

# Istraživanje nosivosti klizno-valjnih parova

---

Žeželj, Dragan

Scientific master's theses / Magistarski rad

2002

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:711870>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering  
and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ISTRAŽIVANJE NOSIVOSTI  
KLIZNO-VALJNIH PAROVA**

MAGISTARSKI RAD

Mentor:

Dr. sc. Milan OPALIĆ, red. prof.

Dragan ŽEŽELJ, dipl. inž.

ZAGREB, 2002.

## **PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU:**

---

UDK: 621.8

Ključne riječi: klizno-valjni parovi, kontaktno naprezanje, viskozitet, podmazivanje

Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI

Znanstveno polje: STROJARSTVO

Institucija u kojoj je rad izrađen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

Mentor rada: Dr. sc. Milan OPALIĆ, red. prof.

Broj stranica: 125

Broj slika: 66

Broj tablica: 7

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 92

Datum obrane:

Povjerenstvo:

Dr. sc. Ivo ALFIREVIĆ, red. prof. – predsjednik povjerenstva

Dr. sc. Milan OPALIĆ, red. prof. – voditelj

Dr. sc. Jože FLAŠKER, red. prof. Fakulteta za strojništvo, Maribor – član  
povjerenstva

Institucija u kojoj je rad pohranjen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

## **ZAHVALA**

---

Zahvaljujem mentoru, prof. dr. sc. Milanu Opaliću na pomoći i korisnim savjetima koje mi je dao, te na vođenju tijekom izrade ovoga rada.

Prof. dr. sc. Petru Rakamariću i djelatnicima Katedre za elemente strojeva i konstrukcija, te djelatnicima Zavoda zahvaljujem na pruženoj potpori i razumjevanju.

Svojoj obitelji zahvaljujem na strpljenju i podršci za sve vrijeme koje su proveli bez mene.

## SADRŽAJ

|                                                                                                         |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| POPIS SLIKA .....                                                                                       | VII   |
| POPIS TABLICA.....                                                                                      | X     |
| POPIS OZNAKA .....                                                                                      | XI    |
| PREDGOVOR.....                                                                                          | XVI   |
| SAŽETAK RADA.....                                                                                       | XVII  |
| SUMMARY .....                                                                                           | XVIII |
| <br>                                                                                                    |       |
| 1. UVOD .....                                                                                           | 1-1   |
| 1.1. HERTZOV NEPOSREDNI DODIR .....                                                                     | 1-1   |
| 1.2. KLIZNO-VALJNI PAROVI .....                                                                         | 1-3   |
| 1.3. TROŠENJE POVRŠINA DODIRA.....                                                                      | 1-5   |
| 1.3.1. VRSTE OŠTEĆENJA .....                                                                            | 1-7   |
| 1.3.2. POSTOJANOST NA TROŠENJE.....                                                                     | 1-11  |
| 1.4. POSREDNI DODIR .....                                                                               | 1-12  |
| 2. KLASIČNA TEORIJA HIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA .....                                                  | 2-1   |
| 2.1. TEORIJSKE OSNOVE .....                                                                             | 2-1   |
| 2.1.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA .....                                                                      | 2-1   |
| 2.1.2. TEORIJSKA ANALIZA .....                                                                          | 2-2   |
| 2.1.3. RASPODJELA BRZINA.....                                                                           | 2-4   |
| 2.1.4. SOMMERFELDOV BROJ.....                                                                           | 2-5   |
| 2.1.5. GRANIČNO PODMAZIVANJE.....                                                                       | 2-6   |
| 2.1.6. KAVITACIJA.....                                                                                  | 2-10  |
| 2.2. PRIMJENA HD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE .....                                                       | 2-12  |
| 2.2.1. TEORIJSKA ANALIZA .....                                                                          | 2-12  |
| 2.2.2. SPOSOBNOST NOŠENJA .....                                                                         | 2-16  |
| 2.2.3. REŽIMI TRENJA.....                                                                               | 2-18  |
| 2.2.4. MOMENT TRENJA.....                                                                               | 2-20  |
| 2.2.5. PORAST TEMPERATURE .....                                                                         | 2-21  |
| 2.2.6. POSTUPAK RJEŠAVANJA.....                                                                         | 2-22  |
| 3. TEORIJA ELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA .....                                                     | 3-1   |
| 3.1. TEORIJSKE OSNOVE .....                                                                             | 3-1   |
| 3.1.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA I OSNOVNE POSTAVKE .....                                                   | 3-1   |
| 3.1.2. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ BEZ RELATIVNOG KLIZANJA .....                                        | 3-2   |
| 3.1.3. POSTUPAK RJEŠAVANJA .....                                                                        | 3-4   |
| 3.1.4. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ S RELATIVNIM KLIZANJEM.....                                          | 3-5   |
| 3.1.5. OSNOVNI PRORAČUNSKI PARAMETRI .....                                                              | 3-9   |
| 3.1.6. ELASTOHIDRODINAMIČKA ZNAČAJKA .....                                                              | 3-11  |
| 3.1.7. REOLOŠKI MODELI .....                                                                            | 3-11  |
| 3.1.8. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ ELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA<br>PSEUDOPLASTIČNIM MAZIVOM ..... | 3-13  |

