Korelacije u jako-međudjelujućim višečestičnim jednodimenzionalnim sustavima

Lelas, Karlo

Doctoral thesis / Disertacija

2012

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:504847

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Karlo Lelas

Korelacije u jako-međudjelujućim višečestičnim jednodimenzionalnim sustavima

Doktorska Disertacija
predložena Fizičkom Odsjeku
Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
radi stjecanja akademskog stupnja
Doktora prirodnih znanosti (Fizika)

Zagreb, 2012.

UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF PHYSICS

Karlo Lelas

Correlations in strongly-interacting one-dimensional many-body systems

Doctoral Thesis submitted to the Department of Physics
Faculty of Science, University of Zagreb
for the academic degree of
Doctor of Natural Sciences (Physics)

Zagreb, 2012.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Doktorska disertacija

Korelacije u jako-međudjelujućim višečestičnim jednodimenzionalnim sustavima

Karlo Lelas

Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

U višečestičnim kvantnim sustavima čestice međudjeluju i stvaraju korelacije zbog kojih ne mogu biti opisane nezavisno jedna od druge. Kao posljedica toga valna funkcija sustava je objekt koji sadrži veliku količinu informacija i u većini slučajeva nemoguće ju je egzaktno ili analitički odrediti. Proučavanje korelacija u kontekstu jako međudjelujućih jednodimezionalnih (1D) bozonskih sustava je zanimljivo jer u tom režimu možemo egzaktno odrediti višečestičnu valnu funkciju primjenom Fermi-Bose (FB) mapiranja. FB mapiranje je u osnovi modela kojeg je Marvin Girardeau predložio 1960. godine tzv. Tonks-Girardeau (TG) plin: jednodimenzionalni bozonski plin gdje bozoni međudjeluju jakim odbojnim kontaktnim interakcijama. Model TG plina eksperimentalno je realiziran 2004. godine s atomima rubidija zatočenim u uske atomske valovode i predmet je daljnjih eksperimentalnih istraživanja. Naš je cilj proučavanje korelacija u TG plinu kroz formalizam jednočestične matrice gustoće. Jednočestična matrica gustoće među ostalim sadrži i informacije o raspodjeli impulsa koja se može mjeriti u eksperimentima. Istraživali smo korelacije u tzv. tamnim solitonskim pobuđenjima TG plina te odredili karakterističan potpis tih korelacija u raspodjeli impulsa, što može biti od važnosti pri eksperimentalnoj detekciji takvih stanja. Uz TG plin, FB mapiranje je 2007. godine primjenjeno za egazktni opis mješavine bozona i spin polariziranih fermiona u 1D. Izveli smo formulu za jednočestičnu matricu gustoće osnovnog stanja takve mješavine te istražili korelacije i raspodjelu impulsa mješavine u potencijalu

dvostruke jame. Zbog egzaktnosti, ovi sustavi su pogodni za ispitivanje stabilnosti dinamike višečestične valne funkcije na male perturbacije u različitim režimima međudjelovanja. U tu svrhu, istraživali smo utjecaj malog prostornog šuma na neravnotežnu dinamiku 1D bozonskih plinova, u režimu slabih i jakih međudjelovanja, koristeći koncept *Loschmidtove jeke*, poznate i kao *kvantna vjernost*. Primjenili smo te koncepte i na istraživanje *zapinjanja*. Naši rezultati su u skladu sa nedavno izvršenim eksperimentima o zapinjanju atoma u 1D jako međudjelujućim bozonskim plinovima.

(102 stranice, 84 literaturnih navoda, jezik izvornika hrvatski)

Mentor:	Prof. Dr. sc. H. Buljan
Ocjenjivači:	Prof. Dr. sc. I. Batistić Prof. Dr. sc. H. Buljan Dr. sc. S. Milošević, znanstveni savjetnik
Radnja prihvaćena:	2012.

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Physics

Doctoral thesis

Correlations in strongly-interacting one-dimensional many-body systems

Karlo Lelas

Faculty of Science, University of Zagreb

In quantum many-body systems interactions between particles create correlations and particles can not be described independently. As a consequence the wave function of the system is a complicated object holding a large amount of information and in most cases it is not possible to obtain it exactly or analytically. Studying correlations in the context of strongly interacting one-dimensional (1D) systems is interesting because in this regime we can exactly determine many particle wave function through Fermi-Bose (FB) mapping. FB mapping is in the essence of a Tonks Girardeau (TG) gas proposed in 1960, a theoretical model of 1D Bose gas with strongly repulsive contact interactions between particles. TG gas is experimentally realized in 2004 with rubidium atoms confined in tight atomic wave-guides and it is still a topic of experimental studies. Our goal is the study of correlations in TG gas through the formalism of the single particle density matrix. Single particle density matrix, among other important observable's, contains information about the momentum distribution which can be measured in experiments. We explored correlations in dark soliton-like excitations of the TG gas and found that these correlations give rise to a specific form of the momentum distribution which can be used to experimentally detect these states. In addition to the TG gas, FB mapping was used to construct exact wave functions of 1D Bose-Fermi mixtures (fermions are spin polarized). We derived the formula for the single particle density matrix of the mixture and used it to study correlations and momentum distribution of the mixture in the ground state of double well potential. Due to integrability, these systems are convenient to study stability to perturbations of many-body quantum states in different interaction regimes. We explored stability of non-equilibrium dynamics of 1D interacting Bose gases

with respect to small spatial noise potential using the concept of Loschmidt echo (quantum fidelity). We used this concept to explore the pinning quantum phase transition. We found that the ground state fidelity and the Loschmidt echo can be used for diagnostics of the pinning quantum phase transition in experimentally relevant conditions.

(102 pages, 84 references, original in Croatian)

Supervisor:	Prof. Dr. sc. H. Buljan
Reviewers:	Prof. Dr. sc. I. Batistić
	Prof. Dr. sc. H. Buljan
	Dr. sc. S. Milošević, scientific advisor
Thesis accepted:	2012.

Zahvale

Osjećam zahvalnost prema mnogo dragih ljudi u Zagrebu i u Splitu, sretan sam da je lista poduža, ali neću ni pokušati navesti sva imena. Iskreno se nadam da će mi se pružit prilika djelom pokazati koliko sam vam svima zahvalan na prijateljstvu, diskusijama, suradnji, radu, druženju, ručkovima, večerama, kavama, posuđivanju pegli...na svemu! Drage kolegice i kolege na PMF-u u Zagrebu i na FESB-u u Splitu, hvala vam.

Zahvalan sam svojoj obitelji što je bilo malo pitanja tipa ...kad ćeš ovo, kad ćeš ono... pamtim samo par takvih situacija (prepoznat će se krivac, ako ikad uzme u ruke ovu disertaciju:), a bilo je jako puno razumjevanja, strpljenja i bezuvjetne podrške (hvala Mama:).

E sad, pa i da jedno ime bude u zahvalama. Čovjek s mnogo titula. Za mnoge je "samo" prof. dr. sc., za mene je još i mentor, šef, gazda (upravo sam u njegovom stanu, već par mjeseci). Zato se želim iznad svega zahvaliti Hrvoju Buljanu na prijateljskom, odgovornom i entuzijastičnom mentorstvu i čestitati mu što je uspio od mene učiniti doktora. Hrvoje hvala!

Rad prezentiran u ovoj disertaciji je objavljen u nekoliko članaka. Reference za svako poglavlje su dane ispod.

Poglavlje 3:
H. Buljan, K. Lelas, R. Pezer and M. Jablan,
Single particle density matrix and the momentum distribution of dark solitons in a Tonks-Girardeau gas,
Phys. Rev. A **76**, 043609 (2007).

Poglavlje 4:
K. Lelas, D. Jukić and H. Buljan,
Ground state properties of a one-dimensional strongly interacting Bose-Fermi mixture in a double-well potential,
Phys. Rev. A **80**, 053617 (2009).

Poglavlje 5:
K. Lelas, T. Ševa and H. Buljan,
Loschmidt echo in one-dimensional interacting Bose gases,
Phys. Rev. A **84**, 063601 (2011).

Poglavlje 6:
K. Lelas, T. Ševa, H. Buljan and J. Goold
The pinning quantum phase transition in a Tonks Girardeau gas: diagnostics by ground state fidelity and the Loschmidt echo,
Poslano u Phys. Rev. A, trenutna verzija je dostupna na arXiv:1205.3151v1 (2012).

Sadržaj

Zahvale **xi**

Sadržaj **xiii**

1 Uvod **1**

1.1 Eksperimentalna realizacija 2

1.2 Međudjelovanje neutralnih atoma u ultrahladnim plinovima . . 6

1.3 Teorijski modeli 8

1.3.1 Tonks-Girardeau plin i Fermi-Bose mapiranje 9

1.3.2 Gross-Pitaevskii jednadžba 11

2 Reducirana jednočestična matrica gustoće, prirodne orbitale i raspodjela impulsa **13**

2.1 Definicija reducirane jednočestične matrice gustoće i pripadne opservable 14

2.2 Matrica gustoće Tonks-Girardeau plina 17

3 Jednočestična matrica gustoće i raspodjela impulsa "tamnih solitonskih" stanja u Tonks-Girardeau plinu **19**

3.1 Tamni solitoni na prstenu 21

3.2 Tamna solitonska stanja u potencijalima invarijantnim na operator pariteta 29

3.3 Zaključak 30

4 Svojstva osnovnog stanja jako-međudjelujuće jednodimenzionalne Bose-Fermi mješavine u dvostrukoj jami **33**

4.1 Model 34

4.2 Formula za matricu gustoće 37

4.3 Mješavina u dvostrukoj jami 41
4.4 Zaključak 50

5 Loschmidtova jeka jednodimenzionalnih međudjelujućih bozonskih plinova 51
5.1 Loschmidtova jeka Tonks-Girardeau plina 52
5.2 Loschmidtova jeka u režimu srednjeg polja 58
5.3 Diskusija 62
5.4 Zaključak 65

6 Zapinjanje u Tonks-Girardeau plinu: dijagnostika pomoću vjernosti osnovnog stanja i Loschmidtove jeke 67
6.1 Vjernost osnovnog stanja i kvantni fazni prijelazi 68
6.2 Fermi-Bose mapiranje i vjernost osnovnog stanja 69
6.3 Zapinjanje Tonks-Girardeau plina u beskonačno dubokoj kutiji: vjernost osnovnog stanja 70
6.3.1 Numeričke simulacije 71
6.3.2 Analiza vjernosti osnovnog stanja pomoću prvog reda računa smetnje 76
6.4 Zapinjanje Tonks-Girardeau plina u harmoničkom oscilatoru: vjernost osnovnog stanja 79
6.5 Loschmidtova jeka i neravnotežna dinamika Tonks-Girardeau plina nakon naglog uključivanja optičke rešetke 83
6.5.1 Beskonačno duboka kutija 84
6.5.2 Harmonički oscilator 88
6.6 Zaključak 89

7 Sažetak 93

Bibliografija 97

Poglavlje 1

Uvod

Jednodimenzionalni (1D) bozonski plinovi važni su za razumijevanje kvantnih višečestičnih sustava. Rastući interes u istraživanju teorijskih 1D modela, koje su prvi uveli Girardeau [1] te Lieb i Liniger [2], velikim dijelom je potaknut eksperimentalnim napretkom u realizaciji ovih modela sa ultrahladnim atomskim plinovima [3]. U eksperimentima, hlađenjem su atomima zamrznuti transverzalni stupnjevi slobode u uskim atomskim valovodima tako da njihovo gibanje postaje efektivno jednodimenzionalno. Ovi sustavi opisani su Lieb-Liniger (LL) modelom, odnosno sustavom identičnih bozonskih čestica u 1D sa kontaktnim međudjelovanjem proizvoljne jakosti [2]. U limesu slabog međudjelovanja LL model možemo opisati Gross-Pitaevskii (GP) teorijom [4]. U limesu jakog međudjelovanja, LL plin se približava Tonks-Girardeau (TG) režimu neprobojnih bozona [1]; TG režim može se postići na vrlo niskim temperaturama, malim linearnim gustoćama i sa jakim (1D) međudjelovanjem [5, 6]. TG plin je realiziran u eksperimentima [7, 8, 9]. Današnjim se eksperimentima mogu istraživati korelacije i koherencija 1D bozonskih plinova u velikom rasponu režima međudjelovanja, od slabo-međudjelujućeg GP režima do jako-međudjelujućeg TG režima. Ultrahladni atomski plinovi dobro su izolirani od okoline pa im je vrijeme dekoherencije dovoljno dugo da se kvantne korelacije mogu mjeriti i nakon nekog vremena karakterističnog za dinamiku sustava.

Disertacija je organizirana kako sljedi. U uvodnom dijelu ćemo proći u kratkim crtama kroz eksperimentalne tehnike hlađenja i zatočenja neutralnih atoma, te opisati kako u eksperimentima izgledaju sustavi koje mi istražujemo.

Opisat ćemo i međudjelovanje neutralnih atoma u ultrahladnim plinovima i na kraju uvodnog dijela uvesti teorijski model kojima opisujemo jednodimenzionalne međudjelujuće bozonske plinove. Zatim ćemo se u poglavlju 2 upoznati sa reduciranom jednočestičnom matricom gustoće i opservablama koje su u njoj sadržane. U poglavlju 3 ćemo primjeniti Pezerov i Buljanov algoritam za računanje jednočestične matrice gustoće Tonks-Girardeau (TG) plina i analizirati "tamna solitonska" pobuđenja u TG plinu. U poglavlju 4 ćemo analizirati svojstva osnovnog stanja jako-međudjelujuće mješavine bozona i fermiona u 1D. Izvesti ćemo formulu koja omogućava efikasno računanje jednočestične matrice gustoće fermionske komponente mješavine u proizvoljnom vanjskom potencijalu. Analizirat ćemo osnovno stanje mješavine u vanjskom potencijalu dvostruke jame. U poglavlju 5 ćemo iskoristiti koncept Loschmidtove jeke (kvantne vjernosti) da bi ispitali stabilnost dinamike višečestičnih valnih funkcija 1D bozonskih plinova na male perturbacije u režimu jakog i slabog međudjelovanja. U poglavlju 6 ćemo istražiti zapinjanje atoma u 1D bozonskom plinu, tzv. "pinning" kvantni fazni prijelaz, koristeći vjernost osnovnog stanja i Loschmidtovu jeku kao dijagnostičke alate.

1.1 Eksperimentalna realizacija

Rad prezentiran u ovoj disertaciji je teorijski pa se nećemo upuštati u iscrpno opisivanje eksperimentalnih tehnika hlađenja i zatočenja atomskih para, ali moramo naglasiti neke ključne ideje i koncepte u pozadini tih tehnika, jer eksperimetalna realizacija i jest razlog zbog kojeg je ovo područje aktualno i svježe.

Danas su eksperimentalci u mogućnosti zatočiti i hladiti pojedine atome i manje atomske ansamble sa nevjerojatnom preciznošću. Do toga je dovelo više od tri desetljeća razvoja tehnika zatočenja i hlađenja atoma korištenjem laserskih i magnetskih polja, za detaljniji uvid pogledati npr. reference [10, 11]. Veliki napredak je učinjen 1995 god. sa realizacijom prvog Bose-Einstein kondenzata (BEC) u tri nezavisna laboratorija [12, 13, 14]. U tim eksperimentima BEC je ostvaren u 3D zamkama. U kratkim crtama ćemo opisati principe u pozadini tih eksperimenata.

Atomi se hlade pomoću lasera tako što apsorbiraju fotone iz laserskog snopa

i zatim ih emitiraju u nasumičnim smjerovima, tako da postoji ukupni transfer impulsa između atoma i fotona. Frekvencija lasera je pomaknuta prema crvenom u odnosu na frekvenciju koju može apsorbirati atom, tako da atomi koji se gibaju prema izvoru lasera vide Doppler-pomaknutu frekvenciju koja je u rezonanciji sa atomskim prijelazom. Tako veću vjerojatnost apsorpcije fotona imaju atomi koji se gibaju prema izvoru, prilikom apsorpcije fotoni atomima predaju impuls pa atomi usporavaju. Emisija fotona je nasumična, tako da nakon mnogo takvih ciklusa ukupni efekt je smanjenje impulsa atoma u smjeru duž kojeg djeluje laser. Ako koristimo šest laserskih snopova pomaknutih prema crvenom (po dva suprotno usmjerena lasera duž x, y i z osi) možemo smanjiti impuls atoma u svim smjerovima. Nakon što se apsorpcijom fotona smanji brzina atoma, atom više nije u rezonanciji sa laserom, apsorpcija se događa manje učestalo, ali jednako iz svih smjerova i zajedno sa spontanom emisijom vodi na nasumično gibanje odnosno zagrijavanje atoma. Lasersko hlađenje može postići impresivno niske temperature ($T \sim 100\mu$K), ali ne dovoljne za postizanje BEC-a. To je u vrlo kratkim crtama princip laserskog hlađenja (za temeljiti pregled pogledati reference [10, 11]). Nakon laserskog hlađenja, uključuju se magnetske zamke u kojima se atomi dalje hlade tehnikom hlađenja isparavnjem (od engleskog *evaporative cooling*) do temperatura na kojima se postiže BEC [10, 11].

Zamke općenito mogu biti magnetske, optičke i kombinacija tzv. magneto-optičke zamke (MOT). Magnetske zamke baziraju se na međudjelovanju ukupnog spina atoma i vanjskog nehomogenog magnetskog polja. Ako je ukupni elektronski angularni moment J, a nuklearni spin I, onda je ukupni spin atoma $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$. Na primjer za slučaj ^{87}Rb imamo $J = 1/2$, $I = 3/2$ i $F = 1$ ili $F = 2$. Ako uzmemo da je magnetsko polje $\vec{B}$ usmjereno duž z-osi, onda ovisno o polarizaciji m_F (svojstvena vrijednost od F_z) atomi žele doći u područje manjeg ili većeg intenziteta magnetskog polja da bi došli u stanje niže potencijalne energije. Pošto statičko magnetsko polje ne može imati maksimum u vakuumu, zbog $\nabla^2\vec{B}^2 > 0$, magnetske zamke rade sa tzv. stanjima koja traže niske intenzitete polja (low field seeking states). Prednost magnetskih zamki je što nema zagrijavanja apsorpcijom i emisijom fotona. BEC se postiže u magnetskim zamkama tako što se snižavanjem rubova zamke dopušta atomima s višom energijom da pobjegnu iz zamke, tzv. hlađenje isparavanjem [10]. Različite konfiguracije magnetskih zamki su opisane u referencama

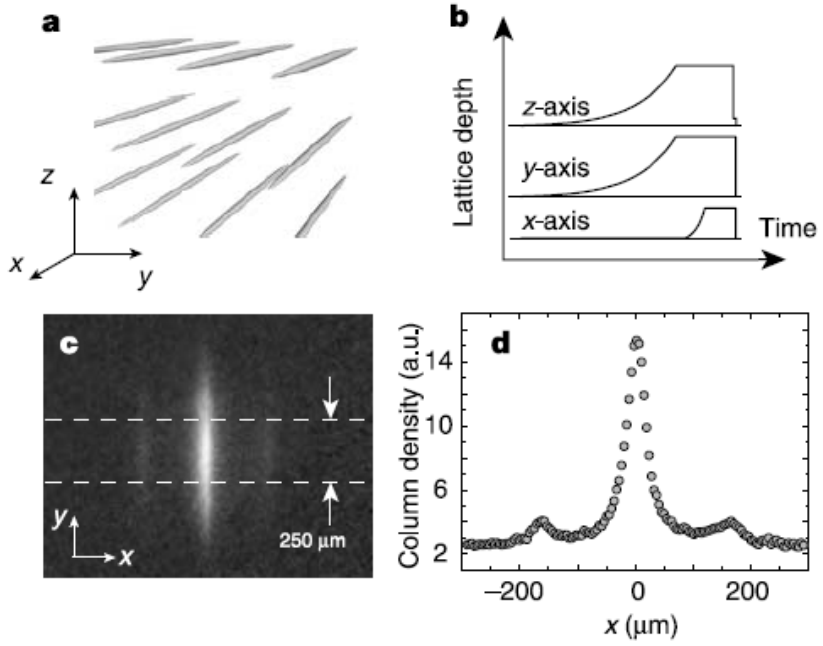
[10, 11].

U eksperimentima [3, 7, 8, 9] prvo se u magnetskim zamkama ostvari BEC, zatim se BEC ispresjeca laserskim zrakama tj. uključe se optičke zamke da bi se atomi zatočili u različite geometrije ($1D$, $2D$ ili $3D$). Optičke zamke dobijemo tako što dvije laserske zrake usmjerimo u suprotnim smjerovima, npr. duž x-osi, tako da se formira stojni val. Električno polje $\vec{E}(x,t)$ tog stojnog vala inducira dipolne momente na neutralnim atomima ovisno o njihovoj polarizabilnosti $\alpha(\omega)$, gdje je ω frekvencija lasera. Dipolni momenti interagiraju sa električnim poljem koje ih je induciralo i atomi efektivno osjećaju potencijal

$$V(x) = -\alpha(\omega)\overline{\vec{E}^2(x,t)}/2,$$

gdje je uzet vremenski prosjek kvadrata električnog polja, jer je njegova vremenska varijacija mnogo brža od frekvencije atomskog gibanja. Zbog efektivnog potencijala atomi osjećaju silu, koja će ovisiti o prostornoj distribuciji intenziteta električnog polja i frekvenciji lasera. Ako polarizabilnosti $\alpha(\omega)$ dominira samo jedna rezonantna frekvencija ω_R (što bi bio slučaj kod atoma sa samo dvije energijske razine), odbojna ili privlačna narav sile će ovisiti o pomaku frekvencije lasera u odnosu na tu rezonantnu frekvenciju, $\delta = \omega - \omega_R$. Za $\delta > 0$ (pomak prema plavom) atomi će osjećati silu koja ih tjera u područje manjeg intenziteta (odbojna sila). Za pomak prema crvenom $\delta < 0$, atomi osjećaju silu koja ih tjera u područje većeg intenziteta (privlačna sila). Optičke zamke nude mnoge prednosti pred magnetskim zamkama, npr. kod njih zatočenje nije ograničeno na specifična spinska stanja atoma i mogu se koristiti za zatočenje spinskih mješavina, moguće je i dodatno mjenjati vanjsko magnetsko polje u kojem se nalazi optička zamka te tako mjenjati interakcije među atomima koristeći tzv. Feshbachove rezonance [15]. Dodavanjem parova laserskih snopova duž y i z osi formira se 3D optički potencijal tzv. optička rešetka. Koristeći optičke rešetke mogu se formirati jednodimenzionalne (1D), dvodimenzionalne (2D) i trodimenzionalne (3D) konfiguracije, tako što mjenjamo fazu i intenzitet pojedinih laserskih zraka.

Centralna tema ove disertacije su 1D bozonski plinovi. Naravno ne možemo atome staviti u 1D kao što su npr. biseri nanizani na niti ogrilice ili kuglice abacusa na žici, zato ćemo opisati u kojem smislu su atomi efektivno ograničeni na 1D gibanje u eksperimentalnim realizacijama [3, 7, 8, 9]. Optičke zamke



Slika 1.1: a) Superponiranjem stojnih valova duž y i z osi nastaje 2D optička rešetka koja se sastoji od 1D tuba u kojima su zatočeni atomi. b) Nakon formiranja tuba uključuje se optička rešetka duž x-osi čime se poveća efektivna mase i atomi ulaze u jako međudjelujući režim. c) Slika atomskog oblaka 16ms nakon što se isključe svi potencijali zatočenja, tzv. *time-off-flight* slika. Iz područja između bijelih crta na slici c) je izračunata prosječna raspodjela impulsa duž x-osi, prikazana na slici d). Preuzeto iz eksperimenta [8].

mogu formirati veliki broj cijevi, tuba, u koje su smješteni atomi. Slika 1.1 pokazuje rezultate eksperimenta Parades et al [8], kao primjer efektivnih 1D bozonskih sustava koje istražujemo. Uzimamo da su tube položene duž x-osi. U pojedinoj tubi atomi osjećaju efektivni 3D potencijal

$$U(\vec{r}) = V(x) + V_\perp(y, z), \tag{1.1}$$

gdje je $V_\perp(y, z) = m\omega_\perp^2(y^2 + z^2)/2$ potencijal zatočenja atoma u okomitom smjeru, a $V(x) = m\omega_x^2 x^2/2$ je potencijal zatočenja duž tube [7, 8, 9, 5]. Što je bolje ispunjeno $\omega_\perp \gg \omega_x$ atomi su više ograničeni na gibanje duž x-osi, tj sustav je više 1D. Ukoliko je temperatura takva da je $k_B T \ll \hbar\omega_\perp$, gdje je k_B Boltzmanova konstanta, i ukoliko je $E_{int} \ll \hbar\omega_\perp$, gdje je E_{int} energija interakcije po čestici, tad su svi atomi u osnovnom stanju $\phi_0(y, z)$ okomitog

potencijala $V_\perp(y,z)$ i uzimamo da je valna funkcija N međudjelujućih bozona

$$\Phi_B(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N,t) = \Psi_B(x_1,\ldots,x_N,t)\prod_{i=1}^{N}\phi_0(y_i,z_i,t). \tag{1.2}$$

Višečestična valna funkcija (1.2) opisuje atome koji se mogu gibati duž x-osi, dok im je u okomitom smjeru gibanje ograničeno na oscilacije nulte točke. Valna funkcija

$$\Psi_B(x_1,\ldots,x_N,t) \tag{1.3}$$

će ovisiti o međudjelovanju atoma. Centralna tema ove disertacije je odrediti korelacije i opservable sadržane u valnoj funkciji (1.3) u režimu jakog odbojnog kontaktnog međudjelovanja tzv. Tonks-Girardeau (TG) plinu. Manji dio disertacije će biti posvećen usporedbi TG režima i slabo međudjelujućeg režima. U idućim potpoglavljima ćemo ukratko opisati kako modeliramo međudjelovanje neutralnih atoma u ultrahladnim plinovima i pobliže se upoznati sa teorijskim modelima koji opisuju 1D bozonske plinove.

1.2 Međudjelovanje neutralnih atoma u ultrahladnim plinovima

Međudjelovanje dva neutralna atoma, međusobno udaljena za $r = |\vec{r_1} - \vec{r_2}|$, možemo modelirati sferno simetričnim potencijalom

$$V_{int}(r) = \begin{cases} -C_6/r^6, & \text{ako } r > r_c \\ \infty, & \text{ako } r \leq r_c, \end{cases} \tag{1.4}$$

gdje smo uzeli da su privlačne van der Waalsove sile odsječene uvjetom tvrde jezgre na nekoj udaljnosti r_c reda atomskih dimenzija. Uvjet tvrdih jezgri opisuje odbojno međudjelovanje na malim udaljenostima, gdje dolazi do preklapanja elektronskih oblaka. Takav potencijal nije realističan opis kratkodosežnog međudjelovanja atoma, ali može dati uvida u glavne karakteristike raspršenja dva neutralna atoma na niskim energijama [10]. Asimptotsko ponašanje međudjelovanja je određeno van der Waalsovim koeficijentom C_6. Taj

koeficijent definira karakterističnu dužinu tzv. van der Waalsovu dužinu

$$a_c = (2M_r C_6/\hbar^2)^{1/4} \tag{1.5}$$

za koju je kinetička energija relativnog gibanja dvaju atoma jednaka energiji njihovog međudjelovanja. M_r označava reduciranu masu dvaju atoma. Razmotrimo raspršenja stanja sa momentom impulsa $l = 0, 1, 2, ...$ Za identične bozone moguće su samo parne, a za identične fermione samo neparne vrijednosti l-a. Efektivni potencijal za stanja sa momentom impulsa $l \neq 0$ sadrži centrifugalnu barijeru čija je visina reda $E_c \simeq \hbar^2 l^2/M_r a_c^2$. Kad tu energiju preračunamo u temperaturu, za alkalijske metale i male vrijednosti l-a, dobijemo temperature reda mK. Na nižim temperaturama kinetička energija relativnog gibanja $\hbar^2 k^2/2M_r$ niža je od centrifugalne barijere. Tako da za ultrahladne plinove ($T \ll$mK) dominiraju sudari sa najnižim momentom impulsa, raspršenje s-vala ($l = 0$) za bozone i raspršenje p-vala ($l = 1$) za fermione. Razmotrimo raspršenje identičnih bozona. U ultrahladnim sudarima amplituda raspršenja s-vala

$$f(k) = -a_{3D}/(1 + ika_{3D}) \tag{1.6}$$

potpuno je određena 3D dužinom raspršenja a_{3D} [10]. Za potencijal koji razmatramo (1.4), dužinu raspršenja je moguće analitički odrediti [10]

$$a_{3D} = 0.478 a_c[1 - \tan(\Phi - 3\pi/8)], \tag{1.7}$$

gdje je faza $\Phi = a_c^2/2r_c^2$ [10]. Vidimo da je iznos dužine raspršenja reda van der Waalsove dužine a_c, ali ovisi također i o skali kratkodosežnog odbojnog međudjelovanja r_c preko faze Φ. Tako da u amplitudu raspršenja s-vala (1.6) ulazi kratko-dosežno i dugo-dosežno međudjelovanje preko dužine raspršenja a_{3D}.

Izraz za amplitudu raspršenja (1.6) isti je kao i za egzaktnu amplitudu raspršenja pseudopotencijala

$$V_p(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_{3D}}{2M_r}\delta(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}(r\psi(\vec{r})), \tag{1.8}$$

gdje je ψ valna funkcija relativnog gibanja dvaju atoma. Tako da na temper-

aturama manjima od energije centrifugalne barijere ($k_BT < E_c$), međudjelovanje dva atoma možemo opisati pseudopotencijalom (1.8) [4], gdje se dužina raspršenja a_{3D} obično uzima kao eksperiemntalno određeni parametar.

Uzmimo sada da atomi međudjeluju pseudopotencijalom (1.8) i da se nalaze u vanjskom potencijalu zatočenja (1.1) oblika cigare položene duž x-osi. Ukoliko vrijedi $k_BT \ll \hbar\omega_\perp$ i $E_{int} \ll \hbar\omega_\perp$ (gdje je E_{int} energija interakcije po čestici) atomi su u osnovnom stanju transverzalnog potencijala i sustav postaje efektivno jednodimenzionalan [vidi (1.2)]. U tom slučaju može se pokazati [5, 6] da pseudopotencijal (1.8) vodi na efektivni potencijal međudjelovanja

$$V_{int}(x_i, x_j) = g_{1D}\delta(x_i - x_j), \tag{1.9}$$

gdje je g_{1D} efektivna jednodimenzionalna jakost međudjelovanja, definirana ispod.

1.3 Teorijski modeli

Razmatrajmo plin od N identičnih bozona u 1D prostoru. Bozone smatramo česticama koje kontaktno međudjeluju. Hamiltonijan sustava je

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial X_i^2} + U(X_i)\right] + g_{1D}\sum_{1\le i<j\le N}\delta(X_i - X_j). \tag{1.10}$$

Takav sustav moguće je realizirati sa ultrahladnim bozonskim atomima u efektivno 1D atomskim valovodima [3, 7, 8, 9], gdje je $U(X)$ aksijalni potencijal, a $g_{1D} = 2\hbar^2 a_{3D}[ma_\perp^2(1 - Ca_{3D}/\sqrt{2}a_\perp)]^{-1}$ je efektivna 1D jakost međudjelovanja, a_{3D} je trodimenzionalna duljina raspršenja s-vala, $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ je širina transverzalne zamke, i $C = 1.4603$ [5]. Mehanizmom Feshbachovih rezonanci moguće je mjenjati iznos i predznak a_{3D} tako što mjenjamo vanjsko magnetsko polje [15], dakle možemo odabrati da li će međudjelovanje biti privlačno ili odbojno, jako ili slabo. Također, ako je za neki $\omega_\perp$ sustav u slabo međudjelujućem režimu srednjeg polja, onda povećanjem $\omega_\perp$ možemo sustav dovesti u jako međudjelujući Tonks-Girardeau režim ($g_{1D} \to \infty$). Različiti režimi u kojima mogu biti 1D bozonski plinovi obično su karakterizirani bezdimenzionalnim parametrom $\gamma = mg_{1D}/\hbar^2 n_{1D}$, gdje je n_{1D} atomska gustoća (gustoća

duž X-osi). Za $\gamma \ll 1$ plin je u režimu srednjeg polja, a za $\gamma \gg 1$ u jako međudjelujućem režimu (u ovoj disertaciji razmatramo samo odbojne interakcije $g_{1D} > 0$ i $\gamma > 0$) [2, 7, 8, 9, 5]. U ostatku disertacije ćemo koristiti Hamiltonijan (4.1) u bezdimenzionalnoj formi

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_i) \right] + \tilde{g}_{1D} \sum_{i<j}^{N} \delta(x_i - x_j), \tag{1.11}$$

gdje je $x = X/X_0$ (X_0 je prostorna skala koju biramo, uzet ćemo $X_0 = 1\mu m$). Energija je u jedinicama $E_0 = \hbar^2/2mX_0^2$, a vrijeme je u jedinicama $T_0 = \hbar/E_0$. Najveći dio disertacije odnosi se na atome ^{87}Rb za koje dobijemo $E_0 = 3.82 \cdot 10^{-32}$J i $T_0 = 2.8$ms. Bezdimenzionalni aksijalni potencijal je $V(x) = U(X)/E_0$ i bezdimenzionalni parametar jakosti 1D međudjelovanja je $\tilde{g}_{1D} = g_{1D}/X_0E_0$.

