Numerička metoda za analizu strujanja fluida na nestruktuiranoj mreži

Džijan, Ivo

Doctoral thesis / Disertacija

2004

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:970431

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

NUMERIČKA METODA ZA ANALIZU STRUJANJA FLUIDA NA NESTRUKTURIRANOJ MREŽI

DOKTORSKI RAD

IVO DŽIJAN

ZAGREB, 2004.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

NUMERIČKA METODA ZA ANALIZU STRUJANJA FLUIDA NA NESTRUKTURIRANOJ MREŽI

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Prof. dr. sc. ZDRAVKO VIRAG

IVO DŽIJAN

ZAGREB, 2004.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	519.6: 532.5 519.6: 536.2
Ključne riječi:	Računalna dinamika fluida, Metoda konačnih volumena, Nestrukturirana mreža, Nepomaknuta mreža, Algoritam SIMPLER, Brzina konvergencije
Znanstveno područje:	TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje:	Strojarstvo
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
Mentor rada:	Prof. dr. sc. Zdravko Virag
Broj stranica:	123
Broj slika:	107
Broj tablica:	3
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	112
Datum obrane: _____	
Povjerenstvo:	Prof. dr. sc. Jurica Sorić Prof. dr. sc. Zdravko Virag Prof. dr. sc. Luka Sopta
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje

Posebno zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Zdravku Viragu,
čiji su mi znanje, stručna pomoć i optimizam
bili dragocjeni pri izradi ovog doktorskog rada.

Članovima povjerenstva zahvaljujem
na konstruktivnim sugestijama.

Kolegama s Katedre zahvaljujem na preuzimanju nastavnih
obveza i pomoći tijekom izrade ovog rada.

Ljubav, povjerenje i podrška moje sestre, roditelja
i moje Marine
bili su mi najveći poticaj za rad.

SADRŽAJ

SADRŽAJ ..... **I**
PREDGOVOR ..... **III**
SAŽETAK ..... **IV**
SUMMARY ..... **V**
POPIS VAŽNIJIH OZNAKA ..... **VI**
POPIS SLIKA ..... **X**
POPIS TABLICA ..... **XV**
1 UVOD **1**
1.1 HIPOTEZA RADA 3
1.2 PREGLED RADA 4
2 MATEMATIČKI MODEL TURBULENTNOG STRUJANJA **6**
2.1 UVOD 6
2.2 OSNOVNE JEDNADŽBE DINAMIKE FLUIDA 7
2.3 JEDNADŽBE TURBULENTNOG STRUJANJA FLUIDA 9
2.3.1 Reynoldsovo vremensko osrednjavanje 10
2.3.2 $k-\varepsilon$ model turbulencije 12
2.4 OPĆA KONVEKCIJSKO-DIFUZIJSKA JEDNADŽBA 15
3 DISKRETIZACIJA PODRUČJA STRUJANJA – GEOMETRIJSKA MREŽA **16**
3.1 UVOD 16
3.2 ZAHTJEVI NA GEOMETRIJSKU MREŽU 17
3.3 POSTUPAK GENERIRANJA GEOMETRIJSKE MREŽE 18
3.3.1 Definiranje svih rubova 18
3.3.2 Postavljanje rubnih čvorova 19
3.3.3 Postavljanje unutarnjih čvorova 23
3.3.4 Uklanjanje bliskih čvorova 28
3.3.5 Formiranje konačnih volumena 29
3.3.6 Ujednačavanje geometrijske mreže 31
3.3.7 Računanje podataka za metodu konačnih volumena 32
4 METODA KONAČNIH VOLUMENA **34**
4.1 UVOD 34
4.2 DISKRETIZACIJA OPĆE KONVEKCIJSKO-DIFUZIJSKE JEDNADŽBE 35
4.2.1 EDS i EDSI sheme diferencije 38

4.2.2 Vremenska integracija ... 40
4.2.3 Linearizacija izvorskih članova ... 41
4.2.4 Konačni oblik diskretizirane jednadžbe ... 42
4.2.5 Detalji diskretizacije jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta ... 43
4.3 RUBNI UVJETI ... 46
4.3.1 Ulaz ... 46
4.3.2 Izlaz ... 46
4.3.3 Čvrsta nepropusna stijenka ... 46
4.3.4 Ravnina simetrije ... 48
4.3.5 Rubni uvjeti za k i ε jednadžbe ... 49
4.4 PODRELAKSACIJA ... 52
4.5 RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI ... 53
4.6 KRITERIJ ZAVRŠETKA ITERATIVNOG POSTUPKA ... 55
4.7 RJEŠAVANJE SUSTAVA JEDNADŽBI MATEMATIČKOG MODELA TURBULENTNOG STRUJANJA ... 56
4.7.1 Algoritam SIMPLE ... 57
4.7.2 Algoritam SIMPLER ... 61
4.8 POSEBNOSTI METODE KONAČNIH VOLUMENA U PROGRAMU CAFFA ... 63
4.8.1 Osnovni podaci o geometrijskoj mreži ... 64
4.8.2 Diskretizacija jednadžbi matematičkog modela ... 65
4.8.3 Uzvodna shema i shema centralne diferencije ... 66
4.8.4 Algoritam SIMPLE u programu CAFFA ... 67
5 REZULTATI I DISKUSIJA ... 68
5.1 UVOD ... 68
Test 1 – Provođenje topline u geometrijski složenom području ... 70
5.2 POTENCIJALNO STRUJANJE FLUIDA ... 72
Test 2 – Potencijalno strujanje u pravom kutu ... 72
5.3 LAMINARNO STRUJANJE FLUIDA ... 79
Test 3 – Laminarno strujanje u kosokutnoj šupljini s jednim pomičnim rubom ... 79
Test 4 – Laminarno strujanje u naglom proširenju ... 86
5.4 TURBULENTNO STRUJANJE FLUIDA ... 93
Test 5 – Turbulentno strujanje u naglom proširenju ... 93
Test 6 – Turbulentno strujanje u zakrivljenom kanalu ... 98
Test 7 – Turbulentno strujanje u složenijoj geometriji ... 104
5.5 SAŽETAK DISKUSIJE ... 109
6 ZAKLJUČAK ... 112
LITERATURA ... 114
ŽIVOTOPIS ... 122
BIOGRAPHY ... 123

PREDGOVOR

Na Katedri za mehaniku fluida Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu prepoznat je značaj računalne dinamike fluida još početkom 1980-tih godina, u vrijeme kada je snaga dostupnih računala bila nedovoljna za njenu ozbiljniju primjenu. U to se vrijeme značajan dio znanstvenog rada Katedre odnosio na metode opisa i rješavanja turbulentnog strujanja fluida, za što je najzaslužniji bio prof. dr. Zdravko Doliner, koji je prešavši s Mašinskog fakulteta Sveučilišta u Sarajevu prenio ideje svojih kolega koji su se u tom području usavršavali u eminentnim svjetskim centrima. Prva generacija programa razvijenih na Katedri za potrebe proračuna turbulentnog strujanja fluida temelji se na rješavanju $k-\varepsilon$ modela turbulencije u općim ortogonalnim koordinatama, Virag 1985 [102]. Početkom 1990-tih godina na Katedri je razvijen računalni program koji se temelji na rješavanju jednadžbi u općim neortogonalnim koordinatama uz primjenu strukturirane pomaknute mreže i shema diferencije višeg reda, Virag 1991 [103], Korbar [43]. Nakon toga je dio znanstvenog rada Katedre usmjeren na analizu i unapređenje shema diferencije, Virag 1994 [101], Šavar [93], a dio tih rezultata se koristi i u ovom radu. Nagli razvoj računala je omogućio primjenu nestrukturirane mreže kojom se jednostavno opisuje geometrijski vrlo složeno područje proračuna. U okviru treće generacije na Katedri se razvijaju računalni programi za proračun strujanja fluida, koji se temelje na primjeni nestrukturirane nepomaknute mreže. Ovaj rad predstavlja doprinos tom razvoju.

Iako se danas na tržištu može naći određeni broj komercijalnih računalnih programa za rješavanje problema dinamike fluida, još uvijek se dosta napora ulaže u razvoj numeričkih metoda dinamike fluida. „Idealni" računalni program bi oslobodio korisnika ulaženja u detalje numeričkog postupka, izbora geometrijske mreže i modela turbulencije, pri čemu bi numerički postupak uvijek konvergirao i davao rješenja prihvatljive točnosti. Ovaj rad je jedan u nizu na Katedri koji je posvećen razvoju numeričke metode konačnih volumena na nepomaknutoj nestrukturiranoj geometrijskoj mreži. Poseban naglasak je na izboru geometrijske mreže i razvoju algoritama koji će osigurati bržu konvergenciju numeričkog postupka, uz primjenu shema diferencije višeg reda. On je u kontinuitetu s dosadašnjim istraživanjem, Džijan [19], u kojem je razvijen vlastiti generator lokalno ortogonalne nestrukturirane mreže i odgovarajući numerički postupak za rješavanje opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe, a ovdje je taj postupak primijenjen na sustav Reynoldsovih jednadžbi s $k-\varepsilon$ modelom turbulencije. U definiranju algoritama za rješavanje tog sustava koriste se sva dosadašnja iskustva stečena u razvoju prve dvije generacije računalnih programa, uz prednosti koje pruža lokalna ortogonalnost geometrijske mreže.

SAŽETAK

U radu je razvijen računalni program za analizu dvodimenzijskog turbulentnog strujanja fluida. Program se temelji na metodi konačnih volumena na lokalno ortogonalnoj nestrukturiranoj geometrijskoj mreži u kojoj se brzine i tlakovi računaju u istim čvorovima (nepomaknuta mreža). U korištenoj lokalno ortogonalnoj mreži je svaka stranica konačnog volumena okomita na spojnicu susjednih čvorova i dijeli ju na dva jednaka dijela. Definirane su dvije varijante metode konačnih volumena. U prvoj varijanti se za povezivanje polja brzine i polja tlaka koristi algoritam SIMPLE, a u drugoj algoritam SIMPLER, koji se do sada nije koristio na nestrukturiranoj nepomaknutoj mreži. U program su ugrađene: uzvodna shema diferencije, shema centralne diferencije, kombinacija uzvodne i sheme centralne diferencije, eksponencijalna shema i vlastita varijanta unaprijeđene eksponencijalne shema diferencije. Brzina konvergencije algoritama u vlastitom programu uspoređena je s brzinom konvergencije algoritma SIMPLE u javno dostupnom programu CAFFA autora M. Perića, u kojem se primjenjuje strukturirana neortogonalna mreža. Zaključeno je da se zbog neortogonalnosti mreže povećava potreban broj iteracija numeričkog postupka, te da neortogonalnost geometrijske mreže smanjuje područje vrijednosti faktora podrelaksacije u kojem algoritam SIMPLE konvergira. Pokazano je da su numerički rezultati na lokalno ortogonalnoj mreži točniji od rezultata na neortogonalnoj mreži. U slučaju nestrukturirane mreže, lokalna ortogonalnost je omogućila formulaciju algoritma SIMPLER, koji je u većini provedenih testova brže konvergirao od algoritma SIMPLE. U slučaju turbulentnog strujanja veliki utjecaj na brzinu konvergencije ukupnog numeričkog postupka ima brzina konvergencije jednadžbi modela turbulencije, pa prednosti algoritma SIMPLER u odnosu na algoritam SIMPLE nisu izražene u velikoj mjeri. Općenito se može zaključiti da predložena lokalno ortogonalna mreža omogućuje dobru diskretizaciju geometrijski složenih područja i omogućuje definiranje stabilnih i točnih numeričkih metoda.

Ključne riječi

Računalna dinamika fluida

Metoda konačnih volumena

Nestrukturirana mreža

Nepomaknuta mreža

Algoritam SIMPLER

Brzina konvergencije

SUMMARY

NUMERICAL METHOD FOR FLUID FLOW ANALYSIS ON UNSTRUCTURED GRID

A computer program for the analysis of two-dimensional turbulent fluid flow has been developed. The program is based on the finite volume method on unstructured locally orthogonal grid with the same nodes for all variables (collocated grid). In the used grid each cell face is orthogonal to the connection line of two adjacent nodes and divides it in two equal parts. Two variants of finite volume method have been proposed: one using the SIMPLE algorithm and the other using the SIMPLER algorithm which has not been used on the unstructured collocated grids yet. The following differencing schemes have been implemented: first order Upwind Differencing Scheme – UDS, Central Differencing Scheme – CDS, the combination of UDS and CDS, Exponential Differencing Scheme – EDS and Exponential Differencing Scheme Improved – EDSI. Results of proposed variants of the finite volume method have been compared with the results obtained with the public CFD program CAFFA on a structured non-orthogonal grid (author M. Perić) in terms of convergence rate and accuracy. It is concluded that the grid non-orthogonality increases the number of iterations needed to achieve prescribed accuracy. Due to the grid non-orthogonality the domain of under relaxation factors, in which SIMPLE algorithm converges, becomes smaller. It has been demonstrated that the numerical results obtained on locally orthogonal grid are more accurate than the corresponding results obtained on non-orthogonal grid. In the case of the unstructured grid, local orthogonality enables the application of the SIMPLER algorithm which is superior to the SIMPLE algorithm with respect to rate of convergence in most test cases without turbulence. In case of turbulent flow, the convergence of numerical method is mainly influenced by the convergence of turbulence model equations. Consequently, the superiority of the SIMPLER over SIMPLE algorithm is abated. A general conclusion is that the proposed locally orthogonal grid enables good discretisation of complex geometries and a robust and accurate numerical procedure.

Key words

Computational Fluid Dynamics

Finite Volume Method

Unstructured Grid

Collocated Grid

SIMPLER Algorithm

Convergence Rate

POPIS VAŽNIJIH OZNAKA

Oznaka	SI-jedinica	Naziv
A	[m^2]	površina konačnog volumena
ΔA	[m^2]	površina stranice konačnog volumena $A = \sum_{k=1}^{m} [\Delta A]^k$
a_C	[kg/s]	centralni koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
$\overline{a}_C$	[kg/s]	podrelaksirani centralni koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
a_N	[kg/s]	koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
b		slobodni član u diferencijskoj jednadžbi
$\overline{b}$		podrelaksirani slobodni član u diferencijskoj jednadžbi
$C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	[-]	konstante modela turbulencije
c	[J/(kg K)]	specifični toplinski kapacitet
D	[kg/s]	difuzijska vodljivost
d_1	[m]	udaljenost između čvorova na početnom dijelu ruba
d_2	[m]	udaljenost između čvorova na krajnjem dijelu ruba
d_r	[m]	udaljenost između čvorova po kružnici u blizini kuta većeg od 180°
e	[J/kg]	zbroj specifične unutarnje i kinetičke energije
F	[kg/s]	jačina konvekcije
f		skalarno polje
$\overline{f}$		statistički osrednjeni dio skalarnog polja f
f'		puzirajući dio skalarnog polja f
f_i	[N/kg]	komponente vektora specifične masene sile
G	[W/m^3]	generacija kinetičke energije turbulencije
J		protok fizikalnog svojstva Φ

ΔJ		dodatak protoka fizikalnog svojstva Φ kod EDSI sheme diferencije
$\overline{k}$	[J/kg]	kinetička energija turbulencije
m	[-]	ukupan broj susjednih čvorova promatranom čvoru
m_{br}	[-]	redni broj čvora (broj reda gledano od ruba u kojem se čvor nalazi)
N_i	[-]	ukupni broj unutarnjih čvorova odnosno konačnih volumena
n_0	[-]	ukupan broj čvorova na dijelu ruba
n_1	[-]	broj čvorova koji se postavljaju s početnog dijela ruba
n_2	[-]	broj čvorova koji se postavljaju s krajnjeg dijela ruba
n_{d1}	[-]	broj koji definira d_1 kao omjer $d_1 = s_{\text{d}}/n_{\text{d1}}$
n_{d2}	[-]	broj koji definira d_2 kao omjer $d_2 = s_{\text{d}}/n_{\text{d2}}$
n_i	[-]	komponente jediničnog vektora vanjske normale
Pe	[-]	Pecletov broj
Pr	[-]	Prandtlov broj
p	[N/m^2]	tlak
$\overline{p}$	[N/m^2]	statistički osrednjeni dio polja tlaka p
p'	[N/m^2]	puzirajući dio polja tlaka p
$\overline{p}_e$	[N/m^2]	efektivni tlak
q_1	[-]	faktor geometrijske progresije udaljenosti između čvorova na početnom dijelu ruba
q_2	[-]	faktor geometrijske progresije udaljenosti između čvorova na krajnjem dijelu ruba
q_i	[W/ m^2]	komponente vektora površinske gustoće toplinskog toka
q_{r}	[-]	faktor geometrijske progresije udaljenosti između unutarnjih čvorova u blizini kuta većeg od 180°
q_δ	[-]	faktor geometrijske progresije udaljenosti između unutarnjih čvorova okomito na rub
Re	[-]	Reynoldsov broj
Re_t	[-]	turbulentni Reynoldsov broj

$r_{\max}$	[m]	polumjer kruga unutar kojeg se nalaze potencijalni susjedni čvorovi
S		izvorski član u općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednadžbi
S_T		izvorski član temperaturne jednadžbe
s	[m]	polovina duljine spojnice dvaju susjednih čvorova
s_{d}	[m]	duljina dijela ruba
s_{n}	[m]	ukupna udaljenost n-tog čvora on početnog dijela ruba
T	[K]	temperatura
$\overline{T}$	[K]	statistički osrednjeni dio polja temperature T
T'	[K]	puzirajući dio polja temperature T
T_0	[s]	period osrednjavanja
t	[s]	vrijeme
Δt	[s]	vremenski korak integracije
u	[J/kg]	specifična unutarnja energija
V	[m^3]	obujam konačnog volumena
v_i	[m/s]	komponente vektora brzine strujanja fluida ($u \equiv v_1$, $v \equiv v_2$)
$\overline{v_i}$	[m/s]	statistički osrednjeni dio polja vektora brzine strujanja fluida v_i
v_i'	[m/s]	puzirajući dio polja vektora brzine strujanja fluida v_i
v_n	[m/s]	projekcija brzine u točki n u smjeru vanjske normale n_i
x_i	[m]	pravokutne koordinate ($x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$)

α_p	[-]	faktor podrelaksacije tlaka
α_{uv}	[-]	faktor podrelaksacije brzine
Γ	[kg/m s]	koeficijent difuzije u općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednadžbi
γ	[-]	funkcija *Pe*-broja kod EDSI sheme diferencije
δ_1	[m]	udaljenost prvog unutarnjeg čvora okomito na rub na početnom dijelu ruba
δ_2	[m]	udaljenost prvog unutarnjeg čvora okomito na rub na krajnjem dijelu ruba
δ_{ij}	[-]	Kroneckerov simbol
δ_n	[m]	udaljenost prvog unutarnjeg čvora okomito na rub od *n*-tog čvora na dijelu ruba
δ_r	[m]	udaljenost prvog reda unutarnjih čvorova u blizini kuta većeg od 180°
$\bar{\varepsilon}$	[W/kg]	disipacija kinetičke energije turbulencije
λ	[W/(m K)]	toplinska vodljivost
μ	[Pa s]	dinamička viskoznost
μ_e	[Pa s]	efektivna dinamička viskoznost
μ_t	[Pa s]	turbulentna dinamička viskoznost
ρ	[kg/m^3]	gustoća
$-\rho\overline{v_i'v_j'}$	[kg/s^2 m]	tenzor Reynoldsovih turbulentnih naprezanja
$-\rho\overline{v_j'T'}$	[kg K/m^2 s]	vektor turbulentne difuzijske temperature
σ_{ji}	[N/m^2]	komponente simetričnog tenzora naprezanja
σ_k , σ_ε , σ_T	[-]	Schmidtovi brojevi
τ_{ij}	[N/m^2]	komponente tenzora viskoznih naprezanja
Φ		masena gustoća fizikalnog svojstva u općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednadžbi
ω	[-]	faktor vremenske interpolacije

POPIS SLIKA

Slika 3.1 Općeniti raspored čvorova po dijelu ruba *20*

Slika 3.2 Ravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano n_0 ..... *21*

Slika 3.3 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano n_0, d_1 *i* d_2 ..... *21*

Slika 3.4 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano d_1 *i* d_2 ..... *22*

Slika 3.5 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano d_1, d_2, q_1 *i* q_2 ..... *22*

Slika 3.6 Primjer područja s postavljenim rubnim čvorovima *23*

Slika 3.7 Karakteristični parametri i način postavljanja unutarnjih čvorova *24*

Slika 3.8 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja manjim od 90° *25*

Slika 3.9 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja od 90° *25*

Slika 3.10 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja između 90° i 180° *26*

Slika 3.11 Postavljanje unutarnjih čvorova u kutu mreže za slučaj kuta punjenja većeg od 180° *27*

Slika 3.12 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja većim od 180° *27*

Slika 3.13 Primjer područja sa slike 3.6 s postavljenim unutarnjim čvorovima *28*

Slika 3.14 Primjer područja sa slike 3.13 s preostalim čvorovima nakon uklanjanja bliskih čvorova *29*

Slika 3.15 Procedura formiranja konačnog volumena *30*

Slika 3.16 Primjer geometrijske mreže sa slike 3.14 nakon formiranja konačnih volumena *31*

Slika 3.17 Konačni izgled geometrijske mreže sa slike 3.16 nakon ujednačavanja geometrijske mreže *32*

Slika 4.1 Dio diskretiziranog područja proračuna *36*

Slika 4.2 Tipični konačni volumen geometrijske mreže za program CAFFA *65*

Slika 5.1 Test 1 – geometrijska mreža za program CAFFA *70*

Slika 5.2 Test 1 – geometrijska mreža za vlastiti program 71

Slika 5.3 Test 1 – brzina konvergencije temperaturne jednadžbe 71

Slika 5.4 Test 1 – izračunate izoterme 71

Slika 5.5 Test 2 – područje proračuna i geometrijska mreža za program CAFFA 73

Slika 5.6 Test 2 – područje proračuna i geometrijska mreža za vlastiti program..... 73

Slika 5.7 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,1$ *... 75*

Slika 5.8 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,4$ *.. 75*

Slika 5.9 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,5$ *.. 75*

Slika 5.10 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,6$ *75*

Slika 5.11 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,05$ *. 76*

Slika 5.12 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,1$ *.... 76*

Slika 5.13 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,2$ *... 76*

Slika 5.14 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER, mreža M2 76

Slika 5.15 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M3 za $\alpha_p = 0,5$ *77*

Slika 5.16 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M3 za $\alpha_p = 0,1$ *.... 77*

Slika 5.17 Test 2 – usporedba brzina konvergencije za mreže M2 i M2-O 77

Slika 5.18 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, algoritam SIMPLER..... 77

Slika 5.19 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, algoritam SIMPLE 78

Slika 5.20 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, program CAFFA . 78

Slika 5.21 Test 3 – slika strujnica dobivena programom FLUENT na mreži 160x160 KV 80

Slika 5.22 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,05$ *82*

Slika 5.23 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,1$ *. 82*

Slika 5.24 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,2$ *82*

Slika 5.25 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,5$ *82*

Slika 5.26 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_{uv} = 0,8$ *83*

Slika 5.27 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER, mreža M1 83

Slika 5.28 Test 3 – usporedba brzina konvergencije triju metoda na mreži M1 83

Slika 5.29 Test 3 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije 84

Slika 5.30 Test 3 – utjecaj sheme diferencije na brzinu konvergencije, mreža M1 84

Slika 5.31 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške u komponente brzine, vlastiti program 84

Slika 5.32 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške u komponente brzine, program CAFFA 84

Slika 5.33 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške v komponente brzine, vlastiti program 84

Slika 5.34 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške v komponente brzine, program CAFFA 84

Slika 5.35 Test 3 – profili brzine na mreži M1 85

Slika 5.36 Test 3 – profili brzine na mreži M2 85

Slika 5.37 Test 4 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža 86

Slika 5.38 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,05$ 88

Slika 5.39 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,1$ 88

Slika 5.40 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$ 88

Slika 5.41 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$ 88

Slika 5.42 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,05$ 89

Slika 5.43 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,1$ 89

Slika 5.44 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,2$ 89

Slika 5.45 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,3$ 89

Slika 5.46 Test 4 – brzine konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_{uv} = 0,85$ 90

Slika 5.47 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER 90

Slika 5.48 Test 4 – usporedba brzina konvergencije triju metoda 90

Slika 5.49 Test 4 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, UDS shema diferencije 91

Slika 5.50 Test 4 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, EDSI shema diferencije 91

Slika 5.51 Test 4 – raspodjela bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci, UDS shema diferencije 92

Slika 5.52 Test 4 – raspodjela bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci, EDSI shema diferencije *92*

Slika 5.53 Test 4 – ovisnost duljine zone recirkulacije o gustoći geometrijske mreže .. *92*

Slika 5.54 Test 5 – brzina konvergencije triju metoda *95*

Slika 5.55 Test 5 – brzine konvergencije algoritma SIMPLER s promjenom faktora α_{uv} *95*

Slika 5.56 Test 5 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} *i* α_p *95*

Slika 5.57 Test 5 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, EDSI shema diferencije *95*

Slika 5.58 Test 5 – raspodjelu bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci *96*

Slika 5.59 Test 5 – ovisnost duljine zone recirkulacije o gustoći geometrijske mreže .. *96*

Slika 5.60 Test 5 – profili u komponente brzine u različitim poprečnim presjecima *96*

Slika 5.61 Test 5 – profili kinetičke energije turbulencije u različitim poprečnim presjecima *97*

Slika 5.62 Test 5 – profil koeficijenta tlaka na donjoj stijenci *97*

Slika 5.63 Test 6 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža za program CAFFA..... *98*

Slika 5.64 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$ *100*

Slika 5.65 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$ *100*

Slika 5.66 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,4$ *100*

Slika 5.67 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,5$ *100*

Slika 5.68 Test 6 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} *i* α_p *101*

Slika 5.69 Test 6 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,2$ *101*

Slika 5.70 Test 6 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,3$ *101*

Slika 5.71 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER..... *101*

Slika 5.72 Test 6 – usporedba brzina konvergencije triju metoda..... *102*

Slika 5.73 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$*, algoritam SIMPLE*..... *103*

Slika 5.74 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$*, program CAFFA*..... *103*

Slika 5.75 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$*, algoritam SIMPLER* *103*

Slika 5.76 Test 6 – usporedba brzine konvergencije algoritma SIMPLER u uvjetima laminarnog i turbulentnog strujanja 103

Slika 5.77 Test 7 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža 104

Slika 5.78 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,1$ 106

Slika 5.79 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$ 106

Slika 5.80 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$ 106

Slika 5.81 Test 7 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} i α_p 106

Slika 5.82 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER 107

Slika 5.83 Test 7 – usporedba brzina konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER 107

Slika 5.84 Test 7 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLE 107

Slika 5.85 Test 7 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLER 108

Slika 5.86 Test 7 – brzina konvergencije algoritma SIMPLER u uvjetima laminarnog i turbulentnog strujanja 108

Slika 5.87 Test 7 – slika strujnica i izobara za slučaj turbulentnog strujanja 108

Slika 5.88 Test 7 – slika strujnica i izobara za slučaj laminarnog strujanja 108

POPIS TABLICA

Tablica 2.1 Sadržaji koeficijenata difuzije i izvorskih članova za jednadžbe turbulentnog strujanja nestlačivog newtonskog fluida 15

Tablica 5.1 Test 2 – optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije za različite mreže 78

Tablica 5.2 Optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije za sve testove 111

1 UVOD

Paralelno s brzim razvojem računala dolazi do naglog razvoja računalne dinamike fluida (engl. Computational Fluid Dynamics – CFD) i širenja područja primjene numeričkih metoda u rješavanju tehničkih problema. Primjena se širi na fizikalno sve složenije probleme turbulentnog strujanja višekomponentnih fluida, strujanje uz promjenu faza, izgaranje i zračenje, strujanje uz uzimanje u obzir elektromagnetskih efekata i sl. u geometrijski sve složenijem području proračuna, što stvara potrebu za korištenjem nestrukturirane mreže za njegovu diskretizaciju. Treba naglasiti da se za rješavanje najsloženijih problema računalne dinamika fluida koriste najjača računala, a njihov daljnji razvoj će omogućiti širenje područja primjene CFD-a. Tako će npr. vremenska prognoza koja se temelji na proračunu strujanja fluida u Zemljinoj atmosferi biti sve pouzdanija s povećanjem snage računala. Naravno da danas u računalnoj dinamici fluida nisu prisutni problemi samo u području numerike, već i u području modeliranja turbulencije, ali tim problemima se ovaj rad neće baviti. Od numeričke metode se traži što veća točnost rezultata na zadanoj geometrijskoj mreži, za što je odgovorna shema diferencije kojom se modeliraju konvekcijski i difuzijski protoci, te efikasnost koja podrazumijeva što manje računalnog vremena za postizanje određene točnosti rezultata.

Razvoj računalne dinamike fluida je započeo s metodom konačnih razlika i metodom konačnih volumena na pravokutnim mrežama. Razvojem računala ostvarile su se mogućnosti primjene metode konačnih elemenata (koja se već široko primjenjivala na probleme mehanike čvrstih tijela) i u području računalne dinamika fluida, Bathe [5], Zienkiewicz [111], Löhner [53], Gallagher [25]. Osnovna prednost metode konačnih elemenata je bila u fleksibilnosti diskretizacije područja proračuna složene geometrije, koja se izgubila razvojem metode konačnih volumena na nestrukturiranim mrežama. S obzirom na tradiciju, fizikalnost metode konačnih volumena i jednostavnost njene primjene, ona se u području računalne dinamike fluida zadržala kao najčešće korištena metoda, što se može zaključiti i iz činjenice da se većina danas korištenih komercijalnih CFD računalnih paketa temelji na metodi konačnih volumena.

Jedan od ključnih faktora koji utječe na efikasnost numeričkog postupka je algoritam za iterativno rješavanje sustava jednadžbi kojima se opisuje strujanje fluida. Naime, poznato je da su te jednadžbe nelinearne, te da postupak njihova rješavanja nužno ima iterativni karakter. Smanjivanjem potrebnog broja iteracija za postizanje konačnog rješenja direktno se povećava efikasnost numeričkog postupka. Do danas razvijeni algoritmi mogu se svrstati u dvije skupine: direktni i sekvencijalni (enlg. segregate). U direktnim algoritmima simultano se rješavaju jednadžbe količine gibanja i jednadžba kontinuiteta, pri čemu se nelinearnost jednadžbi najčešće tretira pomoću Newtonove metode. Nedostatak ovih algoritama je u velikoj matrici sustava jednadžbi koji se rješava i njihovoj osjetljivosti na početnu pretpostavku traženih polja. U sekvencijalnim algoritmima , Doormaal 1985 [17], jednadžbe za pojedine nepoznanice se rješavaju jedna za drugom dok se ne postigne konačno simultano rješenje, pa su matrice sustava linearnih algebarskih jednadžbi puno manje. Nedostatak ovih algoritama je povećani broj iteracija za postizanje konačnog rješenja koji se još i povećava s povećanjem

gustoće geometrijske mreže. Jedan od načina ublažavanja tog nedostatka je primjena višemrežnih (engl. multigrid) metoda.

Danas se češće primjenjuju sekvencionalni algoritmi za rješavanje jednadžbi matematičkog modela strujanja fluida među kojima se razlikuju algoritmi u kojima se iz jednadžbe kontinuiteta određuje gustoća, što nije pogodno za proračun nestlačivog strujanja u kojem je gustoća konstantna, i algoritmi u kojima se iz jednadžbe kontinuiteta određuje tlak (engl. pressure-based approach), koji su primjenjivi i za stlačivo i za nestlačivo strujanje, te se najčešće i koriste, Choi [14], Deng [16], Kang [39], Moukalled [62] i [63], Woodfield [106].

Unutar sekvencionalnog pristupa u kojem se, kako je već rečeno, iz jednadžbe kontinuiteta određuje tlak postoji nekoliko numeričkih metoda i to: „fractional step method", Kim [40], „the artificial compressibility method", Lee [48], „penalty method", Braaten [10] i metoda korekcije tlaka (engl. pressure correction method). Metoda korekcije tlaka je najčešće korištena u publikacijama posljednjih godina, Deng [16], Lehnhauser [49], Shen [87], Tao [95] i [96], Yu [107] i [108].

Prvi primijenjeni algoritam korekcije tlaka je SIMPLE (Semi-Implicit Method for the Pressure-Linked Equation, Patankar i Spalding 1972 [66]). U tom se algoritmu u jednadžbi za korekciju tlaka zanemaruje utjecaj korekcija brzina u okolnim čvorovima na korekciju brzine u centralnom čvoru (uspostavlja se linearna veza između korekcije brzine i tlaka). Zbog toga je ovaj algoritam poluimplicitan. Ovo zanemarivanje ne utječe na konačno rješenje koje se dobije na kraju iterativnog procesa, ali utječe na brzinu konvergencije numeričkog postupka. S druge strane to zanemarivanje ima za posljedicu precjenjivanje korekcije tlaka, što može dovesti do divergencije numeričkog postupka, pa se za njegovu stabilizaciju mora uvesti faktor podrelaksacije tlaka. Optimalnu vrijednost faktora podrelaksacije (kod koje će iterativni postupak najbrže konvergirati) je vrlo teško odrediti unaprijed, jer ona ovisi i o parametrima geometrijske mreže i o fizikalnim karakteristikama samog problema. Postoji veći broj modifikacija algoritma SIMPLE kojima je osnovni cilj povećati stabilnost iterativnog postupka, odnosno ubrzati njegovu konvergenciju. Zajednička karakteristika svih tih algoritama temeljenih na algoritmu SIMPLE je da se uvodi član korekcije tlaka, koji je linearno povezan s korekcijom brzine, te se u uzastopnom rješavanju jednadžbi količine gibanja i jednadžbe za korekciju tlaka poboljšava polje brzine.

Jedna od modifikacija koja se šire koristi je algoritam SIMPLER (SIMPLE Revised, Patankar 1981 [68]), koji je izvorno definiran na ortogonalnoj strukturiranoj mreži, s čvorovima, u kojima se računaju komponente polja brzine, pomaknutim na stranice konačnih volumena (pomaknuta mreža). Osnovna ideja ovog algoritma je u tome da se tlak određuje rješavanjem posebne jednadžbe koja se dobije iz jednadžbe kontinuiteta u koju su uvrštene jednadžbe količine gibanja (jednadžba za tlak), tako da se gubi potreba korigiranja tlaka nakon rješavanja jednadžbe korekcije tlaka. Samim time prestaje potreba za faktorom podrelaksacije tlaka, postupak u pravilu brže konvergira (do rješenja se dolazi u manjem broju iteracija, ali jedna iteracija traje dulje nego u algoritmu SIMPLE, jer se dodatno rješava jednadžba za tlak).

U algoritmu SIMPLEC, Doormaal 1984 [18], se promjenom definicije koeficijenata jednadžbe za korekciju tlaka djelomično kompenzira efekt zanemarivanja utjecaja susjednih čvorova na korekciju tlaka u centralnom čvoru. U algoritmu SIMPLEX, Doormaal 1985 [17], Raithby [76], se rješavanjem algebarskih jednadžbi za koeficijente u jednadžbi za korekciju tlaka također uzima u obzir efekt zanemarivanja utjecaja korekcije brzina u okolnim čvorovima do određenog stupnja. Ni algoritam SIMPLEC, a

niti SIMPLEX ne eliminiraju potpuno aproksimaciju linearizacije veze korekcije brzine i tlaka, pa je to razlog zbog kojeg oni ne daju uvijek bržu konvergenciju pokazujući veliku ovisnost brzine konvergencije algoritma o problemu koji se rješava. U algoritmu PISO, Issa [35], korekcije tlaka se vrši dva ili više puta.

Svi ovi algoritmi izvorno su definirani na pomaknutoj mreži (engl. staggered grid) (tlak se računa u središtima konačnog volumena, a čvorovi u kojima se računaju komponente brzine su pomaknuti na stranice konačnog volumena). Takav pristup zahtijeva tri geometrijske mreže (u dvodimenzijskoj situaciji), što postaje problem kod primjene strukturirane mreže i jednadžbi u općim neortogonalnim koordinatama. U slučaju nestrukturirane mreže takav pristup je vrlo upitan, pa se pri primjeni nestrukturirane mreže čvorovi za računanje komponenti brzine poklapaju s čvorovima za tlak, i takva se mreža zove nepomaknuta (engl. collocated grid ili non-staggered grid). Osnovni nedostatak primjene nepomaknute mreže je mogućnost pojave nefizikalne cik-cak raspodjele tlaka. Rješenje za sprječavanje cik-cak raspodjele tlaka predložili su Rhie i Chow 1983 [78] i ono je značilo početak primjene nepomaknute mreže za rješavanje problema strujanja fluida. Do danas objavljeni algoritmi uglavnom se temelje na idejama algoritma SIMPLE u kojima se rješava jednadžba korekcije tlaka, Shen [87]. U radu, Vasconcellos [99], koji je objavljen tijekom izrade ovog rada, primijenjen je algoritam SIMPLEC na nestrukturiranoj lokalno ortogonalnoj mreži. Na nepomaknutoj nestrukturiranoj mreži, prema spoznajama autora do sada nije bilo uspješne primjene algoritma SIMPLER koji se u primjeni na pomaknutoj mreži redovito pokazivao stabilnijim i efikasnijim od algoritma SIMPLE. Problem pri primjeni algoritma SIMPLER na nepomaknutoj mreži predstavlja i to što spojnice susjednih čvorova kod nestrukturirane mreže u pravilu nisu okomite na stranice konačnih volumena, pa se zbog te neortogonalnosti znatno povećava matrica sustava pri rješavanju jednadžbe za tlak. Kada bi se utjecaj dijela okolnih čvorova tretirao eksplicitno (kroz izvorski član preko vrijednosti varijabli iz prethodne iteracije), tada bi se djelomično izgubila prednost rješavanja jednadžbe za tlak. Zbog neortogonalnosti mreže se i u jednadžbi za korekciju tlaka zanemaruje utjecaj svih čvorova koji nisu u direktnoj vezi s centralnim čvorom promatranog volumena, što dodatno narušava brzinu konvergencije algoritma SIMPLE. Da bi se to izbjeglo u radu se koristi lokalno ortogonalna nestrukturirana geometrijska mreža, tj. mreža kod koje su spojnice čvorova okomite na stranice konačnog volumena. Može se lako pokazati da je takvu mrežu moguće generirati i za geometrijski vrlo složena područja proračuna, jer se svakoj trokutastoj mreži u dvodimenzijskoj situaciji može pridružiti njena dualna mreža (engl. Voronoi dual mesh), koja upravo ima željena svojstva. Isto vrijedi i za mrežu sastavljenu od tetraedara u trodimenzijskoj situaciji. Vrhovi konačnih volumena dualne mreža u dvodimenzijskoj situaciji leže u središtima opisanih kružnica trokutaste mreže.

1.1 HIPOTEZA RADA

Hipoteza rada je da će lokalna ortogonalnost mreže omogućiti numerički postupak za proračun strujanja u geometrijski složenom području, koji će brže konvergirati nego numeričkih postupci u kojima se koristi neortogonalna mreža. Lokalna ortogonalnost mreže će također omogućiti primjenu algoritma SIMPLER jer će se u jednadžbama za tlak i korekciju tlaka pojavljivati utjecaj samo okolnih čvorova (neće biti potrebe za eksplicitnim tretiranjem ili zanemarivanjem utjecaja udaljenijih čvorova). Difuzijski protok će također biti modeliran samo preko okolnih čvorova, a zbog lokalne ortogonalnosti se može očekivati jednostavniju i točniju ugradnju rubnih uvjeta.

1.2 PREGLED RADA

U okviru rada je razvijen numerički postupak i odgovarajući računalni program za proračun turbulentnog strujanja fluida uz primjenu metode konačnih volumena na lokalno ortogonalnoj nepomaknutoj nestrukturiranoj geometrijskoj mreži. Rezultati dobiveni vlastitom metodom se uspoređuju s rezultatima dobivenim računalnim programom CAFFA, kojega je autor M. Perić. Ovaj program je odabran, jer postoji javno dostupna otvorena verzija programa, a metoda je detaljno opisana u knjizi Ferziger i Perić [21]. Numerički postupak u programu CAFFA je razvijen na strukturiranoj neortogonalnoj mreži. S obzirom na strukturiranost mreže, očekuje se čak i nešto veća brzina konvergencije (zbog mogućnosti efikasnijeg rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi) u odnosu na nestrukturiranu mrežu, pa je usporedba rezultata i nešto oštrija, u odnosu na usporedbu dvije metode na nestrukturiranoj mreži. U pojedinim situacijama se također uspoređuje i točnost rezultata, na mrežama približno jednake gustoće i uz primjenu istih shema diferencije.

U poglavlju **Matematički model turbulentnog strujanja** se, polazeći od osnovnih zakona očuvanja, definira matematički model turbulentnog strujanja newtonskog nestlačivog fluida. Ukratko je opisan pristup rješavanju turbulentnog strujanja primjenom Reynoldsova osrednjavanja i dane su vremenski osrednjene jednadžbe matematičkog modela. Usvojen je i opisan standardni k-ε model turbulencije i to varijanta za visoke vrijednosti Reynoldsova broja. Na kraju poglavlja su sve jednadžbe matematičkog modela prikazane u obliku opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe, na kojoj će biti opisan usvojeni numerički postupak.

U poglavlju **Diskretizacija područja strujanja – geometrijska mreža** je dan postupak diskretizacije područja strujanja za usvojenu metodu konačnih volumena. Dani su osnovni zahtjevi koje treba zadovoljavati geometrijska mreža da bi se mogao efikasno primijeniti algoritam SIMPLER i da bi se osigurala veća točnost diskretizacije jednadžbi. Detaljno je opisan vlastiti postupak generiranja dvodimenzijske lokalno ortogonalne nestrukturirane mreže, koja potpuno zadovoljava zahtjeve da stranica između dva susjedna konačna volumena bude okomita na spojnicu njoj susjednih čvorova i da ju dijeli na dva jednaka dijela, te da spojnica rubnog i prvog njemu susjednog unutarnjeg čvora bude na pravcu okomitom na rub. Opisan je i postupak ujednačavanja geometrijske mreže radi što boljeg zadovoljavanja zahtjeva da se unutarnji čvor treba nalaziti što bliže težištu odgovarajućeg konačnog volumena i da spojnica susjednih čvorova treba prolaziti što bliže težištu stranice između dva susjedna konačna volumena.

U poglavlju **Metoda konačnih volumena** je prvo opisana primjena metode konačnih volumena na opću konvekcijsko-difuzijsku jednadžbu s prikazom eksponencijalne sheme diferencije i vlastite varijante unaprijeđene eksponencijalne sheme. Zatim su dane posebnosti diskretizacije Reynoldsovih jednadžbi s detaljnim opisom algoritama SIMPLE i SIMPLER za povezivanje polja brzine i tlaka. Prikazani su načini ugradnje rubnih uvjeta, podrelaksacija jednadžbi, primijenjena metoda za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi, te je dan kriterij završetka iterativnog postupka. Na kraju poglavlja su istaknute posebnosti metode konačnih volumena u programu CAFFA koji je poslužio za usporedbu u smislu brzine konvergencije i točnosti rezultata, te su

opisane uzvodna shema diferencije, shema centralne diferencije i kombinacija uzvodne i sheme centralne diferencije, koje se primjenjuju i u vlastitom programu.

U poglavlju **Rezultati i diskusija** su dani rezultati testiranja vlastitog programa s ugrađenim algoritmima SIMPLE i SIMPLER i usporedba s rezultatima dobivenih primjenom javno dostupnog programa CAFFA koji se temelji na algoritmu SIMPLE primijenjenom na strukturiranoj neortogonalnoj mreži. Izabrani su uobičajeni testovi iz kategorije stacionarnog potencijalnog, laminarnog i turbulentnog strujanja. Brzina konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER u vlastitom programu je uspoređena s brzinom konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA. Pokazana je zavisnost brzine konvergencije o izabranim vrijednostima faktora podrelaksacije, pri čemu je u algoritmu SIMPLER potrebno zadavati jedan faktor podrelaksacije manje. Točnost rezultata vlastite metode uspoređena je s analitičkim rezultatima, eksperimentalnim rezultatima, rezultatima drugih autora ili rezultatima dobivenim komercijalnim paketom FLUENT na gustoj geometrijskoj mreži. Dobiveni rezultati su u svakom primjeru detaljno opisani, a na kraju poglavlja je dan sažetak diskusije.

U posljednjem poglavlju **Zaključak** je dan kratak pregled provedenih istraživanja, te su na osnovu dobivenih rezultata izvedeni najvažniji zaključci. Na kraju su dane smjernice za nastavak rada.

2 MATEMATIČKI MODEL TURBULENTNOG STRUJANJA

2.1 UVOD

Temelj dinamike fluida čine osnovni zakoni klasične fizike u koje spadaju zakon očuvanja mase, zakon količine gibanja i zakon momenta količine gibanja, te zakon očuvanja energije i drugi zakon termodinamike. Ovi se zakoni definiraju za sustav materijalnih točaka, odnosno za zatvoreni termodinamički sustav, a u mehanici fluida za materijalni volumen koji u općem slučaju s vremenom mijenja svoj položaj, oblik i veličinu.

Za slučaj da na materijalni volumen djeluju samo momenti vanjskih masenih i površinskih sila, a da nema momenata (spregova sila) razmjernih masi odnosno površini materijalnog volumena, zakon momenta količine gibanja svodi se na činjenicu da je tenzor naprezanja simetričan. Ako se pri modeliranju tenzora naprezanja pretpostavi njegova simetričnost zakon momenta količine gibanja se u diferencijalnom pristupu ne uključuje u matematički model jer ne sadrži nikakvu novu informaciju u odnosu na zakon količine gibanja.

Drugi zakon termodinamike ukazuje na jednosmjernost odvijanja realnih termodinamičkih procesa, a u mehanici fluida služi za ocjenu valjanosti dobivenih rješenja strujanja fluida. Entropija se ne pojavljuje u ostalim osnovnim fizikalnim zakonima, te se ova jednadžba može rješavati neovisno o drugim jednadžbama. Zbog toga se drugi zakon termodinamike naziva i „pasivnom" jednadžbom i kao takav se ne uključuje u osnovni skup zakona.

Formulacija osnovnih fizikalnih zakona za materijalni volumen nije pogodna za primjenu u slučajevima strujanja fluida kroz strojeve ili uređaje, pa se tada zakoni preformuliraju za kontrolni volumen koji ne mijenja svoj položaj, oblik i veličinu u vremenu. U općem slučaju dolazi do protjecanja fluida kroz rub kontrolnog volumena, pa on odgovara otvorenom termodinamičkom sustavu. Primjenom Gaussovog teorema integralni oblici ovih osnovnih zakona formuliranih za kontrolni volumen se prikazuju u diferencijalnom obliku.