|                                                                                           |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3.2. PRIMJENA EHD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE.....                                         | 3-19 |
| 3.2.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA .....                                                        | 3-19 |
| 3.2.2. TEORIJSKA ANALIZA .....                                                            | 3-20 |
| 3.2.3. ANALIZA ČAHURE LEŽAJA.....                                                         | 3-23 |
| 3.2.4. NE-NEWTONOV MODEL MAZIVOG ULJA .....                                               | 3-23 |
| 3.2.5. POSTUPAK RJEŠAVANJA .....                                                          | 3-24 |
| 3.2.6. PREDODŽBA REZULTATA .....                                                          | 3-24 |
| 4. TEORIJA TERMOELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA .....                                  | 4-1  |
| 4.1. TEORIJSKE OSNOVE .....                                                               | 4-1  |
| 4.1.1. OPĆENITO O PODMAZIVANJU PRI VISOKIM TEMPERATURAMA.....                             | 4-1  |
| 4.1.2. TEORIJSKA ANALIZA .....                                                            | 4-3  |
| 4.1.3. POSTUPAK RJEŠAVANJA .....                                                          | 4-7  |
| 4.1.4. PREDODŽBA REZULTATA .....                                                          | 4-9  |
| 4.1.5. PRIJEDLOG POJEDNOSTAVLJENIH IZRAZA ZA PRORAČUNSKE BEZDIMENZIJSKE<br>PARAMETRE..... | 4-19 |
| 4.2. PRIMJENA TEHD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE .....                                       | 4-22 |
| 4.2.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA .....                                                        | 4-22 |
| 4.2.2. TEORIJSKA ANALIZA .....                                                            | 4-23 |
| 4.2.3. GRANIČNI UVJETI .....                                                              | 4-26 |
| 4.2.4. POSTUPAK RJEŠAVANJA .....                                                          | 4-27 |
| 4.2.5. PREDODŽBA REZULTATA .....                                                          | 4-28 |
| 5. ZAKLJUČAK.....                                                                         | 5-1  |
| 5.1. REZULTATI RADA .....                                                                 | 5-1  |
| 5.2. SMJEROVI DALJNJEG ISTRAŽIVANJA .....                                                 | 5-2  |
| 6. LITERATURA .....                                                                       | 6-1  |
| KRATKI ŽIVOTOPIS .....                                                                    | XIX  |