1.3.1 Tonks-Girardeau plin i Fermi-Bose mapiranje

Sada razmatramo Hamiltonijan (1.11) u limesu jakog odbojnog kontaktnog međudjelovanja tj. $\tilde{g}_{1D} \to \infty$. 1D bozonski plin u tom režimu naziva se Tonks-Giradeau (TG) plin. U tom slučaju član u Hamiltonijanu koji opisuje međudjelovanje ima za posljedicu da bilo koja dva bozona ne mogu biti na istom mjestu u isto vrijeme. Taj član možemo zamjeniti uvjetom da višečestična bozonska valna funkcija (Ψ_B) iščezava kad god se dva bozona dotaknu

$$\Psi_B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N, t) = 0 \text{ ako } x_i = x_j, 1 \leq i < j \leq N. \tag{1.12}$$

Uz uvjet (1.12) valna funkcija mora zadovoljavati i Schrödingerovu jednadžbu

$$i\frac{\partial \Psi_B}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V(x_j) \right] \Psi_B. \tag{1.13}$$

Girardeau [1] je uočio da valna funkcija N ne-međudjelujućih spinpolariziranih fermiona (Ψ_F) u istom vanjskom potencijalu $V(x)$, zadovoljava uvjet (1.12) i Schrödingerovu jednadžbu (1.13) tj. vrijedi

$$\Psi_F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N, t) = 0 \text{ ako } x_i = x_j, 1 \leq i < j \leq N, \tag{1.14}$$

zbog Paulijevog principa tj. antisimetrije na zamjenu koordinata x_i i x_j, i vrijedi

$$i\frac{\partial \Psi_F}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V(x_j)\right]\Psi_F. \tag{1.15}$$

Fermionska valna funkcija Ψ_F ima tražena svojstva (1.12) i (1.13) ali pogrešnu simetriju. Giradeau je definirao jediničnu antisimetričnu funkciju

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \Pi_{1\leq i<j\leq N}\mathrm{sgn}(x_i - x_j), \tag{1.16}$$

gdje je $\mathrm{sgn}(x)$ signum funkcija, $+1(-1)$ za $x > 0$ ($x < 0$). Vidimo da valna funkcija

$$\Psi_B(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) = A(x_1, x_2, \ldots, x_N)\Psi_F(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) \tag{1.17}$$

dobro opisuje N bozona u TG režimu: Zadovoljava uvjet (1.12), Schrödingerovu jednadžbu (1.13) i ima dobru simetriju na zamjenu koordinata čestica. Relacija (1.17) naziva se Fermi-Bose mapiranje [1, 16]. Može se pokazati da vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A(x_1, \ldots, x_N)\Psi_F(x_1, \ldots, x_N, t)\right] = A(x_1, \ldots, x_N)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\Psi_F(x_1, \ldots, x_N, t)\right],$$

jer derivacija funkcije A (po x_i) nije nula samo kad $x_i = x_j$, a tad je Ψ_F nula zbog antisimetrije tj. Paulijevog principa. Zbog toga, svojstvena jednadžba

$$\sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V(x_j)\right]\Psi_B = E\Psi_B, \tag{1.18}$$

gdje je Ψ_B dano Fermi-Bose mapiranjem (1.17), i svojstvena jednadžba

$$\sum_{j=1}^{N}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V(x_j)\right]\Psi_F = E\Psi_F, \tag{1.19}$$

imaju iste svojstvene vrijednosti tj. energetski spektri dva sustava se podudaraju. Također, zbog svojstva $[A(x_1, x_2, \ldots, x_N)]^2 = 1$, jednočestična gustoća dva sustava je ista, jer $\Psi_B\Psi_B^* = \Psi_F\Psi_F^*$. Dakle dva sustava se ne razlikuju u energijskom spektru ni u distribuciji atoma u realnom prostoru, ali, kao što ćemo vidjeti u idućem poglavlju, razlike u impulsnom prostoru su dramatične

i što je najvažnije mogu se mjeriti u eksperimentima. Važno je primjetiti da nam Fermi-Bose mapiranje daje egzaktna riješenja za proizvoljan vanjski potencijal $V(x)$, dok npr. u režimu između slabog i jakog međudjelovanja, kad je $\gamma \sim 1$, Lieb-Liniger model [2] daje egazaktna riješenja kad nema vanjskog potencijala tj. kad je on nula u području gdje su atomi (beskonačna linija, polubeskonačna linija, beskonačno duboka kutija [17]) uz iznimku potencijala konstantne sile [18].

Odgovarajuću fermionsku valnu funkciju Ψ_F možemo često konstruirati pomoću Slaterove determinante, tako da Fermi-Bose mapiranje postaje

$$\Psi_B(x_1, \ldots, x_N, t) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \mathrm{sgn}(x_i - x_j) \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{m,j=1}^{N} [\psi_m(x_j, t)], \tag{1.20}$$

gdje su $\psi_m(x,t)$ ortonormirane jednočestične valne funkcije koje zadovoljavaju jednočestičnu Schrödingerovu jednadžbu

$$i\frac{\partial \psi_m(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right] \psi_m(x,t), \ m = 1, \ldots, N. \tag{1.21}$$

Jednadžbe (2.12) i (2.14) koristimo u ostatku disertacije, pri izračunavanju korelacija i opservabli pomoću formalizma matrice gustoće. Reducirana jednočestična matrica gustoće važan je teorijski alat koji zaslužuje posebno poglavlje, tako da upoznavanje s formalizmom matrice gustoće ostavljamo za poglavlje 2, a sada ćemo se upoznati u kratkim crtama s modelom koji opisuje slabomeđudjelujuće 1D bozonske plinove.

1.3.2 Gross-Pitaevskii jednadžba

Ako smo u režimu slabog međudjelovanja, tj. u limesu $\tilde{g}_{1D} \ll 1$, valna funkcija sustava opisanog Hamiltonijanom (1.11) se ne bi trebala puno razlikovati od slučaja kad uopće nema međudjelovanja tj. od ne-međudjelujućeg bozonskog 1D plina. Ne-međudjelujući 1D bozonski plin je na temperaturi $T \approx 0K$ u stanju Bose-Einstein kondenzata (BEC). Svi atomi okupiraju isto jednočestično stanje. Možemo pretpostavit da i u slučaju slabog međudjelovanja svi atomi okupiraju isto stanje tj. da je višečestična bozonska valna

funkcija dana sa

$$\Psi_B(x_1, \ldots, x_N, t) \approx \prod_{i=1}^{N} \psi(x_i, t). \tag{1.22}$$

U tom slučaju, može se pokazati [19] da će energija sustava, određena Hamiltonijanom (1.11), biti minimalna i broj čestica očuvan ukoliko jednočestično stanje $\psi(x,t)$ zadovoljava jednadžbu

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t) + \tilde{g}_{1D}N|\psi(x,t)|^2\psi(x,t). \tag{1.23}$$

Jednadžba (1.23) se naziva Gross-Pitaevskii (GP) jednadžba, a $\psi(x,t)$ je valna funkcija kondenzata. Vidimo da je efekt međudjelovanja ugrađen u nelinearni član, koji igra ulogu potencijala srednjeg polja $\tilde{g}_{1D}N|\psi(x,t)|^2$ kojeg svaki atom osjeća zbog djelovanja ostalih atoma na njega. GP jednadžba se pokazala vrlo uspješnom u opisivanju ponašanja BEC-a [19].

Poglavlje 2

Reducirana jednočestična matrica gustoće, prirodne orbitale i raspodjela impulsa

Sustav od N čestica možemo opisati matricom gustoće

$$\rho^N(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N;\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_N,t) = \Psi^*(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,t)\Psi(\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_N,t), \qquad (2.1)$$

gdje je Ψ višečestična valna funkcija. Pri računanju opservabli (kao npr. ukupne energije sustava, jednočestične gustoće, raspodjele impulsa) pojavljuju se integrali matrice gustoće (2.1) preko dijela varijabli. Zato definiramo reduciranu matricu gustoće n-tog reda

$$\begin{aligned}\rho^n(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n;\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_n,t) &= \binom{N}{n}\int d^3x_{n+1}\ldots d^3x_N\,\Psi^*(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\vec{x}_{n+1},\ldots,\vec{x}_N,t)\\ &\quad\times\Psi(\vec{x}'_1,\ldots,\vec{x}'_n,\vec{x}_{n+1},\ldots,\vec{x}_N,t). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

U ovom poglavlju želimo objasniti važnost i ulogu reducirane jednočestične matrice gustoće (slučaj $n = 1$ u jednadžbi (2.2)) u proučavanju ultrahladnih atomskih plinova.

2.1 Definicija reducirane jednočestične matrice gustoće i pripadne opservable

Dirac je prvi uveo koncept reducirane jednočestične matrice gustoće [23], koja je za 1D bozonski plin definirana sa

$$\begin{aligned}\rho_B(x,y,t) &= N\int dx_2\ldots dx_N\,\Psi_B^*(x,x_2,\ldots,x_N,t)\\ &\quad\times\Psi_B(y,x_2,\ldots,x_N,t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Matrica gustoće (2.1) i reducirane matrice gustoće višeg reda ($n>1$) (2.2) ne pojavljuju se dalje u tekstu pa možemo, zbog jednostavnosti, reduciranu jednočestičnu matricu gustoće (2.3) kratko zvati *matrica gustoće*. Normalizacija matrice gustoće je $\int\rho_B(x,x,t)dx=N$. Ako poznamo valnu funkciju bozona Ψ_B sve jednočestične opservable možemo izvesti iz jednadžbe (2.3). $\rho_B(x,y,t)$ je matrica u indeksima x i y. Isto kao i sa standardnim matricama, dio $\rho_B(x,x,t)$ nazivamo dijagonala matrice gustoće, a dio $\rho_B(x,-x,t)$ anti-dijagonala. Matrica gustoće se definira jednadžbom (2.3) neovisno o međudjelovanju. Također, ista definicija (uz zamjenu Ψ_B sa Ψ_F) definira matricu gustoće fermionskog plina. Opservable kojima se bavimo u ovoj disertaciji su jednočestična gustoća (Single Particle Density SPD) i raspodjela impulsa (Momentum Distribution MD). Obje se mogu mjeriti u eksperimentima sa 1D plinovima [3, 7, 8, 9].

Jednočestična gustoća $\rho_B(x,t)$ definirana je sa

$$\rho_B(x,t)=N\int|\Psi_B(x,x_2,\ldots,x_N,t)|^2\,dx_2\ldots dx_N.\tag{2.4}$$

Vidimo da nam dijagonalni dio matrice gustoće daje upravo jednočestičnu gustoću $\rho_B(x,t)=\rho_B(x,x,t)$. Veličina $\rho_B(x,t)dx/N$ nam govori kolika je vjerojatnost da nađemo česticu u intervalu dx, smještenom oko x, u trenutku t. Jednočestična gustoća nam daje sliku prostorne raspodjele atoma.

Analogno gustoći u realnom prostoru (2.4) možemo definirati i gustoću u impulsnom prostoru $n_B(k)$ tj. raspodjelu impulsa

$$n_B(k,t)=N\int\left|\tilde{\Psi}_B(k,k_2,\ldots,k_N,t)\right|^2 dk_2\ldots dk_N,\tag{2.5}$$

gdje je $\tilde{\Psi}_B$ višečestična valna funkcija u impulsnom prostoru. Veličina $n_B(k,t)dk/N$ nam govori kolika je vjerojatnost da nađemo česticu sa impulsom u intervalu dk, smještenom oko k, u trenutku t.

Fourierov transformat višečestične valne funkcije u koordinatnom prostoru daje višečestičnu valnu funkciju u impulsnom prostoru

$$\tilde{\Psi}_B(k_1,\ldots,k_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \int \ldots \int \prod_{i=1}^{N} dx_i \exp(-ik_i x_i) \Psi_B(x_1,\ldots,x_N,t). \tag{2.6}$$

Ako uvrstimo (2.6) u (2.5) i izvršimo integracije po varijablama $\{x_2,\ldots,x_N\}$ i $\{k_2,\ldots,k_N\}$ (koje se svode na integriranje po delta funkcijama) dobijemo

$$n_B(k) = \frac{1}{2\pi} \int dxdy \exp\left[-ik(x-y)\right] \rho_B(x,y). \tag{2.7}$$

Relacija (2.7) nam govori da je raspodjela impulsa (MD) Fourierov transformat matrice gustoće.

Za razumjevanje višečestičnih sustava vrlo je koristan i koncept prirodnih orbitala (Natural Orbital NO), stoga ćemo se i s njima ukratko upoznati. Prirodne orbitale $\Phi_i(x)$ svojstvene su funkcije matrice gustoće,

$$\int dx\, \rho_B(x,y)\, \Phi_i(x) = \lambda_i\, \Phi_i(y), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{2.8}$$

gdje su λ_i svojstvene vrijednosti. Prirodne orbitale su ortonormirane $\int \Phi_i(x)^* \Phi_j(x) dx = \delta_{ij}$. U bazi prirodnih orbitala matrica gustoće je dijagonalna

$$\rho_B(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi_i^*(x) \Phi_i(y). \tag{2.9}$$

Prirodne orbitale možemo shvatiti kao efektivna jednočestična stanja, a λ_i kao okupiranost pojedine prirodne orbitale, vrijedi $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = N$. Fourierovim transformatom razvoja (2.9) možemo dobiti raspodjelu impulsa

$$n_B(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tilde{\Phi}_i^*(k) \tilde{\Phi}_i(k), \tag{2.10}$$

gdje su $\tilde{\Phi}_i(k)$ Fourierovi transformati prirodnih orbitala $\Phi_i(x)$. Jednadžba

(2.10) govori isto što i jednadžba (2.7) ali je pogodnija za numeričko računanje.

Prirodne orbitale se mogu koristiti za karakterizaciju hladnih atomskih plinova u svim režimima interakcija. Razvoj (2.9) može se iskoristiti za opis Bose-Einstein kondenzata (BEC-a). Sustav je u stanju BEC-a ukoliko je jedna prirodna orbitala makroskopski okupirana $\lambda_0 \approx N$. Tako da okupiranost prirodnih orbitala može biti kriterij po kojem vidimo u kojoj mjeri je međudjelujući sustav u stanju BEC-a [24].

Ukoliko bi atomi bili klasične čestice matrica gustoće bi bila dijagonalna $\rho_B(x, y, t) = N\delta(x-y)$, jer je klasična čestica lokalizirana. Postojanje nedijagonalnih elemenata matrice gustoće posljedica je valne prirode materije. Kvantna čestica je delokalizirana. Ukoliko je $\rho_B(x, y, t) \neq 0$ za $x \neq y$, kažemo da su točke x i y u korelaciji, ali te dvije koordinate pripadaju istoj čestici u konfiguracijskom prostoru, zato govorimo o samokorelaciji. Samokorelacija je posljedica valne prirode materije, ne može se direktno mjeriti, ali se očituje npr. u fenomenima interferencije BEC-a, ili npr. u raspodjeli impulsa.

Dakle matrica gustoće (2.3) karakterizira prostornu koherenciju valova materije ultrahladnog bozonskog plina. To su prvi uvidjeli Penrose i Osnager u referenci [24], gdje su fenomen BEC-a povezali sa dugodosežnim samokorelacijama koje se pojavljuju u matrici gustoće, odnosno sustav je u stanju BEC-a ukoliko je matrica gustoće konačna kad $|x - y| \to \infty$,

$$\lim_{|x-y|\to\infty} \rho_B(x, y) \neq 0. \tag{2.11}$$

Kao što ćemo vidjeti Tonks-Girardeau plin nije u stanju BEC-a budući da mu je okupiranost $\lambda_1 \sim \sqrt{N}$ [33], pa ne postoji makroskopski okupirana prirodna orbitala, ali zbog valne prirode materije i jakog međudjelovanja pojavit će se zamiljive kvantne korelacije u matrici gustoće koje će se manifestirat u raspodjeli impulsa.

2.2 Matrica gustoće Tonks-Girardeau plina

Ukratko ćemo ponoviti Fermi-Bose (FB) mapiranje, zbog preglednosti. Valna funkcija TG plina Ψ_B egzaktno je određena FB mapiranjem

$$\Psi_B(x_1,\ldots,x_N,t) = \prod_{1\le i<j\le N} \mathrm{sgn}(x_i - x_j)\Psi_F(x_1,\ldots,x_N,t), \tag{2.12}$$

gdje je Ψ_F Slaterova determinanta

$$\Psi_F(x_1,\ldots,x_N,t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{m,j=1}^{N}[\psi_m(x_i,t)]. \tag{2.13}$$

a $\psi_m(x,t)$ su ortonormirane jednočestične valne funkcije koje zadovoljavaju jednočestičnu Schrödingerovu jednadžbu

$$i\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi_m(x,t),\ m = 1,\ldots,N. \tag{2.14}$$

U tom slučaju matrica gustoće (2.3) postaje

$$\begin{aligned}\rho_B(x,y,t) &= N\int dx_2\ldots dx_N \prod_{i=2}^{N}\mathrm{sgn}(x-x_i)\Psi_F^*(x,x_2,\ldots,x_N,t)\\ &\quad\times\prod_{i=2}^{N}\mathrm{sgn}(y-x_i)\Psi_F(y,x_2,\ldots,x_N,t).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Vidimo da je dijagonalni dio matrice gustoće isti za TG bozone i ne-međudjelujuće spinpolarizirane fermione, jer se u tom slučaju pojave kvadrati signum funkcija. Jednočestične gustoće ta dva sustava se ne razlikuju $\rho_B(x,x,t) = \rho_F(x,x,t)$, gdje je

$$\rho_F(x,x,t) = \sum_{i=1}^{N}|\psi_n(x,t)|^2. \tag{2.16}$$

Zato se TG režim često naziva i fermionizacija bozona. Jako odbojno međudjelovanje imitira Paulijev princip u x prostoru, ali u impulsnom prostoru više bozona može biti u istom impulsnom stanju, tako da će se raspodjele impulsa ta dva sustava znatno razlikovati. Da bi odredili raspodjelu impulsa (2.7) treba prvo odrediti matricu gustoće (2.15).

Određivanje matrice gustoće TG plina je netrivijalno jer uključuje $N-1$

dimenzionalnu integraciju preko varijabli koje su međuovisne zbog signum funkcija. Ipak, Pezer i Buljan su pokazali [20] da je moguće matricu gustoće TG plina zapisati u algoritamskoj formi pogodnoj za numeričko računanje,

$$\rho_B(x,y,t) = \sum_{i,j=1}^{N} \psi_i^*(x,t) A_{ij}(x,y,t) \psi_j(y,t), \tag{2.17}$$

gdje $N \times N$ matrica $\mathbf{A}(x,y,t) = \{A_{ij}(x,y,t)\}$ ima oblik

$$\mathbf{A}(x,y,t) = (\mathbf{P}^{-1})^T \det \mathbf{P}, \tag{2.18}$$

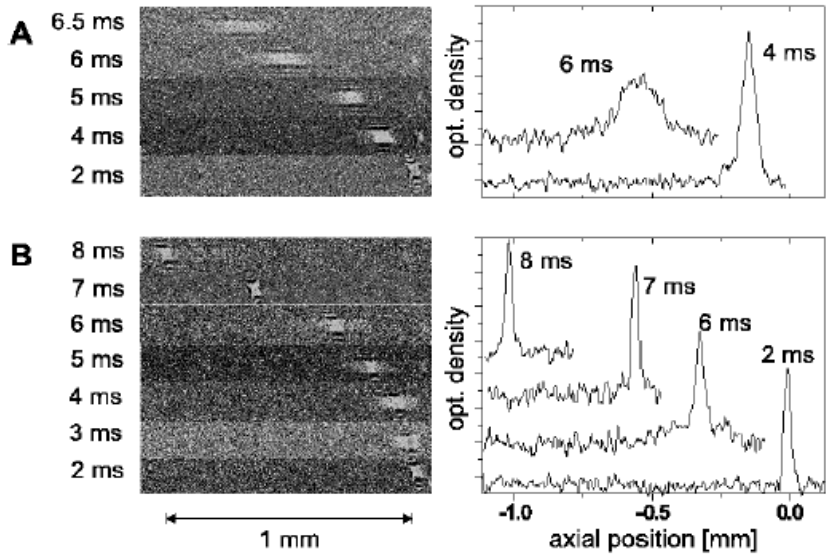
a elementi matrice $\mathbf{P}$ su $P_{ij}(x,y,t) = \delta_{ij} - 2\int_x^y dx' \psi_i^*(x',t)\psi_j(x',t)$ ($x < y$ bez gubitka općenitosti) [20]. Relacije (2.17) i (2.18) nam omogućuju efikasno i brzo numeričko računanje matrice gustoće TG plina za eksperimentalno relevantne brojeve čestica. Kad odredimo matricu gustoće možemo numerički odrediti prirodne orbitale (2.8) i raspodjelu impulsa (2.10).

Poglavlje 3

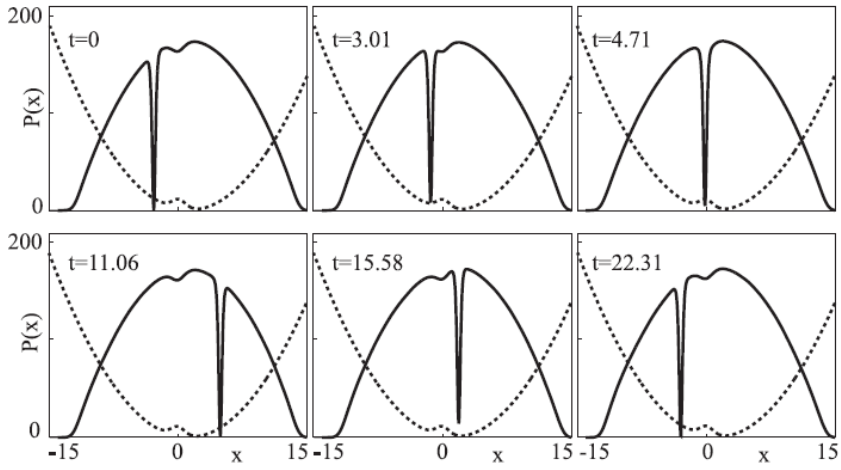
Jednočestična matrica gustoće i raspodjela impulsa "tamnih solitonskih" stanja u Tonks-Girardeau plinu

Solitoni su lokalizirani valovi koji putuju bez atenuacije i promjene oblika, jer se disperzija kompenzira nelinearnim efektima. U kontekstu međudjelujućih bozonskih plinova proučavani su u slabo-međudjelujućem režimu [25, 26, 27, 28, 29] gdje je primjenjiva teorija srednjeg polja koja koristi nelinearnu Schrödingerovu jednadžbu tzv. Gross-Pitaevskii (GP) jednadžbu (1.23). Nelinearna Schrödingerova jednadžba dopušta tzv. svijetle i tamne solitone kao rješenja, ovisno o tome da li je međudjelovanje privlačno ili odbojno. Svijetli soliton je naziv za maksimum u gustoći atoma koji putuje bez promjene oblika. Tamni soliton je naziv za minimum u gustoći atoma koji putuje bez promjene oblika. Na slici 3.1 prikazan je jedan primjer eksperimentalno realiziranog svijetlog solitona [25], u 1D Bose-Einstein kondenzatu u kojem bozoni privlačno međudjeluju. Na slici 3.2 prikazan je jedan primjer tamnog solitona u efektivno 1D Bose-Einstein kondenzatu u kojem bozoni odbojno međudjeluju; slika je preuzeta iz teorijskog rada [28], za eksperimentalne realizacije pogledati npr. [26].

Kad govorimo o "tamnim solitonima" u jako-međudjelujućem Tonks-Girardeau režimu moramo naglasiti da to nisu solitoni kao svijetli i tamni solitoni na



Slika 3.1: a) Ne-međudjelujući 1D Bose-Einstein kondenzat je "gurnut" u lijevo, vidimo rasipanje vala materije zbog disperzije. b) 1D Bose-Einstein kondenzat sa privlačnim međudjelovanjem je gurnut u lijevo. Vidimo da se formirao svijetli soliton: Val materije putuje bez promjene oblika. Slika je preuzeta iz eksperimentalnog rada [25]



Slika 3.2: Tamni soliton u 1D Bose-Einstein kondenzatu sa odbojnim međudjelovanjem. Vidimo da minimum u gustoći putuje bez promjene oblika. Slika je preuzeta iz teorijskog rada [28].

slikama 3.1 i 3.2 koje daje nelinearna Schrödingerova jednadžba. Vremenska evolucija TG plina odvija se pomoću skupa linearnih jednočestičnih Schrödingerovi jednadžbi preko Fermi-Bose mapiranja (2.12). Zato u TG plinu možemo govoriti samo o stanjima sličnima solitonima. U referenci [30], Girardeau i Wright proučavaju koncept "tamnog solitona" u egzaktno rješivom TG modelu; nalaze posebno skrojena pobuđena višečestična svojstvena stanja TG plina na prstenu, koja imaju tamni čvor u jednočestičnoj gustoći, sličan tamnom čvoru kod nelinearnih tamnih solitona. Takva stanja mi ovdje nazivamo tamna solitonska stanja Tonks-Girardeau plina.

Dinamiku tamnih solitonskih pobuđenja u Tonks-Girardeau plinu proučavali su Busch i Huyet [31] u harmoničkom potencijalu. U referenci [21] je predložen postupak paritetno-selektivnog filtriranja višečestične valne funkcije kao kandidat za eksperimentalnu realizaciju tamnih solitonskih stanja u Tonks-Girardeau plinu. Pokazano je da, nakon paritetno-selektivnog filtriranja, ostaje tamni čvor u jednočestičnoj gustoći tijekom daljnje vremenske evolucije [21]. Međutim, koliko nam je poznato, reducirana jednočestična matrica gustoće, raspodjela impulsa, prirodne orbitale i njihove okupiranosti nisu proučavane za tamne solitone u Tonks-Girardeau plinu. Te veličine su važne za bolje razumjevanje tamnih solitonskih stanja TG plina, a mogu biti važne za eksperimentalnu detekciju, što daje motivaciju za ovu studiju.

3.1 Tamni solitoni na prstenu

U ovom potpoglavlju analiziramo reduciranu jednočestičnu matricu gustoće (kao što smo već napomenuli, zbog jednostavnosti, dalje ćemo je kratko zvati *matrica gustoće*), raspodjelu impulsa, prirodne orbitale i njihove okupiranosti pobuđenih stanja Tonks-Girardeau (TG) plina na prstenu dužine L; drugim riječima, vanjski potencijal je nula, x prostor je $x \in [-L/2, L/2]$, i nametnuti su periodički rubni uvjeti. Višečestična stanja TG plina konstruirana su od svojstvenih jednočestičnih stanja sustava koristeći Fermi-Bose mapiranje (2.12). Jednočestična stanja sustava za prstenastu geometriju su ravni valovi $\sqrt{1/L}e^{ik_m x}$, sa jednočestičnom energijom k_m^2, gdje je $k_m = 2\pi m/L$, i m je cijeli broj. Očito, stanja $\sqrt{1/L}e^{ik_m x}$ i $\sqrt{1/L}e^{-ik_m x}$ su degenerirana. Ta degeneracija u jednočestičnim stanjima inducira, preko Fermi-Bose mapiranja (2.12),

degeneraciju višečestičnih TG stanja. Jedan određeni podskup degeneriranih jednočestičnih stanja je

$$\phi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}[a_m^- e^{-ik_m x} + a_m^+ e^{ik_m x}] \tag{3.1}$$

gdje je $|a_m^-|^2 + |a_m^+|^2 = 1$, i $m = 1, \ldots, N$. Od SP stanja (3.1) možemo izgraditi degenerirana višečestična stanja

$$\Psi_{DE} = A(x_1, \ldots, x_N) L^{-\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{j,m=1}^{N} [a_m^- e^{-ik_m x_j} + a_m^+ e^{ik_m x_j}]. \tag{3.2}$$

Intuicija sugerira da, iako su ova stanja degenerirana, opservable, kao npr. jednočestična gustoća u x prostoru i raspodjela impulsa, mogu biti jako različite ovisno internoj simetriji stanja, koja je određena izborom koeficijenata a_m^- i a_m^+.

U referenci [30], Girardeau i Wright su istakli da ako konstruiramo pobuđeno višečestično stanje TG plina na prstenu kao

$$\Psi_{DS} = A(x_1, \ldots, x_N) \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{j,m=1}^{N} [\sin k_m x_j], \tag{3.3}$$

tj. ako odaberemo koeficijente $a_m^- = i/\sqrt{2}$ i $a_m^+ = -i/\sqrt{2}$, jednočestična gustoća tih višečestičnih stanja

$$\rho_{DS}(x, x) = \frac{N+1}{L} - \frac{\sin(\frac{(N+1)2\pi x}{L}) \cos(\frac{N2\pi x}{L})}{L \sin(\frac{2\pi x}{L})}, \tag{3.4}$$

ima strukturu sličnu tamnim solitonima [30], tamni čvor u $x = 0$ tj. $\rho_{DS}(0, 0) = 0$. Zbog toga uvodimo notaciju Ψ_{DS} (Dark Soliton DS) za višečestičnu valnu funkciju (3.3) i analogno za sve opservable koje iz nje sljede. Struktura ovih pobuđenih stanja je umjetna, jer na fermionskoj strani FB mapiranja (2.12) ova stanja odgovaraju neinteragirajućim fermionima koji okupiraju samo neparna jednočestična stanja $\sin k_m x$. Takva stanja je moguće pobuditi paritetno selektivnim filtriranjem valne funkcije, kako je predloženo u referenci [21].

Iskoristimo sad algoritam prezentiran u poglavlju 2 u jednadžbama (2.15)-(2.18), izračunajmo matricu gustoće i povezane jednočestične opservable tamnih solitonskih stanja (3.3). Prvi korak je izračunati elemente matrice $\mathbf{P} =$

$\mathbf{1} - \mathbf{Q}$ [vidi jednadžbu (2.18)], gdje je

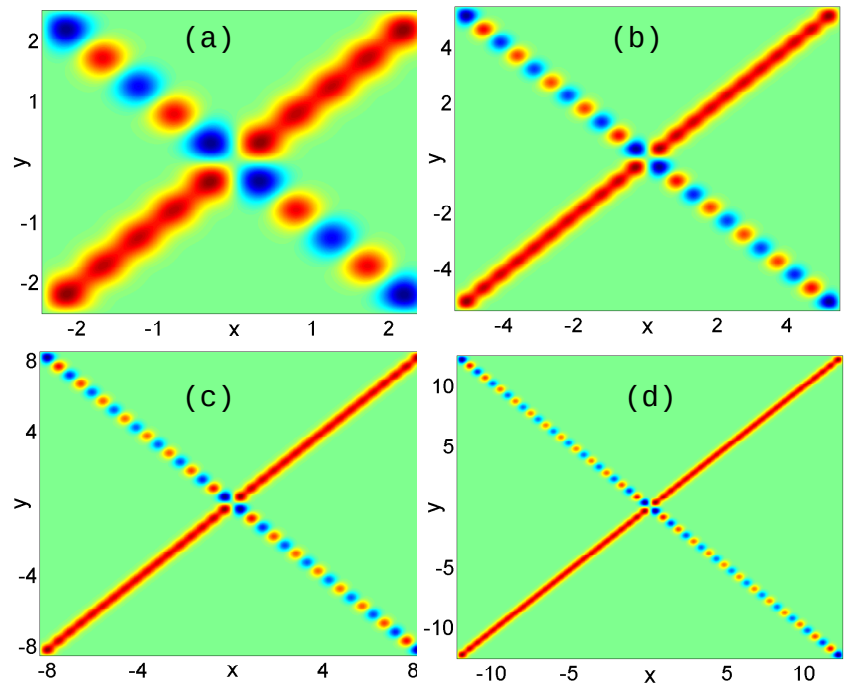
$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \frac{\sin(2(i+j)\pi x/L)}{(i+j)\pi} - \frac{\sin(2(i-j)\pi x/L)}{(i-j)\pi} \\ &\quad - \frac{\sin(2(i+j)\pi y/L)}{(i+j)\pi} + \frac{\sin(2(i-j)\pi y/L)}{(i-j)\pi}, \ i \neq j; \\ Q_{ii} &= -2\frac{x-y}{L} + \frac{\sin(\frac{4i\pi x}{L})}{2i\pi} - \frac{\sin(\frac{4i\pi y}{L})}{2i\pi}; \end{aligned} \tag{3.5}$$

za $i, j = 1, \ldots, N$. Što se tiče inverza matrice $\mathbf{P}$ i matrice gustoće, našli smo im analitičku formu do $N = 7$ koristeći *Mathematica* softver. Za veće N koristili smo numeriku. Lako je vidjeti da je matrica gustoće tamnih solitonskih stanja, za dvije vrijednosti L-a, recimo L_1 i L_2, povezan jednostavnim skaliranjem

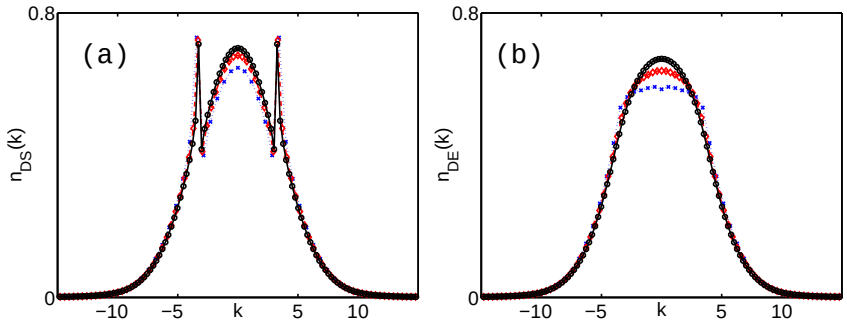
$$L_1 \rho_{DS,L_1}(xL_1, yL_1) = L_2 \rho_{DS,L_2}(xL_2, yL_2), \tag{3.6}$$

gdje je $x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Prema tome, dovoljno je raditi s jednom vrijednosti L-a. U ostatku ovog poglavlja, bez gubitka općenitosti, biramo $L = N$.