Budući da će se u ovom radu proučavati problemi strujanja nestlačivog fluida, sve jednadžbe su izvedene uz uvjet $\rho = \text{konst.}$

2.2 OSNOVNE JEDNADŽBE DINAMIKE FLUIDA

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Masa materijalnog volumena je konstantna. Ovaj zakon se u prije navedenim uvjetima može prikazati u diferencijalnom obliku sljedećim izrazom:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right) = 0\,, \tag{2.1}$$

gdje je ρ gustoća fluida, v_j komponente vektora brzine strujanja fluida i x_j pravokutne koordinate.

Zakon količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. Ako su f_i komponente vektora specifične masene sile, σ_{ji} komponente simetričnog tenzora naprezanja i t vrijeme, ovaj se zakon može zapisati u diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j v_i\right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\,. \tag{2.2}$$

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je sumi snaga vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom. Ako je $e = u + v^2/2$ zbroj specifične unutarnje i kinetičke energije čestice fluida, a q_i komponenta vektora površinske gustoće toplinskog toka, onda se zakon očuvanja energije može napisati u diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j e\right) = \rho f_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ji} v_i\right) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,. \tag{2.3}$$

Dani matematički zapisi osnovnih fizikalnih zakona vrijede uz hipotezu kontinuuma i pretpostavku homogenog, jednofaznog i kemijski inertnog fluida u kojem nema površinskih i masenih momenata (tenzor naprezanja je simetričan). Osnovni zakoni fizike koji vrijede za sve fluide, bez obzira na njihovu vrstu i stanje, ne mogu jednoznačno opisati strujanje fluida, te je u cilju usklađivanja broja jednadžbi i broja nepoznatih polja nužno uvesti dopunske pretpostavke o reološkim i termodinamičkim svojstvima fluida. Te dopunske relacije nemaju univerzalni karakter, te će tako zatvoreni sustav jednadžbi biti valjan samo za određenu kategoriju fluida.

Newtonovim zakonom viskoznosti se uspostavlja linearna veza između simetričnog tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije (simetričnog dijela gradijenta brzine). Polazeći od činjenice da u mirujućem fluidu vlada tlak p, a da su tangencijalna

naprezanja jednaka nuli, komponente tenzora naprezanja se mogu prikazati u obliku $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, gdje su δ_{ij} Kroneckerov simbol i τ_{ij} komponente simetričnog tenzora viskoznih naprezanja, koje se za izotropni fluida i uz zanemarivanje koeficijenta volumenske viskoznosti, mogu prikazati izrazom $\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, gdje je μ dinamička viskoznost koja je pozitivna veličina i funkcija je lokalnog termodinamičkog stanja fluida.

Fourierovim zakonom toplinske vodljivosti se uspostavlja linearna veza između vektora površinske gustoće toplinskog toka q_i i gradijenta temperature, koja za izotropni fluida ima sljedeći oblik $q_i = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}$. U ovom izrazu je λ toplinska vodljivost fluida koja je pozitivna veličina i funkcija lokalnog termodinamičkog stanja.

Za nestlačivi fluid ($\rho = \text{konst.}$) specifična unutarnja energija se može izraziti preko specifičnog toplinskog kapaciteta c i temperature T u obliku $u = cT$.

Osnovni zakoni klasične fizike vrijede za sve fluide, a pojedini matematički modeli strujanja fluida razlikuju se po dopunskim ili konstitutivnim relacijama, koje opisuju specifično ponašanje određenih fluida. Uvrštavanjem konstitutivnih relacija u jednadžbe osnovnih zakona dobiva se matematički model u kojem je broj nepoznatih fizikalnih polja usklađen s brojem jednadžbi, a koji vrijedi samo za fluide koji se ponašaju sukladno uvedenim konstitutivnim relacijama.

Tako se u osnovne jednadžbe dinamike newtonskog nestlačivog fluida ubrajaju:

jednadžba kontinuiteta

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right) = 0\,, \tag{2.4}$$

jednadžba količine gibanja

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j v_i\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.5}$$

i **energijska jednadžba**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(cT + \frac{v^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho v_j\left(cT + \frac{v^2}{2}\right)\right] = \\ = \rho f_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij} v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\end{aligned}\,. \tag{2.6}$$

Sustav jednadžbi (2.4) do (2.6) predstavlja sustav pet parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda s pet nepoznatih polja (v_i, p, T). Uz zadane početne i rubne

uvjete, ovaj sustav jednoznačno opisuje problem strujanja newtonskog nestlačivog fluida. Zbog nelinearnosti konvektivnog člana u jednadžbi količine gibanja (drugi član lijeve strane) postavljeni sustav se u općem slučaju ne može riješiti analitički, već se za njegovo rješavanje primjenjuju numeričke metode.

Često se umjesto energijske jednadžbe (2.6) koristi **temperaturna jednadžba** koja se dobije oduzimanjem jednadžbe mehaničke energije (skalarni umnožak jednadžbe količine gibanja s vektorom brzine) i energijske jednadžbe i ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho T\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j T\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\lambda}{c}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{c}\tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{2.7}$$

Sustav jednadžbi (2.4) do (2.6) se naziva potpuni sustav Navier-Stokesovih jednadžbi i on, uz odgovarajući skup početnih i rubnih uvjeta, vrijedi za *laminarno* strujanje viskoznog newtonskog fluida. U realnim uvjetima strujanja ostaje laminarno sve do kritične vrijednosti Reynoldsovog broja $Re=\rho VL/\mu$, gdje su V i L karakteristične vrijednosti brzine i duljine za promatrano strujanje. Iznad te kritične vrijednosti strujanje prelazi u turbulentno čija je karakteristika pojava pulzacija svih varijabli oko njihovih statistički srednjih vrijednosti. Ove pulzacije su stohastičke prirode i zbog toge se ne mogu opisati analitički.

Za slučaj laminarnog, nestlačivog, *izotermnog* strujanja, osim konstanti fluida ρ i μ, te početnih i rubnih uvjeta nisu potrebni dodatni podaci za rješavanje sustava jednadžbi strujanja, Hirsch [31].

2.3 JEDNADŽBE TURBULENTNOG STRUJANJA FLUIDA

Turbulentno strujanje fluida se može definirati, Hinze [30], kao kaotično strujanje u kojem razne veličine pokazuju slučajne promjene u vremenskoj i prostornim koordinatama pri čemu se mogu jasno razlučiti statistički srednje vrijednosti tih veličina.

Turbulentno strujanje se pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja javlja u širokom spektru karakterističnih duljina i frekvencija i potpuno je trodimenzijsko i nestacionarno, te je za njegovo opisivanje potreban veliki broj informacija.

Turbulentno strujanje se može zamisliti kao vrtložno gibanje nastalo superpozicijom širokog spektra vrtloga (u smislu karakterističnih dimenzija). Turbulentni vrtlozi se, također, preklapaju u prostoru, pri čemu veći vrtlozi nose manje. Vezano na široki spektar različitih karakterističnih duljina (ili veličina turbulentnih vrtloga), postoji i energetska kaskada uz pomoć koje se energija prenosi od većih vrtloga na manje i na kraju do najmanjih gdje se ta energija pretvara u toplinu putem molekularne viskoznosti. Turbulentno strujanje je dakle uvijek disipativno.

U turbulentnom strujanju se čestice fluida intenzivno miješaju što ima za posljedicu povećanje difuzijskog prijenosa mase, količine gibanja i energije.

2.3.1 Reynoldsovo vremensko osrednjavanje

S obzirom na nestacionarnost turbulentnog strujanja, prikladno ga je vremenski osrednjiti na statistički osrednjeni i pulzirajući dio turbulentnog strujanja. Ako je *f* neko skalarno polje u kvazistacionarnom turbulentnom strujanju, onda se njegova vrijednost u nekoj točki fluida može prikazati zbrojem statistički osrednjenog dijela $\overline{f}$ koji nije funkcija vremena i pulzirajućeg dijela f' koji je uvijek funkcija vremena u obliku:

$$f = \overline{f} + f' . \tag{2.8}$$

Statistički osrednjeni dio $\overline{f}$ se dobije osrednjavanjem po vremenu na sljedeći način:

$$\overline{f}\left(x_i\right) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f\left(x_i, t\right) dt , \tag{2.9}$$

gdje je T_0 period osrednjavanja koji se bira tako da u kvazistacionarnom turbulentnom strujanju bude zadovoljen uvjet da $\overline{f}$ nije funkcija vremena.

Ako strujanje nije kvazistacionarno, osrednjavanje se vrši slično, samo što se period osrednjavanja T_0 bira tako da je dovoljno velik u usporedbi s odgovarajućim karakterističnim vremenom turbulentnog strujanja, ali još uvijek mali u usporedbi s karakterističnim vremenima ostalih nestacionarnih pojava. Ako je karakteristično vrijeme neke nestacionarne pojave istog reda kao i karakteristično vrijeme turbulentnog strujanja, ta pojava se ne može modelirati na ovaj način. U praktičnim primjenama, većina se nestacionarnih pojava u dinamici fluida odvija u frekvencijskom području koje je izvan frekvencijskog područja turbulentnog strujanja te je ovakav način osrednjavanja prihvatljiv. U nastavku ovog poglavlja će horizontalna crta iznad oznake neke veličine predstavljati oznaku osrednjavanja.

Iz definicije vremenskog osrednjavanja slijedi:

$$\overline{f'} = 0 , \tag{2.10}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} f} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{f} \quad \text{i} \tag{2.11}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} f} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{f} . \tag{2.12}$$

Ako je *g* još jedno skalarno polje u turbulentnom strujanju, može se pokazati da vrijedi:

$$\overline{\overline{f}\, g'} = 0 , \tag{2.13}$$

$$\overline{\overline{f}\, g} = \overline{f}\,\overline{g} \quad \text{i} \tag{2.14}$$

$$\overline{f\, g} = \overline{f}\,\overline{g} + \overline{f'\, g'} . \tag{2.15}$$

Polazne jednadžbe za vremensko osrednjavanje u ovom radu su jednadžbe strujanja nestlačivog newtonskog savršenog fluida bez vanjskih masenih sila ($\rho = const$, $\mu = const$, $f_i = 0$, $c = \text{konst.}$):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right) = 0\,, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j v_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right] \text{ i} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho T\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j T\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\lambda}{c}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = S_T\,, \tag{2.18}$$

gdje je $S_T = \dfrac{\mu}{c}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ izvorski član temperaturne jednadžbe.

Komponente brzine, tlak i temperatura u turbulentnom strujanju se mogu prikazati zbrojem vremenski osrednjenog i pulzirajućeg dijela u obliku:

$$v_i = \overline{v}_i + v_i'\,, \tag{2.19}$$

$$p = \overline{p} + p' \text{ i} \tag{2.20}$$

$$T = \overline{T} + T'\,. \tag{2.21}$$

Uvrštavanjem ovih izraza u polazne jednadžbe (2.16) do (2.18) uz primjenu pravila osrednjavanja dobiju se jednadžbe za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_j\right) = 0\,, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v}_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_i\overline{v}_j\right) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}\right) - \rho\overline{v_i'v_j'}\right] \text{ i} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{T}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_j\overline{T}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j} - \rho\overline{v_j'T'}\right) = S_T\,. \tag{2.24}$$

Turbulentno strujanje je na ovaj način izraženo Reynoldsovim jednadžbama za osrednjeno strujanje u kojima u odnosu na jednadžbe laminarnog strujanja postoje dodatni članovi:

$-\rho\overline{v_i'v_j'}$ tenzor Reynoldsovih turbulentnih naprezanja i

$-\rho\overline{v_j'T'}$ vektor turbulentne difuzije temperature.

Ovi članovi predstavljaju nove nepoznate korelacije zbog čega sustav jednadžbi sadrži više nepoznatih veličina nego raspoloživih jednadžbi. Da bi se sustav u matematičkom smislu zatvorio potrebno je uvesti model turbulencije.

2.3.2 $k-\varepsilon$ model turbulencije

Model turbulencije se definira kao skup jednadžbi (algebarskih ili diferencijalnih) koje određuju dodatne članove turbulentnog prijenosa u osrednjenim jednadžbama turbulentnog strujanja s ciljem zatvaranja sustava jednadžbi u matematičkom smislu. Modeli turbulencije ne opisuju detalje turbulentnog gibanja, nego samo efekte turbulencije na osrednjeno strujanje i obično sadrže empirijske konstante ili funkcije. Opći zahtjevi koji se postavljaju pred model turbulencije su univerzalnost, točnost, mogućnost ekonomičnog rješavanja i jednostavnost.

Modeli turbulencije se mogu svrstati u modele prvog, drugog i višeg reda ovisno o tome koji se najviši red korelacije modelira, Launder i Spalding [47]. Za niže korelacije se rješava jednadžba, a sve više korelacije se modeliraju pomoću nižih koje su obuhvaćene modelom turbulencije. U modelima prvog reda se modelira već korelacija $\overline{v_i'v_j'}$, u modelima drugog reda se rješava jednadžba za korelaciju $\overline{v_i'v_j'}$, a modeliraju se trojne i više korelacije, dok se u modelima višeg reda rješavaju i jednadžbe za trojnu korelaciju. Modeli drugog i višeg reda u nekim situacijama kompleksnijih turbulentnih strujanja daju točnije rezultate, ali se zbog velikih zahtjeva za memorijom računala i potrebnim računalnim vremenom rijetko primjenjuju.

U ovom radu je primijenjen standardni $k-\varepsilon$ model turbulencije koji spada u modele prvog reda i u kojem se korelacija $\overline{v_i'v_j'}$ modelira uz pomoć dviju diferencijalnih jednadžbi. Standardni $k-\varepsilon$ model turbulencije je izabran, pored ostalog, i zbog toga što postoje mnoge modifikacije ovog modela koje daju točnije rezultate za određene vrste kompleksnijih strujanja, kao i zbog toga što ovaj model predstavlja osnovu za veliki broj složenijih modela turbulencije.

U laminarnom strujanju disipacija energije te transport mase, količine gibanja i energije u smjeru normale na strujnice se odvijaju posredstvom molekularne viskoznosti i toplinske vodljivosti. U turbulentnom strujanju se efekt transporta pulzirajućom brzinom može predstaviti kao povećanu viskoznost odnosno toplinsku vodljivost. To dovodi do modela turbulentne viskoznosti, odnosno Boussinesqove hipoteze:

$$-\rho\overline{v_i'v_j'} = \rho\nu_t\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{3}\rho\overline{v_k'v_k'}\delta_{ij}\,. \tag{2.25}$$

Posljednji član na desnoj strani jednadžbe se tumači kao tlak nastao uslijed turbulentnih pulzacija brzine i njime se osigurava korektnost jednadžbe u slučaju izjednačavanja indeksa (kontrakcije). Uz oznaku $\overline{k}=\frac{1}{2}\overline{v_k'v_k'}$ za kinetičku energiju turbulencije (energiju turbulentnih pulzacija brzine) i $\mu_t=\rho\nu_t$ za turbulentnu dinamičku viskoznost (slično molekularnoj dinamičkoj viskoznosti μ), koja nije svojstvo fluida nego je funkcija

lokalnih uvjeta strujanja i iščezava u stanju mirovanja i laminarnog strujanja, jednadžba (2.25) se može napisati u sljedećem obliku:

$$-\rho\overline{v_i'v_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho\overline{k}\delta_{ij}\,. \tag{2.26}$$

Uvrštavanjem ove hipoteze u jednadžbu (2.23) i njenim pregrupiranjem dobije se

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v}_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_i\overline{v}_j\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p}+\frac{2}{3}\rho\overline{k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\mu_t\right)\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{2.27}$$

odnosno konačni oblik jednadžbe količine gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v}_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_i\overline{v}_j\right)=-\frac{\partial\overline{p}_e}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu_e\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{2.28}$$

gdje je za sumu molekularne i turbulentne dinamičke viskoznosti uvedena efektivna dinamička viskoznost $\mu_e=\mu+\mu_t$ i efektivni tlak za $\overline{p}_e=\overline{p}+\frac{2}{3}\rho\overline{k}$.

Slično se za vektor turbulentne difuzije u temperaturnoj jednadžbi uvodi pretpostavka:

$$-\rho\overline{v_j'T'}=\frac{\mu_t}{\sigma_T}\frac{1}{Pr}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}, \tag{2.29}$$

gdje su $Pr=\frac{\mu c}{\lambda}$ Prandtlov broj i σ_T Schmidtov broj za temperaturu koji predstavlja jednu od konstanti $k-\varepsilon$ modela turbulencije. Pretpostavka (2.29) nakon uvrštavanja u jednadžbu (2.24) daje:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{T}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_j\overline{T}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_T}\right)\frac{1}{Pr}\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_j}\right)=S_T\,. \tag{2.30}$$

Dimenzijskom analizom se lako pokaže da su u uvjetima nestlačivog strujanja za definiranje turbulentne viskoznosti potrebne barem dvije karakteristične veličine, npr. brzina i duljina. Te se dvije veličine u jednostavnim slučajevima turbulentnog strujanja mogu propisati algebarskim relacijama, a u složenijim slučajevima je potrebno njihovu promjenu opisati diferencijalnim jednadžbama oblika opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe. U gotovo svim modelima turbulencije, jednadžba za kinetičku energiju turbulencije $\overline{k}$ određuje karakterističnu mjeru brzine. Potpuni izvod jednadžbe za kinetičku energiju turbulencije se može naći u Virag 1985 [102], a ovdje se daje njen konačni modelirani oblik, Launder i Spalding [47]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_j\overline{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\overline{k}}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial\overline{k}}{\partial x_j}\right)+G-\rho\overline{\varepsilon}\,, \tag{2.31}$$

gdje je μ_t turbulentna dinamička viskoznost, a σ_k Schmidtov broj čija je vrijednost približno jednaka jedinici (također jedna od konstanti $k-\varepsilon$ modela turbulencije). Drugi član na desnoj strani $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_j}\right)$ predstavlja difuziju kinetičke energije turbulencije, a treći član G predstavlja generaciju kinetičke energije turbulencije u osrednjenom strujanju, odnosno mjeru prenošenja kinetičke energije od osrednjenog strujanja u turbulenciju. Ako se koristi Boussinesqova hipoteza za računanje Reynoldsovih naprezanja, može se pisati:

$$G=\mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right)^2. \tag{2.32}$$

Modeli turbulencije se uglavnom razlikuju po izboru druge varijable, vidjeti npr. Launder i Spalding [47], Wilcox [105]. Budući da se disipacija kinetičke energije već nalazi u jednadžbi za $\overline{k}$, jedan od često primjenjivanih modela turbulencije je $k-\varepsilon$ model u kojem je druga karakteristična veličina disipacija kinetičke energije turbulencije za koju vrijedi razmjernost s kinetičkom energijom turbulencije i karakterističnom duljinom u obliku:

$$\overline{\varepsilon}\approx\frac{\overline{k}^{3/2}}{L}. \tag{2.33}$$

U $k-\varepsilon$ modelu turbulencije se koristi jednadžba za disipaciju kinetičke energije turbulencije koja ima oblik, Launder i Spalding [47]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{\varepsilon}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{v}_j\overline{\varepsilon}\right)=C_{\varepsilon 1}G\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{k}}-\rho C_{\varepsilon 2}\frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{k}}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x_j}\right), \tag{2.34}$$

gdje su $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ i σ_ε konstante $k-\varepsilon$ modela turbulencije.

Turbulentna dinamička viskoznost se izražava kao:

$$\mu_t=\rho C_\mu\frac{\overline{k}^2}{\overline{\varepsilon}}, \tag{2.35}$$

gdje je C_μ još jedna konstanta $k-\varepsilon$ modela turbulencije.

Standardni $k-\varepsilon$ model turbulencije koji vrijedi za slučaj visokih vrijednosti Reynoldsovog broja sadrži dakle šest konstanti čije su najčešće korištene vrijednosti:

$$\begin{aligned} &C_\mu=0.09 \quad && C_{\varepsilon 1}=1.44 \quad && C_{\varepsilon 2}=1.92 \\ &\sigma_k=1.00 \quad && \sigma_\varepsilon=1.30 \quad && \sigma_T=0.90 \end{aligned}. \tag{2.36}$$

2.4 OPĆA KONVEKCIJSKO-DIFUZIJSKA JEDNADŽBA

Sve jednadžbe matematičkog modela turbulentnog strujanja fluida mogu se prikazati u obliku opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\Phi\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)=S\,. \tag{2.37}$$

Ova jednadžba sadrži nestacionarni član, konvektivni član, difuzijski član i izvorski član u kojem se nalazi sve ono što ne pripada prethodnim članovima. Ovdje Φ predstavlja traženu zavisnu varijablu (masena gustoća nekog fizikalnog svojstva) , Γ je koeficijent difuzije za pojedinu jednadžbu, a S odgovarajući izvorski član. Sadržaji gore nabrojanih veličina za pojedine jednadžbe u $k-\varepsilon$ modelu turbulencije su dani u tablici 2.1.

Tablica 2.1 Sadržaji koeficijenata difuzije i izvorskih članova za jednadžbe turbulentnog strujanja nestlačivog newtonskog fluida

	Φ	Γ	S	Broj jednadžbe
Jednadžba kontinuiteta	1	0	0	(2.22)
Jednadžba količine gibanja	$\overline{v}_i$	μ_e	$-\frac{\partial\overline{p}_e}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_e\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)$	(2.28)
Temperaturna jednadžba	$\overline{T}$	$\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_T}\right)\frac{1}{Pr}$	$S_T=\frac{\mu_e}{c}\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}$	(2.30)
Jednadžba kinetičke energije turbulencije	$\overline{k}$	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$G-\rho\overline{\varepsilon}$	(2.31)
Jednadžba disipacije kinetičke energije turbulencije	$\overline{\varepsilon}$	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_1G\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{k}}-\rho C_2\frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{k}}$	(2.34)

U sljedećim poglavljima će se podrazumijevati osrednjene veličine, te će se oznaka osrednjavanja ispuštati, tj. $\overline{v}_i$ će se označavati jednostavno s v_i, $\overline{T}$ s T itd.

3 DISKRETIZACIJA PODRUČJA STRUJANJA – GEOMETRIJSKA MREŽA

3.1 UVOD

Početna faza svake numeričke simulacije strujanja fluida je generiranje odgovarajuće geometrijske mreže. Tradicionalno se za diskretizaciju područja strujanja kod metode konačnih volumena koristi strukturirana mreža koja se sastoji od regularnih polja četverostranih, odnosno heksaedarskih konačnih volumena u dvije, odnosno tri dimenzije. Opisivanje područja strujanja složene geometrije uz pomoć strukturirane mreže predstavlja ozbiljan izazov. Jedan od načina rješavanja tog problema je primjena blok-strukturirane mreže, tj. podjela područja na blokove, tako da se u svakom pojedinačnom bloku može generirati strukturirana mreža. Automatizacija podjele na blokove i generiranja mreže u pojedinom bloku je težak zadatak, a postupak automatizacije se stalno poboljšava.

Nestrukturirana mreža se dugo koristila u metodi konačnih elemenata, ali se sve češće primjenjuju i u metodi konačnih volumena. Nestrukturirana mreža je razvijena kao alternativa strukturiranoj ili blok-strukturiranoj mreži za diskretizaciju geometrijski složenog područja. Kod ove mreže se koriste jednostavni elementi (trokuti u dvije dimenzije, tetraedri u tri dimenzije) ili elementi različitih tipova s neregularnom međusobnom povezanošću. Ovo osigurava veću fleksibilnost kod diskretizacije područja strujanja složene geometrije, ali također i jednostavnu prilagodbu mreže rješenju, pri čemu se čvorovi mogu dodavati, uklanjati ili pomicati radi povećanja točnosti rješenja, uz promjenu samo lokalnih veza. Generiranje nestrukturirane mreže je lakše automatizirati nego generiranje blok-strukturirane mreže.

Računalna mreža konačnih volumena se formira na jedan od dva osnovna načina. Prvi način podrazumijeva podjelu područja u kojem se traži rješenje na veliki broj konačnih volumena i postavljanje čvorova u centre tih konačnih volumena. Drugi način podrazumijeva postavljanje čvorova i formiranje konačnih volumena oko njih. U ovom radu se primjenjuje drugi način jer se tako mogu bolje zadovoljiti zahtjevi koji proizlaze iz analize metode konačnih volumena.

Najčešće metode za generiranje nestrukturirane mreže su: Advancing-front metoda, Ashford [2], i Delaunay-based metoda, Mavriplis [57] i [58]. Na temelju ovih metoda su razvijeni uspješni programi za generiranje dvodimenzijske i trodimenzijske mreže za opisivanje geometrijski složenog područja. Ovi programi imaju i određene nedostatke, koji se nastoje ispraviti razvojem hibridnih ili sasvim novih metoda. Još uvijek ne postoji dobra definicija optimalne mreže u odnosu na numeričke osobine metode rješavanja i zbog toga ne postoje standardne tehnike za generiranje optimalne mreže.

Mnogi uspješni algoritmi za generiranje nestrukturirane mreže potječu iz računalne geometrije. To je teorijska znanost koja se bavi definiranjem specifičnih geometrijskih

konstrukcija i algoritama podjele za generiranje navedenih konstrukcija, te analizom složenosti algoritama. Na primjer, algoritam Delaunay trokutizacije prikazuje osnovnu konstrukciju računalne geometrije na temelju koje su razvijeni mnogi drugi algoritmi. Nažalost, računalna geometrija je većinom ograničena na dvodimenzijsku trokutizaciju koja je lagana za analizu. Koncept optimalne trokutizacije sa stajališta računalne geometrije nije uvijek u suglasju s osobinama dobivenim sa stajališta CFD-a, te zbog toga većina rezultata računalne geometrije ima malu primjenu u području generiranja nestrukturirane mreže. Veliki napredak u generiranju nestrukturirane mreže napravljen je primjenom iskustvenih algoritama. U određenom je smislu inženjersko polje generiranja mreže ispred teorijskog polja računalne geometrije, naročito za trodimenzijske situacije. Međutim, dok iskustveni algoritmi mogu raditi dobro u većini praktičnih slučajeva, nedostatak bilo kakve teorijske podloge tih algoritama ostavlja mogućnost pojave situacija koje rezultiraju neuspjehom ili velikim porastom složenosti algoritma. Zbog toga se razvoj efikasne i naročito robusne metode generiranja nestrukturirane mreže može ostvariti jedino algoritmom koji počiva na dobrim teorijskim temeljima.

3.2 ZAHTJEVI NA GEOMETRIJSKU MREŽU

Kontrolni volumen koji predstavlja područje strujanja u kojem se traži rješenje se dijeli u veliki broj konačnih volumena koji ga potpuno ispunjavaju i međusobno se ne preklapaju. U svakom konačnom volumenu se nalazi čvor u kojem se računaju sve varijable. Konačni volumeni i čvorovi tvore mrežu konačnih volumena (geometrijsku mrežu).

Geometrijska mreža treba omogućiti što precizniji opis ruba područja u kojem se traži rješenje i kontrolu gustoće rasporeda čvorova po rubu i u različitim dijelovima tog područja. To se prvenstveno odnosi na mogućnost zadavanja različitog načina raspoređivanja rubnih čvorova i propisivanja njihove gustoće uz ravnomjernu promjenu udaljenosti među susjednim rubnim čvorovima.

U ovom radu se primjenjuje nestrukturirana dvodimenzijska geometrijska mreža. Iz analize metode konačnih volumena su proizašli posebni zahtjevi koje bi trebala zadovoljavati geometrijska mreža kako bi se omogućila jednostavnija i točnija primjena sheme diferencije i ugradnja rubnih uvjeta. Ti zahtjevi su:

- Stranica između dva susjedna konačna volumena treba biti okomita na spojnicu odgovarajućih susjednih čvorova. Zadovoljavanjem ovog uvjeta se osigurava da protok neke varijable kroz tu zajedničku stranicu ima samo normalnu komponentu, koja se tada definira preko vrijednosti te varijable (i eventualno njene derivacije u smjeru spojnice) u dva susjedna čvora.

- Stranica između dva susjedna konačna volumena treba prolaziti središtem spojnice odgovarajućih susjednih čvorova, odnosno dijeliti tu spojnicu na dva jednaka dijela. Iz metode konačnih razlika je poznato da se u tom slučaju povećava red točnosti sheme diferencije.

- Spojnica rubnog i prvog njemu susjednog unutrašnjeg čvora treba biti na pravcu okomitom na rub. Ovaj uvjet, uz zadovoljavanje prethodna dva,

omogućava jednostavnu ugradnju rubnih uvjeta zadanih normalnom derivacijom.

- Unutarnji čvor se treba nalaziti što bliže težištu odgovarajućeg konačnog volumena. Time se osigurava točnija aproksimacija volumenskog integrala po konačnom volumenu.
- Spojnica susjednih čvorova treba prolaziti što bliže težištu stranice između dva susjedna konačna volumena. Time se osigurava točnija aproksimacija površinskog integrala po stranici između dva susjedna konačna volumena.

Posljednja dva zahtjeva je moguće zadovoljiti istovremeno s prva tri na pravilnoj strukturiranoj mreži, dok će u općem slučaju to biti nemoguće.

3.3 POSTUPAK GENERIRANJA GEOMETRIJSKE MREŽE

Na temelju gore navedenih zahtjeva u ovom radu je razvijena vlastita metoda generiranja geometrijske mreže, koja se sastoji iz sljedećih korake, Džijan [19]:

- Definiranje svih rubova područja u kojem se traži rješenje.
- Postavljanje rubnih čvorova.
- Postavljanje unutarnjih čvorova.
- Uklanjanje bliskih čvorova.
- Formiranje konačnih volumena oko svakog od preostalih unutarnjih čvorova.
- Ujednačavanje geometrijske mreže preraspoređivanjem unutarnjih čvorova radi što boljeg zadovoljavanja posljednja dva od gore nabrojanih zahtjeva koje bi trebala zadovoljiti geometrijska mreža.
- Računanje podataka potrebnih za metodu konačnih volumena.

U Džijan [19] su se uz rub područja proračuna formirali „polovični" konačni volumeni, a u ovom radu je to promijenjeno tako da se uz rub formiraju potpuni konačni volumeni.

U nastavku će se detaljnije opisati svaki korak u metodi generiranja geometrijske mreže.

3.3.1 Definiranje svih rubova

Podaci potrebni za generiranje mreže se unose u posebnu tekstualnu ulaznu datoteku iz koje ih program učitava prilikom izvršavanja. Na početku se zadaje broj rubova koji označuje broj zatvorenih krivulja koje omeđuju područje u kojem se traži rješenje, tj. područje u kojem je potrebno generirati mrežu. Jedan od njih predstavlja vanjski rub područja, a ostali rubove šupljina. Rub se, kao zatvorena krivulja, zadaje analitičkom funkcijom ili gusto raspoređenim točkama između kojih se rub opisuje linearnom interpolacijom. Rub se uvijek zadaje u matematički pozitivnom smjeru.

Za svaki je rub potrebno zadati sljedeće:

- Tip ruba koji pokazuje s koje strane ruba se nalazi područje u kojem se traži rješenje. Postoje tri tipa ruba. Kod prvog tipa se područje nalazi s unutarnje strane (s lijeve strane u odnosu na smjer obilaska), kod drugog s vanjske, a kod trećeg s obje strane ruba. Time je omogućen opis vanjskog ruba područja, ruba šupljine i ruba između fluida i čvrstog tijela.

- Broj dijelova svakog ruba. Podjela ruba se vrši iz geometrijskih razloga (na mjestu diskontinuiteta nagiba tangente na rubnu krivulju) ili zbog drugačijih rubnih uvjeta na pojedinim dijelovima.

- Faktor promjene veličine ruba i točku u odnosu na koju se vrši ta promjena. Pomoću ovih podataka se omogućuje jednostavno povećanje ili smanjenje nekog ruba u određenom omjeru.

- Kut rotacije u matematički pozitivnom smjeru i točku oko koje se vrši rotiranje ruba za taj kut.

- Vektor paralelnog pomaka zadan svojim projekcijama u čijem smjeru se vrši paralelno pomicanje cijelog ruba.

- Broj i koordinate točaka kojima se definira dio ruba. Točke moraju biti zadane tako da je linearna interpolacija između svake dvije susjedne točke unutar željene točnosti. Položaj rubnih čvorova određuje se linearnom interpolacijom između točaka kojima je rub definiran.

Svakom rubu se prvo promijeni veličina, zatim ga se zarotira i na kraju paralelno pomakne na željenu poziciju.

Kako bi se osigurala neprekidnost ruba, prva točka na dijelu ruba se mora poklapati s posljednjom točkom prethodnog dijela, a posljednja s prvom točkom sljedećeg dijela. Te točke kasnije postaju specijalne točke. Specijalne točke su spojne točke susjednih dijelova ruba i ne koriste se u numeričkoj metodi, tj. u njima se ne zadaju rubni uvjeti. Kut između pravaca koji polaze iz specijalne točke i prolaze kroz najbliže točke susjednih dijelova ruba koji se spajaju, mjeren sa strane ruba s koje se vrši postavljanje čvorova naziva se kut punjenja. On može imati različite vrijednosti i o njegovoj veličini ovisi način raspoređivanja unutarnjih čvorova u blizini te specijalne točke.

3.3.2 Postavljanje rubnih čvorova

Za svaki dio ruba se zadaju neki od podataka koji se koriste za postavljanje čvorova po tom rubu:

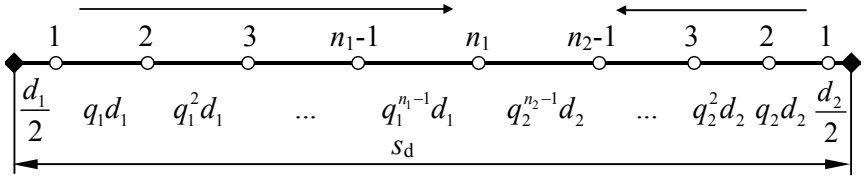
- d_1 udaljenost između čvorova na početnom dijelu ruba,

- d_2 udaljenost između čvorova na krajnjem dijelu ruba,

- q_1 faktor geometrijske progresije udaljenosti između čvorova na početnom dijelu ruba,

- q_2 faktor geometrijske progresije udaljenosti između čvorova na krajnjem dijelu ruba,

- n_{d1} broj koji definira d_1 kao omjer $d_1 = \frac{s_d}{n_{d1}}$, gdje je s_d ukupna duljina ruba računata kao duljina krivulje,
- n_{d2} broj koji definira d_2 kao omjer $d_2 = \frac{s_d}{n_{d2}}$,
- n_0 ukupan broj čvorova na dijelu ruba.



Slika 3.1 Općeniti raspored čvorova po dijelu ruba

Na slici 3.1 prikazan je općeniti raspored čvorova po dijelu ruba duljine s_d koja se dobije zbrajanjem udaljenosti između točaka koje definiraju dio ruba, koje, u slučaju veće zakrivljenosti, moraju biti gusto raspoređene.

Na početak i kraj dijela ruba se postavljaju specijalne točke. Prvi čvor na početnom dijelu ruba se postavlja na udaljenosti $d_1/2$ od specijalne točke na početnom dijelu ruba, drugi na udaljenosti $q_1 d_1$ od prvog čvora, treći na $q_1^2 d_1$ od drugog. Na taj način se postavlja n_1 čvorova. Slično se od specijalne točke na krajnjem dijelu ruba postavlja n_2-1 čvorova, jer bi n_2 čvor s krajnjeg dijela bio postavljen na mjesto posljednjeg čvora s početnog dijela ruba. Ukupni broj čvorova na dijelu ruba iznosi n_0:

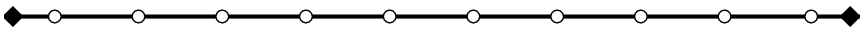
$$n_0 = n_1 + n_2 - 1 \tag{3.1}$$

Iz prije nabrojanih podataka koji se zadaju za potrebe postavljanja čvorova po dijelu ruba je očito da ih ima više nego što je neophodno. Ovo je uvedeno zbog mogućnosti zadavanja različitog rasporeda čvorova po rubu. Ako se neki od podataka zada vrijednošću nula, onda se on ne uzima u obzir, a ukoliko se zadaju svi podaci uzimaju se po određenom prioritetu. Najveći prioritet ima zadavanje udaljenosti d_1 i d_2. Ako su one zadane, tada se ne uzimaju u obzir parametri n_{d1} i n_{d2}. Parametri q_1 i q_2 se uzimaju u obzir samo ako su zadane vrijednosti za d_1 i d_2 (odnosno n_{d1} i n_{d2}).

Raspored čvorova po dijelu ruba se može zadati na sljedeće načine:

- Zadano samo n_0: definira najjednostavniju ravnomjernu raspodjelu n_0 čvorova po dijelu ruba (slika 3.2). Dakle, uzima se $q_1 = q_2 = 1$, $n_1 = 1$ i $n_2 = n_0$, a računaju se samo udaljenosti između čvorova:

$$d_1 = d_2 = \frac{s_d}{n_0}. \tag{3.2}$$



Slika 3.2 Ravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano n_0

- Zadano n_0, d_1 (ili n_{d1}) i d_2 (ili n_{d2}): definira neravnomjernu raspodjelu n_0 čvorova sa zadanim početnim udaljenostima. Budući da je zadan ukupni broj čvorova n_0, onda se brojevi čvorova koji se postavljaju s početnog n_1, odnosno krajnjeg dijela ruba n_2 određuju iz izraza (3.1) i sljedeće iskustvene relacije:

$$n_1 = \frac{n_0}{1+\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{1/3}}. \tag{3.3}$$

Brojevi čvorova n_1 i n_2 izračunati uz pomoć izraza (3.3) osiguravaju glatki prijelazi između udaljenosti postavljenih čvorova s obje strane.

Zatim se računaju faktori geometrijske progresije udaljenosti q_1 i q_2 iz uvjeta da udaljenosti između čvorova koji se posljednji postavljaju budu jednake:

$$q_1^{n_1-1} d_1 = q_2^{n_2-1} d_2 . \tag{3.4}$$

Ukupna duljina dijela ruba definirana je zbrojem pojedinih udaljenosti između čvorova:

$$\frac{d_1}{2} + q_1 d_1 + q_1^2 d_1 + \ldots + q_1^{n_1-1} d_1 + q_2^{n_2-1} d_2 + \ldots + q_2^2 d_2 + q_2 d_2 + \frac{d_2}{2} = s_\mathrm{d}, \tag{3.5}$$

odnosno, koristeći pravilo za zbroj geometrijskog niza:

$$d_1 \frac{q_1^{n_1}-1}{q_1-1} + d_2 \frac{q_2^{n_2}-1}{q_2-1} = s_\mathrm{d} + \frac{1}{2}\left(d_1 + d_2\right). \tag{3.6}$$

Faktori geometrijske progresije udaljenosti q_1 i q_2 izračunavaju se metodom bisekcije, Press [74], iz izraza (3.4) i (3.6).



Slika 3.3 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano n_0, d_1 i d_2

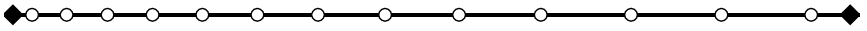
Na slici 3.3 je prikazana raspodjela čvorova u slučaju kada je zadan broj čvorova na dijelu ruba ali tako da su na krajevima čvorovi gušće raspoređeni.

- Zadano d_1 (ili n_{d1}) i d_2 (ili n_{d2}): definira neravnomjernu raspodjelu sa zadanim početnim udaljenostima koje se ravnomjerno mijenjaju od d_1 do d_2 (slika 3.4). Prvo se, uz pretpostavku $q_1 = q_2 = 1$, metodom bisekcije iz izraza (3.4) i (3.6) računaju brojevi čvorova n_1 i n_2 (i zaokružuju na cijele brojeve). Nakon toga se isti ovi izrazi rješavaju metodom bisekcije kako bi se dobili q_1 i q_2.



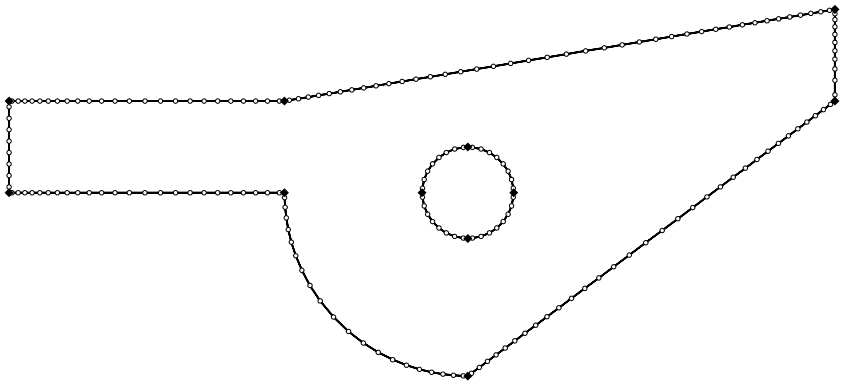
Slika 3.4 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano d_1 i d_2

- Zadano d_1 (ili n_{d1}), d_2 (ili n_{d2}), q_1 i q_2: definira neravnomjernu raspodjelu sa zadanim početnim udaljenostima i faktorima geometrijske progresije (slika 3.5). Kod zadavanja faktora geometrijske progresije manjih od jedan treba biti oprezan jer se može desiti slučaj kada nije moguće popuniti čvorovima kompletan dio ruba. I ovdje se metodom bisekcije iz izraza (3.4) i (3.6) računaju brojevi čvorova n_1 i n_2 (i zaokružuju na cijele brojeve). Zbog zaokruživanja se na kraju moraju korigirati q_1 i q_2 još jednim rješavanjem istih izraza metodom bisekcije.



Slika 3.5 Neravnomjerna raspodjela čvorova uz zadano d_1, d_2, q_1 i q_2

Na slici 3.6 je prikazan primjer područja s postavljenim rubnim čvorovima gdje se vide različiti načini postavljanja čvorova.



Slika 3.6 Primjer područja s postavljenim rubnim čvorovima

3.3.3 Postavljanje unutarnjih čvorova

Nakon što su raspoređeni čvorovi po rubu, pristupa se postavljanju čvorova unutar područja. Na slici 3.7 su prikazani karakteristični parametri i način postavljanja unutarnjih čvorova.

Podaci potrebni za postavljanje unutarnjih čvorova u blizini ruba se također zadaju za svaki dio ruba:

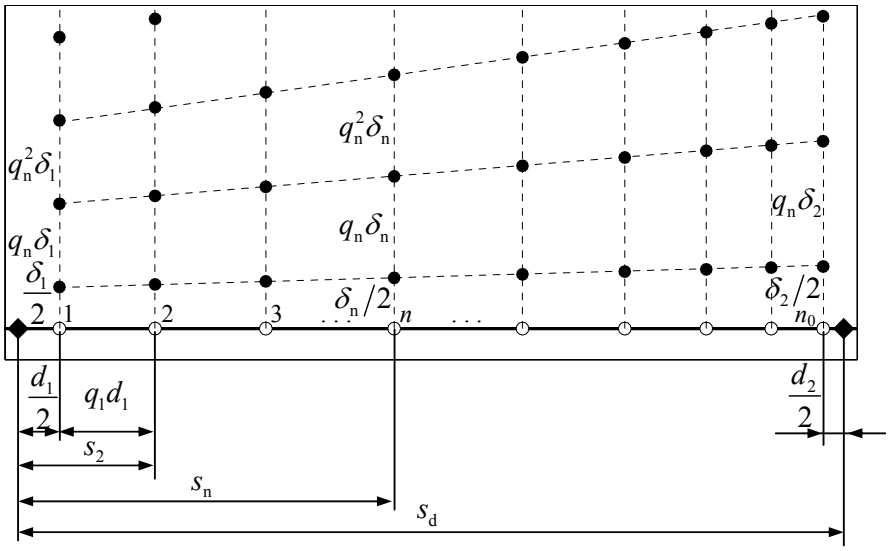
- δ_1 udaljenost prvog unutarnjeg čvora okomito na rub na početnom dijelu ruba,
- δ_2 udaljenost prvog unutarnjeg čvora okomito na rub na krajnjem dijelu ruba,
- q_δ faktor geometrijske progresije udaljenosti između unutarnjih čvorova okomito na rub.

Kroz svaki rubni čvor se povlači okomica na spojnicu dvaju njemu susjednih rubnih čvorova (okomica na rub). Zatim se unutar područja pronađe najbliža točka presjeka te okomice s nekim dijelom istog ili drugog ruba, pa se duž te okomice postavljaju unutarnji čvorovi. Svakom tako postavljenom čvoru se dodjeljuje redni broj m_{br}, koji se povećava udaljavanjem od ruba, pri čemu rubni čvor ima redni $m_{\mathrm{br}} = 0$.

Prvi čvor na okomici se postavlja na udaljenosti $\delta_{\mathrm{n}}/2$ od čvora na rubu, gdje se δ_{n} računa linearnom interpolacijom:

$$\delta_{\mathrm{n}} = \delta_1 + \left(s_{\mathrm{n}} - \frac{d_1}{2} \right) \frac{\delta_2 - \delta_1}{s_{\mathrm{d}} - \frac{1}{2}\left(d_1 + d_2 \right)}, \tag{3.7}$$

gdje je s_{n} ukupna udaljenost n-tog čvora od početka dijela ruba. Udaljenost svakog sljedećeg čvora se dobije množenjem prethodne udaljenosti faktorom q_δ.



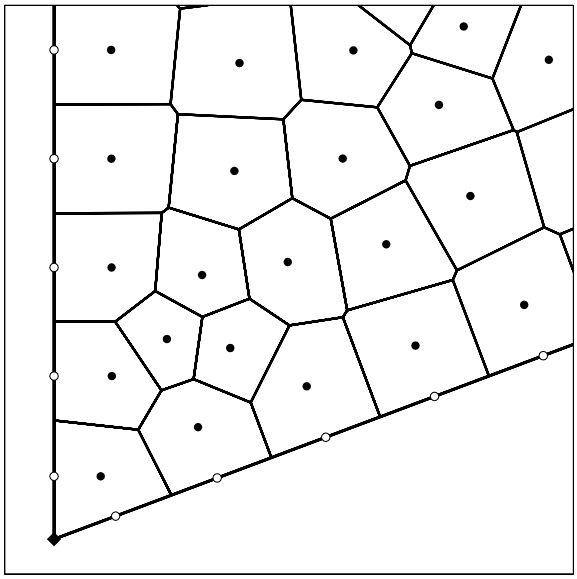
Slika 3.7 Karakteristični parametri i način postavljanja unutarnjih čvorova

Postavljanje unutarnjih čvorova uz specijalne točke

Posebna pozornost se posvećuje postavljanju unutarnjih čvorova uz specijalne točke. Specijalna točka predstavlja spoj dva dijela istog ruba. Za svaku specijalnu točku se računa kut punjenja i o veličini tog kuta ovisi način postavljanja unutarnjih čvorova.

