan pravac te krivulje apsolutni pravac. Razredna krivulja je* ***potpuno cirkularna*** *ako su apsolutni pravci njeni jedini izotropni pravci.*

Ako je apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ presječni pravac krivulje k^n razreda n i pramena (F) kratnosti t, a apsolutni pravac $\mathbf{f_2}$ kratnosti r tada je krivulja k^n *cirkularna krivulja tipa* (t, r). Broj $t + r$ naziva se *stupanj cirkularnosti* krivulje k^n i vrijedi $r + t \leq n$, pri čemu za $r + t = n$ krivulja k^n je potpuno cirkularna.

Cirkularne krivulje 2. razreda:

- 1-cirkularne krivulje tipa $(1, 0)$ ili $(0, 1)$ su specijalne hiperbole,
- 2-cirkularne krivulje (potpuno cirkularne)
  - tipa $(1, 1)$ su kružnice,
  - tipa $(2, 0)$ ili $(0, 2)$ su specijalne parabole.

Cirkularne krivulje 3. razreda:



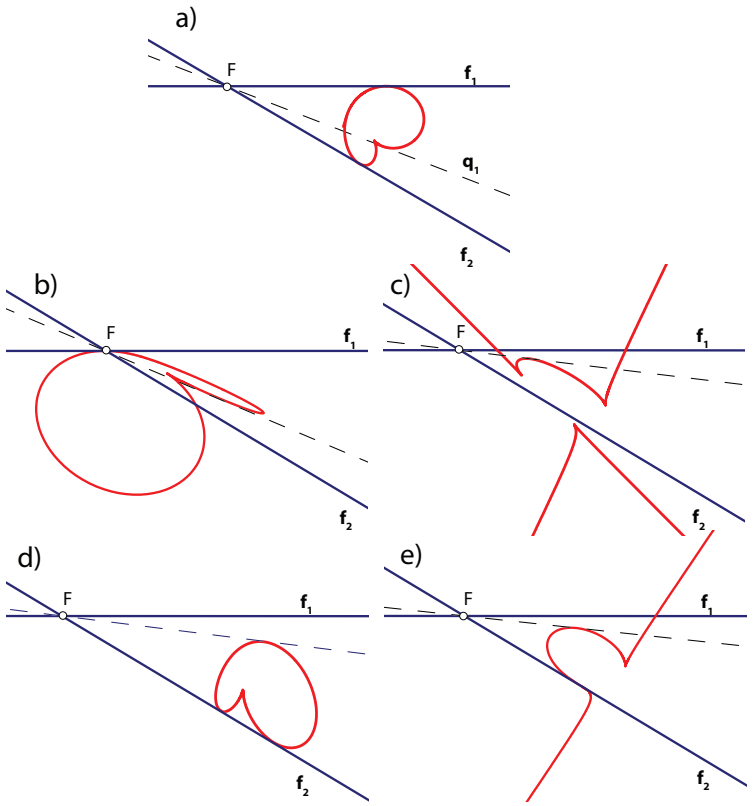
Slika 2.2: Tipovi 1-cirkularnih krivulja 3. razreda u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

- 1-cirkularne krivulje tipa $(1, 0)$ ili $(0, 1)$
  jedan izotropni pravac je apsolutan, dok preostala dva izotropna pravca mogu biti

konjugirano imaginarni (sl. 2.2a), realni i različiti (sl. 2.2b) ili se mogu podudarati te je apsolutna točka F diralište na izotropnom pravcu krivulje (sl. 2.2c). Također, 1-cirkularna krivulja 3. razreda može imati i jedan dvostruki izotropni pravac, koji može imati par konjugirano imaginarnih dirališta (izolirani dvostruki pravac) (sl. 2.2d), dva realna i različita dirališta (dvostruka tangenta) (sl. 2.2e) ili dva dirališta koja se podudaraju (infleksijski pravac) (sl. 2.2f),

- 2-cirkularne krivulje
  - tipa $(1,1)$ (sl. 2.3a),
  - tipa $(2,0)$ ili $(0,2)$

    jedan apsolutni pravac je pravac krivulje s diralištem u apsolutnoj točki F (sl. 2.3b) ili je dvostruki pravac krivulje koji može biti izolirani dvostruki pravac (sl. 2.3c), dvostruka tangenta (sl. 2.3d) ili infleksijski pravac (sl. 2.3e), pri čemu niti jedno diralište dvostrukog pravca nije apsolutna točka F,

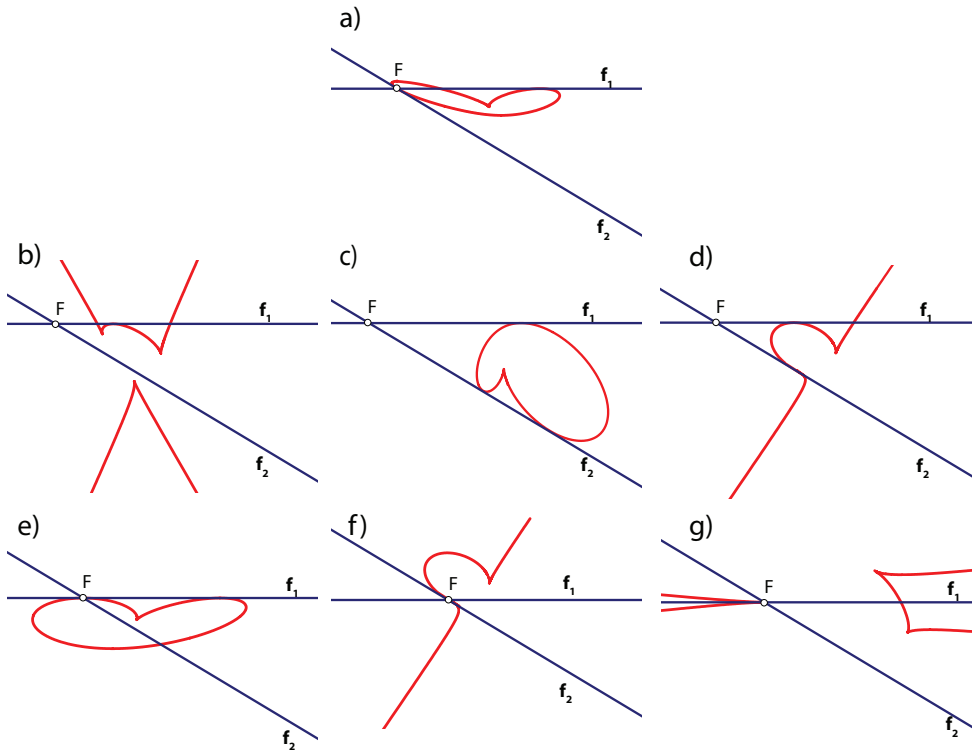


Slika 2.3: Tipovi 2-cirkularnih krivulja 3. razreda u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

- 3-cirkularne krivulje (potpuno cirkularne)
  - tipa $(1,2)$ ili $(2,1)$

    krivulja sadrži oba apsolutna pravca, pri čemu jedan apsolutni pravac ima diralište u apsolutnoj točki F (sl. 2.4a) ili je dvostruki pravac krivulje koji može biti izolirani dvostruki pravac (sl. 2.4b), dvostruka tangenta (sl. 2.4c) odnosno infleksijski pravac (sl. 2.4d), gdje niti jedno diralište dvostrukog pravca nije apsolutna točka F,
  - tipa $(3,0)$ ili $(0,3)$

    jedan apsolutni pravac je dvostruka tangenta s jednim diralištem u apsolutnoj točki F (sl. 2.4e), infleksijski pravac s diralištem u F (sl. 2.4f), ili sa šiljkom u F (sl. 2.4g).



Slika 2.4: Tipovi 3-cirkularnih krivulja 3. razreda u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

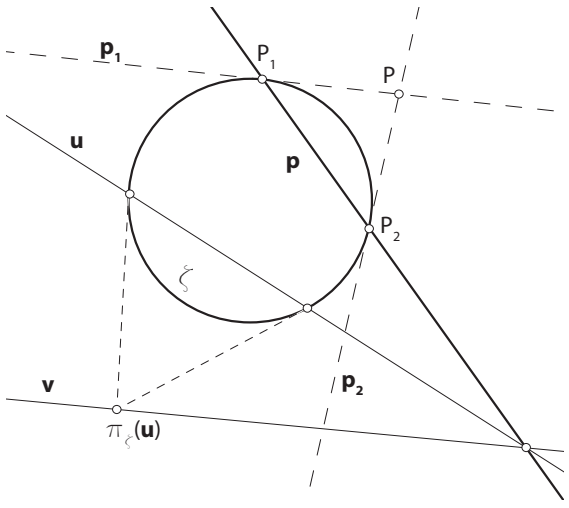
Poglavlje 3

Pravčasta inverzija

3.1 Pravčasta inverzija u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Definicija 3.1.1. *Pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ s obzirom na pravac $\mathbf{p}$ i krivulju 2. razreda ζ je preslikavanje gdje su pridruženi pravci konjugirani pravci u odnosu na krivulju ζ i sijeku se u točki na pravcu $\mathbf{p}$.*

Pravac $\mathbf{p}$ naziva se *polara* pravčaste inverzije, a krivulja 2. razreda ζ *temeljna krivulja 2. razreda* ili kraće temeljna konika. Polara $\mathbf{p}$ i pravci $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ temeljne konike ζ incidentni s polom P polare $\mathbf{p}$ s obzirom na ζ nazivaju se *temeljni pravci* i čine *temeljni trostran* pravčaste inverzije. Vrhovi temeljnog trostrana P, P_1 i P_2, koji su redom polovi pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ s obzirom na ζ, nazivaju se *temeljnim točkama*.



Slika 3.1: Slika $\mathbf{v}$ pravca $\mathbf{u}$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$

Općenito, pravcu $\mathbf{u}$ pravčastom inverzijom $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ pridružuje se pravac $\mathbf{v}$, tj. prema definiciji 3.1.1 vrijedi

$$\mathbf{v} = \sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}(\mathbf{u}) := (\mathbf{u} \wedge \mathbf{p}) \wedge \pi_\zeta(\mathbf{u}). \tag{3.1}$$

Kako su pridruženi pravci $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ konjugirani pravci s obzirom na krivulju ζ, odnosno vrijedi da je pol pravca $\mathbf{u}$ s obzirom na krivulju ζ incidentan s pravcem $\mathbf{v}$ i pol pravca $\mathbf{v}$ incidentan s pravcem $\mathbf{u}$, tada slijedi da je pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ bijektivno i involutorno za svaki pravac u općem položaju prema temeljnom trostranu.

Za temeljne se pravce $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$ i $\mathbf{p_2}$ pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ definira da se redom preslikavaju u pramenove pravaca (P), (P_1) i (P_2), te su stoga singularni pravci preslikavanja $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$. Nadalje, za pravce incidentne s vrhovima temeljnog trostrana vrijedi sljedeće:

$$\mathbf{u} \in (P) \quad \rightarrow \quad \pi_\zeta(\mathbf{u}) \in \mathbf{p}, \quad \sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{u} \in (P_i),\ i \in \{1,2\} \quad \rightarrow \quad \pi_\zeta(\mathbf{u}) \in \mathbf{p_i}, \quad \sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}(\mathbf{u}) = P_i \wedge \pi_\zeta(\mathbf{u}) = \mathbf{p_i}. \tag{3.3}$$

Dakle, definirana pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ je involutorno preslikavanje za sve pravce ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, osim za temeljne pravce, te stoga pripada skupini preslikavanja koja nazivamo Cremoninim transformacijama, [29].

Pravci temeljne konike ζ su fiksni pravci pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ jer vrijedi

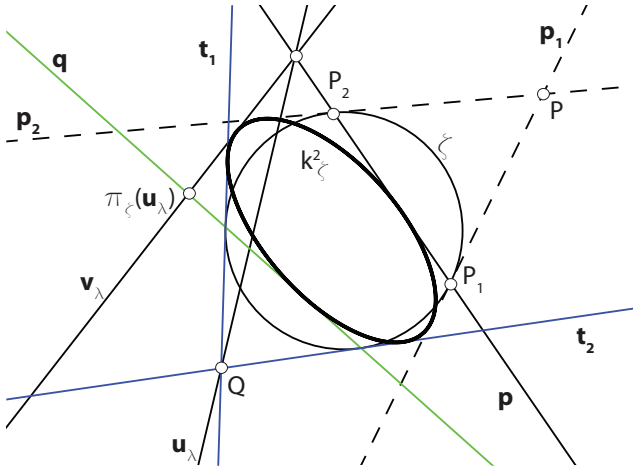
$$\mathbf{u} \in \zeta \quad \rightarrow \quad \pi_\zeta(\mathbf{u}) \in \mathbf{u}, \quad \sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}. \tag{3.4}$$

Teorem 3.1.1. *Pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ preslikava pramen pravaca (Q), koji ne sadrži temeljne pravce pravčaste inverzije, u krivulju 2. razreda k^2_ζ koja sadrži temeljne pravce. Također sadrži i pravce $\mathbf{q}$, $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, pri čemu je $\mathbf{q}$ polara točke Q s obzirom na ζ, a $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$ su presječni pravci krivulje ζ i pramena (Q).*

Dokaz. Neka su pravci $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in (Q)$ takvi da je $P \in \mathbf{a}$, $P_1 \in \mathbf{b}$, $P_2 \in \mathbf{c}$. Stoga prema (3.2) i (3.3) slika pramena (Q) sadrži temeljne pravce pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$. Nadalje, pravci $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$ temeljne konike ζ incidentni s vrhom pramena (Q) su prema (3.4) fiksni pravci preslikavanja $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$, stoga su sadržani u slici pramena (Q) (sl. 3.2). Za pravce pramena $\mathbf{u}_\lambda \in (Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$\pi_\zeta(\mathbf{u}_\lambda) \in \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \pi_\zeta^{-1}(Q).$$

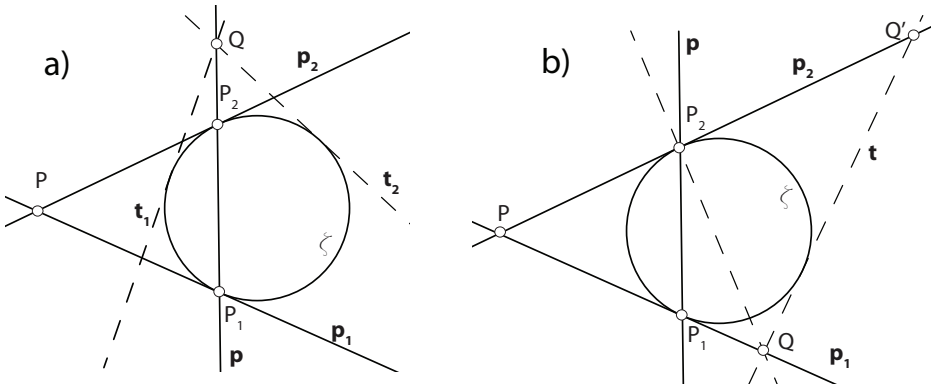
Dakle, slika pramena (Q) rezultat je projektivnog pridruženja dvaju nizova točaka na pravcima $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, te je ona krivulja 2. razreda koja sadrži i pravac $\mathbf{q}$. □



Slika 3.2: Slika k_ζ^2 pramena (Q) s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$

Slika pramena (Q) s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ kojemu je vrh incidentan s temeljnim pravcima raspada se na dva pramena pravaca, odnosno točnije:

- $Q \in \mathbf{p} \to (Q) \cap \zeta = \{\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}\}$, te prema (3.4) k_ζ^2 degenerira u (P) i (Q) (sl. 3.3a),
- $Q \in \mathbf{p_i},\ i \in \{1,2\} \to (Q) \cap \zeta = \{\mathbf{p_i}, \mathbf{t}\}$, te prema (3.3) i (3.4) k_ζ^2 degenerira u (P_i) i (Q') gdje je $Q' = \mathbf{t} \cap \mathbf{p_j}$, $j \in \{1,2\}$, $j \neq i$, jer postoji pravac pramena (Q) koji se preslika u pravac p_j (sl. 3.3b).



Slika 3.3: Slika pramena (Q) s vrhom na temeljnom pravcu pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$

Lema 3.1.1. *Pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ preslikava krivulju 2. razreda ξ, koja sadrži temeljne pravce $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$ i $\mathbf{p_2}$ pravčaste inverzije, u četiri pramena (P), (P_1), (P_2) i (Q), gdje je točka Q sjecište onih zajedničkih pravaca krivulje ξ i temeljne konike ζ koji nisu temeljni pravci pravčaste inverzije.*

Dokaz. Krivulja 2. razreda ξ koja sadrži temeljne pravce pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ i temeljna konika ζ sijeku se u 4 pravca od kojih su dva temeljni pravci $\mathbf{p_1}$ i $\mathbf{p_2}$. Neka su druga dva zajednička pravca označeni s $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$, a njihovo sjecište s Q. Prema (3.4) pravci $\mathbf{t_1}$ i $\mathbf{t_2}$ su fiksni pravci pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$, te su sadržani u slici krivulje ξ s obzirom na preslikavanje $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$. Nadalje, zbog involutornosti preslikavanja $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ svi ostali pravci krivulje ξ, izuzev temeljnih, preslikavaju se u pravce pramena (Q). Slike temeljnih pravaca pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ su pramenovi (P), (P_1), (P_2). □

Teorem 3.1.2. *Pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ je kvadratno preslikavanje, odnosno, preslikava krivulju k^n razreda n, koja je u općem položaju prema temeljnom trostranu pravčaste inverzije, u krivulju k_ζ razreda $2n$, pri čemu su temeljni pravci n-struki pravci krivulje k_ζ.*

Dokaz. Promotrimo krivulju k_ζ i proizvoljni pramen pravaca (Q). Razred krivulje k_ζ jednak je broju njezinih pravaca koji pripadaju pramenu (Q). Kako je pravčasta inverzija involutorno preslikavanje tada se prema lemi 3.1.1 pramen (Q) može interpretirati kao dio inverzne slike krivulje 2. razreda ξ koja sadrži temeljne pravce pravčaste inverzije, a s temeljnom konikom ζ ima zajedničke pravce koji se sijeku u točki Q. Budući da krivulja k^n i ξ imaju $2n$ zajedničkih pravaca koji su različiti od temeljnih, ti će se pravci prema lemi 3.1.1 preslikati u $2n$ zajedničkih pravaca krivulje k_ζ i pramena (Q), tj. krivulja k_ζ je razreda $2n$.

Kako kroz svaku temeljnu točku prolazi n pravaca krivulje k^n, tada su prema (3.2) temeljni pravci n-struki pravci krivulje k_ζ. □

Ako krivulja k^n sadrži jedan od tri temeljna pravca kao r-struki pravac tada se slika raspada u r-struki pramen pravaca s vrhom u temeljnoj točki i krivulju k_ζ^{2n-r} razreda $2n-r$. Vrh r-strukog pramena je pol temeljnog pravca kojeg krivulja k^n sadrži s obzirom na temeljnu koniku ζ, a krivulja k_ζ^{2n-r} naziva se *pravom slikom* krivulje k^n s obzirom na pravčastu inverziju.

Sada se može općenito zaključiti da je slika proizvoljne krivulje 2. razreda k^2 krivulja 4. razreda k_ζ^4 koja će degenerirati u sljedećim slučajevima:

i)	$\mathbf{p} \in k^2$,	$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : k^2 \mapsto (P) \cup k_\zeta^3$,
	$\mathbf{p}_i \in k^2,\ i \in \{1,2\}$,	$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : k^2 \mapsto (P_i) \cup k_\zeta^3$,
ii)	$\mathbf{p}, \mathbf{p_i} \in k^2,\ i \in \{1,2\}$,	$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : k^2 \mapsto (P) \cup (P_i) \cup k_\zeta^2$,
	$\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2} \in k^2$,	$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : k^2 \mapsto (P_1) \cup (P_2) \cup k_\zeta^2$,
iii)	$\mathbf{p}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2} \in k^2$,	$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : k^2 \mapsto (P) \cup (P_1) \cup (P_2) \cup k_\zeta^1$.

Prema teoremu 3.1.2 svi temeljni pravci pravčaste inverzije su dvostruki pravci krivulje 4. razreda k^4_ζ, dok će krivulji 3. razreda k^3_ζ samo jedan temeljni pravac biti dvostruki pravac. Tip dvostrukog pravca ovisi o presjeku pramena pravaca s vrhom u odgovarajućoj temeljnoj točki i generatorne krivulje k^2. Presječni pravci mogu biti par konjugirano imaginarnih pravaca, dva realna i različita ili dva pravca koji se podudaraju, stoga pripadni temeljni pravac može biti redom dvostruki izolirani pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac krivulje k^4_ζ, odnosno k^3_ζ.

Promatra li se pripadna dualna krivulja generatorne krivulje k^n može se reći da ako krivulja k^n prolazi temeljnom točkom tada je pripadni temeljni pravac infleksijski pravac krivulje k^{2n}_ζ. Kako broj infleksijskih pravaca utječe na red krivulje, slijedi da je krivulja k^4_ζ:

- 6. reda ako krivulja k^2 ne prolazi niti jednom temeljnom točkom,
- 5. reda ako krivulja k^2 prolazi jednom temeljnom točkom,
- 4. reda ako krivulja k^2 prolazi dvijema temeljnim točkama,
- 3. reda ako krivulja k^2 prolazi svim trima temeljnim točkama.

Krivulja k^3_ζ je

- 4. reda ako krivulja k^2 ne prolazi niti jednom temeljnom točkom,
- 3. reda ako krivulja k^2 prolazi jednom temeljnom točkom i to onom koja nije incidentna s temeljnim pravcem kojeg krivulja k^2 sadrži.

Dakle, prave slike krivulja 2. razreda s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ su krivulje roda 0, odnosno racionalne krivulje.

Konstrukcija dirališta na n-strukim pravcima krivulje k^{2n}_ζ

Neka je k^{2n}_ζ slika krivulje k^n s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$. Tada se dirališta na n-strukim pravcima krivulje k^{2n}_ζ mogu konstruirati na temelju sljedećeg:

- pravci generatorne krivulje k^n incidentni s točkom P sijeku polaru $\mathbf{p}$ u diralištima krivulje k^{2n}_ζ na polari $\mathbf{p}$,

- pravci generatorne krivulje k^n incidentni s točkom P_i, $i \in \{1,2\}$, sijeku pravac $\mathbf{p_j}$, $j \in \{1,2\}$, $j \neq i$, u n točaka čije su slike s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ diralište na pravcu $\mathbf{p_i}$ krivulje k_ζ^{2n}.

Napomena. Slika točke $T \in \mathbf{p_i}$, $i \in \{1,2\}$, s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ je vrh pramena pravaca koji je prava slika pramena (T).