|             |                                                                                                                                                                                                    |      |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Slika 1.1.  | Principijelni prikaz kliznog radijalnog ležaja opterećenog silom $F$ u stanju mirovanja ( $\omega_1 = 0$ ) i tzv. suhom dodiru .....                                                               | 1-4  |
| Slika 1.2.  | Shematski prikaz trošenja rukavca i čahure kliznog radijalnog ležaja [6].....                                                                                                                      | 1-5  |
| Slika 1.3.  | Vremenski periodi trošenja površina koje su u dodiru [6].....                                                                                                                                      | 1-6  |
| Slika 1.4.  | Prepoznatljiv oblik oštećenja kod zaribavanja .....                                                                                                                                                | 1-8  |
| Slika 1.5.  | Ovisnost optimalne sume faktora pomaka profila o jediničnom temperaturnom udaru [5] .....                                                                                                          | 1-9  |
| Slika 1.6   | Pojava pittinga i na ulaznoj strani zuba kod loše slike nošenja [10] .....                                                                                                                         | 1-9  |
| Slika 1.7   | Rasipanje postignutog broja ciklusa prije pojave rupičenja kod 30 jednakih ležajeva FAG 6309 [11].....                                                                                             | 1-10 |
| Slika 1.8   | Utjecaj opterećenja na povećanje rupičenjem oštećene površine. Brzina klizanja $v_k=2,9$ m/s je konstanta. [10] .....                                                                              | 1-10 |
| Slika 1.9   | Krivulja dodirne izdržljivosti .....                                                                                                                                                               | 1-11 |
| Slika 1.10. | Osnovni princip na kojem se temelji studija .....                                                                                                                                                  | 1-13 |
| Slika 2.1.  | Opći slučaj klizanja uz prisustvo tekućeg maziva .....                                                                                                                                             | 2-2  |
| Slika 2.2.  | Ravnoteža elementa mazivog filma.....                                                                                                                                                              | 2-4  |
| Slika 2.3.  | Režimi podmazivanja za par kliznih površina.....                                                                                                                                                   | 2-7  |
| Slika 2.4.  | Granično podmazivanje pri klizanju metala po metalu .....                                                                                                                                          | 2-9  |
| Slika 2.5.  | Predodžba pojave kavitacije na primjeru opterećenog i podmazivanog dodira po crti između cilindra i ravne podloge .....                                                                            | 2-11 |
| Slika 2.6.  | Shematska predodžba kliznog radijalnog ležaja s općenitom raspodjelom hidrodinamičkog tlaka $p=f(\varphi, y)$ ispod rukavca .....                                                                  | 2-12 |
| Slika 2.7.  | Shematska predodžba poprečnog presjeka kliznog radijalnog ležaja (veza sa slikom 2.6 i slikom 1.1).....                                                                                            | 2-13 |
| Slika 2.8.  | Stvarna i teorijska raspodjela hidrodinamičkog tlaka u kliznom radijalnom ležaju (a - teorijska raspodjela, b - raspodjela glede stvarnih graničnih uvjeta, c - krivulja prirasta tlaka) [19]..... | 2-15 |
| Slika 2.9.  | Shematska predodžba za određivanje sposobnosti nošenja i momenta trenja u kliznom radijalnom ležaju .....                                                                                          | 2-16 |
| Slika 2.10. | Prošireni <i>Sommerfeldov broj</i> $So \cdot (1-\varepsilon)$ ovisan o relativnoj ekscentričnosti $\varepsilon$ i omjeru $B/D$ [21].....                                                           | 2-17 |
| Slika 2.11. | Shematizirana <i>Stribeckova krivulja</i> kod kliznog radijalnog ležaja za konstantnu (a) i promjenljivu (b) temperaturu [21] .....                                                                | 2-18 |
| Slika 2.12. | Najniže vrijednosti dopuštene minimalne debljine mazivog filma $h_{dop}$ i hrapavosti $R_a$ ovisne o promjeru ležaja $D$ [21].....                                                                 | 2-19 |
| Slika 2.13. | Temperatura u ležaju kod temperature okoliša $T_0 \neq 20^\circ\text{C}$ [21] .....                                                                                                                | 2-22 |
| Slika 2.14. | Iteracijski naizmjenični proračun kliznog radijalnog ležaja [18] .....                                                                                                                             | 2-23 |
| Slika 3.1.  | Primjer poopćenog elastohidrodinamičkog problema (kruti cilindar i deformabilna ravna podloga) [27].....                                                                                           | 3-2  |
| Slika 3.2.  | Opća iteracijska metoda rješavanja problema elastohidrodinamičkog podmazivanja.....                                                                                                                | 3-4  |
| Slika 3.3.  | Kruti cilindar i deformabilna (elastična) ravna podloga uz relativno klizanje i elastohidrodinamičko podmazivanje.....                                                                             | 3-6  |