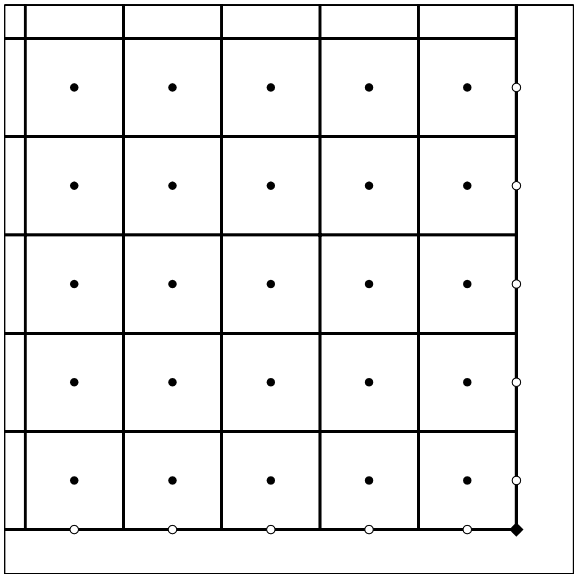
Kako bi specijalna točka bila vrh konačnih volumena oko najbližih unutarnjih čvorova, ovi čvorovi moraju se nalaziti na zajedničkoj kružnici čiji je centar u specijalnoj točki. Ako to nije slučaj, vrši se pomicanje tih čvorova u smjeru normale na rub, do presjeka sa srednjom kružnicom.

U slučaju kuta punjenja manjeg od 90° dva postavljena čvora se zamjenjuju s jednim koji se nalazi na zajedničkoj normali na dva dijela ruba (slika 3.8).



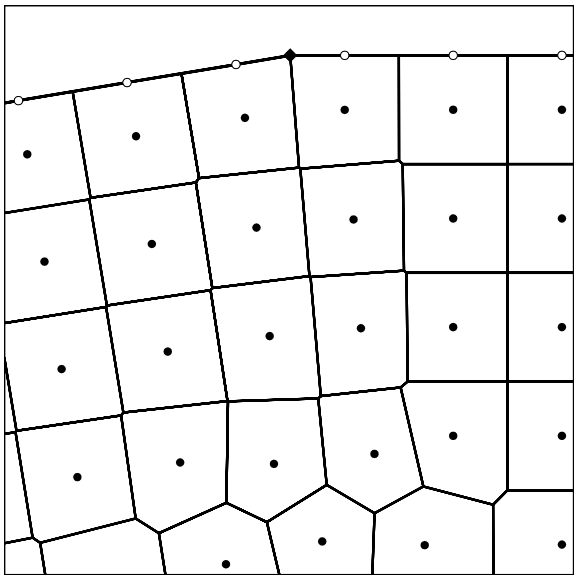
Slika 3.8 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja manjim od 90°

Za kut punjenja 90° se može dobiti mreža ekvivalentna strukturiranoj. I u ovom slučaju u blizini specijalne točke postavlja se jedan čvor (slika 3.9).



Slika 3.9 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja od 90°

Ako je kut punjenja između 90° i 180°, uz specijalnu točku ostaju dva čvora, koji se u slučaju potrebe pomiču na zajedničku kružnicu (slika 3.10).



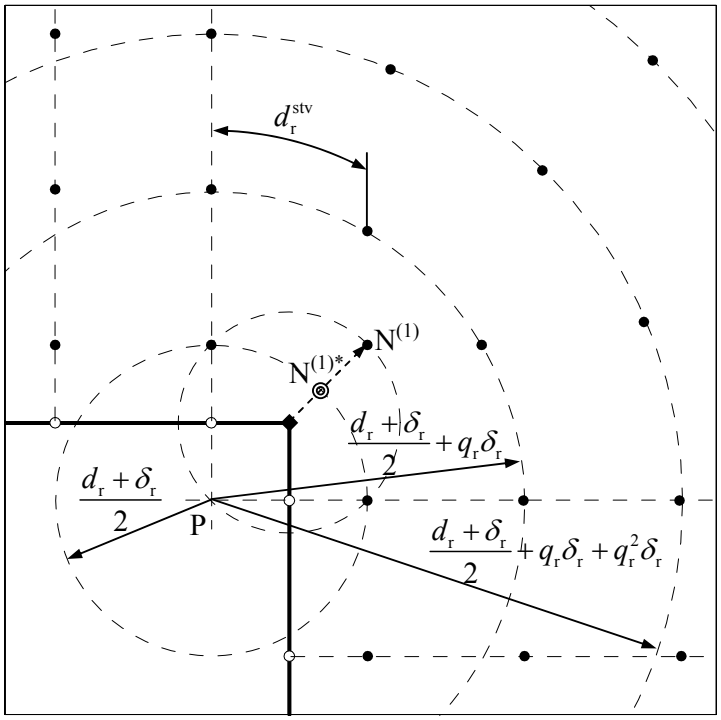
Slika 3.10 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja između 90° i 180°

Postavljanje unutarnjih čvorova u blizini kuta punjenja većeg od 180°

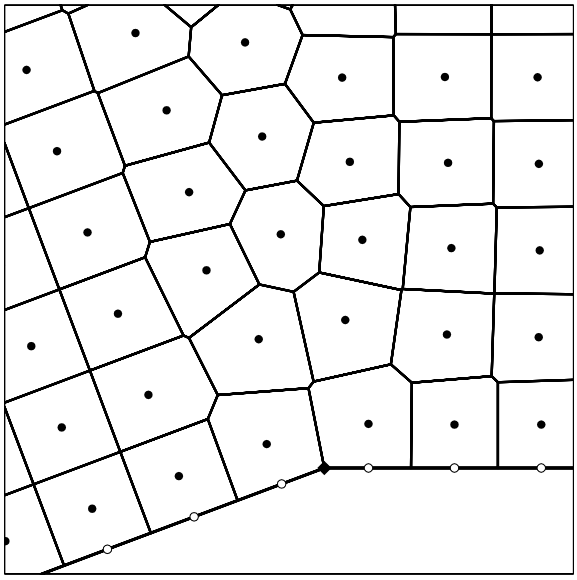
U slučaju spoja dijelova ruba pod kutom punjenja većim od 180°, postavljanje unutarnjih čvorova samo duž okomica na rub rezultira jednim dijelom područja u kojem nema čvorova. Tada se vrši dodatno postavljanje čvorova u tom dijelu područja po kružnim lukovima, kao što je prikazano na slici 3.11.

Središte P kružnih lukova se nalazi u točki presjeka okomica na rub povučenih kroz dva rubna čvora koja su najbliža specijalnom čvoru. Budući da se u specijalnom čvoru sastaju kraj jednog i početak drugog dijela ruba, koji u općem slučaju imaju različito definirane vrijednosti parametara za postavljanje čvorova, parametri potrebni za postavljanje unutarnjih čvorova po kružnim lukovima se određuju harmonijskom interpolacijom na sljedeći način: $d_\mathrm{r} = \sqrt{d_1 \cdot d_2}$, $\delta_\mathrm{r} = \sqrt{\delta_1 \cdot \delta_2}$ i $q_\mathrm{r} = \sqrt{q_{\delta 1} \cdot q_{\delta 2}}$, gdje su δ_r i q_r definirani na slici 3.11. Popunjavanje ovog područja kružnim lukovima vrši se od vrha kuta do najbližeg dijela ruba, a on se pronalazi povlačenjem pravaca iz točke P kroz područje pod kutovima s određenim malim korakom (npr. 5°). Zatim se određuje broj čvorova koji se postavljaju duž pojedinog kružnog luka dijeljenjem njegove duljine s vrijednošću d_r i zaokruživanjem na cijeli broj. Nakon toga se računa udaljenost $d_\mathrm{r}^{\mathrm{stv}}$, prema kojoj se čvorovi postavljaju, dijeljenjem duljine luka s brojem čvorova koji se postavljaju.

Prvi unutarnji čvorovi uz specijalne čvorove se zbog pravilnog opisa ruba područja postavljaju na zajedničku kružnicu s centrom u specijalnoj točki. Isti uvjet se odnosi i na čvorove postavljene u blizini kuta punjenja većeg od 180°. To znači da se čvorovi postavljeni na prvu kružnicu trebaju pomaknuti u smjeru radijusa također na kružnicu s centrom u specijalnoj točki.

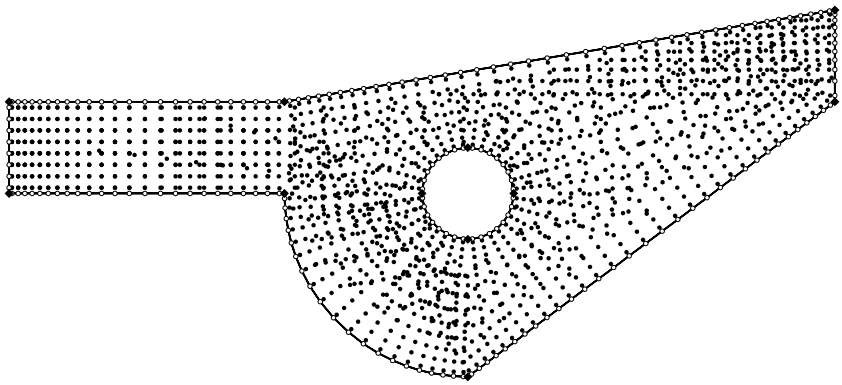


Slika 3.11 Postavljanje unutarnjih čvorova u kutu mreže za slučaj kuta punjenja većeg od 180°



Slika 3.12 Primjer postavljanja unutarnjih čvorova u blizini specijalne točke s kutom punjenja većim od 180°

Na slici 3.13 su prikazani postavljeni čvorovi unutar područja proračuna sa slike 3.6

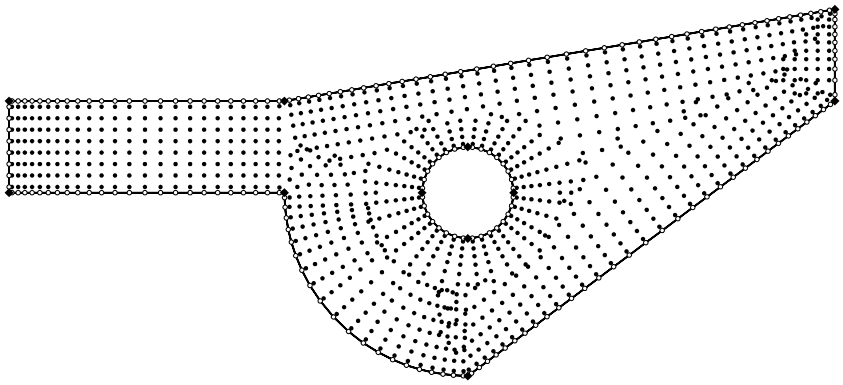


Slika 3.13 Primjer područja sa slike 3.6 s postavljenim unutarnjim čvorovima

3.3.4 Uklanjanje bliskih čvorova

Postavljanje unutarnjih čvorova se vrši neovisno za svaki dio ruba, pa se unutar područja pojavljuju dijelovi popunjeni čvorovima s više različitih dijelova istog ili različitih rubova. Bliski čvorovi su oni čvorovi čija međusobna udaljenost nije veća od minimalne udaljenosti, koja se računa jedinstveno za cijelu mrežu na temelju minimalne udaljenosti između rubnih čvorova.

Kriterij za uklanjanje bliskih čvorova je njihov redni broj m_{br}. Od dva bliska čvora briše se onaj s većim rednim brojem m_{br}, a ako imaju isti m_{br}, onda se zamjenjuju jednim čvorom postavljenim na sredini njihove spojnice. Na slici 3.14 je prikazan izgled područja s preostalim čvorovima nakon uklanjanja bliskih unutarnjih čvorova sa slike 3.13. Ovakav način brisanja čvorova osigurava da u blizini nekog ruba ostaju oni čvorovi koji su postavljeni temeljem zadanih podataka za taj dio ruba.



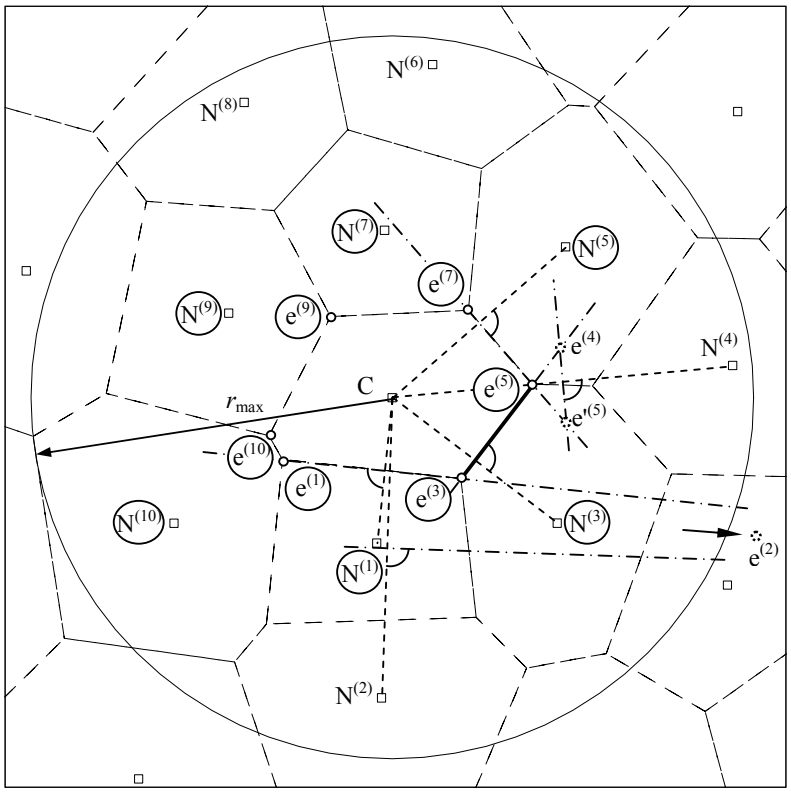
Slika 3.14 Primjer područja sa slike 3.13 s preostalim čvorovima nakon uklanjanja bliskih čvorova

3.3.5 Formiranje konačnih volumena

U proceduri za formiranje konačnih volumena obilazi se svaki unutarnji čvor prema njegovom rednom broju m_{br}, od najmanjeg do najvećeg. Pri tom obilasku se prvo određuju potencijalni susjedni čvorovi temeljem udaljenosti od promatranog čvora. Na slici 3.15 je prikazan čvor C oko kojeg se formira konačni volumen. Svi čvorovi unutar kruga polumjera r_{max} su potencijalni susjedi čvoru C. Polumjer r_{max} se kod početnog formiranja konačnih volumena izračunava tako da se maksimalna udaljenost dvaju susjednih čvorova na rubu pomnoži iskustvenim faktorom (obično je dovoljno 4) . Efikasnost procedure formiranja konačnih volumena uvelike ovisi o veličini polumjera r_{max}. On treba biti dovoljno velik da sigurno obuhvati sve stvarne susjedne čvorove, ali i dovoljno mali da osigura efikasnost procedure formiranja konačnih volumena.

Nakon što su određeni potencijalni susjedni čvorovi, formira se njihova lista. Prvo se među njima pronalazi čvor najbliži čvoru C, koji se uzima za referentni, te se u odnosu na spojnicu čvora C i referentnog čvora vrši sortiranje ostalih čvorova po kutu i udaljenosti od čvora C. Sortiranje po kutu je u matematički pozitivnom smjeru (referentnom čvoru je pridružena vrijednost kuta nula). Ukoliko ima više čvorova na istom kutu, oni se sortiraju po udaljenosti od najmanje prema najvećoj. Kako bi se mogla završiti procedura formiranja konačnog volumena, na kraj tog niza ponovo se stavlja referentni čvor (ovaj put mu se pridružuje vrijednost kuta 2π).

Procedura pronalaženja vrhova konačnog volumena započinje i završava s referentnim čvorom, koji je jedan od susjednih čvorova čvoru C. U proceduri se traži presjek simetrala spojnica čvora C i dva uzastopna čvora iz liste susjednih čvorova. Ta točka presjeka je potencijalni vrh konačnog volumena. Vrhovi konačnog volumena se nalaze unutar kruga polumjera r_{max}, a kutovi spojnica čvora C s vrhovima konačnog volumena također moraju činiti rastući niz. To su ujedno i kriteriji za konačno prihvaćanje nekog čvora kao stvarnog susjeda.



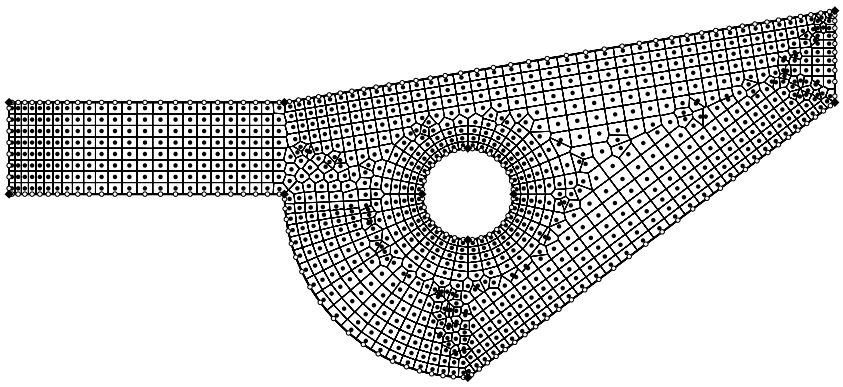
Slika 3.15 Procedura formiranja konačnog volumena

Primjer formiranja konačnog volumena prikazan je na slici 3.15 na kojoj se vidi da je čvor $N^{(1)}$ najbliži čvoru C, pa je on referentni čvor. Ostali potencijalni susjedni čvorovi sortirani po navedenom kriteriju su označeni brojevima $N^{(2)}$ do $N^{(10)}$. Procedura počinje traženjem točke presjeka simetrala spojnica $\overline{CN^{(1)}}$ i $\overline{CN^{(2)}}$. Ova točka presjeka je označena s $e^{(2)}$ i kao što je prikazano na slici 3.15, ta točka je izvan kruga polumjera r_{max}, te se zaključuje da čvor $N^{(2)}$ neće biti susjed čvoru C i uklanja se iz liste. Stoga se prelazi na traženje točke presjeka simetrala spojnica $\overline{CN^{(1)}}$ i $\overline{CN^{(3)}}$. Ova je točka presjeka označena s $e^{(3)}$ i kako je unutar kruga polumjera r_{max}, čvor $N^{(3)}$ ostaje potencijalni susjed čvoru C. Sada se čvor $N^{(3)}$ proglašava za trenutni referentni čvor, te se traži točka presjeka simetrala spojnica $\overline{CN^{(3)}}$ i $\overline{CN^{(4)}}$. Ova točka označena s $e^{(4)}$ je također potencijalni vrh konačnog volumena. Stoga se provjerava da li kutovi spojnica $\overline{Ce^{(3)}}$ i $\overline{Ce^{(4)}}$ čine rastući niz. U ovom primjeru je to slučaj, te se sada čvor $N^{(4)}$ proglašava za trenutni referentni čvor, a čvor $N^{(3)}$ ostaje u listi susjeda. U nastavku se traži točka presjeka simetrala spojnica $\overline{CN^{(4)}}$ i $\overline{CN^{(5)}}$, označena s $e'^{(5)}$. Na slici 3.15 se, također vidi da je kut spojnice $\overline{Ce'^{(5)}}$ manji od kuta $\overline{Ce^{(4)}}$, što znači da se čvor $N^{(4)}$ uklanja iz liste susjednih čvorova, a za trenutni referentni čvor se proglašava čvor $N^{(3)}$, te se ponovo traži točka presjeka simetrala spojnica $\overline{CN^{(3)}}$ i $\overline{CN^{(5)}}$. Ova točka presjeka je označena s $e^{(5)}$ i očito je da kutovi spojnica $\overline{Ce^{(3)}}$ i $\overline{Ce^{(5)}}$ čine rastući niz. Po istom

principu se nastavlja procedura do čvora $N^{(10)}$ i na kraju završi ponovo s čvorom $N^{(1)}$. Na kraju se dobije konačni volumen s vrhovima $e^{(3)}$, $e^{(5)}$, $e^{(7)}$, $e^{(9)}$, $e^{(10)}$ i $e^{(1)}$ i odgovarajućim susjednim čvorovima.

Prilikom prvog formiranja konačnih volumena se izvrši još jedno dodatno uklanjanje unutarnjih čvorova. Ovo uklanjanje obuhvaća čvorove koji su stvarni susjedni čvorovi (nakon završetka formiranja konačnog volumena oko centralnog čvora), a imaju m_{br} veći za dva (ili više) od centralnog čvora. Nakon toga se m_{br} susjednih čvorova može razlikovati samo za jedan.

Na slici 3.16 su prikazani formirani konačni volumeni za primjer područja sa slike 3.14. Nakon formiranja konačnih volumena i dodatnog brisanja susjednih čvorova po kriteriju rednog broja m_{br}, u geometrijskoj mreži još uvijek mogu ostati bliski čvorovi. Na slici 3.16 se točno može uočiti od kojeg ruba potječe svaki čvor unutar mreže kao i bliski čvorovi koji potječu od različitih dijelova mreže. Jednom kada su formirani konačni volumeni, može se svakom od njih izračunati maksimalna i minimalna udaljenost centralnog čvora od njemu susjednih, te njihov omjer. Za konačne volumene kod kojih je taj odnos veći od unaprijed zadanog vrši se zamjena dva najbliža čvora jednim čvorom na sredini njihove spojnice. Ovo doprinosi ravnomjernijem rasporedu čvorova.



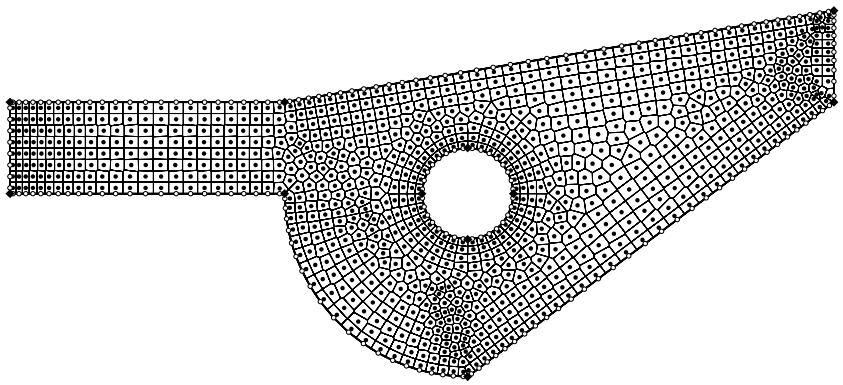
Slika 3.16 Primjer geometrijske mreže sa slike 3.14 nakon formiranja konačnih volumena

3.3.6 Ujednačavanje geometrijske mreže

Pojedini unutarnji čvorovi mogu i dalje biti smješteni daleko od težišta pripadajućeg konačnog volumena, a neke spojnice susjednih čvorova prolaziti daleko od težišta zajedničke stranice, što može jako narušiti dva posljednja zahtjeva koja treba ispunjavati geometrijska mreža. Ovi nedostaci se ublažuju postupkom ujednačavanja geometrijske mreže.

Ujednačavanje geometrijske mreže podrazumijeva pomicanje unutarnjih čvorova mreže u težište odgovarajućeg konačnog volumena (na slici 3.15 definiranog točkama $e^{(1)}$, $e^{(3)}$, $e^{(5)}$, $e^{(7)}$, $e^{(9)}$ i $e^{(10)}$). Pomiču se svi unutarnji čvorovi od rednog broja m_{br}>1 na više jer je potrebno izostaviti pomicanje unutarnjih čvorova najbližih rubu s rednim brojem m_{br}=1. Oni se ostavljaju nepomaknuti kako bi se zadovoljio treći zahtjev koji treba ispunjavati mreža, a koji se odnosi na okomitost spojnice rubnog i prvog unutarnjeg čvora na rub. Ova procedura se ponavlja sve dok svi unutarnji čvorovi koji se pomiču ne budu udaljeni od težišta odgovarajućeg konačnog volumena manje od zadane vrijednosti. Kod mreže s predviđenom naglom promjenom gustoće u pojedinim dijelovima područja (npr. u graničnom sloju) ovaj uvjet se ne zadovoljava, pa se procedura ponavlja zadani broj puta. Taj broj treba osigurati što bolje zadovoljenje gornjeg uvjeta uz zadržavanje nagle promjene gustoće u pojedinim dijelovima područja. Mreža nastala nakon ovakvog ujednačavanja dobro zadovoljava i preostali zahtjev koji se odnosi na to da spojnica susjednih čvorova treba prolaziti što bliže težištu stranice između dva susjedna konačna volumena. Nakon svake procedure pomicanja unutarnjih čvorova može doći do promjene veza među čvorovima, pa se zbog toga vrši novo formiranje konačnih volumena. Budući da je pri prvom formiranju konačnih volumena polumjer r_{max} određenposebno za svaki čvor, svako sljedeće formiranje konačnih volumena je vrlo efikasno.

Konačni izgled geometrijske mreže, dobiven nakon ujednačavanja mreže sa slike 3.16, je prikazan na slici 3.17.



Slika 3.17 Konačni izgled geometrijske mreže sa slike 3.16 nakon ujednačavanja geometrijske mreže

3.3.7 Računanje podataka za metodu konačnih volumena

Kada je geometrijska mreža potpuno definirana, potrebno je izračunati i zapisati sve podatka koji će se koristiti u metodi konačnih volumena za proračun strujanja.

Ti podaci vezani za geometrijsku mrežu su:

- ukupni broj čvorova u mreži,
- broj rubnih čvorova i
- ukupni broj stranica svih konačnih volumena u mreži.

Podaci vezani za svaki unutarnji čvor su:

- koordinate čvora,
- veličina konačnog volumena,
- broj susjednih čvorova i
- indeksi susjednih čvorova.

Za svaku stranicu konačnog volumena su vezani sljedeći podaci:

- indeksi čvorova između kojih se nalazi stranica,
- površina stranice,
- duljina spojnice okomite na stranicu i
- komponente vektora jedinične normale na stranicu (u smjeru od čvora s manjim indeksom prema čvoru s većim indeksom).

Radi pojednostavljenja ugradnje rubnih uvjeta u metodi konačnih volumena, uz svaki rubni čvor se vezuju sljedeći podaci:

- koordinate rubnog čvora,
- indeks najbližeg unutarnjeg čvora koji se nalazi na okomici na rub,
- površina stranice na kojoj se nalazi rubni čvor i
- duljina spojnice rubnog i najbližeg unutarnjeg čvora.

4 METODA KONAČNIH VOLUMENA

4.1 UVOD

U metodi konačnih volumena se prvo diskretizira područje strujanja koje se dijeli na određeni broj konačnih volumena. Kod proučavanja nestacionarnih pojava vrijeme proračuna se dijeli u konačni broj vremenskih intervala koji se zovu vremenski koraci. Time se dobije numerička mreža koja predstavlja diskretizirano područje u kojem se traži rješenje, tj. diskretna mjesta u prostoru i vremenu u kojima se definiraju vrijednosti traženih polja.

Nakon diskretizacije prostora i vremena vrši se diskretizacija jednadžbi pri čemu se članovi jednadžbi transformiraju u algebarske izraze.

Diskretizacijska metoda konačnih volumena ima sljedeće bitne karakteristike:

- Metoda se temelji na diskretizaciji integralnog oblika jednadžbi matematičkog modela turbulentnog strujanja fluida po svakom konačnom volumenu, pri čemu su zakoni očuvanja zadovoljeni i na nivou konačnog volumena.
- Jednadžbe se rješavaju u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Vektori i tenzori se prikazuju preko svojih komponenti u globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu.
- Tijekom rješavanja jednadžbi geometrijska mreža ostaje nepromijenjena.
- Metoda se može primijeniti na stacionarne i nestacionarne probleme.
- Geometrijska mreža je nestrukturirana s konačnim volumenima čija se površina sastoji od različitog broja stranica.
- Sve zavisne varijable dijele iste konačne volumene, tj. definirane su u istim čvorovima što se naziva nepomaknuti raspored varijabli, odnosno nepomaknuta mreža (engl. colocated ili non-staggered grid).
- Parcijalne diferencijalne jednadžbe matematičkog modela fluida rješavaju se jedna za drugom, a ovisnosti između jednadžbi se tretiraju eksplicitno (engl. segregated way).

Metoda obuhvaća diskretizaciju područja proračuna na konačan broj volumena koji potpuno ispunjavaju područje proračuna, ali se međusobno ne preklapaju. Čvorovi mreže se nalaze unutar konačnih volumena što bliže njihovom geometrijskom središtu. Osobine korištene mreže su:

- Mreža je nestrukturirana s konačnim volumenima čija se površina sastoji od različitog broja stranica.

- Stranica koja je zajednička susjednim konačnim volumenima je okomita na spojnicu odgovarajućih susjednih čvorova.
- Stranica između dva susjedna konačna volumena prolazi središtem spojnice odgovarajućih susjednih čvorova.
- Konačni volumeni uz rub područja imaju jednu ili dvije stranice na rubu područja. Rubni čvor i unutarnji čvor u konačnom volumenu uz rub se nalaze na okomici na rub.

U izvođenju metode konačnih volumena koristit će se sljedeći teoremi:

Gaussov teorem:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}V = \int_A f\, n_j \,\mathrm{d}A\,. \tag{4.1}$$

Teorem o srednjoj vrijednosti volumenskog integrala:

$$\int_V f \,\mathrm{d}V = \overline{f}\, V \approx f_\mathrm{C} V\,. \tag{4.2}$$

Teorem o srednjoj vrijednosti površinskog integrala:

$$\int_{\Delta A} f \,\mathrm{d}A = \overline{f}\, \Delta A \approx f_\mathrm{n} \Delta A\,. \tag{4.3}$$

U drugom poglavlju je pokazano da sve jednadžbe usvojenog matematičkog modela imaju isti oblik – oblik opće jednadžbe prijenosa, te će se u nastavku prvo opisati metoda konačnih volumena za rješavanje te jednadžbe, nakon čega će se dati specifični detalji za rješavanje cijelog sustava.

4.2 DISKRETIZACIJA OPĆE KONVEKCIJSKO-DIFUZIJSKE JEDNADŽBE

Numerička metoda konačnih volumena prikazat će se na primjeru opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j \Phi\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = S\,. \tag{4.4}$$

Diferencijalna opća konvekcijsko-difuzijska jednadžba se diskretizira pomoću konačnog broja vrijednosti varijabli u čvorovima, koji su raspoređeni po odgovarajućoj mreži unutar područja proračuna. To je u osnovi zamjena derivacija konačnim razlikama, što rezultira sustavom običnih algebarskih jednadžbi koji se može efikasno riješiti uz pomoć računala.

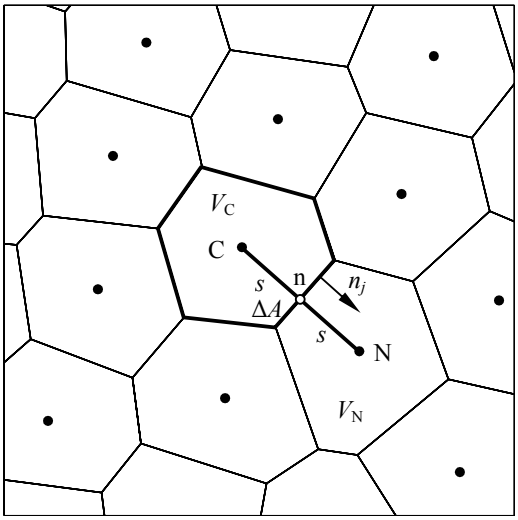
U postupku diskretizacije opće diferencijalne konvekcijsko-difuzijske jednadžbe ona se prvo integrira po konačnom volumenu V , prema slici 4.1:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_V \left[\frac{\partial(\rho v_j \Phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)\right]\mathrm{d}V = \int_V S\,\mathrm{d}V\,. \tag{4.5}$$

Uz primjenu Gaussovog teorema na drugi član na lijevoj strani jednadžbe (uzimajući u obzir da se ukupna površina konačnog volumena sastoji od *m* ravnih površina) i teorema o srednjoj vrijednosti volumenskog integrala na prvi član na lijevoj i drugi na desnoj strani jednadžbe dobije se:

$$\left[\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}\right]_C V + \sum_{k=1}^{m}\left[\int_{\Delta A}\left(\rho v_j\Phi - \Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right)n_j\,\mathrm{d}A\right]^k = S_C V\,. \tag{4.6}$$

Ovom integracijom se očiti red najviše derivacije u jednadžbi smanjio za jedan, a svakom članu se može dati fizikalno tumačenje. Prvi član lijeve strane označava lokalnu promjenu sadržaja Φ unutar V, a sumom površinskih integrala su označeni protoci fizikalnog svojstva Φ kroz rub volumena V, pri čemu se razlikuje konvekcijski i difuzijski protok. Desna strana predstavlja utjecaj izvorskog člana na promjenu sadržaja Φ unutar V.



Slika 4.1 Dio diskretiziranog područja proračuna

Izraz iza znaka sumiranja predstavlja protok varijable Φ kroz stranicu konačnog volumena ΔA koji se označava s J i on se može napisati, uz primjenu teorema o srednjoj vrijednosti površinskog integrala, kao:

$$J = \int_{\Delta A} \left(\rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, \mathrm{d}A = \left[\left(\rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \right]_{\mathrm{n}} \Delta A = \\ = \rho \left(v_j n_j \right)\Big|_{\mathrm{n}} \Delta A \Phi_{\mathrm{n}} - \Gamma \Delta A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j \right)\Bigg|_{\mathrm{n}} \quad , \tag{4.7}$$

odnosno kraće zapisano:

$$J = \rho v_{\mathrm{n}} \Delta A \Phi_{\mathrm{n}} - \Gamma \Delta A \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\bigg|_{\mathrm{n}} n_j \, , \tag{4.8}$$

U izrazu (4.8) se koriste sljedeće oznake:

$$v_{\mathrm{n}} = \left(v_j n_j \right)\Big|_{\mathrm{n}} \, , \tag{4.9}$$

$$F = \rho v_{\mathrm{n}} \Delta A \ \text{ i} \tag{4.10}$$

$$D = \Gamma \frac{\Delta A}{s} \, , \tag{4.11}$$

gdje je v_{n} projekcija vektora brzine u točki n na površini ΔA u smjeru vanjske normale n_j, F maseni protok (jačina konvekcije) kroz stranicu konačnog volumena ΔA, a D difuzijska vodljivost.

Pecletov broj se definira kao odnos masenog protoka i difuzijske vodljivosti:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho v_{\mathrm{n}} s}{\Gamma} \, . \tag{4.12}$$

Prema tome protok J se može kraće zapisati u obliku:

$$J = F \Phi_{\mathrm{n}} - D \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\bigg|_{\mathrm{n}} n_j s \, . \tag{4.13}$$

U gornjoj jednadžbi sve veličine se računaju u točki n koja se nalazi na stranici konačnog volumena ΔA između čvorova C i N. Za slučaj da točka n nije u težištu površine ΔA uvodi se korekcija koja se temelji na gradijentima varijable Φ i udaljenosti točke n od težišta površine ΔA.

Uvrštavanjem izraza za protok varijable Φ u jednadžbu (4.6), dobije se:

$$\left[\frac{\partial \left(\rho \Phi \right)}{\partial t} \right]_{\mathrm{C}} V + \sum_{k=1}^{m} \left[F \Phi_{\mathrm{n}} - D \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\bigg|_{\mathrm{n}} n_j s \right]^k = S_{\mathrm{C}} V \, . \tag{4.14}$$

4.2.1 EDS i EDSI sheme diferencije

Zadatak sheme diferencije je da vrijednosti varijable Φ_{n} i njene derivacije $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}$ u točki n na stranici konačnog volumena u smjeru vanjske normale na površinu prikaže preko vrijednosti varijable Φ u glavnim čvorovima mreže. Budući da je mreža koja se koristi u ovom radu lokalno ortogonalna, tražene vrijednosti se prikazuju preko vrijednosti varijabli u čvorovima C i N koji pripadaju konačnim volumenima između kojih se površina nalazi.

U ovom radu su korištene sljedeće sheme diferencije: uzvodna shema diferencije – UDS, shema centralne diferencije – CDS, kombinacija uzvodne i sheme centralne diferencije, eksponencijalna shema – EDS i vlastita varijanta unaprijeđene eksponencijalne shema diferencije – EDSI. Prve dvije sheme ugrađene su i u program CAFFA s čijim rezultatima se vrši usporedba, te će te dvije sheme biti opisane u poglavlju 4.8 gdje se govori o posebnostima numeričke metode na kojima se temelji program CAFFA. U nastavku se daje kratak prikaz EDS i EDSI shema, pri čemu je EDSI shema detaljnije opisana i testirana u Džijan [19]. Ove dvije sheme se temelje na analitičkom rješenju opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe u jednodimenzijskom stacionarnom slučaju. Ova jednadžba u smjeru koordinate *n*, za područje između čvorova C i N prema slici 4.1, se može napisati kao:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\rho v_{\mathrm{n}}\Phi - \Gamma\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right) = \begin{cases} S_{\Phi\mathrm{C}} & za \quad -s \le n \le 0 \\ S_{\Phi\mathrm{N}} & za \quad 0 \le n \le s \end{cases}, \tag{4.15}$$

pri čemu se ρ, v_{n}, Γ, $S_{\Phi\mathrm{C}}$ i $S_{\Phi\mathrm{N}}$ smatraju konstantama. Odgovarajući rubni uvjeti su:

$$\Phi(-s) = \Phi_{\mathrm{C}}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}(-s) = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right|_{\mathrm{C}}, \tag{4.16}$$

$$\Phi(s) = \Phi_{\mathrm{N}} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}(s) = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}\right|_{\mathrm{N}}, \tag{4.17}$$

uz uvjete neprekidnosti profila varijable Φ i njene derivacije $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}n}$ u točki $n = 0$.

Na temelju rješenja ove jednadžbe izrazi za Φ_{n} i $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}$ u točki n se mogu napisati preko Φ_{C}, Φ_{N}, $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}}$ i $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{N}}$ u obliku:

$$\Phi_{\mathrm{n}} = \gamma\Phi_{\mathrm{C}} + (1-\gamma)\Phi_{\mathrm{N}} + \gamma^2\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}} s - (1-\gamma)^2\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{N}} s \quad \text{i} \tag{4.18}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}} = \frac{\Phi_{\mathrm{N}} - \Phi_{\mathrm{C}}}{s} - \gamma\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}} - (1-\gamma)\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{N}}. \tag{4.19}$$

Parametar γ je funkcija Pecletovog broja:

$$\gamma = \gamma\left(Pe\right) = \frac{Pe + e^{-Pe} - 1}{Pe\left(1 - e^{-Pe}\right)}. \tag{4.20}$$

Radi uštede u vremenu rada računala ovu funkciju se može dovoljno točno aproksimirati s dvije jednostavnije funkcije, Virag i Trincas [101]:

$$\gamma \approx \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{Pe}{11.1} - \frac{Pe\left|Pe\right|}{175.8} & \text{za } \left|Pe\right| \le 6.38 \\ \frac{\max\left[Pe, 0\right] - 1}{Pe} & \text{za } \left|Pe\right| > 6.38 \end{cases}. \tag{4.21}$$

Uvrštavanjem izraza (4.18) i (4.19) u jednadžbu (4.13) dobiva se izraz za protok varijable Φ kroz površinu ΔA konačnog volumena:

$$\begin{aligned} J = {} & F\Phi_{\mathrm{C}} + \left[D - (1-\gamma)F\right]\left(\Phi_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{N}}\right) + \\ & + \left[\gamma^2 F + \gamma D\right]\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}} s - \left[\left(1-\gamma\right)^2 F - \left(1-\gamma\right) D\right]\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{N}} s, \end{aligned} \tag{4.22}$$

koji se može napisati u kraćem obliku:

$$J = F\Phi_{\mathrm{C}} + a_{\mathrm{N}}\left(\Phi_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{N}}\right) + \Delta J_{\mathrm{C}} - \Delta J_{\mathrm{N}}. \tag{4.23}$$

Ovdje su uvedene oznake:

$$a_{\mathrm{N}} = D - (1-\gamma)F \tag{4.24}$$

i

$$\Delta J_{\mathrm{C}} = \left[\gamma^2 F + \gamma D\right]\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{C}} n_j s \qquad \Delta J_{\mathrm{N}} = \left[\left(1-\gamma\right)^2 F - \left(1-\gamma\right) D\right]\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{N}} n_j s, \tag{4.25}$$

gdje a_{N} označava koeficijent diskretizirane jednadžbe uz nepoznatu vrijednost varijable u susjednom čvoru N, a ΔJ_{C} i ΔJ_{N} dodatke protoku ovisne o derivacijama varijable Φ.

Opća konvekcijsko-difuzijska jednadžba nakon uvrštavanja prethodnih izraza poprima sljedeći oblik:

$$\left[\frac{\partial\left(\rho\Phi\right)}{\partial t}\right]_C V + \sum_{k=1}^{m}\left[F\Phi_{\mathrm{C}} + a_{\mathrm{N}}\left(\Phi_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{N}}\right) + \Delta J_{\mathrm{C}} - \Delta J_{\mathrm{N}}\right]^k = S_{\mathrm{C}} V. \tag{4.26}$$

EDS shema, Spalding [89], se može dobiti iz EDSI sheme diferencije ako se dodaci protoku ΔJ_{C} i ΔJ_{N} u jednadžbi (4.23) izjednače s nulom. Izraz (4.24) za koeficijent a_{N} ostaje isti s jedinom razlikom da je Pecletov broj u tim izrazima dvostruko veći. Poseban slučaj EDS sheme je Power-low shema koja je dobivena aproksimacijom eksponencijalnih članova polinomom petog stupnja. Ovdje je također izvršena

aproksimacija eksponencijalnih članova, ali je zadržano ime sheme jer ta aproksimacija daje praktički iste vrijednosti koeficijenata kao da su računati s izvornim eksponencijalnim članovima, Džijan [19].

4.2.2 Vremenska integracija

Kod nestacionarnih problema se, uz prostorne koordinate, pojavljuje i vremenska koordinata. Vremenska podjela se kod metode konačnih volumena može promatrati kao podjela na „vremenske volumene". Osnovna razlika između vremenske i prostornih koordinata leži u smjeru utjecaja: dok promjena varijable Φ u bilo kojoj točki prostora (u eliptičnim problemima) utječe na strujanje u cijelom području proračuna, dotle promjena u nekom vremenskom trenutku utječe na strujanje samo u budućnosti (ne postoji utjecaj unatrag u vremenu). Nestacionarno strujanje je, dakle, parabolično u vremenu. To dalje znači da se uvjeti (osim na rubovima) mogu zadavati samo u početnom trenutku, a to ima veliki utjecaj na izbor strategije rješavanja problema nestacionarnog strujanja. Zbog prirode vremenske koordinate, sve metode napreduju u vremenu korak po korak.

Općenito, sheme vremenske diskretizacije se dijele na eksplicitne i implicitne. Diskretizirana jednadžba je dana u eksplicitnom obliku kada se tražena varijabla u centralnom čvoru na kraju vremenskog intervala Φ_{C}^{n+1} računa isključivo pomoću poznatih vrijednosti varijable u centralnom i u susjednim čvorovima na početku vremenskog intervala. Eksplicitna shema je jednostavna, lagana za primjenu i zahtijeva mali broj aritmetičkih operacija za rješavanje diskretiziranih jednadžbi. Glavni nedostatak eksplicitne sheme je ograničenost vremenskog koraka integracije. Da bi rješenje konvergiralo, mora se zadovoljiti kriterij stabilnosti. To može dovesti do velikog broja vremenskih koraka potrebnih za dobivanje stacionarnog rješenja.

Implicitna shema vremenske diskretizacije podrazumijeva da se za računanje tražene varijable u centralnom čvoru na kraju vremenskog intervala Φ_{C}^{n+1} koriste i vrijednosti varijable u susjednim čvorovima na kraju vremenskog intervala, koje su također nepoznate. Budući da se za svaki konačni volumen postavlja diskretizirana jednadžba, za cijelo područje proračuna se dobije sustav jednadžbi s nepoznatim vrijednostima varijable u čvorovima unutar područja proračuna. Implicitna shema je bezuvjetno stabilna, te se najčešće primjenjuje u rješavanju stacionarnih problema.

Opća konvekcijsko-difuzijska jednadžba (4.26) se integrira po vremenu unutar vremenskog intervala Δt:

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}\right]_{\mathrm{C}} V dt + \int_t^{t+\Delta t}\sum_{k=1}^{m}[J]^k dt = \int_t^{t+\Delta t} S_{\mathrm{C}} V dt \tag{4.27}$$

Ako se vremenski integrali u izrazu (4.27) aproksimiraju konstantnom vrijednošću podintegralnih funkcija iz određenog vremenskog trenutka između t i $t+\Delta t$ pomnoženom s vremenskim intervalom Δt, dobije se:

$$\rho\left(\Phi_{\mathrm{C}}^{n+1}-\Phi_{\mathrm{C}}^{n}\right)V + \sum_{k=1}^{m}[J]^k \Delta t = S_{\mathrm{C}} V \Delta t \tag{4.28}$$

Taj vremenski trenutak ovisi o shemi vremenske diskretizacije. Budući da podintegralne funkcije u izrazu (4.27) ovise o vrijednostima tražene varijable u čvorovima mreže, onda se ove vrijednosti također računaju u tom određenom vremenskom trenutku. Koristeći faktor vremenske interpolacije ω moguće je vrijednosti varijable Φ u različitim vremenskim trenucima unutar vremenskog intervala prikazati istim izrazom:

$$\Phi_{\mathrm{C}} = \omega \Phi_{\mathrm{C}}^{n+1} + \left(1-\omega\right)\Phi_{\mathrm{C}}^{n}, \tag{4.29}$$

iz kojeg slijedi izraz za vrijednost varijable Φ na kraju vremenskog intervala Δt:

$$\Phi_{\mathrm{C}}^{n+1} = \frac{1}{\omega}\left(\Phi_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{C}}^{n}\right) + \Phi_{\mathrm{C}}^{n}, \tag{4.30}$$

gdje je Φ_{C} vrijednost varijable Φ u čvoru C u vremenskom trenutku računanja koji se nalazi unutar vremenskog intervala Δt određenog faktorom vremenske interpolacije ω.

Vrijednost ω = 0 odgovara eksplicitnoj shemi, $\omega = 1$ potpuno implicitnoj shemi, a $\omega = 0,5$ Cranck-Nicholsonovoj shemi (koja je također implicitna). Eksplicitna i potpuno implicitna shema su prvog reda točnosti, a Cranck-Nicholsonova shema je drugog reda točnosti u odnosu na razvoj u Taylorov red. Za eksplicitne sheme postoji kriterij stabilnosti, koji propisuje maksimalno mogući vremenski korak integracije, dok je potpuno implicitna shema bezuvjetno stabilna. Stoga se u ovom radu za rješavanje nestacionarnih problema, gdje je točnost vremenske integracije bitna, koristi Cranck-Nicholsonova shema, a za proračun stacionarnih problema potpuno implicitna shema koja je bezuvjetno stabilna.