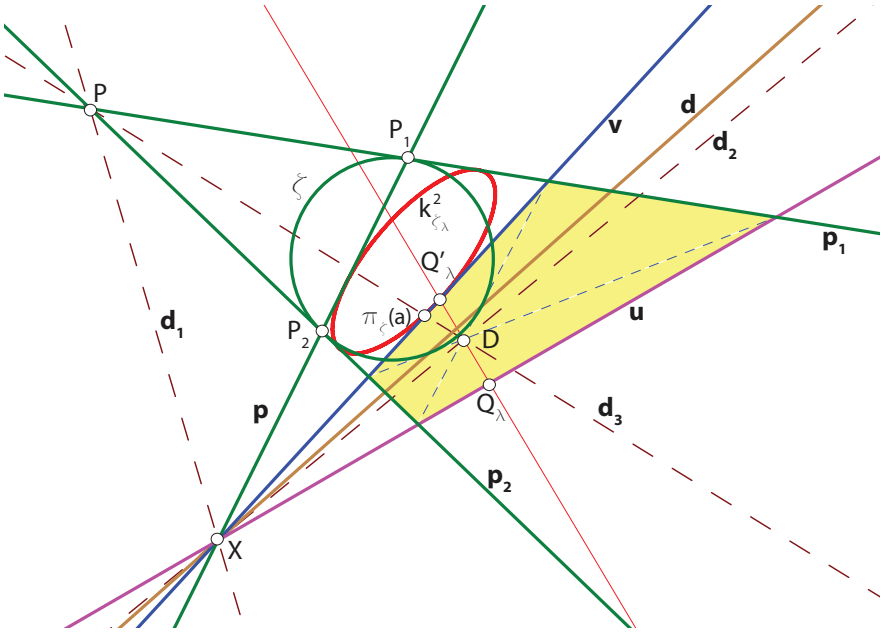
Konstrukcija dirališta na proizvoljnom pravcu krivulje k_ζ^{2n}

Neka je zadana pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$, te pravac $\mathbf{u}$ i njegova slika $\mathbf{v}$

$$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}.$$

Promotrimo niz točaka Q_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, na pravcu $\mathbf{u}$ te tim točkama pripadne pramenove pravaca (Q_λ). Svakom pramenu pravaca (Q_λ) preslikavanjem $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$ pridružena je jedna krivulja 2. razreda $k^2_{\zeta_\lambda}$

$$\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)} : (Q_\lambda) \mapsto k^2_{\zeta_\lambda}. \tag{3.5}$$



Slika 3.4: Konstrukcija dirališta na pravcu krivulje dobivene pravčastom inverzijom $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$

Prema teoremu 3.1.1 svaka krivulja $k^2_{\zeta_\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sadrži pravce $\mathbf{p}$, $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$ i $\mathbf{v}$, stoga krivulje $k^2_{\zeta_\lambda}$ čine pramen krivulja 2. razreda. Sada je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ prema (3.5) pravcu $\mathbf{u}$ pramena (Q_λ) pridružen pravac $\mathbf{v}$ krivulje $k^2_{\zeta_\lambda}$ iz pramena krivulja 2. razreda, pa stoga

i nizu točaka Q_λ na pravcu $\mathbf{u}$ jednoznačno je pridružen niz dirališta Q'_λ krivulja $k^2_{\zeta_\lambda}$ na pravcu $\mathbf{v}$. Pokažimo da su nizovi točaka ($\mathbf{u}$) i ($\mathbf{v}$) perspektivno pridruženi. Promotrimo potpuni četverostran $\mathbf{up_1vp_2}$ kojemu su dijagonalne točke označene s X, P i D, a dijagonale s $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ i $\mathbf{d_3}$ (vidi sl. 3.4). Tada vrijedi

$$(\mathbf{p_1p_2}, \mathbf{d_1d_3}) = -1, \quad (\mathbf{uv}, \mathbf{d_1d_2}) = -1,$$

te je $\mathbf{d_3}$ polara točke X, tj. $\pi_\zeta^{-1}(X) = \mathbf{d_3}$. Nadalje, neka je $\mathbf{d}$ slika pravca $\mathbf{d_2}$ s obzirom na preslikavanje $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$, pri čemu vrijedi $\pi_\zeta^{-1}(D) = \mathbf{d}$, tada slijedi

$$(\mathbf{uv}, \mathbf{pd}) = -1.$$

Dakle, točka D je centar perspektiviteta za nizove točaka na pravcima $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.

Stoga, ako je dana krivulja k^n i njen pravac $\mathbf{u}$, te njihove slike s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\zeta)}$, tj. krivulja k^{2n}_ζ i pravac $\mathbf{v}$, tada točke dirališta na pravcima $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ krivulja k^n i k^{2n}_ζ leže na pravcu pramena čiji je vrh pol pravca koji je u harmonitetu s polarom $\mathbf{p}$ i parom pravaca $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.

Konstrukcija je izvedena iz euklidskog slučaja poopćene inverzije u članku [7].

3.2 Pravčasta inverzija u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

S obzirom na vrstu temeljne konike i položaj polare mogu se proučavati različiti tipovi pravčaste inverzije, no za proučavanje cirkularnosti krivulja pogodan je sljedeći tip pravčaste inverzije:

Definicija 3.2.1. *Pravčasta inverzija koja apsolutnu figuru preslikava u nju samu, tj. čuva kao cjelinu, naziva se automorfna pravčasta inverzija.*

U automorfnoj pravčastoj inverziji apsolutni pravci mogu se preslikati sami u sebe ili jedan u drugi, stoga temeljna konika može biti samo ortogonalna krivulja 2. razreda. Nadalje, kako bi se apsolutna točka F preslikala sama u sebe znači da mora biti na polari pravčaste inverzije, stoga polara mora biti izotropni pravac. Promotrit će se i pravčasta inverzija obzirom na kružnicu i njenu centralu koja iako nije automorfna čuva apsolutne pravce, te je analogon euklidske obične inverzije. Dakle, proučavat će se sljedeći tipovi pravčaste inverzije:

- s obzirom na kružnicu i njenu centralu ili izotropni pravac, te singularan slučaj kada je polara apsolutni pravac,
- s obzirom na ortogonalnu krivulju 2. razreda i izotropni pravac ili apsolutni pravac, te singularan slučaj obzirom na ortogonalnu hiperbolu i izotropni pravac koji je element hiperbole.

3.3 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene pravčastom inverzijom

Ako generatorna krivulja 2. razreda, kao što je već rečeno, sadrži jedan temeljni pravac pravčaste inverzije tada je njena prava slika racionalna krivulja 3. razreda koja sadrži sva tri temeljna pravca pravčaste inverzije od kojih je jedan dvostruki pravac krivulje. Ako generatorna krivulja sadrži polaru $\mathbf{p}$, tada su s temeljnom točkom P incidentna dva pravca generatorne krivulje, te je prema (3.2) polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac krivulje 3. razreda. Ako generatorna krivulja sadrži temeljni pravac $\mathbf{p_i}$, $i \in \{1, 2\}$, tada su s temeljnom točkom P_j, $j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$, incidentna dva pravca generatorne krivulje, te je prema (3.3) temeljni pravac $\mathbf{p_j}$ dvostruki pravac krivulje 3. razreda. U nastavku će se promatrati samo krivulje 3. razreda dobivene kao prave slike krivulja 2. razreda s obzirom na pravčastu inverziju.

3.3.1 Tip I - Pravčasta inverzija s obzirom na kružnicu i njenu centralu

Neka je temeljna konika kružnica κ dana jednadžbom

$$\kappa: \ -u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

te neka je centrala $\mathbf{c}[1, 0, 0]$ kružnice polara pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$. Preostala dva temeljna pravca su apsolutni pravci $\mathbf{f_1}[0, 1, 1]$ i $\mathbf{f_2}[0, -1, 1]$, a temeljne točke su apsolutna točka $F(1, 0, 0)$ i izotropne točke kružnice $P_1(0, -1, 1)$ i $P_2(0, 1, 1)$.

Za određivanje jednadžbe pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ potrebno je odrediti koordinate pravca $\mathbf{v}[v_0, v_1, v_2]$ koji je slika proizvoljnog pravca $\mathbf{u}[u_0, u_1, u_2]$ s obzirom na pravčastu

inverziju $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$. Sjecište pravca $\mathbf{u}$ i polare $\mathbf{c}$ je točka

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{c} = (0, u_2, -u_1).$$

Pol U pravca $\mathbf{u}$ s obzirom na temeljnu koniku κ je

$$U = \pi_\kappa(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_0 \\ u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}.$$

Pravac $\mathbf{v}$ određen je točkom $\mathbf{c} \wedge \mathbf{u}$ i polom U, te slijedi

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ 0 & u_2 & -u_1 \\ -u_0 & u_1 & -u_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathbf{v} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{u}) \wedge \pi_\kappa(\mathbf{u}) = [u_1^2 - u_2^2, u_0 u_1, u_0 u_2].$$

Dakle, jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ je

$$[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_1^2 - u_2^2, u_0 u_1, u_0 u_2]. \tag{3.6}$$

Razmotrimo posebno sliku krivulje 2. razreda k^2 dobivene pravčastom inverzijom $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ kad generatorna krivulja k^2 sadrži polaru, te kad k^2 sadrži jedan temeljni pravac koji je apsolutan. U prvom slučaju za generatornu krivulju k^2 vrijedi $c_{00} = 0$, te uvrštavanjem (3.6) u jednadžbu krivulje k^2 dobiva se krivulja 3. razreda oblika

$$k_\kappa^3 \ldots \quad 2(u_1^2 - u_2^2)(c_{01}u_1 + c_{02}u_2) + u_0(c_{11}u_1^2 + c_{22}u_2^2 + 2c_{12}u_1u_2) = 0. \tag{3.7}$$

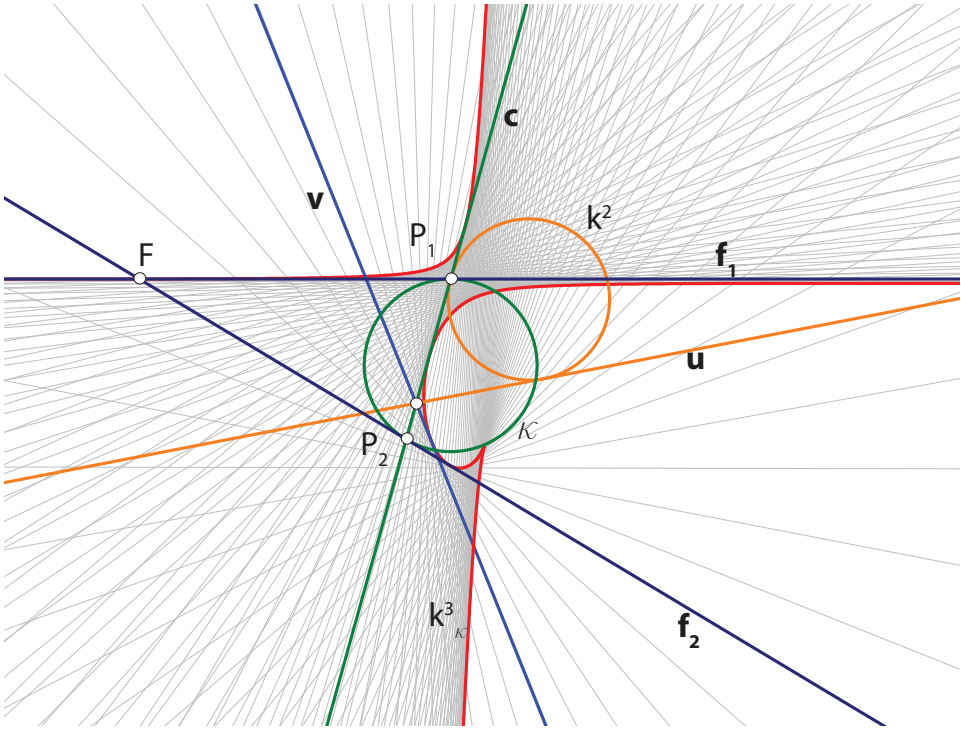
Za određivanje tipa dvostrukog pravca krivulje k_κ^3 potrebno je naći takav $m \in \mathbb{R}$ za koji je točka $T(0, 1, m)$ diralište na pravcu $\mathbf{c}$. Pramen pravaca (T) ima jednadžbu oblika $u_1 + mu_2 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom k_κ^3 (3.7) zadovoljavaju jednadžbu

$$u_2^2[c_{22}u_0 + (c_{11}m - 2c_{12})mu_0 + 2(c_{02} - c_{01}m)(m^2 - 1)u_2] = 0.$$

Očito je $u_2 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, te slijedi da je centrala $\mathbf{c}$ dvostruki pravac krivulje k_κ^3. Uvjet za koji je $u_2 = 0$ trostruko rješenje je

$$c_{22} + (c_{11}m - 2c_{12})m = 0,$$
$$m = \frac{c_{12} \pm \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}}{c_{11}},$$

pri čemu ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jednak nuli slijedi da je dvostruki pravac **c** izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac krivulje k^3_κ. Kako o istom izrazu ovisi i tip presječnih pravaca krivulje k^2 i pramena (F), može se zaključiti da tip dvostrukog pravca krivulje k^3_κ ovisi da li je generatorna krivulja k^2 elipsa, hiperbola ili parabola.



Slika 3.5: Cirkularna krivulja k^3_κ tipa (2,1) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ (3a)

Izotropni pravci krivulje k^3_κ proizlaze iz jednadžbe

$$(u_1^2 - u_2^2)(c_{01}u_1 + c_{02}u_2) = 0,$$

dobivene uvrštavanjem $u_0 = 0$ u (3.7), iz čega slijedi da je krivulja k^3_κ 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(1, 1)$. Treći izotropni pravac krivulje k^3_κ ima koordinate $[0, -c_{02}, c_{01}]$, stoga ako vrijedi $|c_{01}| = |c_{02}|$ onda je krivulja k^3_κ potpuno cirkularna tipa $(2, 1)$ ili $(1, 2)$. Kako uvjet $|c_{01}| = |c_{02}|$ slijedi i iz

$$\begin{pmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

znači da ako generatorna krivulja k^2 sadrži centralu **c** s diralištem u temeljnoj točki P_i, $i \in \{1, 2\}$, tada je njena slika s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ potpuno cirkularna krivulja 3. razreda kojoj jedan apsolutni pravac ima diralište u apsolutnoj točki F (sl. 3.5).

U drugom slučaju generatorna krivulja k^2 koja sadrži jedan apsolutni pravac, tj. temeljni pravac koji nije polara ($c_{00} \neq 0$), može biti samo specijalna hiperbola ili specijalna parabola. Oba tipa generatornih krivulja preslikavaju se s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ u krivulju 3. razreda oblika

$$k^3_\kappa \ldots \quad u_0^2(c_{11}u_1 \mp c_{22}u_2) + (u_1 \pm u_2)[2c_{01}u_0u_1 + 2c_{02}u_0u_2 + c_{00}(u_1^2 - u_2^2)] = 0. \tag{3.8}$$

Izotropni pravci krivulje k^3_κ zadovoljavaju jednadžbu

$$(u_1 \mp u_2)(u_1 \pm u_2)^2 = 0$$

te je krivulja k^3_κ potpuno cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(1,2)$ ili $(2,1)$.

Analizu dvostrukog pravca krivulje k^3_κ provest ćemo kada je generatorna krivulja k^2 specijalna hiperbola tipa $(1,0)$. Analogno bi se provodila analiza dvostrukog pravca krivulje dobivene od specijalne hiperbole tipa $(0,1)$ ili specijalne parabole. Pramen (T) s vrhom na pravcu $\mathbf{f_2}$ ima jednadžbu oblika $mu_0 + u_1 + u_2 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom k^3_κ (3.8) zadovoljavaju jednadžbu

$$[c_{11} + m(c_{00}m - 2c_{01})]mu_0^3 + [c_{11} + c_{22} + 2m(c_{00}m - c_{01} + c_{02})]u_2u_0^2 = 0.$$

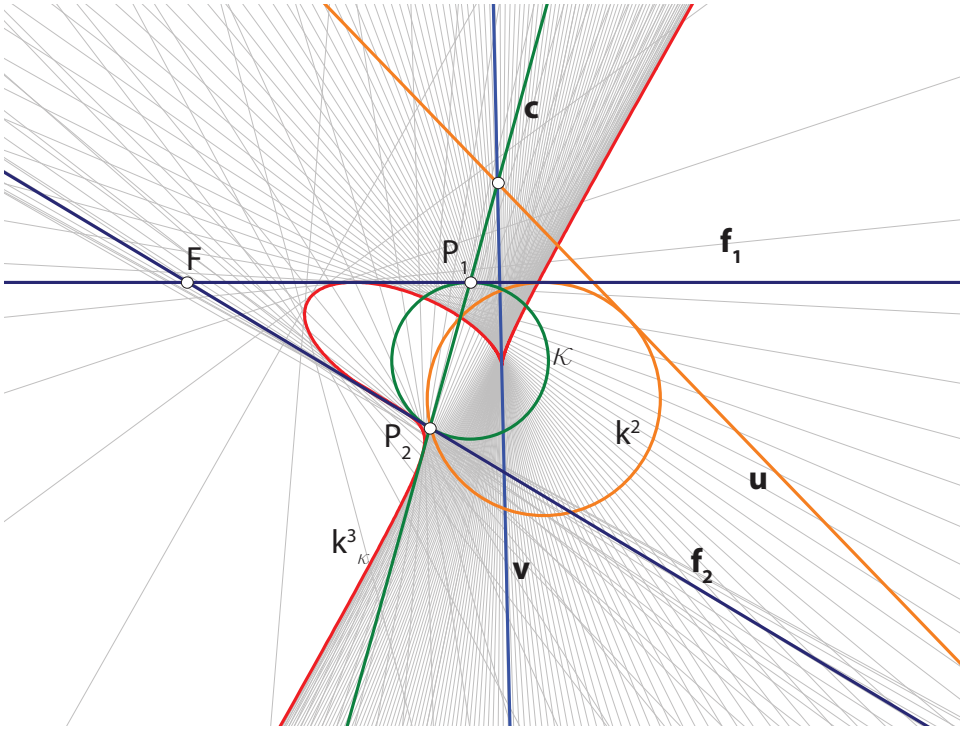
Očito je $u_0 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, te slijedi da je $\mathbf{f_2}$ dvostruki pravac krivulje k^3_κ. Uvjet za koji je $u_0 = 0$ trostruko rješenje je

$$\begin{gathered} c_{11} + c_{22} + 2m(c_{00}m - c_{01} + c_{02}) = 0, \\ m = \frac{c_{01} - c_{02} \pm \sqrt{(c_{01} - c_{02})^2 - 2c_{00}(c_{11} + c_{22})}}{2c_{00}}, \end{gathered}$$

te analogno kao ranije, ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jednak nuli dvostruki pravac krivulje k^3_κ je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac (sl. 3.6).

Teorem 3.3.1. *Neka je κ dana kružnica s centralom $\mathbf{c}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ preslikava krivulju 2. razreda k^2 koja sadrži jedan temeljni pravac u krivulju 3. razreda k^3_κ koja je*

- *potpuno cirkularna tipa (2,1) ili (1,2) ako je krivulja k^2 cirkularna ili necirkularna, a sadrži pravac $\mathbf{p}$ s diralištem u temeljnoj točki P_i, $i \in \{1,2\}$,*
- *2-cirkularna tipa (1,1) inače.*



Slika 3.6: Cirkularna krivulja k^3_κ tipa (1,2) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ (3d)

3.3.2 Tip II - Pravčasta inverzija s obzirom na kružnicu i izotropni pravac

Općenito jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$, gdje je izotropni pravac $\mathbf{p}[0, p_1, p_2]$ polara, ima sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} [u_0, u_1, u_2] &\to [v_0, v_1, v_2], \\ v_0 &\sim p_1 u_0 u_1 - p_2 u_0 u_2, \\ v_1 &\sim p_1(u_0^2 + u_2^2) - p_2 u_1 u_2, \\ v_2 &\sim -p_2(u_0^2 - u_1^2) + p_1 u_1 u_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Razlikujemo dva podtipa, kad je polara opći izotropni pravac ili apsolutni pravac.

Podtip a) Bez smanjenja općenitosti, neka je polara pravac $\mathbf{p}[0, 0, 1]$. Tada je prema (3.9) jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$

$$[u_0, u_1, u_2] \to [u_0 u_2, u_1 u_2, -u_0^2 + u_1^2]. \tag{3.10}$$

Druga dva temeljna pravca su $\mathbf{p_1}[1, 1, 0]$ i $\mathbf{p_2}[1, -1, 0]$, a temeljne točke su $P(0, 0, 1)$, $P_1(1, -1, 0)$ i $P_2(1, 1, 0)$. Ovaj podtip pravčaste inverzije je automorfan, pri čemu je

apsolutna figura po elementima fiksna, te je cirkularnost invarijantna. Točnije, cirkularna krivulja tipa (t, r) preslikava se u cirkularnu krivulju tipa (t, r), stoga se cirkularna krivulja 3. razreda može dobiti od cirkularnih krivulja 2. razreda koje sadrže jedan temeljni pravac.

Cirkularna generatorna krivulja k^2 koja sadrži polaru, tj. vrijedi $c_{22} = 0$, je specijalna hiperbola tipa $(1, 0)$ ili $(0, 1)$, te je njena slika s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$ krivulja 3. razreda oblika

$$k^3_\kappa \ldots \quad (2c_{02}u_0 \mp c_{11}u_1)(u_1^2 - u_0^2) - (c_{00}u_0^2 + 2c_{01}u_0u_1 + c_{11}u_1^2)u_2 = 0. \tag{3.11}$$

Izotropni pravci krivulje k^3_κ zadovoljavaju jednadžbu

$$u_1^2(u_1 \mp u_2) = 0$$

te slijedi da je k^3_κ 1-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(1, 0)$ ili $(0, 1)$.

Pramen (T) s vrhom na polari $\mathbf{p}$ ima jednadžbu oblika $mu_0 + u_1 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom k^3_κ (3.11) zadovoljavaju jednadžbu

$$u_0^2[(2c_{02} \pm c_{11}m)(m^2 - 1)u_0 + (c_{00} + c_{11}m^2 - 2c_{01}m)u_2] = 0.$$

Kako je $u_0 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, slijedi da je polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac krivulje k^3_κ. Tip dvostrukog pravca dobiva se iz uvjeta kada je $u_0 = 0$ trostruko rješenje gornje jednadžbe, odnosno za

$$m = \frac{c_{01} \pm \sqrt{c_{01}^2 - c_{00}c_{11}}}{c_{11}},$$

pri čemu ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jednak nuli dvostruki pravac je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac.