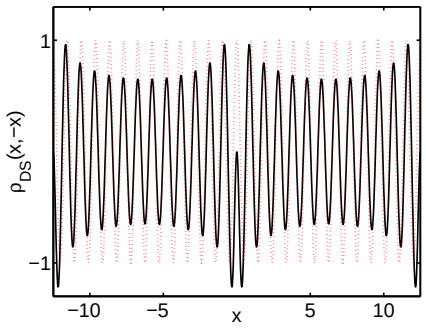
Slika 3.3 pokazuje konturne grafove matrice gustoće tamnih solitona $\rho_{DS}(x, y)$ za $N = 5, 11, 17$ i 25. Vidimo karakterističan uzorak za svaku vrijednost N: matrica gustoće je najizraženija duž dijagonale, sa oscilacijama koje sljede gustoću u x prostoru (3.4), međutim, vidimo i jake korelacije duž linije $x = -y$ koje su indikacija koherencije između zrcalno simetričnih točaka x i $-x$, smještenih simetrično s obzirom na položaj tamnog čvora tj. minimuma jednočestične gustoće (3.4) u $x = 0$. Izvan područja dijagonale i antidijagonale, matrica gustoće je približno nula (zelena boja). Slika 3.4(a) pokazuje raspodjelu impulsa $n_{DS}(k)$ tamnog solitonskog stanja za $N = 11, 17$, i 25. Sve su raspodjele normalizirane kao $\sum_{k_m} n_B(k_m) = N$. Raspodjele impulsa imaju karakterističan oblik sa glatkom grbom oko ishodišta ($k = 0$) i sa dva šiljka na $\pm k_{peak} = \pm \sum_{m=1}^{N} k_m/N = \pm\pi(N+1)/L$, šiljci ukazuju da postoji velika vjerojatnost nalaženja bozona u stanjima $\exp(\pm i\pi(N+1)/L)$. Zbog našeg izbora $N = L$, šiljci se za različite vrijednosti N-a nalaze na približno istoj vrijednosti impulsa $\pm\pi(1+1/N) \approx \pm\pi$. Oštri šiljci na $\pm k_{peak} = \pm\pi(N+1)/L$ su povezani sa korelacijama koje opažamo između zrcalno simetričnih točaka x i $-x$. To je ilustrirano na slici 3.5 koja prikazuje antidijagonalu matrice gustoće $\rho_{DS}(x, -x)$ i funkciju $\cos(2k_{peak}x)$ za $N = 25$. Vidimo da $\rho_{DS}(x, -x)$



Slika 3.3: Matrica gustoće tamnih solitonskih stanja, $\rho_{DS}(x, y)$, za $N = 5$ (a), 11 (b), 17 (c), i 25 (d).



Slika 3.4: Raspodjela impulsa tamnih solitonskih stanja DS (a), i degeneriranih stanja DE sa nasumično odabranim fazama (b); slike prikazuju $N = 11$ (x-simbol, plava točkasta linija), 17 (dijamanti, crvena crtkana linija), i 25 (krugovi, puna crna linija).



Slika 3.5: Anti-dijagonala $\rho_{DS}(x,-x)$ matrice gustoće tamnog solitonskog stanja (puna crna linija), pokazuje dugo-dosežne oscilatorne korelacije između zrcalno simetričnih točaka x i $-x$, i kosinusna funkcija $\cos(2k_{peak}x)$ (crvena točkasta linija).

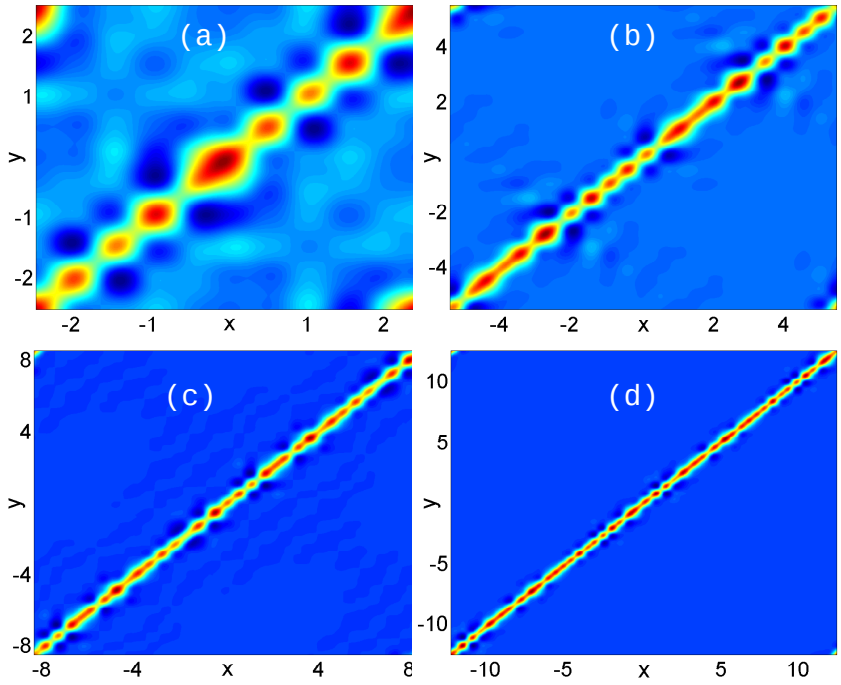
i $\cos(2k_{peak}x)$ imaju preko cijelog intervala x-a približno istu periodičnost. Raspodjela impulsa (2.7) je Fourierov transformat matrice gustoće. Zbog simetrije $\rho_{DS}(x,y) = \rho_{DS}(y,x)$, u Fourierovom transformatu $\exp(ik(x-y))$ postane $\cos k(x-y)$, što je $\cos 2kx$ duž antidijagonale $x = -y$. Tako da vidimo da je odnos $\cos(2k_{peak}x)$ i $\rho_{DS}(x,-x)$ odgovoran za šiljke u raspodjeli impulsa tamnih solitona. Primjetimo, korelacije $\rho_{DS}(x,-x)$ ne trnu kako udaljavamo x i $-x$, nego osciliraju.

Da bi stekli dublji uvid u porijeklo šiljaka u raspodjeli impulsa i s njima povezane koherencije između zrcalno simetričnih točaka x i $-x$, izračunat ćemo matricu gustoće i raspodjele impulsa stanja koja su degenerirana s tamnim solitonskim stanjima, dakle koja imaju istu energiju, ali nemaju restrikcije na koeficijente a_m^- i a_m^+. Ako uzmemo koeficijente $a_m^- = i\exp(i\theta_m)/\sqrt{2}$ i $a_m^+ = -i\exp(-i\theta_m)/\sqrt{2}$ dobijemo cijelu klasu stanja degeneriranih sa tamnim solitonima, označiti ćemo ta stanja sa DE (Degenerate Eigenstates)

$$\Psi_{DE} = A(x_1,\ldots,x_N)\left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{1}{\sqrt{N!}}\det_{j,m=1}^{N}[\sin(k_m x_j+\theta_m)], \tag{3.7}$$

gdje su θ_m, $m = 1,\ldots,N$ faze (za $\theta_m = 0$, dobijemo tamni soliton $\Psi_{DS} = \Psi_{DE}$).

Slika 3.6 pokazuje konturni prikaz matrice gustoće $\rho_{DE}(x,y)$, koji smo dobili iz jednadžbe (3.7) tako što smo nasumično odabrali N faza θ_m iz intervala $[-\pi,\pi]$. Vidimo da jednočestična gustoća ovog stanja, $\rho_{DE}(x,x) =$

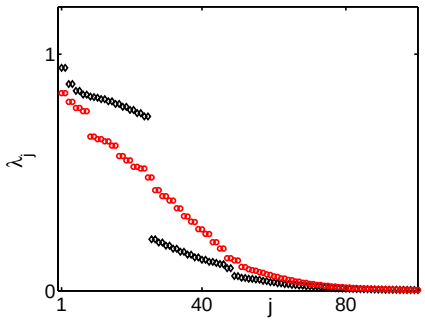


Slika 3.6: Matrica gustoće tipičnog degeneriranog stanja Ψ_{DE} [Eq. (3.7)] za $N = 7$ (a), 11 (b), 17 (c), i 25 (d).

$\sum_{m=1}^{N} |\sin(k_m x + \theta_m)|^2$, nije nula u $x = 0$, što sljedi iz činjenice da $\sin(k_m x + \theta_m)$ nije neparna funkcija. Nadalje, opažamo da nema karakteristične strukture u matrici gustoće duž $x = -y$ linije, odnosno, nema koherencije između točaka x i $-x$. S tim u vezi je i odsutnost šiljaka u raspodjeli impulsa ovih stanja. Slika 3.4(b) pokazuje tipične raspodjele impulsa $n_{DE}(k)$ za $N = 11, 17$ i 25 čestica.

Osim matrice gustoće i raspodjele impulsa, pobuđena višečestična stanja mogu biti karakterizirana i prirodnim orbitalama [vidi jednadžbe (2.8)-(2.10)] i njihovim okupiranostima. Slika 3.7 pokazuje okupiranosti prirodnih orbitala tamnog solitona Ψ_{DS} i degeneriranog stanja s nasumičnim fazama Ψ_{DE} za $N = 25$. Opažamo da je okupiranost svih NO manja od 1, vidimo i oštar pad okupiranosti nakon 25-te (N-te) prirodne orbitale za tamno solitonsko stanje. Takvo ponašanje smo opazili i za druge vrijednosti N. Okupiranosti koje odgovaraju prirodnim orbitalama tipičnog degeneriranog stanja Ψ_{DE} ne pokazuju oštar pad nakon N-te prirodne orbitale, već im iznos prilično glatko opada.

Slika 3.8 ilustrira prostornu strukturu i Fourierov transformat prirodnih

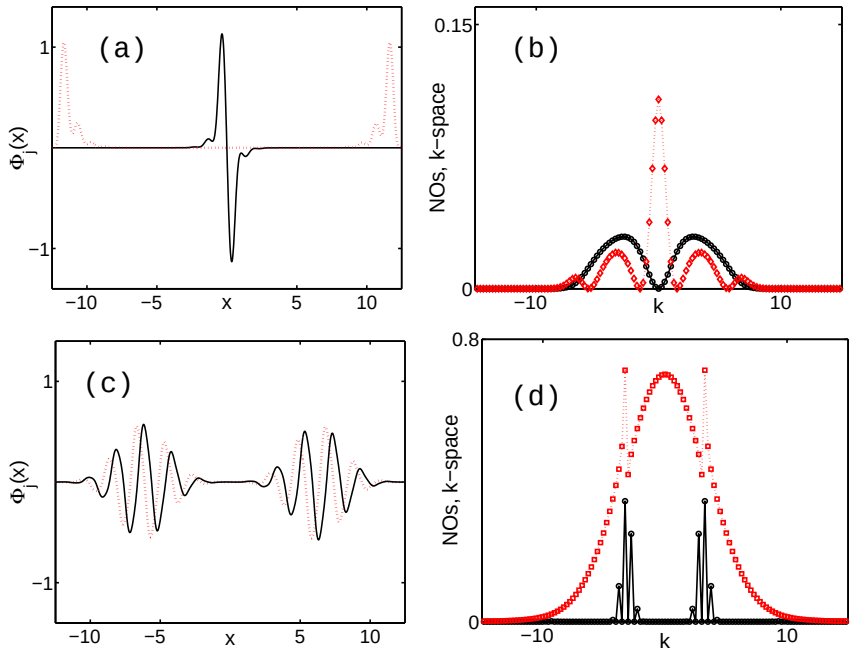


Slika 3.7: Okupiranosti prirodnih orbitala (NO) za stanje Ψ_{DS} (crni dijamanti) i za tipično degenerirano stanje Ψ_{DE} (crveni kvadrati), za $N = 25$ čestica. Za stanje Ψ_{DS} oštar pad u okupiransti prirodnih orbitala se desi na λ_N.

orbitala tamnih solitonskih stanja za $N = 25$. Prostorna struktura stanja je simetrična ili antisimetrična. To je povezano s simetrijom $\rho_{DS}(x, y) = \rho_{DS}(-x, -y)$, zbog te simetrije ako je neka prirodna orbitala nedegenerirana, onda je ili simetrična ili antisimetrična, a ako su dvije prirodne orbitale degenerirane one mogu biti superponirane da daju jednu simetričnu i jednu antisimetričnu prirodnu orbitalu. Naša numerika nam daje da su prirodne orbitale niskog reda (vodeće) lokalizirane u x-prostoru, ali široke u k-prostoru. Slika 3.8(a) opisuje strukturu u x-prostoru, a slika 3.8(b) opisuje strukturu u k-prostoru prve i treće prirodne orbitale. Vidimo da prirodne orbitale niskog reda ne doprinose oštrim šiljcima u raspodjeli impulsa tamnih solitona. Daljnja inspekcija prirodnih orbitala otkriva da su prirodne orbitale s rednim brojem $j = N - 1$ i $j = N$, dakle tik pred nagli pad u okupiranosti λ_j, odgovorne za šiljke u raspodjeli impulsa. Slike 3.8(c) i 3.8(d) pokazuju strukturu u x i k prostoru 24-te i 25-te ($N = 25$) prirodne orbitale. Ukupna raspodjela impulsa [crveni kvadrati, točkasta linija na slici 3.8(d)] dana je relacijom

$$n_{DS}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \tilde{\Phi}_i^*(k) \tilde{\Phi}_i(k),$$

doprinos ovoj sumi koji dolazi od prirodnih orbitala $\Phi_{24}(x)$ i $\Phi_{25}(x)$ (tj. doprinos od njihovih Fourierovih transformata) je prikazan na slici 3.8(d) sa crnom punom linijom. Zaključujemo da su te prirodne orbitale odgovorne za šiljke u raspodjeli impulsa tamnog solitonskog stanja sa $N = 25$ bozona. Za druge brojeve čestica smo također dobili da šiljke daju $N-1$ i N-ta prirodna orbitala.



Slika 3.8: Prirodne orbitale tamnog solitonskog stanja u x-prostoru (ljevi stupac) i njihov spektar u k-prostoru (desni stupac) za $N = 25$. (a) Prva $\Phi_1(x)$ (crna puna linija), i treća $\Phi_3(x)$ (crvena točkasta linija) prirodna orbitala. (b) Fourierov transformat prve $|\tilde{\Phi}_1(k)|^2$ (crni krugovi, puna linija), i treće $|\tilde{\Phi}_3(k)|^2$ (crveni dijamanti, točkasta linija) prirodne orbitale. (c) 24-ta (crvena puna linija) i 25-ta (crna puna linija) prirodna orbitala u x-prostoru. (d) Raspodjela impulsa tamnog solitona (crveni kvadrati, točkasta linija) i doprinos od 24-te i 25-te prirodne orbitale: $\sum_{i=24}^{25} \lambda_i |\tilde{\Phi}_i(k)|^2$ (crni krugovi, puna linija).

Ova opažanja ukazuju na to da tamno solitonsko stanje Ψ_{DS} ima komponentu koju možemo opisati kao stojni val koji nastaje superpozicijom ravnih valova sa impulsima $\pm k_{peak}$. U slici efektivnih jednočestičnih stanja ta komponenta daje populaciju prirodnih orbitala $\Phi_{N-1}(x)$ i $\Phi_N(x)$.

Na sličan način kao i pobuđeno tamno solitonsko stanje Ψ_{DS}, osnovno stanje TG plina na prstenu daje najveću populaciju moda sa impulsom nula ($k = 0$) [32]. U tom slučaju vodeća prirodna orbitala je upravo s $k = 0$ i njena populacija skalira se kao $\sqrt{N}$ [33]. Iako TG stanja nisu bozonski kondenzati, mogu oštro okupirati pojedino impulsno stanje jer bozoni nisu podložni Paulijevom principu tj. više bozona može biti u istom impulsnom stanju (što nije slučaj s ne-međudjelujućim fermionima).

Zanimljivo je pogledati razlike u odnosu na sustav spinpolariziranih ne-

međudjelujućih fermiona s Fermijeve strane mapiranja. Nakon što izvršimo integracije preko po $\{x_2, \ldots, x_N\}$ koje su sad nezavisne (nema signum funkcija za fermione), fermionska matrica gustoće postaje

$$\rho_F(x, y) = \sum_{m=1}^{N} \phi_m^*(x)\phi_m(y), \tag{3.8}$$

vidimo da su jednočestična stanja $\phi_m(x_j)$ ujedno i prirodne orbitale fermionskog sustava, sa okupiranosti $\lambda_i = 1$ [34] bez obzira da li se radi o osnovnom ili pobuđenom svojstvenom stanju. Fermionska raspodjela impulsa je

$$n_F(k) = \sum_{m=1}^{N} \tilde{\phi}_m^*(k)\tilde{\phi}_m(k), \tag{3.9}$$

gdje je $\tilde{\phi}_m(k)$ Fourierov transformat od $\phi_m(x)$. Raspodjela impulsa (3.9) N spinpolariziranih neinteragirajućih fermiona smještenih u jednočestična stanja $\phi_m = \sqrt{2/L}\sin(k_m x + \theta_m)$, gdje je $m = 1, \ldots, N$, neće ovisiti o fazi θ_m jer Fourierov transformat stanja $\phi_m(x)$ ne ovisi o toj fazi, dobijemo

$$n_{F,DS}(k_m) = n_{F,DE}(k_m) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ako } 1 \leq |m| \leq N \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \tag{3.10}$$

Vidimo da je fermionska raspodjela impulsa uniforma do Fermijevog ruba (isključujući stanje $k_0 = 0$ za $m = 0$) i ista je za tamna solitonska stanja (DS) i degenerirana stanja (DE).

3.2 Tamna solitonska stanja u potencijalima invarijantnim na operator pariteta

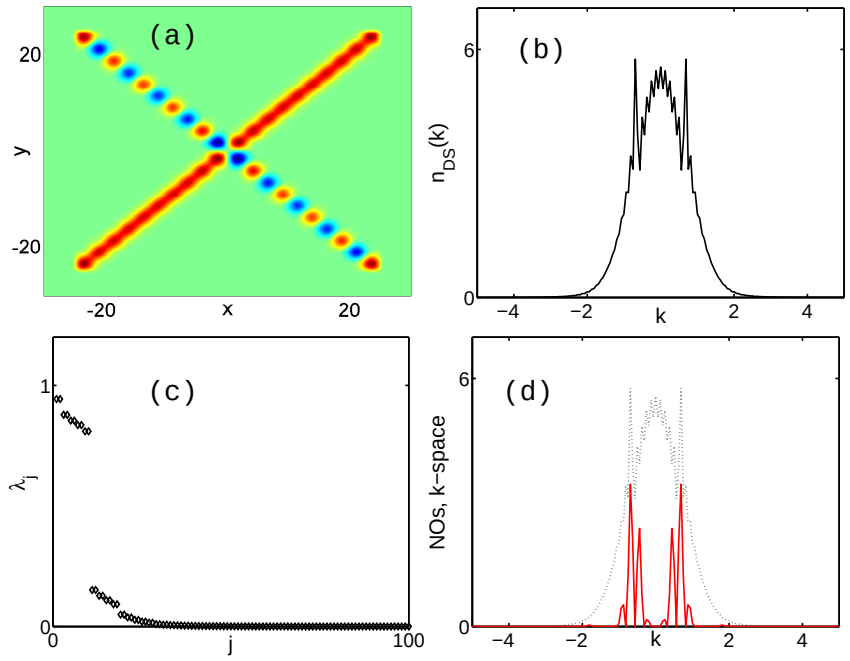
Tamne solitone (DS) nalazimo u različitim tipovima potencijala koji su invarijatni na operator pariteta tj. sa svojstvom $V(-x) = V(x)$ [21]. DS nalazimo u harmoničkim zatočenjima [31], periodičkim rešetkama [21], potencijalima oblika kontejnera [21]. U referenci [21] je pokazano da je moguće u principu "isfiltrirati" parna jednočestična stanja iz višečestične valne funkcije tako da ona ostane uglavnom izgrađena od neparnih jednočestičnih stanja, te tako u principu konstruirati tamno solitonsko stanje u TG plinu. Sada ćemo usporediti

matricu gustoće i raspodjelu impulsa tamnog solitonskog stanja na prstenu i u potencijalu oblika kontejnera $V_c(x) = V_c^0\{2+\sum_{i=1,2}(-)^{i+1}\tanh x_w(x+(-)^i x_c)\}$ ($V_c^0 = 15$, $x_w = 8$, i $x_c = 25$). U takvim potencijalima tamna solitonska stanja se konstruiraju tako da popunimo prvih N neparnih jednočestičnih stanja na Fermijevoj strani mapiranja. Slika 3.9(a) pokazuje matricu gustoće a slika 3.9(b) pokazuje raspodjelu impulsa takvog pobuđenja za $N = 10$. Jasno se vidi da je struktura matrice gustoće i raspodjele impulsa jako slična onoj tamnih solitona na prstenu. Matrica gustoće ima antidijagonalne korelacije i raspodjela impulsa ima šiljke. Nadalje 3.9(c) pokazuje okupiranosti prirodnih orbitala, koje imaju isto ponašanje kao u slučaju TG plina na prstenu tj. opažamo nagli pad nakon $j = N$. Slika 3.9(d) pokazuje da doprinos $N-1$ i N orbitale daje šiljke u raspodjeli impulsa, isto kao kod DS na prstenu.

Slika 3.9 sugerira da se ponašanje jednočestičnih opservabli tamnih solitonskih stanja, kao dva oštra šiljka u raspodjeli impulsa i korelacije u matrici gustoće između zrcalno simetričnih točaka x i $-x$, može naći u različitim tipovima potencijala sa svojstvom $V(-x) = V(x)$.

3.3 Zaključak

Primjenili smo formulu (2.15) [20] da bi numerički izračunali matricu gustoće, prirodne orbitale i njihove okupiranosti i raspodjelu impulsa tamnih solitonskih stanja u Tonks-Girardeau plinu. Pokazali smo da ta pobuđena višečestična stanja imaju karakterističnu raspodjelu impulsa sa dva oštra šiljka. Većina rezultata se odnosi na TG plin na prstenu, gdje se šiljci nalaze na $k_{peak} = \pm\pi(N+1)/L$ (N je broj čestica, a L dužina prstena), ali pokazali smo i rezultate koji sugeriraju da je takvo ponašanje generalno za tamna solitonska stanja TG plina u potencijalima sa svojstvom $V(-x) = V(x)$. Pokazali smo da su šiljci u raspodjeli impulsa povezani sa oscilatornim korelacijama zrcalnih točaka (x i $-x$) u matrici gustoće. Takvo ponašanje tamnih solitonskih stanja proizlazi iz toga što su posebno skrojena. U slučaju Tonks-Girardeau plina na prstenu, pokazano je da stanja koja su degenerirana sa tamnim solitonskim stanjima nemaju šiljke u raspodjeli impulsa.



Slika 3.9: Matrica gustoće (a), raspodjela impulsa (b), i okupiranosti prirodnih orbitala (c) za tamno solitonsko stanje ($N = 10$) u potencijalu oblika kontejnera. (d) Raspodjela impulsa (crna točkasta linija) u usporedbi sa doprinosom 9te i 10te prirodne orbitale: $\sum_{i=9}^{10} \lambda_i |\tilde{\Phi}_i(k)|^2$ (crvena puna linija).

Poglavlje 4

Svojstva osnovnog stanja jako-međudjelujuće jednodimenzionalne Bose-Fermi mješavine u dvostrukoj jami

Eksperimenti sa Bose-Fermi mješavinama [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42] su potakli teorijsko istraživanje tih mješavina. Teorija srednjeg polja je korištena za proučavanje separacije faza [43]. Međutim, za jako-međudjelujuće sustave, koji se učestalije pojavljuju u jednodimenzionalnim (1D) nego u dvodimenzionalnim (2D) i trodimenzionalnim (3D) sustavima, teorija srednjeg polja nije prikladna. Teorija Luttingerovih tekućina može opisati nisko-energetska svojstva tih sustava [44, 45]. Numerički računi su korišteni da bi se odredio fazni dijagram za mješavinu sa nejednakim masama [46]. 1D Bose-Fermi mješavina sa konačnom jakosti međudjelovanja i bez vanjskog potencijala proučavana je u referencama [47, 48]. Girardeau i Minguzzi proučavali su egzaktno riješivi model koji opisuje 1D Bose-Fermi (BF) mješavinu sa jakim odbojnim kontaktnim međudjelovanjem [22]. Konstruirana je valna funkcija u proizvoljnom vanjskom potencijalu. Model uzima da je jako odbojno kontaktno međudjelovanje (TG režim) prisutno između bozona, bozona i fermiona, dok su fermioni ne-međudjelujući i spinpolarizirani.

Da bi razumjeli svojstva mješavine moramo odrediti matricu gustoće bozonske i fermionske komponente zasebno. Pokazano je [22] se da se matrica

gustoće bozonske komponente računa na isti način kao matrica gustoće Tonks-Girardeau plina, dok je matrica gustoće fermionske komponente mješavine znantno zahtjevnija za računanje. Matrica gustoće i korelacije proučavane su za Bose-Fermi mješavinu na prstenu i u harmoničkom potencijalu [22], jer je za te tipove vanjskog potencijala moguće primjeniti matematičke trikove koji olakšavaju računanje matrice gustoće fermionske komponente. Osnovno stanje u harmoničkom potencijalu i dinamika ekspanzije su proučavani u referenci [49].

Mi ćemo ovdje izvesti formulu koja omogućava efikasno računanje matrice gustoće fermionske komponente mješavine u proizvoljnom vanjskom potencijalu. Nedavno je proučavano osnovno stanje Tonks-Girardeau plina u potencijalu dvostruke jame [50]. Opaženo je da korelacije u matrici gustoće i raspodjela impulsa Tonks-Girardau plina ovise o parnosti broja čestica. Međudjelujući ultrahladni atomi inače pokazuju zanimljivo ponašanje u potencijalu dvostruke jame, kao na primjer, interferenciju valova materije [12, 13] u slučaju slabo-međudjelujućih Bose-Einstein kondenzata. Motivirani time, istražit ćemo svojstva osnovnog stanja mješavine u potencijalu dvostruke jame.

4.1 Model

Mi proučavamo mješavinu N_B bozona i N_F spinpolariziranih fermiona u jednodimenzionalnoj geometriji, u osnovnom stanju vanjskog potencijala $V(x)$. Bozoni i fermioni osjećaju isti potencijal i uzimamo da su im mase aproksimativno jednake. Taj uvjet može zadovoljiti kombinacija bozonskih i fermionskih izotopa istog elementa, kao npr. $^{39(41)}$K-^{40}K, ili Yb sa nekoliko stabilnih izotopa, i $^{86(84)}$Rb-$^{87(85)}$Rb (za detaljniju diskusiju, vidi [47] i reference unutar). Bozoni međudjeluju jakim odbojnim kontaktnim potencijalom, njihovo međudjelovanje je u Tonks-Girardeau (TG) režimu. Fermioni su međusobno ne-međudjelujući. Između bozona i fermiona je također jako odbojno kontaktno međudjelovanje. Ukupni broj čestica je $N = N_B + N_F$. Hamiltonijan sustava je

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{H}_F + \hat{H}_{BB} + \hat{H}_{BF}, \tag{4.1}$$

gdje su

$$\hat{H_B} = \sum_{j=1}^{N_B} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_{Bj}^2} + V(x_{Bj}) \right],$$
$$\hat{H_F} = \sum_{j=1}^{N_F} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_{Fj}^2} + V(x_{Fj}) \right],$$
$$\hat{H}_{BB} = \sum_{1 \leq i < j \leq N_B} g_{BB} \delta(x_{Bj} - x_{B_i}),$$
$$\hat{H}_{BF} = \sum_{j=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_F} g_{BF} \delta(x_{Bj} - x_{F_i}),$$

gdje je $V(x)$ vanjski potencijal, a g_{BB} i g_{BF} su konstante vezanja.

U slučaju beskonačnog odbojnog kontaktnog međudjelovanja, $g_{BB} \to \infty$ i $g_{BF} \to \infty$, za valnu funkciju mješavine možemo uzeti Slaterovu determinantu u koju stavimo $N = N_B + N_F$ jednočestičnih orbitala potencijala $V(x)$ i pomnožimo je sa jediničnom antisimetričnom funkcijom bozonskih koordinata

$$A(x_{B1}, \ldots, x_{BN_B}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N_B} \mathrm{sgn}(x_{Bj} - x_{Bi}).$$

Tako konstruirana valna funkcija je simetrična na zamjenu bilo koja dva bozona, a antisimetrična na zamjenu bilo kojeg bozon s bilo kojim fermionom. Odabir simterije na zamjenu bozona je obavezan, ali simetrija na zamjenu bozon-fermion može biti proizvoljna. Ta proizvoljnost unosi degeneraciju osnovnog stanja mješavine sa beskonačnim odbojnim međudjelovanjem [22]. Može se pokazati da za konačno jako odbojno međudjelovanje (tj. za $g_{BB} \gg 1$ i $g_{BF} \gg 1$) treba odabrati valnu funkciju simetričnu na zamjenu bozon-fermion [22] da bi dobili osnovno stanje mješavine. U tom slučaju valna funkcija osnovnog stanja nije degenerirana i možemo pisati

$$\begin{aligned} &\Psi(x_{F1}, \ldots, x_{FN_F}, x_{B1}, \ldots, x_{BN_B}) = \\ &\prod_{1 \leq i < j \leq N_B} \mathrm{sgn}(x_{Bj} - x_{Bi}) \prod_{j=1}^{N_B} \prod_{i=1}^{N_F} \mathrm{sgn}(x_{Bj} - x_{Fi}) \\ &\times \Psi_S(x_{F1}, \ldots, x_{FN_F}, x_{B1}, \ldots, x_{BN_B}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ovdje,

$$\Psi_S(x_1,\ldots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_{P\in S_N}(-)^P\phi_{Pj_1}(x_1)\ldots\phi_{Pj_N}(x_N), \tag{4.3}$$

označava Slaterovu determinantu konstruiranu od N najnižih jednočestični svojstvenih valnih funkcija $\phi_j(x)$ potencijala $V(x)$:

$$-\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}+V(x)\phi_j(x)=E_j\phi_j(x), \tag{4.4}$$

$j=1,2,\ldots,N=N_F+N_B$. U jednadžbi (4.3), P označava permutaciju iz grupe S_N. (Napomenimo da stavljanjem viših jednočestičnih stanja u Slaterovu determinantu dobijemo pobuđena svojstvena stanja mješavine.) Zbog jasnoće izlaganja, prikladno je definirati sljedeće veličine. Razmatrajmo podskup jednočestičnih stanja, odabran iz skupa $\{\phi_j(x)|j=1,\ldots,N\}$ tako što smo izbacili k jednočestičnih stanja; neka $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$ označava indekse izbačenih stanja, a $L=\{l_1,l_2,\ldots,l_{N-k}\}$ indekse preostalih stanja (očito $J\cap L=\emptyset$, $J\cup L=\{1,\ldots,N\}$). Definiramo Slaterovu determinantu

$$\begin{aligned}\Psi_S^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}(x_1,\ldots,x_{N-k})&=\frac{1}{\sqrt{(N-k)!}}\\ &\times\sum_{P\in S_{N-k}}(-)^P\phi_{Pl_1}(x_1)\ldots\phi_{Pl_{N-k}}(x_{N-k}),\end{aligned} \tag{4.5}$$

gdje P označava permutaciju indeksa $(l_1,l_2,\ldots,l_{N-k})$. Prema tome, indeksi na $\Psi_S^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ označavaju izbačena jednočestična stanja.

Neka $\Psi_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}=A\Psi_S^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ označava simetrično Tonks-Girardeau stanje koje dobijemo kad sa jediničnom antisimetričnom funkcijom $A=\prod_{1\le i<j\le N-k}\mathrm{sgn}(x_j-x_i)$ djelujemo na $\Psi_S^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$. Matricu gustoće stanja $\Psi_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ ćemo označiti sa $\rho_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$,

$$\begin{aligned}\rho_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}(x,y)&=(N-k)\int dx_2\ldots dx_{N-k}\\ &\times\Psi_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}(x,x_2\ldots,x_{N-k})^*\\ &\times\Psi_{TG}^{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}(y,x_2\ldots,x_{N-k}).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Veličine Ψ_S, Ψ_{TG} i ρ_{TG} itd. će se odnositi na stanja i korelacijske funkcije koje dobijemo od ukupnog seta jednočestičnih valnih funkcija $\{\phi_j(x)|j=1,\ldots,N\}$.