Izgled opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe (4.28) nakon uvrštavanja izraza (4.30) je:

$$\frac{\rho\left(\Phi_{\mathrm{C}} - \Phi_{\mathrm{C}}^{n}\right)}{\omega \Delta t} V + \sum_{k=1}^{m} \left[J\right]^{k} = S_{\mathrm{C}} V, \tag{4.31}$$

gdje se sve veličine osim Φ_{C}^{n} računaju u vremenskom trenutku računanja preko vrijednosti varijabli u tom istom trenutku. Rješavanjem sustava jednadžbi se dobiju vrijednosti varijable Φ u trenutku računanja, a onda se uz pomoć izraza (4.30) dobiju vrijednosti na kraju vremenskog intervala, odnosno u trenutku $t+\Delta t$.

4.2.3 Linearizacija izvorskih članova

Nelinearni izvorski članovi u jednadžbama se linearizira u obliku:

$$S_{\mathrm{C}} = S_{\mathrm{P}} \Phi_{\mathrm{C}} + S_{\mathrm{U}} \tag{4.32}$$

vodeći računa da koeficijent S_{P} povećava dijagonalnu dominantnost matrice sustava. Izvorski član jednadžbe kinetičke energije turbulencije glasi:

$$S_k = G_{\mathrm{C}} - \rho \bar{\varepsilon}_{\mathrm{C}}, \tag{4.33}$$

a u metodi se prikazuje u obliku

$$S_k = G_{\mathrm{C}} - \frac{\rho \overline{\varepsilon}_{\mathrm{C}}^{n-1}}{\overline{k}_{\mathrm{C}}^{n-1}} \overline{k}_{\mathrm{C}}, \tag{4.34}$$

gdje oznaka $n-1$ označava da se varijabla uzima iz prethodne iteracije. Izvorski član jednadžbe disipacije kinetičke energije turbulencije je:

$$S_\varepsilon = C_1 \rho \frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{k}} G_{\mathrm{C}} - C_2 \rho \frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{k}}, \tag{4.35}$$

a linearizira se u obliku

$$S_\varepsilon = C_1 \rho \frac{\varepsilon_{\mathrm{C}}^{n-1}}{k_{\mathrm{C}}^{n-1}} G_{\mathrm{C}} - C_2 \rho \frac{\varepsilon_{\mathrm{C}}^{n-1}}{k_{\mathrm{C}}^{n-1}} \varepsilon_{\mathrm{C}}. \tag{4.36}$$

U gornjim izrazima generacija kinetičke energije turbulencije se računa preko gradijenata brzine u centralnom čvoru:

$$G_{\mathrm{C}} = \mu_{\mathrm{t,C}}^{n-1} \left[2\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}} \right)^2 + 2\left(\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\mathrm{C}} \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\mathrm{C}} + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}} \right)^2 \right], \tag{4.37}$$

a gradijenti brzine u centralnom čvoru se računaju pomoću formule Gauss-Ostrogradski:

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{C}} = \frac{1}{V} \int_A v_i\big|_{\mathrm{n}}\, n_j dA = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{m} \left[v_i\big|_{\mathrm{n}}\, n_j \Delta A \right]^k, \tag{4.38}$$

gdje se brzina $v_i\big|_n$ računa po izrazu:

$$v_i\big|_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2}\left(v_i\big|_{\mathrm{C}} + v_i\big|_{\mathrm{N}} \right) + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{C}}^{n-1} + \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{N}}^{n-1} \right) \Delta x_{\mathrm{T},j}, \tag{4.39}$$

a $\Delta x_{\mathrm{T},j}$ je vektor udaljenosti između težišta stranice konačnog volumena i presjecišta spojnice susjednih čvorova $\overline{\mathrm{CN}}$ sa stranicom.

4.2.4 Konačni oblik diskretizirane jednadžbe

Konačni oblik diskretizirane jednadžbe nastale diskretizacijom opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe (4.31) je:

$$a_{\mathrm{C}} \Phi_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}} \Phi_{\mathrm{N}} \right]^k = b. \tag{4.40}$$

Koeficijenti ove jednadžbe uz primjenu EDSI sheme diferencije i uz linearizaciju izvorskog člana prema izrazu (4.32) su:

$$a_{\mathrm{C}} = \sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}} \right]^k + \frac{\rho \cdot V}{\omega \cdot \Delta t} - S_{\mathrm{P}} V + \max\left(0, \sum_{k=1}^{m} \left[F \right]^k \right) \tag{4.41}$$

i

$$b = \frac{\rho \cdot V}{\omega \cdot \Delta t} \Phi_{\mathrm{C}}^{o} + S_{\mathrm{U}} V - \sum_{k=1}^{m} \left[\Delta J_{\mathrm{C}} - \Delta J_{\mathrm{N}} \right]^k - \min\left(0, \sum_{k=1}^{m} \left[F \right]^k \right) \Phi_{\mathrm{C}}, \tag{4.42}$$

gdje a_{N} označava koeficijent uz nepoznatu vrijednost varijable u susjednom čvoru N prema izrazu (4.24), a_{C} koeficijent uz nepoznatu vrijednost varijable u centralnom čvoru C, b desnu stranu diskretizirane jednadžbe, a $\sum_{k=1}^{m} \left[F \right]^k$ sumu masenih protoka po svim stranicama konačnog volumena.

Postavljanjem diskretiziranih jednadžbi za svaki konačni volumen unutar kontrolnog volumena dobije se sustav linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznatim vrijednostima varijable Φ u čvorovima konačnih volumena. Broj jednadžbi odgovara broju konačnih volumena, što znači da se vrijednosti u rubnim čvorovima moraju definirati rubnim uvjetima. Ovaj sustav se može prikazati u obliku matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{4.43}$$

gdje su:

A matrica koeficijenata sustava,

x vektor nepoznatih vrijednosti varijable Φ u čvorovima,

b vektor desne strane sustava.

4.2.5 Detalji diskretizacije jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta

Prethodno je definiran postupak za diskretizaciju opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe, koji se može primijeniti na svaku jednadžbu matematičkog modela turbulentnog strujanja fluida.

Diskretizirani oblik jednadžbe količine gibanja ima član s kvadratom brzine nastao od konvektivnog člana, što predstavlja nelinearnost u sustavu algebarskih jednadžbi. Ovdje se taj problem rješava linearizacijom na način da se koeficijenti u jednadžbi količine gibanja računaju s vrijednostima brzine iz prethodne iteracije, slično rješavanju nelinearnosti izvorskog člana u k i ε jednadžbi.

Jednadžba kontinuiteta u diskretiziranom obliku glasi:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[F\right]^{k}=0\,, \tag{4.44}$$

gdje je $F=\rho v_{\mathrm{n}}\Delta A$ maseni protok kroz stranicu konačnog volumena.

Za povezivanje polja brzine i polja tlaka ovdje se primjenjuju algoritmi SIMPLE i SIMPLER.

Pri primjeni nepomaknute mreže može se pojaviti oscilirajuće polje tlaka, Patankar 1980 [67], što se objašnjava činjenicom da se pri primjeni sheme centralne diferencije za računanje gradijenata tlaka npr. u čvoru C, vrijednost tlaka u tom čvoru ne pojavljuje u izrazu za gradijent tlaka. Jedan od načina kojim se sprječava pojava oscilirajućeg polja tlaka temelji se na interpolaciji brzine na rubove konačnih volumena prema izrazu, Rhie i Chow 1983 [78]:

$$v_{\mathrm{n}}=\overline{v}_{\mathrm{n}}-\overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}\right)}\left[\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}-\overline{\left(\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}\right)}\right], \tag{4.45}$$

gdje horizontalna crta iznad veličine označava linearnu interpolaciju. U uvjetima postupne promjene polja tlaka dodana razlika stvarne i interpolirane usmjerene derivacije tlaka će biti mala, pa to neće narušiti točnost interpolacije, a spriječit će pojavu oscilirajućeg polja tlaka. Ove interpolirane veličine se mogu izračunati na sljedeći način:

$$\overline{v}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\left(v_{n.\mathrm{C}}+v_{n.\mathrm{N}}\right)+\frac{1}{2}\left[\left(\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}}+\left.\frac{\partial v_n}{\partial x}\right|_{\mathrm{N}}\right)\Delta x_{\mathrm{T}}+\left(\left.\frac{\partial v_n}{\partial y}\right|_{\mathrm{C}}+\left.\frac{\partial v_n}{\partial y}\right|_{\mathrm{N}}\right)\Delta y_{\mathrm{T}}\right], \tag{4.46}$$

gdje v_{n} označava komponente brzine u smjeru normale, a Δx_{T} i Δy_{T} udaljenost težišta stranice od točke n,

$$\overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{V_{\mathrm{C}}}{\left.\left(\sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}\right]^{k}\right)\right|_{\mathrm{C}}}+\frac{V_{\mathrm{N}}}{\left.\left(\sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}\right]^{k}\right)\right|_{\mathrm{N}}}\right), \tag{4.47}$$

$$\overline{\left(\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}\right)}=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}}+\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{N}}\right), \tag{4.48}$$

a usmjerena derivacija tlaka se diskretizira prema izrazu:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}=\frac{p_{\mathrm{N}}-p_{\mathrm{C}}}{2s}\,. \tag{4.49}$$

Računanje gradijenta tlaka

U jednadžbama količine gibanja na desnoj strani se pojavljuje član s gradijentom tlaka koji se, na temelju teorema o srednjoj vrijednosti volumenskog integrala, može prikazati na sljedeći način:

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \left.\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{C}} V \,. \tag{4.50}$$

Taj član se, na temelju Gaussovog teorema, može napisati u obliku površinskog integrala, a zatim, na temelju teorema o srednjoj vrijednosti površinskog integrala u sljedećem obliku:

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_A p n_i dA = \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\Delta A} p n_i dA \right]^k = \sum_{k=1}^{m} \left[p_{\mathrm{n}} n_i \Delta A \right]^k \,. \tag{4.51}$$

Dakle, iz jednadžbi (4.50) i (4.51) se može vidjeti da se derivacija tlaka u smjeru x_i u čvoru C računa preko vrijednosti tlaka na površinama konačnog volumena p_{n}:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{C}} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{m} \left[p_{\mathrm{n}} n_i \Delta A \right]^k \,. \tag{4.52}$$

Vrijednost tlaka u točki n, kad se ona nalazi na stranici između dva konačna volumena, može se dobiti linearnom interpolacijom vrijednosti tlaka u čvorovima C i N:

$$p_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2} \left(p_{\mathrm{N}} + p_{\mathrm{C}} \right) . \tag{4.53}$$

Kada konačni volumen nema stranica na rubu područja, derivacija tlaka u odgovarajućem čvoru se izračuna direktno iz vrijednosti tlaka u okolnim čvorovima prema izrazu koji se dobije uvrštavanjem jednadžbe (4.53) u jednadžbu (4.52):

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2V} \sum_{k=1}^{m} \left[p_{\mathrm{N}} n_i \Delta A \right]^k \,. \tag{4.54}$$

Ako se točka n nalazi na rubu područja gdje tlak najčešće nije poznat vrši se njegova linearna ekstrapolacija na rub iz čvora koji pripada konačnom volumenu uz rub. Ta dva čvora se nalaze na okomici na rub, pa se ova ekstrapolacija može napisati u sljedećem obliku:

$$p_{\mathrm{n}} = p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{C}} + \left.\frac{\partial p}{\partial x_j}\right|_{\mathrm{C}} n_j s \,. \tag{4.55}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (4.53) za stranice unutar područja i jednadžbe (4.55) za jednu ili dvije stranice na rubu područja u jednadžbe (4.52) (za i = 1, 2) dobije se sustav dviju

linearnih jednadžbi čije su rješenje dvije nepoznate derivacije tlaka u čvoru uz rub $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}}$ i $\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\mathrm{C}}$, koje su potrebne u odgovarajućim jednadžbama količine gibanja.

4.3 RUBNI UVJETI

4.3.1 Ulaz

Na ulaznom rubu područja proračuna poznate su sve veličine, pa se svi konvekcijski protoci mogu lako izračunati. Difuzijski protoci su obično nepoznati, ali se mogu aproksimirati koristeći poznate vrijednosti varijabli i jednostrane aproksimacije za usmjerene derivacije:

$$\frac{\Phi_{\mathrm{B}}-\Phi_{\mathrm{C}}}{s}=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{B}}+\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}}\right) \quad \text{ili} \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{B}}=2\frac{\Phi_{\mathrm{B}}-\Phi_{\mathrm{C}}}{s}-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{C}}. \tag{4.56}$$

4.3.2 Izlaz

Na izlaznom rubu uzvodni utjecaj treba biti minimalan, što znači da treba osigurati parabolične uvjete. Strujanje treba biti usmjereno izvan područja proračuna na cijelom izlaznom rubu i, ako je moguće, treba biti paralelno. U strujanjima s velikim vrijednostima Reynoldsova broja, uzvodni utjecaj stanja na izlaznom rubu je zanemariv, pa vrijednosti varijabli na tom rubu nisu ni bitne. Obično se vrši ekstrapolacija varijabli duž mreže prema rubu područja (ili još bolje duž strujnica). Ta najjednostavnija aproksimacija je u stvari primjena nulte derivacije duž mreže. Za konvekcijski protok to praktički znači da se koristi uzvodna shema prvog reda.

4.3.3 Čvrsta nepropusna stijenka

Na čvrstoj nepropusnoj stijenci (zidu) se za komponente brzine primjenjuje sljedeći uvjet:

$$u_{\mathrm{B}}=u_{\mathrm{zid}} \quad \text{i} \quad v_{\mathrm{B}}=v_{\mathrm{zid}}\,. \tag{4.57}$$

Taj uvjet slijedi iz činjenice da se viskozni fluid lijepi uz čvrstu stijenku (uvjet lijepljenja).

Budući da nema strujanja kroz zid, konvekcijski protoci svih veličina su jednaki nuli.

Difuzijski protoci zahtijevaju posebnu pažnju. Za skalarne veličine kao što je unutarnja energija, oni mogu biti jednaki nuli (adijabatski zid), mogu biti zadani (zadan protok topline) ili mogu biti zadane vrijednosti varijabli (zid konstantne temperature). Ako je poznat protok, to se treba ugraditi u odgovarajuću jednadžbu održanja za konačni volumen uz zid. Ako je zadana vrijednost varijable Φ na zidu, potrebno je aproksimirati normalni gradijent varijable Φ koristeći diferenciranje s jedne strane. Pomoću takve aproksimacije može se također izračunati vrijednost varijable Φ na zidu kada je zadan protok.

U jednadžbi količine gibanja u smjeru x difuzijski protok kroz dio površine konačnog volumena označava projekciju ukupne viskozne površinske sile u smjeru x i, uzimajući u obzir da normalno viskozno naprezanje djeluje u smjeru normale n, a tangencijalno u smjeru tangente t, može se izraziti na sljedeći način:

$$J_u^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = \left(\tau_{nn} n_x + \tau_{nt} t_x\right) \Delta A\,, \tag{4.58}$$

gdje se viskozna naprezanja računaju prema izrazima:

$$\tau_{nn} = 2\mu_e \frac{\partial v_n}{\partial n} \quad \text{i} \tag{4.59}$$

$$\tau_{nt} = \mu_e \left(\frac{\partial v_t}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \right). \tag{4.60}$$

Na čvrstom nepropusnom zidu brzina fluida je jednaka brzini zida i nema derivacije brzine u smjeru zida (tangente), pa se može pisati:

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial t}\right|_{\mathrm{zid}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial v_t}{\partial t}\right|_{\mathrm{zid}} = 0\,. \tag{4.61}$$

Iz (4.61) i jednadžbe kontinuiteta za fluid u neposrednoj blizini zida dobije se:

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial n}\right|_{\mathrm{zid}} = 0\,. \tag{4.62}$$

Uzimajući ovo u obzir dobije se:

$$\tau_{nn} = 0\,, \quad \tau_{nt} = \mu_e \frac{\partial v_t}{\partial n}\,, \tag{4.63}$$

odnosno:

$$J_u^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = \tau_{nt} t_x \Delta A = \mu_e \frac{\partial v_t}{\partial n} t_x \Delta A\,. \tag{4.64}$$

Slično se za jednadžbu količine gibanja u smjeru osi y dobije:

$$J_v^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = \tau_{nt} t_y \Delta A = \mu_e \frac{\partial v_t}{\partial n} t_y \Delta A \,. \tag{4.65}$$

Derivacija tangencijalne komponente brzine u smjeru normale u prvom čvoru uz zid može se aproksimirati kao:

$$\left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_{\mathrm{zid}} = \frac{v_{t,\mathrm{B}} - v_{t,\mathrm{C}}}{s} = \frac{\left(u_{\mathrm{B}} t_x + v_{\mathrm{B}} t_y\right) - \left(u_{\mathrm{C}} t_x + v_{\mathrm{C}} t_y\right)}{s}, \tag{4.66}$$

što daje difuzijske protoke u obliku:

$$J_u^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = -\frac{\mu_e \Delta A}{s} u_{\mathrm{C}} t_x t_x + \frac{\mu_e \Delta A}{s}\left[u_{\mathrm{B}} t_x t_x - \left(v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{C}}\right) t_x t_y\right] \text{ i} \tag{4.67}$$

$$J_v^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = -\frac{\mu_e \Delta A}{s} v_{\mathrm{C}} t_y t_y + \frac{\mu_e \Delta A}{s}\left[v_{\mathrm{B}} t_y t_y - \left(u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{C}}\right) t_x t_y\right]. \tag{4.68}$$

Prvi članovi ovih izraza se mogu tretirati implicitno, što znači da se mogu prebaciti na lijevu stranu diskretizirane jednadžbe količine gibanja i dodati centralnom koeficijentu a_{C}. U tom slučaju bi se centralni koeficijent razlikovao za jednadžbe količine gibanja u smjeru osi x i y, a budući da je taj koeficijent potreban za jednadžbu korekcije tlaka moraju se pamtiti obje njegove vrijednosti. Kako bi se to izbjeglo, koeficijentu a_{C} se dodaje samo dio koji je jednak za obje jednadžbe $\mu_e \Delta A / s$, tako da se difuzijski protoci zapišu na sljedeći način:

$$J_u^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = -\frac{\mu_e \Delta A}{s} u_{\mathrm{C}} + \frac{\mu_e \Delta A}{s}\left[\left(1 - t_x t_x\right) u_{\mathrm{C}} + u_B t_x t_x - \left(v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{C}}\right) t_x t_y\right] \text{ i} \tag{4.69}$$

$$J_v^{\mathrm{D}}\Big|_{\mathrm{zid}} = -\frac{\mu_e \Delta A}{s} v_{\mathrm{C}} + \frac{\mu_e \Delta A}{s}\left[\left(1 - t_y t_y\right) v_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{B}} t_y t_y - \left(u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{C}}\right) t_x t_y\right]. \tag{4.70}$$

U ovoj „deffered correction" strategiji koeficijent a_{C} je jednak za obje jednadžbe količine gibanja, a konvergencija ostaje gotova ista kao kada se koeficijentu a_{C} dodaju potpuni prvi članovi, Ferzinger i Perić [21].

4.3.4 Ravnina simetrije

U mnogim strujanjima postoji ravnina simetrije. Kada je strujanje stacionarno postoji rješenje koje je simetrično u odnosu na tu ravninu. Simetrično rješenje se može dobiti rješavanjem problema u dijelu područja proračuna koristeći samo uvjete simetrije.

Na ravnini simetrije su, slično kao i na zidu, konvektivni protoci svih varijabli jednaki nuli. Također, na ravnini simetrije su derivacije tangencijalne komponente brzine i svih skalarnih veličina u smjeru normale jednake nuli. Normalna komponenta brzine je jednaka nuli, ali njena derivacija u smjeru normale nije. Zbog toga ni normalno naprezanje τ_{nn} nije jednako nuli. Tako na ravnini simetrije imamo:

$$\tau_{nn} = 2\mu_e \left.\frac{\partial v_n}{\partial n}\right|_{\text{sim.}} \quad \text{i} \tag{4.71}$$

$$\tau_{nt} = \mu_e \left(\left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_{\text{sim.}} + \left.\frac{\partial v_n}{\partial t}\right|_{\text{sim.}} \right) = 0 . \tag{4.72}$$

Difuzijski protok se može napisati kao:

$$J_u^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = \tau_{nn} n_x \Delta A = 2\mu_e \frac{\partial v_n}{\partial n} n_x \Delta A . \tag{4.73}$$

Slično se za jednadžbu količine gibanja u smjeru osi *y* dobije:

$$J_v^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = \tau_{nn} n_y \Delta A = 2\mu_e \frac{\partial v_n}{\partial n} n_y \Delta A . \tag{4.74}$$

Derivacija normalne komponente brzine u smjeru normale u prvom čvoru uz ravninu simetrije može se aproksimirati kao:

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial n}\right|_{\text{sim.}} = \frac{v_{n,\text{B}} - v_{n,\text{C}}}{s} = -\frac{v_{n,\text{C}}}{s} = -\frac{u_{\text{C}} n_x + v_{\text{C}} n_y}{s} , \tag{4.75}$$

gdje je iskorišteno $v_{n,\text{B}} = 0$. Ovo daje difuzijske protoke u obliku:

$$J_u^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = -\frac{2\mu_e \Delta A}{s} u_{\text{C}} n_x n_x - \frac{2\mu_e \Delta A}{s} v_{\text{C}} n_x n_y \quad \text{i} \tag{4.76}$$

$$J_v^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = -\frac{2\mu_e \Delta A}{s} v_{\text{C}} n_y n_y - \frac{2\mu_e \Delta A}{s} u_{\text{C}} n_x n_y . \tag{4.77}$$

Primjenom „deffered correction" strategije, slično kao i na zidu, dobije se:

$$J_u^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = -\frac{2\mu_e \Delta A}{s} u_{\text{C}} + \frac{2\mu_e \Delta A}{s} \left[\left(1 - n_x n_x\right) u_{\text{C}} - v_{\text{C}} n_x n_y \right] \quad \text{i} \tag{4.78}$$

$$J_v^{\text{D}}\Big|_{\text{sim.}} = -\frac{2\mu_e \Delta A}{s} v_{\text{C}} + \frac{2\mu_e \Delta A}{s} \left[\left(1 - n_y n_y\right) v_{\text{C}} - u_{\text{C}} n_x n_y \right] . \tag{4.79}$$

4.3.5 Rubni uvjeti za *k* i *ε* jednadžbe

Rubni uvjeti za *k* i ε jednadžbe su općenito slični uvjetima koji se primjenjuju na bilo koji skalar. Međutim, na čvrstom nepropusnom zidu rubni uvjeti se značajno razlikuju. Usvojeni *k*-ε model vrijedi za visoke vrijednosti turbulentnog Reynoldsovog broja koji se može napisati u obliku:

$$Re_t = \frac{\sqrt{k}\, l}{\nu} = \frac{\mu_t}{\mu}. \tag{4.80}$$

Vidi se da Re_t predstavlja odnos koeficijenata turbulentne i molekularne viskoznosti. Budući da u blizini zida k teži k nuli, a ε ka konačnoj vrijednosti, Re_t se smanjuje, te se dolazi u područje gdje nisu ispunjeni uvjeti za primjenu ovog modela. Ovaj problem se rješava ili formulacijom specijalnog modela turbulencije koji vrijedi za granični sloj uz zid ili prilagođavanjem rješenja u području uz zid na poznatu razdiobu varijabli uz zid (definiranjem „unutarnjih" rubnih uvjeta). Pregled nekih modifikacija turbulentnog modela u blizini zida se može vidjeti u Patel et al. (1985) i Wilcox (1993). Ovdje se primjenjuje pristup u kojem se područje u kojem ne vrijedi usvojeni $k-\varepsilon$ model turbulencije premošćuje zidnim funkcijama.

Zidne funkcije

U ovom radu će se iskoristiti drugi pristup i primijeniti zidne funkcije koje se temelje na eksperimentalno potvrđenom postojanju područja u graničnom sloju s logaritmičkim profilom brzine. Ovaj logaritmički profil brzine se može opisati na sljedeći način:

$$v^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(En^+\right), \tag{4.81}$$

uz usvojene oznake:

$$v^+ = \frac{v_t}{v_\tau}, \tag{4.82}$$

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{i} \tag{4.83}$$

$$n^+ = \frac{\rho v_\tau n}{\mu}, \tag{4.84}$$

gdje je v^+ bezdimenzijska brzina paralelna sa zidom, v_t osrednjena brzina paralelna sa zidom, v_τ smična brzina, τ_w smično naprezanje na zidu, κ je von Karmanova konstanta, E je integracijska konstanta ovisna o hrapavosti stijenke i debljini viskoznog podsloja i n^+ je bezdimenzijska udaljenost od zida.

Uz pretpostavku da je strujanje u lokalnoj ravnoteži, odnosno da su generiranje i disipacija turbulentne kinetičke energije približno jednaki može se pokazati da je:

$$v_\tau = C_\mu^{1/4}\sqrt{k}\,. \tag{4.85}$$

Iz jednadžbe (4.85) i jednadžbi logaritmičkog profila se može izvesti izraz za smično naprezanje na zidu:

$$\tau_w = \rho v_\tau^2 = \rho C_\mu^{1/4} \sqrt{k} \frac{\kappa v_t}{\ln\left(En^+\right)}. \tag{4.86}$$

Da bi se mogao koristiti isti izraz za smično naprezanje na stranici konačnog volumena koja pripada čvrstoj nepropusnoj stijenci u laminarnom i turbulentnom strujanju, jednadžba (4.86) se zapisuje u obliku:

$$\tau_w = \mu_w \frac{\partial v_t}{\partial n} = \mu_w \frac{v_{t,\mathrm{B}} - v_{t,\mathrm{C}}}{s}, \tag{4.87}$$

gdje je za turbulentno strujanje:

$$\mu_w = \mu \qquad \text{za} \quad n_\mathrm{C}^+ \le n_\mathrm{trans}^+, \tag{4.88}$$

$$\mu_w = \rho C_\mu^{1/4} \sqrt{k_\mathrm{C}} \frac{\kappa s}{\ln\left(En_\mathrm{C}^+\right)} \qquad \text{za} \quad n_\mathrm{C}^+ > n_\mathrm{trans}^+, \tag{4.89}$$

a $n_\mathrm{trans}^+ = 11.63$ određuje udaljenost od zida na kojoj su brzine računate po izrazima za viskozni podsloj i inercijski podsloj jednake.

Jednadžba (4.87) odgovara izrazu (4.63) kada se u njega uvrsti izraz (4.66), te se ugradnja rubnog uvjeta vrši na isti način kao i u laminarnom slučaju.

Kada se koriste zidne funkcije difuzijski protok k kroz zid se uzima da je jednak nuli, dovodeći do rubnog uvjeta da je normalna derivacija k jednaka nuli.

Generacija turbulentne kinetičke energije u području zida se računa iz:

$$G_\mathrm{C} \approx \tau_w \left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_\mathrm{C}, \tag{4.90}$$

što predstavlja aproksimaciju dominantnog člana ukupne generacije turbulentne kinetičke energije koja važi u blizini zida, jer je smično naprezanje u tom području približno konstantno. Za potrebe određivanja disipacije, odnosno generacije, u sredini konačnog volumena najbližeg zidu, derivacija brzine se može izvesti iz logaritmičkog profila brzine:

$$\left.\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|_\mathrm{C} = \frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k_\mathrm{C}}}{\kappa s}. \tag{4.91}$$

To znači da se generacija u jednadžbi kinetičke energije turbulencije izračunata ranije zamjenjuje s generacijom izračunatom prema jednadžbi (4.90).

Ako se koriste zidne funkcije ne rješava se jednadžba za ε za konačni volumen uz zid. Umjesto rješavanja jednadžbe, ε u centru konačnog volumena uz stijenku se izjednači s:

$$\varepsilon_\mathrm{C} = \frac{C_\mu^{3/4} k_\mathrm{C}^{3/2}}{\kappa s}. \tag{4.92}$$

Treba istaći da gornji rubni uvjeti važe kada je prvi čvor unutar logaritmičkog područja, tj. kada je $n_C^+ > 30$. Problemi se povećavaju u strujanju s odvajanjem jer unutar područja recirkulacije, a naročito u područjima odvajanja i ponovnog nalijeganja struje gornji izrazi ne zadovoljavaju. Obično se činjenica da zidne funkcije ne vrijede u tim područjima ignorira i one se primjenjuju svugdje. Međutim, ako se gornji uvjeti krše na velikom dijelu zida to uzrokuje ozbiljnu pogrešku u rezultatu.

Ulaz

Na ulazu vrijednosti *k* i ε često nisu poznate. Tada se obično uzima da *k* ima neku malu vrijednost, recimo $10^{-4}v^2$. Vrijednost ε treba se pretpostaviti tako da je karakteristična mjera duljine jednaka približno jednoj desetini debljine graničnog sloja ili veličine područja.

4.4 PODRELAKSACIJA

Podrelaksacija se primjenjuje kod stacionarnih strujanja kako bi se ograničila promjena varijable između dvije vanjske iteracije. Promjena neke varijable mijenja koeficijente u drugim jednadžbama, što može dovesti do usporavanja ili čak izostanka konvergencije.

Neka je jednadžba u diskretiziranom obliku za jedan konačni volumen dana u sljedećem obliku:

$$a_C\Phi_C - \sum_{k=1}^{m}\left[a_N\Phi_N\right]^k = b\,, \tag{4.93}$$

gdje je Φ_C vrijednost tražene varijable u centralnom čvoru C u *n*-toj iteraciji. Podrelaksacija znači da se vrijednost tražene varijable u *n*-toj iteraciji dobije dodavanjem samo dijela promjene u jednoj iteraciji umjesto kompletne promjene. Ako je α faktor podrelaksacije, takav da je $0 < \alpha \le 1$, onda se podrelaksirana vrijednost varijable u *n*-toj iteraciji može prikazati kao:

$$\Phi_C = \Phi_C^{n-1} + \alpha\left(\Phi_C - \Phi_C^{n-1}\right). \tag{4.94}$$

Množenjem izraza (4.94) s a_C/α dobije se:

$$\frac{a_C}{\alpha}\Phi_C = a_C\Phi_C + \frac{a_C}{\alpha}\left(1-\alpha\right)\Phi_C^{n-1}. \tag{4.95}$$

Kada iterativni postupak konvergira do stacionarnog rješenja, promjena vrijednosti varijable između dvije iteracije je zanemariva, pa se zbog toga gubi utjecaj faktora podrelaksacije na konačno rješenje. Zamjenom prvog člana na desnoj strani jednadžbe (4.94) iz jednadžbe (4.93) dobije se:

$$\frac{a_C}{\alpha}\Phi_C - \sum_{k=1}^{m}\left[a_N\Phi_N\right]^k = b + \frac{a_C}{\alpha}\left(1-\alpha\right)\Phi_C^{n-1}. \tag{4.96}$$

Podrelaksirana jednadžba u diskretiziranom obliku je:

$$\overline{a}_{\mathrm{C}}\Phi_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}\Phi_{\mathrm{N}}\right]^{k} = \overline{b}\,, \tag{4.97}$$

uz uvedene oznake:

$$\overline{a}_{\mathrm{C}} = \frac{a_{\mathrm{C}}}{\alpha} \text{ i} \tag{4.98}$$

$$\overline{b} = b + \frac{a_{\mathrm{C}}}{\alpha}\left(1-\alpha\right)\Phi_{\mathrm{C}}^{n-1}, \tag{4.99}$$

gdje je $\overline{a}_{\mathrm{C}}$ podrelaksirani centralni koeficijent i $\overline{b}$ podrelaksirani slobodni član diskretizirane jednadžbe.

Centralni koeficijent se poderaksacijom povećava dok izvandijagonalni koeficijenti ostaju nepromijenjeni čime se povećava dijagonalna dominantnost matrice koeficijenata sustava. Faktor podrelaksacije utječe na brzinu konvergencije, ali se njegova optimalna vrijednost ne može propisati unaprijed, nego se određuje iskustveno.

4.5 RJEŠAVANJE SUSTAVA LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI

Sustav linearnih algebarskih jednadžbi se rješava nekom od metoda koje pripadaju dvjema osnovnim kategorijama: direktne ili iterativne metode. Direktne metode daju rješenje sustava nakon konačnog broja aritmetičkih operacija. Iterativne metode kreću s nekom početnom pretpostavkom rješenja koju kontinuirano poboljšavaju sve dok se ne dostigne neki kriterij konvergencije, odnosno dok se trenutna aproksimacija rješenja ne približi dovoljno pravom rješenju sustava. Kako se sustavi koji se dobiju diskretizacijom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u metodi konačnih volumena sastoje od velikog broja algebarskih jednadžbi, a u svakoj od njih se pojavljuje mali broj nepoznatih varijabli za njihovo rješavanje su pogodnije iterativne metode.

Neke od najefektnijih iterativnih metoda za rješavanje velikih nesimetričnih rijetkih linearnih sustava su temeljene na metodi Krylovljevog podprostora. U ovom radu se primjenjuje generalizirana metoda minimalnog reziduala (Generalized Minimal Residual Method – GMRES), Saad i Schultz 1986 [84], u kojoj se koristi modificirani Gram-Schmidtov postupak kako bi se formirala ortonormirana baza za niz Krylovljevih potprostora $span\left\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, ..., \mathbf{A}^k\mathbf{r}_0\right\}$ (Arnoldijev algoritam).

GMRES metoda pronalazi rješenje linearnog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ u obliku $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$ gdje je $\mathbf{A}$ matrica koeficijenata sustava, $\mathbf{x}$ vektor traženih vrijednosti, $\mathbf{b}$ vektor desne strane sustava, $\mathbf{x}_0$ početna pretpostavka, a $\mathbf{z}$ je vektor koji minimizira euklidsku normu reziduala $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}\right)$ preko Krylovljevog potprostora $K = span\left\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, ..., \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\right\}$ dimenzije *k*, s početnim rezidualom $\mathbf{r}_0$ definiranim kao $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Više o GMRES metodi i njenim modifikacijama i primjeni može se naći u Qin [75], Zitko [112], Simoncini [88].

Ako se za k izabere veličina originalnog vektorskog prostora onda GMRES metoda daje točno rješenje gornjeg linearnog sustava. Međutim, to zahtijeva veliki broj operacija i veliku količinu računalne memorije zbog čega se u praktičnoj primjeni koristi ponovno započinjanje metode svakih k koraka, pri čemu se rješenje iz posljednje iteracije jednog ciklusa koristi kao početna pretpostavka za sljedeći ciklus. Ovaj proces se ponavlja sve dok se ne dobije rješenje unaprijed zadane točnosti. Ovakav oblik metode se označava s GMRES(k) i njegovom primjenom se značajno smanjuje potreba za memorijom računala i brojem operacija. Količina računalne memorije koja je potrebna za GMRES(k) metodu je linearna funkcija od k. Za razliku od drugih iterativnih rješavača sustava linearnih jednadžbi, GMRES(k) metoda u svom izvornom obliku uvijek smanjuje euklidsku normu reziduala u svakoj iteraciji, što metodi daje monotonu konvergenciju i robusnost, Qin [75].

Izbor vrijednosti za k je ključan za uspješnu primjenu ove metode. Nažalost, nema određenih pravila za njegov izbor nego je za to potrebno iskustvo. Premala vrijednost može rezultirati sporom konvergencijom ili izostankom konvergencije, dok prevelika vrijednost dovodi do pretjeranih zahtjeva za memorijom računala. Preporučena početna vrijednost za k je u intervalu od 3 do 6. Ako rješenje ne konvergira, vrijednost treba povećati.

Kao i kod mnogih drugih iterativnih metoda rješavanja linearnih sustava i GMRES(k) metoda se može primjenjivati na prekondicioniranom (engl. preconditioning) sustavu, koji je ekvivalentan početnom, tj. ima isto rješenje, ali se lakše rješava jer ima povoljnije spektralne osobine matrice koeficijenata. Matrica $\mathbf{M}$ kojom se sustav prekondicionira treba aproksimirati matricu koeficijenata $\mathbf{A}$, tako da se prekondicionirani sustav lakše rješava, a da vrijeme potrebno za formiranje matrice $\mathbf{M}$ i njenu primjenu ne bude veliko, tj. da se smanji ukupno vrijeme rješavanja. Postoje tri načina primjene prekondicioniranja: lijevo, desno i dvostrano prekondicioniranje. U ovom radu se primjenjuje dvostrano prekondicioniranje matricom $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ koja se dobije nepotpunom faktorizacijom matrice koeficijenata $\mathbf{A}$. Nepotpuna faktorizacija predstavlja faktorizaciju matrice $\mathbf{A}$ u donju i gornju trokutastu matricu $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$, tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- Matrice $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$ imaju istu strukturu elemenata različitih od nule kao i matrica $\mathbf{A}$,
- Elementi različiti od nule u matrici $\mathbf{A}$ su jednaki odgovarajućim elementima matrice produkta $\mathbf{LU}$,

pa slijedi $\mathbf{A} \approx \mathbf{LU} = \mathbf{M}$ i $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$.

Faktorizacija je nekompletna zato što produkt $\mathbf{LU}$ ima elemente različite od nule i na mjestima gdje matrica $\mathbf{A}$ ima nule, tj. produkt $\mathbf{LU}$ nije potpuno identičan matrici $\mathbf{A}$ kao što je slučaj u potpunoj faktorizaciji. Nekompletna faktorizacija daje dobre matrice za prekondicioniranje sustava, naročito ako je broj dodatnih elemenata različitih od nule u produktu $\mathbf{LU}$ relativno mali.

Dakle, GMRES(k) metoda se primjenjuje na dvostrano prekondicioniranon sustavu $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ uz $\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{u}$. Kao početni rezidual se uzima neprekondicionirani početni rezidual pomnožen s $\mathbf{L}^{-1}$, a na kraju se aproksimacija $\mathbf{x}_k$ dobije množeći vektor $\mathbf{Q}_k\mathbf{y}$ s $\mathbf{U}^{-1}$. Rezidual u k-tom koraku je $\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k\right)$.

4.6 KRITERIJ ZAVRŠETKA ITERATIVNOG POSTUPKA

Rješavanje nelinearnih problema i/ili primjena „deffered correction" strategije zahtijeva iterativni numerički postupak. U takvim situacijama je potrebno ustanoviti kriterij završetka tog iterativnog postupka.

Rezidual za opću konvekcijsko-difuzijsku jednadžbu se definira kao sljedeća suma po svim konačnim volumenima kojih ima N_i :

$$R_{\mathrm{a}} = \sum_{l=1}^{N_i} \left[\left| a_{\mathrm{C}} \Phi_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}} \Phi_{\mathrm{N}} \right]^k - b \right| \right]^l , \tag{4.100}$$

pri čemu se koriste koeficijenti iz tekuće iteracije i vrijednosti varijable Φ iz prethodne iteracije.

Normirani rezidual je:

$$R = \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{N_i} \left[\left| a_{\mathrm{C}} \Phi_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}} \Phi_{\mathrm{N}} \right]^k - b \right| \right]^l}{\displaystyle\sum_{l=1}^{N_{\mathrm{ulaz}}} \left[\left| F_{\mathrm{B}} \Phi_{\mathrm{B}} \right| \right]^l} . \tag{4.101}$$

Za obje jednadžbe količine gibanja je suma u nazivniku jednaka:

$$\sum_{l=1}^{N_{\mathrm{ulaz}}} \left[\left| F_{\mathrm{B}} \sqrt{u_{\mathrm{B}}^2 + v_{\mathrm{B}}^2} \right| \right]^l . \tag{4.102}$$

Rezidual za jednadžbu kontinuiteta je:

$$R_m = \sum_{l=1}^{N_i} \left[\left| \sum_{k=1}^{m} \left[F \right]^k \right| \right]^l . \tag{4.103}$$

Ponekad je korisno pratiti koliko se rezidual relativno smanjuje tijekom računanja. Tada se rezidual normalizira njegovim dijeljenjem maksimalnom vrijednošću reziduala u prvih M iteracija. Ovakva normalizacija osigurava da su početni reziduali svih jednadžbi reda veličine jedan što je ponekad korisno za procjenu ukupne konvergencije.

Iterativni postupak se zaustavlja kada se normirani reziduali za sve jednadžbe modela strujanja smanje za šest redova veličine, tj. $R < 10^{-6}$.

4.7 RJEŠAVANJE SUSTAVA JEDNADŽBI MATEMATIČKOG MODELA TURBULENTNOG STRUJANJA

Kada bi se sve jednadžbe matematičkog modela turbulentnog strujanja, komponente jednadžbe količine gibanja u smjerovima x i y, jednadžba kontinuiteta, jednadžba kinetičke energije turbulencije i jednadžba disipacije kinetičke energije turbulencije, u diskretiziranom obliku složile u jedan sustav algebarskih jednadžbi, on bi imao sljedeći izgled:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{uv} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{uv} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \boxed{\mathbf{0}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{u} \\ \mathbf{b}^{v} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^{k} \\ \mathbf{b}^{\varepsilon} \end{bmatrix}, \tag{4.104}$$

gdje su matrice $\mathbf{A}^{uv}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{A}^{k}$ i $\mathbf{A}^{\varepsilon}$ su kvadratne matrice dimenzije $N_i \times N_i$ (N_i je broj unutarnjih čvorova), dok su $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektori nepoznanica, a $\mathbf{b}^{u}$, $\mathbf{b}^{v}$, $\mathbf{b}^{k}$ i $\mathbf{b}^{\varepsilon}$ vektori desnih strana u pripadajućim jednadžbama. Matrice $\mathbf{0}$ je kvadratna matrica dimenzije $N_i \times N_i$ u kojoj su svi koeficijenti jednaki nuli. Matrice $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{B}_2$ se odnose na koeficijente proizašle iz diskretizacije derivacija tlaka, a matrice $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ sadrže koeficijente uz vrijednosti polja brzine u jednadžbi kontinuiteta u diskretiziranom obliku. Jedna od metoda rješavanja opisanog sustava je direktna metoda, u kojoj se sve jednadžbe rješavaju simultano. Nedostatak ove metode je u velikoj matrici sustava i činjenici da je na dijagonali (koeficijenti uz polje tlaka) nula-matrica, što isključuje korištenje iterativnih postupaka koji zahtijevaju dijagonalnu dominantnost matrice sustava. Danas se češće koriste algoritmi u kojima se jednadžbe rješavaju sekvencijalno, jedna za drugom. U ovom pristupu je problem da se tlak treba odrediti iz jednadžbe kontinuiteta, a on se ne pojavljuje eksplicitno u toj jednadžbi. Zbog toga se kombinacijom jednadžbe kontinuiteta i komponenti jednadžbe količine gibanja izvodi jednadžba za tlak oblika:

$$\mathbf{A}^{p}\mathbf{p} = \mathbf{b}^{p}, \tag{4.105}$$

gdje je matrica $\mathbf{A}^{p}$ dijagonalno dominantna, kao i za slučaj ostalih jednadžbi. Iz skupine ovih algoritama, kao što je rečeno u uvodu, najpovoljniji je algoritam SIMPLE i njegove modifikacije SIMPLER i SIMPLEC, koji su izvorno definirani na pomaknutoj mreži. Interpolacijom brzine (4.45) omogućena je primjena algoritama SIMPLE (koji se temelji na rješavanju jednadžbe za korekciju tlaka) i na nepomaknutoj mreži pri kojoj se ne pojavljuje oscilirajući tlak, a ovdje će se implementirati algoritam SIMPLER (koji se temelji na rješavanju jednadžbi za tlak i korekciju tlaka), a koji se do sada, prema spoznajama autora, nije primjenjivao na nestrukturiranoj nepomaknutoj mreži. U nastavku slijedi opis primjene ovih algoritama.

4.7.1 Algoritam SIMPLE

U algoritmu SIMPLE se rješava jednadžba korekcije tlaka, te se na temelju dobivenog rješenja korigiraju tlak, brzina na stranici konačnog volumena, odnosno maseni protok kroz stranicu konačnog volumena i komponente brzine u glavnom čvoru. Jednadžba korekcije tlaka se izvodi iz jednadžbe kontinuiteta u diskretiziranom obliku:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\rho v_{\mathrm{n}}\Delta A\right)^{k}=0\,. \tag{4.106}$$

i komponenti jednadžbe količine gibanja u diskretiziranom obliku u smjeru osi x:

$$a_{\mathrm{C}}u_{\mathrm{C}}-\sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}}\right]^{k}=b^{u} \tag{4.107}$$

i u smjeru osi y:

$$a_{\mathrm{C}}v_{\mathrm{C}}-\sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}v_{\mathrm{N}}\right]^{k}=b^{v}\,. \tag{4.108}$$

Formalno se jednadžba količine gibanja može diskretizirati i u točki n u polovištu spojnice glavnih čvorova C i N na stranici konačnog volumena, prema slici 4.1, u smjeru normale n_i :

$$a_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}-\sum_{k=1}^{m_n}\left[a_{\mathrm{n.N}}v_{\mathrm{n.N}}\right]^{k}=\tilde{b}_{\mathrm{n}}-\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}V_{\mathrm{n}}\,, \tag{4.109}$$

gdje je $\tilde{b}_{\mathrm{n}}$ slobodni član bez utjecaja tlaka.

Kod pomaknute mreže gdje su čvorovi za brzinu pomaknuti na stranice konačnih volumena, jednadžba (4.109) bi stvarno bila diskretizirana u čvoru n, a ovdje će se ta jednadžba na određeni način interpolirati iz diskretiziranih jednadžbi u čvoru C i N oko kojih se stvarno vrši diskretizacija.

Neka su u^{*} i v^{*} komponente polja brzine koje zadovoljava jednadžbu količine gibanja uz polje tlaka p^{*}, a ne zadovoljati jednadžbu kontinuiteta. Za te veličine vrijedi jednadžba (4.109) koja se može zapisati u obliku:

$$a_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n}}^{*}-\sum_{k=1}^{m_n}\left[a_{\mathrm{n.N}}v_{\mathrm{n.N}}^{*}\right]^{k}=\tilde{b}_{\mathrm{n}}-\left.\frac{\partial p^{*}}{\partial n}\right|_{\mathrm{n}}V_{\mathrm{n}}\,. \tag{4.110}$$

Traže se korekcije tlaka p' koje će izazvati korekcije brzine u' i v' takve da će korigirana polja istovremeno zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta i jednadžbu količine gibanja. Za korigirana polja vrijedi:

$$p=p^{*}+p'\,,\qquad u=u^{*}+u'\qquad \text{i}\qquad v=v^{*}+v'\,. \tag{4.111}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u jednadžbu (4.109) i oduzimanjem od jednadžbe (4.110) dobije se veza između korekcija brzine i korekcija tlaka:

$$a_{\mathrm{n}} v'_{\mathrm{n}} - \sum_{k=1}^{m_n} \left[a_{\mathrm{n.N}} v'_{\mathrm{n.N}} \right]^k = - \left. \frac{\partial p'}{\partial n} \right|_{\mathrm{n}} V_{\mathrm{n}} . \tag{4.112}$$

Zanemarivanjem sume $\sum_{k=1}^{m_n} \left[a_{\mathrm{n.N}} v'_{\mathrm{n.N}} \right]^k$ dobije se pojednostavljena veza između korekcije brzine na stranicama konačnih volumena i korekcije tlaka u glavnim čvorovima:

$$v'_{\mathrm{n}} = - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \left. \frac{\partial p'}{\partial n} \right|_{\mathrm{n}} . \tag{4.113}$$

Usmjerena derivacija korekcije tlaka u točki n u smjeru vanjske normale diskretizira se u obliku:

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial n} \right|_{\mathrm{n}} = \frac{p'_{\mathrm{N}} - p'_{\mathrm{C}}}{2s} , \tag{4.114}$$

te je veza između korekcije brzine na stranicama konačnih volumena i korekcije tlaka:

$$v'_{\mathrm{n}} = - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \frac{p'_{\mathrm{N}} - p'_{\mathrm{C}}}{2s} , \tag{4.115}$$

odnosno, korigirana brzina na stranicama konačnih volumena je:

$$v_{\mathrm{n}} = v^*_{\mathrm{n}} - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \frac{p'_{\mathrm{N}} - p'_{\mathrm{C}}}{2s} , \tag{4.116}$$

gdje se $\overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)}$ interpolira prema izrazu (4.47).