Cirkularna generatorna krivulja k^2 koja sadrži temeljni pravac $\mathbf{p_i}$, $i \in \{1, 2\}$, $(c_{22} \neq 0)$ može biti specijalna hiperbola, specijalna parabola ili kružnica. Ako je k^2 specijalna hiperbola tipa $(1, 0)$ koja sadrži pravac $\mathbf{p_2}$ tada je njena slika s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$ krivulja 3. razreda oblika

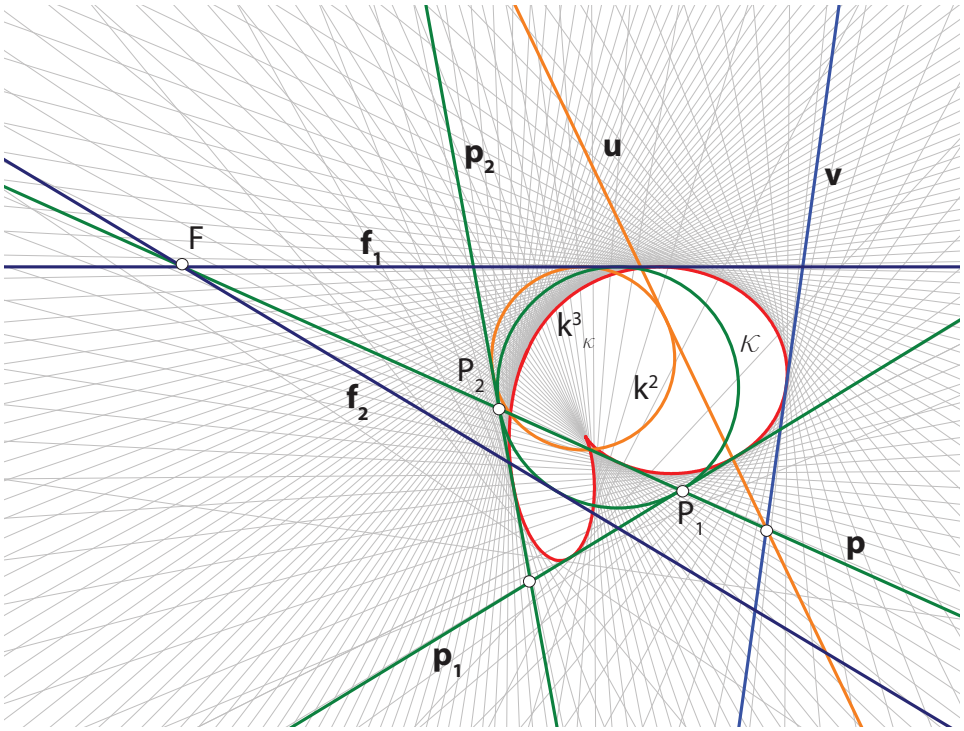
$$k^3_\kappa \ldots \quad (u_0 - u_1)[c_{22}(u_0^2 - u_1^2) + (c_{11} + c_{22})u_1u_2 - 2c_{02}u_0u_2] + (c_{00}u_0 + c_{11}u_1)u_2^2 = 0. \tag{3.12}$$

Pramen (T) s vrhom na temeljnom pravcu $\mathbf{p_1}$ je oblika $u_0 - u_1 + mu_2 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom k^3_κ (3.12) zadovoljavaju jednadžbu

$$[c_{00} + c_{11} + (c_{11} - 2c_{02} + c_{22})m + 2c_{22}m^2]u_0u_2^2 - (1 + m)(c_{11} + c_{22}m)mu_2^3 = 0.$$

Kako je $u_2 = 0$ dvostruko rješenje za svaki m slijedi da je pravac $\mathbf{p_1}$ dvostruki pravac krivulje k^3_κ, koji može biti izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infeksijski pravac ovisno o izrazu pod korijenom dobivenog iz uvjeta kada je $u_2 = 0$ trostruko rješenje

$$m = \frac{2c_{02} - c_{11} - c_{22} \pm \sqrt{(c_{11} - 2c_{02} + c_{22})^2 - 8(c_{00} + c_{11})c_{22}}}{4c_{22}}.$$



Slika 3.7: Cirkularna krivulja k^3_κ tipa (1,0) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$ (1b)

Izotropni pravci krivulje k^3_κ zadovoljavaju jednadžbu

$$u_1(u_1 - u_2)(c_{22}u_1 - c_{11}u_2) = 0,$$

te slijedi da je k^3_κ 1-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(1, 0)$ (sl. 3.7). Treći izotropni pravac $[0, c_{11}, c_{22}]$ krivulje k^3_κ se za $c_{11} = 0$ podudara s polarom, a za $|c_{11}| = |c_{22}|$ s jednim apsolutnim pravcem. U slučaju kada je $c_{11} = 0$ krivulja k^2 sadrži pravac $\mathbf{q}$ za koji vrijedi $(\mathbf{pq}, \mathbf{f_1 f_2}) = -1$, te je tada polara $\mathbf{p}$ pravac krivulje k^3_κ s diralištem u apsolutnoj točki F. U slučaju kada je $|c_{11}| = |c_{22}|$ dobiva se 2-cirkularna krivulja k^3_κ tipa (1,1) ili (2,0). Pri čemu se može uočiti da iz uvjeta $c_{11} = -c_{22}$ za specijalnu hiperbolu slijedi $c_{12} = 0$, te je generatorna krivulja k^2 kružnica, a iz uvjeta $c_{11} = c_{22}$ slijedi $c_{11} = c_{22} = c_{12}$, te je k^2 specijalna parabola tipa $(2, 0)$.

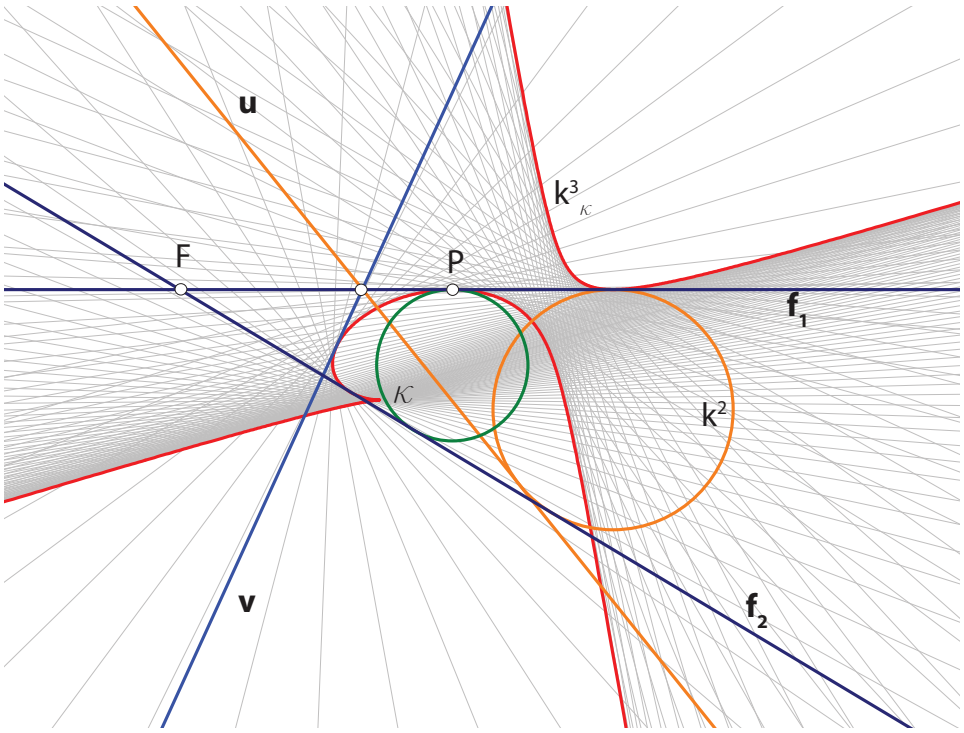
Podtip b) Neka je polara apsolutni pravac $\mathbf{f_1}[0,1,1]$, tada iz (3.9) slijedi jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{f_1},\kappa)}$

$$[u_0,u_1,u_2] \mapsto [u_0(u_1-u_2), u_0^2-(u_1-u_2), u_0^2-u_1(u_1-u_2)]. \tag{3.13}$$

Sva tri temeljna pravca podudaraju se s aposlutnim pravcem $\mathbf{f_1}$, a pripadna temeljena točka je $P(0,-1,1)$, stoga je ovo sigularan podtip pravčaste inverzije.

Generatorna krivulja k^2 koja sadrži polaru $\mathbf{f_1}$ može biti specijalna hiperbola, specijalna parabola ili kružnica. Ako je pol P diralište krivulje k^2 na pravcu $\mathbf{f_1}$, tj. vrijedi $c_{01}=-c_{02}$, tada je prava slika krivulje k^2 s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{f_1},\kappa)}$ krivulja 2. razreda. Stoga, neka je k^2 specijalna hiperbola tipa $(1,0)$ kojoj pol P nije diralište, tj. vrijedi $c_{01}\neq -c_{02}$. Tada se k^2 s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{f_1},\kappa)}$ preslikava u krivulju 3. razreda oblika

$$\begin{aligned} k_\kappa^3 \ldots \quad & (u_1-u_2)[c_{00}u_0^2+c_{11}(u_2^2-u_1u_2+u_0^2)+c_{22}(u_1^2-u_1u_2-u_0^2)]+ \\ & 2u_0[c_{01}(u_0^2-u_1u_2+u_2^2)+c_{02}(u_0^2+u_1u_2-u_1^2)]=0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

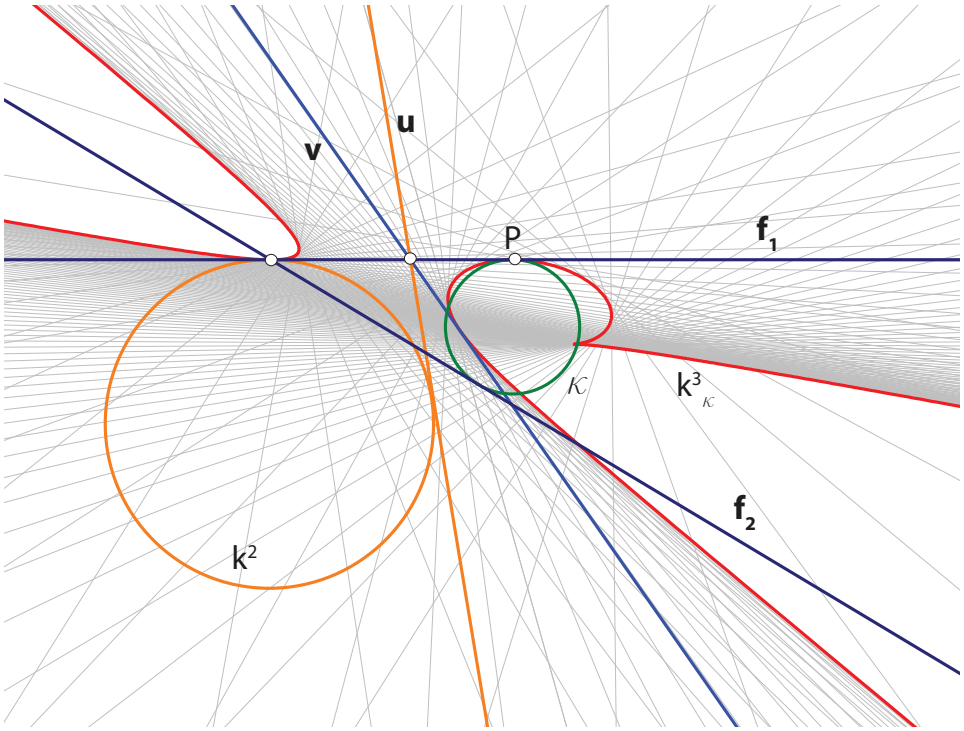


Slika 3.8: Cirkularna krivulja k_κ^3 tipa (2,1) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{f_1},\kappa)}$ (3c)

Izotropni pravci krivulje k_κ^3 zadovoljavaju jednadžbu

$$(u_1-u_2)^2(c_{22}u_1-c_{11}u_2)=0,$$

te slijedi da je k^3_κ 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(2,0)$. Treći izotropni pravac ima koordinate $[0, c_{11}, c_{22}]$, stoga uz uvjet $|c_{11}| = |c_{22}|$ analogno prijašnjem razmatranju, dobiva se potpuno cirkularna krivulja 3. razreda k^3_κ tipa $(2,1)$ ako je k^2 kružnica (sl. 3.8), a tipa (3,0) ako je k^2 specijalna parabola tipa $(2,0)$ (sl. 3.9).



Slika 3.9: Cirkularna krivulja k^3_κ tipa (3,0) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{f_1},\kappa)}$ (3e)

Pramen (T) s vrhom na polari $\mathbf{f_1}$ je oblika $mu_0 + u_1 - u_2 = 0$, te uvrštavanjem u (3.14) dobiva se

$$[2c_{02} + 2c_{01}(1+m^2) - m(c_{00} + c_{11} - c_{22} + c_{11}m^2)]u_0^3 +$$

$$[2m(c_{01} + c_{02}) + m^2(c_{22} - c_{11})]u_1 u_0^2 = 0.$$

Kako je $u_0 = 0$ dvostruko rješenje za svaki m, slijedi da je apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ dvostruki pravac krivulje k^3_κ, a iz uvjeta za koji je $u_0 = 0$ trostruko rješenje

$$m(2c_{01} + 2c_{02} - c_{11}m + c_{22}m) = 0,$$

$$m \in \left\{0, \frac{2(c_{01} + c_{02})}{c_{11} - c_{22}}\right\},$$

određene su koordinate dirališta $(m, 1, -1)$ na dvostrukom pravcu $\mathbf{f_1}$. Uočimo da je tip dvostrukog pravca uvijek dvostruka tangenta s jednim diralištem u polu P, a drugo diralište se podudara s diralištem krivulje k^2 i polare.

Teorem 3.3.2. *Neka je κ dana kružnica i $\mathbf{p}$ proizvoljan izotropni pravac u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$ preslikava (t,r)-cirkularnu krivulju 2. razreda k^2 koja sadrži jedan temeljni pravac u krivulju 3. razreda k^3_κ koja je*

- *$(t+r)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (t,r) ako je $\mathbf{p} \neq \mathbf{f}_i,\ i \in \{1,2\}$,*
- *$(t+r+1)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(t+1,r)$ ako je $\mathbf{p} = \mathbf{f}_1$, odnosno tipa $(t,r+1)$ ako je $\mathbf{p} = \mathbf{f}_2$.*

3.3.3 Tip III - Pravčasta inverzija s obzirom na ortogonalnu krivulju 2. razreda i izotropni pravac

Neka je temeljna konika ortogonalna elipsa $\mathcal{E}$ ili ortogonalna hiperbola $\mathcal{H}$ dana jednadžbom

$$\mathcal{E}:\ -u_0^2+u_1^2+u_2^2=0, \quad E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}:\ -u_0^2+2u_1u_2=0, \quad H=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Neka je izotropni pravac $\mathbf{p}[0,p_1,p_2]$ polara, tada je jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$

$$\begin{aligned}[u_0,u_1:u_2]&\to[v_0,v_1,v_2],\\ v_0&\sim p_1u_0u_1+p_2u_0u_2,\\ v_1&\sim p_1u_0^2-p_1u_2^2+p_2u_1u_2,\\ v_2&\sim p_2u_0^2-p_2u_1^2+p_1u_1u_2,\end{aligned} \tag{3.15}$$

odnosno pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{H})}$

$$\begin{aligned}[u_0,u_1,u_2]&\to[v_0,v_1,v_2],\\ v_0&\sim p_2u_0u_1+p_1u_0u_2,\\ v_1&\sim p_1u_0^2+p_2u_1^2-p_1u_1u_2,\\ v_2&\sim p_2u_0^2+p_1u_2^2-p_2u_1u_2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

S obzirom da ortogonalna elipsa i ortogonalna hiperbola pripadaju istom tipu ortogonalnih krivulja 2. razreda pravčastom inverzijom $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ i $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{H})}$ dobivaju se isti rezultati. Stoga će se, radi jednostavnosti, analitički račun provesti kada je temeljna konika pravčaste inverzije ortogonalna elipsa. Pravčasta inverzija kojoj je temeljna konika ortogonalna hiperbola, a polara izotropni pravac te hiperbole je singularan slučaj ovog tipa pravčaste inverzije, te će se posebno razmotriti.

Podtip a) Bez smanjenja općenitosti, neka je polara izotropni pravac $\mathbf{p}[0,0,1]$. Tada su druga dva temeljna pravca pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ pravci $\mathbf{p_1}[1,1,0]$ i $\mathbf{p_2}[1,-1,0]$, a temeljne točke $P(0,0,1)$, $P_1(1,-1,0)$ i $P_2(1,1,0)$. Jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ prema (3.15) je

$$[u_0,u_1,u_2] \mapsto [u_0u_2, u_1u_2, u_0^2-u_1^2]. \tag{3.17}$$

Ovaj podtip pravčaste inverzije je automorfan tako da čuva apsolutnu figuru fiksnom kao cjelinu, dakle cirkularnost je invarijanta. Točnije cirkularna krivulja tipa (t,r) preslikava se u cirkularnu krivulju tipa (r,t), stoga se cirkularne krivulje 3. razreda mogu dobiti od cirkularnih krivulja 2. razreda koje sadrže jedan temeljni pravac.

Cirkularna generatorna krivulja k^2 koja sadrži polaru, tj. vrijedi $c_{22}=0$, može biti samo specijalna hiperbola. Stoga, primjerice specijalna hiperbola tipa $(1,0)$ preslikava se u krivulju 3. razreda oblika

$$k^3_{\mathcal{E}}\ldots \quad (u_0^2-u_1^2)(2c_{02}u_0-c_{11}u_1)+[c_{00}u_0^2+u_1(2c_{01}u_0+c_{11}u_1)]u_2=0, \tag{3.18}$$

kojoj izotropni pravci zadovoljavaju

$$u_1^2(u_1+u_2)=0,$$

te je $k^3_{\mathcal{E}}$ 1-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(0,1)$.

Pramen (T) s vrhom na polari $\mathbf{p}$ ima jednadžbu oblika $mu_0+u_1=0$, te koordinate sjecišta s krivuljom $k^3_{\mathcal{E}}$ (3.18) zadovoljavaju jednadžbu

$$u_0^2[(2c_{02}+c_{11}m)(1-m^2)u_0-(c_{00}+c_{11}m^2-2c_{01}m)u_2]=0.$$

Kako je $u_0=0$ dvostruko rješenje za svaki $m\in\mathbb{R}$, slijedi da je polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$. Tip dvostrukog pravca dobiva se iz uvjeta kada je $u_0=0$ trostruko rješenje gornje jednadžbe, odnosno za

$$m=\frac{c_{01}\pm\sqrt{c_{01}^2-c_{00}c_{11}}}{c_{11}},$$

pri čemu ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jednak nuli dvostruki pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$ je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac.

Cirkularna generatorna krivulja k^2 koja sadrži temeljni pravac $\mathbf{p_i}$, $i \in \{1,2\}$, $(c_{22} \neq 0)$ može biti specijalna hiperbola, specijalna parabola ili kružnica. Neka je k^2 specijalna hiperbola tipa $(1,0)$ koja sadrži pravac $\mathbf{p_2}$, tada je njena slika s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ krivulja 3. razreda oblika

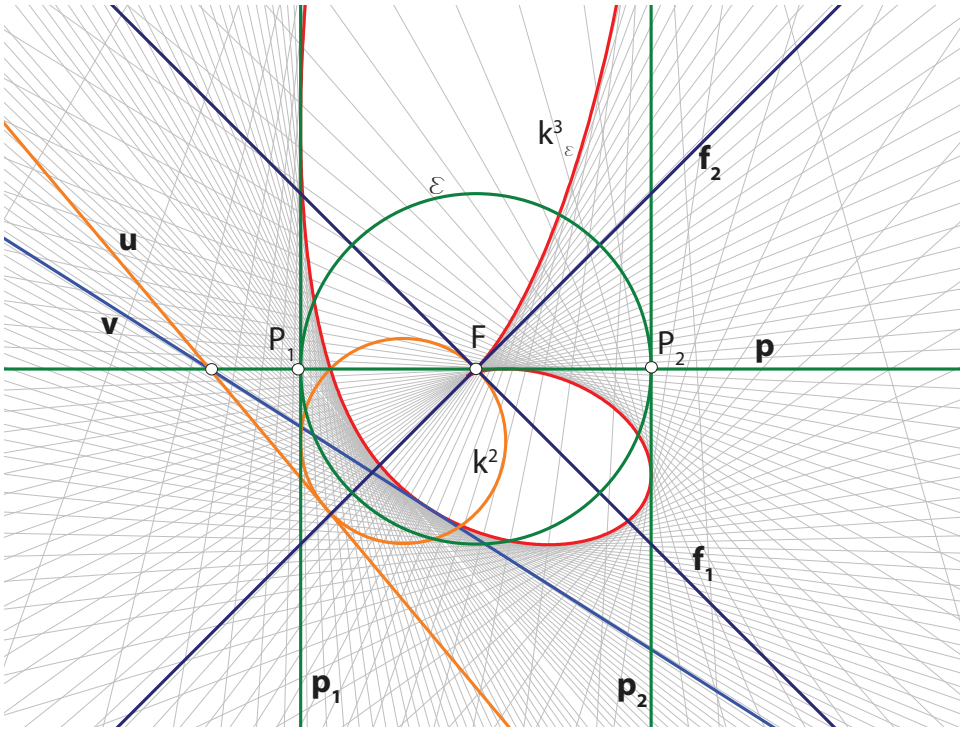
$$k^3_{\mathcal{E}} \ldots \quad c_{22}(u_0-u_1)^2(u_0+u_1)+(c_{00}u_0+c_{11}u_1)u_2^2- \tag{3.19}$$
$$(u_0-u_1)[(c_{11}+c_{22})u_1-2c_{02}u_0]u_2=0.$$

Pramen (T) s vrhom na temeljnom pravcu $\mathbf{p_1}$ je oblika $-u_0+u_1+mu_2=0$ te koordinate sjecišta s krivuljom $k^3_{\mathcal{E}}$ (3.19) zadovoljavaju jednadžbu

$$[c_{00}+c_{11}-(c_{11}-2c_{02}+c_{22})m+2c_{22}m^2]u_0u_2^2+(m-1)(c_{11}-c_{22}m)mu_2^3=0,$$

odnosno $\mathbf{p_1}$ je dvostruki pravac čiji tip ovisi o izrazu pod korijenom

$$m=\frac{c_{11}+c_{22}-2c_{02}\pm\sqrt{(2c_{02}-c_{11}-c_{22})^2-8(c_{00}+c_{11})c_{22}}}{4c_{22}}.$$



Slika 3.10: Cirkularna krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ tipa (0,2) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ (2b)

Izotropni pravci krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$ zadovoljavanju jednadžbu

$$u_1(u_1+u_2)(c_{22}u_1+c_{11}u_2)=0,$$

te je krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ 1-cirkularna 3. razreda tipa $(0,1)$. Pri čemu se izotropni pravac $[0,-c_{11},c_{22}]$ za $c_{11}=0$ podudara s polarom $\mathbf{p}$, a za $|c_{11}|=|c_{22}|$ podudara s jednim apsolutnim pravcem. U slučaju $c_{11}=0$ krivulja k^2 sadrži pravac $\mathbf{q}$ za koji vrijedi $(\mathbf{f_1f_2},\mathbf{pq})=-1$, te je polara $\mathbf{p}$ pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$ s diralištem u apsolutnoj točki F. Ako vrijedi $|c_{11}|=|c_{22}|$, analogno prijašnjem razmatranju, $k^3_{\mathcal{E}}$ je 2-cirkularna krivulja tipa (1,1) tj. (0,2) (sl. 3.10), ako je generatorna krivulja k^2 kružnica tj. specijalna parabola tipa $(2,0)$.

Podtip b) Neka je polara apsolutni pravac $\mathbf{f_1}=[0,1,1]$, te je jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ prema (3.15)

$$[u_0,u_1,u_2]\to[u_0u_1+u_0u_2,u_0^2-u_2^2+u_1u_2,u_0^2-u_1^2+u_1u_2] \tag{3.20}$$

temeljni pravci su $\mathbf{p_1}[1,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\mathbf{p_2}[1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}]$, a temeljne točke $P(0,1,1)$, $P_1(1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ i $P_2(1,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Generatorna krivulja k^2 koja sadrži polaru $\mathbf{f_1}$ može biti specijalna hiperbola, specijalna parabola ili kružnica. Slika specijalne hiperbole tipa $(1,0)$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ je krivulja 3. razreda oblika

$$\begin{aligned} k^3_{\mathcal{E}}\ldots\quad & (c_{00}+c_{11}-c_{22})u_0^2u_1+c_{22}u_1^3+c_{11}u_2^3+ \\ & [(c_{00}-c_{11}+c_{22})u_0^2+(c_{11}-2c_{22})u_1^2]u_2+(c_{22}-2c_{11})u_1u_2^2+ \\ & 2c_{01}u_0[u_0^2+(u_1-u_2)u_2]+2c_{02}u_0[u_0^2-(u_1-u_2)u_1]=0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

kojoj izotropni pravci zadovoljavaju jednadžbu

$$(u_1-u_2)^2(c_{11}u_1+c_{22}u_2)=0,$$

te je $k^3_{\mathcal{E}}$ 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(2,0)$. Treći izotropni pravac ima koordinate $[0,c_{22},-c_{11}]$, dakle ako vrijedi $|c_{11}|=|c_{22}|$ tada je $k^3_{\mathcal{E}}$ potpuno cirkularna krivulja tipa $(3,0)$ ili $(2,1)$. Razmatranjem uvjeta, analogno kao ranije, za krivulju $k^3_{\mathcal{E}}$ tipa $(3,0)$ generatorna krivulja k^2 je kružnica, a za krivulju tipa $(2,1)$ k^2 je specijalna parabola tipa $(2,0)$ (sl. 3.11).