4.2 Formula za matricu gustoće

Interesiraju nas svojstva osnovnog stanja Bose-Fermi mješavine opisane valnom funkcijom (4.2). Da bi istražili jednočestične opservable mješavine, moramo konstruirati matricu gustoće bozonskog i fermionskog podsustava zasebno. Jednočestična matrica gustoće bozonskog podsustava mješavine je definirana kao

$$\begin{aligned}\eta_{N_B,N_F}(x,y) = N_B \int dx_{F1}\ldots dx_{FN_F} dx_{B2}\ldots dx_{BN_B} \\ \times \Psi^*(x_{F1},\ldots,x_{FN_F},x,x_{B2},\ldots,x_{BN_B}) \\ \times \Psi(x_{F1},\ldots,x_{FN_F},y,x_{B2},\ldots,x_{BN_B}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Lako je pokazati da $\eta_{N_B,N_F}(x,y)$ može biti izračunata pomoću matrice gustoće N Tonks-Girardeau bozona, $\eta_{N_B,N_F}(x,y) = N_B/N\rho_{TG}(x,y)$. Ta korelacijska funkcija može biti efikasno izračunata koristeći algoritam (2.15) iz reference [20]. Računanje matrice gustoće fermionskog dijela podsustava,

$$\begin{aligned}\mu_{N_B,N_F}(x,y) = N_F \int dx_{F2}\ldots dx_{FN_F} dx_{B1}\ldots dx_{BN_B} \\ \times \Psi^*(x,x_{F2},\ldots,x_{FN_F},x_{B1},\ldots,x_{BN_B}) \\ \times \Psi(y,x_{F2},\ldots,x_{FN_F},x_{B1},\ldots,x_{BN_B}),\end{aligned} \tag{4.8}$$

je puno zahtjevnije, ali može se svesti na računanje matrice gustoće nekoherentnog mješanog Tonks-Girardeau stanja kako sljedi:

$$\mu_{N_B,N_F}(x,y) = \frac{N_F}{N!}\int dx_{F2}\ldots dx_{FN_F}dx_{B1}\ldots dx_{BN_B}\prod_{i=1}^{N_B}\mathrm{sgn}(x-x_{Bi})\mathrm{sgn}(y-x_{Bi})$$

$$\times\begin{vmatrix} \phi_1^*(x) & \ldots & \phi_N^*(x) \\ \phi_1^*(x_{F2}) & \ldots & \phi_N^*(x_{F2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^*(x_{FN_F}) & \ldots & \phi_N^*(x_{FN_F}) \\ \phi_1^*(x_{B1}) & \ldots & \phi_N^*(x_{B1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^*(x_{BN_B}) & \ldots & \phi_N^*(x_{BN_B}) \end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix} \phi_1(y) & \ldots & \phi_N(y) \\ \phi_1(x_{F2}) & \ldots & \phi_N(x_{F2}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{FN_F}) & \ldots & \phi_N(x_{FN_F}) \\ \phi_1(x_{B1}) & \ldots & \phi_N(x_{B1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_{BN_B}) & \ldots & \phi_N(x_{BN_B}) \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Determinante iznad se mogu razviti po drugom retku koristeći Laplace-ovu formulu, nakon toga trivijalno je integrirati preko x_{F2}:

$$\mu_{N_B,N_F}(x,y) = \frac{N_F}{N!}\int dx_{F3}\ldots dx_{FN_F}dx_{B1}\ldots dx_{BN_B}$$

$$\times\prod_{i=1}^{N_B}\mathrm{sgn}(x-x_{Bi})\mathrm{sgn}(y-x_{Bi})\sum_{j,l=1}^{N}(-)^{2+j}(-)^{2+l}\int\phi_j^*(x_{F2})\phi_l(x_{F2})dx_{F2}$$

$$\times\begin{vmatrix} \phi_1^*(x) & \cdots & \phi_{j-1}^*(x) & \phi_{j+1}^*(x) & \cdots & \phi_N^*(x)\\ \phi_1^*(x_{F3}) & \cdots & \phi_{j-1}^*(x_{F3}) & \phi_{j+1}^*(x_{F3}) & \cdots & \phi_N^*(x_{F3})\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1^*(x_{FN_F}) & \cdots & \phi_{j-1}^*(x_{FN_F}) & \phi_{j+1}^*(x_{FN_F}) & \cdots & \phi_N^*(x_{FN_F})\\ \phi_1^*(x_{B1}) & \cdots & \phi_{j-1}^*(x_{B1}) & \phi_{j+1}^*(x_{B1}) & \cdots & \phi_N^*(x_{B1})\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1^*(x_{BN_B}) & \cdots & \phi_{j-1}^*(x_{BN_B}) & \phi_{j+1}^*(x_{BN_B}) & \cdots & \phi_N^*(x_{BN_B}) \end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix} \phi_1(y) & \cdots & \phi_{l-1}(y) & \phi_{l+1}(y) & \cdots & \phi_N(y)\\ \phi_1(x_{F3}) & \cdots & \phi_{l-1}(x_{F3}) & \phi_{l+1}(x_{F3}) & \cdots & \phi_N(x_{F3})\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1(x_{FN_F}) & \cdots & \phi_{l-1}(x_{FN_F}) & \phi_{l+1}(x_{FN_F}) & \cdots & \phi_N(x_{FN_F})\\ \phi_1(x_{B1}) & \cdots & \phi_{l-1}(x_{B1}) & \phi_{l+1}(x_{B1}) & \cdots & \phi_N(x_{B1})\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \phi_1(x_{BN_B}) & \cdots & \phi_{l-1}(x_{BN_B}) & \phi_{l+1}(x_{BN_B}) & \cdots & \phi_N(x_{BN_B}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{N_F}{N(N_F-1)}\sum_{j=1}^{N}\mu^{(j)}_{N_B,N_F-1}(x,y), \tag{4.10}$$

gdje smo iskoristili $\int\phi_j^*(x_{F2})\phi_l(x_{F2})dx_{F2} = \delta_{jl}$. Indeks j u $\mu^{(j)}_{N_B,N_F-1}$ znači da je jednočestično stanje ϕ_j izbačeno iz Slaterove determinante koja se pojavljuje u osnovnom stanju, vidi potpoglavlje 4.1. Prema tome izveli smo rekurzijsku formulu koja računanje fermionske matrice gustoće $\mu_{N_B,N_F}(x,y)$ svodi na računanje N fermionskih korelacijskih funkcija $\mu_{N_B,N_F-1}(x,y)$ sa jednim fermionom

manje u smjesi. Sukcesivnom primjenom ove rekurzijske formule, lako se dobije

$$\begin{aligned}\mu_{N_B,N_F}(x,y) &= \frac{N_F!(N_B+1)!}{N!} \\ &\times \sum_{1\le j_1<\ldots<j_{N_F-1}\le N} \mu_{N_B,1}^{(j_1,\ldots,j_{N_F-1})}(x,y) \\ &= \frac{N_F!N_B!}{N!} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_{N_F-1}\le N} \rho_{TG}^{(j_1,\ldots,j_{N_F-1})}(x,y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Korelacijske funkcije $\mu_{N_B,1}^{(j_1,\ldots,j_{N_F-1})}(x,y)$ odgovaraju mješavini jednog fermiona i N_B bozona, lako je vidjeti iz definicije μ_{N_B,N_F} da $\mu_{N_B,1}^{(j_1,\ldots,j_{N_F-1})} \propto \rho_{TG}^{(j_1,\ldots,j_{N_F-1})}$, tj. mješavina sa samo jednim fermionom ima identičnu matricu gustoće (do na normalizacijsku konstantu) kao N_B+1 Tonks-Girardeau bozona smještenih u iste jednočestične orbitale.

Prema tome, matrica gustoće $\mu_{N_B,N_F}(x,y)$ je jednaka (do na konstantu proporcionalnosti) sumi matrica gustoće iz ansambla Tonks-Girardeau (TG) stanja. Svako TG stanje iz ansambla opisuje N_B+1 TG bozon, ta stanja su konstruirana tako da odaberemo N_B+1 jednočestično stanje iz ukupnog skupa $\{\phi_j(x)|j=1,\ldots,N\}$ jednočestičnih stanja. Očito, ima $\binom{N}{N_B+1}$ takvih stanja, prema tome ima $\binom{N}{N_B+1}$ članova u sumi (4.11). Prema tome matrica gustoće $\mu_{N_B,N_F}(x,y)$ je ekvivalentna matrici gustoće N_B+1 bozona u mješanom TG stanju, mješano stanje je nekoherentna superpozicija osnovnog stanja i mnogo pobuđenih stanja, od koji je svako konstruirano od nekog izbora N_B+1 orbitala kao što smo naveli iznad. Tako da se računanje fermionske matrice gustoće svede na primjenu algoritma iz reference [20]. Numerički računi postaju vremenski prezahtjevni ukoliko je broj članova u sumi (4.11) pre velik. Usprkos tome fermionska matrica gustoće i pripadne opservable se mogu efikasno izračunati za mezoskopske Bose-Fermi mješavine. Fermionska raspodjela impulsa je dana sa

$$n_\mu(k) = \frac{1}{2\pi}\int dxdy e^{ik(x-y)}\mu_{N_B,N_F}(x,y); \tag{4.12}$$

svojstvene funkcije fermionske matrice gustoće, prirodne orbitale $\Phi_{\mu,i}(x)$ su rješenja svojstvene jednadžbe

$$\int dx \mu_{N_B,N_F}(x,y)\Phi_{\mu,i}(x) = \lambda_{\mu,i}\Phi_{\mu,i}(y), \quad i=1,2,\ldots; \tag{4.13}$$

gdje su svojstvene vrijednosti $\lambda_{\mu,i}$ okupiranosti pojedine orbitale. Bozonska raspodjela impulsa $n_\eta(k)$, prirodne orbitale $\Phi_{\eta,i}(x)$ i okupiranosti $\lambda_{\eta,i}$, su definirane koristeći ekvivalentne relacije za bozonsku matricu gustoće.

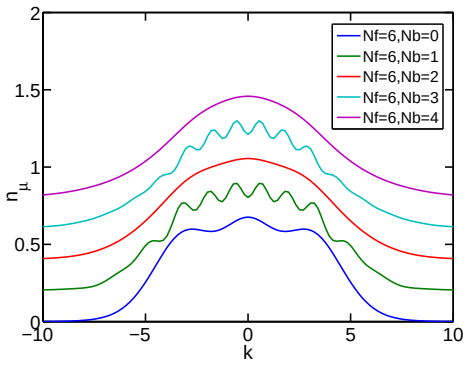
4.3 Mješavina u dvostrukoj jami

Nedavno je proučavano osnovno stanje Tonks-Girardeau plina u potencijalu dvostruke jame [50]. Opaženo je da korelacije u matrici gustoće i raspodjela impulsa Tonks-Girardau plina ovise o parnosti broja čestica. Međudjelujući ultrahladni atomi inače pokazuju zanimljivo ponašanje u potencijalu dvostruke jame, kao na primjer, interferenciju valova materije [12, 13] u slučaju slabomeđudjelujućih Bose-Einstein kondenzata. Motivirani time, primjenjujemo prezentirani formalizam na proučavanje matrice gustoće, raspodjele impulsa, prirodnih orbitala i njihovih okupiranosti za Bose-Fermi mješavinu u potencijalu dvostruke jame

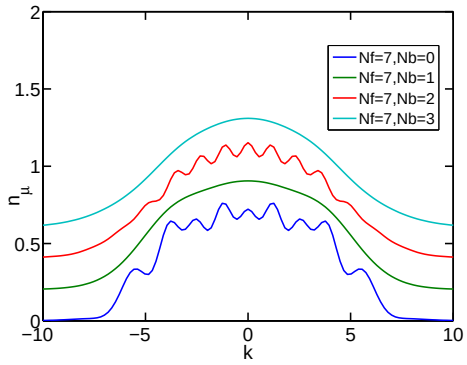
$$\begin{aligned} V(x) &= V_{ho}(x) + V_G(x) \\ &= \nu^2 x^2 + V_0 e^{-(x/\sigma)^2}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

gdje parametar σ (V_0) označava širinu (visinu) Gausijanske barijere koja dijeli harmonički potencijal na dvije jame. Jednočestična stanja potencijala $V(x)$ su izračunata numerički koristeći jednostavnu shemu: x-prostor je diskretiziran na 1024 ekvidistantne točke, druga derivacija je reprezentirana tridijagonalnim matričnim operatorom (metoda konačne razlike), zatim su jednočestična stanja određena dijagonalizacijom tridijagonalne matrice koja reprezentira jednočestični Hamiltonijan.

U onome što sljedi predstavljamo rezultate numeričkih simulacija za parametre $\sigma = 0.3$ i $V_0 = 230$, frekvencija harmoničke zamke je $\nu^2 = 7.5$. Treba naglasiti da smo se fokusirali na slučajeve kad je visina Gausijanske barijere V_0 barem nekoliko puta veća od energije N-tog jednočestičnog stanja u potencijalu $V_{ho}(x)$. Raspodjela impulsa bozonskog podsustava je, vidjeli smo, ekvivalentna slučaju N TG bozona u $V(x)$ potencijalu i taj slučaj je već istraživan [50]. Zato se mi fokusiramo na zahtjevniji slučaj raspodjele impulsa fermionskog podsustava $n_\mu(k)$. Slika 4.1 prikazuje fermionsku raspodjelu impulsa $n_\mu(k)$ za $N_F = 6$ i $N_B = 0, 1, 2, 3, 4$, dok slika 4.2 prikazuje istu veličinu



Slika 4.1: Raspodjela impulsa $n_\mu(k)$ za $N_F = 6$ (sve krivulje) i $N_B = 0, 1, 2, 3, 4$; krivulje su poredane od dna ($N_B = 0$) prema vrhu ($N_B = 4$) i pomaknute za konstantni iznos zbog bolje vidljivosti.

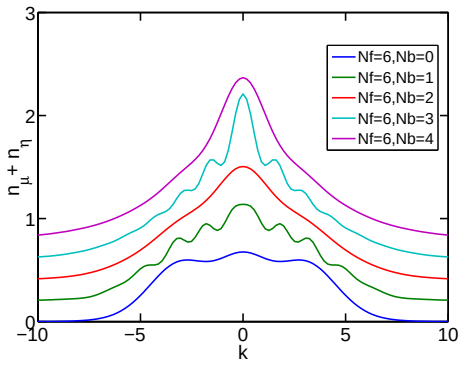


Slika 4.2: Raspodjela impulsa $n_\mu(k)$ za $N_F = 7$ (sve krivulje) i $N_B = 0, 1, 2, 3$; krivulje su poredane od dna ($N_B = 0$) prema vrhu ($N_B = 3$) i pomaknute za konstantni iznos zbog bolje vidljivosti.

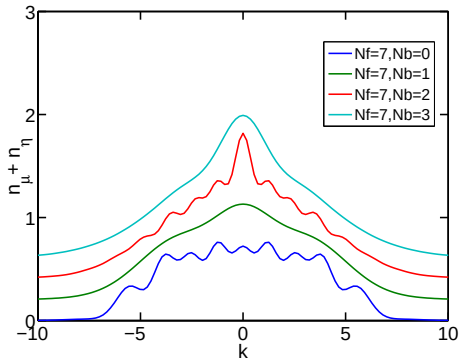
za $N_F = 6$ i $N_B = 0, 1, 2, 3, 4$. Iz ovih slika vidimo da postoji kvalitativna razlika u ponašanju fermionske raspodjele impulsa u ovisnosti o parnosti ukupnog broja čestica $N = N_B + N_F$. Ako je N paran $n_\mu(k)$ ima gladak zvonolik profil, kad je N neapran postoje izražene modulacije nad zvonolikim profilom $n_\mu(k)$. Za neparan N broj modulacija je jednak broju fermiona u mješavini N_F plus dvije dodatne grbe na repovima raspodjele.

Ovo ponašanje se reflektira i na ukupnu raspodjelu imupulsa $[n_\mu(k) + n_\eta(k)]$ koja je prikazana na slikama 4.3 i 4.4 za iste kombinacije brojeva čestica kao na slikama 4.1 i 4.2. Zanimljivo, neparno-neparno kombinacije daju slične

rezultate kao parno-parno kombinacije, dok neparno-parno kombinacije daju slične rezultate kao parno-neparne kombinacije. Prema tome, paritet ukupnog broja čestica određuje ponašanje fermionske komponente.

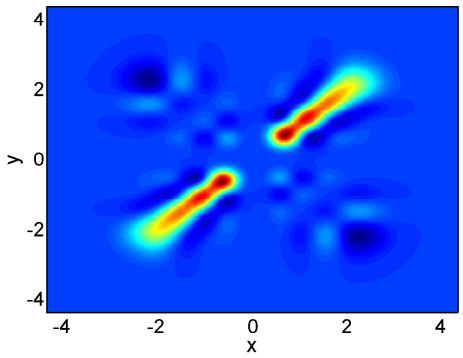


Slika 4.3: Ukupna raspodjela impulsa $n_\mu(k) + n_\eta(k)$ za $N_F = 6$ (sve krivulje) i $N_B = 0, 1, 2, 3, 4$; krivulje su poredane od dna ($N_B = 0$) prema vrhu ($N_B = 4$) i pomaknute za konstantu radi bolje vidljivosti.

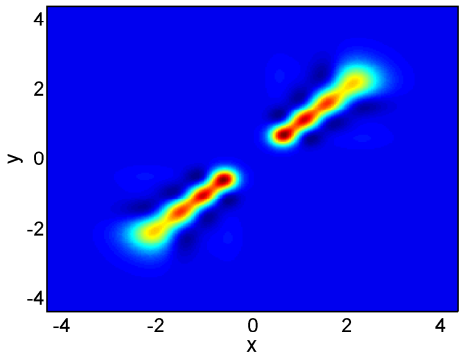


Slika 4.4: Ukupna raspodjela impulsa $n_\mu(k) + n_\eta(k)$ za $N_F = 6$ (sve krivulje) i $N_B = 0, 1, 2, 3, 4$; krivulje su poredane od dna ($N_B = 0$) prema vrhu ($N_B = 4$) i pomaknute za konstantu radi bolje vidljivosti.

Ponašanje fermionske raspodjele impulsa posljedica je svojstava fermionske matrice gustoće $\mu_{N_B,N_F}(x, y)$ koja je prikazana na slici 4.5 za $N_F = 6$ i $N_B = 1$, na slici 4.6 za $N_F = 6$ i $N_B = 2$, na slici 4.7 za $N_F = 7$ i $N_B = 1$ i na slici 4.8 za $N_F = 7$ i $N_B = 2$. Sa tih slika vidimo da se najvažnija razlika između ukupno parnog i neparnog broja čestica pojavljuje u drugom i četvrtom kvadrantu x-y ravnine. Ako je N paran, vrijednosti fermionske matrice gustoće za $x < 0 < y$ i $y < 0 < x$ su zanemarive, $\mu_{N_B,N_F}(x, y) \approx 0$. Ako je N neparan prisutne su oscilacije u matrici gustoće u drugom i četvrtom kvadrantu, posebno duž antidijagonale $\mu_{N_B,N_F}(x, -x)$.



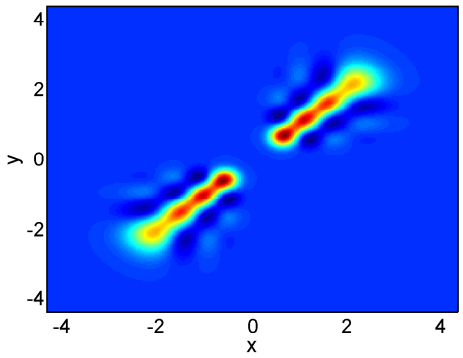
Slika 4.5: Konturni prikaz fermionske matrice gustoće za $N_F = 6$ i $N_B = 1$.



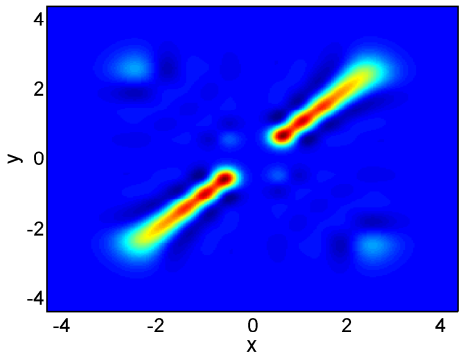
Slika 4.6: Konturni prikaz fermionske matrice gustoće za $N_F = 6$ i $N_B = 2$.

Ova opažanja nam govore da postoji znantno veća prostorna koherencija između dvije jame u slučaju neparnog N. Slično opažanje je izneseno za Tonks-Girardeau plin u dvostrukoj jami [50].

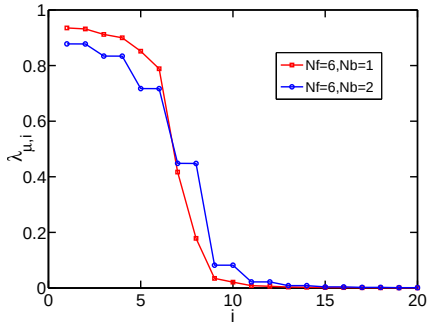
Fokusirajmo se sad na prirodne orbitale tj.na njihove okupiranosti. Okupiranosti $\lambda_{\mu,i}$ koje odgovoaraju fermionskim matricama gustoće sa slika 4.5-4.8 su prikazane na slikama 4.9 i 4.10. Odmah zapažamo da u slučaju ukupno parnog broja čestica, okupiranosti idu u parovima i odgovaraju degeneriranim prirodnim orbitalama. Naime, za ukupno paran broj čestica simetrija sustava je sačuvana, pola čestica u jednoj jami, a pola je u drugoj. Međutim, za ukupno neparan broj čestica to nije slučaj, što se odražava u okupiranostima koje nisu degenerirane već opadaju jedna po jedna.



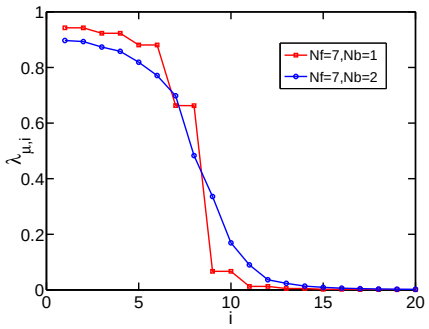
Slika 4.7: Konturni prikaz fermionske matrice gustoće za $N_F = 7$ i $N_B = 1$.



Slika 4.8: Konturni prikaz fermionske matrice gustoće za $N_F = 7$ i $N_B = 2$.



Slika 4.9: Okupiranosti prirodnih orbitala fermionske matrice gustoće za kombinacije $N_F = 6$ i $N_B = 1$ (kvadrati), za $N_F = 6$ i $N_B = 2$ (krugovi). Linije služe da vode oko.



Slika 4.10: Okupiranosti prirodnih orbitala fermionske matrice gustoće za kombinacije $N_F = 7$ i $N_B = 1$ (kvadrati), za $N_F = 7$ i $N_B = 2$ (krugovi). Linije služe da vode oko.

Opažanje ovisnosti nedijagonalnog dijela matrice gustoće o parnosti broja čestica može biti analitički potkrepljeno. U tu svrhu, uzmimo da je barijera između dvije jame beskonačno jaka delta funkcija tj. uzmimo da je mješavina u potencijalu $V(x) = V_{\text{trap}} + \kappa\delta(x)$, gdje $\kappa \to \infty$. Potencijal V_{trap} može biti harmonička zamka ili može imati neki drugi oblik. Za jako repulzivnu Bose-Fermi mješavinu u osnovnom stanju takvog potencijala možemo dokazati sljedeće: Ako je ukupan broj čestica N paran, onda $\mu_{N_B,N_F}(x, y) = 0$ u drugom i četvrtom kvadrantu, tj. za $x < 0 < y$ i $x > 0 > y$.

Uzastopna jednočestična stanja u potencijalu $V(x) = V_{\text{trap}} + \kappa\delta(x)$ su degenerirana, $E_{2m-1} = E_{2m}$ za $m = 1, 2, \ldots$, štoviše, degenerirana stanja su jednostavno povezana: $\phi_{2m}(x) = \text{sgn}(x)\phi_{2m-1}(x)$. Koristeći tu relaciju, jedna od dvije Slaterove determinante (4.3), koje ulaze u formulu za matricu gustoće (4.8) (determinanta koja ovisi o varijabli x), može se pisati kao

$$\Psi_S = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \text{sgn}(x)\phi_1(x) & \cdots & \phi_{N-1}(x) & \text{sgn}(x)\phi_{N-1}(x) \\ \phi_1(x_2) & \text{sgn}(x_2)\phi_1(x_2) & \cdots & \phi_{N-1}(x_2) & \text{sgn}(x_2)\phi_{N-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \text{sgn}(x_N)\phi_1(x_N) & \cdots & \phi_{N-1}(x_N) & \text{sgn}(x_N)\phi_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Tu smo pojednostavnili notaciju i označili koordinate kao x_j, gdje j ide preko svih čestica, tj. ne označavamo eksplicitno fermionsku ili bozonsku koordinatu, jer nije važno za dokaz. Pretpostavimo da je $x < 0 < y$, i da je N_1 koordinata

negativno, a N_2 pozitivno, $N_1 > N_2$, i $N = N_1 + N_2$. Prvo, demonstrirajmo da je determinanta (4.15) nula u ovom slučaju. Da bi to vidjeli, pretpostavimo da je $x, x_2, \ldots, x_{N_1} < 0$, i da je ostatak koordinata pozitivan (zbog antisimetrije Slaterove determinante, bilo koji drugi izbor pozitivnih i negativnih koordinata bi dao isti rezultat). Dodajmo prvi stupac drugom u (4.15), zatim treći četvrtom i tako dalje da bi dobili

$$\Psi_S = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & 0 & \cdots & \phi_{N-1}(x) & 0 \\ \phi_1(x_2) & 0 & \cdots & \phi_{N-1}(x_2) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_{N_1}) & 0 & \cdots & \phi_{N-1}(x_{N_1}) & 0 \\ \phi_1(x_{N_1+1}) & 2\phi_1(x_{N_1+1}) & \cdots & \phi_{N-1}(x_{N_1+1}) & 2\phi_N(x_{N_1+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & 2\phi_1(x_N) & \cdots & \phi_{N-1}(x_N) & 2\phi_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Prema tome, prvih N_1 mjesta svakog parnog stupca, $2, 4, \ldots, N$, je nula. Pretpostavimo da pomaknemo te parne stupce krajnje desno, determinanta je tad proporcionalna sa

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_3(x) & \cdots & \phi_{N-1}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(x_2) & \phi_3(x_2) & \cdots & \phi_{N-1}(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_{N_1}) & \phi_3(x_{N_1}) & \cdots & \phi_{N-1}(x_{N_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(x_{N_1+1}) & \phi_3(x_{N_1+1}) & \cdots & \phi_{N-1}(x_{N_1+1}) & 2\phi_1(x_{N_1+1}) & \cdots & 2\phi_{N-1}(x_{N_1+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_3(x_N) & \cdots & \phi_{N-1}(x_N) & 2\phi_1(x_N) & \cdots & 2\phi_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

U gornjem desnom kutu se nalazi blok nula veličine $N_1 \times N/2$. Pošto je $N_1 > N/2$, determinanta je nula. U stvari, lako je pokazati, koristeći proceduru iznad, da je determinanta nula kad god je $N_1 \neq N_2$. S druge strane ako je $N_1 = N_2$, onda druga determinanta koja ulazi u formulu za matricu gustoće (4.8) [ona koja ovisi o varijabli y] nema isti broj pozitivnih i negativnih koordinata i jednaka je nuli, što dovršava naš dokaz. Lako je vidjeti da isti dokaz vrijedi i za bozonski dio mješavine, dakle vrijedi za mješavinu u cijelini. Da je tako,

dovoljno je primjetiti da se u dokazu uopće ne pojavljuju signum funkcije, već se sve radi na razini Slaterove determinante. Ovaj se rezultat može interpretirati na sljedeći način, ako bi na suprotnim stranama barijere otvorili dvije pukotine gdje atomi mogu curiti van, ekspandirati i interferirati, interferencijske pruge ne bi bile prisutne za parni N i dovoljno visoku barijeru. Takav eksperiment bi se, barem u principu, mogao koristiti za određivanje parnosti broja čestica u mješavini.

Razlike u jednočestičnoj matrici gustoće i raspodjeli impulsa za paran i neparan broj čestica mogu se objasniti ovako: Zbog toga što uzimamo da su mase bozona i fermiona iste, i zbog jakog odbojnog kontaktnog međudjelovanja (valna funkcija iščezava kad god se bilo koje dvije čestice dotaknu), efekte međudjelovanja i statistike jako je teško razlikovati u takvim jednodimenzionalnim sustavima [22, 49]. Na primjer, jednočestična gustoća Bose-Fermi mješavine koju razmatramo je ista kao i za N Tonks-Girardeau bozona, ili N ne-međudjelujućih fermiona; određena je Slaterovom determinantom N najnižih jendočestičnih stanja. Ta jednočestična stanja idu u gotovo degeneriranim parovima (barijera u jami je visoka, ali ipak konačne visine), prema tome, u konstrukciji osnovnog stanja možemo iskoristiti superpoziciju tih gotovo degeneriranih stanja, $1/\sqrt{2}(\phi_{\text{even}} \pm \phi_{\text{odd}})$, koja je gotovo nula ili u desnoj ili u lijevoj jami. Promatrajmo slučaj kad je N paran. Kad je par čestica stavljen u dvostruku jamu, jedna čestica iz para je stavljena desno, a jedna lijevo (u smislu gustoće vjerojatnosti). To znači da u osnovnom stanju parnog broja čestica, pola je čestica desno a pola lijevo [što odgovara analitičkim rezultatima prezentiranim u jednadžbama (4.15)-(4.17)]. S druge strane, ako je broj čestica N neparan, jedna čestica ostaje ne sparena, i ne može biti stavljena u ljevu ili desnu jamu, jer je N-to jednočestičnio stanje nespareno, to stanje se proteže duž obe jame, čestica je prisutna u obe jame, i unosi korelacije koje opažamo u matrici gustoće za fermione i za bozone. Taj rezultat također objašnjava opažanje iz reference [50] o razlici u prostornoj koherenciji Tonks-Girardeau plina u dvostrukoj jami u ovisnosti o parnosti broja čestica. Naš dokaz vrijedi i u tom slučaju.

4.4 Zaključak

Proučavali smo 1D Bose-Fermi mješavinu, gdje je bozon-bozon i bozon-fermion međudjelovanje vrlo jako i odbojno, dok su (spinpolarizirani) fermioni međusobno ne-međudjelujući. Bozoni i fermioni imaju iste mase. U referenci [22] konstruirano je osnovno stanje tog sustava za jako odbojno kontaktno međudjelovanje u proizvoljnom vanjskom potencijalu. Mi smo proučavali osnovno stanje mješavine u dvostrukoj jami sa visokom barijerom. Izveli smo formulu za računanje reducirane jednočestične matrice gustoće fermionskog (i bozonskog) podsustava u proizvoljnom vanjskom potencijalu, i primjenili je na proučavanje raspodjele impulsa, prirodnih orbitala i njihovih okupiranosti Bose-Fermi mješavine u potencijalu dvostruke jame. Nalazimo da ponašanje raspodjele impulsa ovisi o parnosti ukupnog broja čestica. Za parne mješavine raspodjela impulsa je glatka, dok za neparne mješavine vidimo izražene modulacije na raspodjeli impulsa. Kad je ukupan broj čestica paran, korelacije izražene u reduciranoj jednočestičnoj matrici gustoće su zanemarive između dvije jame.

Poglavlje 5

Loschmidtova jeka jednodimenzionalnih međudjelujućih bozonskih plinova

Pitanje zašto izolirani međudjelujući višečestični sustav, koji je u početnom stanju daleko od ravnoteže, ireverzibilno evoluira prema ravnotežnom stanju, iako su mikroskopski zakoni reverzibilni, intrigira znanstvenike još od prvih rasprava na tu temu između Boltzmana i Loschmidta [51, 52]. U principu, ako bi u određenom trenutku okrenuli smjer tijeka vremena, sustav bi evoluirao nazad u početno stanje. Međutim, takva operacija je jako osjetljiva na male pogreške u operaciji vremenske inverzije, kao i na međudjelovanje sustava i okoline. Veličina koja mjeri osjetljivost kvantne dinamike na perturbacije naziva se *Loschmidtova jeka* (Loschmidt echo LE) ili *vjernost* (fidelity F) [53, 54, 55, 56, 57] (za temeljiti pregled pogledati npr. referencu [58]). Loschmidtova jeka nam govori koja je vjerojatnost da će sustav završiti u početnom stanju nakon evolucije naprijed u vremenu za vrijeme t, nakon koje sljedi malo perturbirana evolucija nazad u vremenu za isto vrijeme t. U kvantnoj mehanici vremensku evoluciju iz početnog stanja ψ_0 određuje unitarni operator $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$ preko relacije $\psi(t) = \exp(-i\hat{H}t)\psi_0$, tako da možemo definirati dinamiku Loschmidtove jeke

$$F(t) = |\langle\psi_0| \exp(i\hat{H}'t) \exp(-i\hat{H}t)|\psi_0\rangle|^2, \tag{5.1}$$

gdje je $\hat{H}$ Hamiltonijan ne-perturbiranog sustava, i $\hat{H}' = \hat{H} + \hat{V}_\varepsilon$ je malo perturbirani Hamiltonijan [58]. Naglašavamo da su Loschmidtova jeka i vjernost dva imena za isti koncepta. Na $F(t)$ možemo gledati kao na mjeru stabilnosti kvantne dinamike [53], govori nam koliki je preklop stanja $\psi(t)$ i $\psi'(t)$, gdje je prvo evoluirano naprijed u vremenu sa $\hat{H}$, a drugo sa $\hat{H}'$:

$$F(t) = |\langle\psi'(t)|\psi(t)\rangle|^2. \tag{5.2}$$

Vjernost (5.2) nam govori koliki je utjecaj male perturbacije na dinamiku sustava, analogno Lyapunovljevom eksponentu u klasičnoj mehanici.