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Slika 3.4.  | Karakteristična raspodjela tlaka i debljine mazivog filma kod elastohidrodinamičkog podmazivanja dodira po crti [28] .....                                                                                                                                                                                                                            | 3-6  |
| Slika 3.5.  | Utjecaj promjene viskoziteta i elastične deformacije na raspodjelu hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma: a - kruti cilindar, konstantni viskozitet maziva; b - kruti cilindar, viskozitet maziva ovisan o tlaku; c - elastični cilindar, konstantni viskozitet maziva; d - elastični cilindar, viskozitet maziva ovisan o tlaku. [27] ..... | 3-8  |
| Slika 3.6.  | Utjecaj relativne brzine klizanja na promjenu debljine mazivog filma [27] .....                                                                                                                                                                                                                                                                       | 3-9  |
| Slika 3.7.  | Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za $F=2,05 \cdot 10^{-5}$ , $U=1,0 \cdot 10^{-11}$ i $G=5,0 \cdot 10^3$ [33] .....                                                                                                                                                                                                          | 3-16 |
| Slika 3.8.  | Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za $F=2,05 \cdot 10^{-5}$ , $G=5,0 \cdot 10^3$ i $\bar{N}_K=1,0 \cdot 10^2$ [33] .....                                                                                                                                                                                                      | 3-17 |
| Slika 3.9.  | Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za $U=1,0 \cdot 10^{-11}$ , $G=5,0 \cdot 10^3$ i $\bar{N}_K=1,0 \cdot 10^2$ [33] .....                                                                                                                                                                                                      | 3-17 |
| Slika 3.10. | Shematska predodžba poprečnog presjeka kliznog radijalnog ležaja (dovod mazivog ulja nalazi se u gornjoj polovici) [54].....                                                                                                                                                                                                                          | 3-21 |
| Slika 3.11. | Ovisnost minimalne debljine mazivog filma $H_{\min}$ o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54].....                                                                                                                                                                                                               | 3-25 |
| Slika 3.12. | Ovisnost minimalne debljine mazivog filma $H_{\min}$ o opterećenju $F$ za zadanu krutost $K$ i koeficijent deformacije $C_D$ [54].....                                                                                                                                                                                                                | 3-25 |
| Slika 3.13. | Ovisnost kuta položaja $\Phi$ o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54].....                                                                                                                                                                                                                                      | 3-26 |
| Slika 3.14. | Ovisnost relativne ekscentričnosti $\varepsilon$ o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54].....                                                                                                                                                                                                                   | 3-27 |
| Slika 3.15. | Ovisnost postranog toka $\bar{Q}_p$ o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54].....                                                                                                                                                                                                                                | 3-27 |
| Slika 3.16. | Ovisnost granične brzine vrtnje rukavca $\bar{\Omega}$ o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54] .....                                                                                                                                                                                                            | 3-28 |
| Slika 3.17. | Ovisnost omjera frekvencije vrtnje ( $\bar{v}$ ( $\bar{v} = v / \omega_1$ )) o koeficijentu deformacije $C_D$ za zadano opterećenje $F$ i krutost $K$ [54].....                                                                                                                                                                                       | 3-29 |
| Slika 4.1.  | Ovisnost viskoziteta o temperaturi za različite vrste ulja [61].....                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 4-2  |
| Slika 4.2.  | Ovisnost faktora trenja o izrazu $(\eta \cdot U/p)$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 4-3  |
| Slika 4.3.  | Poopćena predodžba podmazivanog dodira po crti (cilindra i ravne podloge) s elementarnim volumenom mazivog filma .....                                                                                                                                                                                                                                | 4-4  |
| Slika 4.4.  | Promjena $\eta$ , $\eta_x^*$ , $u$ i $-\tau_x$ kroz mazivi film ( $0 \leq z \leq h$ ) u središtu dodira ( $x=0$ ) za $U=1 \cdot 10^{-11}$ , $F=3,0 \cdot 10^{-5}$ i $S=1$ (gdje je $Z=z/h$ ) [32] .....                                                                                                                                               | 4-11 |
| Slika 4.5.  | Promjena tlaka i debljine mazivog filma za $U=1 \cdot 10^{-11}$ i $F=3,0 \cdot 10^{-5}$ , te dvije granične vrijednosti omjera $S$ [32] .....                                                                                                                                                                                                         | 4-12 |
| Slika 4.6.  | Promjena debljine mazivog filma u središtu dodira i minimalne debljine mazivog filma ovisno o omjeru $S$ , za $U=1 \cdot 10^{-11}$ i $F=6,0 \cdot 10^{-5}$ (gdje je $H=h/R$ , $H_{\min}=h_{\min}/R$ , 1- <i>Izotermički Newtonov model</i> , 2- <i>Termički Newtonov model</i> , 3- <i>Termički Eyringov model</i> ) [32] .....                       | 4-12 |