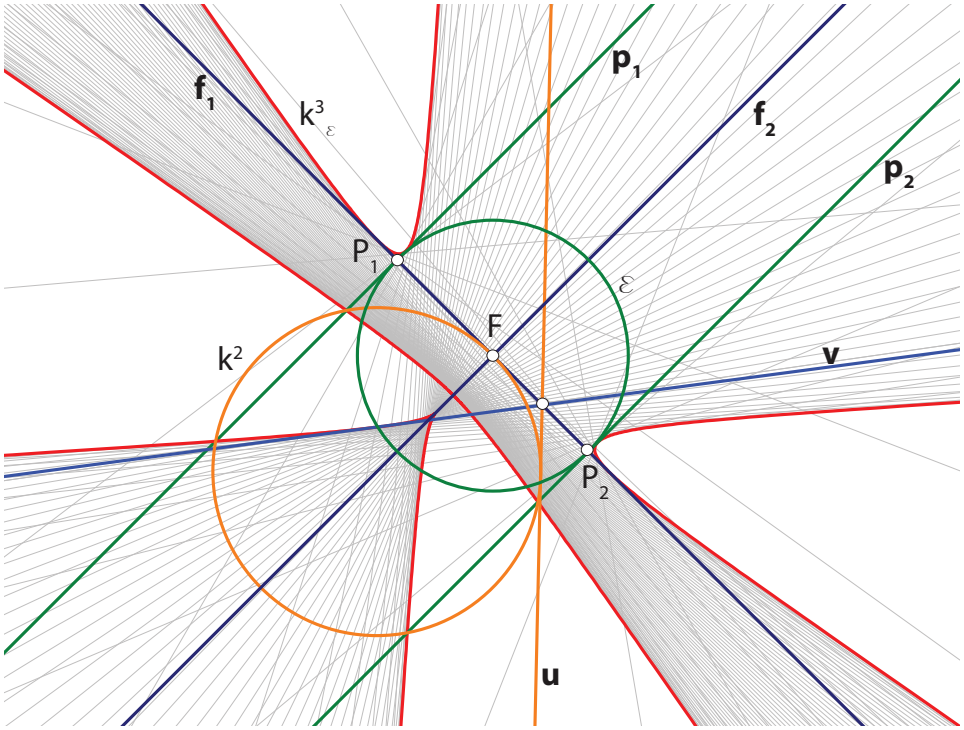
Pramen (T) s vrhom na polari $\mathbf{f_1}$ ima oblik $mu_0+u_1-u_2=0$, te uvrštavanjem u (3.21) dobiva se

$$[2c_{02}-2c_{01}(m^2-1)+m(c_{00}+c_{22}-c_{11}+c_{11}m^2)]u_0^3+$$

$$[2c_{00} + m(2c_{02} - 2c_{01} + c_{11}m + c_{22}m)]u_1u_0^2 = 0$$

iz čega slijedi da je apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ dvostruki pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$. Tip dvostrukog pravca ovisi o izrazu pod korijenom

$$m_{1,2} = \frac{c_{01} - c_{02} \mp \sqrt{(c_{02} - c_{01})^2 - 2c_{00}(c_{11} + c_{22})}}{c_{11} + c_{22}}.$$



Slika 3.11: Cirkularna krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ tipa (2,1) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ (3c)

Preostalo je promotriti sliku krivulje k^2 koja sadrži temeljni pravac $\mathbf{p_i}$, $i \in \{1, 2\}$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$. Radi pojednostavljenja uvjeta na koeficijente generatorne krivulje k^2 koja sadrži temeljni pravac $\mathbf{p_i}$, $i \in \{1, 2\}$, ovaj slučaj promotrit će se za apsolutnu figuru $\mathcal{F}^*_{\mathbb{QH}}$. Tada su temeljni pravci $\mathbf{p_1}[1, 1, 0]$ i $\mathbf{p_2}[1, -1, 0]$, temeljne točke $P(0, 1, 0)$, $P_1(1, -1, 0)$ i $P_2(1, 1, 0)$, a jednadžba pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ je

$$[u_0, u_1, u_2] \mapsto [u_0u_2, u_1u_2, u_0^2 - u_1^2]. \tag{3.22}$$

Slika generatorne krivulje k^2 koja sadrži npr. temeljni pravac $\mathbf{p_1}$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ je krivulja 3. razreda oblika

$$k^3_{\mathcal{E}} \ldots \quad c_{22}(u_0 - u_1)(u_0 + u_1)^2 + u_2[2(u_0 + u_1)(c_{02}u_0 + c_{12}u_1) + (c_{00}u_0 - c_{11}u_1)u_2] = 0. \tag{3.23}$$

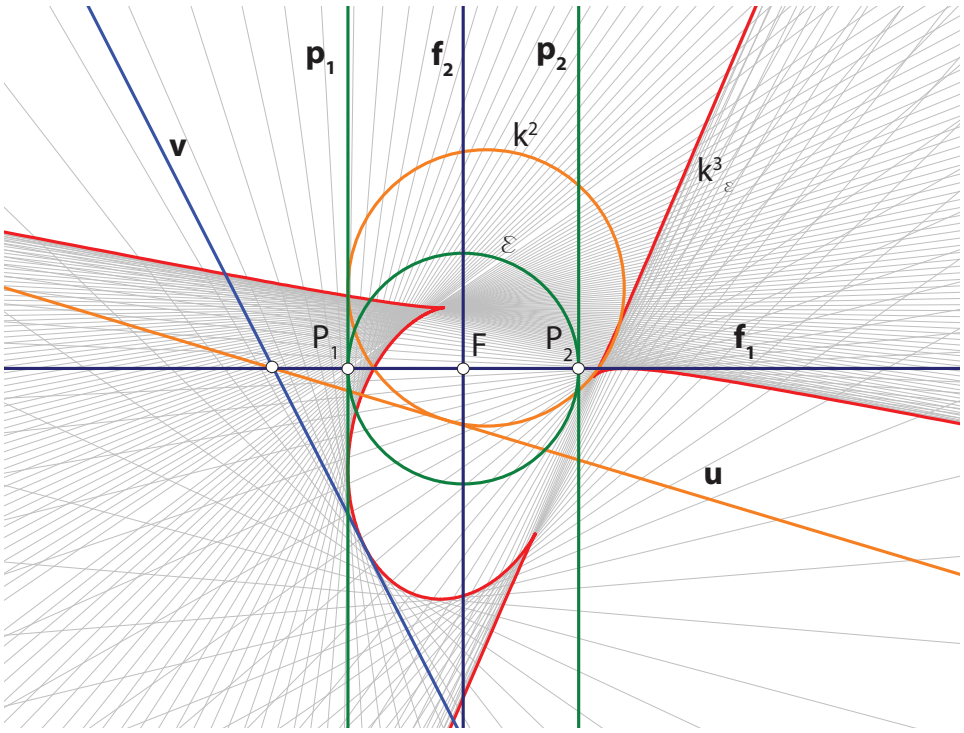
Pramen (T) s vrhom na pravcu $\mathbf{p_2}$ ima jednadžbu oblika $u_0 + u_1 + mu_2 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom $k^3_{\mathcal{E}}$ zadovoljavaju jednadžbu

$$[(c_{00} + c_{11} + 2m(c_{12} - c_{02} + c_{22}m)]u_0u_2^2 + m[c_{11} + m(2c_{12} + c_{22}m)]u_2^3 = 0.$$

Kako je $u_2 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$ tada slijedi da je pravac $\mathbf{p_2}$ dvostruki pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$. Ovisno o izrazu pod korijenom dobivenog iz uvjeta kada je $u_2 = 0$ trostruko rješenje gornje jednadžbe

$$m = \frac{c_{02} - c_{12} \pm \sqrt{(c_{12} - c_{02})^2 - 2(c_{00} + c_{11})c_{22}}}{2c_{22}},$$

pravac $\mathbf{p_2}$ je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$.



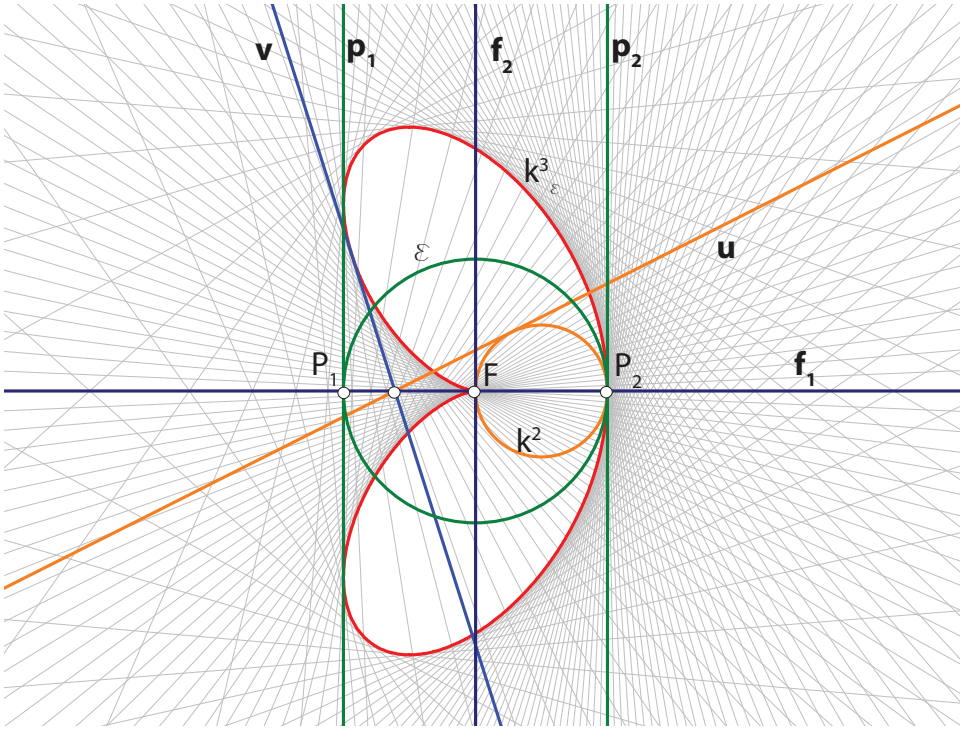
Slika 3.12: Cirkularna krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ tipa (1,0) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ (1a)

Izotropni pravci krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$ zadovoljavaju jednadžbu

$$u_1(c_{22}u_1^2 - 2c_{12}u_1u_2 + c_{11}u_2^2) = 0,$$

dakle krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ je 1-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(1, 0)$. Druga dva izotropna pravca krivulje $k^3_{\mathcal{E}}$ ovisno o izrazu $c_{12}^2 - c_{11}c_{22}$ mogu biti par konjugirano imaginarnih pravaca (sl. 3.12), par realnih pravaca ili se podudaraju. Nadalje, za $c_{11} = 0$ krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ je

2-cirkularna tipa $(2,0)$ ($\mathbf{f_1}$ s diralištem u F), pri čemu je krivulja k^2 specijalna hiperbola tipa $(0,1)$, a za $c_{11} = c_{12} = 0$ krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ ima šiljak u F te je potpuno cirkularna tipa $(3,0)$ (sl. 3.13), pri čemu je krivulja k^2 specijalna parabola tipa $(0,2)$.



Slika 3.13: Cirkularna krivulja $k^3_{\mathcal{E}}$ tipa (3,0) dobivena sa $\sigma_{(\mathbf{f_1},\mathcal{E})}$ (3g)

Podtip c) Neka je pravac $\mathbf{p}[0,0,1]$ ortogonalne hiperbole $\mathcal{H}$ polara pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{H})}$. Tada je prema (3.16) njena jednadžba

$$[u_0,u_1,u_2] \mapsto [u_0u_1, u_1^2, u_0^2 - u_1u_2]. \tag{3.24}$$

Kako se svi temeljni pravci podudaraju s polarom $\mathbf{p}$ i temeljna točka je $P(0,1,0)$, ovo je singularan podtip pravčaste inverzije.

Cirkularna krivulja 2. razreda koja sadrži polaru $\mathbf{p}$, pri čemu diralište nije točka P, tj. vrijedi $c_{22} = 0$ i $c_{02} \neq 0$, je specijalna hiperbola tipa $(1,0)$ ili $(0,1)$. Tada je slika krivulje k^2 s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{H})}$ krivulja 3. razreda oblika

$$k^3_{\mathcal{H}} \ldots \quad 2c_{02}(u_0^3 - u_0u_1u_2) + u_1[c_{00}u_0^2 + 2c_{01}u_0u_1 + c_{11}(u_1(u_1 \pm u_2) \mp u_0^2)] = 0. \tag{3.25}$$

Izotropni pravci krivulje $k^3_{\mathcal{H}}$ zadovoljavaju jednadžbu

$$u_1^2(u_1 \pm u_2) = 0$$

te je krivulja $k^3_{\mathcal{H}}$ 1-cirkularna krivulja tipa $(0,1)$ ili $(1,0)$.

Pramen (T) s vrhom na polari $\mathbf{p}$ je oblika $mu_0 + u_1 = 0$, te koordinate sjecišta s krivuljom $k^3_{\mathcal{H}}$ zadovoljavaju jednadžbu

$$u_0^2[2c_{02}(u_0 + mu_2) \pm m((c_{11} \mp c_{00} \pm 2c_{01}m \mp c_{11}m^2)u_0 + c_{11}mu_2)] = 0.$$

Kako je $u_0 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, slijedi da je polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac, a iz uvjeta za koji je $u_0 = 0$ trostruko rješenje

$$2c_{02}mu_2 \pm c_{11}m^2u_2 = 0,$$
$$m \in \Big\{0, \mp\frac{2c_{02}}{c_{11}}\Big\},$$

određene su koordinate dirališta $(m, 1, 0)$ na dvostrukom pravcu $\mathbf{p}$. Uočimo da je tip dvostrukog pravca uvijek dvostruka tangenta s jednim diralištem u polu P, a drugo diralište se podudara s diralištem krivulje k^2 na polari $\mathbf{p}$.

Teorem 3.3.3. *Neka je $\mathcal{E}$ ili $\mathcal{H}$ dana ortogonalna elipsa odnosno hiperbola i $\mathbf{p}$ proizvoljan izotropni pravac u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{E})}$ odnosno $\sigma_{(\mathbf{p},\mathcal{H})}$ preslikava (t,r)-cirkularnu krivulju 2. razreda k^2 koja sadrži jedan temeljni pravac u krivulju 3. razreda $k^3_{\mathcal{E}}$ odnosno $k^3_{\mathcal{H}}$ koja je*

- *$(t+r)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (r,t) ako je $\mathbf{p} \neq \mathbf{f_i}$, $i \in \{1,2\}$,*
- *$(t+r+1)$-cirkularna krivulja 3.razreda ako je $\mathbf{p} = \mathbf{f_i}$, $i \in \{1,2\}$, pri čemu ako je $\mathbf{p} = \mathbf{f_1}$ tada je $k^3_{\mathcal{E}}$ ($k^3_{\mathcal{H}}$) tipa $(t+r+1,0)$ za $t < 2$ i tipa $(2,1)$ za $t = 2$.*

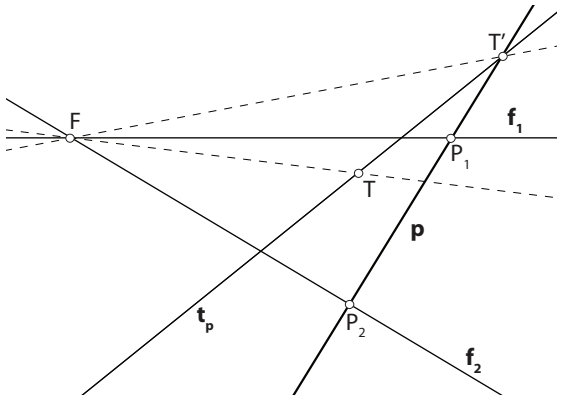
Poglavlje 4

Nožišna transformacija

4.1 Nožišna transformacija u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

Definicija 4.1.1. *Za danu točku T i čvrsti neizotropni pravac $\mathbf{p}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nožišni pravac točke T s obzirom na pravac $\mathbf{p}$ je spojnica točke T i njoj okomite točke na pravcu $\mathbf{p}$.*

Preslikavanje koje točki pridružuje pravac po definiciji 4.1.1 naziva se *nožišna transformacija* i označavat će se sa $\sigma_{\mathbf{p}}$. Pravac $\mathbf{p}$ naziva se *polarom* nožišne transformacije, a izotropne točke $P_i = \mathbf{f_i} \wedge \mathbf{p}$, $i \in \{1, 2\}$, polare $\mathbf{p}$ nazivaju se *temeljnim točkama* nožišne transformacije.



Slika 4.1: Nožišni pravac $\mathbf{t_p}$ točke T s obzirom na pravac $\mathbf{p}$

Prema definiciji okomitih točaka slijedi da za danu točku $T \neq F$ i neizotropni pravac $\mathbf{p}$ postoji jedinstvena okomita točka T' na pravcu $\mathbf{p}$

$$(\forall T, \mathbf{p})(\exists! T') \text{ td. } T' \perp T,\ T' \in \mathbf{p}, \quad \text{za } T \neq F,\ F \notin \mathbf{p}.$$

Posebno, apsolutna točka F okomita je na svaku točku ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$, pa onda i na svaku točku danog pravca $\mathbf{p}$. Nadalje, svakoj izotropnoj točki $T \in \mathbf{f_i}$, $i \in \{1,2\}$, na pravcu $\mathbf{p}$ okomita je točka $P_i = \mathbf{f_i} \wedge \mathbf{p}$, te slijedi da je točka P_i okomita sama na sebe. Stoga je nožišnom transformacijom $\sigma_\mathbf{p}$ svakoj točki T ravnine $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$, koja nije apsolutna točka niti temeljna točka, pridružen jedinstven nožišni pravac $\mathbf{t_p}$, dok je apsolutnoj točki F i temeljnim točkama P_i, $i \in \{1,2\}$, redom pridružen pramen pravaca (F) odnosno (P_i). Dakle, apsolutna točka i temeljne točke su singularne točke nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$.

Definicija 4.1.2. *Za danu krivulju ζ reda n i polaru $\mathbf{p}$ nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ nožišna krivulja $k_\mathbf{p}$ krivulje ζ je geometrijsko mjesto nožišnih pravaca svih točaka krivulje ζ.*

Teorem 4.1.1. *Neka je dana krivulja 2. reda k^2 i polara $\mathbf{p}$ nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je nožišna krivulja krivulje k^2 racionalna potpuno cirkularna krivulja 4. razreda.*

Dokaz. Nožišna krivulja je proizvod pridruživanja niza točaka na pravcu $\mathbf{p}$ i niza točaka krivulje k^2, tako da je svakoj točki pravca $\mathbf{p}$ pridružen par točaka krivulje k^2, a svakoj točki krivulje k^2 pridružena je jedna točka pravca $\mathbf{p}$. Dakle, postoji (1,2)-pridruživanje između pravca tj. krivulje 1. reda i krivulje 2. reda. Prema Chaslesovoj relaciji [12] slijedi da je nožišna krivulja $k^4_\mathbf{p}$ razreda $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$.

Svaki apsolutni pravac $\mathbf{f_i}$, $i \in \{1,2\}$, siječe krivulju k^2 u dvije točke kojima je pripadni nožišni pravac apsolutni pravac $\mathbf{f_i}$. Stoga su apsolutni pravci dvostruki pravci krivulje $k^4_\mathbf{p}$ te je ona potpuno cirkularna krivulja tipa $(2,2)$.

Nadalje, polara $\mathbf{p}$ siječe krivulju k^2 u dvije točke kojima se pripadni nožišni pravac podudara s polarom $\mathbf{p}$. Dakle, nožišna krivulja je krivulja 4. razreda s tri dvostruka pravca te prema Plückerovim relacijama slijedi da je $k^4_\mathbf{p}$ racionalna krivulja. □

Tip dvostrukog pravca nožišne krivulje $k^4_\mathbf{p}$ ovisi o presjeku apsolutnog pravca odnosno polare s generatornom krivuljom k^2. Ukoliko je presjek par konjugirano imaginarnih točaka, dvije točke koje se podudaraju ili dvije realne i različite točke, tada je pripadni dvostruki pravac redom izolirani dvostruki pravac, infleksijski pravac ili dvostruka tangenta.

Ako krivulja 2. reda k^2 sadrži barem jednu singularnu točku nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$ tada će nožišna krivulja $k^4_\mathbf{p}$ degenerirati, odnosno vrijedi sljedeće:

i) $F \in k^2$, $\sigma_{\mathbf{p}} : k^2 \mapsto (F) \cup k^3_{\mathbf{p}}$,
$P_i \in k^2,\ i \in \{1,2\}$, $\sigma_{\mathbf{p}} : k^2 \mapsto (P_i) \cup k^3_{\mathbf{p}}$,

ii) $F, P_i \in k^2,\ i \in \{1,2\}$, $\sigma_{\mathbf{p}} : k^2 \mapsto (F) \cup (P_i) \cup k^2_{\mathbf{p}}$,
$P_1, P_2 \in k^2$, $\sigma_{\mathbf{p}} : k^2 \mapsto (P_1) \cup (P_2) \cup k^2_{\mathbf{p}}$,

iii) $F, P_1, P_2 \in k^2$, $\sigma_{\mathbf{p}} : k^2 \mapsto (F) \cup (P_1) \cup (P_2) \cup k^1_{\mathbf{p}}$.

Kako je prema teoremu 4.1.1 nožišna krivulja racionalna krivulja, tada krivulja $k^3_{\mathbf{p}}$ sadrži samo jedan dvostruki pravac. Ako je $F \in k^2$, odnosno ako je generatorna krivulja k^2 parabola, tada je polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac krivulje $k^3_{\mathbf{p}}$, a ako je $P_i \in k^2,\ i \in \{1,2\}$, tada je dvostruki pravac $\mathbf{f_j},\ j \in \{1,2\},\ j \neq i$.