Eksperimenti sa Loschmidtovom jekom u ultrahladnim atomima su uglavnom razmatrali jednočestičnu dinamiku [60]. Međutim, ova veličina je povezana sa serijom eksperimenata [61, 62, 63] i teorijskih radova [64, 65, 66, 67, 68, 69] o interferenciji između paralelnih 1D međudjelujućih bozonskih sustava. Točnije, ako 1D sustav fazno-koherentno uzdužno podjelimo (u našim računima duž x-osi), zadržimo ga neko vrijeme u podjeljenom stanju, nakon čega se potencijali zatočenja isključe, a dva 1D sustava ekspandiraju i interferiraju [61, 62, 63].(Taj postupak je skiciran na slici 5.6.). Interferencijski uzorak koji tako nastaje sadrži informacije o dinamici koherencije između dva sustava, i povezan je sa Loschmidtovom jekom.

Mi ovdje koristimo dvije metode, teoriju srednjeg polja i Fermi-Bose mapiranje, da bi istražili dinamiku Loschmidtove jeke (vjernosti) u slabo i jakomeđudjelujućim režimima 1D bozonskih plinova. Kao smetnju V_ε u Hamiltonijanu $\hat{H}'$ koristimo mali statički prostorni šum, i uzimamo da je temperatura približno nula ($T \approx 0K$). Takav vremenski neovisan prostorni šum može biti prisutan u eksperimentima [70, 63] i utjecati na koherenciju sustava, koja se zatim može mjeriti u interferencijskim eksperimentima [61, 62, 63].

5.1 Loschmidtova jeka Tonks-Girardeau plina

Za Tonks-Girardeau (TG) plin egzaktna višečestična valna funkcija je dana Fermi-Bose mapiranjem (2.12)

$$\Psi_B(x_1, \ldots, x_N, t) = \prod_{1 \le i < j \le N} \mathrm{sgn}(x_i - x_j)\Psi_F(x_1, \ldots, x_N, t), \tag{5.3}$$

gdje Ψ_F označava valnu funkciju N spinpolariziranih ne-međudjelujućih fermiona u vanjskom potencijalu $V(x)$. U našim simulacijama razmatramo do $N = 70$ čestica. Sustav je u početnom trenutku (za vremena $t \leq 0$) u osnovnom stanju potencijala oblika kontejnera

$$V_L(x) = V_0\{1 + \tanh[V_s(x - L/2)]/2 - \tanh[V_s(x + L/2)]/2\}, \tag{5.4}$$

gdje je $V_0 = 500$, $V_s = 4$, i $L = 15$ (što odgovara $15\,\mu$m). U trenutku $t = 0$ naglo povećamo širinu kontejnera na dvostruko od početne širine, tj. za vremena $t > 0$ potencijal je $V_{2L}(x)$. Da bi izračunali vjernost $F(t)$, moramo evoluirati TG plin u novom potencijalu $V_{2L}(x)$, i u potencijalu $V'_{2L}(x) = V_{2L}(x) + V_\varepsilon(x)$ polazeći od istih početnih stanja. Ovdje je $V_\varepsilon(x)$ potencijal šuma amplitude ε. Loschmidtova jeka $F(t) = |\langle\psi'_B(t)|\psi_B(t)\rangle|^2$ računa se iz višečestičnih TG stanja $\Psi_B(t)$ i $\Psi'_B(t)$ koja odgovaraju evolucijama u potencijalima $V_{2L}(x)$ i $V'_{2L}(x)$.

Za fermionsku valnu funkciju, kao i u (2.12), uzimamo Slaterovu determinantu $\psi_F(x_1, \ldots, x_N, t) = \det_{m,n=1}^N[\psi_m(x_n, t)]/\sqrt{N!}$, gdje $\psi_m(x, t)$, $m = 1, \ldots, N$, zadovoljavaju jednočestičnu Schrödingerovu jednadžbu

$$i\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{2L}(x)\right]\psi_m(x,t); \tag{5.5}$$

ekvivalentno za $\psi'_m(x, t)$ i evoluciju u $V'_{2L}(x)$. Početni uvjet je takav da je $\psi_m(x, 0) = \psi'_m(x, 0)$ m-to jednočestično stanje početnog kontejnera $V_L(x)$. Loschmidtova jeka za Tonks-Girardeau plin se može napisati u formi pogodnoj za računanje:

$$\begin{aligned}
|\langle\psi'_B(t)|\psi_B(t)\rangle|^2 &= |\frac{1}{N!}\int dx_1 \cdots dx_N \sum_{\sigma_1}(-)^{\sigma_1}\prod_{i=1}^N \psi'^*_{\sigma_1(i)}(x_i,t)\sum_{\sigma_2}(-)^{\sigma_2}\prod_{j=1}^N \psi_{\sigma_2(j)}(x_j,t)|^2 \\
&= |\frac{1}{N!}\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}(-)^{\sigma_1}(-)^{\sigma_2}\prod_{i=1}^N P_{\sigma_1(i)\sigma_2(i)}(t)|^2 \\
&= |\det\mathbf{P}(t)|^2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

gdje σ označava permutaciju u N indeksa, a $(-)^\sigma$ je njen predznak, i uveli smo

$$P_{ij}(t) = \int \psi'^*_i(x,t)\psi_j(x,t)dx. \tag{5.7}$$

U pisanju relacije (5.6) iskoristili smo definiciju determinante. U $t = 0$ vrijedi $P_{ij}(0) = \delta_{ij}$, to nas motivira da definiramo produkt vjernosti (Fidelity Product)

$$F_P(t) = \prod_{i=1}^{N} P_{ii}(t) P_{ii}^*(t). \tag{5.8}$$

Prema tome, u računanju produkta vjernosti $F_P(t)$ pretpostavljamo da su svi nedijagonalni elementi matrice (6.18) nula tj. $P_{ij}(t) = 0$ za $i \neq j$ za sva vremena. Produkt vjernosti može biti interpretiran na sljedeći način: ako evoluiramo N čestica, potpuno međusobno nezavisnih (uključujući i statistiku), počevši od N početnih stanja $\psi_m(x, 0)$, $m = 1, \ldots, N$, izračunamo N jednočestičnih vjernosti i pomnožimo ih, dobijemo produkt vjernosti $F_P(t)$. Vjernost $F(t)$ je identična za ne-međudjelujuće spinpolarizirane fermione i jako-međudjelujuće TG bozone; ističemo da je jednadžbu (5.6) koristio i Goold *et al.* u referenci [73] za proučavanje tzv. katastrofe ortogonalosti ultrahladnih fermiona. Prema tome, F_P i F će razlikovati utjecaj antisimetrizacije u slučaju fermiona, odnosno međudjelovanja i simetrizacije u slučaju TG bozona, u odnosu na dinamiku koja ne uključuje ni statistiku ni međudjelovanje. Važno je naglasiti da za izvod relacija (5.6) i (6.18) nije važno da dinamika krene iz osnovnog stanja TG plina u početnoj zamci; mogli smo odabrati i bilo koje pobuđeno stanje kao početni uvjet.

Da bi izračunali vjernost $F(t)$, moramo evoluirati jednočestična stanja $\psi_j(x, t)$ $[\psi_j'(x, t)]$, u potencijalu $V_{2L}(x)$ $[V_{2L}(x) + V_\varepsilon(x)]$, polazeći od prvih N jednočestičnih stanja potencijala $V_L(x)$. Stanja smo evoluirali tako da smo ih razvili po bazi svojstvenih stanja $\phi_m(x)$ konačnog kontejnera $V_{2L}(x)$ (koja smo numerički izračunali)

$$\psi_j(x, t) = \sum_m a_m^j \phi_m(x) \exp(-iE_m t), \tag{5.9}$$

i

$$\psi_j'(x, t) = \sum_m a_m^{j'} \phi_m'(x) \exp(-iE_m' t). \tag{5.10}$$

Numerički smo odredili koeficijente $a_n^{j'} = \int \phi_m'^*(x)\psi_j(x, 0)dx$ i $a_n^j = \int \phi_m^*(x)\psi_j(x, 0)dx$ za $j = 1, \ldots, 70$ i za $m = 1, \ldots, 210$ što je dovoljno za parametre koje smo koristili. Potencijal šuma je konstruiran ovako: x-prostor je numerički simuli-

ran koristeći 2048 ekvidistantnih točaka u intervalu $x \in [-30, 30]$. Nad tim x-prostorom konstruirali smo nasumičan potencijal

$$V_{\text{rand}}(x) = |FT^{-1}[\exp(-k^4/K_{cut}^4)FT[\text{rand}(x)]]|,$$

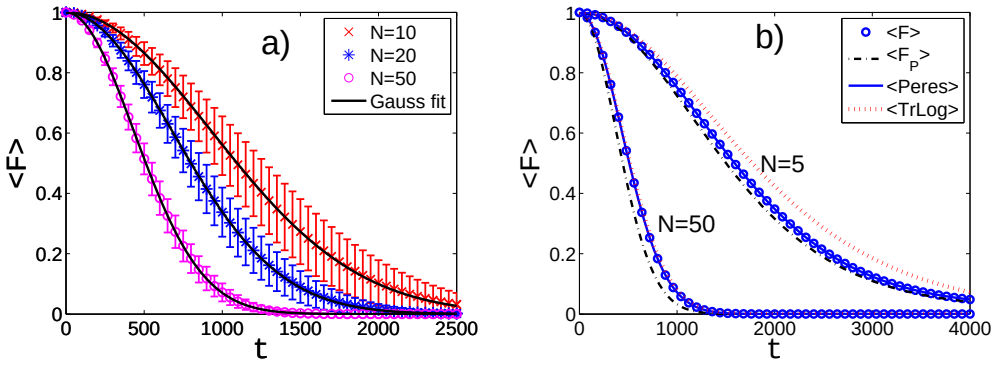
gdje je rand(x) nasumičan broj između 0 i 1, FT označava diskretni Fourierov transformat, K_{cut} je gornja granica na valni vektor (odabrali smo $K_{cut} = 53$) koji uvodimo da diskretni numerički potencijal bude dovoljno gladak od točke do točke. Konačna forma potencijala šuma je $V_\varepsilon(x) = \varepsilon[V_{\text{rand}}(x) - \bar{V}_{\text{rand}}]$, gdje je ε amplituda perturbacije, i $\bar{V}_{\text{rand}}$ je srednja vrijednost od $V_{\text{rand}}(x)$. Takav potencijal je moguće optički konstruirati za 1D bozonske plinove [70].

Vjernost ovisi o broju čestica N, amplitudi šuma ε, ali i o pojedinoj realizaciji nasumičnog potencijala $V_\varepsilon(x)$, zbog toga smo računali sve veličine za 50 različitih realizacija $V_\varepsilon(x)$ i izračunali prosjek preko ansambla šumova: $\langle F(t)\rangle_{noise}$.

Na slici 5.1(a) pokazujemo vjernost $\langle F(t)\rangle_{noise}$ kao funkciju vremena, za tri različita broja čestica, $N = 10$, 20 i 50 sa $\varepsilon = 0.05$. Nalazimo da u TG režimu, Loschmidtova jeka gausijanski opada: $\langle F(t)\rangle_{noise} = \exp(-\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle t^2)$; puna crna linija predstavlja prilagodbu numerički dobivenih vriejdnosti na Gausijan. Naglašavamo da za svaku pojedinu realizaciju šuma vjernost TG plina gausijanski opada, sa malim fluktuacijama u vrijednosti eksponenta. Na slici 5.1(a) su pokazane i standardne devijacije vjernosti u datom trenutku. Primjetimo da se standardne devijacije smanjuju kako povećavamo broj čestica N, što znači da za dovoljno veliki N vjernost izračunata za jednu realizaciju šuma daje pouzdane vrijednosti za $\lambda(N,\varepsilon)$. Zanimljivo je usporediti vjernost i produkt-vjernosti $\langle F_P(t)\rangle_{noise}$, koji se također može prilagoditi na gausijansku funkciju što je pokazano na slici 5.1(b). Nalazimo da je produkt-vjernosti $\langle F_P(t)\rangle_{noise}$ sistematski ispod vrijednosti $\langle F(t)\rangle_{noise}$.

Na slici 5.2 pokazujemo ovisnost vjernosti, tj. eksponenta $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle$, o broju čestica N i ε. Na slici 5.2(a) prikazujemo $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle/\varepsilon^2$ kao funkciju ε za različite vrijednosti broja čestica N; očito vrijedi $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle \propto \varepsilon^2$. Na slici 5.2(b) prikazujemo $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle/N$ kao funkciju od N za $\varepsilon = 0.05$; jasno se vidi da je $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle \propto N$ za dovoljno veliki N (već za $N > 20$).

Da bi razumjeli rezultate slika 5.1 i 5.2, analitički smo istražili svojstva vjernosti za jednu realizaciju šuma $V_\varepsilon(x)$. U tu svrhu koristimo aproksimaciju koju

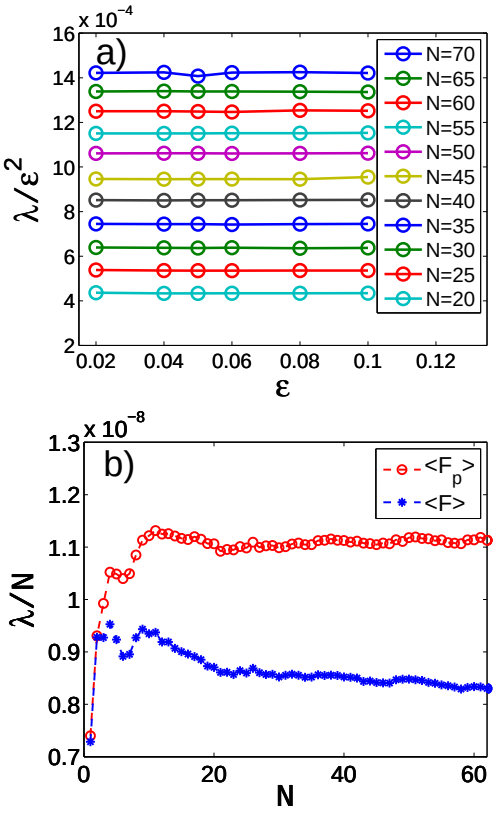


Slika 5.1: Opadanje Loschmidtove jeke (vjernosti) sa vremenom za $\varepsilon = 0.05$. (a) Prosječna vrijednost $\langle F(t)\rangle_{noise}$ za $N = 10$ (x-simboli), $N = 20$ (zvijezdice), i $N = 50$ (krugovi). Puna crna linija pokazuje prilagodbu numeričkih vrijednosti na Gausijan. Područje pogreške (okomito postavljene crte) pokazuju standardnu devijaciju za 50 različitih realizacija potencijala šuma $V_\varepsilon(x)$. (b) Vjernost $\langle F(t)\rangle_{noise}$ (krugovi), produkt-vjernosti $\langle F_P(t)\rangle_{noise}$ (crna točkasta-crtkana linija), vrijednosti dobivene sa $\det(\mathbf{PP}^\dagger)$, gdje je $P_{ij} = \sum_n a_n^{i*} a_n^j \exp(i\omega_n t)$ dobiveno pomoću aproksimacije koju uvodi Peres [53] (plava linija), i vjernost dobivena pomoću trag-log formule (5.12) (crvena točkasta linija).

je uveo Peres [53], uzimamo da do prvog reda u ε vrijedi $\int dx \phi_j'^* \phi_i \approx \delta_{ij}$ i da je $a_m^j \approx a_m^{j'}$. Elementi matrice $\mathbf{P}$, koji daju vjernost preko jednadžbe (5.6), se onda mogu pisati kao $P_{ij} = \sum_n a_n^{i*} a_n^j \exp(i\omega_n t)$, gdje je $\omega_n = E_n' - E_n \approx \langle \phi_n | V_\varepsilon | \phi_n \rangle$. Na slici 5.1(b) smo prikazali vjernost izračunatu uz ovu aproksimaciju (plava linija) i izračunatu sa numeričkom evolucijom (plavi krugovi), slaganje je izvrsno. Dijagonalni elementi $|P_{ii}(t)|^2$ se mogu interpretirati kao jednočestične vjernosti koje odgovaraju početnim stanjima $\psi_i(x, 0)$. Lako se pokaže da je $|P_{ii}(t)|^2 = \sum_{n,m} |a_n^i|^2 |a_m^i|^2 \cos[(\omega_n - \omega_m)t]$, međutim, u našim simulacijama samo par članova doprinosi u sumi iznad, što daje oscilatorno ponašanje jednočestičnih vjernosti sa relativno velikim amplitudama oscilacija. Sad se okrećemo Tonks-Girardeau plinu i opažanju da je opadanje vjernosti u vremenu ponaša kao Gausijan. Da bi to pokazali koristimo trag-log formulu za determinante:

$$F(t) = \exp(\mathrm{Tr}(\log(\mathbf{PP}^\dagger))). \tag{5.11}$$

Možemo aproksimirati $\mathbf{PP}^\dagger \approx \mathbf{1} + \mathbf{Q_1} t - \mathbf{Q_2} t^2 + \mathcal{O}(t^3)$, gdje je $\Delta_{nm} = \omega_n - \omega_m$, $[Q_1]_{ij} = i \sum_{k=1}^N \sum_{n,m} a_n^{i*} a_n^k a_m^j a_m^{k*} \Delta_{nm}$ i $[Q_2]_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{n,m} a_n^{i*} a_n^k a_m^j a_m^{k*} \Delta_{nm}^2$.



Slika 5.2: Gausijanski eksponent vjernosti kao funkcija ε i N. (a) Veličine $\langle\lambda\rangle/\varepsilon^2$ su prikazane za različite brojeve čestica, i poredane kao u legendi (najniža linija odgovara najnižem N, najviša linija najvećem N); očito $\langle\lambda\rangle \propto \varepsilon^2$. (b) Veličine $\langle\lambda_P\rangle/N$ (crveni krugovi, gornja linija) i $\langle\lambda\rangle/N$ (plave zvijezdice, niža linija), su prikazane kao funkcije od N za $\varepsilon = 0.05$. Za veći N linije postaju horizontalne što ukazuje da je $\langle\lambda\rangle \propto N \propto \langle\lambda_P\rangle$.

Zatim razvijemo logaritam u trag-log formuli što nam daje

$$F(t) = \exp(-\mathrm{Tr}\mathbf{Q_2}t^2), \tag{5.12}$$

gausijansku funkciju. U izvodu smo koristili $\mathrm{Tr}\mathbf{Q_1} = 0$. Crvena točkasta linija na slici 5.1(b) pokazuje da je jednadžba (5.12) izvrsna aproksimacija za veće N. Ovisnost $\langle\lambda(N,\varepsilon)\rangle$ o ε sljedi iz činjenice da je $\Delta^2_{nm} \propto \varepsilon^2$, dok je $\mathrm{Tr}\mathbf{Q_2} \propto N$ (vidi sliku 5.2).

Sada ćemo argumentirati da vrijedi $F_P(t) < F(t)$, tj. da je produkt vjernosti manji od vjernosti. Očito trebamo samo dijagonalne elemente matrice $\mathbf{PP}^\dagger$ da

bi konstruirali $F(t)$ ili $F_P(t)$, možemo ih napisati kao

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger)_{ii} = |P_{ii}(t)|^2 + \sum_{k=1,k\neq i}^{N} |P_{ik}(t)|^2. \tag{5.13}$$

Za prvi član možemo pisati $|P_{ii}(t)|^2 = 1-\alpha_i(t)$ gdje je $\alpha_i(t)$ neka funkcija vremena sa svojstvom $\alpha_i(0) = 0$ i $0 \leq \alpha_i(t) \leq 1$ zbog relacije (6.18). Za drugi član možemo pisati $\sum_{k=1,k\neq i}^{N} |P_{ik}(t)|^2 = \beta_i(t)$ gdje je $\beta_i(0) = 0$ i $\beta_i(t) \geq 0$. Sljedi da je $(\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger)_{ii} = 1-(\alpha_i(t)-\beta_i(t))$. Primjenjujući trag-log formulu na isti način kao prije, dobijemo za vjernost $F(t) = \exp(-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(t))$. Produktu vjernosti odgovara $\exp(-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t))$, što daje $F(t) = F_P(t)\exp(\sum_{i=1}^{N}\beta_i(t))$; a pošto je $\sum_{i=1}^{N}\beta_i(t) \geq 0$ vrijedi $F(t) \geq F_P(t)$. Prosjek preko ansambla šumova ne mjenja ovu relaciju.

5.2 Loschmidtova jeka u režimu srednjeg polja

U ovom potpoglavlju razmatramo Loschmidtovu jeku u režimu srednjeg polja. Dinamika Bose-Einsteinovih kondenzata (BEC) je u teoriji srednjeg polja opisana nelinearnom Schrödinger jednadžbom (1.23) (Nonlinear Schrödinger Equation NLSE) tzv. Gross-Pitaevskii (GP) jednadžbom koju smo uveli u (1.3.2), ali ovdje ćemo je ponoviti radi preglednosti:

$$i\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Phi(x,t) + \tilde{g}_{1D}N|\Phi(x,t)|^2\Phi(x,t), \tag{5.14}$$

gdje je $\tilde{g}_{1D} = 2mX_0g_{1D}/\hbar^2$ bezdimenzionalna konstanta vezanja i $\int|\Phi(x,t)|^2dx = 1$.

Da bi izračunali vjernost međudjelujućeg BEC-a ponavljamo proceduru koju smo koristili za Tonks-Girardeau plin: prvo pripremimo kondenzat u osnovnom stanju potencijala oblika kontejnera $V_L(x)$ (tj. riješimo numerički stacionarnu Gross-Pitaevskii jednadžbu), zatim naglo proširimo kontejner $L \to 2L$ i riješimo numerički vremenski ovisnu GP jednadžbu u proširenom potencijalu bez šuma $V_{2L}(x)$, i sa šumom $V'_{2L}(x)$, sa istim početnim uvjetima. To nam daje $\Phi(x,t)$ i $\Phi'(x,t)$ s kojima možemo izračunati vjernost

$$F_{GP}(t) = |\int \Phi'^*(x,t)\Phi(x,t)dx|^2. \tag{5.15}$$

Treba imati na umu da istražujemo vjernost plina od N čestica. Višečestična valna funkcija u režimu srednjeg polja je produktno stanje $\Psi_{GP}(x_1, \ldots, x_N, t) = \prod_{j=1}^{N} \Phi(x_j, t)$ i zato je N-čestična vjernost u režimu srednjeg polja dana sa

$$F_{GP}^{N}(t) = |\int \Psi_{GP}^{\prime *} \Psi_{GP} dx_1 \ldots dx_N|^2 = [F_{GP}(t)]^N. \tag{5.16}$$

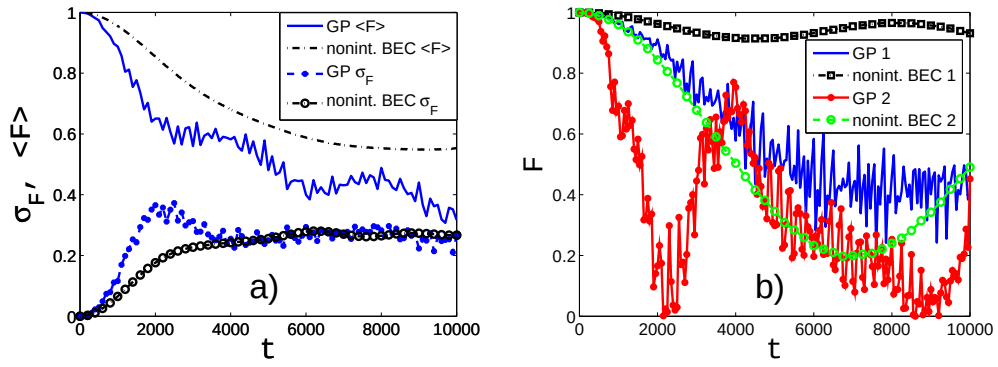
Konačno, napravimo prosjek preko ansambla šumova da bi dobili $\langle F_{GP}(t) \rangle_{noise}$ i $\langle F_{GP}^{N}(t) \rangle_{noise}$.

U prvom setu simulacija, odabiremo parametre koji su pogodni za usporedbu Loschmidtove jeke u režimu srednjeg polja i u Tonks-Girardeau režimu. Odabrat ćemo sve parametre kao u potpoglavlju 5.1 osim jakosti međudjelovanja za koju sad uzimamo $\tilde{g}_{1D} = 0.04$. Broj čestica je $N = 50$. Dinamika ovisi o nelinearnosti, definiranoj kao produkt $\tilde{g}_{1D} N = 2$. Sa tim parametrima sustav je u režimu srednjeg polja sa $\gamma \approx 0.01$. U principu, takve vrijednosti mogu biti eksperimentalno realizirane pogodnim izborom frekvencije transverzalnog zatočenja.

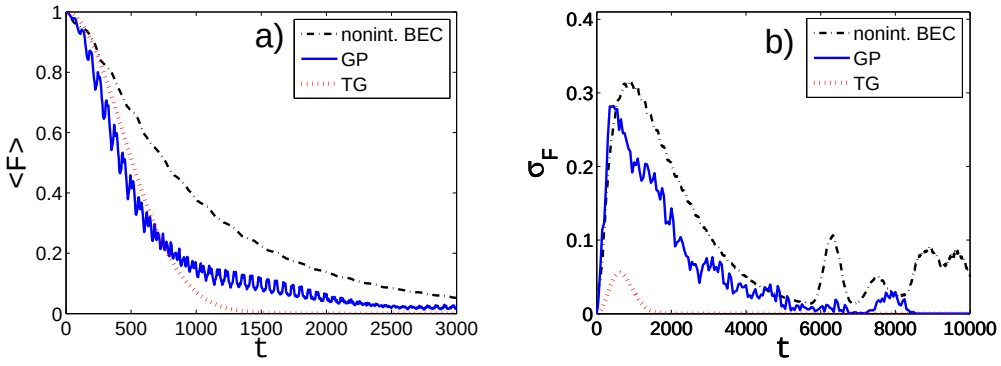
Na slici 5.3(a) pokazujemo $\langle F_{GP}(t) \rangle_{noise}$ i pripadnu standardnu devijaciju za ne-međudjelujući i slabo-međudjelujući BEC. Vidimo da vjernost opada sa izraženim oscilacijama, za razliku od Tonks-Girardeau plina gdje opada monotono. Nalazimo da u režimu srednjeg polja, opisanom s GP jednadžbom, vjernost brže opada što je veća nelinearnost. Važno je napomenuti da je $F_{GP}(t)$ vrlo ovisno o pojedinoj realizaciji šuma $V_\varepsilon(x)$, što nije slučaj za TG plin. To je pokazano na slici. 5.3(b) gdje pokazujemo dinamiku $F_{GP}(t)$ za dvije realizacije potencijala šuma; opažamo veliku ovisnost $F_{GP}(t)$ o pojedinoj realizaciji šuma. To je posljedica činjenice da je frekvencija oscilacija vjernosti $|P_{11}(t)|^2 = \sum_{n,m} |a_n^1|^2 |a_m^1|^2 \cos[(\omega_n - \omega_m)t]$ ne-međudjelujućeg BEC-a ovisna o razlici samo par frekvencija, koje se znatno mjenjaju od šuma do šuma, a to ponašanje se nasljedi u slabo-međudjelujućem režimu srednjeg polja.

Na slici 5.4 uspoređujemo vjernosti ne-međudjelujućeg BEC-a, slabo-međudjelujućeg BEC-a i Tonks-Girardeau plina. Primjetimo da za dobru usporedbu moramo usporediti $F_{GP}^{N}(t)$ i $F(t)$. Vidimo da u režimu srednjeg polja vjernost pokazuje bogatije ponašanje. Za naše parametre, nalazimo da $\langle F_{GP}^{N}(t) \rangle_{noise}$ u početku opada brže nego vjernost u TG režimu, ali kasnije vjernost u režimu srednjeg polja sporije opada u usporedbi sa vjernosti TG plina.

U drugom setu simulacija, istražujemo ovisnost dinamike Loschmidtove jeke



Slika 5.3: (a) Prosječne vjernosti evoluirajućih Bose-Einsteinovih kondenzata (BEC) za $N = 50$ i $\varepsilon = 0.05$, prosjek je uzet preko ansambla od 50 šumova, i prikazane su standardne devijacije od prosječnih vjernosti. Prosječna vjernost ne-međudjelujućeg BEC-a je prikazana sa crnom točkastom-crtkanom linijom i njene standardne devijacije sa praznim crnim krugovima. Prosječna vjernost za slabo-međudjelujući BEC je prikazana sa plavom punom linijom, a njena standardna devijacija sa plavim punim krugovima. (b) Vjernosti evoluirajućih BEC za dvije realizacije potencijala šuma.



Slika 5.4: Usporedba prosječnih vjernosti (a) i njihovih standardnih devijacija (b) za Tonks-Girardeau plin ($\langle F(t)\rangle_{noise}$, crvena točkasta linija), slabo-međudjelujući BEC ($\langle F^N_{GP}(t)\rangle_{noise}$, puna plava linija), i za ne-međudjelujući BEC (crna točkasto-crtkana linija), za iste brojeve čestica. Parametri su $N = 50$ i $\varepsilon = 0.05$.

u režimu srednjeg polja o broju čestica N u kondenzatu. Dinamika valne funkcije kondenzata $\Phi(x,t)$ u GP teoriji (5.14), kao i dinamika vjernosti $F_{GP}(t)$, ovise o produktu $\tilde{g}_{1D}N$. Zbog toga smatramo da je dovoljno istražiti ovisnost Loschmidtove jeke o broju čestica N. U tu svrhu biramo parametre koji odgovaraju eksperimentima u referencama [61, 63]. Linearne gustoće će sad biti

mnogo veće nego u slučaju TG plina i prvog seta simulacija u režimu srednjeg polja. Glavna razlika između prvog i drugog seta simulacija u režimu srednjeg polja je da u prvom setu radimo sa nelinearnosti $\tilde{g}_{1D}N$ reda jedan, dok je u drugom setu simulacija nelinearnost dva do tri reda većeg iznosa (vidi ispod). Naglašavamo da nije razumno uspoređivati režim srednjeg polja sa velikim linearnim gustoćama i Tonks-Girardeau plin, jer u Tonks-Girardeau plinu linearne gustoće moraju biti male da se postignu jake efektivne interakcije [7].

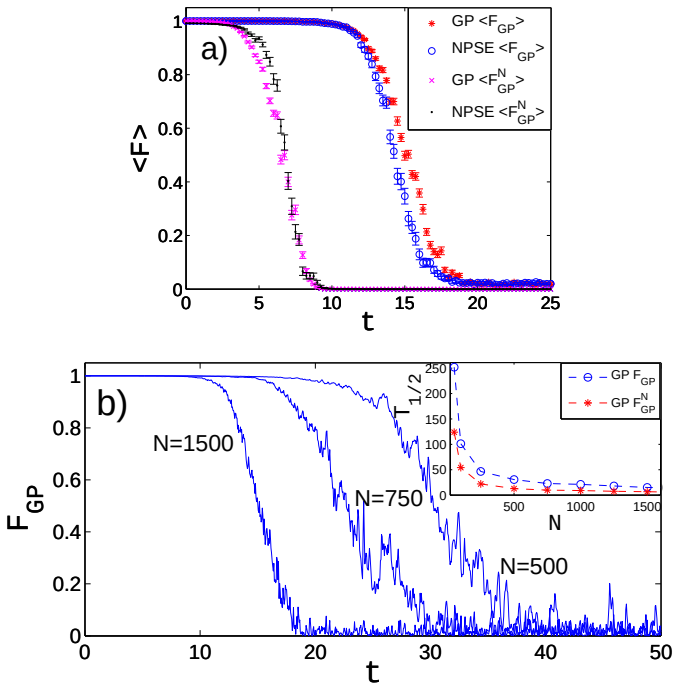
Eksperiment izveden u referenci [63] je pokazao da kad je linearna gustoća u efektivno 1D sustavu velika, njene varijacije mogu utjecati na transverzalne dimenzije sustava (pogledaj također [76, 77]) i 1D Gross-Pitaevskii jednadžba može postati nedostatna za kvantitativni opis sustava. Da bi uključili te efekte, i provjerili njihov utjecaj na vjernost, sljedimo referencu [76], gdje je izvedena efektivna nepolinomna nelinearna Schrödingerova jednadžba (NPSE) koja uzima u obzir efekte varijacije transverzalnih dimenzija sustava na dinamiku izduženih kondenzata:

$$i\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\Phi(x,t) + V_{NL}(|\Phi(x,t)|^2)\Phi(x,t), \tag{5.17}$$

gdje je

$$\begin{aligned} V_{NL}(|\Phi(x,t)|^2) &= \tilde{g}_{1D}N\frac{|\Phi(x,t)|^2}{\sqrt{1+2a_{3D}NX_0^{-1}|\Phi(x,t)|^2}} \\ &+ \frac{\hbar\omega_\perp}{2E_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2a_{3D}NX_0^{-1}|\Phi(x,t)|^2}} + \sqrt{1+2a_{3D}NX_0^{-1}|\Phi(x,t)|^2}\right). \end{aligned}$$

Slika 5.5(a) pokazuje opadanje vjernosti u vremenu za $N = 1500$ i $\tilde{g}_{1D} = 0.76$ (drugi parametri su identični kao u prethodnim simulacijama), što daje $\gamma \approx 0.004$ i jaku nelinearnost $\tilde{g}_{1D}N = 1140$ (te vrijednosti odgovaraju transverazlnoj frekvenciji $\omega_\perp \approx 2\pi \times 4$ kHz, vidi [63]). Za tako jaku nelinearnost vidimo opadanje vjernosti kao u referenci [71], gdje je Loschmidtova jeka konstantna i bliska jedinici do nekog vremena kad sljedi nagli pad. Primjetimo da $F_{GP}^N(t) = [F_{GP}(t)]^N$ ima nagli pad za manja vremena u odnosu na nagli pad $F_{GP}(t)$, što je posljedica velikog N pa usprkos tome što je $F_{GP}(t)$ malo ispod jedinice $F_{GP}^N(t)$ padne na nulu. Definirajmo vremena $T_{1/2}$ i $T_{1/2}^N$ za koja vjernosti F_{GP} i F_{GP}^N padnu na 1/2, dakle $F_{GP}(T_{1/2}) = 1/2$ i $F_{GP}^N(T_{1/2}^N) = 1/2$.