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Slika 4.7.  | Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za $F=2.4 \cdot 10^{-4}$ ( $p_H=1.42$ Gpa),<br>$U=1 \cdot 10^{-11}$ i $S=1$ (gdje je $H=h/R$ , $X=x/b$ , $P=p/p_H$ , 1-Termički Eyringov model,<br>2-Termički Newtonov model i 3-Izotermički Newtonov model) [32] .....            | 4-13 |
| Slika 4.8.  | Promjena omjera $H_h$ i faktora trenja $f_2$ ovisno o opterećenju $F$ i omjeru $S$<br>za $U=1 \cdot 10^{-11}$ (gdje je 1 - Newtonov model, a 2 - Eyringov model) [32] .....                                                                                                                  | 4-14 |
| Slika 4.9.  | Promjena faktora trenja $f_2$ ovisno o omjeru $S$ za $U=1 \cdot 10^{-11}$ ,<br>različite parametre $F$ i dva reološka modela [32] .....                                                                                                                                                      | 4-14 |
| Slika 4.10. | Promjena temperature u srednjem sloju mazivog filma $T_{sr}$<br>za $F=2.4 \cdot 10^{-4}$ , $U=1 \cdot 10^{-11}$ i $S=1$ [32] .....                                                                                                                                                           | 4-15 |
| Slika 4.11. | Shematska predodžba iteracijskog modela za proračun raspodjele tlaka,<br>debljine mazivog filma i temperature u njemu [80] .....                                                                                                                                                             | 4-17 |
| Slika 4.12. | Ovisnost hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma<br>o opterećenju $F$ za $U=7.3 \cdot 10^{-11}$ i $G=3500$ [80] .....                                                                                                                                                                 | 4-18 |
| Slika 4.13. | Ovisnost hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma<br>o brzini klizanja $U$ za $F=1.3 \cdot 10^{-4}$ i $G=3500$ [80] .....                                                                                                                                                              | 4-18 |
| Slika 4.14. | Ovisnost minimalne debljine mazivog filma o parametru brzine $U$ (a),<br>parametru opterećenja $F$ (b) i parametru materijala $G$ (c) .....                                                                                                                                                  | 4-20 |
| Slika 4.15. | Raspodjela temperature na površini dodira za dva različita parametra brzine $U$<br>(1 - $U=7.3 \cdot 10^{-11}$ i 2 - $U=5.5 \cdot 10^{-11}$ ) [80] .....                                                                                                                                     | 4-20 |
| Slika 4.16. | Ovisnost maksimalne temperature u mazivom filmu o parametru materijala $G$ .....                                                                                                                                                                                                             | 4-21 |
| Slika 4.17. | Ovisnost temperature rukavca $T_1$ o opterećenju $F$ za različito toplinsko djelovanje<br>(3. TH za $C/R_1=0.001$ , 4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                                                                           | 4-28 |
| Slika 4.18. | Ovisnost relativne ekscentričnosti $\varepsilon$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog<br>djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                 | 4-29 |
| Slika 4.19. | Ovisnost kuta položaja rukavca $\Phi$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog<br>djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                            | 4-29 |
| Slika 4.20. | Ovisnost minimalne debljine mazivog filma $H_{min}$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija<br>podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                              | 4-30 |
| Slika 4.21. | Ovisnost postranog toka $Q_p$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog<br>djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                                    | 4-30 |
| Slika 4.22. | Ovisnost granične brzine vrtnje $\Omega$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog<br>djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                         | 4-31 |
| Slika 4.23. | Ovisnost omjera frekvencije $\nu$ o opterećenju $F$ kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog<br>djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ ,<br>4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] .....                                                                | 4-31 |
| Slika 4.24. | Ovisnost Sommerfeldovog broja $So$ o relativnoj ekscentričnosti $\varepsilon$ kod različitih teorija<br>podmazivanja, toplinskog djelovanja, omjera $b/D=1$ i opterećenja $F=1.0$ (1. HP, 2. EHP,<br>3. TH za $C/R_1=0.001$ , 4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] ..... | 4-32 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Slika 4.25. Ovisnost <i>Sommerfeldovog broja</i> $So$ o relativnoj ekscentričnosti $\varepsilon$ kod različitih teorija podmazivanja, toplinskog djelovanja, omjera $b/D=1$ i opterećenja $F=2.5$ (1. HP, 2. EHP, 3. TH za $C/R_1=0.001$ , 4. TH za $C/R_1=0.002$ i 5. TEHD za $C/R_1=0.001$ ) [58] ..... | 4-32 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|