Uvrštavanjem korigiranih brzina prema izrazu (4.116) u jednadžbu kontinuiteta (4.106) dobije se:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\rho \left(v^*_{\mathrm{n}} - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \frac{p'_{\mathrm{N}} - p'_{\mathrm{C}}}{2s} \right) \Delta A \right]^k = 0 , \tag{4.117}$$

odnosno drukčije zapisano:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\rho \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \frac{\Delta A}{2s} \right]^k p'_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[\rho \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}} \right)} \frac{\Delta A}{2s} p'_{\mathrm{N}} \right]^k = - \sum_{k=1}^{m} \left[\rho v^*_{\mathrm{n}} \Delta A \right]^k . \tag{4.118}$$

Iz izraza (4.118) slijedi jednadžba korekcije tlaka u diskretiziranom obliku:

$$a^p_{\mathrm{C}} p'_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[a^p_{\mathrm{N}} p'_{\mathrm{N}} \right]^k = b^{p'} . \tag{4.119}$$

gdje su uvedene sljedeće oznake

$$F^* = \rho v_{\mathrm{n}}^* \Delta A\,, \tag{4.120}$$

$$b^{p'} = -\sum_{k=1}^{m}\left[F^*\right]^k\,, \tag{4.121}$$

$$a_{\mathrm{N}}^p = \rho\overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}\right)}\frac{\Delta A}{2s} \text{ i} \tag{4.122}$$

$$a_{\mathrm{C}}^p = \sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}^p\right]^k\,, \tag{4.123}$$

gdje je F^* maseni protok kroz stranicu konačnog volumena definiran preko brzine v_{n}^*, $b^{p'}$ je slobodni član u jednadžbi korekcije tlaka, a_{C}^p i a_{N}^p su koeficijenti u jednadžbi korekcije tlaka koji su vezani uz korekcije tlaka u centralnom i susjednim čvorovima.

Zbog zanemarivanja drugog člana na lijevoj strani jednadžbe (4.112) dolazi do precjenjivanja promjene tlaka, pa se zbog toga samo dio izračunate korekcije dodaje tlaku u odgovarajućem čvoru:

$$p_{\mathrm{C}} = p_{\mathrm{C}}^* + \alpha_p p_{\mathrm{C}}'\,, \tag{4.124}$$

gdje je α_p faktor podrelaksacije tlaka.

Uz korekciju tlaka, vrši se i korekcija brzina na stranicama konačnog volumena u smjeru normale, prema izrazu (4.116), odnosno masenih protoka kroz stranice:

$$F = \rho v_{\mathrm{n}}\Delta A = \rho\left(v_{\mathrm{n}}^* - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}\right)}\frac{p_{\mathrm{N}}' - p_{\mathrm{C}}'}{2s}\right)\Delta A = F^* - a_{\mathrm{N}}^p\left(p_{\mathrm{N}}' - p_{\mathrm{C}}'\right). \tag{4.125}$$

Izraz za korekciju brzine u glavnim čvorovima se dobije krenuvši od jednadžbe količine gibanja u smjeru osi x i y u diskretiziranom obliku Ovdje će se pokazati postupak dobivanja izraza za korekciju komponente brzine u_{C} u smjeru osi x. Jednadžba količine gibanja u smjeru osi x u diskretiziranom obliku je:

$$a_{\mathrm{C}}u_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}}\right]^k = \tilde{b}^u - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}} V\,. \tag{4.126}$$

Uz pretpostavljeno polje tlaka p^*, jednadžba količine gibanja u smjeru osi x daje brzinu u^* tako da važi:

$$a_{\mathrm{C}}u_{\mathrm{C}}^* - \sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}}^*\right]^k = \tilde{b}^u - \left.\frac{\partial p^*}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}} V\,. \tag{4.127}$$

Uvrštavanjem izraza (4.111) u jednadžbu (4.126) i oduzimanjem od jednadžbe (4.127) dobije se izraz:

$$a_{\mathrm{C}}u'_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}u'_{\mathrm{N}}\right]^{k} = -\left.\frac{\partial p'}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}} V\,, \tag{4.128}$$

iz kojeg se uz zanemarivanje člana $\sum_{k=1}^{m}\left[a_{\mathrm{N}}u'_{\mathrm{N}}\right]^{k}$ dobije korekcija brzine u čvoru C:

$$u'_{\mathrm{C}} = -\frac{V}{a_{\mathrm{C}}}\left.\frac{\partial p'}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}}, \tag{4.129}$$

pa se korigirana brzina u smjeru osi *x* u čvoru C izračunava prema izrazu:

$$u_{\mathrm{C}} = u^{*}_{\mathrm{C}} - \frac{V}{a_{\mathrm{C}}}\left.\frac{\partial p'}{\partial x}\right|_{\mathrm{C}}. \tag{4.130}$$

Sličan izraz se dobije i za brzinu u smjeru osi *y* u čvoru C. Ovdje se gradijent korekcije tlaka računa po istim izrazima kao i gradijent tlaka.

Rubni uvjeti za jednadžbu korekcije tlaka

Jednadžba korekcije tlaka se izvodi iz diskretiziranih jednadžbi kontinuiteta i količine gibanja. Kada je zadan maseni protok na ulazu, korekcija masenog protoka u jednadžbi za korekciju tlaka je jednaka nuli na tom rubu.

Rješavanjem jednadžbi količine gibanja dobiju se brzine u unutarnjim čvorovima. Kada je izlazni rub daleko od promatranog područja i kada je Reynoldsov broj velik može se izvršiti ekstrapolacija brzina na izlaz pri čemu je derivacija u smjeru normale jednak nuli. Ekstrapolirane brzine se tada korigiraju kako bi se zadovoljila jednadžba kontinuiteta za globalni kontrolni volumen, tako da ukupni izlazni maseni protok bude jednak ulaznom, što se ne može garantirati niti jednom ekstrapolacijom. Korigirane brzine sada predstavljaju početnu pretpostavku za sljedeću vanjsku iteraciju, a korekcija masenog protoka na izlazu se izjednačava s nulom u jednadžbi kontinuiteta.

Maseni protoci kroz čvrstu nepropusnu stijenku i kroz ravninu simetrije su jednaki nuli, pa je i na tim rubovima korekcija masenog protoka u jednadžbi za korekciju tlaka jednaka nuli.

Ovo dovodi do jednadžbe korekcije tlaka s Neumannovim uvjetima na svim rubovima, što znači da je derivacija korekcije tlaka u smjeru normale na rub jednaka nuli, te je ona u tom slučaju singularna. Ovi uvjeti bi se trebali direktno ugraditi u jednadžbu kontinuiteta kada se izvodi jednadžba za korekciju tlaka. Kako bi se dobilo jedinstveno rješenje, obično se fiksira vrijednost tlaka u jednoj točki, tako da se korekcija tlaka izračunata u toj točki oduzme od svih korekcija tlaka. Druga mogućnost je da se srednja vrijednost tlaka izjednači s nekom konstantnom vrijednosti, npr. s nulom.

Definiranjem jednadžbe korekcije tlaka moguće je sustav jednadžbi usvojenog matematičkog modela rješavati sekvencijalno jednadžbu po jednadžbu, prema algoritmu SIMPLE, Patankar i Spalding 1972 [66], koji se sastoji od sljedećih koraka:

1. Na početku se pretpostavljaju vrijednosti polja tlaka p^* i svih varijabli potrebnih za računanje koeficijenata za jednadžbu količine gibanja u diskretiziranom obliku (masenih protoka i difuzijskih vodljivosti). Kod nestacionarnog problema je potrebno zadati početne uvjete, tj. vrijednosti svih varijabli u svim čvorovima u početnom vremenskom trenutku, a u svakom sljedećem vremenskom trenutku, kao početna pretpostavka se koristi rješenje iz prethodnog vremenskog trenutka.

2. Izračunaju se koeficijenti za komponente jednadžbe količine gibanja u smjeru osi x i y, te se rješavanjem nastalih sustava linearnih algebarskih jednadžbi izračunaju komponente brzine u^* i v^*.

3. Izračunaju se koeficijenti jednadžbe korekcije tlaka, te se nakon dobivanja p', korigiraju tlak p, komponente brzine u i v i maseni protoci F tako da zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta. Međutim, nove vrijednosti brzine više ne zadovoljavaju jednadžbu količine gibanja.

4. Ako strujanje nije izotermno, izračunaju se koeficijenti temperaturne jednadžbe u diskretiziranom obliku, te se njenim rješavanjem dobije novo polje temperature T.

5. Ako je strujanje turbulentno, izračunaju se koeficijenti i rješavaju jednadžbe kinetičke energije turbulencije k i njene disipacije ε.

6. Izračuna se turbulentna dinamička viskoznost μ_t.

7. Izračunaju se reziduali svih jednadžbi i uspoređuju s kriterijem konvergencije. Ako bilo koji rezidual ne zadovoljava kriterij konvergencije započinje nova vanjska iterativna petlja od koraka 2. Inače iterativni postupak završava.

4.7.2 Algoritam SIMPLER

Polazeći od izraza (4.45) za brzinu na stranici konačnog volumena, može se napisati izraz za maseni protok koji glasi:

$$F = \rho \overline{v_{\mathrm{n}}} \Delta A - a_{\mathrm{N}}^{p} \left[p_{\mathrm{N}} - p_{\mathrm{C}} - \left(\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{N}} + \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{C}} \right) s \right], \tag{4.131}$$

gdje je a_{N}^{p} koeficijent u jednadžbi korekcije tlaka kao što je definirano u izrazu (4.123). Gornji izraz se može napisati i u obliku:

$$F = \hat{F} - a_{\mathrm{N}}^{p} \left(p_{\mathrm{N}} - p_{\mathrm{C}} \right), \tag{4.132}$$

gdje je:

$$\hat{F} = \rho \overline{v_{\mathrm{n}}} \Delta A + a_{\mathrm{N}}^{p} \left(\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{N}} + \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{C}} \right) s \,. \tag{4.133}$$

Usmjerene derivacije tlaka $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{C}}$ i $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{N}}$ mogu se formalno izraziti iz jednadžbe količine gibanja projicirane u smjeru normale, npr. za čvor C:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{C}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}} v_{n.\mathrm{N}} \right]^{k} + \tilde{b}_{n} - a_{\mathrm{C}} v_{\mathrm{n.C}}}{V_{\mathrm{C}}} \,. \tag{4.134}$$

U stvarnosti bi se u čvorovima C i N izračunale komponente gradijenta tlaka u smjerovima x i y iz kojih bi se izračunale usmjerene derivacije $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{C}}$ i $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\mathrm{N}}$. U svakom slučaju se može tvrditi da $\hat{F}$ ne ovisi o polju tlaka. Uvrštavanjem jednadžbe (4.132) u jednadžbu kontinuiteta u diskretiziranom obliku (4.106) slijedi jednadžba tlaka koja je istog oblika kao i jednadžba korekcije tlaka:

$$a_{\mathrm{C}}^{p} p_{\mathrm{C}} - \sum_{k=1}^{m} \left[a_{\mathrm{N}}^{p} p_{\mathrm{N}} \right]^{k} = b^{p} \,, \tag{4.135}$$

gdje je b^{p} definiran preko protoka $\hat{F}$:

$$b^{p} = -\sum_{k=1}^{m} \left[\hat{F} \right]^{k} \,. \tag{4.136}$$

Rubni uvjeti za jednadžbu tlaka

Kod rubnih uvjeta tipa ulazni rub, ravnina simetrije i čvrsta nepropusna stijenka protok F kroz rub je unaprijed zadan. Na izlaznom rubu se prije rješavanja jednadžbe tlaka maseni protoci korigiraju s ciljem zadovoljavanja jednadžbe kontinuiteta za globalni kontrolni volumen, kao što je rečeno u opisu rubnih uvjeta za jednadžbu korekcije tlaka. Dakle, ako se pri rješavanju jednadžbe tlaka uzmu tako korigirani protoci, oni se također mogu smatrati poznatima. Ako je maseni protok poznat onda se u jednadžbi (4.132) može uzeti da je $\hat{F} = F^{\text{zadano}}$ i $a_{\mathrm{N}}^{p} = 0$, te su na taj način svi koeficijenti jednadžbe tlaka prema čvorovima na rubu jednaki nuli, što znači da vrijednosti tlaka na rubu ne utječu na rješenje polja tlaka. Za potreba izračunavanja sile tlaka po rubu vrši se ekstrapolacija tlaka iz vrijednosti u unutarnjim čvorovima.

Algoritam SIMPLER, Patankar 1981 [68], sastoji se od sljedećih koraka:

1. Pretpostave se komponente brzine u i v.

2. Izračunaju se koeficijenti za komponente jednadžbe količine gibanja u smjeru osi *x* i *y* iz kojih se izračunaju komponente gradijenta tlaka $\frac{\partial p}{\partial x}$ i $\frac{\partial p}{\partial y}$, na temelju kojih se izračunaju maseni protoci $\hat{F}$.
3. Riješi se jednadžba tlaka, te se izračunaju novi maseni protoci $F_{\mathrm{n}} = \hat{F}_{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{N}}^{p}\left(p_{\mathrm{N}} - p_{\mathrm{C}}\right)$ kroz sve stranice konačnih volumena unutar područja strujanja.
4. Izračunaju se komponente gradijenta polja tlaka iz vrijednosti tlaka u glavnim čvorovima, te se riješe komponente jednadžbe količine gibanja u smjeru osi *x* i *y*.
5. Riješi se jednadžba korekcije tlaka, te se na temelju korekcije tlaka korigiraju maseni protoci F i komponente brzine u čvoru. Važno je napomenuti da se polje tlaka ne korigira.
6. Ako strujanje nije izotermno, izračunaju se koeficijenti temperaturne jednadžbe u diskretiziranom obliku, te se njenim rješavanjem dobije novo polje temperature *T*.
7. Ako je strujanje turbulentno, izračunaju se koeficijenti i rješavaju jednadžbe kinetičke energije turbulencije *k* i njene disipacije ε.
8. Izračuna se turbulentna dinamička viskoznost μ_t.
9. Izračunaju se reziduali svih jednadžbi i uspoređuju s kriterijem konvergencije. Ako bilo koji rezidual ne zadovoljava kriterij konvergencije započinje nova vanjska iterativna petlja od koraka 2. Inače iterativni postupak završava.

U algoritmu SIMPLER rješava se jedna jednadžba više nego u algoritmu SIMPLE (jednadžba tlaka), ali se sukladno iskustvima s ovim algoritmom na pomaknutoj mreži očekuje manji broj iteracija, čime to dodatno rješavanje postaje isplativo. Algoritam SIMPLER na nepomaknutoj mreži je moguće definirati zbog ortogonalnosti mreže, jer bi se kod neortogonalne mreže pri računanju normalne derivacije tlaka pojavile i vrijednosti tlaka u drugim okolnih čvorovima, što bi vodilo neefikasnom algoritmu.

4.8 POSEBNOSTI METODE KONAČNIH VOLUMENA U PROGRAMU CAFFA

Računalni program CAFFA autora M. Perića koji služi za usporedbu s vlastito razvijenim programom dostupan je na Internet adresi ftp.springer.de. Ovaj program je izabran jer je dana otvorena verzija programa, te se točno mogu vidjeti svi detalji programa, što je osnovna pretpostavka za znanstvenu usporedbu rezultata, a s druge strane je poznat u znanstvenim krugovima i uživa određenu popularnost. S obzirom da je numerički postupak korišten u programu CAFFA detaljno opisan u knjizi, Ferziger i Perić [21], ovdje će se dati samo njegov kratki opis. U metodi se koristi strukturirana opća neortogonalna geometrijska mreža pri čemu se komponente brzine i sve skalarne veličine računaju u istim čvorovima (collocated grid). Za povezivanje polja brzine i

tlaka korišten je algoritam SIMPLE, Patankar 1980 [67]. Za diskretizaciju konvekcijskih protoka korištena je kombinacija uzvodne sheme diferencije i sheme centralne diferencije.

4.8.1 Osnovni podaci o geometrijskoj mreži

Kao što je rečeno, u radu se koristi strukturirana geometrijska mreža s četverostranim elementima. Područje proračuna se dijeli na određeni broj nepreklapajućih konačnih volumena tako da u svakom zamišljenom retku ili stupcu ima isti broj volumena. Čvorovi u kojima se računaju vrijednosti fizikalnih veličina smješteni su u geometrijska središta (presjecišta spojnica polovišta nasuprotnih stranica konačnog volumena) i u polovišta stranica konačnih volumena koje se poklapaju s rubom područja proračuna. Na taj način je broj čvorova u smjeru pojedine osi za dva veći od broja konačnih volumena. Položaj svakog čvora određen je parom koordinata $(x, y) \equiv (x_1, x_2)$ odnosno parom indeksa (i, j).

Slika 4.2 prikazuje tipični konačni volumen s lokalnim oznakama čvorova, gdje se centralni čvor promatranog volumena označava sa P, a čvorovi susjednih konačnih volumena u skladu s kompasnom notacijom s E, N, W i S. Polovišta stranica konačnog volumena označena su pripadajućim malim slovima, a vrhovi konačnog volumena kombinacijom slova onih stranica koje se u promatranom vrhu sijeku. Sve geometrijske karakteristike konačnog volumena računaju se iz koordinata vrhova. Tako bi na primjer veličina površine ΔA_{e} bila jednaka:

$$\Delta A_{\mathrm{e}} = \sqrt{\left(x_{\mathrm{ne}} - x_{\mathrm{se}}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{ne}} - y_{\mathrm{se}}\right)^2} \,. \tag{4.137}$$

Umnožak vektora vanjske normale n_j površinom ΔA_{e} ima komponentu u smjeru osi x:

$$\Delta A_{\mathrm{e}} n_x = \left(y_{\mathrm{ne}} - y_{\mathrm{se}}\right) \tag{4.138}$$

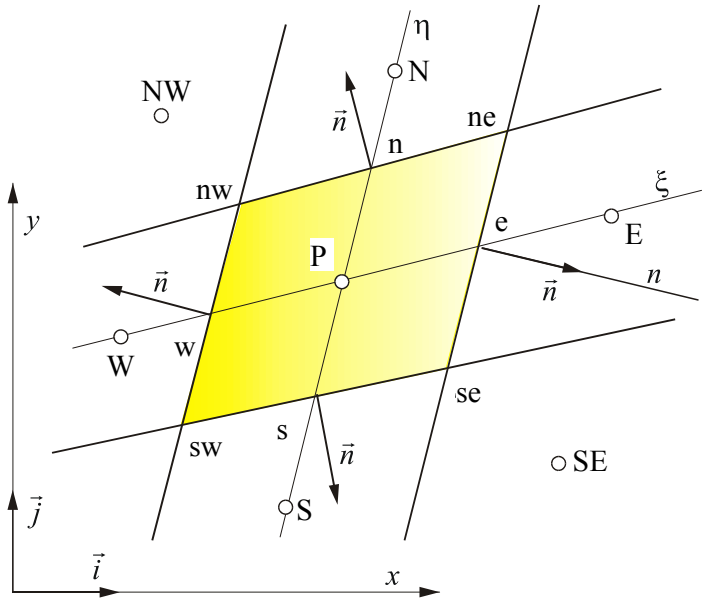
i u smjeru osi y:

$$\Delta A_{\mathrm{e}} n_y = -\left(x_{\mathrm{ne}} - x_{\mathrm{se}}\right). \tag{4.139}$$

Obujam konačnog volumena računa se za slučaj ravninskog strujanja prema izrazu

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}\big[&\left(x_{\mathrm{se}} - x_{\mathrm{ne}}\right)\left(y_{\mathrm{se}} + y_{\mathrm{ne}}\right) + \left(x_{\mathrm{sw}} - x_{\mathrm{se}}\right)\left(y_{\mathrm{sw}} + y_{\mathrm{se}}\right) + \\ &+ \left(x_{\mathrm{nw}} - x_{\mathrm{sw}}\right)\left(y_{\mathrm{nw}} + y_{\mathrm{sw}}\right) + \left(x_{\mathrm{ne}} - x_{\mathrm{nw}}\right)\left(y_{\mathrm{ne}} + y_{\mathrm{nw}}\right)\big] \end{aligned}, \tag{4.140}$$

gdje su kombinacijama malih slova se, ne, nw i sw označena četiri vrha konačnog volumena poredana u smjeru kazaljke na satu.



Slika 4.2 Tipični konačni volumen geometrijske mreže za program CAFFA

4.8.2 Diskretizacija jednadžbi matematičkog modela

Prvi korak u metodi konačnih volumena je integracija konzervativnih oblika jednadžbi matematičkog modela po konačnom volumenu s centralnim čvorom P, čiji je položaj određen indeksima (i, j). Principi te integracije su potpuno istovjetni onima primijenjenim u poglavlju 4.2 gdje je opisana diskretizacija opće konvekcijsko difuzijske jednadžbe po konačnom volumenu nestrukturirane mreže. Nakon integracije preostale derivacije, odnosno vrijednosti nepoznanica na stranicama konačnog volumena definiraju se uz pomoć sheme diferencije, te se dobije algebarska jednadžba u kojoj se svi nelinearni članovi linearizirаju. Postupajući tako za sve konačne volumene unutar područja proračuna dobije se sustav linearnih algebarskih jednadžbi u koje je još potrebno ugraditi rubne uvjete. Sustav linearnih algebarskih jednadžbi u ovom slučaju ima pravilnu (petdijagonalnu) matricu sustava, a rješava se pomoću SIP metode, Stone [91].

U nastavku su dani samo detalji vezani uz shemu diferencije, budući da se u općem slučaju ovdje radi o neortogonalnoj mreži, pa postoje razlike u odnosu na prije opisani slučaj lokalno ortogonalne nestrukturirane mreže, dok su postupci diskretizacije lokalnih članova, linearizacije izvorskih članova i metoda podrelaksacije ostali potpuno isti. Za povezivanje polja brzine i tlaka koristi se algoritam SIMPLE koji je istovjetan već opisanom algoritmu na nestrukturiranoj ortogonalnoj mreži. Postoje samo male razlike u izvodu jednadžbe za tlak, koje će ovdje biti opisane.

4.8.3 Uzvodna shema i shema centralne diferencije

Integracijom opće konvekcijsko difuzijske jednadžbe slijedi izraz za protok fizikalnog svojstva Φ, koji je za stranicu između čvorova P i E oblika:

$$J_{\mathrm{e}} = F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}} - \Gamma_{\mathrm{e}} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{e}} \Delta A_{\mathrm{e}}, \tag{4.141}$$

gdje prvi član desne strane označava konvekcijski dio protoka, a drugi difuzijski dio. U programu CAFFA koriste se uzvodna shema diferencije (Upwind Differencing Sheme – UDS, Bier i Ris [7]) i shema centralne diferencije (Central Differencing Sheme – CDS, Bier i Ris [7]), odnosno njihova kombinacija (definirana faktorom miješanja tih dviju shema). Konvekcijski dio protoka u uzvodnoj shemi diferencije definiran je, npr. za stranicu između čvorova P i E, izrazom:

$$\left(F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{UDS}} = \begin{cases} F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{P}} & \text{za} \quad F_{\mathrm{e}} > 0 \\ F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{E}} & \text{za} \quad F_{\mathrm{e}} < 0 \end{cases}. \tag{4.142}$$

Prema shemi centralne diferencije, taj bi protok bio:

$$\left(F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{CDS}} = F_{\mathrm{e}}\left[f_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{E}} + \left(1-f_{\mathrm{e}}\right)\Phi_{\mathrm{P}}\right], \tag{4.143}$$

gdje je $f_{\mathrm{e}} = \dfrac{\overline{\mathrm{Pe}}}{\overline{\overline{\mathrm{PE}}}}$ faktor linearne interpolacije između čvorova P i E.

Konvekcijski protok je u programu CAFFA općenito definiran kombinacijom ovih dviju shema:

$$F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}} = \gamma_{\mathrm{s}}\left(F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{CDS}} + \left(1-\gamma_{\mathrm{s}}\right)\left(F_{\mathrm{e}}\Phi_{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{UDS}}, \tag{4.144}$$

gdje je γ_{s} faktor miješanja shema diferencije. Očito da se za $\gamma_{\mathrm{s}} = 1$ dobiva shema centralne diferencije, a za $\gamma_{\mathrm{s}} = 0$ uzvodna shema. Kod same primjene gornjeg izraza koristi se „deffered correction" pristup po kojem se kroz koeficijente diskretizirane jednadžbe uvijek uzima puna vrijednost konvekcijskog protoka prema uzvodnoj shemi, a ostatak se obračunava kroz slobodni član *b* desne strane diskretizirane jednadžbe s vrijednostima varijabli u čvorovima iz prethodne iteracije.

Difuzijski dio protoka je u obje sheme definiran izrazom:

$$\Gamma_{\mathrm{e}} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\mathrm{e}} \Delta A_{\mathrm{e}} = \Gamma_{\mathrm{e}}\Delta A_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{\mathrm{e}} + \Gamma_{\mathrm{e}}\Delta A_{\mathrm{e}}\left[\overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)}_{\mathrm{e}} - \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)}_{\mathrm{e}}\right], \tag{4.145}$$

gdje je ξ smjer koji se poklapa sa spojnicom čvorova PE prema slici 4.2 i u općem slučaju je različit od smjera normale. Prvi član desne strane gornjeg izraza se direktno diskretizira, a članovi u uglatoj zagradi se dobiju linearnom interpolacijom iz gradijenata Φ u glavnim čvorovima. Ti se gradijenti računaju pomoću Gaussovog teorema. Razlika članova u uglatoj zagradi se računa s vrijednostima gradijenata iz prethodne iteracije, što usporava konvergenciju numeričkog postupka. Za slučaj

ortogonalne mreže ta je razlika jednaka nuli, pa je to jedan od razloga zašto se pri prijedlogu vlastite metode zahtijevala ortogonalnost stranice konačnog volumena i spojnice odgovarajućih susjednih čvorova.

4.8.4 Algoritam SIMPLE u programu CAFFA

U programu CAFFA se za povezivanje polja brzine i tlaka koristi algoritam SIMPLE u kojemu se rješava jednadžba za korekciju tlaka. Prema interpolaciji, Rhie i Chow 1983 [78], normalna komponenta brzine na stranici između čvorova P i E je analogno izrazu (4.45):

$$v_{\mathrm{n.e}} = \overline{v_{\mathrm{n.e}}} - \overline{\left(\frac{V_{\mathrm{e}}}{a_{\mathrm{P}}}\right)_{\mathrm{e}}}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\mathrm{e}} - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\mathrm{e}}}\right], \tag{4.146}$$

gdje se veličine s horizontalnom crtom iznad oznake dobivaju linearnom interpolacijom iz vrijednosti u glavnim čvorovima. Za slučaj ortogonalne mreže smjer normale se poklapa sa smjerom spojnice čvorova P i E, te se član $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\mathrm{e}}$ jednostavno diskretizira. Za slučaj neortogonalne mreže ta dva smjera se ne poklapaju te se za diskretizaciju člana $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\mathrm{e}}$ moraju koristiti i gradijenti tlaka u čvorovima P i E i to iz prethodne iteracije, kao i u izrazu za difuzijski protok. Kad se radi o izrazu za korekciju brzina, članovi koji definiraju razliku derivacija $\left(\frac{\partial p'}{\partial n}\right)_{\mathrm{e}} - \left(\frac{\partial p'}{\partial \xi}\right)_{\mathrm{e}}$ se zanemaruju, te se može očekivati da će zbog toga numerički postupak sporije konvergirati. To je drugi razlog zašto se u vlastitoj metodi zahtijevala ortogonalnost mreže.

Svi ostali aspekti numeričke metode ugrađene u program CAFFA, počevši od linearizacije izvorskih članova u k i ε jednadžbi do ugradnje rubnih uvjeta, podrelaksacije i sl. su isti kao u vlastitom programu.

5 REZULTATI I DISKUSIJA

5.1 UVOD

Računalni program razvijen u okviru ovog rada, s predloženim varijantama metode konačnih volumena na lokalno ortogonalnoj nestrukturiranoj mreži uz primjenu algoritama SIMPLE i SIMPLER uspoređuje se s javno objavljenim programom CAFFA, autora M. Perića u smislu brzine konvergencije i točnosti rezultata.

Program CAFFA se temelji na metodi konačnih volumena na strukturiranoj neortogonalnoj mreži uz primjenu algoritma SIMPLE, a u njemu su ugrađene uzvodna shema diferencije, koja je prvog reda točnosti, i shema centralne diferencije koja je drugog reda točnosti. Za slučaj dominantnog konvektivnog transporta shema centralne diferencije uzrokuje nestabilnost i divergenciju numeričkog postupka, pa se u tom slučaju kombiniraju uzvodna i shema centralne diferencije, pri čemu se koristi „deffered correction" strategija. Difuzijski članovi koji potječu od neortogonalnosti mreže tretiraju se eksplicitno kroz izvorski član (korištenjem vrijednosti nepoznanica u čvorovima iz prethodne iteracije), a u jednadžbi za korekciju tlaka su takvi članovi zanemareni.

U vlastitom programu su također ugrađene uzvodna shema i shema centralne diferencije koje se mogu kombinirati na isti način kao i u programu CAFFA, te eksponencijalna shema i unaprijeđena eksponencijalna shema, koja je drugog reda točnosti. U varijantama metode konačnih volumena na lokalno ortogonalnoj nestrukturiranoj mreži nema članova zbog neortogonalnosti mreže, pa se očekuje da će numerički postupak brže konvergirati nego numerički postupak u programu CAFFA koji se primjenjuje na neortogonalnoj mreži. Zbog neortogonalnosti mreže nema potrebe za modeliranjem dodatnih članova, a pored toga stranica konačnog volumena uvijek dijeli spojnicu njoj susjednih čvorova na dva jednaka dijela, što osigurava veću točnost diskretizacije jednadžbi, pa se može očekivati da će i rezultati vlastite metode uz primjenu geometrijske mreže iste gustoće i iste sheme diferencije biti točniji od rezultata programa CAFFA.

Na brzinu konvergencije numeričkog postupka osim faktora podrelaksacije utječe još i:

- fizikalni model strujanja (potencijalno, laminarno ili turbulentno strujanje),
- gustoća geometrijske mreže odnosno broj konačnih volumena, strukturiranost mreže, neortogonalnost mreže, neravnomjernost mreže,
- vrsta rubnih uvjeta: Cauchyevi, Neumanovi ili mješoviti rubni uvjeti i
- shema diferencije.

Točnost rješenja je uglavnom funkcija gustoće geometrijske mreže i primijenjene sheme diferencije. Za usvojeni matematički model, točnost rezultata raste s povećanjem gustoće mreže i u pravilu s povećanjem reda točnosti sheme diferencije.

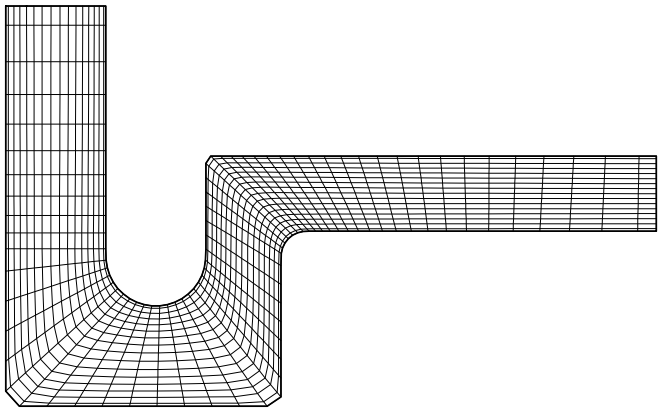
U nastavku se sustavno testira osnovna hipoteza rada, da će brzina konvergencije algoritma SIMPLE na nestrukturiranoj lokalno ortogonalnoj mreži biti veća nego na strukturiranoj neortogonalnoj mreži, te da će na takvoj mreži, uz primjenu iste sheme diferencije rezultati biti točniji. Uspoređuje se brzina konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER na nestrukturiranoj ortogonalnoj mreži (vlastiti program) s brzinom konvergencije algoritma SIMPLE na strukturiranoj mreži (program CAFFA). Pri tome se primjenjuje uzvodna shema diferencije radi izbjegavanja utjecaja „deffered correction" strategije koja se pojavljuje kod shema diferencije višeg reda. Istražuje se ovisnost brzine konvergencije o faktorima podrelaksacije. Pri rješavanju jednadžbi količine gibanja u algoritmu SIMPLE postoje faktori podrelaksacije za brzinu i tlak, a u algoritmu SIMPLER samo za brzinu. Za svaku se metodu određuje optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije pri kojoj je konvergencija numeričkog postupka najveća, mijenjajući faktor podrelaksacije brzine s korakom 0,05, a faktor podrelaksacije tlaka s korakom 0,1. Na kraju se uspoređuju brzine konvergencije triju metoda pri tako određenim optimalnim kombinacijama vrijednosti faktora podrelaksacije. Također se istražuje utjecaj neortogonalnosti mreže, gustoće mreže i sheme diferencije na brzinu konvergencije, a izabrani testovi su iz kategorije potencijalnog, laminarnog i turbulentnog strujanja. Pri rješavanju turbulentnog strujanja osim nelinearnosti jednadžbe količine gibanja postoji i nelinearnost jednadžbi modela turbulencije, pa se u tom slučaju analizirira brzina konvergencije jednadžbi modela turbulencije u odnosu na brzinu konvergencije sustava jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta.

U svim testovima koji slijede fizikalne veličine kojima nije navedena mjerna jedinica su bezdimenzijske, pri čemu nije bitno na koji način su svedene na bezdimenzijski oblik.

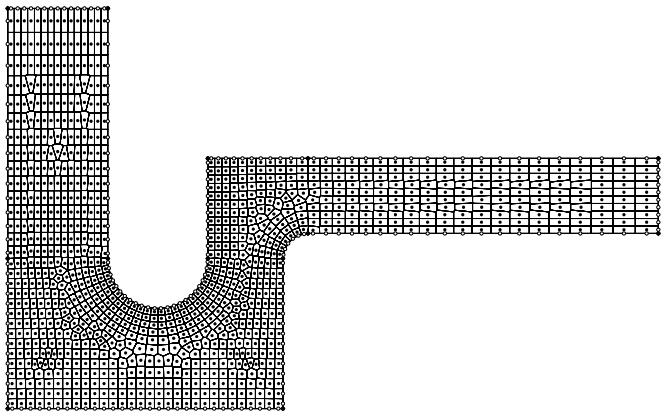
Test 1 – Provođenje topline u geometrijski složenom području

Utjecaj neortogonalnosti mreže može se dobro pokazati na primjeru provođenja topline u mirujućem kontinuumu konstantne gustoće i specifičnog toplinskog kapaciteta. Uz pretpostavku konstantne toplinske vodljivosti i za slučaj bez toplinskih izvora, ovo provođenje topline je opisano linearnom parcijalnom jednadžbom. Ta se jednadžba diskretizacijom prevodi u sustav linearnih algebarskih jednadžbi, čije se numeričko rješenje, bez podrelaksacije, dobije jednim rješavanjem, a točnost rješenja je određena točnošću rješavanja samog sustava. Naravno, ovo vrijedi kada se diskretizacija vrši na ortogonalnoj mreži, kod koje se toplinski tok, odnosno normalna derivacija temperature na stranici konačnog volumena računa samo iz vrijednosti temperatura u dva susjedna čvora koja leže na okomici na tu stranicu. Za slučaj neortogonalne mreže za diskretizaciju toplinskog toka kroz stranicu konačnog volumena potrebno je poznavati i derivaciju temperature u smjeru okomito na spojnicu dvaju čvorova. Budući da je ova derivacija nepoznata, sustav se rješava iterativno pri čemu se u tekućoj iteraciji koristi vrijednost derivacije izračunate preko vrijednosti temperature iz prethodne iteracije.

Analiza provođenja topline u mirujućem kontinuumu se vrši u području oblika zakrivljene trake s jednim zavojem od 180° i jednim od 90°, kao što je prikazano na slici 5.1. Očito je da se pri diskretizaciji područja proračuna takvog oblika strukturiranom mrežom ne može ostvariti ortogonalnost mreže u svim dijelovima područja. Slika 5.1 prikazuje mrežu linija koje povezuju čvorove u kojima se računa temperatura, pripremljenu za program CAFFA, a slika 5.2 oblike konačnih volumena i poziciju centralnih čvorova za vlastiti program. Prva mreža sadrži 1080, a druga 1059 konačnih volumena (KV). Gornji horizontalni rub tog područja se održava na niskoj temperaturi (izotermični rub s T = 0), a desni vertikalni rub je na visokoj temperaturi (izotermični rub s T = 400), dok je na ostalim stranicama kontinuum izoliran prema okolišu (ostali rubovi su adijabatski).

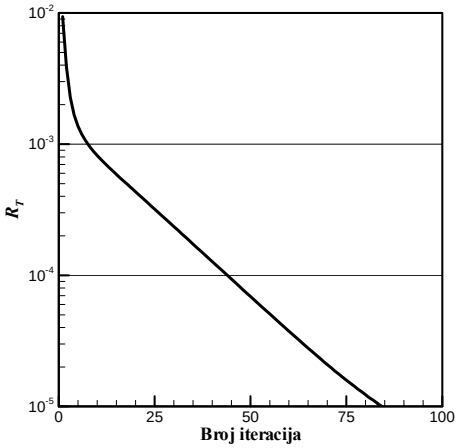


Slika 5.1 Test 1 – geometrijska mreža za program CAFFA

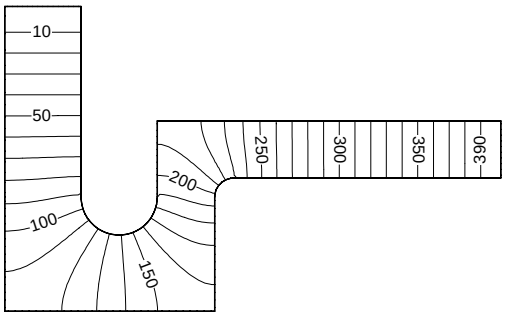


Slika 5.2 Test 1 – geometrijska mreža za vlastiti program

Problem je riješen programom CAFFA uz primjenu CDS sheme diferencije i uz faktor podrelaksacije temperature $\alpha_T = 0,99$ (numerički postupak je divergirao za slučaj $\alpha_T = 1$). Zbog eksplicitnog tretiranja članova koji su posljedica neortogonalnosti mreže rješenje se nužno dobiva iterativnim postupkom. Slika 5.3 prikazuje promjenu reziduala temperaturne jednadžbe s brojem iteracija (brzinu konvergencije). Iz slike je jasno da je za smanjivanje nenormiranih reziduala za tri reda veličine potrebno 85 iteracija. Vlastitim programom se, bez podrelaksacije, prema očekivanju rješenje dobije u jednoj iteraciji. Slika 5.4 prikazuje izračunate izoterme primjenom vlastitog programa koje odgovaraju izotermama izračunatim programom CAFFA.



Slika 5.3 Test 1 – brzina konvergencije temperaturne jednadžbe



Slika 5.4 Test 1 – izračunate izoterme

5.2 POTENCIJALNO STRUJANJE FLUIDA

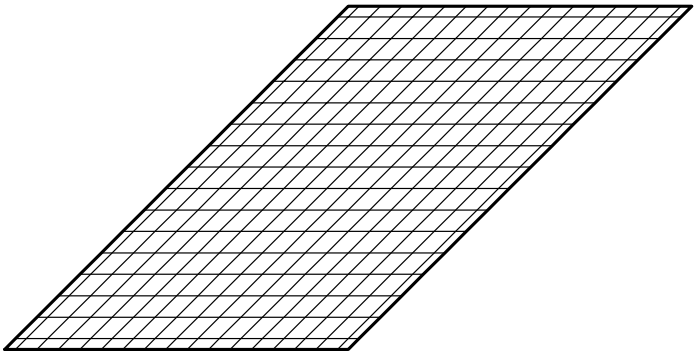
Cilj testiranja u uvjetima potencijalnog strujanja je ocjena utjecaja neortogonalnosti geometrijske mreže pri rješavanju sustava: jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe količine gibanja u uvjetima s poznatim rubnim uvjetima po svim rubovima i bez difuzije. Utjecaj neortogonalnosti mreže se pojavljuje samo u jednadžbi za korekciju tlaka. Naravno, problem potencijalnog strujanja se rješava bez pretpostavke o bezvrtložnom strujanju (rješavaju se Eulerove jednadžbe).

Test 2 – Potencijalno strujanje u pravom kutu

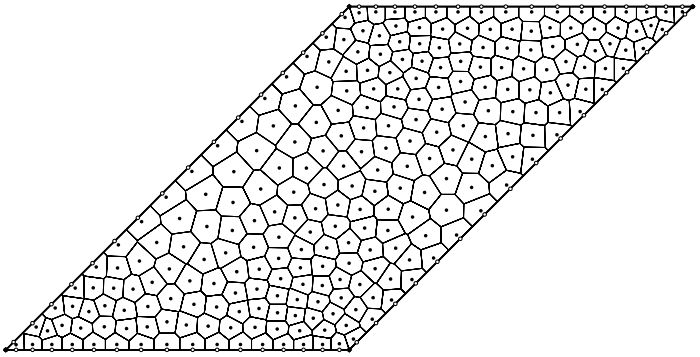
Analizira se potencijalno ravninsko strujanje fluida gustoće $\rho = 1$ u pravom kutu. Analitičko rješenje ovog strujanja za slučaj da se ishodište koordinatnog sustava poklapa s vrhom pravog kuta je definirano sljedećim izrazima: polje brzine $u = Cx$ i $v = -Cy$, a polje tlaka $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + v^2\right)$, gdje su C i p_0 proizvoljne konstante. U ovom testu je uzeto $C = 10$.

U cilju ocjene utjecaja neortogonalnosti mreže problem se rješava jednom u području oblika romboida kojemu je šiljasti kut 45° (gdje za program CAFFA nije moguće dobiti ortogonalnu mrežu), a drugi puta u području oblika kvadrata (slučaj ortogonalne mreže). Budući je poznato analitičko rješenje ovog problema, po svim će se rubovima područja proračuna specificirati točne vrijednosti polja brzine, tako da je utjecaj ugradnje rubnih uvjeta (misli se prvenstveno na izlazni rub) isključen. Ovaj će se test ujedno iskoristiti za ocjenu utjecaja gustoće mreže na brzinu konvergencije numeričkih postupaka. Za svaku će se mrežu pronaći optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije (kod kojih svaka pojedina metoda najbrže konvergira) mijenjajući faktor podrelaksacije brzine s korakom 0,05, a faktor podrelaksacije tlaka s korakom 0,1.

Na slici 5.5 je prikazano područje proračuna oblika romboida (horizontalna stranica i visina romboida su duljine 16) s geometrijskom mrežom za program CAFFA, a na slici 5.6 isto područje s konačnim volumenima i čvorovima za vlastiti program. Gornji horizontalni rub i donji lijevi vrh područja proračuna se nalaze na stranicama pravog kuta unutar kojeg se odvija potencijalno strujanje. Strukturirana mreža na slici 5.5 ima 16x16 KV, a nestrukturirana mreža na slici 5.6 ima 264 KV (u nastavku će se za te mreže koristiti oznaka M1). Za potrebe ocjene utjecaja gustoće mreže na brzinu konvergencije definirane su još dvije mreže: strukturirana mreža s 40x40 KV i ekvivalentna nestrukturirana s 1648 KV (oznaka M2), te strukturirana s 80x80 KV i ekvivalentna nestrukturirana s 6185 KV (oznaka M3). U cilju ocjene utjecaja neortogonalnosti izvršen je proračun na mreži kvadratnog oblika (duljine stranice kvadrata 16) s 40x40 KV (oznaka M2-O) koja je ista za sve metode.



Slika 5.5 Test 2 – područje proračuna i geometrijska mreža za program CAFFA



Slika 5.6 Test 2 – područje proračuna i geometrijska mreža za vlastiti program

Slike 5.7 do 5.10 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom računalnom programu na mreži M2. Brzina konvergencije se promatra kroz promjenu nenormiranog masenog reziduala s brojem iteracija. Kao kriterij je odabran maseni rezidual jer se pokazalo da se ovaj rezidual u pravilu najsporije smanjuje. Brzina konvergencije je prikazana u funkciji faktora podrelaksacije brzine α_{uv} (parametarske krivulje) pri čemu se svaki dijagram odnosi na konstantni faktor podrelaksacije tlaka α_p i to redom $\alpha_p = 0{,}1$, 0,4, 0,5 i 0,6. Iz dijagrama na slici 5.7 koji se odnosi na $\alpha_p = 0{,}1$ je očito da se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije. Pri ostalim faktorima podrelaksacije tlaka se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije, ali samo do određene vrijednosti nakon koje se brzina konvergencije smanjuje ili čak dolazi do divergencije numeričkog postupka. Na slici 5.9 se može uočiti da će maseni rezidual pasti na vrijednost ispod 10^{-6} (unaprijed zadana točnost) u najmanjem broju iteracija (ovdje 59) za kombinaciju vrijednosti faktora $\alpha_{uv} = 0{,}80$ i $\alpha_p = 0{,}5$ što će se za ovu metodu smatrati optimalnom kombinacijom vrijednosti faktora podrelaksacije. Iz slika 5.8 do 5.10 se također može uočiti da za $\alpha_{uv} = 0{,}75$ i za $\alpha_p = 0{,}4$ do 0,6 broj iteracija za postizanje zadane točnosti ne prelazi 70. Također je

jasno da se s povećanjem faktora α_p smanjuje vrijednost α_{uv} kod koje numerički postupak počinje divergirati.

Slike 5.11 do 5.13 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA na mreži M2 pri faktorima podrelaksacije tlaka $\alpha_p = 0,05$, 0,1 i 0,2. Iz navedenih slika je vidljivo da je ovisnost brzine konvergencije o faktoru α_{uv} slična kao u prethodnom slučaju s tim da je za konvergenciju numeričkog postupka potrebno držati niže vrijednosti faktora α_p. Budući da se radi o istom algoritmu, ovu potrebu za smanjivanjem faktora α_p se može objasniti neortogonalnošću mreže. Sa slike 5.12 se može očitati optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije $\alpha_{uv} = 0,35$ i $\alpha_p = 0,1$. Pri toj kombinaciji, potreban broj iteracija za postizanje zadane točnosti iznosi 309, što je puno veće nego u prethodnom slučaju. Ovo povećanje se može jedino objasniti neortogonalnošću mreže.