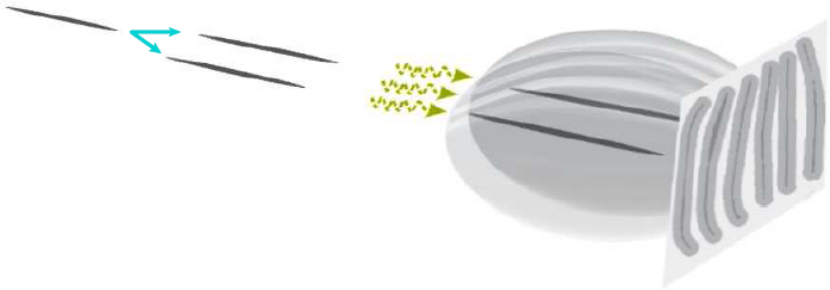


Slika 5.5: Vjernost za kondenzate sa velikim linearnim gustoćama u režimu srednjeg polja. (a) Vrijednosti $\langle F_{GP}(t)\rangle_{noise}$ i $\langle F^N_{GP}(t)\rangle_{noise}$ dobivene Gross-Pitaevskii (GP) jednadžbom (1.23) i uprosječene preko 30 realizacija šuma i sa nepolinomnom nelinearnom Schrödingerovom jednadžbom (NPSE) (5.17). Područje pogreške (okomite crte) označavaju standardnu devijaciju koja je manja nego u prvom setu simulacija, usporedi sa Slikom 5.3(a). (b) Vrijednosti $F_{GP}(t)$ za jednu realizaciju šuma za $N = 500, 750$, i 1500; isječak pokazuje ovisnost vremena $T_{1/2}$ (plavi krugovi) i vremena $T^N_{1/2}$ (crvene zvjezdice) o N. Vidi tekst za detalje.

Oštrina pada se povećava sa N, a vremena $T_{1/2}$ i $T^N_{1/2}$ se smanjuju sa N, kao što je pokazano na slici 5.5(b). Na slikama 5.5(a) i (b) uspoređujemo rezultate dobivene GP jednadžbom i NPSE jednadžbom. Nismo našli kvalitativne razlike između ova dva modela. Za simulacije sa manjim linearnim gustoćama prezentiranim na slici 5.3, NPSE i GP se kvantitativno slažu.

5.3 Diskusija

U ovom potpoglavlju diskutiramo moguće eksperimente s Loschmidtovom jekom u jednodimenzionalnim bozonskim plinovima. Ako se kvazi 1D bozonski plin fazno-koherentno uzdužno podijeli, tj. duž x-osi, zatim drži neko vrijeme t



Slika 5.6: . U trenutku $t = 0$ 1D kondenzat se podjeli na dva koherentna 1D kondenzata tako što se uključi barijera duž osi kondenzata. Nakon nekog vremena t kondenzati se oslobode, tj. isključe se svi potencijali zatočenja, i šire se u prostor. Zatim se, nakon nekog vremena širenja, dovoljnog da se valovi materije počnu preklapati, pusti probna zraka kroz atomski oblak u smjeru osi kondenzata i napravi se slika interferencijskog uzorka. Slika je preuzeta iz [66].

nakon čega se svi potencijali zatočenja isključe, može se opaziti interferencijski uzorak [61, 62, 63]. Skica tog eksperimentalnog postupka je na slici 5.6. Interferencijski uzorak se može iskoristiti za određivanje očekivane vrijednosti opratora $\hat{\psi}^\dagger_{\text{desno}}(x,t)\hat{\psi}_{\text{lijevo}}(x,t)$ [62, 64, 65, 66, 68, 69], i veličine

$$\langle \int dx \hat{\psi}^\dagger_{\text{desno}}(x,t)\hat{\psi}_{\text{lijevo}}(x,t)\rangle; \tag{5.18}$$

gdje je $\hat{\psi}_{\text{lijevo,desno}}(x,t)$ operator anihilacije bozonskog polja, gdje subskripti označavaju "lijevi" i "desni" kvazi 1D sustav (nakon djeljenja).

Pretpostavimo da odmah nakon djeljenja jedan podsustav evoulira u vanjskom potencijalu $V_{\text{left}}(x)$, a drugi evoulira u malo perturbiranom potencijalu $V_{\text{right}}(x)$ neko vrijeme t. Ti potencijali se mogu razlikovati od aksijalnog potencijala prije djeljenja (npr. mogu biti prošireni nakon djeljenja). Ako se početno stanje sustava može napisati kao superpozicija

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{lijevo}}(x_1,\ldots,x_N,0) + \psi_{\text{desno}}(x_1,\ldots,x_N,0)),$$

onda mjerenje interferencijskog uzorka (5.18) odgovara definiciji Loschmidtove jeke ili vjernosti u jednadžbama (5.1) i (5.2) [sa recimo $\psi_{\text{lijevo}} = \psi$ and $\psi_{\text{desno}} = \psi'$]. Prema tome takav eksperiment se u principu može koristiti za mjerenje dinamike Loschmidtove jeke koju smo ovdje računali. Da bi diskutirali početne

uvjete razmatramo posebno fazno-koherentno djeljenje u režimu srednjeg polja, a posebno u Tonks-Girardeau režimu.

U režimu srednjeg polja opisanom Gross-Pitaevskii teorijom (uz pretpostavku $T = 0$), kad se sustav fazno-koherentno podjeli, dobijemo dva kondenzata, jedna na "lijevo" i drugi na "desno", u fazno-koherentnom stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\text{lijevo}}(x,0) + \Phi_{\text{desno}}(x,0)),$$

gdje je Φ_{lijevo} (Φ_{desno}) valna funkcija kondenzata u "lijevom" ("desnom") podsustavu. Takav početni uvjet odgovara našim početnim uvjetima u režimu srednjeg polja i evolucija za neko vrijeme zadržavanja t (sa jednim kondenzatom u potencijalu sa šumom), nakon koje se potencijali zatočenja isključe i mjeri interferencijski uzorak, korespondira sa našim računima Loschmidtove jeke. Fluktuacija broja čestica između "lijevog" i "desnog" podsustava se za velike brojeve čestica može zanemariti.

Tonks-Girardeau plin je kompliciraniji zbog nekoliko razloga. Prvo, teško je postići TG plin i zatim ga podjeliti u postavima kakve koriste eksperimenti [61, 62, 63], zato jer sustav mora biti ekstremno uzak u transverzalnom smjeru i s malim linearnim gustoćama. Taj problem se može zaobići korištenjem optičkih rešetki gdje je TG plin već postignut [7] i gdje bi se djeljenje moglo izvesti koristeći tehniku kao u referenci [78]. Naime, superpozicijom dva periodička potencijala, sa omjerom konstanti rešetke jedna polovina i podesivim intenzitetom i relativnim fazama, svaka jednodimenzionalna cjev se može podjeliti na dvije paralelne cjevi. Druga komplikacija je povezana s početnim stanjem. Linearna gustoća je mala, zato se fluktuacije broja čestica u lijevom i desnom podsustavu ne mogu zanemariti, nakon djeljenja sustav bi bio u superpoziciji stanja s različim brojevima čestica lijevo i desno. Nadalje, jer je sustav u režimu jakog međudjelovanja, djeljenje bi dalo spregnuto početno stanje, koje se razlikuje od jednostavne superpozicije $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\text{lijevo}} + \psi_{\text{desno}})$. Zapravo, ako je TG stanje prije djeljenja jednostavno $\prod_{1\leq i<j\leq N} \text{sgn}(x_i - x_j) \det_{m,n=1}^{N}[\psi_m(x_n)]$ (uzimamo da je temperatura nula), stanje nakon djeljenja bi se moglo napisati

kao

$$\psi_B(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \prod_{1\le i<j\le N} \mathrm{sgn}(x_i - x_j) \det_{m,n=1}^{N} [\frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{m,\mathrm{lijevo}}(x_n) + \psi_{m,\mathrm{desno}}(x_n)\}]. \tag{5.19}$$

Zaključujemo da naši računi Loschmidtove jeke u potpoglavlju 5.1 ne odgovaraju egzaktno dinamici iz početnog stanja (5.19). Ali možemo opravdano sumnjati da će se očekivana vrijednost operatora (5.18) ponašati gausijanski, zbog konstrukcije TG stanja preko Slaterovih determinanti i primjenjivosti trag-log formule.

Naši računi pretpostavljaju da je temperatura nula, zato bi vremenska skala na kojoj se događa gubitak koherencije zbog temperaturnih efekata [61, 67, 68, 69] trebala biti dovoljno duga da gubitak koherencije bude dominantno zbog malog nasumičnog potencijala šuma. To se može u principu postići odabirom dovoljno velike amplitude šuma. Eksperimenti bi bili jednostavniji da se dva nekorelirana šuma uvedu u "lijevi" i "desni" podsustav, to ne utječe na ponašanje i rezultate koje smo opazili u našim simulacijama.

5.4 Zaključak

Istražili smo Loschmidtovu jeku (vjernost) u dva režima jednodimenzionalnih međudjelujućih bozonskih plinova: jako-međudjelujućem Tonks-Girardeau režimu i slabo-međudjelujućem režimu srednjeg polja opisanom Gross-Pitaevskii teorijom. Plin je u početku u osnovnom stanju potencijala zatočenja kojeg zatim naglo proširimo i proučavamo opadanje vjernosti zbog malog prostornog šuma.

Nalazimo (numerički i analitički) da vjernost Tonks-Girardeau plina trne kao gausijanska funkcija kojoj je eksponent proporcionalan broju čestica i kvadratu amplitude šuma. Naši rezultati ne ovise o detaljima potencijala zatočenja, opazili smo isto ponašanje za plin koji je u početku u osnovnom stanju harmoničkog oscilatora kojeg zatim naglo proširimo. Nadalje, nalazimo da gausijansko ponašanje ostaje i ukoliko dinamika počne iz nekog pobuđenog stanja ili superpozicije takvih stanja.

U režimu srednjeg polja Loschmidtova jeka trne brže za veće nelinearnosti $\tilde{g}_{1D}N$, opadanje postaje naglije kako povećavamo nelinearnost (za velike ne-

linearnosti smo reporducirali rezultat iz reference [71]); pokazuje i veću osjetljivost na pojedinu realizaciju potencijala šuma, osobito za male nelinearnosti.

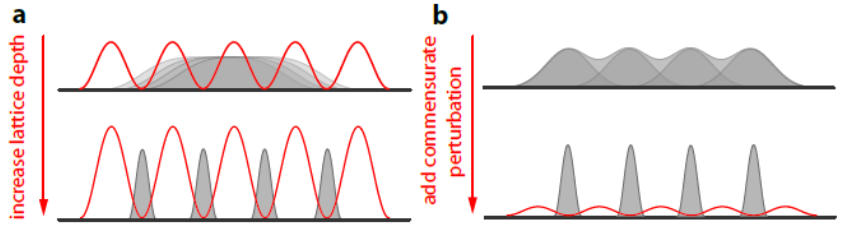
Diskutirali smo naše račune u kontekstu već postojećih eksperimenata [61, 62, 63] i teorijskih studija [64, 65, 66, 67, 68, 69] o interferenciji između paralelnih 1D bozonskih plinova. Nalazimo da se naši računi u režimu srednjeg polja mogu testirati u takvim eksperimentima. Za eksperimente u Tonks-Girardeau režimu bolji su kandidat optičke rešetke, međutim početno stanje koje bi dobili djeljenjem Tonks-Girardeau plina ne odgovara početnom stanju koje smo mi ovdje koristili, dinamika iz takvog početnog stanja tek treba biti ispitana (vidi potpoglavlje 5.3).

Poglavlje 6

Zapinjanje u Tonks-Girardeau plinu: dijagnostika pomoću vjernosti osnovnog stanja i Loschmidtove jeke

U ovom poglavlju proučavamo utjecaj slabog periodičkog potencijala na 1D jako-međudjelujući bozonski plin. Teorijski je predviđeno [79] da dodavanje proizvoljno slabog periodičkog potencijala (optičke rešetke) duž jako-međudjelujućeg 1D bozonskog plina, može izazvati kvantni fazni prijelaz u stanje slično kristalu, gdje atomi sjede u minimumima periodičkog potencijala, bez obzira koliko je plitak taj potencijal. Kažemo da atomi "zapnu" na optičkoj rešetki, a taj kvantni fazni prijelaz nazivamo "zapinjanje" (od engleskog *pinning*). Zapinjanje se dešava u 1D jako-međudjelujućim bozonskim plinovima ($\gamma > 3.5$) [79] ukoliko je dodana optička rešetka sumjerljiva sa atomskom gustoćom tj. ukoliko imamo jedan atom po minimumu optičke rešetke. Nedavno je zapinjanje eksperimentalno demonstrirano u ansamblu 1D ultra-hladnih bozonskih plinova [80]. Zapinjanje je skicirano na slici 6.1.

U ovom poglavlju koristimo koncept vjernosti osnovnog stanja da ispitamo zapinjanje u Tonks-Girardeau režimu. Istražit ćemo i neravnotežnu dinamiku Tonks-Girardeau plina nakon naglog uključivanja optičke rešetke koristeći Loschmidtovu jeku (5.1) kao dijagnostički alat. Važno je naglasiti da je u poglavlju 5 vjernost bila isto što i Loschmidtova jeka, jer smo gledali preklop vremen-



Slika 6.1: Sivom bojom je označena gustoća atoma, a crvena linija predstavlja optičku rešetku. a) Slabo-međudjelujući 1D bozonski plin u optičkoj rešetki. Valna funkcija atoma se proteže duž rešetke, potrebno je povećati amplitudu optičke rešetke iznad neke kritične vrijednosti da bi atomi zapeli u minimumima rešetke. b) Za jako odbojno međudjelovanje, atomi u 1D bozonskom plinu su jako korelirani i dovoljno je dodati optičku rešetku s malom amplitudom, sumjerljivu atomskoj gustoći, da bi atomi zapeli u minimumima rešetke. Slika je preuzeta iz [80].

ski ovisnih valnih funkcija, koji se mogao dvojako interpretirati [vidi (5.1) i (5.2)]. U ovom poglavlju razmatramo vjernost osnovnog stanja koja je statička veličina, a Loschmidtova jeka se odnosi na neravnotežnu dinamiku.

6.1 Vjernost osnovnog stanja i kvantni fazni prijelazi

Općenito, Hamiltonijan sustava koji prolazi kroz kvantni fazni prijelaz možemo pisati kao

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}',$$

gdje je $\hat{H}'$ dio Hamiltonijana odgovoran za fazni prijelaz, a λ njegov parametar. Karakterisitka faznog prijelaza je da mala varijacija parametra λ vodi na dramatičnu promjenu energetskog spektra sustava, tj. da se osnovna stanja Hamiltonijana $\hat{H}(\lambda)$ i $\hat{H}(\lambda + \delta\lambda)$ značajno razlikuju. Kao posljedica toga, preklop osnovnih stanja je veličina osjetljiva na kvantni fazni prijelaz [81]. Prema referenci [79] ako uzduž Tonks-Girardeau plina uključimo proizvoljno slabu optičku rešetku, kojoj je periodičnost takva da imamo jedan atom po minimumu rešetke, plin će prijeći u stanje Mott-izolatora [79]. U stanju Mott-izolatora atomi su lokalizirani u minimumima optičke rešetke i otvara se procjep u spektru pobuđenja sustava [79, 80]. Taj kvantni fazni prijelaz nazivamo

zapinjanje. Uvjet da imamo jedan atom po minimumu optičke rešetke nazivamo *sumjerljivost* rešetke i atomske gustoće. U tom duhu možemo za $\lambda\hat{H}'$ uzeti potencijal optičke rešetke $\lambda \sin^2(kx)$ sumjerljiv sa atomskom gustoćom i reći da Tonks-Girardeau plin ima kvantni fazni prijelaz, koji nazivamo zapinjanje, kad $\lambda = 0$ promjenimo na $\lambda + \delta\lambda = V_l$, gdje je V_l amplituda optičke rešetke. Uzimamo da je $\hat{H}(\lambda = 0)$ Hamiltonijan Tonks-Girardeau plina u potencijalu $V_0(x)$, a $\hat{H}(\lambda + \delta\lambda = V_l)$ Hamiltonijan Tonks-Girardeau plina u potencijalu $V_0(x) + V_l(x)$, gdje je $V_l(x) = V_l \sin^2(kx)$ potencijal optičke rešetke. Osnovno stanje od $\hat{H}(0)$ označavamo sa $|\Psi_0\rangle$ i osnovno stanje od $\hat{H}(V_l)$ sa $|\Phi_0\rangle$. očekujemo da će preklop osnovnih stanja $\langle\Psi_0|\Phi_0\rangle$ biti osjetljiv čak i na infinitezimalno slabu optičku rešetku ako je periodičnost rešetke sumjerljiva atomskoj gustoći [79]. U teoriji kvantnih informacija, kvadrat apsolutne vrijednosti preklopa valnih funkcija je poznat kao vjernost [84]. U tom duhu definiramo vjernost osnovnog stanja kao

$$F = |\langle\Psi_0|\Phi_0\rangle|^2.$$

U ostatku ovog poglavlja, vjernost osnovnog stanja će se često pojavljivati više puta unutar iste rečenice. Zbog toga ćemo naizmjenice koristiti vjernost osnovnog stanja i engleski akronim GSF (*Ground State Fidelity*).

6.2 Fermi-Bose mapiranje i vjernost osnovnog stanja

Osobitost zapinjanja je da čak i slaba optička rešetka može dramatično promjeniti energetski spektar sustava i preklop osnovnih stanja značajno opada. Koristeći Fermi-Bose mapiranje (2.12) vjernost osnovnog stanja (GSF) možemo izraziti preko jednočestičnih stanja $\psi_i(x)$ potencijala $V_0(x)$ i jednočestičnih

stanja $\phi_i(x)$ potencijala $V_0(x) + V_l(x)$:

$$\begin{aligned} |\langle\Psi_0|\Phi_0\rangle|^2 &= |\frac{1}{N!}\int dx_1 \cdots dx_N \sum_{\sigma_1}(-)^{\sigma_1}\prod_{i=1}^{N}\psi^*_{\sigma_1(i)}(x_i)\sum_{\sigma_2}(-)^{\sigma_2}\prod_{j=1}^{N}\phi_{\sigma_2(j)}(x_j)|^2 \\ &= |\frac{1}{N!}\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}(-)^{\sigma_1}(-)^{\sigma_2}\prod_{i=1}^{N}\int\psi^*_{\sigma_1(i)}(x)\phi_{\sigma_2(i)}(x)dx|^2 \\ &= |\det\mathbf{A}|^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

gdje su elementi matrice $\mathbf{A}$ dani sa

$$A_{ij} = \int \psi_i^*(x)\phi_j(x)dx. \tag{6.2}$$

Istražit ćemo zapinjanje Tonks-Girardeau plina u dva tipa potencijala zatočenja $V_0(x)$, beskonačno dubokoj kutiji i harmoničkom oscilatoru. Beskonačno duboku kutiju istražujemo jer je dovoljno jednostavna da dopušta analitičku analizu pa je korisitmo kao testni poligon za razumjevanje odnosa između zapinjanja i vjernosti osnovnog stanja. Harmonički oscilator je važniji sa eksperimentalne točke gledišta, jer je korišten u eksperimentu [80].

6.3 Zapinjanje Tonks-Girardeau plina u beskonačno dubokoj kutiji: vjernost osnovnog stanja

U ovom potpoglavlju primjenjujemo koncept vjernosti osnovnog stanja [jednadžbe (6.1)-(6.2)] na proučavanje zapinjanja Tonks-Girardeau (TG) plina u potencijalu beskonačno duboke kutije,

$$V_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } 0 \le x \le L \\ \infty, & \text{drugdje.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Optička rešetka je definirana kao $V_l(x) = V_l\cos^2(kx+\phi)$. periodičnost rešetke je u vezi sa širinom kutije preko relacije $k = M\pi/L$, gdje je M cijeli broj. Prema tome, za $\phi = 0$ imamo točno M bunara unutar kutije (M je broj minimuma rešetke), i očekujemo zapinjanje za slučaj kad imamo $N = M$ čestica u kutiji. Za druge izbore faze ϕ imamo $M-1$ bunar unutar kutije, i dva polu-bunara

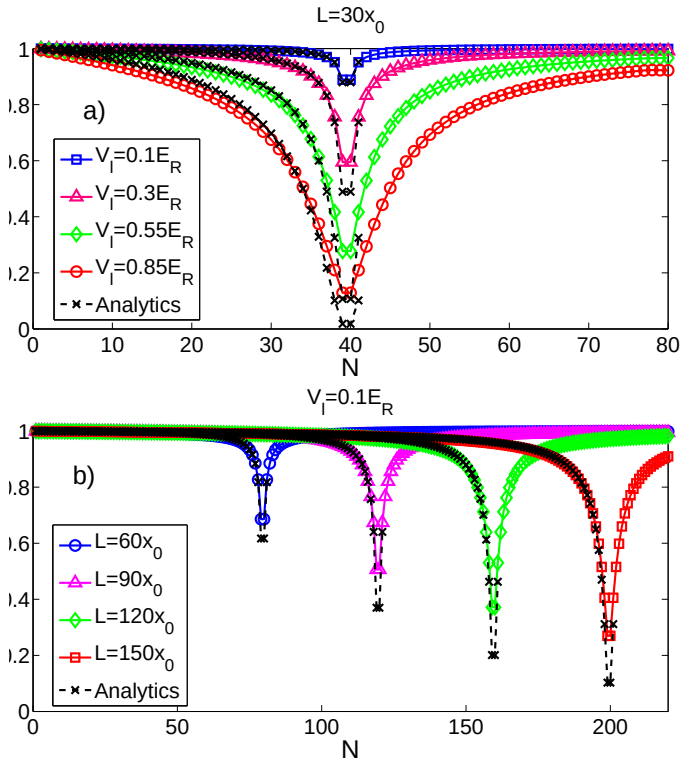
na početku i kraju kutije. U termodinamičkom limesu ti rubni uvjeti nisu od važnosti, međutim mi ćemo u našim simulacijama istražiti utjecaj tih rubnih uvjeta i konačnosti sustava, jer mogu biti od važnosti u eksperimentima. Prvo ćemo proučavati vjernost osnovnog stanja (GSF) numerički kao funkciju broja čestica N, za različite amplitude rešetke V_l i veličine sustava L.

6.3.1 Numeričke simulacije

U našim numeričkim simulacijama x-prostor je u jedinicama $x_0 = 1\mu m$. Amplituda rešetke V_l i sve druge energije su u jedinicama energije odboja (recoil energy) $E_R = (\hbar k)^2/(2m)$. Masa m odgovara masi atoma ^{87}Rb. U ovom potpoglavlju uzimamo za valni vektor rešetke $k = 4\pi x_0^{-1}/3$ ($\lambda = 2\pi/k = 3x_0/2$). Širina kutije $L = M\pi/k = M\lambda/2$ će varirati. U svim simulacijama vrijedi $V_l \leq E_R$, tj. radimo u režimu slabe optičke rešetke [79, 80]. Jednočestična stanja potencijala $V_0(x)$ su $\psi_n(x) = \sqrt{2/L}\sin(n\pi x/L)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Jednočestična stanja $\phi_n(x)$ od potencijala $V_0(x) + V_l(x)$ smo numerički izračunali. Od tih jednočestičnih stanja računamo GSF koristeći jednadžbu (6.1).

Slika 6.2(a) pokazuje GSF kao funkciju broja čestica N za različite amplitude rešetke V_l. Faza je $\phi = 0$, tj. radimo sa $V_l(x) = V_l\cos^2(kx)$. Širina kutije je $L = 40\pi/k = 30x_0$, što daje $M = 40$ i očekujemo da se zapinjanje desi na $N = 40$. Uistinu, opažamo dramatičan pad vjernosti kako se približavamo uvjetu sumjerljivosti, međutim, GSF je isti za $N = 39$ i $N = 40$. U termodinamičkom limesu ta anomalija nije važna, ali eksperimenti se rade upravo sa parametrima sličnima kakve mi ovdje koristimo, tako da su za eksperimente efekti konačnosti sustava zanimljivi i vrijedi ih istražiti. Ovu anomaliju ćemo objasniti u idućem potpoglavlju 6.3.2 koristeći prvi red računa smetnje. Na slici 6.2(a) također pokazujemo i GSF dobiven u prvom redu računa smetnje (crni x-evi, povezani crtkanom linijom) uvedenom u potpoglavlju 6.3.2, vidimo dobro slaganje s numerikom. Slika 6.2(b) pokazuje GSF kao funkciju broja čestica N, za različite vrijednosti širine kutije L (amplituda rešetke je konstantna $V_l = 0.1E_R$). Vidimo da se GSF smanjuje u kritičnom području kako povećavamo L. U idućem potpoglavlju ćemo pokazati da u kritičnom području $F \to 0$ kako $L \to \infty$.

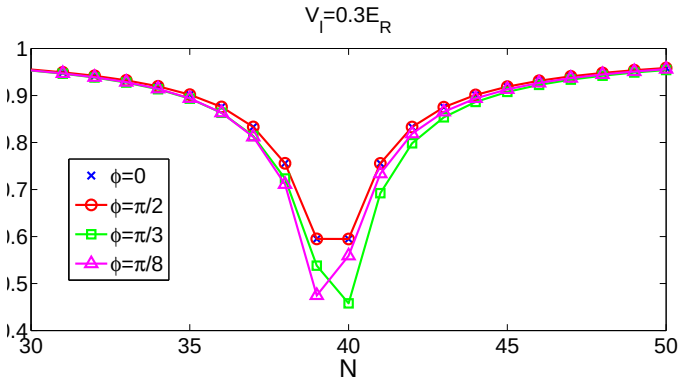
Diskutirajmo rubne uvjete za konačne sustave. Zanimljivo, ako uzmemo fazu $\phi = \pi/2$ za rešetku, tako da $V_l(x) = V_l\sin^2(kx)$, dobijemo približno iste



Slika 6.2: Vjernost osnovnog stanja (GSF) (a) kao funkcija broja čestica N, za konstantnu širinu kutije $L = 30x_0$ i valni vektor rešetke $k = 4\pi x_0^{-1}/3$ za različite amplitude rešetke V_l. Crni x-evi predstavljaju analitičke rezultate (za $N \leq M + 1$) dobivene u prvom redu računa smetnje, vidimo dobro slaganje sa numerikom. Vjernost osnovnog stanja (b) kao funkcija N, za konstantnu amplitudu rešetke $V_l = 0.1E_R$ i valni vektor $k = 4\pi/3$ za različite širine kutije L. Vidi tekst za detalje.

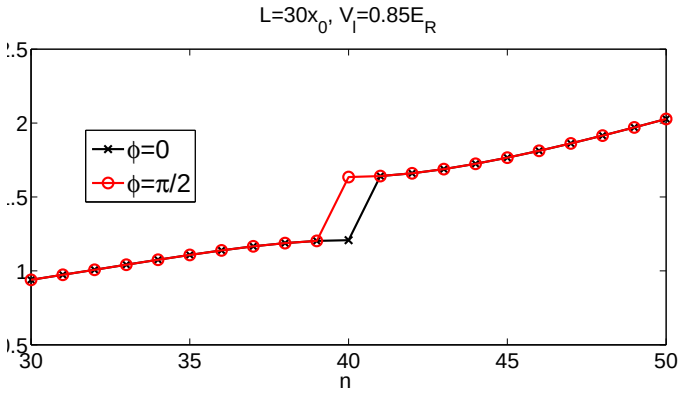
vrijednosti za GSF. Na slici 6.3 prikazujemo GSF za cosinus-kvadrat ($\phi = 0$ crveni krugovi) i sinus-kvadrat ($\phi = \pi/2$ plavi x-evi) rešetku, ove vrijednosti se preklapaju i idu u parovima. Ova simetrija je izgubljena za faze ϕ između 0 i $\pi/2$. Kao primjer, na slici 6.3 smo prikazali GSF kao funkciju broja čestica za $\phi = \pi/3$ (zeleni kvadrati) i $\phi = \pi/8$ (rozi trokutovi); postoji jedna točka u kojoj GSF ima minimum, ili na $N = 39$ ili na $N = 40$, i minimum je nešto dublji. Za druge faze između $\phi = 0$ i $\phi = \pi/2$, rezultati su kvalitaitvno i kvantitativno slični kao za $\phi = \pi/3$ i $\phi = \pi/8$.

Zanimljivo je da za kosinus-kvadrat rešetku, sa točno M bunara unutar kutije, vidimo učinak zapinjanja na $N = M - 1, M$, i da za iste vrijednosti vidimo učinak zapinjanja za sinus-kvadrat rešetku sa $M - 1$ bunarom un-



Slika 6.3: Vjernost osnovnog stanja (GSF) kao funkcija broja čestica N, za različite faze ϕ rešetke $V_l(x)$. Izvan prezentiranog intervala brojeva čestica, vjernosti osnovnog stanja za različite faze se preklapaju. Vidi tekst za detalje.

utar kutije i dva polu-bunara krajevima kutije. Da bi vidjeli razlike između rubnih uvjeta, na koje je GSF neosjetljiv, trebamo gledati druge veličine. Istražit ćemo ponašanje energijskog spektra (kao u eksperimentu [80]) i jednočestične gustoće. Na slici 6.4 prikazujemo spektar jednočestičnih energija

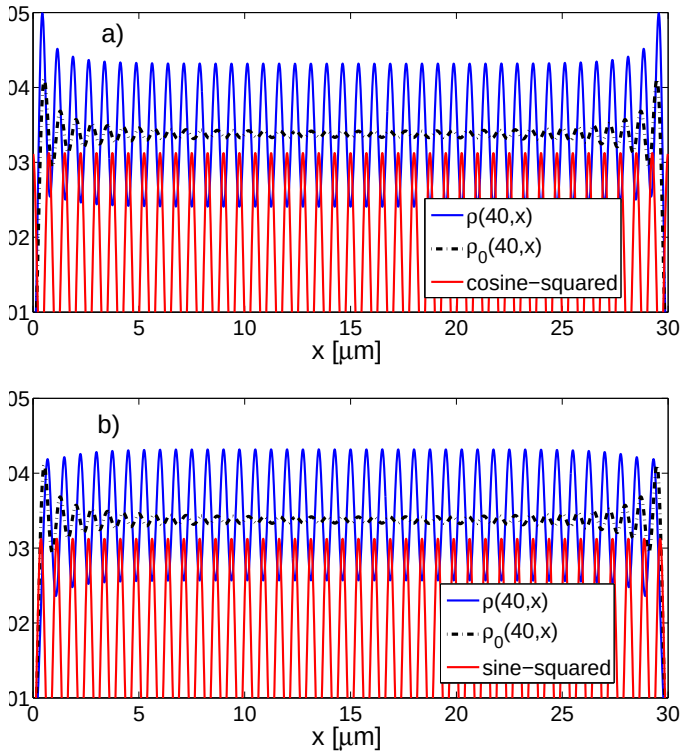


Slika 6.4: Spektar jednočestičnih energija za kosinus-kvadrat $\phi = 0$ (crni x-evi) i sinus-kvadrat $\phi = \pi/2$ (crveni krugovi) rešetku, drugi parametri su $L = 30x_0$ i $V_l = 0.85E_R$. Vidi tekst za detalje.

potencijala $V_0(x) + V_l(x)$ za sinus- i cosinus-kvadrat rešetke. Kao i na slici 6.2(a) parametri su $L = 30x_0$ i $k = 4\pi x_0^{-1}/3$ (što daje $M = 40$), i amplituda rešetke je $V_l = 0.85E_R$. Vidimo da je energijski spektar drukčiji za te dvije rešetke. Vidimo procjep u spektru koji se otvara na $n = 40$ (n je indeks jednočestičnih stanja) za kosinus-kvadrat rešetku, dok se za sinus-kvadrat rešetku procjep otvara na $n = 39$. Učinci zapinjanja na tim n-ovima intuitivno su jasni

kad razmišljamo u terminima broja cijelih bunara (minimuma) koje pojedina rešetka ima u unutar kutije. Iako mi ovdje govorimo o jednočestičnom energetskom spektru, energetski procjep će biti prisutan u višečestičnom energetskom spektru Tonks-Girardeau plina, zbog Fermi-Bose mapiranja.