## POPIS TABLICA

|                                                                                                                                        |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tablica 1.1. Geometrijski oblici i izmjere površina dodira.....                                                                        | 1-1  |
| Tablica 1.2. Pregled mogućih kombinacija geometrijskih tijela u dodiru glede geometrijskih oblika površina dodira iz tablice 1.1 ..... | 1-2  |
| Tablica 1.3. Podjela slučajeva trošenja (izvadak) .....                                                                                | 1-7  |
| Tablica 1.4. Uzroci nastajanja i vrste oštećenja zupčanog para bez pojave loma (izvadak) .....                                         | 1-8  |
| Tablica 2.1. Pretpostavke na kojima se temelji klasična <i>Reynoldsova</i> teorija hidrodinamičkog podmazivanja [11] .....             | 2-4  |
| Tablica 3.1. Pretpostavke na kojima se temelji teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja .....                                        | 3-11 |
| Tablica 3.2. Pregled najpoznatijih reoloških modela koji su u uporabi .....                                                            | 3-12 |

|                              |                                                                                    |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_1$                        | Koeficijent zavisnosti viskoziteta o temperaturi                                   |
| $a_2$                        | Koeficijent zavisnosti gustoće o temperaturi                                       |
| $\bar{a}_2$                  | Koeficijent toplinskog širenja maziva u bezdimenzijskom obliku                     |
| $a_3, a_4, a_5$              | Bezdimenzijski faktori ovisnosti viskoziteta o hidrodinamičkom tlaku i temperaturi |
| $A_1$                        | Površina rukavca preko koje se odvija konvekcija                                   |
| $A_i$                        | Koeficijenti u Lagrangeovom interpolacijskom polinomu                              |
| $A_k$                        | Nominalna površina klizanja površine u dodiru                                      |
| $A_{1k}$                     | Površina ležaja preko koje se konvekcijom predaje toplina                          |
| $A_t$                        | Površina preko koje se ostvaruje dodir krutog tijela                               |
| $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ | Supstitucijske veličine                                                            |
| $b$                          | Poluširina Hertzove deformacije                                                    |
| $B$                          | Duljina cilindra ili rukavca                                                       |
| $\mathbf{B}$                 | Temperaturni broj                                                                  |
| $c$                          | Specifična toplina                                                                 |
| $C$                          | Srednja zračnost ležaja                                                            |
| $\mathbf{C}_D$               | Bezdimenzijski koeficijent deformacije                                             |
| $C_{pr}$                     | Konstanta ovisna o geometriji procjepa                                             |
| $C, C_1,$                    |                                                                                    |
| $C_2, C_3, C_4$              | Konstanta integracije                                                              |
| $D_{ij}$                     | Utjecajni faktori u izrazima za elementarnu elastičnu deformaciju $d\delta_{ij}$   |
| $dx, dy, dz$                 | Izmjere elementarnog volumena maziva                                               |
| $\mathbf{De}$                | Stvarni ili efektivni disipacijski broj                                            |
| $e$                          | Ekscentričnost rukavca                                                             |
| $E$                          | Ekvivalentni modul elastičnosti                                                    |
| $E_1, E_2$                   | Modul elastičnosti (Youngov modul) za materijal rukavca i čahure                   |
| $f$                          | Faktor trenja                                                                      |
| $f_d$                        | Deformabilna komponenta faktora trenja                                             |
| $f_f$                        | Fluidna komponenta faktora trenja                                                  |
| $f_g$                        | Ukupni faktor trenja u uvjetima graničnog podmazivanja                             |