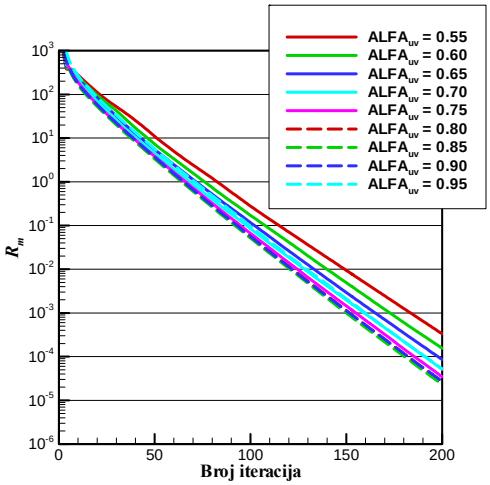
Slika 5.14 prikazuje brzinu konvergencije algoritma SIMPLER u vlastitom računalnom programu na mreži M2. U ovoj metodi je faktor α_p suvišan, pa su svi rezultati prikazani u jednom dijagramu. Ponovo se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije i najveća je za $\alpha_{uv} = 0,95$ (pri vrijednosti $\alpha_{uv} = 1$ metoda je divergirala, a vrijednosti između 0,95 i 1 nisu ispitivane). Zadana točnost postignuta je u 29 iteracija.

Na slikama 5.15 i 5.16 su prikazane brzine konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom programu uz optimalni faktor podrelaksacije tlaka $\alpha_p = 0,5$ i algoritma SIMPLE u programu CAFFA uz, također optimalni faktor podrelaksacije tlaka $\alpha_p = 0,1$ na mreži M3. Vidi se da i na ovoj mreži algoritam SIMPLE konvergira brže i pri većim faktorima podrelaksacije brzine, kao i na manjim mrežama.

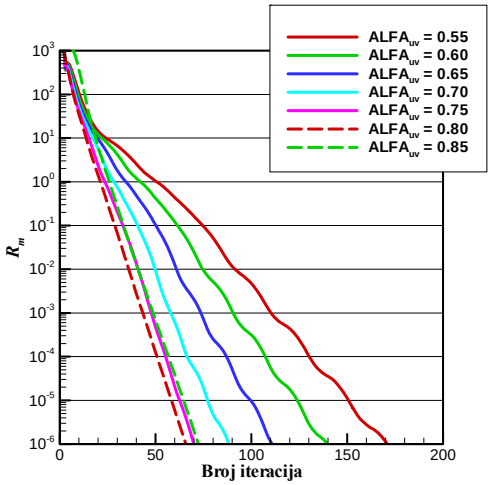
Na slici 5.17 je dana usporedba brzine konvergencije triju metoda pri proračunu ovog problema na dva područja, jedno oblika romboida (mreža M2) i drugo kvadratnog na mreži 40x40 KV (mreža M2-O). Ova slika jasno pokazuje utjecaj neortogonalnosti mreže na brzinu konvergencije jer je očito da će algoritam SIMPLE u programu CAFFA, uz ortogonalnu mrežu, konvergirati sličnom brzinom kao i algoritam SIMPLE u vlastitom programu.

Slike 5.18 do 5.20 pokazuju utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije redom algoritama SIMPLER, SIMPLE u vlastitom programu i programu CAFFA. Proračun je izvršen na mrežama M1, M2 i M3 uz optimalno određenu kombinaciju vrijednosti faktora podrelaksacije na mreži M2. Kod svih algoritama se s povećanjem gustoće mreže povećava potrebni broj iteracija za postizanje zadane točnosti. Kod svih metoda se broj potrebnih iteracija za postizanje zadane točnosti na mreži M3 dvostruko povećao u odnosu na broj iteracija na mreži M1.

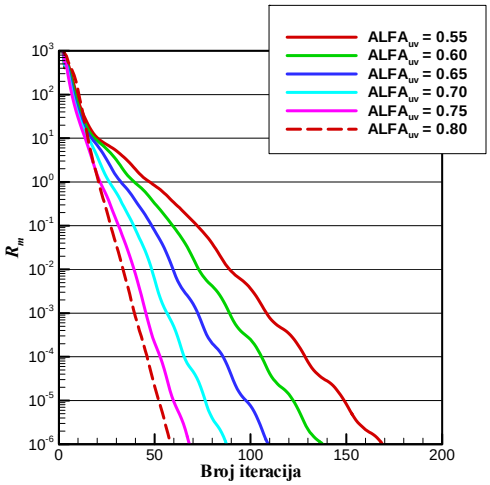
Tablica 5.1 prikazuje optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije triju metoda na svim mrežama. Očito je da je faktor podrelaksacije brzine za algoritam SIMPLER gotovo neosjetljiv na promjenu gustoće mreže (vrijednost $\alpha_{uv} = 0,9$ daje neznatno veću brzinu konvergencije u odnosu na vrijednost $\alpha_{uv} = 0,95$). Slično vrijedi i za faktore podrelaksacije u algoritmu SIMPLE, dok se optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije u programu CAFFA značajnije mijenjaju.



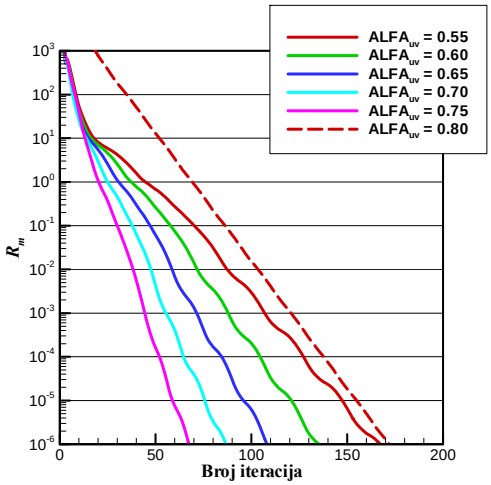
Slika 5.7 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,1$



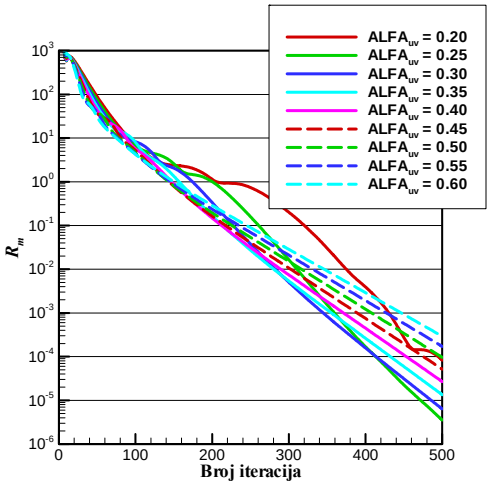
Slika 5.8 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,4$



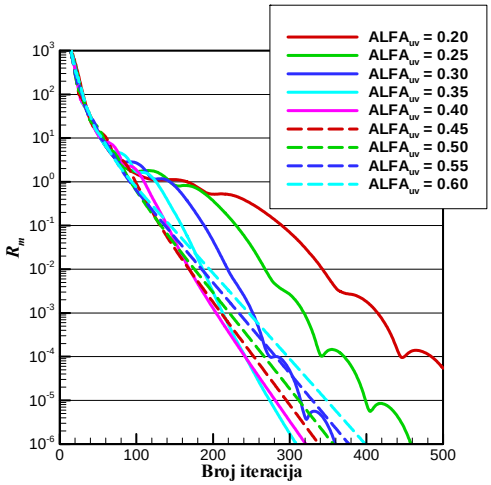
Slika 5.9 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,5$



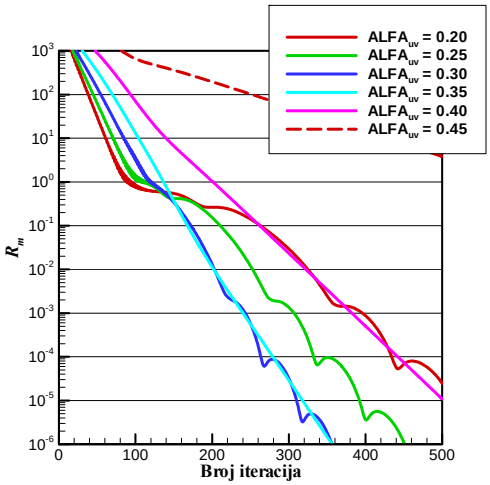
Slika 5.10 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M2 za $\alpha_p = 0,6$



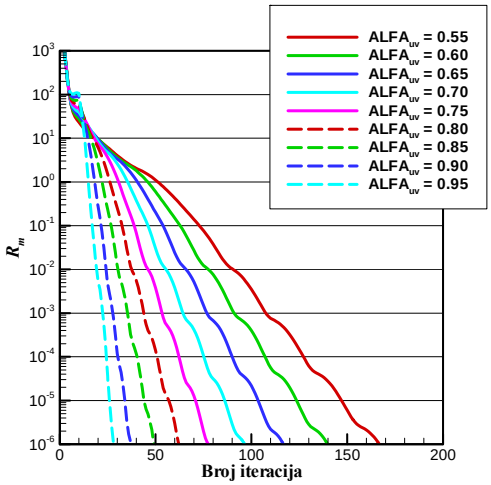
Slika 5.11 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,05$



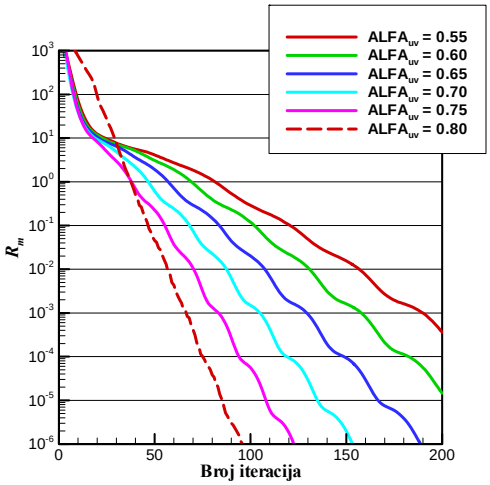
Slika 5.12 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,1$



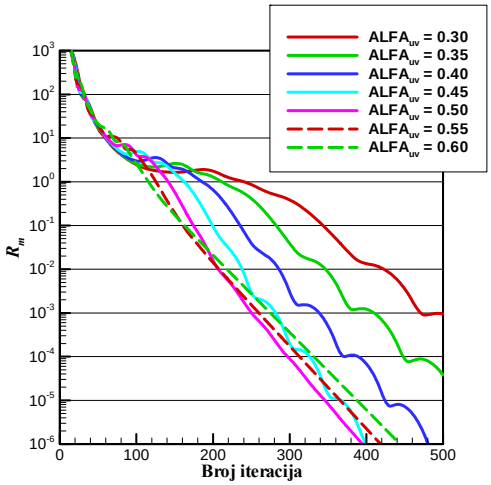
Slika 5.13 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M2 za $\alpha_p = 0,2$



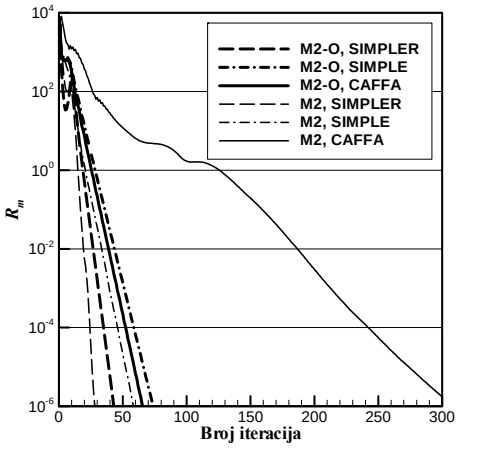
Slika 5.14 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER, mreža M2



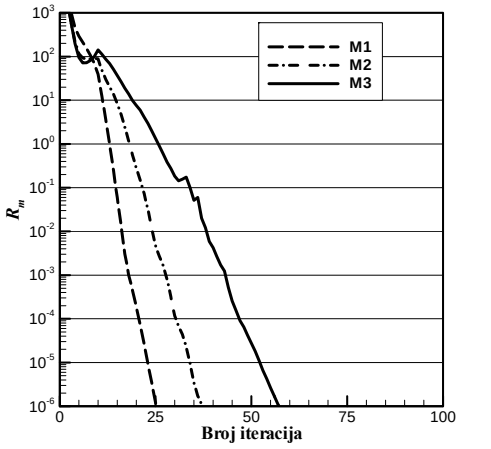
Slika 5.15 Test 2 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M3 za $\alpha_p = 0{,}5$



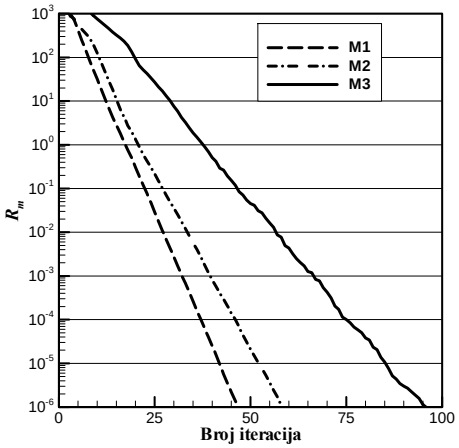
Slika 5.16 Test 2 – brzina konvergencije, program CAFFA, mreža M3 za $\alpha_p = 0{,}1$



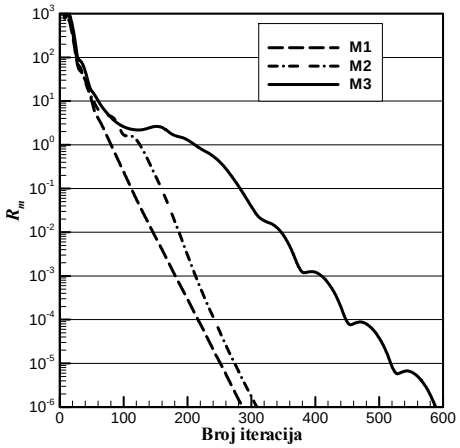
Slika 5.17 Test 2 – usporedba brzina konvergencije za mreže M2 i M2-O



Slika 5.18 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, algoritam SIMPLER



Slika 5.19 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, algoritam SIMPLE



Slika 5.20 Test 2 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije, program CAFFA

Tablica 5.1 Test 2 – optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije za različite mreže

Mreža	Metoda/Program	α_{uv}	α_p
M1 16x16 romboid	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,75	0,7
	CAFFA	0,30	0,2
M2 40x40 romboid	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,80	0,5
	CAFFA	0,35	0,1
M3 80x80 romboid	SIMPLER	0,90	-
	SIMPLE	0,80	0,5
	CAFFA	0,50	0,1
M2-O 40x40 kvadrat	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,80	0,5
	CAFFA	0,80	0,4

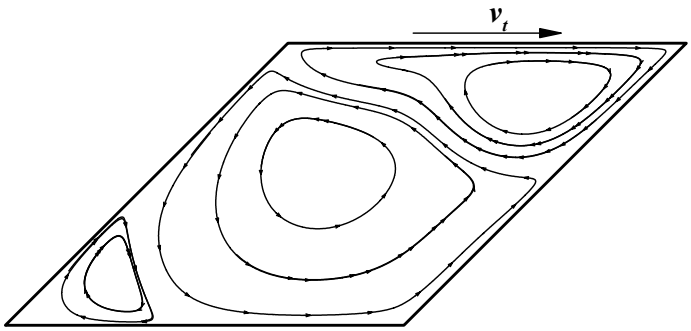
5.3 LAMINARNO STRUJANJE FLUIDA

U slučaju laminarnog strujanja se, za razliku od potencijalnog, pojavljuje i viskoznost fluida, što će imati utjecaja na brzinu konvergencije numeričkog postupka jer se u članovima s viskoznošću pojavljuje druga derivacija brzina što tim jednadžbama daje eliptički karakter. Eliptičnost problema rezultira jačom ovisnošću između vrijednosti varijabli u čvorovima (vrijednost u promatranom čvoru utječe na vrijednosti u svim okolnim čvorovima, a i ovisi o tim vrijednostima), pa se može očekivati i sporija konvergencija.

Test 3 – Laminarno strujanje u kosokutnoj šupljini s jednim pomičnim rubom

U ovom testu se računa ravninsko laminarno strujanje fluida u zatvorenoj posudi oblika romba čija se gornja ravna stijenka giba u tangencijalnom smjeru brzinom $v_t = 1$. Duljina stijenke romba je $a = 1$, a oštri kut je $\beta = 45°$. Karakteristika ovog testa je da su svi rubovi čvrste nepropusne stijenke što znači da nema ni ulaznih ni izlaznih rubova i da su komponente brzine zadane po svim rubovima područja. S obzirom da je u ovom testu fluid viskozan, odnosno da postoji difuzijski protok, slika strujanja ovisi o Reynoldsovom broju. Za izabranu visoku vrijednost Reynoldsovog broja u slici strujanja se pojavljuju tri vrtloga. S obzirom da za ovaj problem ne postoji analitičko rješenje, za ocjenu točnosti rezultata dobivenih vlastitim programom i programom CAFFA koristit će se rezultati dobiveni komercijalnim računalnim paketom FLUENT na vrlo finoj mreži (160x160 konačnih volumena). Slika 5.21 prikazuje strujnice opisanog strujanja kao rješenje dobiveno programom FLUENT.

Problem se rješava numerički na dvije različite mreže: strukturirana mreža s 40x40 KV (za program CAFFA) i njoj ekvivalentna nestrukturirana mreža s 1636 KV za vlastiti program (oznaka M1), te strukturirana mreža s 80x80 KV, odnosno ekvivalentna nestrukturirana mreža s 6403 KV (oznaka M2).



Slika 5.21 Test 3 – slika strujnica dobivena programom FLUENT na mreži 160x160 KV

Slike 5.22 do 5.25 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom računalnom programu na mreži M1 uz primjenu uzvodne sheme diferencije u funkciji faktora podrelaksacije brzine α_{uv} (parametarske krivulje), pri čemu se svaki dijagram odnosi na konstantni faktor podrelaksacije tlaka α_p i to redom $\alpha_p = 0,05$, 0,1, 0,2 i 0,5. Kao i u prethodnom slučaju (Test 2), za zadani faktor podrelaksacije tlaka se povećanjem faktora podrelaksacije brzine povećava brzina konvergencije, ali samo do određene vrijednosti nakon koje se brzina konvergencije smanjuje ili čak dolazi do divergencije numeričkog postupka. Što je α_p manji, to će vrijednost faktora α_{uv} kod koje dolazi do divergencije numeričkog postupka biti veća. Za promatrani slučaj se sa slike 5.23 može očitati optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije $\alpha_{uv} = 0,95$ i $\alpha_p = 0,1$. Slika 5.26 prikazuje utjecaj faktora podrelaksacije tlaka pri zadanoj vrijednosti faktora podrelaksacije brzine $\alpha_{uv} = 0,8$. Očito je da je utjecaj faktora podrelaksacije tlaka relativno slab u situacijama u kojima je faktor α_{uv} dovoljno mali da postupak konvergira.

Za program CAFFA optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije na mreži M1 je $\alpha_{uv} = 0,7$ i $\alpha_p = 0,1$ pri kojoj se zadana točnost postigne u 379 iteracija.

Slika 5.27 prikazuje brzinu konvergencije algoritma SIMPLER u vlastitom računalnom programu na mreži M1 uz primjenu UDS sheme diferencije. Optimalna vrijednost faktora podrelaksacije brzine je $\alpha_{uv} = 0,95$ kod koje se postiže zadana točnost u 122 iteracije (pri $\alpha_{uv} = 0,98$ se zadana točnost postigne u 98 iteracija).

Slika 5.28 prikazuje usporedbu brzine konvergencije triju metoda pri čemu se rezultati odnose na odgovarajuću optimalnu kombinaciju vrijednosti faktora podrelaksacije. Algoritam SIMPLER i u ovom testu najbrže konvergira.

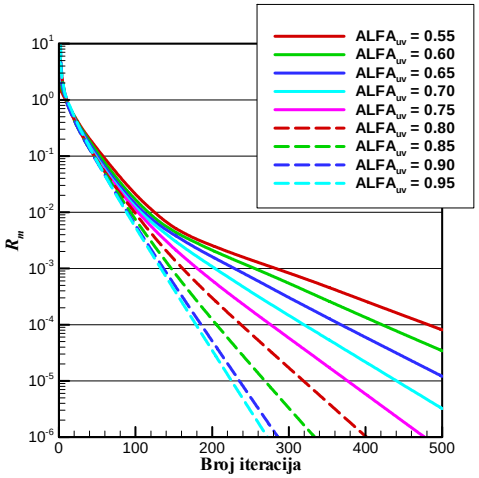
Na slici 5.29 je prikazan utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije. Pri primjeni algoritma SIMPLER numerički postupak nije konvergirao na mreži 80x80 KV (mreža M2) s optimalnom vrijednošću faktora $\alpha_{uv} = 0,95$ određenoj na mreži M1, pa se prikazani rezultati na mreži M2 odnose na faktor $\alpha_{uv} = 0,9$. Algoritam SIMPLE je na mreži M2 konvergirao uz istu kombinaciju faktora podrelaksacije kao i na mreži M1, te se pokazao za ovaj slučaj manje osjetljivim na povećanje mreže.

Na slici 5.30 je prikazana brzina konvergencije algoritama SIMPLER i SIMPLE uz primjenu četiriju ugrađenih shema diferencije, pri čemu su sheme CDS i EDSI drugog reda točnosti i temelje se na „deffered correction" pristupu. Svi proračuni su izvršeni na mreži M1 uz primjenu faktora podrelaksacije brzine za algoritam SIMPLER $\alpha_{uv} = 0,98$, a za algoritam SIMPLE $\alpha_{uv} = 0,95$ i $\alpha_p = 0,1$ koji predstavljaju optimalnu kombinaciju određenu primjenom UDS sheme diferencije. Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da je u ovoj situaciji algoritam SIMPLER manje osjetljiv na promjenu sheme diferencije.

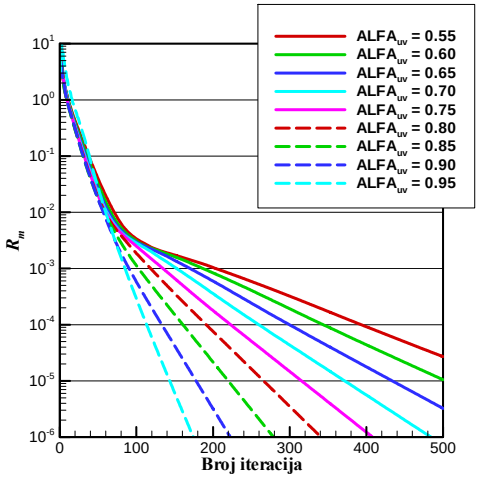
Prema pretpostavci iznesenoj u uvodu ovog poglavlja očekuje se da će rezultati dobiveni vlastitim programom biti veće točnosti od rezultata dobivenih programom CAFFA što se temelji na činjenici da u vlastitoj metodi nema potrebe za modeliranjem neortogonalnih članova koji se pojavljuju u metodi ugrađenoj u program CAFFA. Uspoređuju se odstupanja rješenja na mreži M1 dobivena primjenom iste CDS sheme diferencije u odnosu na numeričko rješenje dobiveno programom FLUENT na mreži 160x160 KV uz primjenu uzvodne sheme drugog reda točnosti i algoritma SIMPLE koji se također temelji na interpolaciji Rhie i Chow 1983 [78]. Slike 5.31 i 5.32 prikazuju prostornu raspodjelu pogreške *u* komponente brzine definirane izrazom:

$$e = \frac{u_{\text{FLUENT}} - u}{v_t} \cdot 100\%, \tag{5.1}$$

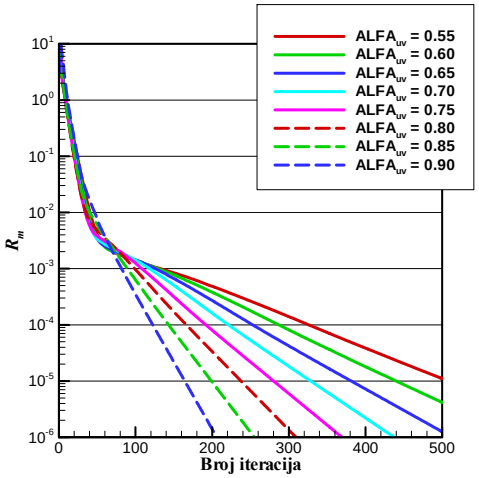
gdje je u_{FLUENT} komponenta brzine u izračunata programom FLUENT, u brzina izračunata na mreži M1 vlastitim programom ili programom CAFFA, a v_t konstantna brzina pomicanja gornjeg horizontalnog ruba. Pogreška *u* komponente brzine u rješenju dobivenom vlastitim programom je između -4 % do 4 %, dok je pogreška u rješenju dobivenom programom CAFFA između -9 % do 9 %. Usporedbom ovih dviju slika vidljivo je da je područje u kojem je pogreška iznad 2% puno veće u rješenju koje je dobiveno primjenom programa CAFFA. Slike 5.33 i 5.34 prikazuju prostornu raspodjelu pogreške *v* komponente brzine definirane analogno izrazu (5.1). Ponovo je očito da je pogreška u rješenju dobivenom programom CAFFA koja je između -8 % do 8 % puno veća od pogreške u rješenju dobivenom vlastitim programom koja je između -4 % do 4 %. Slika 5.35 prikazuje usporedbu profila komponente brzine u u presjeku $x = 0,853 = \text{konst.}$ i profila komponente brzine v u presjeku $y = 0,353 = \text{konst.}$ na mreži M1 uz primjenu CDS sheme diferencije. Iz prikazanih profila v komponente brzine vidljivo je dobro slaganje rezultata dobivenih vlastitim programom u odnosu na rezultate dobivene programom FLUENT. Slika 5.36 prikazuje usporedbu profila komponente brzine u u presjeku $x = 0,853 = \text{konst.}$ i profila komponente brzine v u presjeku $y = 0,353 = \text{konst.}$ izračunate vlastitim programom na mreži M2 uz primjenu EDSI sheme u vlastitom programu i CDS sheme u programu CAFFA. Rezultati dobiveni vlastitim programom točniji su od rezultata dobivenih programom CAFFA.



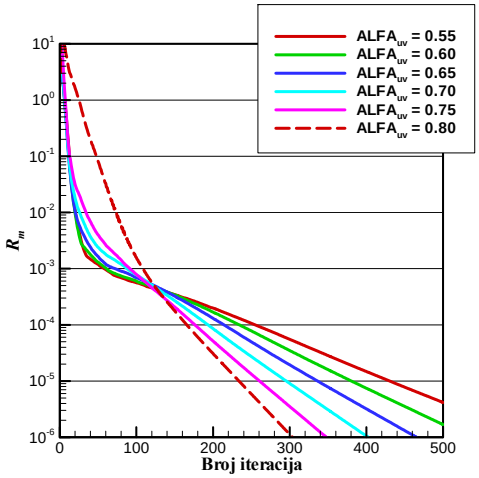
Slika 5.22 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,05$



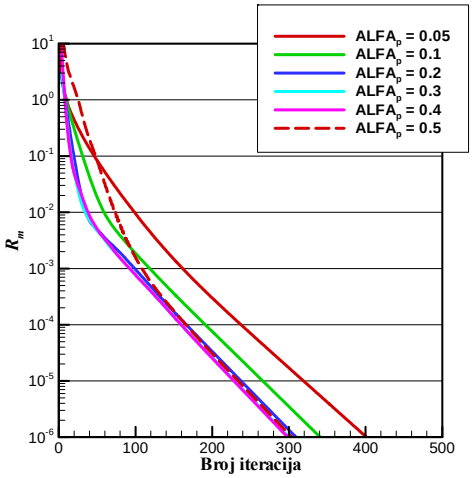
Slika 5.23 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,1$



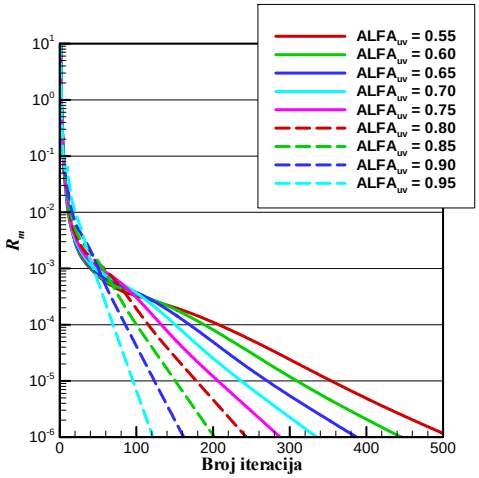
Slika 5.24 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,2$



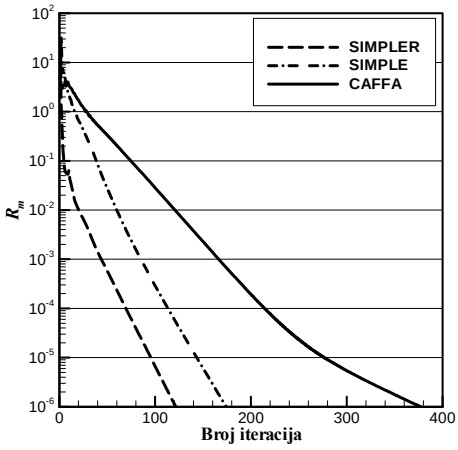
Slika 5.25 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_p = 0,5$



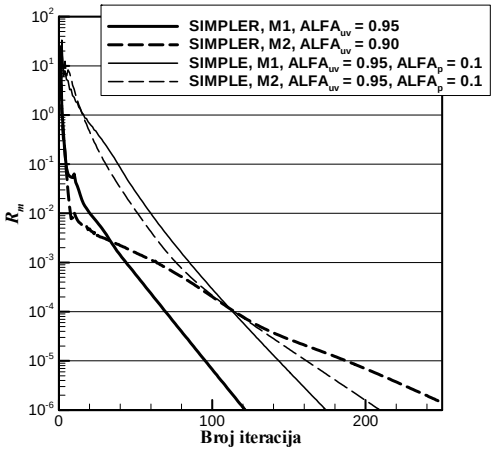
Slika 5.26 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE, mreža M1 za $\alpha_{uv} = 0,8$



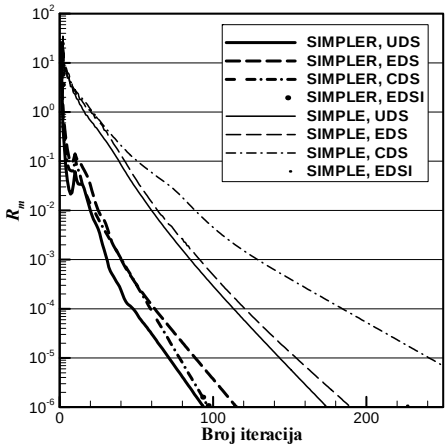
Slika 5.27 Test 3 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER, mreža M1



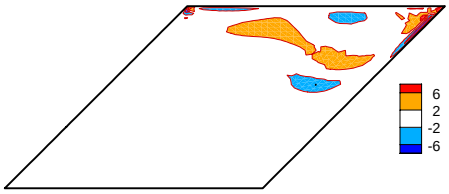
Slika 5.28 Test 3 – usporedba brzina konvergencije triju metoda na mreži M1



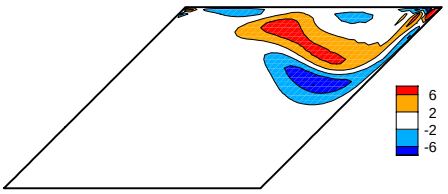
Slika 5.29 Test 3 – utjecaj gustoće mreže na brzinu konvergencije



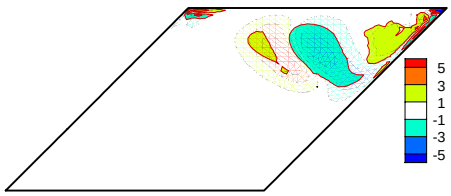
Slika 5.30 Test 3 – utjecaj sheme diferencije na brzinu konvergencije, mreža M1



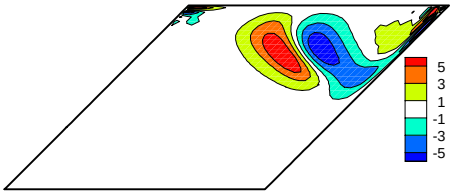
Slika 5.31 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške u komponente brzine, vlastiti program



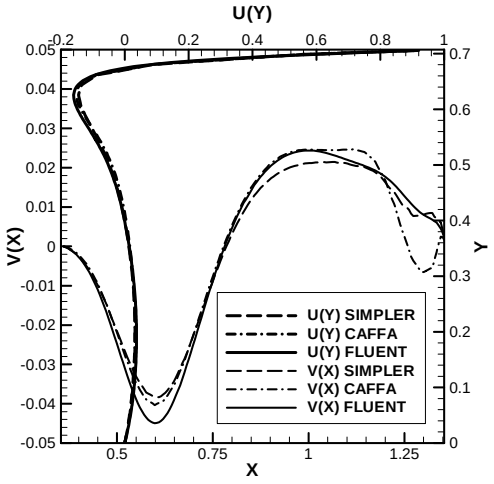
Slika 5.32 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške u komponente brzine, program CAFFA



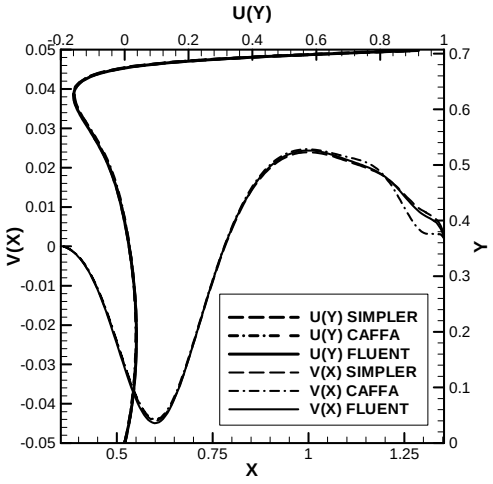
Slika 5.33 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške v komponente brzine, vlastiti program



Slika 5.34 Test 3 – prostorna raspodjela pogreške v komponente brzine, program CAFFA



Slika 5.35 Test 3 – profili brzine na mreži M1



Slika 5.36 Test 3 – profili brzine na mreži M2

Test 4 – Laminarno strujanje u naglom proširenju

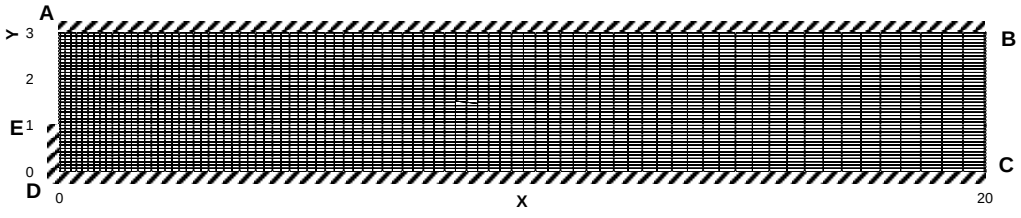
Ovo je jedan od standardnih testova koji se često pojavljuje u literaturi. Strujanje u naglom proširenju karakterizirano je pojavom zone recirkulacijskog strujanja, a dobar pokazatelj točnosti rješenja je udaljenost točke od ulaza u naglo proširenje u kojoj strujanje ponovo naliježe na stijenku (duljina zone recirkulacije). U ovoj situaciji će se u oba programa koristiti pravilna ortogonalna mreža.

Svrha ovog testa je usporedba brzina konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom programu i programu CAFFA gdje se očekuje da će zbog ortogonalnosti mreže te brzine biti približno jednake. S druge strane će se usporediti točnost rezultata dobivenih primjenom uzvodne sheme koja je prvog reda točnosti i EDSI sheme koja je drugog reda točnosti.

Slika 5.37 shematski prikazuje područje proračuna i geometrijsku mrežu. Rubovi $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{CDE}}$ su nepropusne stijenke, rub $\overline{\mathrm{AE}}$ je ulazni rub, a rub $\overline{\mathrm{BC}}$ izlazni rub. Visina stepenice $\overline{\mathrm{ED}}$ iznosi $h=1$, a širina kanala $\overline{\mathrm{BC}}$ je 3. Na ulaznom rubu je propisan parabolični profil *u* komponente brzine koji odgovara razvijenom laminarnom strujanju u prostoru između beskonačnih paralelnih ploča zadan izrazom u odnosu na koordinatni sustav na slici 5.37:

$$u=\frac{3}{2}u_{sr}\left(y-1\right)\left(3-y\right), \tag{5.2}$$

gdje je srednja brzina na ulazu $u_{sr}=1$. Gustoća fluida je $\rho=229$, a viskoznost fluida $\mu=1$, tako da je Reynoldsov broj na bazi visine stepenice jednak $Re=\frac{\rho u_{sr}h}{\mu}=229$. Za potrebe proračuna, polje brzine je inicijalizirano s vrijednošću $u=\frac{2}{3}u_{sr}$ i $v=0$.



Slika 5.37 Test 4 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža

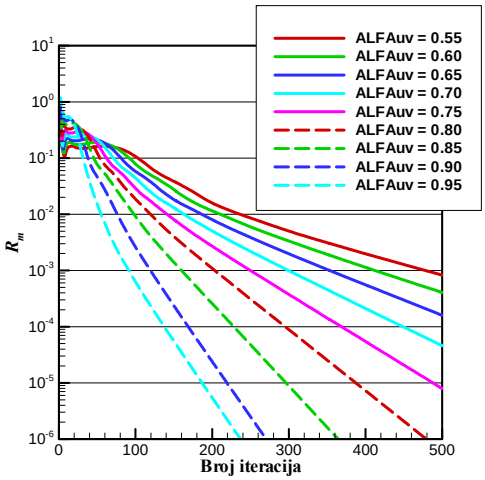
Geometrijska mreža sadrži 42x42, odnosno 1764 KV. U cilju određivanja optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije, proračun je vršen mijenjajući α_{uv} u području od 0,55 do 0,95 i α_p u području od 0,05 do 0,5.

Slike 5.38 do 5.41 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom računalnom programu. Brzina konvergencije se promatra kroz promjenu normiranog masenog reziduala s ulaznim masenim protokom u funkciji broja iteracija. Brzina konvergencije je prikazana u funkciji faktora podrelaksacije brzine α_{uv} (parametarske krivulje) pri čemu se svaki dijagram odnosi na konstantni faktor podrelaksacije tlaka α_p i to redom $\alpha_p = 0,05$, 0,1, 0,2 i 0,3. U svim slučajevima u kojima je postupak konvergirao s povećavanjem faktora α_{uv} povećavala se i brzina konvergencije, a optimalna kombinacija je $\alpha_{uv} = 0,95$ i $\alpha_p = 0,1$. Ove vrijednosti su dobivene mijenjanjem faktora podrelaksacije brzine s korakom 0,05 i faktora podrelaksacije tlaka s korakom 0,1 (s manjim koracima dobila bi se vjerojatno nešto drukčija optimalna kombinacija vrijednosti tih faktora). Slike 5.42 do 5.45 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA za iste kombinacije faktora podrelaksacije kao na slikama 5.38 do 5.41. Usporedbom odgovarajućih slika može se primijetiti da su brzine konvergencije gotovo identične, što se moglo i očekivati budući da je proračun vršen na ortogonalnoj mreži, te praktički nema razlika u dvjema metodama. Ova činjenica je ujedno i jedna vrsta potvrde ispravnosti vlastitog računalnog programa.

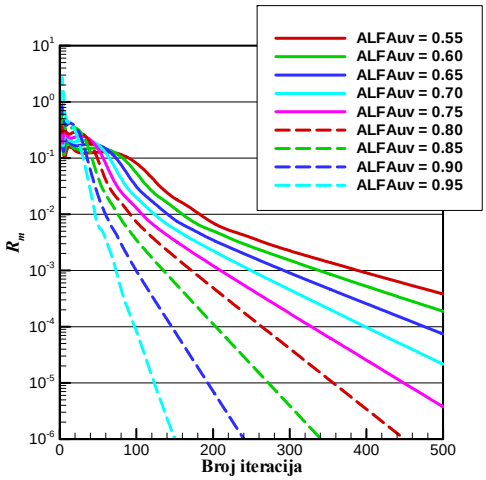
Slika 5.46 prikazuje utjecaj faktora α_p (parametarske krivulje) uz konstantni faktor $\alpha_{uv} = 0,85$. Na slici nema krivulja za $\alpha_p > 0,3$ jer je već za $\alpha_p = 0,4$ metoda divergirala. Očito je da brzina konvergencije ne ovisi značajno o faktoru α_p za slučaj da metoda konvergira. Utjecaj faktora α_p očituje se u mogućnosti povećanja faktora α_{uv} pri kojem metoda obično brže konvergira. U navedenom primjeru bi dakle bilo bolje držati faktor α_p na nižoj vrijednosti kako bi faktor α_{uv} mogao biti što veći.

Slika 5.47 prikazuje brzinu konvergencije algoritma SIMPLER u vlastitom računalnom programu iz koje je ponovo vidljivo da se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije i najveća je za $\alpha_{uv} = 0,95$ (pri vrijednosti $\alpha_{uv} = 1$ metoda je divergirala, a vrijednosti između 0,95 i 1 nisu ispitivane jer je metoda počela pokazivati zastoje u brzini konvergencije već kod $\alpha_{uv} = 0,95$).

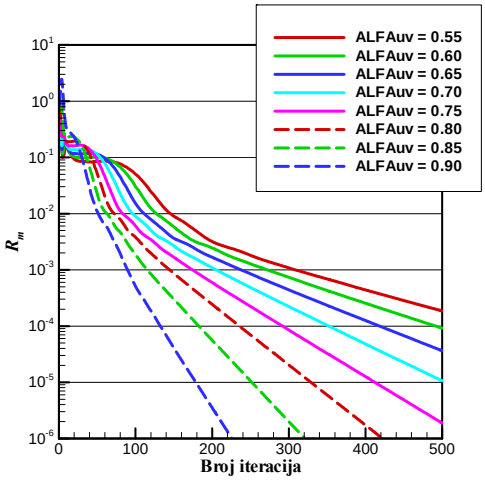
Slika 5.48 prikazuje usporedbu brzine konvergencije triju metoda iz koje je jasno da algoritmi SIMPLE u dva programa konvergiraju praktički istom brzinom i to kod istih optimalnih kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije. Algoritam SIMPLER je čak nešto lošiji od algoritma SIMPLE jer pokazuje periodičke zastoje u brzini konvergencije što se može obrazložiti činjenicom da se vrijednost $\alpha_{uv} = 0,95$ nalazi vrlo blizu granice kod koje metoda počinje divergirati.