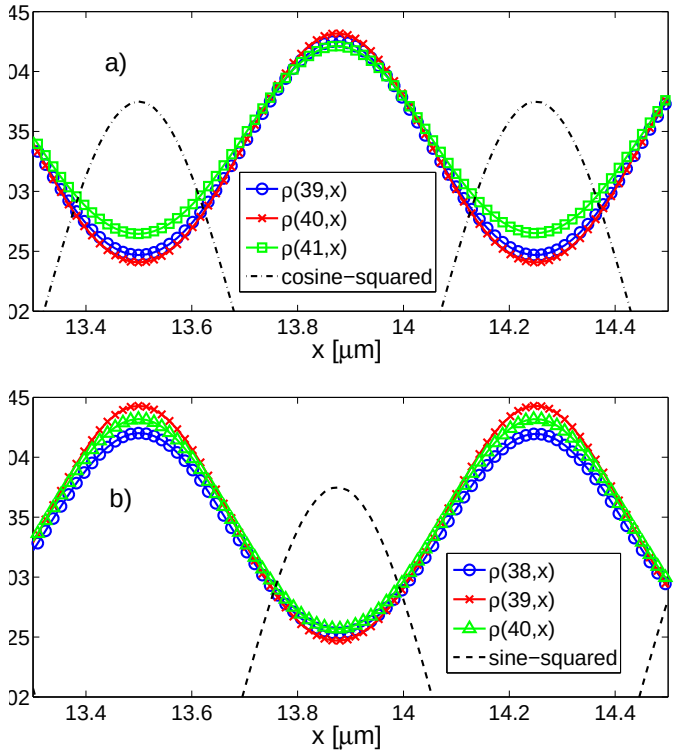
Sad se okrećemo jednočestičnim gustoćama vjerojatnosti $\rho(N,x) = \sum_{n=1}^{N} |\phi_n(x)|^2/N$, koje su prikazane na slici 6.5(a) za kosinus-kvadrat rešetku i (b) za sinus-kvadrat rešetku, u usporedbi sa gustoćom $\rho_0(N,x) = \sum_{n=1}^{N} |\psi_n(x)|^2/N$, i maksimumima i minimumima rešetke (parametri su $N = M = 40$, $V_l = 0.55E_R$ i $L = 30x_0$). Vidimo da se u oba slučaja maksimumi gustoće $\rho(N,x)$ nalaze gdje su minimumi rešetke, također dva slučaja se razlikuju na rubovima kutije, što se reflektira i na energijski spektar ali ne i na GSF.



Slika 6.5: Jednočestična gustoća $\rho_N(x)$ osnovnog stanja N Tonks-Girardeau bozona u potencijalu $V_0(x)+V_l(x)$. (a) $\rho(40,x)$ (plava linija) u cosinus-kvadrat rešetki (crvena linija) i (b) $\rho(40,x)$ (plava linija) u sinus-kvadrat rešetki (crvena linija). Za usporedbu smo prikazali i gustoće $\rho_0(40,x)$ osnovnog stanja $N = 40$ Tonks-Girardeau bozona u potencijalu $V_0(x)$ (crna točkasta linija). Vidi tekst za detalje.

Na slici 6.6(a) prikazujemo isječak gustoće $\rho(N = M, x)$ (crveni x-evi) us-

poredno sa dvije najbliže gustoće $\rho(N = M - 1, x)$ (plavi krugovi) i $\rho(N = M + 1, x)$ (zeleni trokutovi) u kosinus-kvadrat rešetki (crna crtkana linija). Vidimo da je vjerojatnost da čestica sjedi u minimumu kosinus-kvadrat rešetke najveća za $N = M$ atoma (također, vjerojatnost da su atomi u maksimumu rešetke je najmanja za $N = M$ atoma). To opažanje nam potvrđuje indikacije koje je dao jednočestični energijski spektar, na slici 6.3, o tome gdje se događa zapinjanje u konačno velikom sustavu. Na slici 6.6(b) pokazujemo gustoću $\rho(N = M - 1, x)$ (crveni križevi) usporedno sa dvije najbliže gustoće $\rho(N = M - 2, x)$ (plavi krugovi) i $\rho(N = M, x)$ (zeleni trokutovi) u sinus-kvadrat rešetki. Vidimo da je najjaći učinak zapinjanja za $N = M - 1$, što je konzistentno sa jednočestičnim energijskim spektrom za sinus-kvadrat rešetku na slici 6.3.



Slika 6.6: Jednočestična gustoća. (a) $\rho(40, x)$ (crveni x-evi) i dvije najbliže gustoće $\rho(39, x)$ (plavi krugovi) i $\rho(41, x)$ (zeleni trokutovi) u kosinus-kvadrat rešetki (crna crtkana linija). (b) $\rho(39, x)$ (crveni križevi) i dvije najbliže gustoće $\rho(38, x)$ (plavi krugovi) i $\rho(40, x)$ (zeleni trokutovi) u sinus-kvadrat rešetki (crna crtkana linija). Izabrali smo manji interval na osima zbog bolje vidljivosti. Vidi tekst za detalje.

Vidimo da energija i jednočestična gustoća mogu razlikovati različite rubne uvjete, dok je vjernost osnovnog stanja manje osjetljiva na te efekte. Vjernost osnovnog stanja ima prednost nad energijskim spektrom i gustoćom u termodinamičkom limesu gdje dramatično ukazuje gdje se događa zapinjanje čak i za infinitezimalnu amplitudu optičke rešetke, kad je energijski procjep teško vidljiv.

6.3.2 Analiza vjernosti osnovnog stanja pomoću prvog reda računa smetnje

U ovom potpoglavlju analiziramo ponašanje vjernosti osnovnog stanja (GSF-a), u kontekstu zapinjanja za Tonks-Girardeau plin u beskonačno dubokoj kutiji, pomoću prvog reda računa smetnje. Ne-perturbirana stanja su $\psi_n(x) = \sqrt{(2/L)}\sin(n\pi x/L)$ tj. jednočestična stanja potencijala $V_0(x)$. Fokusirajmo se prvo na kosinus-kvadrat rešetku $V_l(x) = V_l\cos^2(M\pi x/L)$, koju tretiramo kao malu perturbaciju. Označit ćemo jednočestična stanja potencijala $V_0(x)+V_l(x)$ kao $\phi_n(x)$. Do prvog reda u amplitudi optičke rešetke, jednočestična stanja potencijala $V_0(x) + V_l(x)$ su

$$\phi_i(x) \propto \psi_i(x) + a_{2M-i}\psi_{2M-i}(x) + a_{2M+i}\psi_{2M+i}(x), \tag{6.4}$$

gdje je $i \in \{1, \ldots, M-1, M+1, \ldots, 2M-1\}$; slučaj $i = M$ razmatramo zasebno. Taj interval indeksa i pokriva brojeve čestica od interesa, kritično područje je $N \sim M$ u sredini tog intervala. Koeficijenti su dani sa $a_{2M-i} = V_l/[4(E_{2M-i} - E_i)]$ i $a_{2M+i} = V_l/[4(E_{2M+i} - E_i)]$ gdje je E_i jednočestična energija i-tog stanja u potencijalu $V_0(x)$. Pošto je $E_i = (i/M)^2 E_R$ ($E_R = (\hbar k)^2/2m$) možemo pisati

$$a_{2M\mp i} = \frac{M}{16(M \mp i)}\frac{V_l}{E_R}. \tag{6.5}$$

Koeficijent a_{2M+i} u jednadžbi (6.4) možemo zanemariti zbog nazivnika u jednadžbi (6.5), možemo pisati za $i \neq M$

$$\phi_i(x) \approx \frac{\psi_i(x) + a_{2M-i}\psi_{2M-i}(x)}{\sqrt{1 + |a_{2M-i}|^2}}, \tag{6.6}$$

gdje smo normalizirali valnu funkciju. Vidimo da je perturbacija najdominantnija kad je $i = M - 1$ i $i = M + 1$.

Za $i = M$, prvi red računa smetnje daje $\phi_M(x) \propto \psi_M(x) + a_{3M}\psi_{3M}(x)$, gdje je $a_{3M} = V_l/[4(E_{3M} - E_M)] = V_l/32E_R$ dovoljno malo za slabu rešetku $V_l/E_R \ll 1$ te ga možemo zanemariti i pisati

$$\phi_M(x) \approx \psi_M(x). \tag{6.7}$$

U stvari ta relacija vrijedi i za jače rešetke, dok je god ispunjeno $V_l/32E_R \ll 1$.

Da bi odredili GSF moramo izračunati matrične elemente A_{ij} definirane sa (6.2). Prvo razmatramo slučaj $N < M$:

$$A_{ij} = \frac{\delta_{ij} + a_{2M-j}\delta_{i,2M-j}}{\sqrt{1 + |a_{2M-j}|^2}}, \tag{6.8}$$

gdje je $i, j = 1, \ldots, N$. Ako je $N < M$ onda drugi delta član u (6.8) daje nulu, i matrica (6.8) postaje dijagonalna $A_{ii} = (\sqrt{1 + |a_{2M-i}|^2})^{-1}$. Prema tome, GSF za $N < M$ postaje

$$F \approx |\prod_{i=1}^{N} A_{ii}|^2 = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 + |a_{2M-i}|^2} \tag{6.9}$$

Pošto koeficijenti $|a_{2M-i}|^2$ rastu kvadratično kako se i približava M, razumjemo ponašanje GSF-a kad se N približava M odozdo, koje je opaženo na slici 6.2(a) and (b). Na slici 6.2(a) smo prikazali rezultate jednadžbe (6.9) (crni x-evi), slaganje je kvalitativno i kvantitativno izvrsno za male amplitude rešetke, za veće amplitude je kvantitativno lošije u samom minimumu GSF-a, ali jedndžba (6.9) i tad daje odlične kvalitativne rezultate i točno upućuje na kritično područje gdje se događa zapinjanje.

Slučaj kad je $N = M$ je lako riješiti zbog $A_{MM} \approx 1$, tada GSF postaje

$$F \approx \prod_{i=1}^{M-1} \frac{1}{1 + |a_{2M-i}|^2} |A_{MM}|^2, \tag{6.10}$$

što je identično vrijednosti za $N = M - 1$, što je u skladu sa numeričkim opažanjem. Vidimo da su rezultati jednadžbe (6.9) u kritičnom području $N \sim M$ sistematski ispod vrijednosti dobivenih egzaktnom numerikom za veće

amplitude rešetke, vidi slike 6.2(a) i (b). Drugi red računa smetnje bi digao vrijednosti GSF-a i ne bi promjenio odnos GSF-a za $N = M - 1$ i $N = M$, jer i u drugom redu računa smetnje ostaje $A_{MM} \approx 1$ (ovdje to nije pokazano).

Ako proširimo kutiju na npr. $L' = 2L$, a zadržimo isti valni vektor $k = M\pi/L$, dobijemo $M' = 2M$, i minimumu GSF ide u desno na $N = 2M - 1$ i $N = 2M$, i smanjuje se u iznosu, jer se povećanjem L-a (odnosno M-a) povećavaju koeficijenti u nazivniku jednadžbe (6.9).

Prvi red računa smetnje također daje objašnjenje za utjecaj faze ϕ rešetke. Za sinus-kvadrat rešetku, zbog $\cos^2(kx) = 1 - \sin^2(kx)$, integrali koji se pojavljuju u perturbacijskoj teoriji su

$$\int \psi_i^*(x) \cos^2(kx) \psi_j(x) dx = -\int \psi_i^*(x) \sin^2(kx) \psi_j(x) dx,$$

pa koeficijenti u perturbacijskom razvoju mjenjaju predznak, valne funkcije se razlikuju, ali GSF (6.9) ovisi o apsolutnoj vrijednosti tih koeficijenata i nije osjetljiv na promjenu faze s $\phi = 0$ na $\phi = \pi/2$. To objašnjava rezultate Slike 6.3 za kosinus-kvadrat (crveni krugovi) i sinus-kvadrat rešetku (plavi x-evi). Za neku proizvoljnu fazu između 0 i $\pi/2$, glavna razlika je da jednadžbe (6.4) i (6.7) više ne vrijede, potrebno je više koeficijenata u razvoju $\phi_i(x)$ preko $\psi_i(x)$, posebno oko $i \sim M$, što narušava simetriju između slučajeva $N = M$ i $N = M - 1$.

Razmotrimo konačno slučaj $N = M + 1$ za kosinus-kvadrat rešetku. Sad matrica $\mathbf{A}$ dobije dva ne-dijagonalna elementa, $A_{M+1,M-1}$ i $A_{M-1,M+1}$, sa sljedećim svojstvom

$$A_{M+1,M-1} = -A_{M-1,M+1} \approx \frac{a_{M+1}}{\sqrt{1 + |a_{M+1}|^2}}, \tag{6.11}$$

zbog jednadžbe (6.5). U tom slučaju determinanta matrice (6.8) postaje

$$\det \mathbf{A} \approx \prod_{i=1}^{M-2} A_{ii} A_{MM} (A_{M-1,M-1} A_{M+1,M+1} - A_{M+1,M-1} A_{M-1,M+1}).$$

Zbog (6.5) i (6.11) dobijemo $(A_{M-1,M-1} A_{M+1,M+1} - A_{M+1,M-1} A_{M-1,M+1}) \approx 1$, a pošto je $A_{MM} \approx 1$, konačno dobijemo da je determinanta matrice (6.8) za

$N = M + 1$ čestica

$$\det \mathbf{A} \approx \prod_{i=1}^{M-2} A_{ii}.$$

Iz zadnje relacije vidimo da su vjernosti osnovnog stanja (GSF) za $N = M+1$ i $N = M - 2$ približno jednake u prvom redu računa smetnje. Na Slici 6.2(a) i (b) smo prikazali ove analitičke rezultate za $N = M, M + 1$ (crni x-evi) zajedno sa analitičkim rezultatima GSF-a za $N < M$ (crni x-evi). Vidimo da je za najmanju amplitudu rešeteke $V_l = 0.1E_R$ slaganje izvrsno kvalitativno i kvantitativno, sa povećanjem amplitude rešetke GSF-ovi dobiveni analitikom su sistematski ispod rezultata numerike, ali kvalitativno ponašanje je u skladu s numerikom.

6.4 Zapinjanje Tonks-Girardeau plina u harmoničkom oscilatoru: vjernost osnovnog stanja

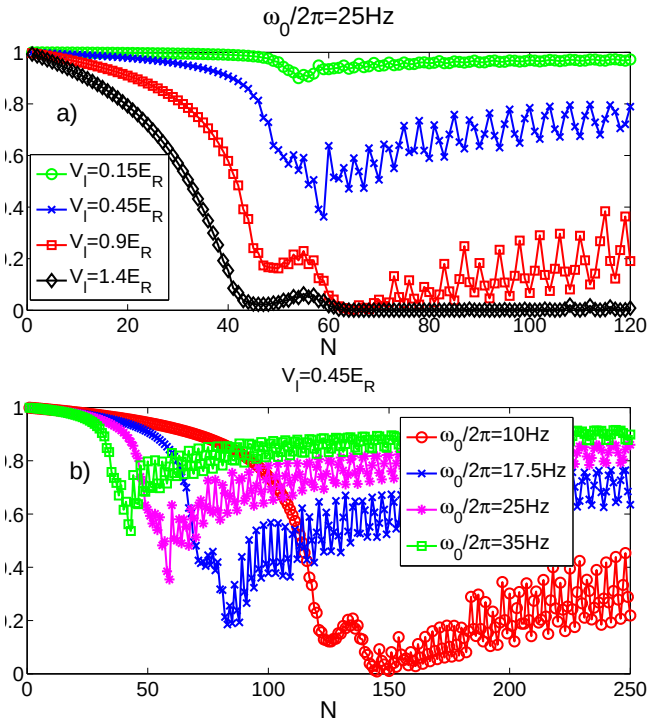
U ovom potpoglavlju proučavamo zapinjanje Tonks-Girardeau plina u potencijalu harmoničkog oscilatora

$$V_0(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}. \tag{6.12}$$

Odabiremo parametre kao u eksperimentu [80]. Atomi unutar zamke su ^{133}Cs. Optička rešetka je $V_l(x) = V_l \sin^2(kx)$ sa $k = 1.88\pi x_0^{-1}$, gdje je $x_0 = 1\mu m$, tako da je valna duljina rešetke $\lambda = 1064$nm. Amplituda rešetke i sve druge energije su u jedinicama energije odboja $E_R = (\hbar k)^2/(2m)$.

Na slici 6.7(a) prikazujemo vjernost osnovnog stanja (GSF) kao funkciju broja čestica N za različite vrijednosti amplitude rešetke V_l. Frekvencija harmoničkog oscilatora je $\omega_0/2\pi = 25$Hz (slično kao u eksperiemntu $\omega_{exp}/2\pi = 22(3)$Hz [80]). Vidimo, za sve amplitude, da GSF prvo monotono opada, slično kao i u beskonačno dubokoj kutiji na slikama 6.2(a) i (b), zatim GSF krene naglo opadati i na $N \sim 50$ ima prvi lokalni minimum nakon kojeg krene oscilirati s još dubljim minimumima. Za manje amplitude $V_l = 0.15E_R$ (zeleni krugovi) i $V_l = 0.45E_R$ (plavi x-evi) oscilacije imaju globalni minimum na $N \approx 60$, nakon kojeg GSF lagano raste, ali sporije u odnosu na brzinu kojom pada prema prvom minimumu, odnosno GSF nije simetričan oko minimuma kao u

slučaju potencijala beskonačno duboke kutije. Za veću amplitudu $V_l = 0.9E_R$ (crveni kvadrati) GSF je efektivno nula $F \approx 0$ za N između $N \sim 60$ i $N \sim 70$, a iznad $N \sim 70$ prosječni GSF počinje lagano rasti. Konačno, za još veću amplitudu $V_l = 1.4E_R$ (crni dijamanti) (slična amplituda je korištena u eksperimentu $V_{exp} = 1.5(1)E_R$ [80]) GSF opada na vrijednosti malo iznad nule već za $N \sim 45$, zatim nakon male grbe, vidimo da je $F \approx 0$ od $N \sim 60$ do $N \sim 110$, iznad $N \sim 110$ GSF lagano raste i razvije oscilacije (nije pokazano) slično kao GSF za $V_l = 0.9E_R$ (crveni kvadrati). Na slici 6.7(b) prikazujemo vjernost



Slika 6.7: Vjernost osnovnog stanja (GSF) kao funkcija broja čestica N (a) za različite amplitude rešetke V_l uz konstantnu frekvenciju $\omega_0/2\pi = 25$Hz. Vjernost osnovnog stanja kao funkcija broja čestica N (b) za različite frekvencije ω_0 uz konstantnu amplitudu rešetke $V_l = 0.45E_R$. Vidi tekst za detalje.

osnovnog stanja kao funkciju broja čestica N za različite vrijednosti frekvencije harmoničkog oscilatora ω_0 uz konstantnu amplitudu rešetke $V_l = 0.45E_R$. Vidimo, kao što je i očekivano, minimum GSF-a je dublji, i pojavljuje na većim N što je ω_0 manji.

Ističemo da su rezultati za Tonks-Girardeau plin ($\gamma \gg 1$), prezentirani na slici 6.7(a), u odličnom slaganju sa eksperimentalnim rezultatima iz reference

[80], koji se odnose na veliki ali konačni γ, u kojima se kaže da su najbolji uvjeti da se desi zapinjanje kad je u centralnoj tubi oko $N \sim 60$ atoma. Vidimo na slici 6.7(a) za sve amplitude GSF pokazuje pojačanu osjetljivost i najjači pad u području $N \sim 60$.

Da bi razumjeli ove rezultate, trebamo definirati sumjerljivost Tonks-Girardeau plina i primjenjene optičke rešetke. To nije trivijalno zbog nehomogene gustoće atoma u osnovnom stanju Tonks-Girardeau plina u harmoničkom oscilatoru. U potpoglavlju 6.3 smo vidjeli da je GSF minimalan kad N-to jednočestično stanje, koje ulazi u N čestično osnovno stanje preko Fermi-Bose mapiranja (2.12), ima istu valnu duljinu kao i optička rešetka. U slučaju harmoničkog potencijala (6.12), asimptotski razvoj jednočestičnih stanja $\psi_n(x)$ za $n \gg 1$ daje

$$\psi_n(x/a_0) \propto \cos(\sqrt{2n}x/a_0 - n\pi/2), \tag{6.13}$$

gdje je $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$. Asimptotski razvoj nam daje dominantnu valnu duljinu n-tog jednočestičnog stanja. Procjenjujemo da se zapinjanje događa kad je ispunjeno

$$k \approx \sqrt{2N}/a_0, \tag{6.14}$$

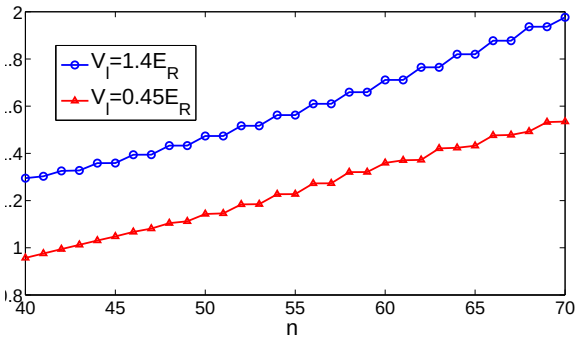
što daje

$$N_{pinn} \approx \frac{k^2\hbar}{2m\omega_0} \tag{6.15}$$

za broj čestica kad se događa zapinjanje (*pinning*). Jednadžba (6.15) je izvedena uz uvjet $n >> 1$; u eksperimentima je obično $N > 30$. Kada je u osnovnom stanju TG plina N_{pinn} atoma, tada je gustoća centralnog dijela atomskog oblaka sumjerljiva sa optičkom rešetkom tj. u centralnom dijelu harmoničke zamke imamo jedan atom po minimumu optičke rešetke $n_c = 1/(\lambda/2)$ (uvjet sumjerljivosti) [79]. Za $\omega/2\pi = 25$Hz dobijemo $N_{pinn} \sim 50$, što objašnjava pad u GSF-u na slici 6.7(a). Jednadžba (6.15) također objašnjava položaje prvog minimuma GSF-a u ovisnosti o frekvenciji harmoničkog oscilatora, dobijemo $N_{pinn} \sim \{38, 52, 75, 130\}$ za $\omega_0/2\pi = \{35, 25, 17.5, 10\}$Hz, što je u dobrom slaganju sa numerikom na slici 6.7(b). Opet, vidimo da povećanjem sustava minimum GSF-a postaje dublji, što je konzistentno sa smanjanjem GSF-a u kritičnom području u termodinamičkom limesu.

Na slici 6.8 smo prikazali spektar jednočestičnih energija potencijala $V_0(x) + V_l(x)$ sa amplitudama rešetke $V_l = 0.45E_R$ (crveni trokutovi) i $V_l = 1.4E_R$

(plavi krugovi). Vidimo da se na $n \sim 50$ otvara serija energetskih "procjepa" u smislu da će za neke N pobuđenje TG plina iz osnovnog stanja koštati više energije.



Slika 6.8: Spektar jednočestičnih energija u potencijalu $V_0(x) + V_l(x)$, za vrijednosti amplitude rešetke $V_l = 1.4E_R$ (plavi krugovi) i $V_l = 0.45E_R$ (crveni trokutovi). Vidi tekst za detalje.

Ove rezultate se može razumjeti u terminima sumjerljivosti jednočestične gustoće Tonks-Girardeau plina u harmoničkom potencijalu i optičke rešetke $V_l(x)$. Gustoća N čestica u osnovnom stanju TG plina u $V_0(x)$ potencijalu je $\rho_0(N,x) = \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n(x)|^2$. Ta funkcija je nehomogena sa maksimalnom vrijednosti (peak density) u $x = 0$. Kako povećavamo N (počevši od $N = 1$), prvi dio gustoće $\rho_0(N,x)$ koji se približava uvjetu sumjerljivosti $n_c = 2/\lambda$ (jedan atom po minimumu rešetke) je centralni dio tj. $\rho_0(N,0)$. Prema tome, prvi procjep u jednočestičnom spektru, i prvi minimumu GSF-a će se desiti za N_{pinn} sa svojstvom $\rho_0(N_{pinn},0) \approx n_c$, u skladu sa referencom [79] i jednadžbom (6.15). Dodavanje još čestica, $N > N_{pinn}$, vodi na $\rho_0(N,0) > n_c$, ali sad u područjima lijevo i desno od $x = 0$ gustoća postane sumjerljiva sa rešetkom, tj. $\rho_0(N,-d) \approx n_c$ i $\rho_0(N,d) \approx n_c$, za neki $d > 0$, tako da se dodatni procjepi otvaraju u jednočestičnom spektru, zapinjanje se dešava i za te brojeve čestica, zbog toga se GSF još spusti nakon N_{pinn}. Pomak d se povećava kako raste N i sumjerljivost je zadovoljena sve bliže rubovima zamke $V_0(x)$ gdje je gustoća niska, zato je sve manji dio ukupnog broja atoma izložen zapinjanju, zbog toga GSF počinje rasti kako se d dodatno povećava. Oscilacije u GSF-u nastaju zbog igre između simetrije jednočestičnih stanja, koja grade TG višečestičnu valnu funkciju, i simetrije optičke rešetke.

6.5 Loschmidtova jeka i neravnotežna dinamika Tonks-Girardeau plina nakon naglog uključivanja optičke rešetke

U ovom potpoglavlju istražujemo učinak zapinjanja u neravnotežnoj dinamici Tonks-Girardeau plina koju iniciramo naglim uključivanjem optičke rešetke. Označimo sa $\hat{H}_0$ Hamiltonijan TG plina u potencijalu zatočenja $V_0(x)$. Uzimamo da je početno stanje TG plina osnovno stanje $|\Psi_0\rangle$ Hamiltonijana $\hat{H}_0$. U trenutku $t = 0$ naglo uključimo optičku rešetku $V_l(x)$ i neravnotežno višečestično stanje $|\Phi(t)\rangle = \exp[-i(\hat{H}_0 + V_l(x))t/\hbar]|\Psi_0\rangle$ započne s evolucijom, gdje je početni uvjet $|\Phi(0)\rangle = |\Psi_0\rangle$. Želimo istražiti utjecaj sumjerljivosti optičke rešetke i atomske gustoće osnovnog stanja $|\Psi_0\rangle$ na neravnotežnu dinamiku TG plina. Fermi-Bose mapiranje (2.12) vrijedi i za vremenski ovisna stanja, tako da, nakon uključivanja optičke rešetke, višečestično stanje $|\Phi(t)\rangle$ može biti konstruirano kao Slaterova determinanta vremenski evouliranih jednočestičnih stanja $|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \prod_{1\leq i<j\leq N} \mathrm{sgn}(x_i - x_j) \det_{n,j=1}^{N} [\psi_n(x_j, t)]$. Jednočestična stanja $\psi_n(x_j, t)$ su izvan ravnoteže i računaju se pomoću jednadžbe $i\hbar\partial_t\psi_n(x,t) = [-\hbar^2/(2m)\partial_x^2 + V_0(x) + V_l(x)]\,\psi_n(x,t)$ uz početni uvjet $\psi_n(x,0) = \psi_n(x)$, gdje su $\psi_n(x)$ početna jednočestična stanja koja se koriste za konstrukciju neperturbiranog osnovnog stanja $|\Psi_0\rangle$ TG plina u potencijalu $V_0(x)$.

Kao što smo vidjeli u Poglavlju 5, Loschmidtova jeka

$$L(t) = |\langle\Psi_0| \exp(i\hat{H}_0 t/\hbar) \exp[-i(\hat{H}_0 + V_l(x))t/\hbar]|\Psi_0\rangle|^2$$

može poslužiti za istraživanje osjetljivosti sustava na perturbaciju, u našem slučaju perturbacija je primjena optičke rešetke $V_l(x)$ na TG plin u osnovnom stanju $V_0(x)$ potencijala. Pošto u našem slučaju vrijedi $\hat{H}_0|\Psi_0\rangle = \Omega_0|\Psi_0\rangle$, gdje je Ω_0 energija osnovnog stanja TG plina u $V_0(x)$ potencijalu, možemo pisati

$$L(t) = |\langle\Psi_0| \exp[-i(\hat{H}_0 + V_l(x))t/\hbar]|\Psi_0\rangle|^2 = |\langle\Psi_0|\Phi(t)\rangle|^2. \tag{6.16}$$

Jednadžba (6.16) nam govori da je u ovom slučaju Loschmidtova jeka ekvivalentna tzv. vjerojatnosti preživljavanja (survival probability) tj. vjerojatnosti da je sustav u početnom stanju u trenutku t nakon što smo uključili perturbaciju u $t = 0$.

Fermi-Bose mapiranje vrijedi i za vremenski ovisne valne funkcije pa Loschmidtova jeka može biti zapisana u formi pogodnoj za računanje

$$\begin{aligned} L(t) &= |\frac{1}{N!}\int dx_1 \cdots dx_N \sum_{\sigma_1}(-)^{\sigma_1}\prod_{i=1}^{N}\psi^*_{\sigma_1(i)}(x_i,0)\sum_{\sigma_2}(-)^{\sigma_2}\prod_{j=1}^{N}\psi_{\sigma_2(j)}(x_j,t)|^2 \\ &= |\det \mathbf{A}(t)|^2, \end{aligned} \tag{6.17}$$

gdje je $\mathbf{A}(t)$ vremenski ovisna matrica koja sadrži preklope jednočestičnih stanja $\psi_i(x,0)$ potencijala $V_0(x)$ i jednočestični stanja $\psi_i(x,t)$ koja evouliraju u potencijalu $V_0(x)+V_l(x)$

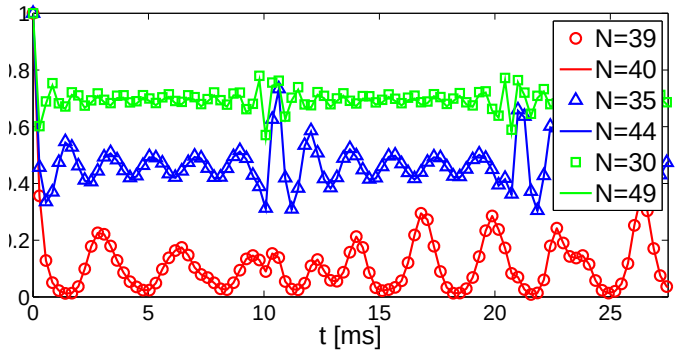
$$A_{ij}(t) = \int \psi_i^*(x,0)\psi_j(x,t)dx. \tag{6.18}$$

6.5.1 Beskonačno duboka kutija

Sada ćemo iskoristiti jednadžbe (6.17) i (6.18) da istražimo Loschmidtovu jeku Tonks-Girardeau plina nakon što u $t=0$ naglo uključimo optičku rešetku $V_l(x)$. Prije uključivanja rešetke Tonks-Girardeau plin je u osnovnom stanju $|\Psi_0\rangle$ potencijala beskonačno duboke kutije $V_0(x)$ (6.3). U ovom potpoglavlju koristimo iste parametre kao u potpoglavlju 6.3.

Na slici 6.9 pokazujemo Loschmidtovu jeku $L(t)$, kao funkciju vremena za različite brojeve čestica N, koju smo dobili egzaktnom numeričkom evolucijom, za optičku rešetku $V_l(x) = 0.55E_R\cos^2(4\pi x x_0^{-1}/3)$. Širina kutije je $L = 30x_0$. Broj bunara (minimuma) optičke rešetke je $M = 40$. Taj isti set parametara smo koristili pri računu vjernosti osnovnog stanja F na slici 6.2(a) označenoj s crvenim krugovima. Vidimo da se svojstva vjernosti osnovnog stanja reflektiraju na Loschmidtovu jeku. Vrijednosti idu u parovima tj. krivulje su približno jednake za $N = M-j$ i $N = M+j-1$ čestica, gdje je $j = 1,\ldots,M-1$. Najbrže i najviše trne Loschmidtova jeka za brojeve čestica u kritičnom području tj. za $N = 39$ i $N = 40$ čestica (crveni krugovi i crvena puna linija). Također, oscilacije usporavaju kako se približavamo kritičnom području $N \sim M$.