| $f_i$                        | Funkcija koja zamjenjuje integriranu Reynoldsovu jednadžbu                         |
| $f_k$                        | Kruta komponenta faktora trenja                                                    |
| $f_s$                        | Komponenta faktora trenja koja se odnosi na strujanje materijala                   |
| $f_x, f_y$                   | Funkcije koje opisuju gradijente komponenti brzine puzanja                         |
| $F$                          | Nominalna tlačna sila koja opterećuje cilindar, odnosno rukavac kliznog ležaja     |
| $F$                          | Bezdimenzijsko opterećenje ili proračunski parametar opterećenja                   |

|                      |                                                                                  |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $F_{pr}$             | Prijelazno opterećenje                                                           |
| $F_S$                | Sila struganja kod graničnog podmazivanja                                        |
| $F_T$                | Sila trenja                                                                      |
| $g$                  | Ubrzanje sile teže Zemlje                                                        |
| $G$                  | Modul smika i klizanja                                                           |
| <b>G</b>             | Proračunski parametar materijala                                                 |
| $h$                  | Debljina mazivog filma                                                           |
| $h_e$                | Debljina mazivog filma kada je $(dp/dx)=0$                                       |
| $h_{dop}$            | Dopuštena debljina mazivog filma                                                 |
| $h_k$                | Debljina mazivog filma na početku kavitacijskog područja                         |
| $h_{min}$            | Minimalna debljina mazivog filma                                                 |
| $h_{ul}, h_{iz}$     | Debljina mazivog filma na ulazu u području dodira i na izlazu iz područja dodira |
| $H$                  | Bezdimenzijska debljina mazivog filma                                            |
| $H_e$                | Bezdimenzijska debljina mazivog filma kada je $(dP/dX)=0$                        |
| $H_h$                | Omjer minimalne termičke i izotermičke debljine mazivog filma                    |
| $H_i$                | Bezdimenzijska debljina mazivog filma u nekom čvoru $i$ prema izrazu (3.31)      |
| $H_{min}$            | Bezdimenzijska minimalna debljina mazivog filma                                  |
| $I_c$                | Crtasti ili linijski integracijski intenzitet trošenja                           |
| $I_E$                | Energijski integracijski intenzitet trošenja                                     |
| $I_M$                | Maseni integracijski intenzitet trošenja                                         |
| $I_U$                | Brzina trošenja                                                                  |
| $J$                  | Bezdimenzijski integral u izrazu (4.57)                                          |
| $J_1, J_2, J_3$      | Bezdimenzijski prvi, drugi i treći integral (4.47)                               |
| $k_m, \bar{k}$       | Koeficijent i bezdimenzijski koeficijent toplinske vodljivosti maziva            |
| $k_p$                | Udio površine $A_t$ preko koje se ostvaruje dodir krutog tijela                  |
| $k_u$                | Omjer brzina klizanja                                                            |
| $K_{EH}$             | Elastohidrodinamička značajka ili karakteristika                                 |
| $K_S$                | Konstanta                                                                        |
| $K$                  | Koeficijent trošenja                                                             |
| $K_U$                | Faktor brzine trošenja                                                           |
| <b>K</b>             | Supstitucijska veličina (3.26)                                                   |
| <b>K<sub>1</sub></b> | Bezdimenzijska konstanta                                                         |
| <b>K<sub>2</sub></b> | Supstitucijska veličina (4.49)                                                   |
| <b>K<sub>L</sub></b> | Bezdimenzijska krutost sistema                                                   |
| $l_0, l_1, l_2$      | Aktualne duljine oplahivane mazivim uljem                                        |
| $l_e$                | Omjer aktualnih duljina oplahivanih mazivim uljem                                |
| $m$                  | Piezokoeficijent viskoziteta                                                     |
| $M_T$                | Moment trenja                                                                    |