4.2 Veza pravčaste inverzije i nožišne transformacije

Propozicija 4.2.1. *Neka je dana krivulja k' razreda n i pravčasta inverzija $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ s obzirom na kružnicu κ i njenu centralu $\mathbf{c}$. Tada je slika k_κ krivulje k' pri preslikavanju $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ ujedno i nožišna krivulja krivulje $\overline{k}$ s obzirom na centralu $\mathbf{c}$, gdje je $\overline{k}$ polarno-recipročna krivulji k' s obzirom na kružnicu κ.*

Dokaz. Za krivulju k' i pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ slijedi

$$v = \sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{c}) \wedge \pi_\kappa(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in k',$$
$$\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)} :\ k' \mapsto k_\kappa.$$

Polarno-recipročna krivulja $\overline{k}$ krivulje k' je skup točaka T takvih da vrijedi

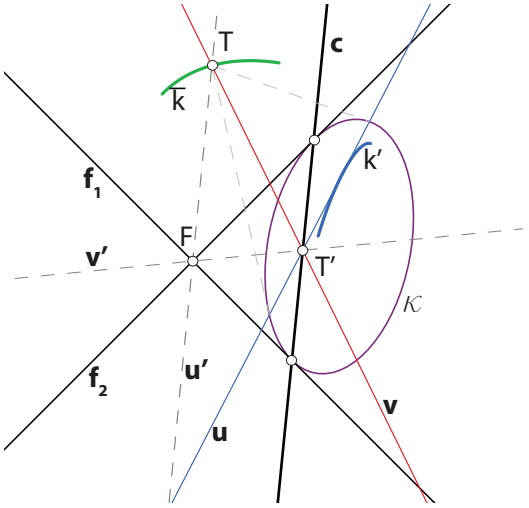
$$T = \pi_\kappa(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in k',$$

te je očito $T \in \mathbf{v}$. Nadalje, neka je $T' = \mathbf{u} \wedge \mathbf{c}$, $\mathbf{u}' = T \wedge F$ i $\mathbf{v}' = T' \wedge F$ (sl. 4.2), te iz polariteta π_κ slijedi

$$\pi_\kappa(\mathbf{u}') = T',$$
$$(\mathbf{f_1 f_2},\ \mathbf{u}'\mathbf{v}') = -1.$$

Dakle, točka T' okomita je točki T na pravcu $\mathbf{c}$ te je pravac $\mathbf{v}$ nožišni pravac točke $T \in \overline{k}$, a k_κ nožišna krivulja krivulje $\overline{k}$, pri čemu je pravac $\mathbf{c}$ polara nožišne transformacije. □

Također vrijedi i obratno:



Slika 4.2: Veza pravčaste inverzije $\sigma_{(\mathbf{c},\kappa)}$ i nožišne transformacije $\sigma_{\mathbf{c}}$

Korolar 4.2.1. *Neka je dana krivulja $\overline{k}$ reda n, polara $\mathbf{p}$ nožišne transformacije $\sigma_{\mathbf{p}}$ i proizvoljna kružnica κ kojoj je pravac $\mathbf{p}$ centrala. Tada je nožišna krivulja $k_{\mathbf{p}}$ krivulje $\overline{k}$ ujedno i slika krivulje $k^{'}$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$, gdje je $k^{'}$ polarno-recipročna krivulja krivulje $\overline{k}$ s obzirom na kružnicu κ.*

Ove tvrdnje analogne su tvrdnjama o vezi između nožišne transformacije i obične inverzije u euklidskoj ravnini koje se mogu naći u [28], [39].

Konstrukcija dirališta na dvostrukim pravcima nožišne krivulje $k_{\mathbf{p}}$

Neka je $k_{\mathbf{p}}$ nožišna krivulja krivulje k^2 s obzirom na nožišnu transformaciju $\sigma_{\mathbf{p}}$. Tada se dirališta na dvostrukim pravcima krivulje $k_{\mathbf{p}}$ mogu konstruirati na temelju sljedećeg:

- na polari $\mathbf{p}$ - točke okomite sjecištima polare $\mathbf{p}$ i generatorne krivulje k^2 na polari $\mathbf{p}$ nožišne transformacije su dirališta krivulje $k_{\mathbf{p}}$,

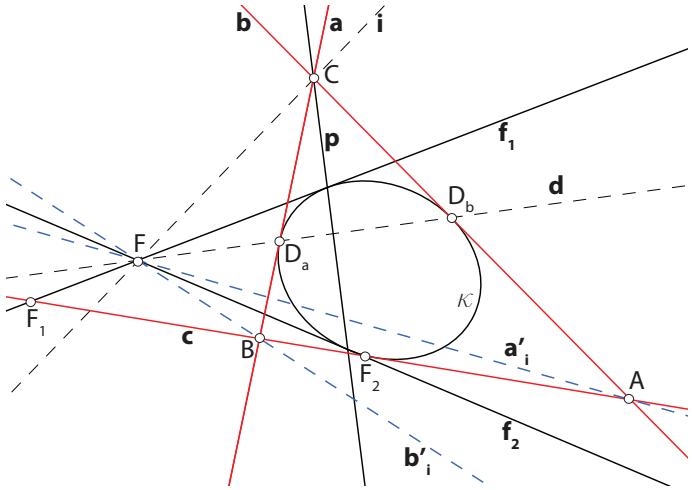
- na apsolutnim pravcima $\mathbf{f_i}$, $i \in \{1,2\}$ - neka su R_i i S_i sjecišta generatorne krivulje i apsolutnog pravca $\mathbf{f_i}$, tada su točke D_i i $D_i^{'}$ dirališta na apsolutnom pravcu $\mathbf{f_i}$, za koje vrijedi $(FD_i,\ P_iR_i) = -1$ i $(FD_i^{'},\ P_iS_i) = -1$.

Ove konstrukcije izvedene su iz svojstava bicirkularnih krivulja 4. reda dobivenih nožišnom transformacijom u euklidskoj ravnini obrađenih u članku [20].

Konstrukcija dirališta na proizvoljnom pravcu nožišne krivulje $k_{\mathbf{p}}$

Kako prema korolaru 4.2.1 svaku nožišnu krivulju možemo dobiti kao sliku pravčaste inverzije, tada konstrukcija dirališta na proizvoljnom pravcu nožišne krivulje slijedi iz konstrukcije u poglavlju 3.1. Međutim u nastavku će se pokazati jednostavnija konstrukcija.

Lema 4.2.1. *Neka je dana kružnica κ, njena centrala $\mathbf{p}$ i trokut $\triangle ABC$ opisan kružnici κ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je jedan vrh trokuta $\triangle ABC$ incidentan s centralom $\mathbf{p}$ ako i samo ako su druga dva vrha međusobno okomita.*



Slika 4.3

Dokaz. Neka je dana kružnica κ, njena centrala $\mathbf{p}$, točka $C \in \mathbf{p}$, te pravci $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ kružnice κ incidentni s točkom C, pri čemu su točke D_a i D_b pripadna dirališta (sl. 4.3). Promotrimo sve trokute $\triangle A_iB_iC$ opisane kružnici κ tako da je $A_i \in \mathbf{b}$ i $B_i \in \mathbf{a}$. Tada pridruživanje točaka na pravcima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ zadano s

$$B_i \mapsto A_i,\ C \in \mathbf{a} \mapsto D_b,\ D_a \mapsto C \in \mathbf{b}$$

određuje projektivitet dvaju nizova točaka $(\mathbf{a})\ \overline{\wedge}\ (\mathbf{b})$ čiji je proizvod krivulja 2. razreda, odnosno točnije kružnica κ.

Nadalje, neka je $\mathbf{a_i'} = F \wedge A_i$, $\mathbf{b_i'} = F \wedge B_i$, $\mathbf{i} = F \wedge C$ i $\mathbf{d} = D_a \wedge D_b$ tada pridruživanje

$$\mathbf{a_i'} \leftrightarrow \mathbf{b_i'},\ \mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{d}$$

definira involuciju na pramenu (F). Kako je četverostran $\mathbf{f_1af_2b}$ opisan kružnici κ tada vrijedi

$$\pi_\kappa(\mathbf{p}) = F,\ \pi_\kappa(\mathbf{i}) = \mathbf{p} \wedge \mathbf{d}\ \Rightarrow\ (\mathbf{ab},\ \mathbf{pi}) = -1,\ (\mathbf{id},\ \mathbf{f_1f_2}) = -1$$

te slijedi da su $\mathbf{f_1}$ i $\mathbf{f_2}$ fiksni pravci involucije (F). Dakle, involucija (F) je hiperbolička i svaki je pridruženi par pravaca u harmonitetu s fiksnim pravcima involucije, stoga vrijedi

$$\forall(\mathbf{a_i'}, \mathbf{b_i'})\ (\mathbf{a_i'b_i'},\ \mathbf{f_1f_2}) = -1 \Rightarrow \forall(A_i, B_i)\ A_i \perp B_i.$$

Obrat. Neka je $\mathbf{c}$ pravac kružnice κ. Promotrimo sve trokute $\triangle A_iB_iC_i$ opisane kružnici κ tako da je $A_i, B_i \in \mathbf{c}$ i $A_i \perp B_i$, te neka su stranice trokuta pripadno označene $\mathbf{a_i} = B_i \wedge C_i$ i $\mathbf{b_i} = A_i \wedge C_i$. Okomite točke na pravcu $\mathbf{c}$ čine involutoran niz $(\mathbf{c})$, pri čemu su fiksne točke involucije izotropne točke pravca $\mathbf{c}$, $F_1 = \mathbf{c} \wedge \mathbf{f_1}$ i $F_2 = \mathbf{c} \wedge \mathbf{f_2}$. Involucija na pravcu $\mathbf{c}$ definira involuciju 2. reda na kružnici κ kojoj je središte točka F, a os involucije centrala $\mathbf{p}$ kružnice κ. Kako se tangente položene u parovima točaka involutornog niza 2. reda neke konike na tu koniku sijeku u točki na osi involucije [21], tada slijedi

$$\mathbf{a_i} \wedge \mathbf{b_i} = C_i,\ C_i \in \mathbf{p}.$$

□

Prethodna lema predstavlja, u kvazihiperboličkoj ravnini $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$, analogon poznatog Talesovog teorema o pravom kutu nad promjerom kružnice i njegovog obrata.

Definicija 4.2.1. *Simetrala kuta* $\angle(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$, $A = \mathbf{a_1} \wedge \mathbf{a_2}$, *je pravac* $\mathbf{s}$ *za koji vrijedi* $(\mathbf{a_1a_2},\ \mathbf{si}) = -1$, *gdje je* $\mathbf{i} = A \wedge F$ *izotropni pravac incidentan s točkom* A.

Propozicija 4.2.2. *Neka je dana krivulja 2. reda* $\overline{k}$ *i polara* $\mathbf{p}$ *nožišne transformacije* $\sigma_\mathbf{p}$. *Tada je nožišna krivulja* $k_\mathbf{p}$ *krivulje* $\overline{k}$ *ujedno i omotaljka kružnica koje sadrže polaru* $\mathbf{p}$, *a centrale tih kružnica su simetrale kuteva između polare* $\mathbf{p}$ *i tangenata krivulje* $\overline{k}$.

Dokaz. Neka je κ proizvoljna kružnica kojoj je polara $\mathbf{p}$ centrala, k' polarno-recipročna krivulja krivulji $\overline{k}$ s obzirom na kružnicu κ i neka je $\mathbf{t}$ tangenta krivulje $\overline{k}$ u proizvoljnoj točki $T \in \overline{k}$. Tada po definiciji 4.1.1 i prema korolaru 4.2.1 za nožišni pravac $\mathbf{t_p}$ točke T vrijedi

$$\mathbf{t_p} = TT',\ T' \perp T,\ T' \in \mathbf{p},$$
$$\mathbf{t_p} = \sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}(\mathbf{t}'),\ \mathbf{t}' = \pi_\kappa^{-1}(T).$$

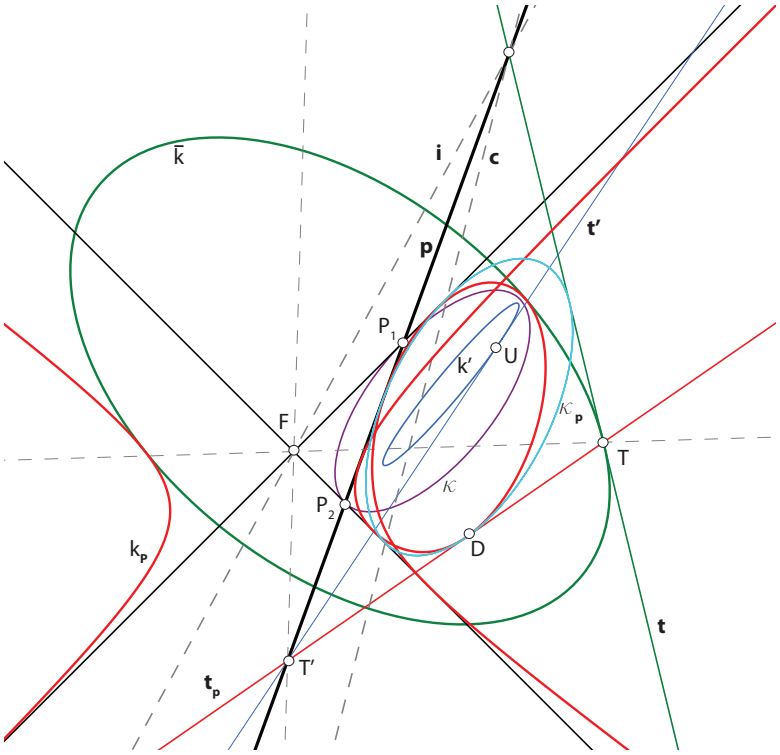
Nadalje, prema svojstvu polariteta π_κ slijedi

$$\pi_\kappa(\mathbf{t}) = U,\ U \in \mathbf{t}'$$

te se pramen (U) pravčastom inverzijom $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$ preslikava u krivulju $\kappa_{\mathbf{p}}$

$$\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)} : \ (U) \mapsto \kappa_{\mathbf{p}}.$$

Prema teoremu 3.1.1 $\kappa_{\mathbf{p}}$ je krivulja 2. razreda koja sadrži pravce $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{p}$ i $\mathbf{t}$ stoga slijedi da je krivulja $\kappa_{\mathbf{p}}$ kružnica. Također, krivulja $\kappa_{\mathbf{p}}$ sadrži i pravac $\mathbf{t_p}$ koji je slika pravca $\mathbf{t}'$ s obzirom na pravčastu inverziju $\sigma_{(\mathbf{p},\kappa)}$, te je trostran $\mathbf{tt_pp}$ je opisan kružnici $\kappa_{\mathbf{p}}$. Sada prema lemi 4.2.1 slijedi da vrh trostrana $\mathbf{p} \wedge \mathbf{t}$ leži na centrali $\mathbf{c}$ kružnice $\kappa_{\mathbf{p}}$ (sl. 4.4). Kako vrijedi $(\mathbf{pt},\ \mathbf{ci}) = -1$, gdje je $\mathbf{i} = (\mathbf{p} \wedge \mathbf{t}) \wedge F$, centrala $\mathbf{c}$ je prema definiciji 4.2.1 simetrala kuta $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{t})$.



Slika 4.4: Konstrukcija dirališta na pravcu nožišne krivulje $k_{\mathbf{p}}$

Prema teoremu 4.1.1 krivulja $k_{\mathbf{p}}$ je 4. razreda, pa se s proizvoljnom kružnicom siječe u 8 pravaca. Pokažimo da je $\kappa_{\mathbf{p}}$ dirna kružnica krivulje $k_{\mathbf{p}}$ tj. da imaju u pravcu $\mathbf{t_p}$ dodir 1. vrste, odnosno da osim pravca $\mathbf{t_p}$ imaju još 6 zajedničkih pravaca.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da se $k_{\mathbf{p}}$ i $\kappa_{\mathbf{p}}$ osim u $\mathbf{t_p}$ sijeku još u 7 pravaca. Prema teoremu 4.1.1 krivulji $k_{\mathbf{p}}$ su pravci $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ i $\mathbf{p}$ dvostruki pravci, stoga 6 zajedničkih pravaca krivulje $k_{\mathbf{p}}$ i $\kappa_{\mathbf{p}}$ su pravci $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ i $\mathbf{p}$. Preostalo sjecište je po pretpostavci različito od pravca $\mathbf{t_p}$ i neka je označeno s $\mathbf{t_p'}$.

Kako je $\mathbf{t_p'} \in \kappa_{\mathbf{p}}$, tada prema lemi 4.2.1 za trostran $\mathbf{tpt_p'}$ opisan kružnici $\kappa_{\mathbf{p}}$ slijedi da

su točke T_1 i T_1' okomite, pri čemu je $T_1 = \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_\mathbf{p}'$ i $T_1' = \mathbf{p} \wedge \mathbf{t}_\mathbf{p}'$. S druge strane iz $\mathbf{t}_\mathbf{p}' \in k_\mathbf{p}$ slijedi da je $T_1 \in \overline{k}$.

Odavde slijedi da pravac $\mathbf{t}$ siječe krivulju $\overline{k}$ u 3 točke, jer osim točke T_1 postoji već ranije istaknuta točka T koja je diralište na pravcu $\mathbf{t}$ te se stoga broji dva puta. Budući da se ovaj zaključak protivi pretpostavci da je krivulja $\overline{k}$ 2. reda, tada slijedi $T_1 = T$. □

Propozicija 4.2.2 je analogon tvrdnje da su bicirkularne krivulje u euklidskoj ravnini omotaljke kružnica koje prolaze dvostrukom točkom bicirkularne krivulje, a središta im leže na nekoj krivulji 2. reda [5], [15], [19].

Kako je $\kappa_\mathbf{p}$ dirna kružnica krivulje $k_\mathbf{p}$ tada se konstrukcija proizvoljnog dirališta pravca $\mathbf{t}_\mathbf{p}$ nožišne krivulje $k_\mathbf{p}$ podudara s konstrukcijom dirališta za zadani pravac kružnice (dual konstrukcije tangente u zadanoj točki kružnice). Dakle, za danu točku T generatorne krivulje neka je pravac $\mathbf{s}$ simetrala kuta između polare $\mathbf{p}$ i tangente $\mathbf{t}$ krivulje u točki T. Tada je točka D okomita točki $\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}_\mathbf{p}$ na pravcu $\mathbf{t}_\mathbf{p}$ diralište krivulje $k_\mathbf{p}$ na pravcu $\mathbf{t}_\mathbf{p}$.

4.3 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene nožišnom transformacijom

Bez smanjenja općenitosti neka je pravac $\mathbf{p}[1,0,0]$ polara nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$. Tada su točke $P_i(0, \mp 1, 1)$, $i \in \{1,2\}$, temeljne točke nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$.

Općenito jednadžba točke X' koja je okomita točki $X(x_0, x_1, x_2)$ na pravcu $\mathbf{p}[1,0,0]$ računa se na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathbf{t} = X \wedge F = [0, x_2, -x_1],$$

$$(\mathbf{f_1 f_2},\ \mathbf{t}\mathbf{t}') = -1 \implies \mathbf{t}' = \mathcal{I}_{\mathbb{QH}}(\mathbf{t}) = [0, -x_1, x_2],$$

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 \\ 0 & -x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad X' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{p} = (0, x_2, x_1).$$

Stoga je jednadžba nožišnog pravca $\mathbf{t_p}$ točke X

$$\begin{vmatrix} \hat{x}_0 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \mathbf{t_p} = X \wedge X' = [x_1^2 - x_2^2, -x_0x_1, x_0x_2],$$

iz čega slijedi jednadžba nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto [u_1^2 - u_2^2, -u_0u_1, u_0u_2]. \tag{4.1}$$

Posebno će se razmotriti nožišna krivulja u slučaju kad generatorna krivulja k^2 sadrži singularnu točku nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$ koja je temeljna točka, te kad krivulja k^2 sadrži singularnu točku nožišne transformacije $\sigma_\mathbf{p}$ koja je apsolutna točka F.

Koeficijenti krivulje 2. reda k^2 dane jednadžbom (2.6) koja sadrži točku P_i, $i \in \{1, 2\}$, moraju zadovoljavati uvjet $\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22} \pm 2\bar{c}_{12} = 0$. Tada pripadna nožišna krivulja ima oblik

$$k_p^3 \ldots \quad u_0^2(\bar{c}_{11}u_1 \pm \bar{c}_{22}u_2) + (u_1 \mp u_2)[2\bar{c}_{02}u_0u_2 - 2\bar{c}_{01}u_0u_1 + \bar{c}_{00}(u_1^2 - u_2^2)] = 0, \tag{4.2}$$

kojoj izotropni pravci zadovoljavaju jednadžbu

$$(u_1 \mp u_2)^2(u_1 \pm u_2) = 0,$$

dakle krivulja k_p^3 je potpuno cirkularna krivulja 3. razreda tipa (1,2) ili (2,1).

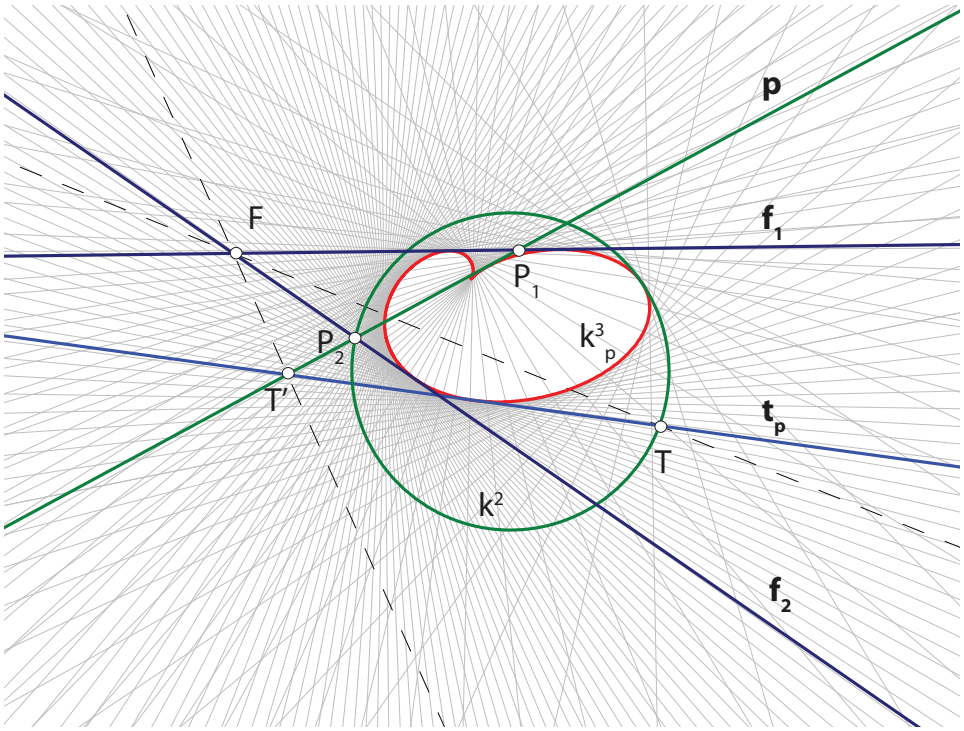
Analizu dvostrukog pravca krivulje k_p^3 provest će se kada generatorna krivulja k^2 sadrži točku $P_2(0, 1, 1)$. Pramen pravaca (T) oblika $mu_0 - u_1 + u_2 = 0$ siječe krivulju k_p^3 u pravcima čije koordinate zadovoljavaju

$$u_0^2[m(\bar{c}_{11} + m(\bar{c}_{00}m - 2\bar{c}_{01})u_0 + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22} + 2m(\bar{c}_{02} - \bar{c}_{01} + \bar{c}_{00}m))u_2] = 0.$$

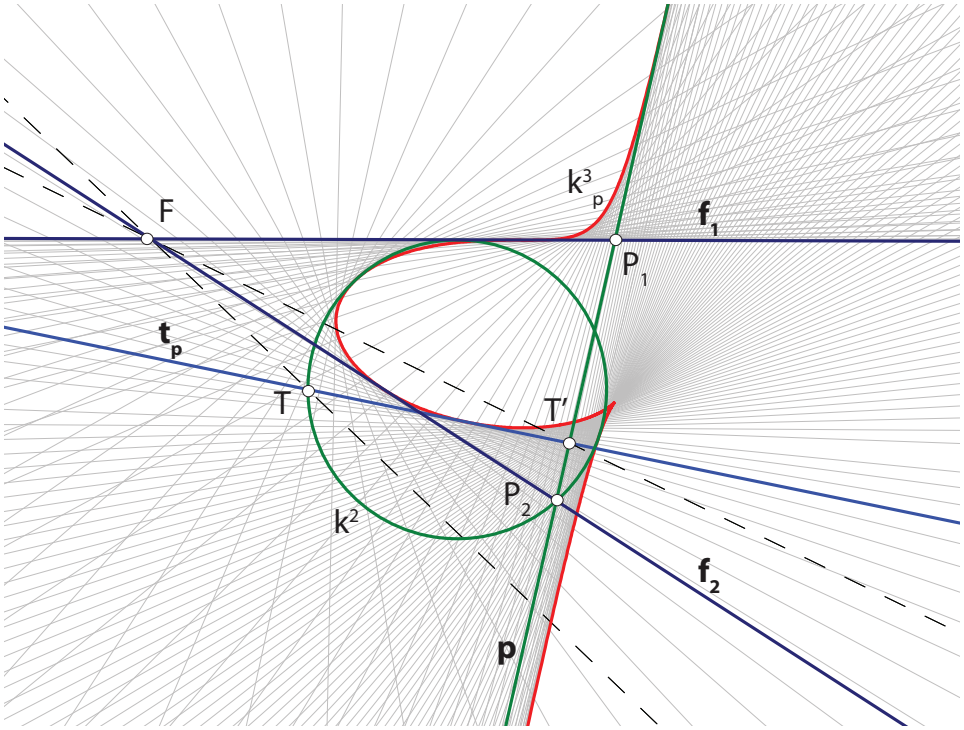
Očito je $u_0 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, te slijedi da je $\mathbf{f_1}$ dvostruki pravac krivulje k_p^3. Uvjet za koji je $u_0 = 0$ trostruko rješenje je

$$\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22} + 2m(\bar{c}_{02} - \bar{c}_{01} + \bar{c}_{00}m) = 0,$$
$$m_{1,2} = \frac{\bar{c}_{01} - \bar{c}_{02} \pm \sqrt{(\bar{c}_{02} - \bar{c}_{01})^2 - 2\bar{c}_{00}(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{22})}}{2\bar{c}_{00}},$$

stoga ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jednak nuli dvostruki pravac krivulje k_p^3 je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta (sl. 4.5) ili infleksijski pravac (sl. 4.6).