Da bi razumjeli rezultate Slike 6.9 iskoristit ćemo relacije (6.5)-(6.7) da napišemo razvoj neperturbiranih jednočestičnih stanja potencijala $V_0(x)$ preko



Slika 6.9: Loschmidtova jeka $L(t)$ za različite brojeve čestica N u potencijalu beskonačno duboke kutije. Optička rešetka $V_l(x)$ ima 40 minimuma tj. $M = 40$ bunara. Loschmidtova jeka odražava svojstva vjernosti osnovnog stanja tj. trne najbrže za $N = (M-1, M)$ čestica i pojavljuje se u parovima. Frekvencija oscilacija se smanjuje kako se približavamo kritičnom području $N \sim M$. Vidi tekst za detalje.

perturbiranih jednočestičnih stanja potencijala $V_0(x) + V_l(x)$

$$\psi_i(x,0) \approx \frac{\phi_i(x) - a_{2M-i}\phi_{2M-i}(x)}{\sqrt{1+|a_{2M-i}|^2}}. \tag{6.19}$$

Gdje je $i = 1, \ldots, M-1, M+1, \ldots, 2M-1$. Za slučaj $i = M$ dobijemo

$$\psi_M(x,0) \approx \phi_M(x). \tag{6.20}$$

Koristeći jednadžbu (6.19) dobijemo vremensku evoluciju stanja $\psi_j(x,t)$ nakon uključivanja optičke rešetke

$$\psi_j(x,t) \approx \frac{\exp(-iE_j^l t/\hbar)\phi_j(x) - a_{2M-j}\exp(-iE_{2M-j}^l t/\hbar)\phi_{2M-j}(x)}{\sqrt{1+|a_{2M-j}|^2}}, \tag{6.21}$$

gdje je E_n^l jednočestična energija u potencijalu $V_0(x) + V_l(x)$. Sad iskoristimo relacije (6.19)-(6.21) u jednadžbama (6.18) i (6.17).

Prvo razmatramo slučaj kad je broj čestica manji od broja bunara optičke rešetke tj. $N < M$. U tom slučaju matrica (6.18) je dijagonalna sa elementima

$$A_{ii}(t) \approx \frac{\exp(-iE_i^l t/\hbar) + |a_{2M-i}|^2\exp(-iE_{2M-i}^l t/\hbar)}{1+|a_{2M-i}|^2},$$

a pošto vrijedi $L(t) = |\det \mathbf{A}(t)|^2 = \det[\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^*(t)]$, dobijemo

$$L(t) \approx \prod_{i=1}^{N} |A_{ii}(t)|^2, \tag{6.22}$$

gdje je

$$|A_{ii}(t)|^2 \approx \frac{1 + 2|a_{2M-i}|^2 \cos\left[(E^l_{2M-i} - E^l_i)t/\hbar\right] + |a_{2M-i}|^4}{\left(1 + |a_{2M-i}|^2\right)^2}. \tag{6.23}$$

Ako iskoristimo izraz (6.9) za vjernost osnovnog stanja (F) dobijemo za Loschmidtovu jeku $N < M$ čestica

$$L(t) \approx F^2 \prod_{i=1}^{N} (1 + 2|a_{2M-i}|^2 \cos\left[(E^l_{2M-i} - E^l_i)t/\hbar\right] + |a_{2M-i}|^4). \tag{6.24}$$

Vidimo da je vjernost osnovnog stanja ugrađena u Loschmidtovu jeku, zato Loschmidtova jeka reflektira njena svojstva. Pošto koeficijenti $|a_{2M-i}|^2$ rastu kvadratno kako se i približava M vidimo da će najdominantniji kosinusni član u (6.24) biti za $i = N$ iz čega možemo zaključiti da je dominantna frekvencija oscilacija ω_R Loschmidtove jeke za $N < M$ čestica

$$\omega_R(N) = \frac{E^l_{2M-N} - E^l_N}{\hbar}, \tag{6.25}$$

gdje su E^l_n jednočestične energije potencijala $V_0(x) + V_l(x)$.

Razmotrimo sad slučaj $N = M$. Kad idemo sa $N = M-1$ na $N = M$ čestica, matrica (6.18) ostaje dijagonalna zbog relacije (6.20) tj. jednostavno dodamo $A_{MM}(t) \approx \exp(-iE^l_M t/\hbar)$ na glavnu dijagonalu. Pošto je $|A_{MM}(t)|^2 \approx 1$, vidimo da je Loschmidtova jeka za $N = M$ čestica približno ista kao za $N = M - 1$ čestica, u skladu sa Slikom 6.9 (crvena puna linija za $N = 40$ i crveni krugovi za $N = 39$ se preklapaju).

Prijeđimo sad na slučaj $N = M + 1$. Sada matrica (6.18) dobije dva nedijagonalna člana

$$A_{M+1,M-1}(t) = A_{M-1,M+1}(t) \approx \frac{-a_{M+1}\exp(-iE^l_{M+1}t/\hbar) - a_{M-1}\exp(-iE^l_{M-1}t/\hbar)}{1 + |a_{M+1}|^2}, \tag{6.26}$$

gdje smo iskorisitli (6.19) i $|a_{M-1}| = |a_{M+1}|$, vidi jednadžbu (6.5). Determinanta matrice (6.18) ima dva člana, produkt elemenata na dijagonali i član koji dolazi zbog dva ne dijagonalna elementa

$$\det \mathbf{A}(t) \approx \prod_{i=1}^{M-2} A_{ii}(t) A_{MM}(t) \left[A_{M-1,M-1}(t) A_{M+1,M+1}(t) - A_{M+1,M-1}(t) A_{M-1,M+1}(t) \right].$$

Može se pokazati da je

$$\left[A_{M-1,M-1}(t) A_{M+1,M+1}(t) - A_{M+1,M-1}(t) A_{M-1,M+1}(t) \right] \approx \exp\left[-i(E^l_{M-1} + E^l_{M+1})t/\hbar \right],$$

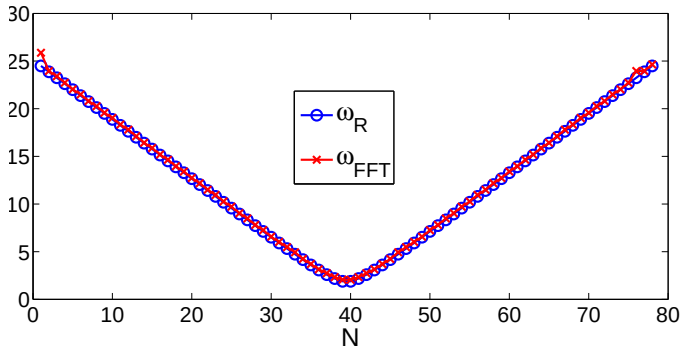
što zajedno sa $A_{MM}(t) \approx \exp(-iE^l_M t/\hbar)$ daje

$$L(t) = |\det \mathbf{A}(t)|^2 \approx \prod_{i=1}^{M-2} |A_{ii}(t)|^2.$$

Zaključujemo da je Loschmidtova jeka za $N = M + 1$ približno ista kao za $N = M - 2$ čestica. Pojavljuje se isti uzorak kao i za vjernost osnovnog stanja. Loschmidtova jeka je približno ista za $N = M - j$ i $N = M + j - 1$ čestica, gdje je $j = 1, \ldots, M-1$. Zbog tog uzorka, možemo iskoristiti jednadžbu (6.25) da dobijemo dominantne frekvencije oscilacija Loschmidtove jeke za $N \geq M$ čestica

$$\omega_R(M + j - 1) \approx \omega_R(M - j), \tag{6.27}$$

gdje je $j = 1, \ldots, M - 1$, a $\omega_R(M - j)$ dobijemo iz jednadžbe (6.25). Da bi provjerili gornje relacije, na slici 6.10 smo nacrtali dominantnu frekvenciju oscilacija $\omega_R(N)$, koju daju jednadžbe (6.25) i (6.27) za $N = 1, \ldots, 2M - 2$ čestica, zajedno sa dominantnom frekvencijom oscilacija $\omega_{FFT}(N)$, koju daje Fourierov transformat Loschmidtove jeke prikazane na slici 6.9, slaganje je izvrsno.



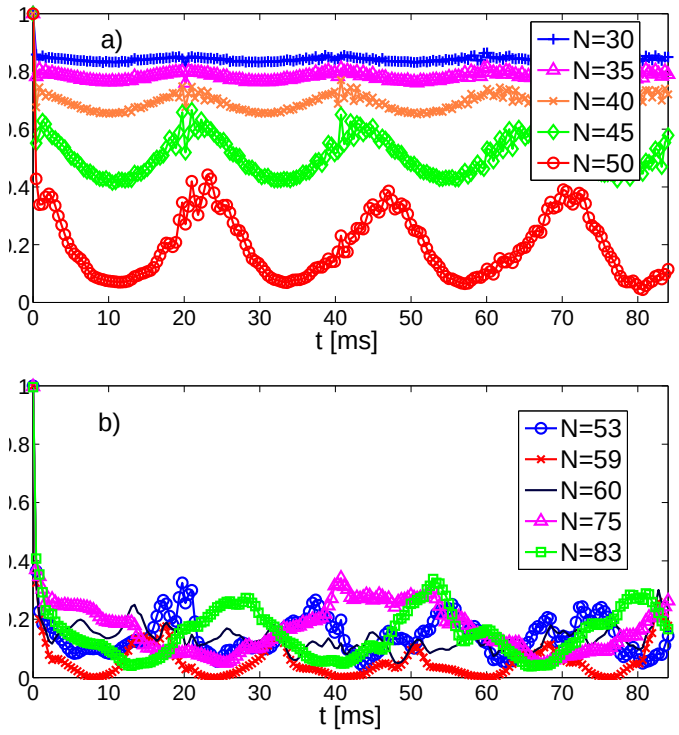
Slika 6.10: Dominantna frekvencija oscilacija Loschmidtove jeke dobivena sa jednadžbama (6.25) i (6.27) ω_R (plavi krugovi) i sa Fourierovim transformatom Loschmidtove jeke ω_{FFT} (crveni križevi). Loschmidtova jeka je izračunata sa istim parametrima kao na slici 6.9. Vidi tekst za detalje.

6.5.2 Harmonički oscilator

U ovom potpoglavlju koristimo jednadžbe (6.17) i (6.18) da istražimo Loschmidtovu jeku Tonks-Girardeau plina nakon uključivanja optičke rešetke $V_l(x)$; prije uključivanja rešetke plin je u osnovnom stanju $|\Psi_0\rangle$ potencijala harmoničkog oscilatora $V_0(x)$ (6.12). U ovom potpoglavlju koristimo iste jedinice i parametre kao u potpoglavlju 6.4.

Na slici 6.11 prikazujemo Loschmidtovu jeku TG plina nakon uključivanja optičke rešetke $V_l(x) = 0.45E_R \sin^2(1.88\pi x_0^{-1}x)$; TG plin je u početnom trenutku u osnovnom stanju harmoničkog potencijala sa $\omega_0/2\pi = 25$Hz. Slika 6.11(a) je za $N < N_{pinn}$ čestica, a slika 6.11(b) je za $N > N_{pinn}$ čestica, gdje je N_{pinn} određen jednadžbom (6.15) (za parametre koje smo ovdje koristili $N_{pinn} \approx 52$). Vidimo da se svojstva vjernosti osnovnog stanja (vidi sliku 6.7(a) plavi križevi) prenose na Loschmidtovu jeku; prosječna vrijednost Loschmidtove jeke je niža za nižu vjernost osnovnog stanja. To vrijedi generalno. Međutim, detalji dinamike Loschmidtove jeke (kao npr. dominantne frekvencije oscilacija) ovise o potencijalu zatočenja.

Na slici 6.12 smo prikazali dominantnu frekvenciju osiclacija Loschmidtove jeke (sa slike 6.11) koju smo dobili Fourierovim transformatom (ω_{FFT} plavi križevi). Vidimo da je ω_{FFT} konstantna za $N \leq N_{pinn}$, i zatim postane neregularna za $N > N_{pinn}$. Našli smo numerički da se regularno ponašanje za $N \leq N_{pinn}$ pojavljuje zato što $\psi_n(x, 0)$ za $n < N_{pinn}$ možemo dobro aproksimi-



Slika 6.11: Loschmidtova jeka $L(t)$ za različite brojeve čestica N. Pod a) za $N < N_{pinn}$ i pod b) za $N > N_{pinn}$. Vidi tekst za detalje.

rati sa

$$\psi_n(x,0) \sim A\phi_{n-2}(x) + B\phi_n(x) + C\phi_{n+2}(x),$$

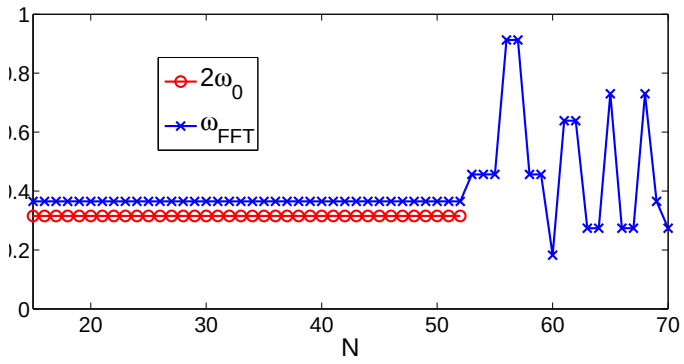
gdje je koeficijent B uvijek najveći po iznosu; iz toga sljedi

$$\omega_R(N \leq N_{pinn}) \approx 2\omega_0, \tag{6.28}$$

što je također prikazano na slici 6.12. Za $n > N_{pinn}$ postoji mnogo koeficijenata u razvoju $\psi_n(x,0)$ preko $\phi_n(x)$ koji doprinose sa istom težinom i jednostavna relacija (6.28) više ne vrijedi.

6.6 Zaključak

Proučavali smo zapinjanje u Tonks-Girardeau plinu koristeći vjernost osnovnog stanja i Loschmidtovu jeku kao dijagnostičke alate. Našli smo, numerički i analitički (unutar prvog reda računa smetnje), da vjernost osnovnog stanja



Slika 6.12: Dominantna frekvencija oscilacija Loschmidtove jeke određena jednadžbom (6.28) $\omega_R \approx 2\omega_0$ (crveni krugovi) i dominantna frekvenicja oscilacija određena Fourierovim transformatom Loschmidtove jeke (sa Slike 6.11) ω_{FFT} (plavi križevi). Vidi tekst za detalje.

može ukazati na kritično područje parametra za koje se događa zapinjanje. Vjernost osnovnog stanja definirana u jednadžbi (6.1) ima dramatičan pad kada se atomska gustoća približi gustoći od jednog atoma po bunaru optičke rešetke. To smanjenje je indikacija zapinjanja tj. kvantnog faznog prijelaza Tonks-Girardeau plina u fazu Mott-izolatora u kojoj su atomi zaglavljeni u minimumima optičke rešetke. Našli smo da vjernost osnovnog stanja Tonks-Girardeau plina u potencijalu beskonačno duboke jame može biti neosjetljiva na rubne uvjete. Vjernost osnovnog stanja za $N = M - 1$ i $N = M$ čestica (M označava broj bunara optičke rešetke) u kosinus-kvadrat (sinus-kvadrat) rešetki je ista, dok jednočestična gustoća i energijski spektar pokazuju da se zapinjanje događa za $N = M$ (odnosno $N = M - 1$) čestica. Vjernost osnovnog stanje je u prednosti pred jednočestičnom gustoćom i energijom u termodinamičkom limesu gdje ima dramatičan pad čak i za infinitezimalno malu amplitudu optičke rešetke.

Istražili smo i primjenjivost vjernosti osnovnog stanja u dijagnosticiranju zapinjanja u eksperimentalnim uvjetima. Naši rezultati su u izvrsnom slaganju sa nedavno izvedenim eksperimentom [80]. Našli smo da vjernost osnovnog stanja u potencijalu harmoničkog oscilatora pokazuje pojačanu osjetljivost u širokom intervalu brojeva čestica $N \geq N_{pinn}$ (gdje je N_{pinn} definiran u jednadžbi (6.15)); za $N \sim N_{pinn}$ vjernost osnovnog stanja ima brzi pad i za veće N razvije oscilacije. Takvo ponašanje je povezano sa serijom procjepa koji se otvore za $n \sim N_{pinn}$ u energijskom spektru jednočestičnih stanja ukupnog

potencijala (harmonički oscilator plus optička rešetka).

Istražili smo i neravnotežnu dinamiku Tonks-Girardeau plina iniciranu naglim uključivanjem optičke rešetke. Pokazali smo da se sva svojstva vjernosti osnovnog stanja reflektiraju na Loschmidtovu jeku. Prosječna vrijednost Loschmidtove jeke je niža što je niža vjernost osnovnog stanja, neovisno o detaljima potencijala zatočenja. Detalji Loschmidtove jeke, kao dominantne frekvencije oscilacija, ovise o tipu potencijala zatočenja. Nalazimo da je ponašanje Loschmidtove jeke Tonks-Girardeau plina u beskonačno dubokoj jami regularno, frekevenije oscilacija se smanjuju kako se približavamo kritičnom području $N \sim M$ i moguće ih je jednostavno izračunati iz jednočestičnog energetskog spektra ukupnog potencijala (beskonačna duboka kutija plus optička rešetka). U potencijalu harmoničkog oscilatora, s povećanjem broja čestica N dominantna frekvencija oscilacija ostaje konstanta približno jednaka $2\omega_0$ (ω_0 je frekvencija harmoničke zamke), dok se ne otvori serija "procjepa" u jednočestičnom spektru ukupnog potencijala. Nakon toga se oscilacije ponašaju nepravilno i ne može se više govoriti o jednoj dominantnoj frekvenciji oscilacija.

Poglavlje 7

Sažetak

U poglavlju 2 upoznali smo reduciranu jednočestičnu matricu gustoće i opservable koje iz nje sljede: Jednočestičnu gustoću, prirodne orbitale i njihove okupiranosti te raspodjelu impulsa. Druge teorijske alate uvodili smo putem.

U poglavlju 3 primjenili smo formulu (2.15) [20] da bi numerički izračunali jednočestičnu matricu gustoće, prirodne orbitale i njihove okupiranosti te raspodjelu impulsa tamnih solitonskih stanja u Tonks-Girardeau plinu. Pokazali smo da ta pobuđena višečestična stanja imaju karakterističnu raspodjelu impulsa sa dva oštra šiljka. Većina rezultata se odnosi na Tonks-Girardeau plin na prstenu, gdje se šiljci nalaze na $k_{peak} = \pm\pi(N+1)/L$ (N je broj čestica, a L dužina prstena), ali pokazali smo i rezultate koji sugeriraju da je takvo ponašanje generalno za tamna solitonska stanja Tonks-Girardeau plina u potencijalima sa svojstvom $V(-x) = V(x)$. Pokazali smo da su šiljci u raspodjeli impulsa povezani sa oscilatornim korelacijama zrcalnih točaka (x i $-x$) u jednočestičnoj matrici gustoće. Takvo ponašanje tamnih solitonskih stanja proizlazi iz toga što su posebno skrojena, u slučaju Tonks-Girardeau plina na prstenu. Pokazano je da stanja koja su degenerirana tamnim solitonskim stanjima nemaju šiljke u raspodjeli impulsa.

U poglavlju 4 proučavali smo 1D Bose-Fermi mješavinu, s bozon-bozon i bozon-fermion jakim odbojnim kontaktnim međudjelovanjem, dok su (spinpolarizirani) fermioni ne-međudjelujući. Bozoni i fermioni imaju iste mase. U referenci [22] konstruirano je osnovno stanje tog sustava za konačno ali vrlo jako međudjelovanje u proizvoljnom vanjskom potencijalu. Mi smo proučavali osnovno stanje mješavine u dvostrukoj jami sa visokom barijerom. Izveli smo

formulu za računanje jednočestične matrice gustoće fermionskog (i bozonskog) podsustava u proizvoljnom vanjskom potencijalu, i primjenili je na proučavanje raspodjele impulsa, prirodnih orbitala i njihovih okupiranosti Bose-Fermi mješavine u potencijalu dvostruke jame. Nalazimo da ponašanje raspodjele impulsa ovisi o parnosti ukupnog broja čestica. Za parne mješavine raspodjela impulsa je glatka, dok za neparne mješavine vidimo izražene modulacije na raspodjeli impulsa. Kad je ukupan broj čestica paran, korelacije izražene u reduciranoj jednočestičnoj matrici gustoće su zanemarive između dvije jame.

U poglavlju 5 smo istražili Loschmidtovu jeku u dva režima jednodimenzionalnih međudjelujućih bozonskih plinova: Tonks-Girardeau režimu i slabomeđudjelujućem režimu srednjeg polja opisanom Gross-Pitaevskii teorijom. Plin je u početku u osnovnom stanju potencijala zatočenja kojeg zatim naglo proširimo i proučavamo opadanje Loschmidtove jeke zbog malog prostornog šuma. Nalazimo (numerički i analitički) da Loschmidtova jeka Tonks-Girardeau plina trne kao gausijanska funkcija kojoj je eksponent proporcionalan broju čestica i kvadratu amplitude šuma. Naši rezultati ne ovise o detaljima potencijala zatočenja. Opazili smo isto ponašanje za plin koji je u početku u osnovnom stanju harmoničkog oscilatora kojeg zatim naglo proširimo. Nadalje, nalazimo da gausijansko ponašanje ostaje i ukoliko dinamika počne iz nekog pobuđenog stanja ili superpozicije takvih stanja. U režimu srednjeg polja Loschmidtova jeka trne brže za veće nelinearnosti $\tilde{g}_{1D}N$, opadanje postaje naglije kako povećavamo nelinearnost (za velike nelinearnosti smo reporducirali rezultat iz reference [71]). Pokazuje se i veća osjetljivost na pojedinu realizaciju potencijala šuma, osobito za male nelinearnosti. Diskutirali smo naše račune u kontekstu već postojećih eksperimenata [61, 62, 63] i teorijskih studija [64, 65, 66, 67, 68, 69] o interferenciji između paralelnih 1D bozonskih plinova. Nalazimo da se naši računi u režimu srednjeg polja mogu testirati u takvim eksperimentima. Za eksperimente u Tonks-Girardeau režimu bolji su kandidat optičke rešetke, međutim početno stanje koje bi dobili djeljenjem Tonks-Girardeau plina ne odgovara početnom stanju koje smo mi ovdje koristili, dinamika iz takvog početnog stanja tek treba biti ispitana (vidi potpoglavlje 5.3)

U poglavlju 6 proučavali smo zapinjanje 1D jako-međudjelujućeg bozonskog plina [79, 80] koristeći model Tonks-Girardeau plina i koncept vjernosti osnovnog stanja. Nalazimo da vjernost osnovnog stanja dramatično opada kad

se atomska gustoća približi uvjetu sumjerljivosti sa optičkom rešetkom, tj. kad imamo jedan atom po minimumu optičke rešetke. Taj nagli pad vjernosti osnovnog stanja je posljedica zapinjanja tj. kvantnog faznog prijelaza Tonks-Girardeau plina u stanje Mott-izolatora. Ispitali smo primjenjivost vjernosti osnovnog stanja na dijagnozu zapinjanja u realističnim eksperimentanim uvjetima. Naši rezultati su u izvrsnom slaganju sa nedavno izvršenim eksperimentom [80]. Istražili smo i neravnotežnu dinamiku Tonks-Girardeau plina iniciranu naglim uključivanjem optičke rešetke. Pokazali smo da se sva svojstva vjernosti osnovnog stanja reflektiraju na Loschmidtovu jeku. Prosječna vrijednost Loschmidtove jeke je niža što je niža vjernost osnovnog stanja, neovisno o detaljima potencijala zatočenja. Detalji Loschmidtove jeke, kao dominantne frekvencije oscilacija, ovise o tipu potencijala zatočenja. Nalazimo da je ponašanje Loschmidtove jeke Tonks-Girardeau plina u beskonačno dubokoj jami regularno, frekvencije oscilacija se smanjuju kako se približavamo kritičnom području $N \sim M$ i moguće ih je jednostavno izračunati iz jednočestičnog energetskog spektra ukupnog potencijala (beskonačna jama plus optička rešetka). U potencijalu harmoničkog oscilatora, dominantna frekvencija oscilacija je konstantna približno jednaka $2\omega_0$ (ω_0 je frekvencija harmoničke zamke) dok se ne otvori serija procjepa u jednočestičnom spektru ukupnog potencijala, nakon čega se oscilacija ponašaju nepravilno i ne može se više govoriti o jednoj dominantnoj frekvenciji oscilacija.

Bibliografija

[1] M. Girardeau, J. Math. Phys. **1**, 516 (1960).

[2] E. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963);
E. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).

[3] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001); A. Görlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. Abo-Shaeer, A.P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, *ibid.* **87**, 130402 (2001); H. Moritz, T. Stöferle, M. Kohl, and T. Esslinger, *ibid.* **91**, 250402 (2003); B. Laburthe-Tolra, K.M. O'Hara, J.H. Huckans, W.D. Phillips, S.L. Rolston, and J.V. Porto, *ibid.* **92**, 190401 (2004); T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Kohl, and T. Esslinger, *ibid.* **92**, 130403 (2004).

[4] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Rev.Mod.Phys. **80**, 885 (2008).

[5] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).

[6] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **86** 5413 (2001).

[7] T. Kinoshita, T. Wenger, and D.S. Weiss, Science **305**, 1125 (2004).

[8] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, and I. Bloch, Nature (London) **429**, 277 (2004).

[9] T. Kinoshita, T. Wenger, and D.S. Weiss, Nature (London) **440**, 900 (2006).

[10] C.J. Pethick and H. Smith. Bose-Einstein condensation in dilute gase (Cambridge University Press (2002)).

[11] C.J. Foot. Atomic Physics (Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics (2005)).

[12] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Science, **269**, 198 (1995).

[13] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Phys. Rev. Lett., **75**, 3969 (1995).

[14] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Phys. Rev. Lett., **75**, 1687 (1995).

[15] Thorsten Köhler, Krzysztof Góral, and Paul S. Julienne. Rev. Mod. Phys, **78**, 1311 (2006).

[16] M.D. Girardeau and E.M. Wright, Phys. Rev. Lett. **84**, 5691 (2000).

[17] M. Gaudin, Phys. Rev. A **4**, 386 (1971).

[18] D. Jukić, S. Galić, R. Pezer, and H. Buljan, Phys. Rev. A **82**, 023606 (2010).

[19] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys., **71**, 463 (1999).

[20] R. Pezer and H. Buljan, Phys. Rev. Lett. **98**, 240403 (2007).

[21] H. Buljan, O. Manela, R. Pezer, A. Vardi, and M. Segev, Phys. Rev. A **74**, 043610 (2006).

[22] M.D. Girardeau and A. Minguzzi, Phys. Rev. Lett. **99**, 230402 (2007).

[23] P. A. M. Dirac. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **26** 376, 1930.

[24] O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev., **104**, 576 (1956).

[25] Khaykovich et al, Science **296**, 1290 (2002).

[26] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999); J. Denschlag, *et al.*, Science **287**, 97 (2000).

[27] R. Dum, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **80**, 2972 (1998).

[28] Th. Busch, and J.R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **84**, 2298 (2000).

[29] A.E. Muryshev, G.V. Shlyapnikov, W. Ertmer, K. Sengstock, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **89**, 110401 (2002).

[30] M. Girardeau and E.M. Wright, Phys. Rev. Lett. **84**, 5691 (2000).

[31] T. Busch and G. Huyet, J. Phys. B **36** 2553 (2003).

[32] A. Lenard, J. Math. Phys. **5**, 930 (1964); T.D. Schultz, J. Math. Phys. **4**, 666 (1963); H.G. Vaidya and C.A. Tracy, Phys. Rev. Lett. **42**, 3 (1979).

[33] P.J. Forrester *et al*, Phys. Rev. A **67**, 043607 (2003).

[34] M.D. Girardeau, E.M. Wright, and J.M. Triscari, Phys. Rev. A **63**, 033601 (2001); G.J. Lapeyre, M.D. Girardeau, and E.M. Wright, Phys. Rev. A **66**, 023606 (2002).

[35] A.G. Truscot, K.E. Strecker, W.I. Alexander, G.B. Partridge, and R.G. Hulet, Science **291**, 2570 (2001).

[36] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).

[37] G. Modugno, G. Roati, F. Riboli, F. Ferlaino, R. J. Brecha, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **297**, 2240 (2002).

[38] Z. Hadzibabic, C.A. Stan, K. Dieckmann, S. Gupta, M.W. Zwierlein, A. Gorlitz and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **88**, 160401 (2002).

[39] J. Goldwin, S. Inouye, M. L. Olsen, B. Newman, B. D. DePaola, and D. S. Jin, Phys. Rev. A **70**, 021601(R) (2004).

[40] C. Silber, S. Günther, C. Marzok, B. Deh, P.W. Courteille, and C. Zimmermann, Phys. Rev. Lett. **95**, 170408 (2005).

[41] S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, L. Humbert, K. Sengstock, and K. Bongs, Phys. Rev. Lett. **97**, 120403 (2006);

[42] Y. Shin, A. Schirotzek, C.H. Schunk, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **101**, 070404 (2008).

[43] K.K. Das, Phys. Rev. Lett. **90**, 170403 (2003).

[44] M.A. Cazalilla and A.F. Ho, Phys. Rev. Lett. **91**, 150403 (2003).

[45] L. Mathey, D.-W. Wang, W. Hofstetter, M.D. Lukin, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **93**, 120404 (2004).

[46] M. Rizzi and A. Imambekov, Phys. Rev. A **77**, 023621 (2008).

[47] A. Imambekov and E. Demler, Ann. Phys. (N.Y.) 321, 2390 (2006).

[48] H. Frahm and G. Palacios, Phys. Rev. A **72**, 061604(R) (2005)

[49] B. Fang, P. Vignolo, C. Miniatura, and A. Minguzzi, Phys. Rev. A **79**, 023623 (2009).

[50] J. Goold and Th. Busch, Phys. Rev. A **77**, 063601 (2008).

[51] J. Loschmidt, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien, II, **73**, 128 (1876).

[52] L. Boltzmann, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien, II, **75**, 67 (1877).

[53] A. Peres, Phys. Rev. A **30**, 1610 (1984).

[54] R.A. Jalabert and H.M. Pastawski, Phys. Rev. Lett. **86**, 2490 (2001).

[55] Ph. Jacquod, P.G. Silvestrov, and C.W.J. Beenakker, Phys. Rev. E **64**, 055203(R) (2001)

[56] N. R. Cerruti and S. Tomsovic, Phys. Rev. Lett. **88**, 054103 (2002).

[57] T. Prosen, Phys. Rev. E **65**, 036208 (2002).

[58] T. Gorin, T. Prosen, T.H. Seligman, M. Žnidarič, Phys. Rep. **435**, 33 (2006).

[59] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).

[60] M.F. Andersen, A. Kaplan, T. Grünzweig, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **97**, 104102 (2006).

[61] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm, J. Schmiedmayer, Nature (London) **449**, 324 (2007).

[62] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm, J. Schmiedmayer, Nature Physics **4**, 489 (2008).

[63] P. Krüger, S. Hofferberth, I.E. Mazets, I. Lesanovsky, and J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **105**, 265302 (2010).

[64] A. Polkovnikov, E. Altman, and E. Demler, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **103**, 6125 (2006).

[65] V. Gritsev, E. Altman, E. Demler, and A. Polkovnikov, Nature Physics **2**, 705 (2006).

[66] R. Bistritzer and E. Altman, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **104**, 9955 (2007).

[67] A.A. Burkov, M.D. Lukin, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **98**, 200404 (2007).

[68] I.E. Mazets and J. Schmiedmayer, Eur. Phys. J. B **68**, 335 (2009).

[69] H.-P. Stimming, N.J. Mauser, J. Schmiedmayer, and I.E. Mazets, Phys. Rev. A **83**, 023618 (2011).

[70] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clement, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, A. Aspect, Nature **453**, 891 (2008).

[71] G. Manfredi and P.-A. Hervieux, Phys. Rev. Lett. **100**, 050405 (2008).

[72] J. Martin, B. Georgeot, and D L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **101**, 074102 (2008).

[73] J. Goold, T. Fogarty, M. Paternostro, Th. Busch, Phys. Rev. A **84**, 063632 (2011).

[74] A. del Campo, Phys. Rev. A **84**, 012113 (2011).

[75] L. Benet, S. Hernandez-Quiroz, and T.H. Seligman, Phys. Rev. E **83**, 056216 (2011).

[76] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, Phys. Rev. A **65**, 043614 (2002).

[77] F. Gerbier, Europhys. Lett. **66**, 771 (2004).

[78] S. Fölling, S. Trotzky, P. Cheinet, M. Feld, R. Saers, A. Widera, T.Müller, and I. Bloch, Nature (London) **448**, 1029 (2007).

[79] H. P. Büchler, G. Blatter, and W. Zwerger, Phys. Rev. Lett. **90**, 130401 (2003).

[80] E. Haller, R. Hart, M. J. Mark, J. G. Danzl, L. Reichsollner, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo and H. C. Nägerl, Nature. **466**, 597 (2010).

[81] P. Zanardi and N. Paunković, Phys. Rev. E. **74**, 031123 (2006).

[82] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva and M. Vengalattore, Rev. Mod. Phys. **83**, 863 (2011).

[83] F.M. Cucchietti, D.A.R. Dalvit, J.P. Paz, and W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **91**, 210403 (2003).

[84] For reviews see A. Steane, Rep. Prog. Phys. **61**, 117 (1998); D. P. DiVincenzo and C. H. Bennett, Nature **404**, 247 (2000)