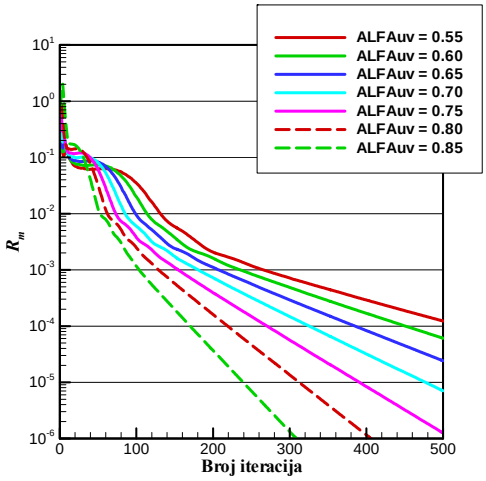
Slika 5.38 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,05$



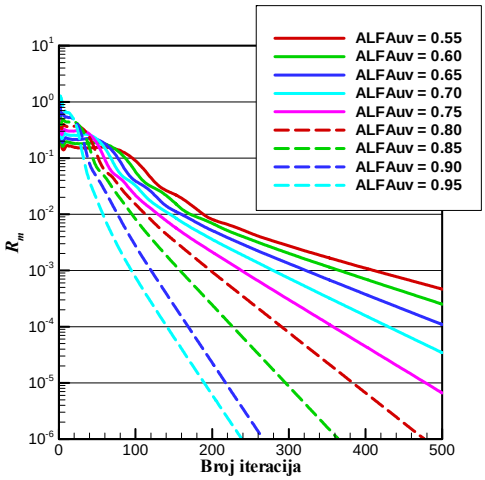
Slika 5.39 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,1$



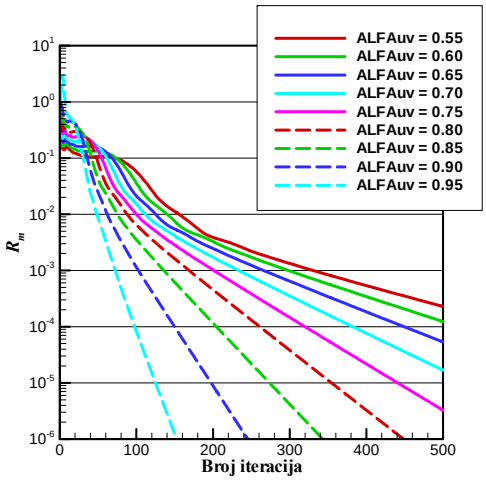
Slika 5.40 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$



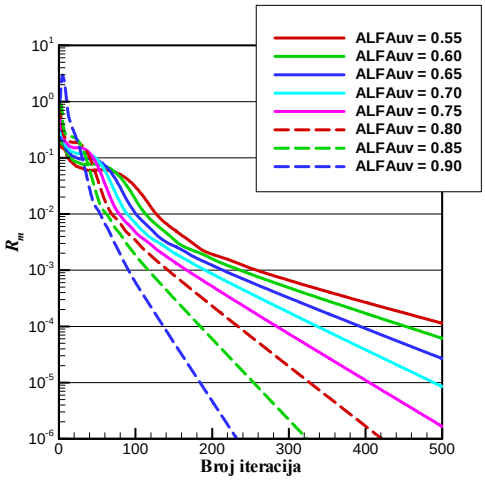
Slika 5.41 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$



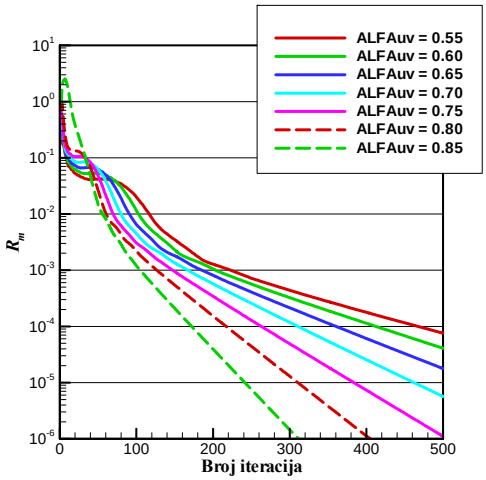
Slika 5.42 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,05$



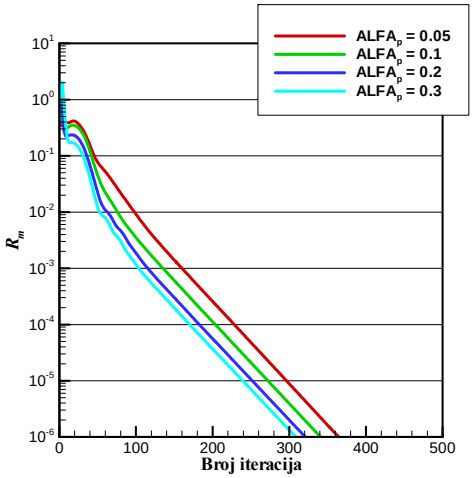
Slika 5.43 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,1$



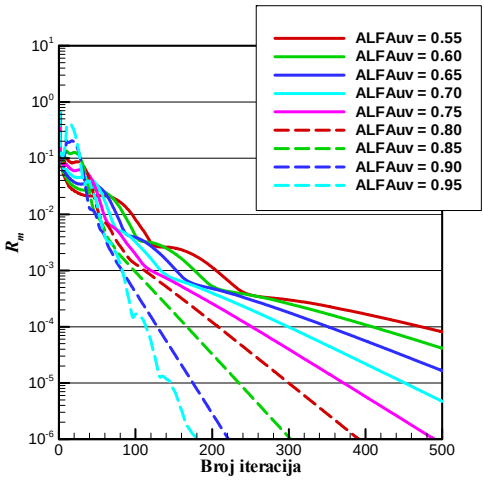
Slika 5.44 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,2$



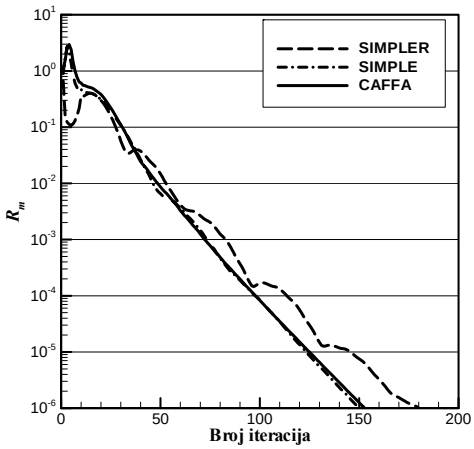
Slika 5.45 Test 4 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,3$



Slika 5.46 Test 4 – brzine konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_{uv} = 0,85$



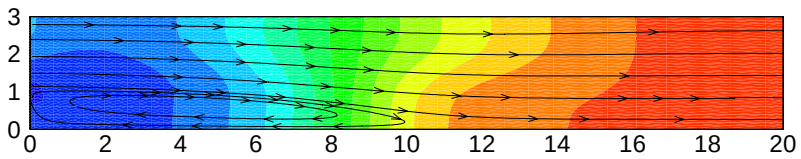
Slika 5.47 Test 4 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER



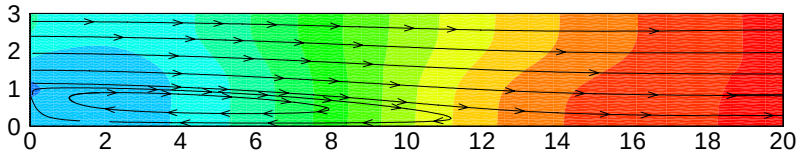
Slika 5.48 Test 4 – usporedba brzina konvergencije triju metoda

U ovoj test situaciji uobičajeno je testirati točnost metode, odnosno sheme diferencije, jednostavno kroz duljinu zone recirkulacije, odnosno udaljenost točke od ulaza u naglo proširenje u kojoj glavna struja fluida naliježe na donju stijenku. Poznato je da sheme nižeg reda točnosti daju manju vrijednost te udaljenosti. Slike 5.49 i 5.50 prikazuju slike strujnica i izobara dobivene kao rezultat proračuna vlastitim programom i to primjenom uzvodne, odnosno EDSI sheme diferencije. Iz slika je očito da EDSI shema diferencije daje dulju zonu recirkulacije jer je to shema višeg reda točnosti, a manju razliku tlaka (na obje slike ista boja označuje isto područje tlaka). Udaljenost točke u kojoj glavna struja fluida naliježe na donju stijenku najtočnije se određuje iz promjene smičnog naprezanja na donjoj stijenci, naime poznato je da je u točki nalijeganja smično naprezanje jednako nuli. Slike 5.51 i 5.52 prikazuju raspodjelu bezdimenzijskog smičnog naprezanja $\tau = 2\tau_w / \rho u_{sr}^2$ (gdje je τ_w smično naprezanje na zidu). Iz promjene

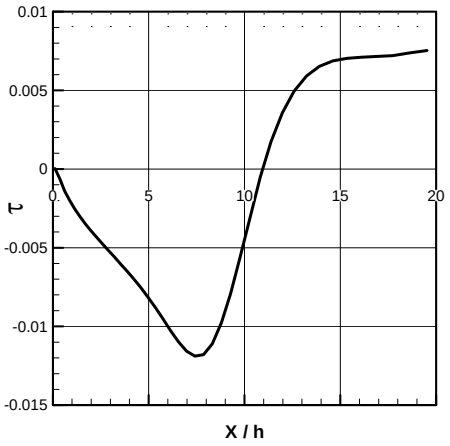
smičnog naprezanja može se očitati da je duljina zone recirkulacije kod primjene uzvodne sheme $X_R/h = 10,94$, a kod primjene EDSI sheme $X_R/h = 12,74$. Ti su rezultati ucrtani u dijagram na slici 5.53 preuzet iz članka Hackman [28] koji prikazuje njegove rezultate u funkciji broja konačnih volumena za dvije vrste mreže i za dvije primijenjene sheme diferencije. Korištene su SHUDS shema (Skew Hybrid Upstream Differencing Scheme) koja je drugog reda točnosti i UWDS shema (Upstream Weighted Differencing Scheme) koja je vrlo slična EDS shemi diferencije i pri visokim vrijednostima Pecletovog broja je prvog reda točnosti. Od mreža su korištene pravilna kartezijska mreža i krivocrtna mreža. Hackmanovi rezultati proračuna su točniji kod primjene sheme višeg reda i pravilne kartezijske mreže. Iz slike 5.53 je očito da se duljina zone recirkulacije dobivena primjenom EDSI sheme vrlo dobro slaže s Hackmanovim rezultatima na kartezijskoj mreži i primjeni SHUDS sheme diferencije, a rezultati dobiveni primjenom uzvodne sheme s Hackmanovim rezultatima na kartezijskoj mreži i primjeni UWDS sheme diferencije.



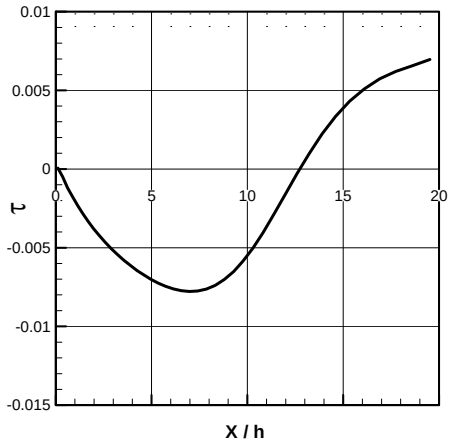
Slika 5.49 Test 4 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, UDS shema diferencije



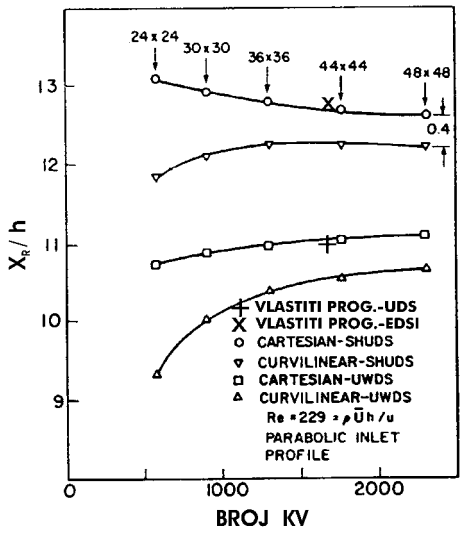
Slika 5.50 Test 4 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, EDSI shema diferencije



Slika 5.51 Test 4 – raspodjela bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci, UDS shema diferencije



Slika 5.52 Test 4 – raspodjela bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci, EDSI shema diferencije



Slika 5.53 Test 4 – ovisnost duljine zone recirkulacije o gustoći geometrijske mreže

5.4 TURBULENTNO STRUJANJE FLUIDA

U problemima turbulentnog strujanja fluida u matematički model koji se rješava uključene su i jednadžbe $k-\varepsilon$ modela turbulencije koje imaju izrazito nelinearne izvorske članove. Može se očekivati da će ta nelinearnost u geometrijski i fizikalno složenijim situacijama, također utjecati na brzinu konvergencije. Budući da se ta nelinearnost tretira jednako u svim algoritmima, može se dogoditi da slika o brzini konvergencije bude iskrivljena upravo zbog utjecaja nelinearnosti u jednadžbama modela turbulencije. S druge strane, u strujanjima tipa razvoja strujanja u kanalu, gdje je turbulentna viskoznost velika samo uz stijenku, može se dogoditi da numerički postupak brže konvergira za slučaj turbulentnog strujanja nego za slučaj laminarnog, jer je profil brzine jednolikiji po presjeku za slučaj turbulentnog strujanja pa se do razvijenog profila dolazi u manjem broju iteracija. U laminarnom strujanju se pokazalo da sva tri algoritma pri optimalnim kombinacijama vrijednosti faktora podrelaksacije imaju sličnu brzinu konvergencije, pa će se za slučaj turbulentnog strujanja ponovo krenuti od strujanja u naglom proširenju koje će se računati na pravilnoj kartezijskoj mreži. Drugi test će biti turbulentno strujanje u zakrivljenom kanalu na djelomično neortogonalnoj mreži (misli se na program CAFFA), a u trećoj test situaciji će se usporediti algoritmi SIMPLE i SIMPLER u jednoj geometrijski i fizikalno složenijoj situaciji.

Test 5 – Turbulentno strujanje u naglom proširenju

Ovo je također vrlo česti test u literaturi, jer postoje rezultati mjerenja profila brzine i kinetičke energije u nekoliko poprečnih presjeka, te profila tlaka duž donje stijenke u zoni recirkulacije. Svrha ovog testa je ocijeniti brzine konvergencije različitih metoda na pravilnoj ortogonalnoj mreži u uvjetima rješavanja jednadžbe za kinetičku energiju turbulencije i jednadžbe za disipaciju kinetičke energije turbulencije. S druge strane će se usporediti izračunati profili brzine, kinetičke energije, te raspodjele tlaka po donjoj stijenci s rezultatima mjerenja i rezultatima proračuna drugim metodama objavljenim u literaturi.

Shematski prikaz problema dan je na slici 5.37 iz prethodnog primjera. Ovdje je područje strujanja pravokutnog oblika visine $3h$ i duljine $L = 20h$ gdje je $h = 0,0381\,\text{m}$. Fluid gustoće $\rho = 1,83698\,\text{kg/m}^3$ i koeficijenta dinamičke viskoznosti $\mu = 1,83698 \cdot 10^{-5}\,\text{kg/ms}$ ulazi srednjom brzinom $\bar{U} = 17,8\,\text{m/s}$ kroz gornji dio zapadnog ruba širine $H = 2h$ i nastavlja strujanje u proširenom kanalu širine $3h$. Za dovoljno visoke vrijednosti Reynoldsovog broja dolazi do odvajanja strujanja u početnom dijelu proširenog kanala u kojem se stvara vrtlog. Glavna struja ponovo

dotiče donju stijenku na udaljenosti X_R od ulaznog ruba. Profili brzina, kinetičke energije turbulencije i disipacije te energije na ulazu (rub $\overline{AE}$) su dobiveni proračunom strujanja u kanalu širine *H* dovoljne duljine da se sve veličine u strujanju ustale. Rub $\overline{BC}$ se tretira kao izlazni, a na ostalim rubovima se primjenjuju standardne zidne funkcije kao rubni uvjeti uz čvrste nepropusne stijenke.

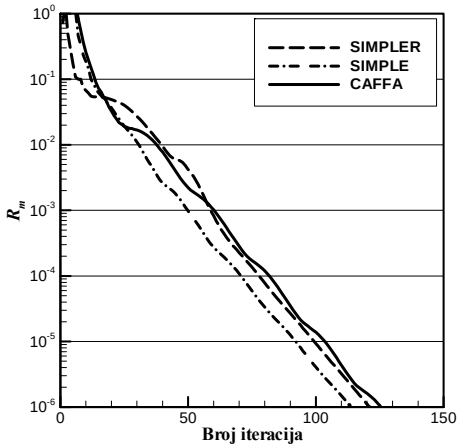
Za potrebu proračuna područje strujanja se dijeli na 42x42 konačna volumena, ravnomjerno u poprečnom smjeru. Slika 5.54 prikazuje brzinu konvergencije triju metoda pri optimalnoj kombinaciji vrijednosti faktora podrelaksacije (za algoritam SIMPLER optimalna vrijednost je bila $\alpha_{uv} = 0,9$, a za algoritme SIMPLE u oba programa $\alpha_{uv} = 0,9$ i $\alpha_p = 0,2$). U svim su proračunima faktori podrelaksacije kinetičke energije turbulencije i njene disipacije bili $\alpha_k = \alpha_\varepsilon = \alpha_{k\varepsilon} = 0,9$. Iz slike je očito da je brzina konvergencije svih triju metoda približno jednaka kao i za slučaj proračuna laminarnog strujanja u naglom proširenju. Slika 5.55 prikazuje promjenu brzine konvergencije algoritma SIMPLER s promjenom faktora α_{uv}, a slika 5.56 prikazuje potreban broj iteracija za postizanje točnosti rješenja (smanjivanje reziduala na vrijednost ispod 10^{-6}) u funkciji faktora α_{uv} i α_p. Iz te slike je vidljivo da se s povećanjem faktora α_p vrlo brzo smanjuje maksimalna vrijednost faktora α_{uv} kod koje algoritam SIMPLE konvergira.

Slika 5.57 prikazuje sliku strujnica i izobara dobivene proračunom pomoću vlastitog programa uz primjenu EDSI sheme diferencije. Slika 5.58 prikazuje raspodjelu bezdimenzijskog smičnog naprezanja $\tau = 2\tau_w / \rho\overline{U}^2$ (gdje je τ_w smično naprezanje na donjoj horizontalnoj stijenci) u funkciji udaljenosti X/h iz kojeg se može očitati duljina zone recirkulacije $X_R/h = 6,12$. Na slici 5.59 je križićem ucrtana ta vrijednost u dijagram preuzet iz Hackman [28] koji prikazuje promjenu duljine zone recirkulacije s povećanjem broja KV. Treba naglasiti da eksperimentalna vrijednost duljine zone recirkulacije u području $X_R/h = 7 \pm 0,5$. Naravno da rezultat simulacije turbulentnog strujanja sadrži numeričku pogrešku, ali i pogrešku modeliranja turbulencije. Ovdje korišteni standardni $k-\varepsilon$ model turbulencije daje dobre rezultate u strujanjima tipa graničnog sloja, bez odvajanja strujanja, a također je i upitna primjena zidnih funkcija u uvjetima pojave odvajanja strujanja. U tom smislu je dobiveno odstupanje duljine zone recirkulacije u očekivanim granicama.

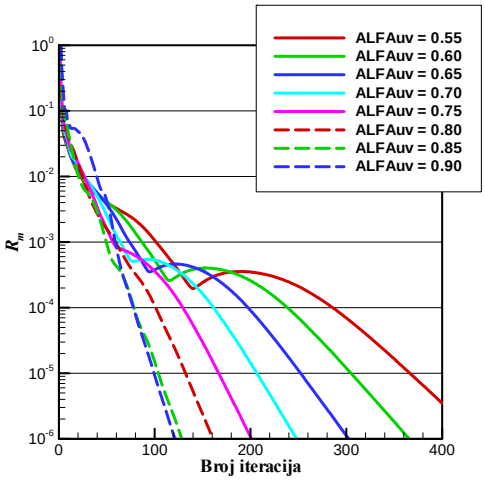
Slika 5.60 prikazuje usporedbu profila brzine u nekoliko vertikalnih presjeka dobivenih vlastitim programom s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima simulacije iz Hackman [28]. Uočava se relativno dobro slaganje tih profila pri čemu numerički rezultati pokazuju slične trendove (odstupanja od mjerenja na istim mjestima, unutar zone recirkulacije, što se može pripisati netočnosti modela turbulencije).

Slika 5.61 prikazuje profile bezdimenzijske kinetičke energije turbulencije u nekoliko vertikalnih presjeka unutar i izvan zone recirkulacije. Ponovo se uočava velika sličnost rezultata proračuna i relativno dobro slaganje s eksperimentom.

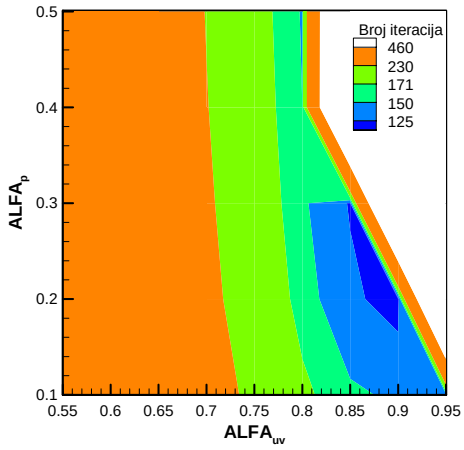
Slika 5.62 prikazuje raspodjelu koeficijenta tlaka na donjoj stijenci. Uočljivo je relativno veliko odstupanje dobivenih rezultata vlastitim proračunom u odnosu na eksperiment, ali vrlo dobro slaganje s numeričkim proračunom Hackmana [28] na mreži slične gustoće.



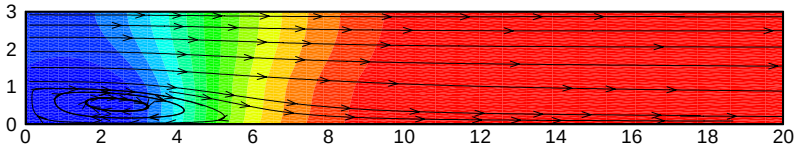
Slika 5.54 Test 5 – brzina konvergencije triju metoda



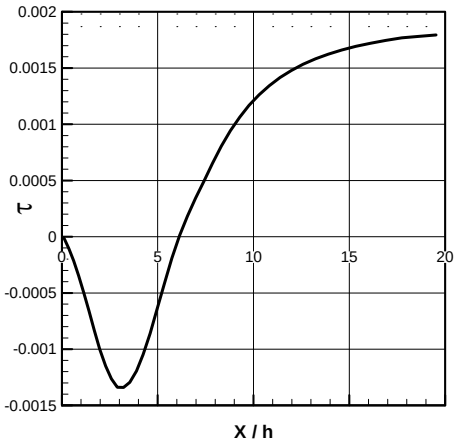
Slika 5.55 Test 5 – brzine konvergencije algoritma SIMPLER s promjenom faktora α_{uv}



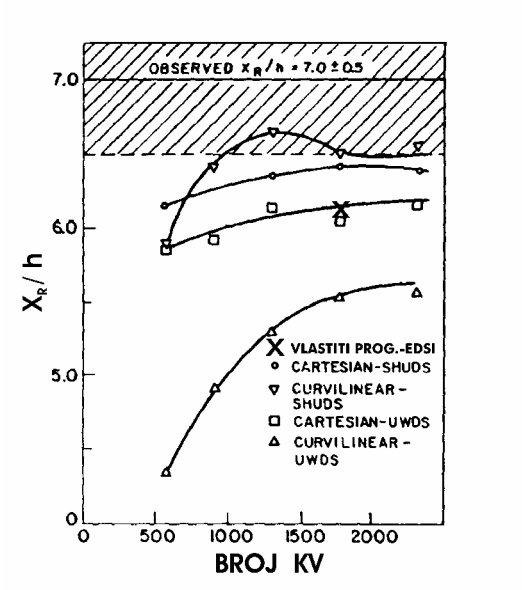
Slika 5.56 Test 5 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} i α_p



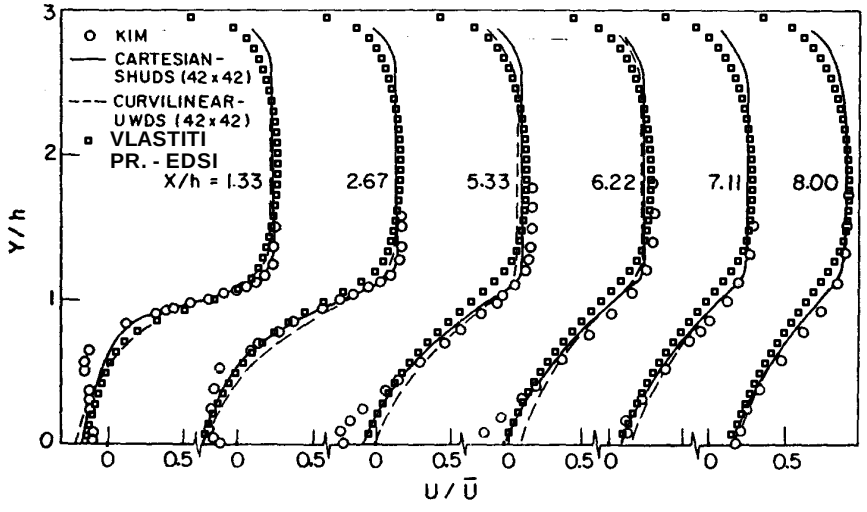
Slika 5.57 Test 5 – slika strujnica i izobara, vlastiti program, EDSI shema diferencije



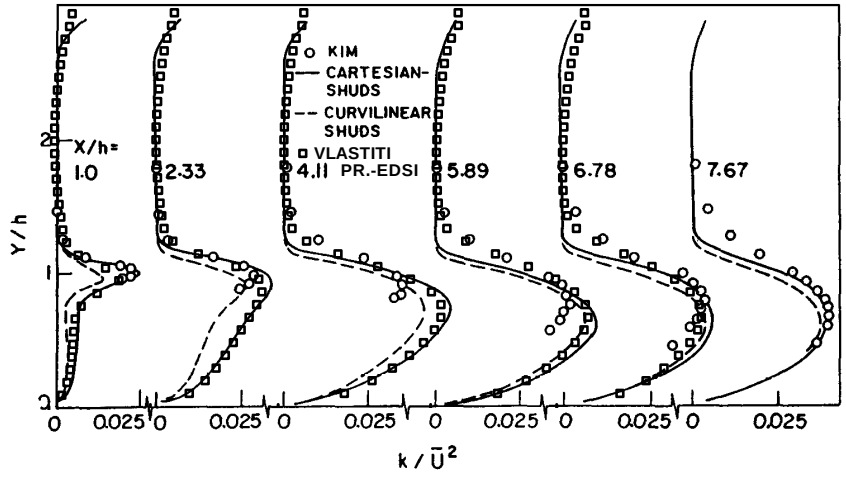
Slika 5.58 Test 5 – raspodjelu bezdimenzijskog smičnog naprezanja na donjoj stijenci



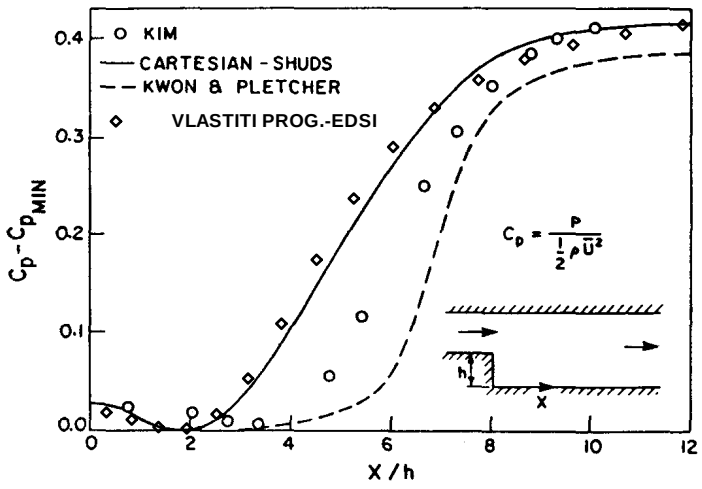
Slika 5.59 Test 5 – ovisnost duljine zone recirkulacije o gustoći geometrijske mreže



Slika 5.60 Test 5 – profili u komponente brzine u različitim poprečnim presjecima



Slika 5.61 Test 5 – profili kinetičke energije turbulencije u različitim poprečnim presjecima

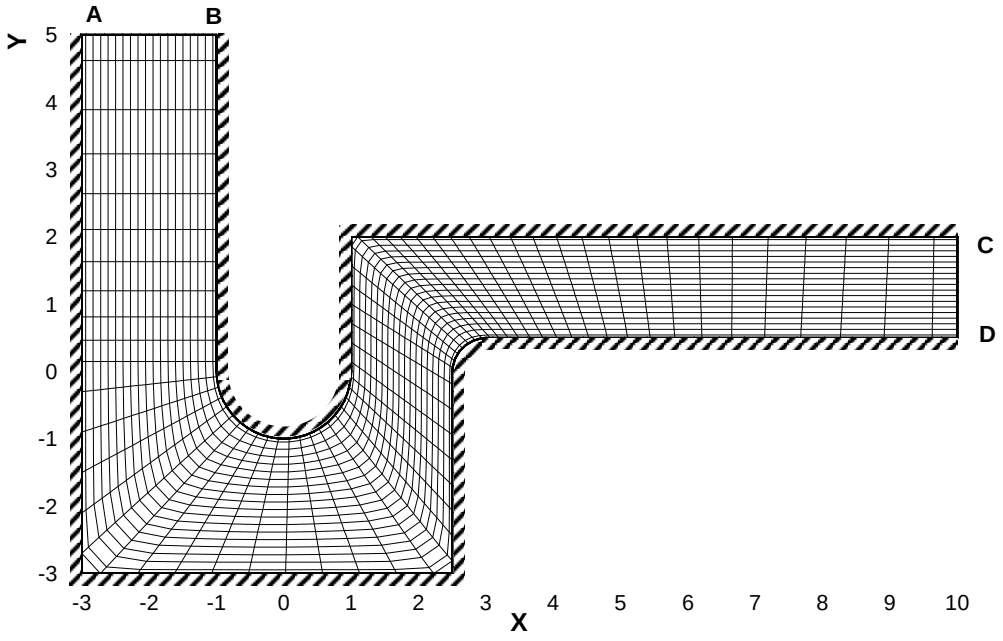


Slika 5.62 Test 5 – profil koeficijenta tlaka na donjoj stijenci

Test 6 – Turbulentno strujanje u zakrivljenom kanalu

Shematski prikaz problema dan je na slici 5.63, na kojoj je ujedno prikazana i geometrijska mreža korištena u programu CAFFA. Iz slike je jasno da je geometrijska mreža u nekim dijelovima ortogonalna, ali da postoje i područja u kojima je izrazito neortogonalna. Rub $\overline{\mathrm{AB}}$ duljine $H = 2$ označuje ulaz na kojem je zadan jednoliki profil normalne komponente brzine $v_{n.ulaz} = 1$, te jednolika raspodjela kinetičke energije turbulencije $k_{ulaz} = 4 \cdot 10^{-4}$ i disipacije kinetičke energije turbulencije $\varepsilon_{ulaz} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Rub $\overline{\mathrm{CD}}$ duljine *H* je izlazni i na njemu se primjenjuju standardne pretpostavke o paraboličnosti strujanja. Ostali rubovi su nepropusne stijenke. Gustoća fluida je $\rho = 1$, a viskoznost fluida $\mu = 1 \cdot 10^{-5}$, tako da je Reynoldsov broj $Re = \dfrac{\rho v_{n.ulaz} H}{\mu} = 2 \cdot 10^{5}$. Polje brzine je inicijalizirano vrijednostima $u = 1$ i $v = -1$, dok su polja *k* i ε inicijalizirana njihovim vrijednostima na ulazu.

Ovaj test se izvorno daje uz program CAFFA, a služi za pokazivanje stabilnosti numeričkog postupka u uvjetima velike promjene smjera strujanja, a ovdje će dobro poslužiti za usporedbu algoritma SIMPLE u vlastitom programu (dakle na lokalno ortogonalnoj mreži) i algoritma SIMPLE u programu CAFFA (dakle na djelomično neortogonalnoj mreži).

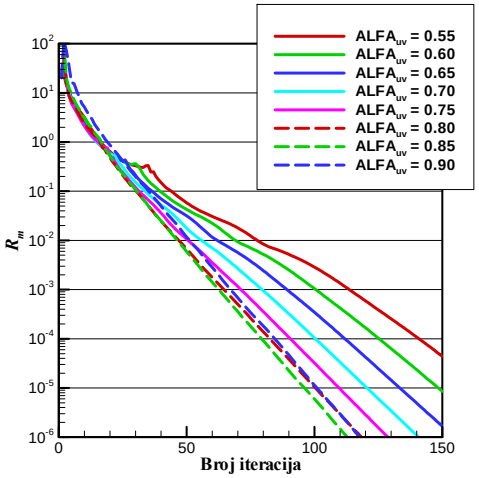


Slika 5.63 Test 6 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža za program CAFFA

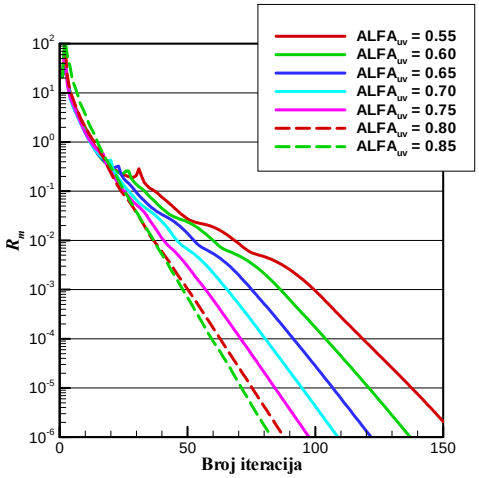
Slike 5.64 do 5.67 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom računalnom programu. Brzina konvergencije se promatra kroz promjenu normiranog masenog reziduala (normiranje je izvršeno s ulaznim masenim protokom) u funkciji broja iteracija. Na prikazanim dijagramima parametar je faktor podrelaksacije brzine α_{uv} pri čemu se svaki dijagram odnosi na konstantni faktor podrelaksacije tlaka α_p i to redom $\alpha_p = 0,2$, 0,3, 0,4 i 0,5. Za odabrane korake promjene faktora podrelaksacije optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije je $\alpha_{uv} = 0,8$ i $\alpha_p = 0,4$ (slika 5.66). Utjecaj faktora α_{uv} je sličan kao i u prethodnim primjerima, tj. s povećanjem faktora α_{uv} u pravilu se povećava i brzina konvergencije, sve dok se ne približi vrijednosti kod koje numerički postupak počinje divergirati. Tako na primjer, na slici 5.66 algoritam SIMPLE sporije konvergira uz $\alpha_{uv} = 0,85$ nego uz $\alpha_{uv} = 0,8$, dok je pri vrijednosti $\alpha_{uv} = 0,9$ postupak divergirao. Slika 5.68 prikazuje potreban broj iteracija za postizanje zadane točnosti (ovdje 10^{-6}) u funkciji faktora podrelaksacije α_{uv} i α_p. Iz slike je jasno da postoji šire područje ravnine $\alpha_{uv} - \alpha_p$ u kojem metoda relativno brzo konvergira. Problem je u činjenici da se područje optimalnih vrijednosti faktora podrelaksacije nalazi vrlo blizu području unutar kojeg metoda divergira.

Slike 5.69 i 5.70 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA pri faktorima podrelaksacije tlaka $\alpha_p = 0,2$ i 0,3. Optimalna kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije je $\alpha_{uv} = 0,7$ i $\alpha_p = 0,2$. Iz slike 5.70 je vidljivo da je ovaj algoritam puno osjetljiviji na promjenu faktora podrelaksacije jer uz faktor $\alpha_p = 0,3$ algoritam ne konvergira već kod faktora $\alpha_{uv} = 0,75$. Pokazuje se isti trend kao i u testovima laminarnog strujanja na neortogonalnoj mreži, tj. optimalni faktor podrelaksacije tlaka je upola manji nego kod algoritma SIMPLE u vlastitom programu, a optimalni faktori podrelaksacije brzine su također manji, što konačno rezultira manjom brzinom konvergencije.

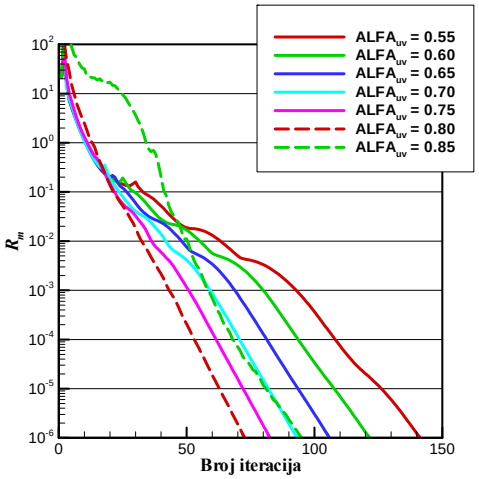
Slika 5.71 prikazuje brzinu konvergencije algoritma SIMPLER u vlastitom računalnom programu. Ponovo se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije i najveća je za $\alpha_{uv} = 0,95$.



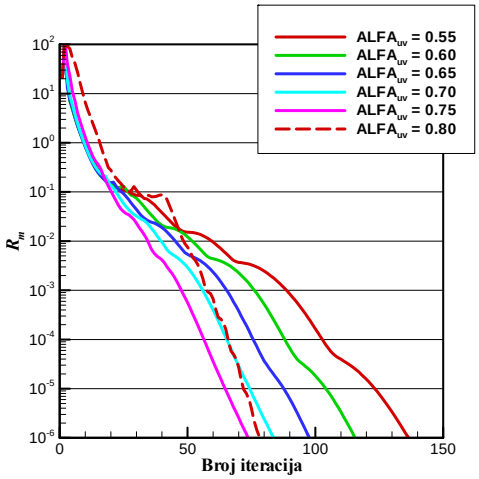
Slika 5.64 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$



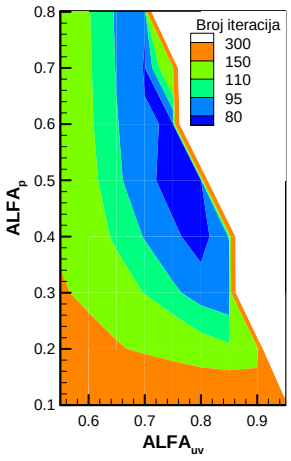
Slika 5.65 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$



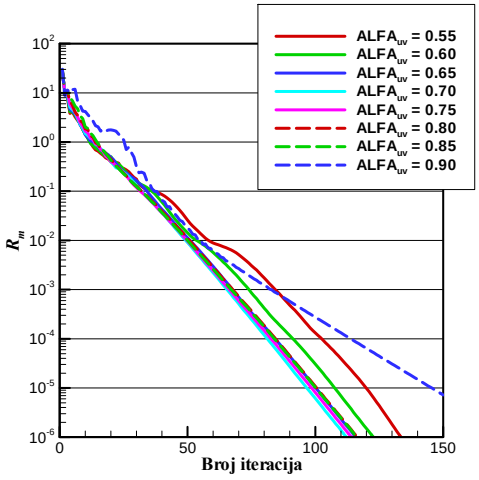
Slika 5.66 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,4$



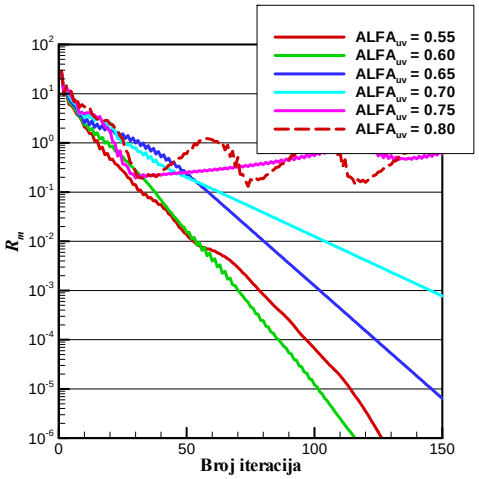
Slika 5.67 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,5$



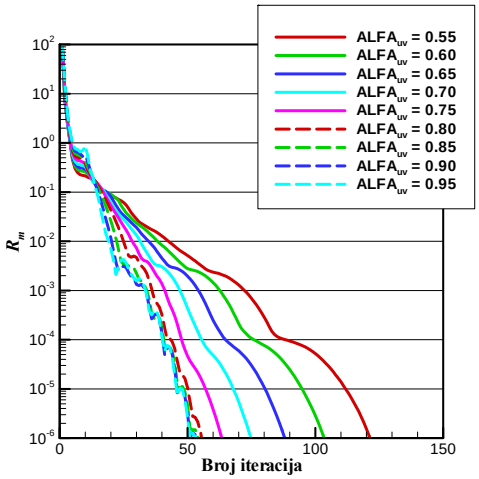
Slika 5.68 Test 6 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} i α_p



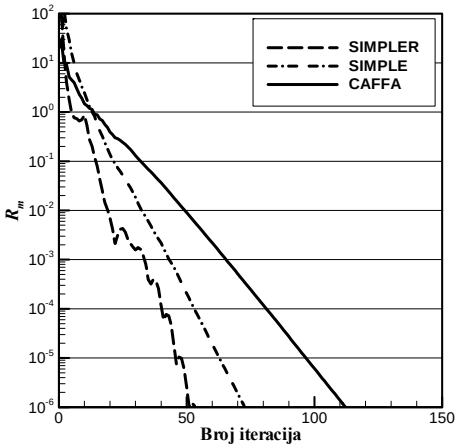
Slika 5.69 Test 6 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,2$



Slika 5.70 Test 6 – brzina konvergencije, program CAFFA za $\alpha_p = 0,3$



Slika 5.71 Test 6 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER

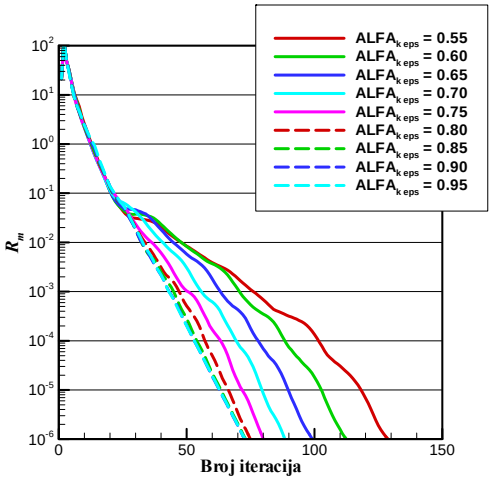


Slika 5.72 Test 6 – usporedba brzina konvergencije triju metoda

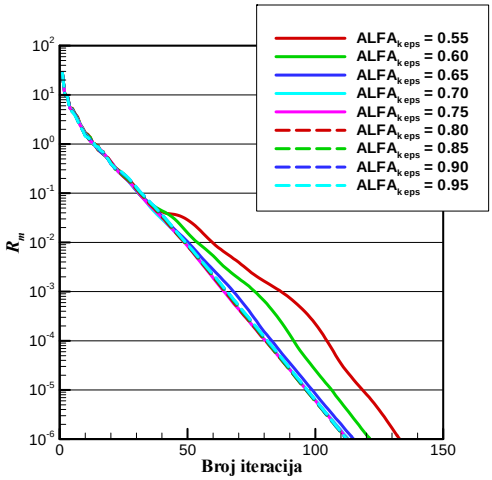
Na slici 5.72 je dana usporedba brzine konvergencije triju metoda pri proračunu ovog problema. Za slučaj djelomično neortogonalne mreže algoritam SIMPLE u vlastitom programu se ponovo pokazao boljim od algoritma SIMPLE u programu CAFFA, dok se algoritam SIMPLER pokazao boljim od algoritma SIMPLE. Naravno, ova usporedba vrijedi pri optimalnim kombinacijama vrijednosti faktora podrelaksacije za svaku pojedinu metodu.

Iz slike 5.75 bi se dalo zaključiti da je algoritam SIMPLER najosjetljiviji na promjenu faktora $\alpha_{k\varepsilon}$, dok bi algoritam SIMPLE u programu CAFFA bio najmanje osjetljiv. To se može jednostavno obrazložiti činjenicom da algoritam SIMPLE u programu CAFFA zahtijeva veliki broj iteracija za konvergenciju polja brzine i tlaka, pa konvergencija jednadžbi modela turbulencije nije presudna za globalnu brzinu konvergenciju numeričkog postupka. To se može lijepo vidjeti iz usporedbe brzina konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA (slika 5.74) i algoritma SIMPLER (slika 5.75) za slučaj $\alpha_{k\varepsilon} = 0,55$, u kojem su brzine konvergencije praktički jednake. Iz toga se da zaključiti da na globalnu brzinu konvergencije presudan utjecaj ima brzina konvergencije jednadžbi modela turbulencije.

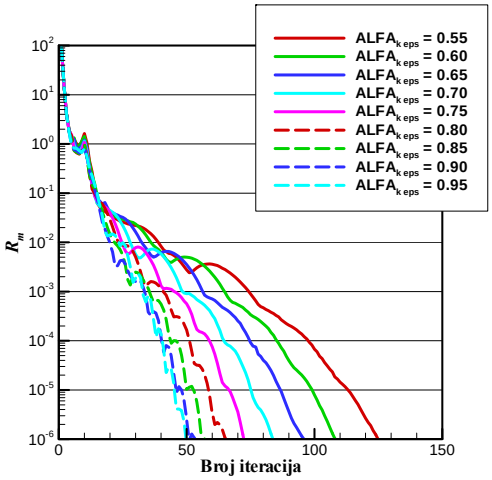
Iz slike 5.76 može se analizirati utjecaj jednadžbi modela turbulencije na brzinu konvergencije jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta. Na toj slici punim crtama prikazane su promjene masenog reziduala, te reziduala za k i ε jednadžbu pri primjeni algoritma SIMPLER uz faktore $\alpha_{uv} = 0,95$ i $\alpha_{k\varepsilon} = 0,9$. Isprekidanom crvenom crtom prikazana je promjena masenog reziduala za slučaj proračuna laminarnog strujanja (dakle bez jednadžbi modela turbulencije, uz sto puta veću molekularnu viskoznost i nepromijenjene ostale uvjete). Vidljivo je da algoritam SIMPLER u uvjetima rješavanja jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta konvergira jednako brzo kao i za slučaj turbulentnog strujanja. Reziduali za k i ε jednadžbu prikazani isprekidanim crtama odnose se na proračun samo jednadžbi modela turbulencije na način da su polje brzine i tlaka ostali nepromijenjeni i jednaki vrijednostima dobivenim proračunom prethodno definiranog laminarnog strujanja. U ovom proračunu faktor $\alpha_{k\varepsilon}$ je bio $\alpha_{k\varepsilon} = 0,9$. Budući da je u ovom slučaju brzina konvergencije ovih jednadžbi (srednji nagib krivulja koje prikazuju promjenu reziduala u funkciji broja iteracija) slična brzini konvergencije jednadžbe kontinuiteta (maseni rezidual koji zaostaje za rezidualima komponenti jednadžbe količine gibanja) očito je da konvergencija jednadžbi modela turbulencije neće narušiti globalnu brzinu konvergencije, što bi se dogodilo uz niže vrijednosti $\alpha_{k\varepsilon}$ kao što prikazuje slika 5.75.



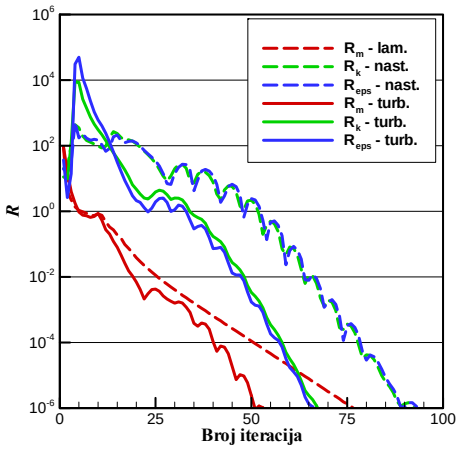
Slika 5.73 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLE



Slika 5.74 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, program CAFFA



Slika 5.75 Test 6 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLER

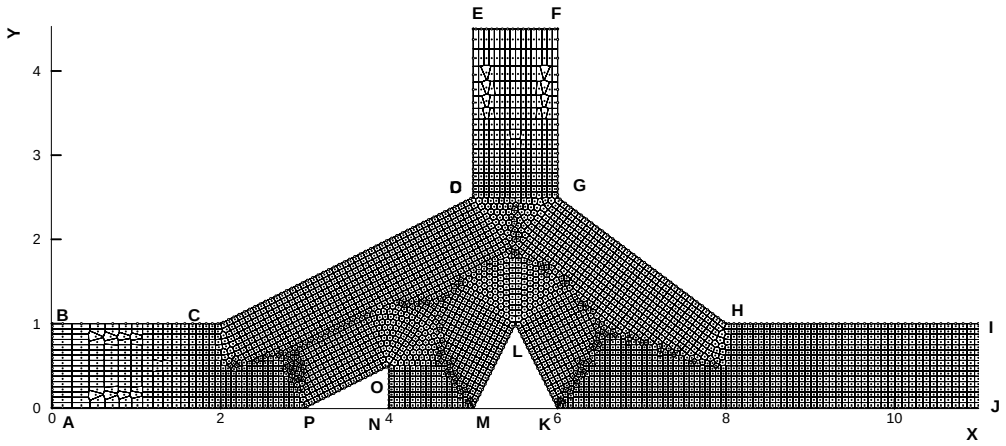


Slika 5.76 Test 6 – usporedba brzine konvergencije algoritma SIMPLER u uvjetima laminarnog i turbulentnog strujanja

Test 7 – Turbulentno strujanje u složenijoj geometriji

Shematski prikaz problema dan je na slici 5.77, na kojoj je prikazana i geometrijska mreža korištena u vlastitom programu. Rubovi $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{EF}}$ su duljine $H=1$ i označuju ulaz na kojem je zadan jednoliki profil normalne komponente brzine $v_{n.ulaz}=1$. Rub $\overline{\mathrm{IJ}}$ duljine *H* je izlazni i na njemu se primjenjuju standardne pretpostavke o paraboličnosti strujanja. Ostali rubovi su nepropusne stijenke. Koordinate pojedinih točaka vidljive su na slici 5.77 s tim da nije prikazano cijelo područje proračuna jer je kanal prema izlaznom rubu konstantne širine. Položaj točaka I i J definiran je iz podatka da je duljina $\overline{\mathrm{KJ}}=17$. Gustoća fluida je $\rho=1$, a viskoznost fluida $\mu=2{,}5\cdot10^{-5}$, tako da je Reynoldsov broj na temelju širine ulaznih kanala $Re=\dfrac{\rho v_{n.ulaz}H}{\mu}=4\cdot10^{4}$. Polje brzine je inicijalizirano vrijednostima $u=1$ i $v=-1$, dok su polja k i ε inicijalizirana vrijednostima $k_{ulaz}=4\cdot10^{-4}$ i $\varepsilon_{ulaz}=6\cdot10^{-6}$ što su i vrijednosti na ulaznim rubovima.