Slika 4.5: Cirkularna krivulja k_p^3 tipa (2,1) dobivena kao nožišna krivulja hiperbole (3c)



Slika 4.6: Cirkularna krivulja k_p^3 tipa (2,1) dobivena kao nožišna krivulja specijalne hiperbole (3d)

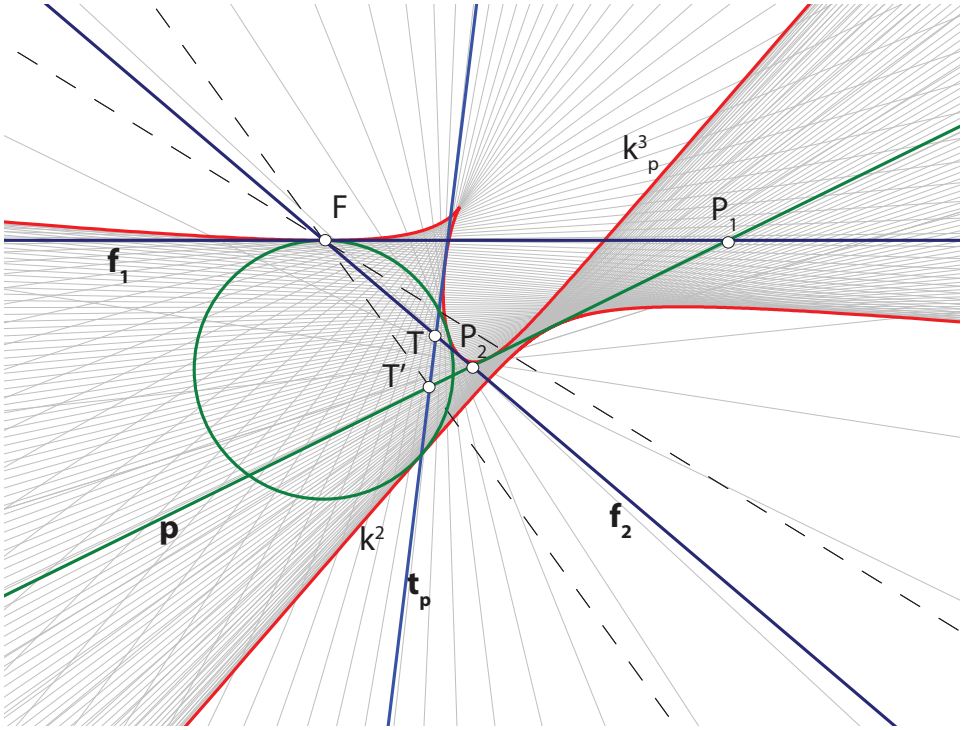
Ako krivulja k^2 sadrži apsolutnu točku F tada je $\bar{c}_{00} = 0$, te pripadna nožišna krivulja ima oblik

$$k_p^3 \ldots \quad 2(u_2^2 - u_1^2)(\bar{c}_{01}u_1 - \bar{c}_{02}u_2) + u_0(\bar{c}_{11}u_1^2 + \bar{c}_{22}u_2^2 - 2\bar{c}_{12}u_1u_2) = 0, \tag{4.3}$$

a izotropni pravci zadovoljavaju jednadžbu

$$(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)(\bar{c}_{01}u_1 - \bar{c}_{02}u_2) = 0.$$

Nožišna krivulja k_p^3 je 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (1,1), a uz uvjet $|\bar{c}_{01}| = |\bar{c}_{02}|$ nožišna krivulja je potpuno cirkularna tipa $(2,1)$ tj. (1,2), pri čemu je krivulja k^2 tada specijalna parabola tipa (2,0) tj. (0,2) (sl. 4.7).



Slika 4.7: Cirkularna krivulja k_p^3 tipa (2,1) dobivena kao nožišna krivulja specijalne parabole (3a)

Pramen pravaca (T) s vrhom na polari $\mathbf{p}$ je oblika $u_1 + mu_2 = 0$ i siječe krivulju k_p^3 u pravcima čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$u_2^2[\bar{c}_{22}u_0 + m(2\bar{c}_{12} + \bar{c}_{11}m)u_0 + 2(\bar{c}_{02} + \bar{c}_{01}m)(m^2 - 1)u_2] = 0.$$

Očito je $u_2 = 0$ dvostruko rješenje za svaki $m \in \mathbb{R}$, te je polara $\mathbf{p}$ dvostruki pravac krivulje

k_p^3. Za $u_2 = 0$ trostruko rješenje dobiva se uvjet

$$\bar{c}_{22} + m(2\bar{c}_{12} + \bar{c}_{11}m) = 0,$$
$$m_{1,2} = \frac{\bar{c}_{12} \pm \sqrt{\bar{c}_{12}^2 - \bar{c}_{11}\bar{c}_{22}}}{\bar{c}_{11}},$$

stoga ovisno da li je izraz pod korijenom negativan, pozitivan ili jedank nuli dvostruki pravac krivulje $k_{\mathbf{p}}^3$ je izolirani dvostruki pravac, dvostruka tangenta ili infleksijski pravac.

Teorem 4.3.1. *Neka je dana krivulja 2. razreda k^2 i proizvoljan neizotropni pravac $\mathbf{p}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je nožišna krivulja k_p^3 s obzirom na pravac $\mathbf{p}$ krivulja 3. razeda ako*

- *krivulja k^2 nije parabola ili specijalna parabola i pravac $\mathbf{p}$ je incidentan s izotropnom točkom krivulje k^2, te je krivulja k_p^3 potpuno cirkularna tipa (1,2) ili (2,1),*
- *krivulja k^2 je parabola ili specijalna parabola i pravac $\mathbf{p}$ nije incidentan s izotropnom točkom krivulje k^2, te je krivulja k_p^3 redom 2-cirkularna tipa (1,1) ili potpuno cirkularna tipa (2,1) odnosno (1,2).*

Poglavlje 5

Projektivna tvorba

5.1 Projektivna tvorba u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Projektivna tvorba je način tvorbe krivulje koja je nastala projektivnim pridruživanjem. Projektivno se mogu pridružiti nizovi točaka, pramenovi pravaca ili pramenovi krivulja drugog odnosno višeg reda ili razreda. Projektivni odnos dvaju nizova, dvaju pramenova ili niza i pramena određen je s tri para pridruženih elemenata jednog niza, odnosno pramena, s drugim nizom, odnosno pramenom [19], [22]. Proizvod projektivno pridruženog niza točaka i pramena krivulja 2. razreda je krivulja 3. razreda, [19], [40]. Dakle, krivulja 3. razreda dobivena projektivnom tvorbom je skup pravaca krivulja 2. razreda incidentnih s projektivno pridruženom točkom niza. Kako su krivulje 2. razreda ujedno i 2. reda, tada možemo reći da je krivulja 3. razreda skup tangenata iz točaka niza na njoj projektivno pridruženu krivulju 2. reda.

Pramen krivulja 2. razreda zadan je s četiri temeljna pravca, dok je niz točaka zadan pravcem koji je njegov nosilac. Stoga neka je pramen krivulja 2. razreda $[C_1, C_2]$ određen s dvije krivulje 2. razreda ζ_1 i ζ_2, gdje su C_1 i C_2 pripadne matrice konika, te neka su P_1 i P_2 dvije točke koje određuju nosilac niza točaka $[P_1, P_2]$. Neka je

$$\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$$

projektivno pridruživanje krivulje 2. razreda $C_1 + \lambda C_2$ i točke $P_1 + \lambda P_2$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \cup \infty$. Tada je jednadžba krivulje 3. razreda k^3_π dobivena projektivnim pridruživanjem π

$$F(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}^T C_1 \mathbf{u} \cdot P_2^T \mathbf{u} - \mathbf{u}^T C_2 \mathbf{u} \cdot P_1^T \mathbf{u} = 0. \tag{5.1}$$

Kao što je rečeno, svaki projektivitet, pa tako i projektivitet π jednoznačno je određen s

tri para pridruženih elemenata. Naime, krivulja 3. razreda k_π^3 sadrži četiri temeljna pravca pramena krivulja 2. razreda $[C_1, C_2]$, nosilac niza točaka $[P_1, P_2]$, dva pravca krivulje ζ_1 incidentna s točkom P_1, te dva pravca krivulje ζ_2 incidentna s točkom P_2. Prema [27] za određivanje krivulje 3. razreda potrebno je devet pravaca, međutim devet pravaca ne određuje u svakom slučaju jednu krivulju 3. razreda, stoga uvjet od 9 pravaca nije dovoljan za jednoznačno određivanje krivulje 3. razreda. Za definiranje projektiviteta π, osim para pridruženih elemenata (ζ_1, P_1) i (ζ_2, P_2), potreban je još jedan par krivulje 2. razreda iz pramena $[C_1, C_2]$ i točke niza $[P_1, P_2]$. Međutim, iako se ovisno o izboru trećeg para dobivaju različite krivulje 3. razreda njihova svojstva, koja ćemo proučavati, ostaju ista. Nadalje, treba uočiti da proporcionalne matrice C_1, C_2, P_1, P_2 i $\alpha C_1, \beta C_2, \gamma P_1, \delta P_2$ reprezentiraju iste dvije krivulje 2. razreda, odnosno iste dvije točke, ali pripadne krivulje 3. razreda dane s (5.1) ne moraju biti jednake.

Promotrimo svojstva projektivnog pridruživanja π u realnoj projektivnoj ravnini $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Neka je $\mathbf{v}$ pravac krivulje 3. razreda k_π^3, pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{v}$ pravac krivulje 2. razreda ζ_1 incidentan s točkom P_1. Tada vrijedi

$$\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{v} = 0, \quad P_1^T \mathbf{v} = 0.$$

Napomena. Općenito, ako je ζ_1 krivulja 2. razreda i $\mathbf{v}$ pravac te krivulje, tada su sljedeća tri slučaja moguća:

- ζ_1 je nedegenerirana krivulja 2. razreda, te je $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$ jednadžba dirališta na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje ζ_1.

- ζ_1 je degenerirana krivulja 2. razreda, te pravac $\mathbf{v}$ nije njen singularni pravac, npr. $\zeta_1 = (Z_1) \cup (\hat{Z}_1)$, $Z_1 \in \mathbf{v}$, $\hat{Z}_1 \notin \mathbf{v}$. Tada točka Z_1 ima jednadžbu $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$, te je Z_1 dodirište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje ζ_1.

- ζ_1 je degenerirana krivulja 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$, tj. $\zeta_1 = (Z_1) \cup (\hat{Z}_1)$, $Z_1, \hat{Z}_1 \in \mathbf{v}$, te tada vrijedi $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$ za svaki pravac $\mathbf{w}$.

Svaka točka X na pravcu $\mathbf{v}$ može se prikazati kao sjecište pravca $\mathbf{v}$ i nekog pravca $\mathbf{w}$. Sada je svaki pravac točkom X dan matricom $\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, pa je točka X parametrizirana s

$$X \ldots \ \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \ t \in \mathbf{R} \cup \infty.$$

Tada su pravci krivulje k_π^3 incidentni s točkom X nultočke sljedećeg polinoma

$$p(t) := F(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) = tF_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + t^2 F_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + t^3 F_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

gdje je

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= 2P_2^T\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}^TC_1\mathbf{w} - P_1^T\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}^TC_2\mathbf{v}, \\ F_2(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= P_2^T\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}^TC_1\mathbf{w} + 2P_2^T\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}^TC_1\mathbf{w} - 2P_1^T\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}^TC_2\mathbf{w}, \\ F_3(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= P_2^T\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}^TC_1\mathbf{w} - P_1^T\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}^TC_2\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Jednadžba točke dirališta na regularnom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 je

$$F_1(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0, \tag{5.2}$$

jer je tada $t = 0$ nultočka polinoma p kratnosti 2, te je pravac $\mathbf{v}$ presjek krivulje k_π^3 i pramena (X) kratnosti 2, odnosno točka X je diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3.

Nužan uvjet da bi pravac $\mathbf{v}$ bio dvostruki pravac krivulje k_π^3 je

$$F_1(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0, \quad \forall\mathbf{w}, \tag{5.3}$$

jer je tada $t = 0$ nultočka polinoma p kratnosti 2 za svaki pravac $\mathbf{w}$. Jednadžbe dirališta na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 određene su s jednadžbom

$$F_2(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0. \tag{5.4}$$

Točka X na regularnom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje 3. razreda k_π^3 je šiljak ukoliko vrijedi $F_2(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$ samo za pravce $\mathbf{w}$ incidentne s diralištem X na pravcu $\mathbf{v}$.

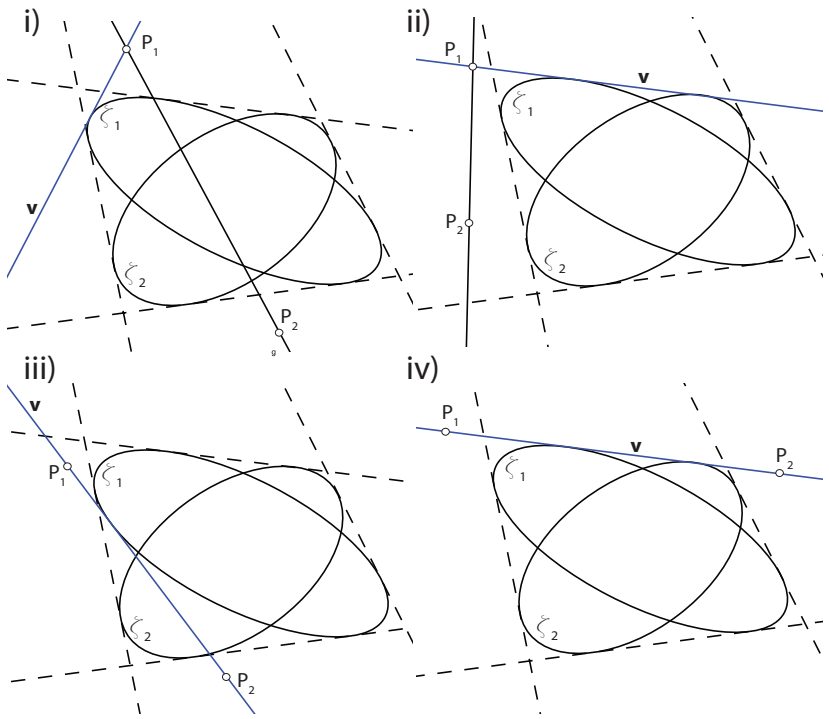
Za pravac $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 takav da je $\mathbf{v} \in \zeta_1$ i $P_1 \in \mathbf{v}$, razmotrit će se sljedeći slučajevi (sl. 5.1):

i) $\mathbf{v} \notin \zeta_2,\ P_2 \notin \mathbf{v}$
   pravac $\mathbf{v}$ nije temeljni pravac pramena $[C_1, C_2]$, niti nosilac niza $[P_1, P_2]$,

ii) $\mathbf{v} \in \zeta_2,\ P_2 \notin \mathbf{v}$
   pravac $\mathbf{v}$ je temeljni pravac pramena $[C_1, C_2]$, ali nije nosilac niza $[P_1, P_2]$,

iii) $\mathbf{v} \notin \zeta_2,\ P_2 \in \mathbf{v}$
   pravac $\mathbf{v}$ nije temeljni pravac pramena $[C_1, C_2]$, ali je nosilac niza $[P_1, P_2]$,

iv) $\mathbf{v} \in \zeta_2,\ P_2 \in \mathbf{v}$
   pravac $\mathbf{v}$ je temeljni pravac pramena $[C_1, C_2]$ i nosilac niza $[P_1, P_2]$.



Slika 5.1: Slučajevi međusobnog odnosa pramena $[C_1, C_2]$ i niza $[P_1, P_2]$

Za $\mathbf{v} \in \zeta_2$ vrijedi $\mathbf{v}^T C_2 \mathbf{v} = 0$, a za $P_2 \in \mathbf{v}$ vrijedi $P_2^T \mathbf{v} = 0$.

Slučaj i) $\mathbf{v} \in \zeta_1,\ P_1 \in \mathbf{v},\ \mathbf{v} \notin \zeta_2,\ P_2 \notin \mathbf{v}$

Ako je ζ_1 degenerirana krivulja 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$, tada jednadžba (5.2) ima oblik

$$P_1^T \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{v} = 0,$$

te je točka P_1 diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3.

Teorem 5.1.1. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda i $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Ako je točka niza pridružena degeneriranoj krivulji 2. razreda incidentna sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$ te krivulje, tada je ta točka niza diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3.*

Ako je ζ_1 degenerirana krivulja 2. razreda s nesingularnim pravcem $\mathbf{v}$, npr. $\zeta_1 = (Z_1) \cup (\hat{Z}_1)$, $Z_1 \in \mathbf{v}$, $\hat{Z}_1 \notin \mathbf{v}$, tada jednadžba (5.2) predstavlja točku koja je linearna kombinacija točaka Z_1 i P_1.

Ako je ζ_1 nedegenerirana krivulja 2. razreda, tada se iz jednadžbe (5.2) može posebno zaključiti da će se diralište krivulje k_π^3 podudarati s diralištem krivulje ζ_1 u slučaju kada je točka P_1 diralište krivulje ζ_1.

Teorem 5.1.2. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda i $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k^3_π. Ako postoji točka niza koja je diralište njoj pridružene krivulje 2. razreda, tada je ta točka ujedno i diralište krivulje k^3_π.*

Slučaj ii) $\mathbf{v} \in \zeta_1, \zeta_2,\ P_1 \in \mathbf{v},\ P_2 \notin \mathbf{v}$.

Ako je ζ_1 degenerirana krivulja 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$, npr. $\zeta_1 = (Z_1) \cup (\hat{Z}_1)$, $Z_1, \hat{Z}_1 \in \mathbf{v}$, tada se krivulje pramena $[C_1, C_2]$ međusobno dodiruju u nekoj točki na pravcu $\mathbf{v}$. U tom slučaju uvjet (5.3) je ispunjen, te je $\mathbf{v}$ dvostruki pravac krivulje k^3_π. Pripadna dirališta na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ dana su jednadžbom (5.4), koja se u ovom slučaju svodi na

$$P_2^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^T C_1 \mathbf{w} - 2P_1^T\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{w} = 0. \tag{5.5}$$

Ako je krivulji ζ_2 točka Z_1 diralište, tada je $[C_1, C_2]$ oskulirajući pramen u točki na pravcu $\mathbf{v}$, te jednadžba (5.5) ima oblik

$$Z_1^T\mathbf{w} \cdot [P_2^T\mathbf{v} \cdot \hat{Z_1}^T\mathbf{w} - 2\omega P_1^T\mathbf{w}] = 0,$$

za neki $\omega \in \mathbb{R}$. Time je točka Z_1 jedno od dirališta na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k^3_π.

Teorem 5.1.3. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda sa zajedničkim diralištem na temeljnom pravcu $\mathbf{v}$ i neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k^3_π. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$ pridružena točka niza incidentna s pravcem $\mathbf{v}$, tada je $\mathbf{v}$ dvostruki pravac krivulje k^3_π. Nadalje, ako se krivulje 2. razreda pramena $[C_1, C_2]$ oskuliraju (hiperoskuliraju) u točki na pravcu $\mathbf{v}$, tada je zajedničko diralište krivulja pramena jedno od dirališta krivulje k^3_π na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$.*

Ako je krivulja ζ_1 nedegenerirana, tada jednadžba (5.2) ima oblik

$$P_2^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0,$$

te se diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k^3_π podudara s diralištem krivulje ζ_1.

Teorem 5.1.4. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda s temeljnim pravcem $\mathbf{v}$ i $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k^3_π. Diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k^3_π podudara se s diralištem krivulje 2. razreda kojoj je pridružena točka niza incidentna s pravcem $\mathbf{v}$.*

Posebice, ako se krivulje pramena $[C_1, C_2]$ međusobno dodiruju u točki na temeljnom pravcu, tada je zajedničko diralište pramena $[C_1, C_2]$ ujedno i diralište krivulje k_π^3.

Također diralište $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$ može biti šiljak na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3. U tom slučaju jednadžba $F_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ je oblika

$$P_2^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^T C_1 \mathbf{w} - 2P_1^T \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{w} = 0$$

i mora biti ispunjena za sve pravce $\mathbf{w}$ takve da vrijedi $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$. Ako je ζ_1 degenerirana krivulja 2. razreda s nesingularnim pravcem $\mathbf{v}$, npr. $\zeta_1 = (Z_1) \cup (\hat{Z}_1)$, $Z_1 \in \mathbf{v}$, $\hat{Z}_1 \notin \mathbf{v}$ i krivulji ζ_2 je točka Z_1 diralište, tada je u točki Z_1 šiljak krivulje k_π^3.

Teorem 5.1.5. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda sa zajedničkim diralištem na temeljnom pravcu $\mathbf{v}$ i neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Zajedničko diralište krivulja pramena $[C_1, C_2]$ je diralište krivulje k_π^3 na pravcu $\mathbf{v}$. Ako je degenerirana krivulja 2. razreda s nesingularnim pravcem $\mathbf{v}$ pridružena točki niza koja je incidentna s pravcem $\mathbf{v}$, tada je zajedničko diralište šiljak na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3.*

Slučaj iii) $\mathbf{v} \in \zeta_1,\ P_1, P_2 \in \mathbf{v},\ \mathbf{v} \notin \zeta_2$

Jednadžba (5.2) ima oblik

$$P_1^T \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{v} = 0,$$

te slijedi da je točka P_1 diralište na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3. Dakle, diralište na nosiocu niza $[P_1, P_2]$ krivulje k_π^3 je točka tog niza koja je pridružena jedinstvenoj krivulji 2. razreda iz pramena $[C_1, C_2]$ koja sadrži nosioca niza $[P_1, P_2]$.

Točka P_1 je šiljak na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 ako i samo ako je $\mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} = 0$ za svaki pravac $\mathbf{w}$ incidentan s točkom P_1, tj. $P_1^T \mathbf{w} = 0$. Takva će točka postojati u slučaju kada je točka P_1 diralište krivulje ζ_1 ili kada je krivulja ζ_1 degenerirana sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$.

Teorem 5.1.6. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda i neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Diralište krivulje k_π^3 na nosiocu niza $[P_1, P_2]$ podudara se s točkom koja je pridružena krivulji pramena $[C_1, C_2]$ i sadrži nosioca niza. Ako je ta točka ujedno i diralište pridružene krivulje 2. razreda ili je krivulja 2. razreda degenerirana, te joj je singularni pravac nosilac niza, tada je diralište šiljak na pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3.*

Slučaj iv) $\mathbf{v} \in \zeta_1, \zeta_2$ $P_1, P_2 \in \mathbf{v}$

Uvjet (5.3) je ispunjen, stoga slijedi da je pravac $\mathbf{v}$ dvostruki pravac krivulje k_π^3. Dirališta na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ dana su s jednadžbom (5.4) koja se svodi na

$$P_2^T\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_1 \mathbf{w} - P_1^T\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{w} = 0. \tag{5.6}$$

Jedno diralište krivulje k_π^3 na pravcu $\mathbf{v}$ podudara se s diralištem krivulje ζ_1 ako i samo ako je točka P_1 diralište krivulje ζ_1 ili ako krivulja ζ_2 dodiruje krivulju ζ_1. Ako je točka P_1 diralište krivulje ζ_1, tada je ona ujedno i jedno diralište na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3, dok je drugo diralište dano jednadžbom

$$P_2^T\mathbf{w} - \omega \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{w} = 0, \quad \text{za neki } \omega \in \mathbb{R}.$$

Stoga, ako je i točka P_2 diralište krivulje ζ_2, tada se drugo diralište na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 podudara s točkom P_2.

Teorem 5.1.7. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda s temeljnim pravcem $\mathbf{v}$ i neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka kojemu je pravac $\mathbf{v}$ nosilac, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Pravac $\mathbf{v}$ je dvostruki pravac krivulje k_π^3. Ako postoji točka niza koja je ujedno i diralište pridruženoj krivulji pramena, tada je ta točka diralište krivulje k_π^3 na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$.*

Ako se krivulje ζ_1 i ζ_2 dodiruju, tada je njihovo zajedničko diralište jedno diralište na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3. Kako se u tom slučaju krivulje pramena $[C_1, C_2]$ međusobno dodiruju u nekoj točki na pravcu $\mathbf{v}$, tada postoji degenerirana krivulja pramena sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je ζ_1 ta degenerirana krivulja. Tada iz (5.6) slijedi da su dirališta na dvostrukom pravcu $\mathbf{v}$ krivulje k_π^3 određena jednadžbom

$$P_1^T\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^T C_2 \mathbf{w} = 0.$$

Očito je jedno diralište na pravcu $\mathbf{v}$ zajedničko diralište krivulja pramena $[C_1, C_2]$, dok je drugo diralište točka pridružena degeneriranoj krivulji kojoj je $\mathbf{v}$ singularni pravac. Ta se dva dirališta mogu podudarati, te će tada pravac $\mathbf{v}$ biti infleksijski pravac krivulje k_π^3.

Teorem 5.1.8. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda sa zajedničkim diralištem na temeljnom pravcu $\mathbf{v}$ i neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka kojemu je pravac $\mathbf{v}$ nosilac, te neka je*

proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *krivulja 3. razreda* k^3_π. *Pravac* $\mathbf{v}$ *je dvostruki pravac krivulje* k^3_π, *gdje je jedno diralište na pravcu* $\mathbf{v}$ *zajedničko diralište pramena* $[C_1, C_2]$. *Drugo diralište je točka niza pridružena degeneriranoj krivulji pramena sa singularnim pravcem* $\mathbf{v}$.

5.2 Cirkularne krivulje 3. razreda dobivene projektivnom tvorbom u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$

U poglavlju 3.4 pokazani su rezultati projektivne tvorbe u projektivnoj ravnini $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ između pramena krivulja 2. razreda i niza točaka, te će se u ovom poglavlju objasniti njihova kvazihiperbolička interpretacija s ciljem konstruiranja cirkularnih krivulja 3. razreda. Izabiranjem odgovarajućih pramenova krivulja 2. razreda i nizova točaka, te odabirom projektivnog pridruženja između njih mogu se konstruirati različiti tipovi cirkularnih krivulja 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Pri čemu neke tipove možemo dobiti na više načina projektivnog pridruživanja. Kako krivulja 3. razreda dobivena projektivnim pridruženjem pramena krivulja 2. razreda i niza točaka sadrži temeljne pravce pramena i nosilac niza tada se u kvazihiperboličkoj ravnini $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ cirkularnost krivulje 3. razreda može osigurati izabiranjem pramenova krivulja 2. razreda koji sadrže apsolutni pravac kao temeljni pravac pramena ili niza točaka kojemu je apsolutni pravac nosilac.

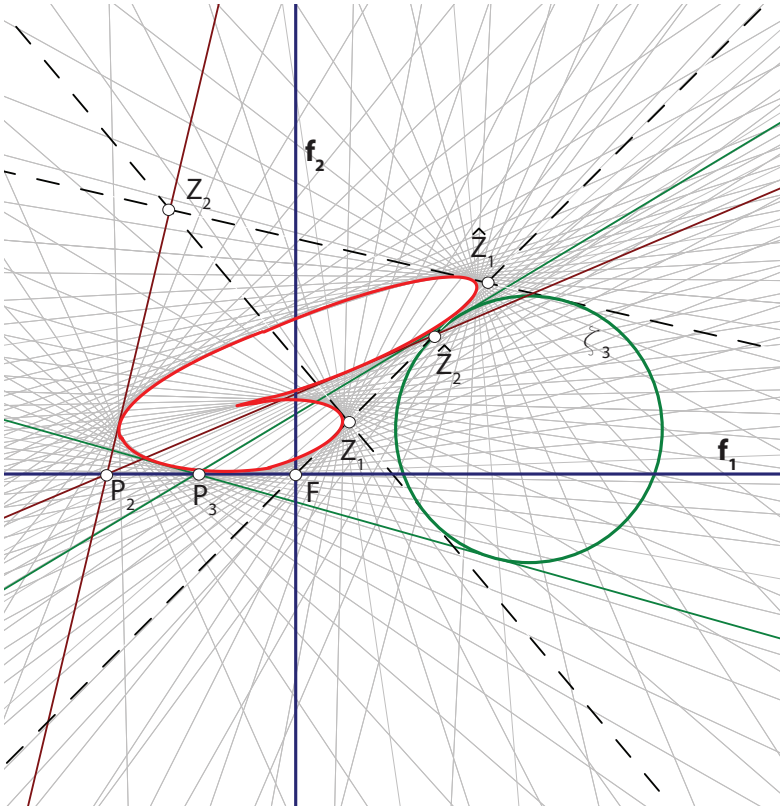
1-cirkularne krivulje 3. razreda

Teorem 5.2.1. *Neka je* $[C_1, C_2]$ *pramen krivulja 2. razreda i* $[P_1, P_2]$ *niz izotropnih točaka u* $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. *Tada je proizvod projektivnog pridruživanja* $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *barem 1-cirkularna krivulja 3. razreda* k^3_π.

Teorem 5.2.2. *Neka je* $[C_1, C_2]$ *pramen specijalnih hiperbola i* $[P_1, P_2]$ *niz točaka u* $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. *Tada je proizvod projektivnog pridruživanja* $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *barem 1-cirkularna krivulja 3. razreda* k^3_π.

Ako je projektivnim pridruženjem π u teoremu 5.2.1 apsolutnoj točki F pridružena elipsa, hiperbola ili parabola, tada je k^3_π 1-cirkularna krivulja tipa (1,0) ili (0,1), a preostala dva izotropna pravca su redom par konjugirano imaginarnih pravaca, dva realna i različita pravca ili se podudaraju. Zadnji slučaj proizlazi iz teorema 5.1.2.

Prema teoremima 5.1.3 i 5.2.1 može se konstruirati 1-cirkularna krivulja s dvostrukim izotropnim pravcem koji je izolirani dvostruki pravac ili dvostruka tangenta (sl. 5.2). Neka je nosilac niza $[P_1, P_2]$ apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$, a $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda sa zajedničkim diralištem na izotropnom pravcu $\mathbf{v}$, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k^3_π. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$ pridružena apsolutna točka F, tada je krivulja k^3_π 1-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (1,0) s dvostrukim izotropnim pravcem $\mathbf{v}$. Na slici 5.2 parovi projektiviteta π su $((Z_1) \cup (\hat{Z}_1), F)$, $((Z_2) \cup (\hat{Z}_2), P_2)$ i (ζ_3, P_3).



Slika 5.2: Cirkularna krivulja k^3_π tipa (1,0) dobivena projektivnom tvorbom (1e)

Napomena. Krivulja dualna krivulji k^3_π na slikama dobivena je algebarski. Točnije, jednadžba redne krivulje koja je dualna razrednoj krivulji dane s jednadžbom $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ dobiva se presjecanjem razredne krivulje pramenom pravaca s vrhom u točki $M(x, y)$ $\mathbf{u}x + \mathbf{v}y + 1 = 0$. Uvjet da točka M bude diralište, tj. da dva pravca pramena (M) padnu zajedno, napisan u obliku jednakosti koja povezuje x i y je jednadžba redne krivulje koja je dualna početnoj razrednoj krivulji, [28]. S obzirom da je početna krivulja 3. razreda tada uvjet da točka M bude diralište je ekvivalentno uvjetu da jednadžba 3. stupnja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ima barem dva jednaka korijena, odnosno da je diskriminanta

jednaka 0 ($-b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 18abcd + 27a^2d^2 = 0$).

Prema teoremima 5.1.8 i 5.2.2 može se konstruirati 1-cirkularna krivulja k_π^3 s izotropnim dvostrukim pravcem koji je infleksijski pravac. Neka je $[P_1, P_2]$ niz točaka kojemu je izotropni pravac $\mathbf{v}$ nosilac, $[C_1, C_2]$ pramen specijalnih hiperbola tipa (1,0) koje se međusobno dodiruju u točki na izotropnom pravcu $\mathbf{v}$, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{v}$ pridružena točka niza koja je zajedničko diralište pramena, tada je krivulja k_π^3 1-cirkularna krivulja tipa (1,0) s izotropnim infleksijskim pravcem $\mathbf{v}$.

2-cirkularne krivulje 3. razreda

Teorem 5.2.3. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen kružnica i $[P_1, P_2]$ niz točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ 2-cirkularna krivulja 3. razreda k_π^3 tipa (1,1).*

Prema teoremu 5.1.5 slijedi

Teorem 5.2.4. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen specijalnih parabola i $[P_1, P_2]$ niz točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ barem 2-cirkularna krivulja 3. razreda k_π^3 tipa (2,0) ili (0,2). Pri čemu je apsolutna točka F diralište na apsolutnom pravcu kojeg krivulja k_π^3 sadrži.*

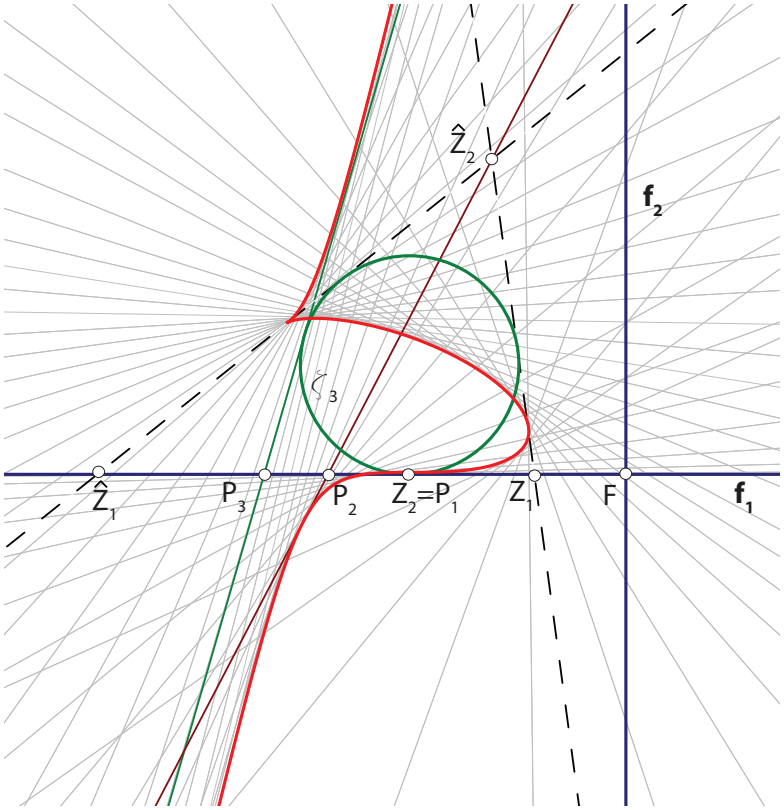
Također prema teoremima 5.1.4 i 5.2.2 slijedi

Korolar 5.2.1. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen specijalnih hiperbola tipa (1,0) i $[P_1, P_2]$ niz točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Ako je specijalnoj paraboli iz pramena $[C_1, C_2]$ pridružena izotropna točka niza incidentna s apsolutnim pravcem $\mathbf{f_1}$ tada je krivulja k_π^3 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (2,0) tj. sadrži apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ s diralištem u apsolutnoj točki F.*

Prema teoremu 5.1.3 slijedi

Teorem 5.2.5. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen specijalnih parabola tipa (2,0) i $[P_1, P_2]$ niz točaka u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{f_1}$, pridružena izotropna točka niza incidentna s apsolutnim pravcem $\mathbf{f_1}$, tada je krivulja k_π^3 2-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (2,0) s dvostrukim pravcem $\mathbf{f_1}$.*

Za krivulju k_π^3 iz teorema 5.2.5 dvostruki pravac može biti ili izolirani dvostruki pravac ili dvostruka tangenta, dok u sljedećem teoremu koji slijedi iz teorema 5.1.8 krivulji k_π^3 je dvostruki pravac infleksijski (sl. 5.3). Na slici 5.3 parovi projektiviteta π su $((Z_1) \cup (\hat{Z}_1), P_1)$, $((Z_2) \cup (\hat{Z}_2), P_2)$ i (ζ_3, P_3).



Slika 5.3: Cirkularna krivulja k_π^3 tipa (2,0) dobivena projektivnom tvorbom (2e)

Teorem 5.2.6. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen specijalnih hiperbola tipa (1,0) sa zajedničkim diralištem na apsolutnom pravcu $\mathbf{f_1}$ i $[P_1, P_2]$ niz izotropnih točaka kojemu je apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ nosilac u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k_π^3. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem $\mathbf{f_1}$ pridružena točka dirališta pramena $[C_1, C_2]$, tada je krivulja k_π^3 2-cirkularna tipa (2,0) s infleksijskim pravcem $\mathbf{f_1}$.*

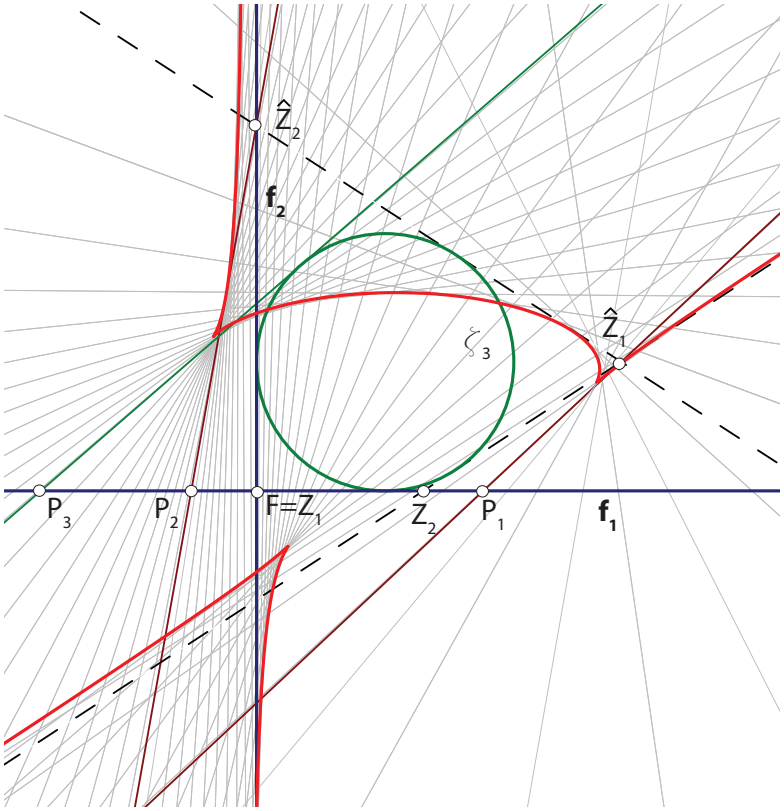
Potpuno cirkularne krivulje 3. razreda

Prema teoremu 5.1.2 i 5.2.1 slijedi

Korolar 5.2.2. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen krivulja 2. razreda i $[P_1, P_2]$ niz izotropnih točaka kojima je nosilac apsolutni pravac $\mathbf{f_1}$ u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$, gdje pramen $[C_1, C_2]$ sadrži specijalnu parabolu tipa*

(0,2) kojoj je pridružena apsolutna točka F, potpuno cirkularna krivulja 3. razreda k^3_π tipa (1,2). Apsolutna točka F je diralište na pravcu $\mathbf{f_2}$ *krivulje k^3_π.*

Prema teoremima 5.1.7 i 5.2.3 može se konstruirati potpuno cirkularna krivulja 3. razreda s dvostrukim pravcem koji je izolirani dvostruki pravac (sl. 5.4) ili dvostruka tangenta. Na slici 5.4 parovi projektiviteta π su $((F) \cup (\hat{Z}_1), F)$, $((Z_2) \cup (\hat{Z}_2), P_2)$ i (ζ_3, P_3).



Slika 5.4: Cirkularna krivulja k^3_π tipa (2,1) dobivena projektivnom tvorbom (3b)

Teorem 5.2.7. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen kružnica i $[P_1, P_2]$ niz izotropnih točaka kojemu je apsolutni pravac* $\mathbf{f_1}$ *nosilac u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Tada je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ potpuno cirkularna krivulja 3. razreda k^3_π tipa (2,1). Apsolutni pravac* $\mathbf{f_1}$ *je ili dvostruki izolirani ili dvostruka tangenta krivulje k^3_π.*

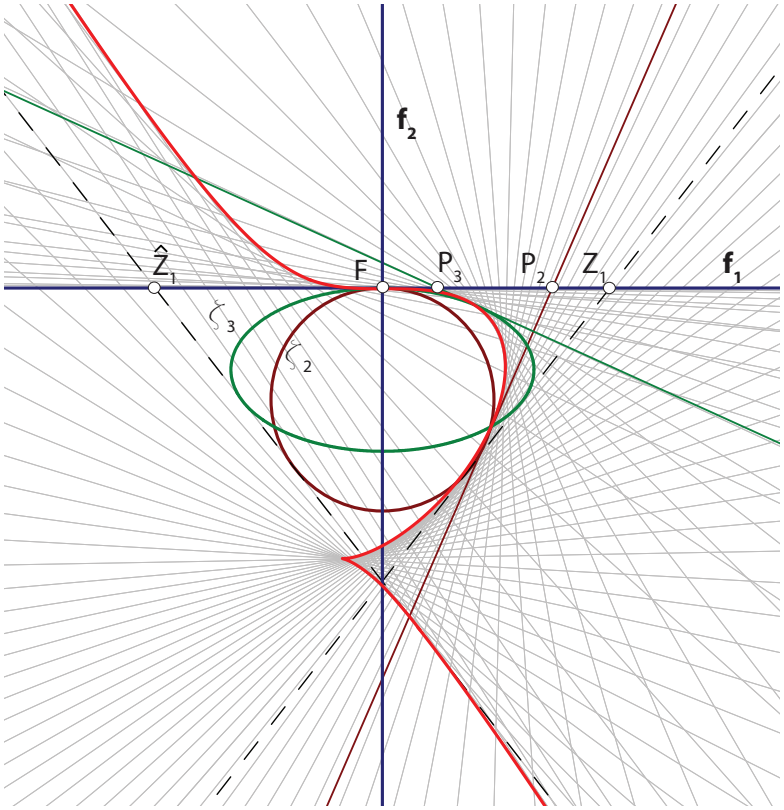
Prema teoremu 5.1.8 slijedi

Teorem 5.2.8. *Neka je $[C_1, C_2]$ pramen kružnica sa zajedničkim diralištem na apsolutnom pravcu* $\mathbf{f_1}$ *i $[P_1, P_2]$ niz izotropnih točaka kojemu je apsolutni pravac* $\mathbf{f_1}$ *nosilac u $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$. Neka je proizvod projektivnog pridruživanja $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ krivulja 3. razreda k^3_π. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem* $\mathbf{f_1}$ *pridružena točka*

dirališta pramena $[C_1, C_2]$*, tada je krivulja* k^3_π *potpuno cirkularna tipa (2,1) s infleksijskim pravcem* $\mathbf{f_1}$*.*

Prema teoremima 5.1.3 i 5.2.5 slijedi

Korolar 5.2.3. *Neka je* $[C_1, C_2]$ *pramen specijalnih parabola tipa (2,0) koje se oskuliraju ili hiperoskuliraju i* $[P_1, P_2]$ *niz točaka u* $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$*. Neka je proizvod projektivnog pridruživanja* $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *krivulja 3. razreda* k^3_π*. Ako je degeneriranoj krivulji 2. razreda sa singularnim pravcem* $\mathbf{f_1}$ *pridružena izotropna točka niza incidentna s apsolutnim pravcem* $\mathbf{f_1}$*, tada je krivulja* k^3_π *potpuno cirkularna krivulja 3. razreda tipa (3,0). Pravac* $\mathbf{f_1}$ *je dvostruki pravac krivulje* k^3_π *s diralištem u apsolutnoj točki* F*.*



Slika 5.5: Cirkularna krivulja k^3_π tipa (3,0) dobivena projektivnom tvorbom (3f)

Prema teoremu 5.1.8 slijedi

Teorem 5.2.9. *Neka je* $[C_1, C_2]$ *pramen specijalnih parabola tipa (2,0) i* $[P_1, P_2]$ *niz izotropnih točaka kojemu je apsolutni pravac* $\mathbf{f_1}$ *nosilac u* $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$*. Tada je proizvod projektivnog pridruživanja* $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *potpuno cirkularna krivulja* k^3_π *tipa (3,0) s dvostrukim pravcem* $\mathbf{f_1}$*. Apsolutna točka* F *je jedno diralište na dvostrukom pravcu* $\mathbf{f_1}$*,*

dok je drugo diralište izotropna točka niza pridružena degeneriranoj krivulji pramena sa singularnim pravcem $\mathbf{f_1}$.