Ovaj primjer nije bilo moguće računati programom CAFFA jer se nije moglo definirati geometrijsku mrežu na kojoj bi program konvergirao, što je vezano uz primjenu strukturirane mreže i raspoloživog generatora mreže za tu metodu. Zbog toga će ovaj test poslužiti samo za usporedbu dvaju algoritama u vlastitom programu.



Slika 5.77 Test 7 – shematski prikaz problema i geometrijska mreža

Slike 5.78 do 5.80 prikazuju brzinu konvergencije algoritma SIMPLE. Brzina konvergencije se promatra kroz promjenu normiranog masenog reziduala (normiranje je izvršeno zbrojem ulaznih masenih protoka) u funkciji broja iteracija. Na prikazanim dijagramima parametar je faktor podrelaksacije brzine α_{uv} pri čemu se svaki dijagram odnosi na konstantni faktor podrelaksacije tlaka α_p i to redom $\alpha_p=0{,}1$, 0,2 i 0,3. Za odabrane korake promjene faktora podrelaksacije optimalna kombinacija vrijednost

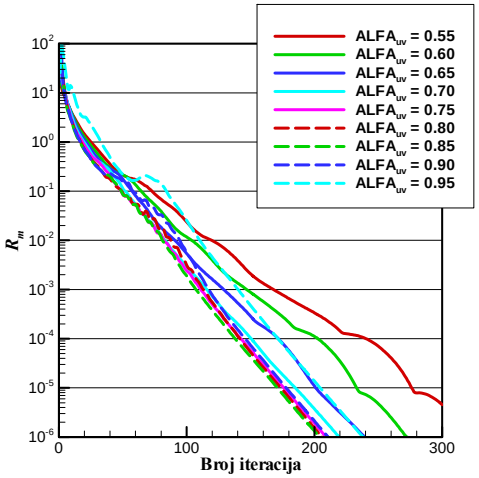
faktora podrelaksacije je $\alpha_{uv} = 0,75$ i $\alpha_p = 0,2$. Slika 5.81 prikazuje potreban broj iteracija za postizanje zadane točnosti (ovdje 10^{-6}) u funkciji faktora podrelaksacije α_{uv} i α_p. Iz slike je jasno da je dovoljno dobar izbor faktora podrelaksacije u području $0,7 < \alpha_{uv} < 0,85$ i $0,15 < \alpha_p < 0,25$

Slika 5.82 prikazuje brzinu konvergencije algoritma SIMPLER. Ponovo se povećanjem faktora α_{uv} povećava brzina konvergencije i najveća je za $\alpha_{uv} = 0,9$.

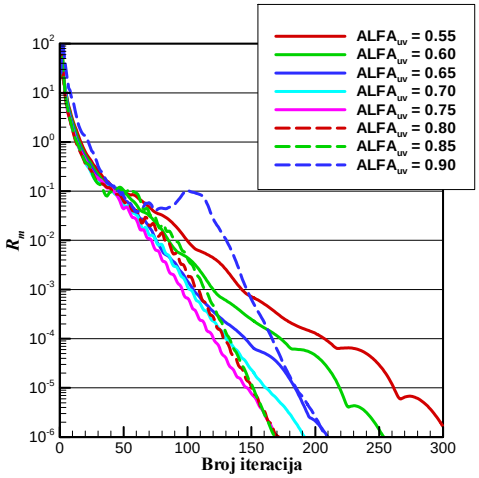
Na slici 5.83 je dana usporedba brzine konvergencije algoritma SIMPLE i SIMPLER pri proračunu ovog problema uz optimalne kombinacije vrijednosti faktore podrelaksacije. U tim uvjetima algoritam SIMPLER nešto brže konvergira od algoritma SIMPLE. Iz slike je vidljivo da je prednost algoritma SIMPLER u početku iterativnog postupka gdje su se reziduali brže smanjivali. Nakon dvadesetak iteracija ova dva algoritma konvergiraju praktički jednakom brzinom (nagibi krivulja su jednaki). Sudeći prema prethodnim testovima za to je presudna brzina konvergencije jednadžbi k i ε modela turbulencije, te će se u nastavku izvršiti analiza njihova utjecaja.

Slike 5.84 i 5.85 pokazuju utjecaj faktora podrelaksacije u jednadžbama modela turbulencije na brzinu konvergencije numeričkog postupka. Slika 5.84 se odnosi na algoritam SIMPLE, a slika 5.85 na SIMPLER. Navedeni dijagrami dobiveni su s optimalnim kombinacijama vrijednosti faktora podrelaksacije α_{uv} i α_p, a mijenjani su faktori $\alpha_{k\varepsilon}$. Ponovo je uočljiv značajan utjecaj faktora $\alpha_{k\varepsilon}$ na brzinu konvergencije postupaka. Pri malim vrijednostima faktora $\alpha_{k\varepsilon}$ brzine konvergencije dvaju postupaka su praktički jednake.

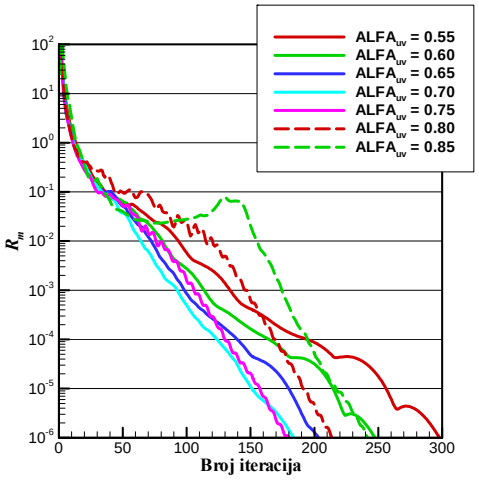
Iz slike 5.86 može se analizirati utjecaj jednadžbi modela turbulencije na brzinu konvergencije jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta. Na toj slici punim crtama prikazane su promjene masenog reziduala, te reziduala za k i ε jednadžbu pri primjeni algoritma SIMPLER uz faktore $\alpha_{uv} = 0,9$ i $\alpha_{k\varepsilon} = 0,9$. Isprekidanom crvenom crtom prikazana je promjena masenog reziduala za slučaj proračuna laminarnog strujanja (dakle bez jednadžbi modela turbulencije, uz pedeset puta veću molekularnu viskoznost i nepromijenjene ostale uvjete). Vidljivo je da algoritam SIMPLER u uvjetima rješavanja jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta konvergira gotovo dvostruko brže nego za slučaj turbulentnog strujanja. Slike 5.87 i 5.88 pokazuju sliku strujnica i izobara dobivene proračunom, i to prva za slučaj turbulentnog strujanja, a druga za slučaj laminarnog strujanja. Očito je da su slike strujanja kvalitativno slične, u laminarnom strujanju se čak pojavljuje značajnija treća zona recirkulacije, pa bi se sa stajališta rješavanja samih jednadžbi količine gibanja mogla očekivati čak i brža konvergencija numeričkog postupka za slučaj turbulentnog strujanja. S obzirom da to nije tako, smanjenje brzine konvergencije za slučaj turbulentnog strujanja može se pripisati utjecaju linearizacije u k i ε jednadžbama. Reziduali za k i ε jednadžbu prikazani isprekidanim crtama odnose se na proračun samo jednadžbi modela turbulencije na način da su polje brzine i tlaka ostali nepromijenjeni i jednaki vrijednostima dobivenim proračunom prethodno definiranog laminarnog strujanja. U ovom proračunu faktor $\alpha_{k\varepsilon}$ je bio $\alpha_{k\varepsilon} = 0,9$. Ponovo se pokazuje, kao i u prethodnom testu, da je nagib krivulja koje označuju brzinu konvergencije k i ε jednadžbi praktički jednak nagibu krivulje koja označuje brzinu konvergencije masenog reziduala iz čega se može zaključiti da je ta brzina uvjetovana brzinom konvergencije k i ε jednadžbi.



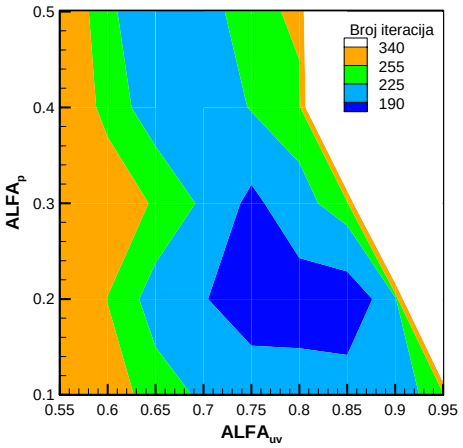
Slika 5.78 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,1$



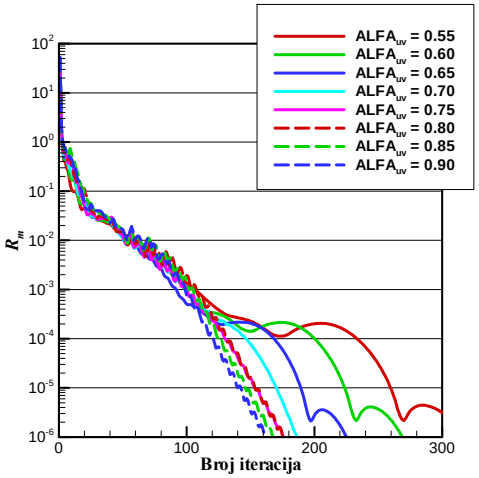
Slika 5.79 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,2$



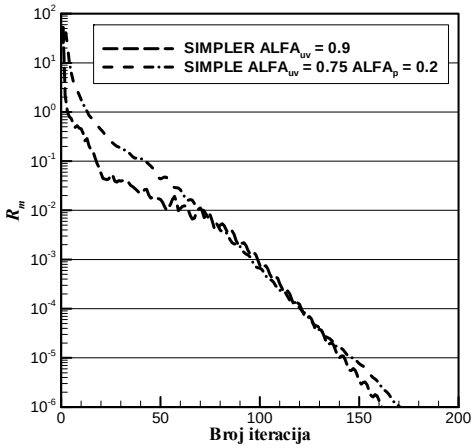
Slika 5.80 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLE za $\alpha_p = 0,3$



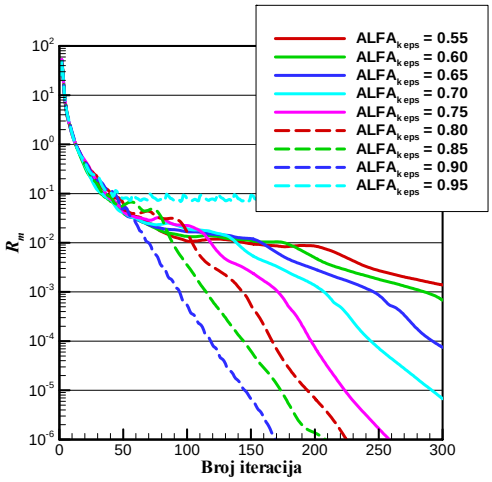
Slika 5.81 Test 7 – broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja za algoritam SIMPLE u funkciji faktora α_{uv} *i* α_p



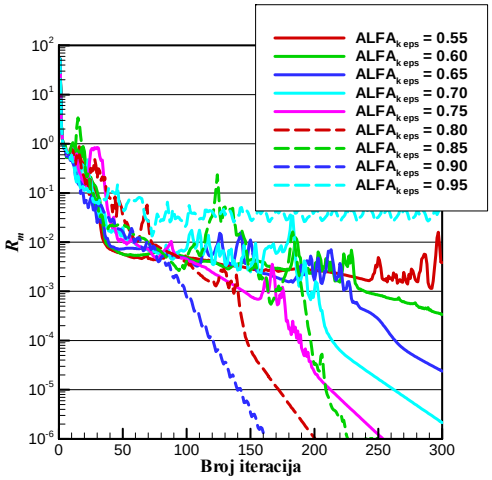
Slika 5.82 Test 7 – brzina konvergencije, algoritam SIMPLER



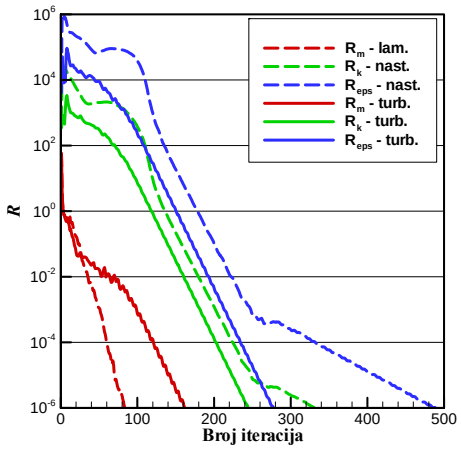
Slika 5.83 Test 7 – usporedba brzina konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER



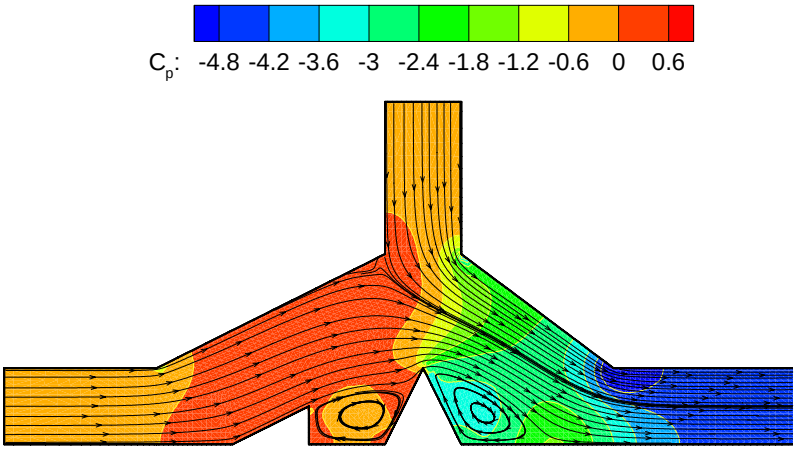
Slika 5.84 Test 7 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLE



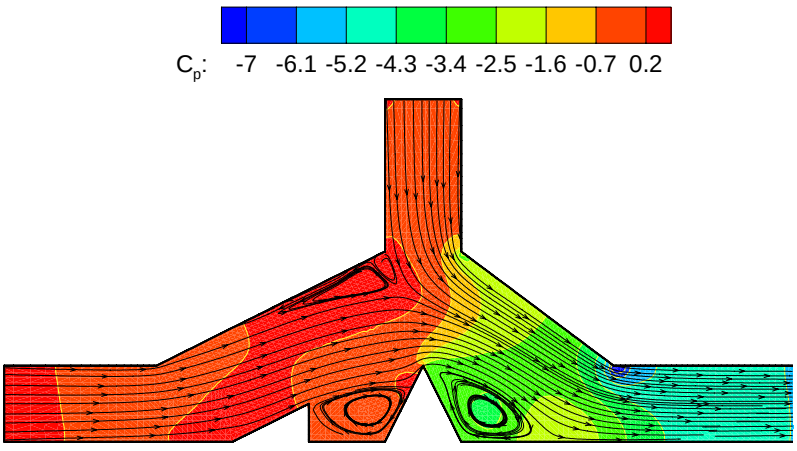
Slika 5.85 Test 7 – brzina konvergencije s promjenom $\alpha_{k\varepsilon}$, algoritam SIMPLER



Slika 5.86 Test 7 – brzina konvergencije algoritma SIMPLER u uvjetima laminarnog i turbulentnog strujanja



Slika 5.87 Test 7 – slika strujnica i izobara za slučaj turbulentnog strujanja



Slika 5.88 Test 7 – slika strujnica i izobara za slučaj laminarnog strujanja

5.5 SAŽETAK DISKUSIJE

U testu *Provođenje topline u geometrijski složenom području* je pokazano kako članovi koji su posljedica neortogonalnosti mreže, koja se primjenjuje u programu CAFFA, utječu na brzinu konvergencije numeričkog postupka. Izabrani test je dakako ekstremna situacija, jer se rješavala linearna jednadžba, pa je postupak na ortogonalnoj mreži davao rješenje u jednoj iteraciji, dok je postupak na neortogonalnoj mreži zahtijevao relativno veliki broj iteracija. Naravno da će utjecaj tih članova biti manji pri rješavanju nelinearnih jednadžbi, jer će numerički postupak imati iterativni karakter zbog same nelinearnosti tih jednadžbi.

U testu *Potencijalno strujanje u pravom kutu* je pokazan utjecaj neortogonalnosti mreže kroz jednadžbu za korekciju tlaka (članovi zbog neortogonalnosti se pojavljuju samo u toj jednadžbi). Ponovo se pokazalo da algoritmi na nestrukturiranoj lokalno ortogonalnoj mreži u vlastitom programu puno brže konvergiraju nego algoritam SIMPLE u programu CAFFA na neortogonalnoj mreži. Algoritam SIMPLER se pokazao boljim od algoritma SIMPLE. Brzina konvergencije algoritma SIMPLE u programu CAFFA pri primjeni ortogonalne mreže slična je brzini konvergencije algoritma SIMPLE u vlastitom programu. Pri povećanju gustoće mreže potreban broj iteracija za postizanje zadane točnosti je rastao približno istim faktorom. Optimalni faktori α_p u algoritmu SIMPLE u programu CAFFA su za slučaj neortogonalne mreže puno manji od odgovarajućih vrijednosti za isti algoritam u vlastitom programu. Na ortogonalnoj mreži su optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije u dva programa približno iste.

U testu *Laminarno strujanje u kosokutnoj šupljini s jednim pomičnim rubom* je ispitan utjecaj neortogonalnosti mreže u uvjetima viskoznog strujanja, te se ponovo pokazalo da algoritmi SIMPLER i SIMPLE u vlastitom programu znatno brže konvergiraju od algoritma SIMPLE u programu CAFFA kad je neortogonalnost mreže velika. Također je pokazano da svi algoritmi sporije konvergiraju za slučaj povećanja mreže ili primjene sheme diferencije višeg reda točnosti jer se u takvim shemama pojavljuju članovi koji se tretiraju kroz izvorski član primjenom vrijednosti varijabli iz prethodne iteracije. Potvrđeno je očekivanje da će rezultati proračuna na lokalno ortogonalnoj mreži u vlastitom programu biti točniji nego na neortogonalnoj u programu CAFFA uz primjenu iste sheme diferencije na mreži približno iste gustoće. U tom se primjeru algoritam SIMPLER pokazao manje osjetljiv na primjenu sheme višeg reda točnosti, sa stajališta brzine konvergencije. EDSI shema diferencije se pokazala točnijom od sheme centralne diferencije.

U testu *Laminarno strujanje u naglom proširenju* je u pravokutnoj geometriji pokazano da algoritmi SIMPLE u oba programa praktički jednako brzo konvergiraju. Pokazano je da red točnosti sheme diferencije znatno utječe na točnost rezultata proračuna. Algoritam SIMPLER se nije pokazao bržim od algoritma SIMPLE.

U testu *Turbulentno strujanje u naglom proširenju* su u odnosu na prethodni test u sustav jednadžbi koji se rješava uključene jednadžbe modela turbulencije. Budući je mreža ortogonalna, ponovo su brzine konvergencije algoritma SIMPLE u dva programa bile jednake, a algoritam SIMPLER se nije pokazao boljim. Rezultati proračuna su uspoređeni s rezultatima mjerenja i zaključeno je da su dobiveni rezultati u granicama očekivanja.

U testu *Turbulentno strujanje u zakrivljenom kanalu* ponovo su uspoređena tri algoritma, pri čemu je mreža za program CAFFA bila neortogonalna. Pokazalo se da je zbog neortogonalnosti mreže algoritam SIMPLE u programu CAFFA najsporije konvergirao, a algoritam SIMPLER je pokazao prednost u smislu brzine konvergencije nad algoritmom SIMPLE u vlastitom programu. Uočeno je da brzina konvergencije numeričkog postupka ovisi i o načinu rješavanja jednadžbi količine gibanja i o načinu linearizacije i podrelaksacije jednadžbi modela turbulencije. U ovom primjeru način rješavanja jednadžbi modela turbulencije nije smanjivao ukupnu brzinu konvergencije numeričkog postupka.

U testu *Turbulentno strujanje u složenijoj geometriji* je uspoređena brzina konvergencije algoritama SIMPLER i SIMPLE. Pokazalo se da se algoritmom SIMPLER dolazi do rješenja u nešto manje iteracija i to zahvaljujući većoj početnoj brzini konvergencije. Zaključeno je da u ovoj situaciji presudan utjecaj na brzinu konvergencije imaju jednadžbe modela turbulencije.

U ovom radu je ispitana brzina konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER, ali nije uspoređena njihova efikasnost. Naime, u algoritmu SIMPLER se u svakom iterativnom koraku rješava jedna jednadžba više i to jednadžba za tlak koju uvijek treba malo točnije riješiti, te je njeno rješavanje, kao i rješavanje jednadžbe za korekciju tlaka, skuplje (sa stajališta računalnog vremena) od rješavanja ostalih jednadžbi. U uvjetima ravninskog laminarnog strujanja (gdje se u algoritmu SIMPLE rješavaju dvije komponente jednadžbe količine gibanja i jednadžba za korekciju tlaka) ovo povećavanje iznosi najmanje 25% u smislu trajanja jedne iteracije. Prema tome, algoritam SIMPLER će biti efikasniji ako je ušteda u broju iteracija u odnosi na algoritam SIMPLE najmanje 20%. U uvjetima turbulentnog strujanja broj jednadžbi u algoritmu SIMPLE je pet, a u algoritmu SIMPLER šest, dakle grubo rečeno povećanje od 20%, te se za zadržavanje jednake efikasnosti traži ušteda u broju iteracija od oko 17%. U provedenim testovima bi se dakle moglo zaključiti da bi u nekim situacijama algoritam SIMPLER bio efikasniji, a u nekima ne. Za slučaj turbulentnog strujanja kada brzinu konvergencije određuje brzina konvergencije jednadžbi modela turbulencije, prednosti algoritma SIMPLER u smislu efikasnosti nisu izražene u velikoj mjeri.

Treba naglasiti da su se u provedenim testovima uspoređivale brzine konvergencije za slučaj optimalnih kombinacija vrijednosti faktora podrelaksacije koje se od slučaja do slučaja mijenjaju i nisu unaprijed poznate, te bi u ocjeni efikasnosti i to trebalo uzeti u obzir. Naime, za procjenu efikasnosti promatranih algoritama vrlo je bitna osjetljivost njihove konvergencije na odstupanje faktora podrelaksacije od optimalnih vrijednosti. U tom smislu je, kad se govori o rješavanju laminarnog strujanja, algoritam SIMPLER u prednosti jer je potrebno zadavati samo faktor podrelaksacije brzine α_{uv}. Pokazalo se da ga je potrebno držati što većim, a u provedenim testovima ta vrijednost je bila između 0,9 i 0,95. S te točke gledišta algoritam SIMPLE je nepovoljniji jer prvo treba zadavati dva faktora podrelaksacije i drugo, njihove optimalne kombinacije su se mijenjale u širokom rasponu (α_{uv} od 0,75 do 0,95 i α_p od 0,1 do 0,5), kao što je vidljivo u tablici 5.2. Iako bi se na temelju rezultata provedenog testiranja moglo pretpostaviti područje u kojem se nalaze optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije u nekoj novoj situaciji, i dalje bi bilo teško pouzdano pretpostaviti njihovu kombinaciju koja bi bila blizu optimalne. Postoji relacija između faktora α_{uv} i α_p oblika:

$$\alpha_{uv} + \alpha_p = 1, \tag{5.3}$$

pri kojoj bi algoritam SIMPLE trebao najbrže konvergirati, Perić 1985 [70]. Iz tablice 5.2 je očito da se zbroj vrijednosti faktora $\alpha_{uv} + \alpha_p$ za optimalne kombinacije kreće između 0,95 i 1,3 (uz ogradu da su pri traženju optimalne kombinacije, vrijednosti faktora podrelaksacije mijenjane s određenim korakom), pa se može zaključiti da je izraz (5.3) samo preporuka, koja može pomoći u izboru vrijednosti faktora podrelaksacije. Iz provedenog testiranja je također jasno da algoritam SIMPLE u programu CAFFA zahtijeva to niže faktore α_p što je neortogonalnost mreže veća.

Tablica 5.2 Optimalne kombinacije vrijednosti faktora podrelaksacije za sve testove

Test	Metoda/Program	α_{uv}	α_p
Test 2	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,80	0,5
	CAFFA	0,35	0,1
Test 3	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,95	0,1
	CAFFA	0,70	0,1
Test 4	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,95	0,1
	CAFFA	0,95	0,1
Test 5	SIMPLER	0,90	-
	SIMPLE	0,90	0,2
	CAFFA	0,90	0,2
Test 6	SIMPLER	0,95	-
	SIMPLE	0,80	0,4
	CAFFA	0,70	0,2
Test 7	SIMPLER	0,90	-
	SIMPLE	0,75	0,2

6 ZAKLJUČAK

U radu je razvijen računalni program za analizu dvodimenzijskog turbulentnog strujanja fluida koji se temelji na vlastitoj metodi generiranja lokalno ortogonalne nestrukturirane geometrijske mreže i varijanti metode konačnih volumena (MKV) na nepomaknutoj mreži. Za povezivanje polja brzine i tlaka u MKV su implementirani algoritam SIMPLE (uobičajeno korišten na nepomaknutoj mreži) i algoritam SIMPLER (koji do sada nije bio korišten na nestrukturiranoj nepomaknutoj mreži). Od shema diferencije korištene su uzvodna shema diferencije, shema centralne diferencije, kombinacija uzvodne i sheme centralne diferencije, eksponencijalna shema i vlastita varijanta unaprijeđene eksponencijalne shema diferencije.

Brzina konvergencije vlastitih varijanti MKV je uspoređena s brzinom konvergencije objavljenog računalnog programa CAFFA autora M. Perića, koji se temelji na algoritmu SIMPLE na strukturiranoj općoj neortogonalnoj mreži. Točnost rezultata vlastite metode uspoređena je s analitičkim rezultatima, eksperimentalnim rezultatima, rezultatima drugih autora ili rezultatima dobivenim komercijalnim paketom FLUENT na gustoj geometrijskoj mreži.

Iz provedenih istraživanja se može zaključiti sljedeće:

- Pri primjeni algoritma SIMPLE za određivanje polja brzine i tlaka neortogonalnost mreže značajno povećava potrebni broj iteracija za postizanje zadane točnosti rješenja i sužava područje vrijednosti faktora podrelaksacije pri kojima algoritam uopće konvergira.

- Lokalna ortogonalnost mreže rezultira većom točnošću rezultata na zadanoj gustoći geometrijske mreže uz primjenu zadane sheme diferencije i omogućuje jednostavniju primjenu shema diferencije višeg reda. Lokalna ortogonalnost mreže omogućuje i formulaciju algoritma SIMPLER.

- U primjerima sa zadanim brzinama po svim rubovima područja proračuna algoritam SIMPLER značajno brže konvergira od algoritma SIMPLE. U tim je slučajevima algoritam SIMPLER manje osjetljiv na povećanje reda točnosti sheme diferencije.

- Za slučaj turbulentnog strujanja prednost algoritma SIMPLER u smislu brzine konvergencije se gubi jer za brzinu konvergencije postaje značajna brzina konvergencije jednadžbi modela turbulencije. U tom se slučaju prednosti algoritma SIMPLER mogu očitovati kroz činjenicu da je potrebno zadavati jedan faktor podrelaksacije manje i kroz povećanu stabilnost numeričkog postupka pri visokim vrijednostima faktora podrelaksacije brzine.

Ovaj rad predstavlja originalni znanstveni doprinos u području računalne dinamike fluida, koji se ogleda u sljedećem:

- Razvijena je vlastita metoda i izrađen računalni program za analizu dvodimenzijskog turbulentnog strujanja fluida na lokalno ortogonalnoj nepomaknutoj nestrukturiranoj mreži,
- Potvrđena je hipoteza da će numerički postupak brže konvergirati na lokalno ortogonalnoj nego na neortogonalnoj mreži. Također je potvrđena veća točnost rezultata uz primjenu predložene nestrukturirane geometrijske mreže u odnosu na strukturiranu neortogonalnu mrežu,
- Po prvi puta je primijenjen algoritam SIMPLER na nepomaknutoj lokalno ortogonalnoj nestrukturiranoj mreži koji je u većini primjera brže konvergirao od algoritma SIMPLE.

U nastavku istraživanja potrebno je:

- Istražiti mogućnosti dodatnog poboljšanja algoritma SIMPLER u uvjetima strujanja s izlaznim rubom, kroz modifikacije u jednadžbi za tlak.
- Pronaći efikasniji algoritam za razrješavanje nelinearnosti u jednadžbama modela turbulencije, koji ne bi usporavao konvergenciju ukupnog numeričkog postupka.
- Usporediti brzinu konvergencije algoritama SIMPLE i SIMPLER uz primjenu višemrežnih (multigrid) metoda.

LITERATURA

[1] Abbot P. B., Basco D. R.: Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers, Longman Science & Technology, 1990.

[2] Ashford G. A.: An Unstructured Grid Generation and Adaptive Solution Technique for High-Reynolds-Number Compressible Flows, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1996.

[3] Barton I. E., Markham-Smith D., Bressloff N.: Finite Volume Scheme for the Solution of Fluid Flow Problems on Unstructured Non-Staggered Grids, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 38, 747-768, 2002.

[4] Barton I. E.: Comparison of SIMPLE- and PISO-Type Algorithms for transient Flows, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 26, 459-483, 1998.

[5] Bathe C. J.: Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[6] Biagioli F.: Calculation of Laminar Flows with Second-Order Schemes and Collocated Variable Arrangement, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 26, 887-905, 1998.

[7] Bier R. A., Ris J., Baum H. R.: Accuracy of Finite-Difference Method in Recirculating Flows, Numerical Heat Transfer, Vol. 6, 283-302, 1983.

[8] Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.: Transport Phenomena, John Wiley & Sons, Inc, New York London Sydney, 1960.

[9] Bose T. K.: Computational fluid dynamics, John Wiley & Sons, Inc. 1988.

[10] Braaten M. E., Shyy W.: Comparison of Iterative and Direct Method for Viscous Flow Calculations in Body-Fitted Coordinates, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 325-349, 1986.

[11] Bradshav P.: Engineering calculation methods for turbulent flows, Academic Pres Inc., London, 1981.

[12] Cebeci T., Cousteix J.: Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.

[13] Chen Y., Falconer R. A.: Advection-Diffusion Modelling Using the Modified QUICK Scheme, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, 1171-1196, 1992.

[14] Choi H., Lee D., Maeng J.: A Node-Centered Pressure-Based Method for All Spead Flows on Unstructured Grids, Numerical Heat Transfer, Vol. 44, 165-185, 2003.

[15] Demmel J. W.: Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997.

[16] Deng Q. H., Tang G. F.: Special Treatment of Pressure Correction Based on Continuity Conservation in a Pressure-Based Algorithm, Numerical Heat Transfer, Vol. 42, 73-92, 2002.

[17] Doormaal J. P., Raithby G. D.: An Evaluation of the Segregated Approach for Predicted Incompressible Fluid Flows, ASME Paper 85.HT.9, 1985

[18] Doormaal J. P., Raithby G. D.: Enhancement of SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, Numerical Heat Transfer, Vol. 7, 147-163, 1984.

[19] Džijan I.: Razvoj metode kontrolnih volumena na nestrukturiranoj mreži, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2000.

[20] Fancev M.: Tehnička enciklopedija br. 8, članak „Mehanika fluida" str. 67-173, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 1982.

[21] Ferzinger J. H., Perić M.: Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1996.

[22] Fletcher C. A. J.: Computational Techniques for Fluid Dynamics – A Solutions Manual, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992.

[23] Fletcher C. A. J.: Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Springer-Verlag, New York, 1988.

[24] Fletcher C. A. J.: Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, Springer-Verlag, New York, 1988.

[25] Gallagher R. H., Zienkiewicz O. C., Oden J. T., Cecchi M. M., Taylor C.: Finite Elements in Fluids, Vol. 3 - 6, John Wiley and Sons, New York, 1978.

[26] Gaskell P. H., Lau A. K. C.: Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, a New Boundedness-Preserving Transport Algorithm, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, 617-641, 1988.

[27] Gordon W. J., Hall C. A.: Construction of Curvilinear Co-ordinate Systems and Applications to Mesh Generation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 7, 461-477, 1973.

[28] Hackman L. P., Raithby G. D., Strong A. B.: Mumerical Predictions of Flows Over Backward-Facing Steps, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, 711-724, 1984.

[29] Harten A.: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Journal of Computational Physics, Vol. 49, 357-393, 1983.

[30] Hinze J. O.: Turbulence, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1975.

[31] Hirsch C.: Numerical Computation of Internal and External Flows, John Wiley and Sons, New York, 1988.

[32] Hu Z. Z., Greaves D. M., Wu G. X.: Numerical Simulation of Fluid Using an Unstructured Finite Volume Method with Adaptive Tri-Tree Grids, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 39, 403-440, 2002.

[33] Hufford G. S., Mitchell C. R.: The Generation of Hybrid and Unstructured Grids Using Curve and Area Sources, 33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA-95-0215, 1-13, Reno, January 9-12 1995.

[34] Incropera F. P., DeWitt D. P.: Introduction to Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, 1996.

[35] Issa R. I.: Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equation by Operator-Splitting, J. Comput. Phys., Vol. 62, 40-65, 1985.

[36] Jang D. S., Jetli R., Acharya S.: Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems, Numerical Heat Transfer, Vol. 10, 209-228, 1986.

[37] Jasak H., Weller H. G., Gosman A. D.: High Resolution NVD Differencing Scheme for Arbitrarily Unstructured Meshes, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31, 431-449, 1999.

[38] Jasak H.: Improving the Accuracy of Numerical Solution Procedures in Computational Fluid Dynamics, Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1995.

[39] Kang S., Kim Y.: Pressure-Based Unstructured-Grid Finite-Volume Method for Simulating Laminar Reacting Flows, Numerical Heat Transfer, Vol. 41, 53-72, 2002.

[40] Kim J., Moin P.: Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, Vol. 59, 308-323, 1985.

[41] Kinney R. B., Mahdi H. S.: A New Finite-Volume Approach with Adaptive Upwind Convection, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988., Vol. 26, 1325-1343, 1988.

[42] Knupp P., Steinberg S.: Fundamentals of Grid Generation, CRC Press, Florida, 1994.

[43] Korbar R.: Metoda rješavanja $k-\varepsilon$ modela turbulencije u općim koordinatama, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1992.

[44] Laney C. B.: Computational Gasdynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[45] Lapworth B. L.: Examination of Pressure Oscillations Arising in the Computation of Cascade Flow Using a Boundary-Fitted Co-Ordinate System, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, 387-404, 1988.

[46] Latimer B. R., Pollard A.: Comparison of Pressure-Velocity Coupling Solution Algorithms, Numerical Heat Transfer, Vol. 8, 635-652, 1985.

[47] Launder B. E., Spalding D. B.: Mathematical models of turbulence, Academic Press London and New York, 1972.

[48] Lee S. L., Tzong R. Y.: Artificial Pressure for Pressure-Linked Equation, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, 2705-2716, 1992.

[49] Lehnhaeuser T., Schaefer M.: Efficient Discretization of Pressure-Correction Equations on Non-Orthogonal Grids, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 42, 211-231, 2003.

[50] Leonard B. P.: A Stable and Accurate Convection Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, 59-98, 1979.

[51] Leonard B. P.: Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 8, 1291-1318, 1998.

[52] Lien F. S.: A Pressure Based Unstructured Grid Method for All-Speed Flows, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 33, 355-374, 2000.

[53] Löhner R.: Finite Element in CFD: What Lies Ahead, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 9, 325-340, 1989.

[54] Lositsyanski L. G., Nunn R. H.: Mechanics of Liquids and Gases, Begell house inc, New York-Wallingford, 1995.

[55] Malumdar S.: Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation of Flow with Nonstaggered Grids, Numerical Heat Transfer, Vol. 13, 125-132, 1988.

[56] Maruszewski J. P., Amano R. S.: Grid Generation and Its Application to Separated Flows, Numerical Heat Transfer, Vol. 21, 183-197, 1992.

[57] Mavriplis D. J.: Unstructured Grid Techniques, Annual Reviews Fluid Mechanics, 29, 473-514, 1997.

[58] Mavriplis D. J.: Unstructured Mesh Generation and Adaptivity, ICASE Report No. 95-26, NASA Langley Research Center, Hampton, 1995.

[59] Miller T. F., Schmidt F. W.: Use of a Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System, Numerical Heat Transfer, Vol. 14, 213-233, 1988.

[60] Mitchell C. R.: Improved Reconstruction Schemes for the Navier Stokes Equations on Unstructured Meshes, 32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA-94-0642, 1-15, Reno, January 10-13 1994.

[61] Moukalled F., Darwish M.: A Unified Formulation of the Segregated Class of Algorithms for Fluid Flow at All Speeds, Numerical Heat Transfer, Vol. 37, 103-139, 2000.

[62] Moukalled F., Darwish M.: Pressure-Based Algorithms for Multifluid Flow at All Speeds – Part I: Mass Conservation Formulation, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, 495-522, 2004.

[63] Moukalled F., Darwish M.: Pressure-Based Algorithms for Multifluid Flow at All Speeds – Part I: Geometric Conservation Formulation, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, 523-540, 2004.

[64] Munson B. R., Young D. F., Okiishi T. H.: Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[65] Patankar S. V., Spalding D. B.: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, International Textbook Company Ltd. London 1980.

[66] Patankar S. V., Spalding D. B.: A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, 1787-1806, 1972.

[67] Patankar S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, Washington-New York-London, 1980.

[68] Patankar S. V.: A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations, Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 409-425, 1981.

[69] Patel M. K., Markatos N. C., Cross M: A Critical Evaluation of Seven Discretization Scheme for Convection-Diffusion Equations, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 5, 225-244, 1985.

[70] Perić M.: A finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts, doctor thesis, University of London Imperial College, 1985.

[71] Perić M.: Analysis of Pressure-Velocity Coupling on Nonorthogonal Grids, Numerical Heat Transfer, Vol. 17, 63-82, 1990.

[72] Peterson P. F.: A Method for Predicting and Minimizing Numerical Diffusion, Numerical Heat Transfer, Vol. 21, 343-366, 1992.

[73] Prakash C.: Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection-Diffusion Equation, Numerical Heat Transfer, Vol. 7, 165-182, 1984.

[74] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.: Numerical Recipes in FORTRAN Second Edition, Cambridge University Press, 1992.

[75] Qin N., Ludlow D. K., Shaw S. T.: A Matrix-Free Preconditioned Newton/GMRES Method for Unsteady Navier-Stokes Solutions, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 33, 223-248, 2000.

[76] Raithby G. D., Schneider G. E.: Elliptic System: Finite Difference Method II, u Minkowycz W. J., Sparrow E. M., Pletcher R. H., Schneider G. E. (eds.), Handbook of Numerical Heat Transfer, 241-289, Wiley, New York, 1988.

[77] Ray S., Date A. W.: A Calculation Procedure for Incompressible Navier-Stokes Equations on Curvilinear Non-Staggered Grids, Numerical Heat Transfer, Vol. 38, 93-131, 2000.

[78] Rhie C. M., Chow W. L.: A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation, AIAA J., Vol. 21, 1525-1532, 1983.

[79] Rida S., McKenty F., Meng F. L., Reggio M.: A Staggered Control Volume Scheme for Unstructured Triangular Grids, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, 697-717, 1997.

[80] Roache P. J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, 1973.

[81] Roychowdhury D. G., Das S. K., Sundararajan T.: An Efficient Solution Method for Incompressible N-S Equations Using Non-Orthogonal Collocated Grid, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, 741-763, 1999.

[82] Runchal A. K.: CONDIF: A Modified Central-Difference Scheme with Unconditional Stability and Very Low Numerical Diffusion, Proceedings of the Eight International Heat Transfer Conference, Vol. 2, 403-408, San Francisco, 1986.

[83] Runchal A. K.: Convergence and Accuracy of Three Finite Difference Schemes for a two-dimensional Conduction and Convection Problem, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, 541-550, 1972.

[84] Saad Y., Schultz M. H.: GMRES: a Generalized Minimum Residual Algorithm for Solving Non-Symmetric Linear Systems, SIAM Journal on Scietific and Statistical Computing, Vol. 7, 856-869, 1986.

[85] Schiffermüller H.: Higher Order Differencing Schemes and their Application to Multi-Dimensional Flow Problems, Ph. D. Thesis, Fakultät für Mathematik, Technische Universität Graz, 1993.

[86] Schlichting H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1960.

[87] Shen W. Z., Michelsen J. A., Sorensen N. N., Sorensen J. N.: An Improved SIMPLEC Method on Collocated Grids for Steady and Unsteady Flow Computations, Numerical Heat Transfer, Vol. 43, 221-239, 2003.

[88] Simoncini V.: A New Variant of Restarted GMRES, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 6, 61-77, 1999.

[89] Spalding D. B.: A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 4, 551-559, 1972.

[90] Spurk J.: Fluid Mechanics, Springer Verlag, Berlin 1997.

[91] Stone H. L.: Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations, SIAM J. Num. Anal., Vol. 5, 530-558, 1968.

[92] Swaminathan C. R., Voller V. R.: Streamline Upwind Scheme for Control-Volume Finite Elements, Part II. Implementation and Comparison with the SUPG Finite-Element Scheme, Numerical Heat Transfer, Vol. 22, 109-124, 1992.

[93] Šavar M.: Smanjenje numeričke difuzije pri proračunu nestacionarnog jednodimenzijskog strujanja fluida, Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1996.

[94] Tamamidis P., Assanis D. N.: Evaluation of Various High-Order-Accuracy Schemes with and without Flux Limiters, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 16, 931-948, 1993.

[95] Tao W. Q., Qu Z. G., He Y. L.: A Novel Segregated Algorithm for Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems – CLEAR (Coupled and Linked Equations Algorithm Revised) Part I: Matematical Formulation and Solution Procedure, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, 1-18, 2004.

[96] Tao W. Q., Qu Z. G., He Y. L.: A Novel Segregated Algorithm for Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems – CLEAR (Coupled and Linked Equations Algorithm Revised) Part II: Application Examples, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, 1-18, 2004.

[97] Tsui Y. Y.: A Study of Upstream-Weighted High-Order Differencing for Approximation to Flow Convection, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 13, 167-199, 1991.

[98] Tzanos C. P.: Central Difference-Like Approximation for the Solution of the Convection-Diffusion Equation, Numerical Heat Transfer, Vol. 17, 97-112, 1990.

[99] Vasconcellos J. F. V., Maliska C. R.: A Finite-Volume Method Based on Voronoi Discretization for Fluid Flow Problems, Numerical Heat Transfer, Vol. 45, 319-342, 2004.

[100] Venkatakrishnan V.: Perspective on Unstructured Grid Flow Solvers, AIAA Journal, Vol. 34, 533-547, March 1996.

[101] Virag Z., Trincas G.: An Improvement of the Exponential Differencing Scheme for Solving the Convection-Diffusion Equation, Advances in Engineering Software, Vol. 19, 1-19, 1994.

[102] Virag Z.: Automatizacija postupka numeričkog rješavanja ravninskog turbulentnog strujanja, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1985.

[103] Virag Z.: Proračun strujanja fluida u složenim geometrijama metodom konačnih volumena, Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1991.

[104] Wang Y., Komori A.: Comparison of Using Cartesian and Covariant Velocity Components on Non-Orthogonal Collocated Grids, Int. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31, 1265-1280, 1999.

[105] Wilcox D. C.: Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries; 2nd Bk&Dk edition, 1998.

[106] Woodfield P. L., Suzuki K., Nakabe K.: Performance of a Three-Dimensional, Pressure-Based, Unstructured Finite-Volume Method for Low-Reynolds-Number Incompressible Flow and Wall Heat Transfer Rate Prediction, Numerical Heat Transfer, Vol. 43, 403-423, 2003.

[107] Yu B., Kawaguchi Y., Tao W. Q., Ozoe H.: Checkerboard Pressure Predictions Due to the Underrelaxation Factor and Time Step Size for a Nonstaggered Grid with Momentum Interpolation Method, Numerical Heat Transfer, Vol. 41, 85-94, 2002.

[108] Yu B., Tao W. Q., Wei J. J., Kawaguchi Y., Tagawa T., Ozoe H.: Discussion on Momentum Interpolation Method for Collocated Grids of Incompressible Flow, Numerical Heat Transfer, Vol. 42, 141-166, 2002.

[109] Zhu J.: A Low-Diffusive and Oscillation-Free Convection Scheme, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 7, 225-232, 1991.

[110] Zhu J.: On the Higher-Order Bounded Discretization Schemes for Finite Volume Computations of Incompressible Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 98, 345-360, 1992.

[111] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics, Fifth edition, Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.

[112] Zitko J.: Generalization of Convergence Conditions for a Restarted GMRES, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 7, 117-131, 2000.

ŽIVOTOPIS

Prezime, ime:		Džijan, Ivo
Datum rođenja:		6. travanj 1969.
Mjesto rođenja:		Bok, BiH
Bračno stanje:		Neoženjen
Osnovna škola:	1976. – 1984.	Osnovna škola u Boku
Srednja škola:	1984. – 1988.	Školski centar u Orašju
		Strojarski tehničar
Vojni rok:	1988. – 1989.	
Studij:	1989. – 1993.	Sveučilište u Novom Sadu Fakultet tehničkih znanosti
		Studij strojarstva Smjer: Mehanika i strojarske konstrukcije
	1993. – 1996.	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
		Studij strojarstva Smjer: Strojarske konstrukcije
		Diplomirani inženjer strojarstva
Poslijediplomski studij:	1996. –	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
		Poslijediplomski studij Smjer: Teorija konstrukcija
		Magistar tehničkih znanosti
Namještenje:	Listopad 1996. –	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
		Asistent na Katedri za mehaniku fluida
Znanje jezika:		Engleski – Dobro

BIOGRAPHY

Family name, Forename:		Džijan, Ivo
Date of birth:		6 April, 1969
Place of birth:		Bok, BiH
Marital status:		Single
Primary school:	1976. – 1984.	Primary school in Bok
Secondary school:	1984. – 1988.	Secondary school in Orašje
		Technician in Mechanical Engineering
Military service:	1988. – 1989.	
Study:	1989. – 1993.	University of Novi Sad Faculty of Technical Science
		Study of Mechanical Engineering, Mechanics and Machine Design
	1993. – 1996.	University of Zagreb Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture
		Study of Mechanical Engineering, Machine Design
		B. Sc. in Mechanical Engineering
Postgraduate study:	1996. –	University of Zagreb Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture
		Postgraduate Study, Theory of Design
		M. Sc. in Mechanical Engineering
Employment:	October 1996. –	University of Zagreb Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture
		Assistant at the Chair of Fluid Mechanics
Foreign language:		English – Good