Ako je degeneriranoj krivulji pramena $[C_1, C_2]$ sa singularnim pravcem $\mathbf{f_1}$ u teoremu 5.2.9 pridružena apsolutna točka F, tada je pravac $\mathbf{f_1}$ infleksijski pravac krivulje k_π^3. Na slici 5.5 parovi projektiviteta π su $((Z_1) \cup (\hat{Z}_1), F)$, (ζ_2, P_2) i (ζ_3, P_3).

Prema teoremima 5.1.5 i 5.2.4 slijedi

Korolar 5.2.4. *Neka je* $[C_1, C_2]$ *pramen specijalnih parabola tipa (2,0) i* $[P_1, P_2]$ *niz točaka u* $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$*, te neka je proizvod projektivnog pridruživanja* $\pi : [C_1, C_2] \to [P_1, P_2]$ *krivulja 3. razreda* k_π^3*. Ako je degeneriranoj krivulji pramena* $[C_1, C_2]$*, kojoj je pramen* (F) *jedan dio, pridružena izotropna točka niza* $[P_1, P_2]$ *na apsolutnom pravcu* $\mathbf{f_1}$*, tada je krivulja* k_π^3 *potpuno cirkularna krivulja 3. razreda tipa (3,0) sa šiljkom u* F.

Zaključak

U ovom radu klasificirane su cirkularne krivulje 3. razreda u kvazihiperboličkoj ravnini $\mathbb{QH}_2(\mathbb{R})$ prema stupnju i tipu cirkularnosti, te unutar toga na finiju podjelu s obzirom na vrstu izotropnih pravaca krivulje 3. razreda (poglavlje 2.3):

- 1-cirkularne tipa (1,0) tj. (0,1) (6 podtipova),
- 2-cirkularne tipa (1,1) ili (2,0) tj. (0,2) (5 podtipova),
- 3-cirkularne (potpuno cirkularne) tipa (1,2) tj. (2,1) ili (3,0) tj. (0,3) (7 podtipova).

Njihova tvorba kao i uvjeti pojedinog tipa cirkularnosti obrađeni su pravčastom inverzijom, nožišnom transformacijom i projektivnom tvorbom.

Iz obrađenih svojstava pravčaste inverzije slijedi da se cirkularnost krivulje može postići ukoliko je pravčasta inverzija automorfna ili temeljni trostran pravčaste inverzije sadrži barem jedan apsolutni pravac. Nadalje, pokazano je da se krivulja 3. razreda može dobiti pravčastom inverzijom od krivulje 2. razreda koja sadrži jedan temeljni pravac pravčaste inverzije, te je dobivena krivulja uvijek racionalna krivulja s jednim dvostrukim pravcem.

Za pravčastu inverziju s obzirom na kružnicu pokazalo se sljedeće:

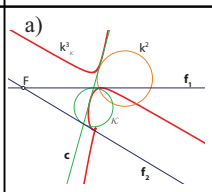
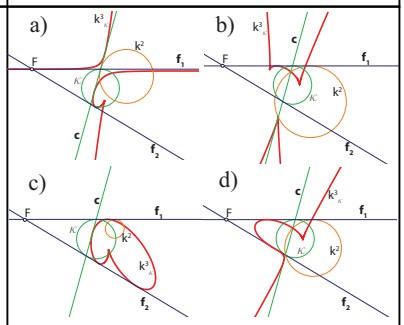
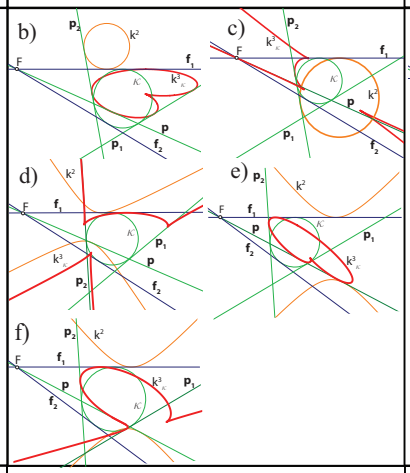
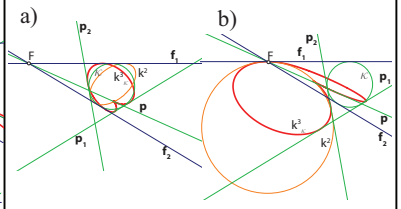
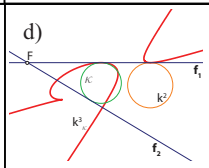
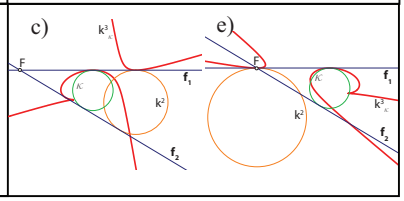
- pravčasta inverzija s obzirom na kružnicu i njenu centralu preslikava krivulju 2. razreda koja sadrži jedan temeljni pravac u krivulju 3. razreda koja je
  - potpuno cirkularna tipa (2,1) ili (1,2) ako je generatorna krivulja cirkularna ili necirkularna, a sadrži polaru s diralištem u temeljnoj točki,
  - 2-cirkularna tipa (1,1) inače.
- pravčasta inverzija obzirom na kružnicu i izotropni pravac preslikava cirkularnu krivulju 2. razreda tipa (t, r) koja sadrži jedan temeljni pravac u krivulju 3. razreda koja je

– $(t+r+1)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa $(t+1,r)$ ili tipa $(t,r+1)$ ako je polara apsolutni pravac,

– $(t+r)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (t,r) inače.

U sljedećoj tablici prikazani su svi tipovi cirkularnih krivulja 3. razreda koje se mogu dobiti s obzirom na pravčastu inverziju kada je temeljna konika kružnica.

Tablica 6.1

inv.	1- cirkularne	2- cirkularne	3- cirkularne
Tip I			
Tip II a)			
Tip II b)			

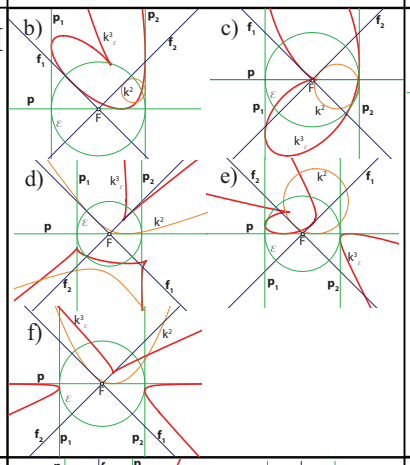
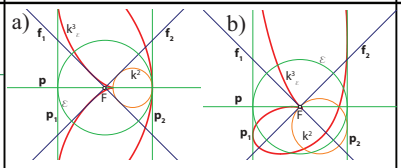
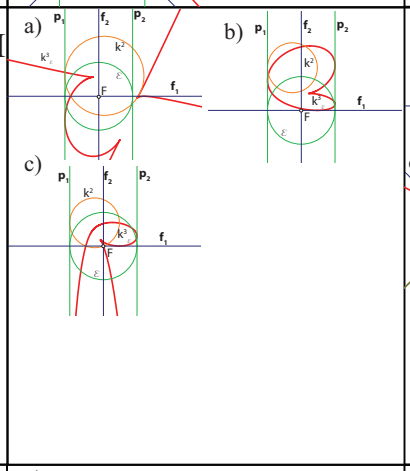
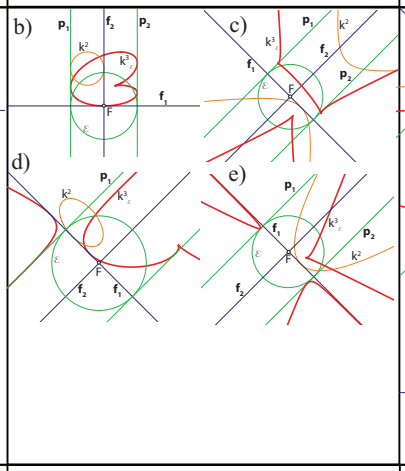
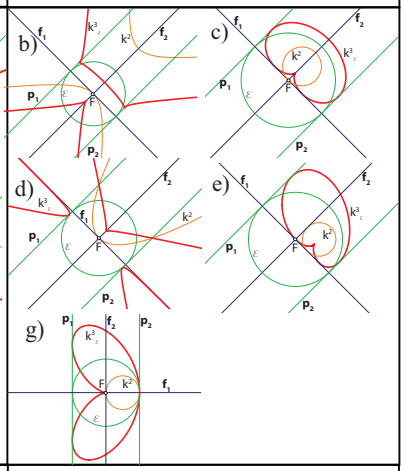
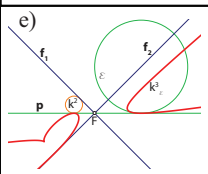
Za pravčastu inverziju s obzirom na ortogonalnu krivulju 2. razreda pokazalo se da se cirkularna krivulja 2. razreda tipa (t,r) koja sadrži jedan temeljni pravac preslikava u krivulju 3. razreda koja je

- $(t+r)$-cirkularna krivulja 3. razreda tipa (r,t) ako je polara izotropni pravac,

- $(t + r + 1)$-cirkularna krivulja 3. razreda ako je polara apsolutni pravac, pri čemu ako je $\mathbf{p} = \mathbf{f_1}$ tada je cirkularnosti tipa $(t + r + 1, 0)$ za $t < 2$ i tipa $(2, 1)$ za $t = 2$.

U sljedećoj tablici prikazani su svi tipovi cirkularnih krivulja 3. razreda koje se mogu dobiti s obzirom na pravčastu inverziju kada je temeljna konika ortogonalna krivulja 2. razreda:

Tablica 6.2

inv.	1- cirkularne	2- cirkularne	3- cirkularne
Tip III a)			
Tip III b)			
Tip III c)			

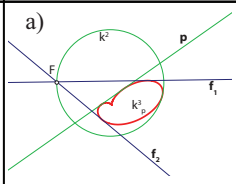
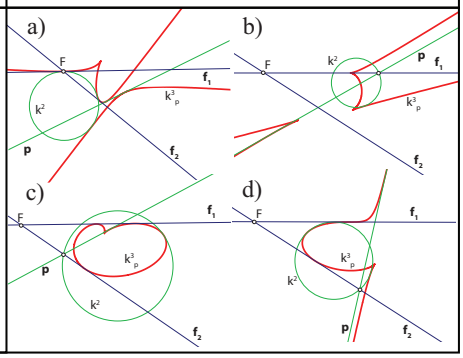
Cirkularna krivulja 3. razreda dobiva se nožišnom transfomacijom ako generatorna krivulja 2. razreda sadrži točno jednu temeljnu točku nožišne transformacije, odnosno:

- ako polara nožišne transformacije sadrži jednu izotropnu točku generatorne krivulje 2. razreda,

- ako je generatorna krivulja parabola ili specijalna parabola.

Može se također zaključiti da se cirkularna krivulja 3. razreda može dobiti od svake krivulje 2. razreda osim hiperbole tipa 3, te je mogućnost njihovog konstruiranja prikazano u sljedećoj tablici:

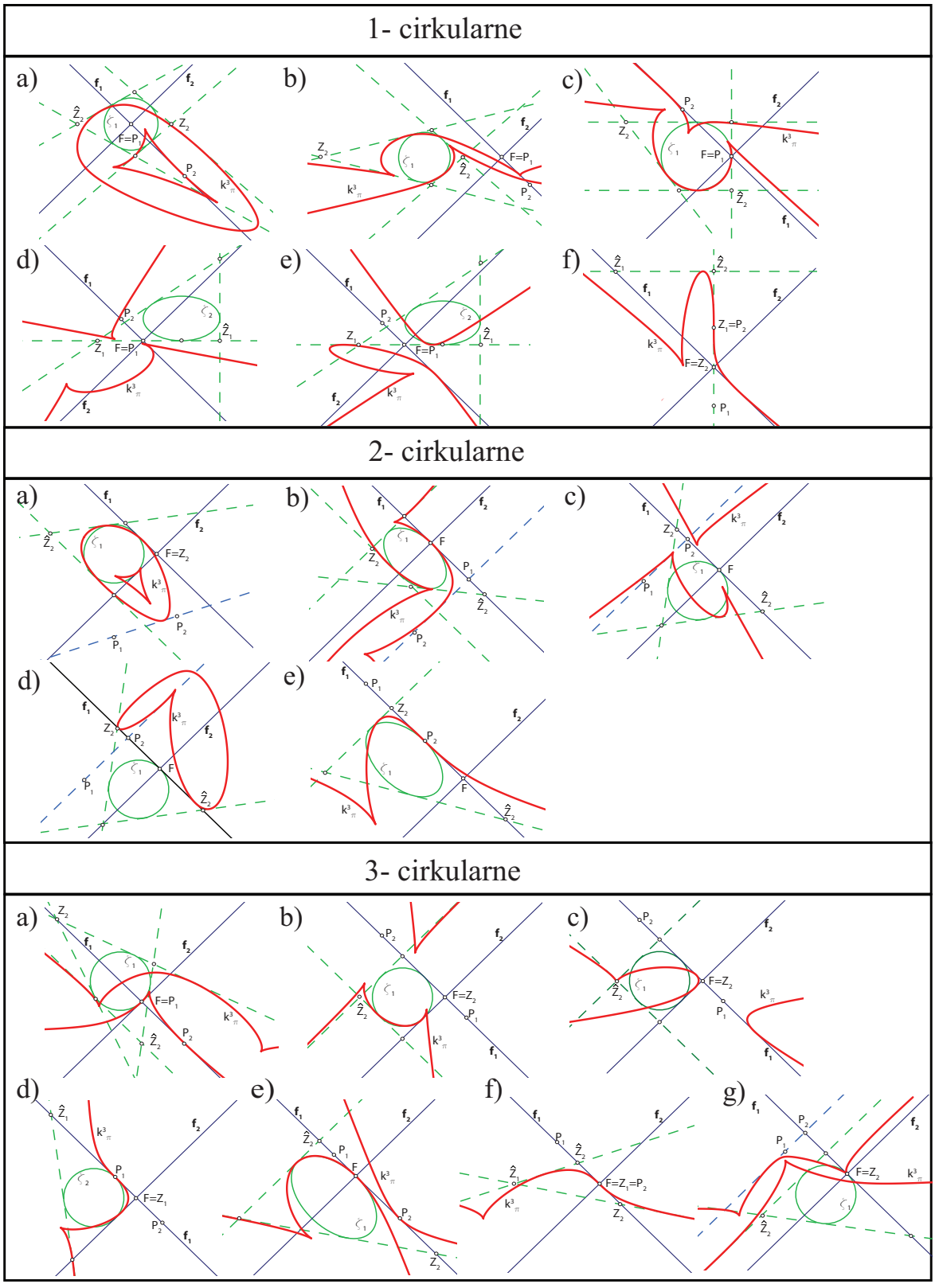
Tablica 6.3

1- cirkularne	2- cirkularne	3- cirkularne
		

Nadalje, pokazano je da je nožišna transformacija racionalno preslikavanje te da je povezana s pravčastom inverzijom s obzirom na kružnicu i njenu centralu, pri čemu se centrala mora podudarati s polarom nožišne transformacije. Također, za krivulju dobivenu s obzirom na pravčastu inverziju ili nožišnu transformaciju pokazana je konstrukcija dualne redne krivulje.

U zadnjem poglavlju promatrana je projektivna tvorba krivulja 3. razreda, odnosno svojstva projektiviteta između niza točaka i pramena krivulja 2. razreda. Na temelju tih svojstava može se zaključiti da je taj način konstrukcije najproduktivniji za tvorbu cirkularnih krivulja 3. razreda (čak na više od jednog načina) odnosno da se njome mogu konstruirati svi tipovi cirkularnih krivulja 3. razeda prema danoj klasifikaciji u radu. U sljedećoj tablici prikazani su primjeri projektiviteta za svaki tip cirkularne krivulje 3. razreda:

Tablica 6.4


1- cirkularne
a)
b)
c)
d)
e)
f)
2- cirkularne
a)
b)
c)
d)
e)
3- cirkularne
a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)

Literatura

[1] E. Brieskorn, H. Knörrer *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, Basel 1986;

[2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons, Inc., Toronto 1969;

[3] H. S. M. Coxeter, *The real projective plane*, McGraw-Hill book company Inc., 1949;

[4] K. Fladt, *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt am Main, 1962;

[5] S. Gorjanc *Nožišne tvorevine kao anvelope*, Zbornik radova XVII jug. savjetovanje za nacrtnu geometriju, Zagreb, 1990, 16-24;

[6] J. Gray, *Worlds out of Nothing*, Springer Verlag, London 2011;

[7] T. A. Hirst, *On the Quadric inversion of the plane curves*, Proc. Roy. Soc. London **14** (1865), 91-106;

[8] E. Jurkin, *Potpuno cirkularne krivulje četvrtog reda u hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2008;

[9] E. Jurkin, *Circular Cubics in pseudo-Euclidean plane*, Novi Sad J. Math. **44**(2) (2014), 195-206;

[10] E. Jurkin, N. Kovačević, *Entirely Circular Quartics in the pseudo-Euclidean Plane*, Acta Math. Hung. **134**(4) (2012), 571-582;

[11] M. Katić Žlepalo, E. Jurkin, *Circular cubics and quatics obtained as pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, The 15th International Conference on Geometry and Graphics Proceedings, Montreal, 2012, 341-347;

[12] J. L. Krames, *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*, Leipzig und Wien Franz Deuticke, 1931;

[13] N. Kovačević, E. Jurkin, *Circular Cubics and Quartics in pseudo-Euclidean Plane obtained by inversion*, Math. Pannon. **22** (2011), 199-218;

[14] N. Kovačević, V. Szirovicza, *Inversion in Minkowskischer Geometrie*, Math. Pannon. **21** (2010), 89-113;

[15] G. Loria, *Spezielle algebraische und transendente ebene Kurven I*, Teubner Leipzig, 1902;

[16] N. M. Makarova, *On the projective metrics in plane*, Učenye zap. Mos. Gos. Ped. in-ta **243** (1965), 274-290 (ruski);

[17] M.D. Milojević, *Certain Comparative examinations of plane geometries according to Cayley-Klein*, Novi Sad J. Math, **29**(3) (1999), 159-167;

[18] V. Niče, *Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije*, Rad HAZU, **278** (1945), 153-194;

[19] V. Niče, *Doprinos zajedničkim svojstvima ravnih krivulja 3. i 4. reda roda nultoga*, Rad HAZU **278** (1945), 55-61;

[20] V. Niče, *O fokalnim osobinama bicirkularnih krivulja i nekih ciklida 4. reda*, Rad JAZU **296** (1953), 185-197;

[21] V. Niče, *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956;

[22] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Element, Zagreb, 1984;

[23] D. Palman, *Projektivne konstrukcije*, Element, Zagreb, 2005;

[24] D. Palman, *Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, Rad JAZU **8** (1989), 37-46;

[25] D. Palman, *Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik MFA **14** (1959), 19-74;

[26] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Friedr. Vieweg&Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987;

[27] S. Salmon, *Higher plane curves*, Chelsea Publishing Company, New York, 1879;

[28] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979;

[29] J. G. Semple, G. T. Kneebone, *Algebraic projective geometry*, Oxford University press, 1963;

[30] A. Sliepčević, I. Božić, H. Halas, *Introduction to the Planimetry of the Quasi-Hyperbolic Plane*, KoG **17** (2013); 58-64;

[31] A. Sliepčević, M. Katić Žlepalo, *Pedal curves of conics in pseudo-Euclidean plane*, Math. Pannon. **23** (2012), 75-84;

[32] A. Sliepčević, V. Szirovicza, *A classification and construction of entirely circular cubics in the hyperbolic plane*, Acta Math. Hungar. **104**(3) (2004), 185-201;

[33] A. Sliepčević, V. Szirovicza, *Die projektive Erzeugung der vollstandig zirkularen Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene*, Math. Pannon. **11**(2) (2000), 223-237;

[34] D. M. Y. Sommerville, *Classification of geometries with projective metric*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **28** (1910), 25-41;

[35] V. Szirovicza, *Cirkularne kubike u izotropnoj i hiperboličnoj ravnini*, Doktorska disertacija, Zagreb, 2001;

[36] V. Szirovicza, *Die Fusspunktskurven der Kegelschnitten der isotropen Ebene*, KoG **1** (1996), 3-5;

[37] V. Szirovicza, *Vollkommen zirkuläre Kurven Fusspunktkurven der hyperbolische Ebene*, Rad JAZU **408** (1984), 17-25;

[38] V. Szirovicza, A. Sliepčević, *Die allgemeine Inversion in der isotropen Ebene*, Rad HAZU **491**(15) (2005), 153-168;

[39] H. Wieleitner, *Spezielle Ebene Kurven*, G. J. Göschen, Leipzig, 1908;

[40] H. Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven hoherer Ordnung*, G. J. Göschen, Leipzig, 1905;

[41] M. Yaglom, *Felix Klein and Sophus Lie*, Birkhäuser, Boston-Basel, 1988;

[42] M. Yaglom, B. A. Rozenfeld, E. U. Yasinskaya, *Projective metrics*, Russ. Math. Surreys **19**(5) (1964), 51-113;

Životopis

Helena Halas rođena je u Požegi 21. lipnja 1986., gdje završava osnovnu školu i prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Godine 2004. upisuje se na Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Diplomski rad pod nazivom *O nekim značajnim točkama trokuta* pisala je pod stručnim vodstvom doc. dr. sc. Mee Bombardelli, te diplomirala 2. veljače 2009. i stekla zvanje profesora matematike.

Od 1. travnja 2009. zaposlena je na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu u suradničkom zvanju asistent-znanstveni novak. Od tada je zadužena za vođenje vježbi iz kolegija *Deskriptivna geometrija*, a održavala je i vježbe iz *Osnove inženjerske matematike 2*, *Matematika 2*, *Matematički programi za inženjere* i *Perspektiva*.

2009. godine upisala je doktorski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Članica je Seminara za geometriju Matematičkog odsjeka, te *Hrvatskog društva za geometriju i grafiku*, čiju službenu web-stranicu održava od 2011. godine.

Bila je suradnica na znanstvenom projektu *Krivulje i plohe u euklidskim i neeuklidskim prostorima* pod vodstvom prof. dr. sc. Ane Sliepčević, projektu *Uvođenje 3D modeliranja u nastavu geometrije na tehničkim fakultetima* pod vodstvom doc. dr. sc. Sonje Gorjanc, projektu *Bibliografija znanstvenih radova hrvatskih geometričara-nastavnika na tehničkim fakultetima u 20. stoljeću* pod vodstvom prof. dr. sc. Vlaste Szirovicze, te DAAD projektu *Geometrical education for future arhitects* pod vodstvom prof. dr. sc. Daniela Lordicka. Sudjelovala je na više domaćih i međunarodnih kolokvija i konferencija, te je koautorica nekoliko znanstvenih i stručnih radova:

- S. Gorjanc, H. Halas, E. Jurkin, *Introducing 3D Modeling into Geometry Education at Two Faculties at the University of Zagreb*, Proceedings 16th ICGG 2014, Innsbruck, Austrija;
- H. Halas, N. Kovačević, A. Sliepčević, *Line Inversion in the Quasi-Hyperbolic Plane*,

Proceedings 16th ICGG 2014, Innsbruck, Austrija;

- A. Sliepčević, I. Božić, H. Halas, *Introduction to the planimetry of the quasi-hyperbolic plane*, KoG **17** (2013), 58-64;
- A. Sliepčević, H. Halas, *Family of triangles and related curves*, Rad HAZU **515** (2013), 203-210;
- H. Halas, M. Bombardeli, *Izotomične točke trokuta*, MFL **239** (2010), 158-165;