|                        |                                                                                            |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N$                    | Pokazatelj eksponenta                                                                      |
| $N_K$                  | Koeficijent nelinearnosti u kubičnom reološkom modelu                                      |
| $\overline{N}_K$       | Bezdimenzijski koeficijent nelinearnosti u kubičnom reološkom modelu                       |
| $\overline{N}_D$       | Bezdimenzijska brzina smične deformacije                                                   |
| $p$                    | Hidrodinamički tlak                                                                        |
| $p_0$                  | Atmosferski tlak                                                                           |
| $p_H$                  | Hertzov kontaktni tlak                                                                     |
| $p_{sp}$               | Specifični tlak                                                                            |
| $\overline{p}, p_{sr}$ | Srednji hidrodinamički tlak (u kliznom ležaju)                                             |
| $P$                    | Bezdimenzijski hidrodinamički tlak                                                         |
| $P_s$                  | Bezdimenzijski šiljak tlaka ili drugi maksimum hidrodinamičkog tlaka                       |
| $P_{Ee}$               | Stvarni ili efektivni inverzni Pecletov broj                                               |
| $R$                    | Ekvivalentni polumjer zakrivljenja                                                         |
| $R_1, R_2, R_3$        | Polumjer zakrivljenja rukavca, čahure i kućišta ležaja                                     |
| $R_a$                  | Amplituda neravnina površine rukavca ili čahure ležaja (prosječno odstupanje profila)      |
| $R_e$                  | Naprezanje tečenja                                                                         |
| $q_1, q_2$             | Tok topline prema rukavcu i od rukavca                                                     |
| $Q$                    | Količina maziva utrošenog na hlađenje                                                      |
| $Q_{lk}$               | Bezdimenzijska količina topline koja se prenosi na oba kraja rukavca slobodnom konvekcijom |
| $Q_{lp}$               | Bezdimenzijska količina topline koju je preuzeo rukavac                                    |
| $Q_p$                  | Postrani tok                                                                               |
| $Q_p$                  | Bezdimenzijski postrani tok                                                                |
| $Q_x, Q_y$             | Tok mase fluida                                                                            |
| $s(x)$                 | Razmak uvjetovan geometrijom nedeformiranog cilindra                                       |
| $S(X)$                 | Bezdimenzijski razmak uvjetovan geometrijom nedeformiranog cilindra                        |
| $S$                    | Omjer klizanje - valjanje                                                                  |
| $So$                   | Sommerfeldov broj                                                                          |
| $t$                    | Vrijeme                                                                                    |
| $t_h$                  | Debljina čahure ležaja                                                                     |
| $T$                    | Temperatura mazivog filma                                                                  |
| $T_0$                  | Referentna temperatura okoliša                                                             |
| $T$                    | Bezdimenzijska temperatura mazivog filma                                                   |
| $T_0$                  | Bezdimenzijska referentna temperatura okoliša                                              |
| $T_{max}$              | Bezdimenzijska maksimalna temperatura u mazivom filmu                                      |
| $u_1, u_2$             | Komponente brzine klizanja u smjeru osi x koje se odnose na cilindar i podlogu             |
| $u_{sr}$               | Srednja vrijednost komponenti brzine klizanja $u_1$ i $u_2$                                |

|                                         |                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $U$                                     | Numerička vrijednost obodne brzine rukavca ležaja                                                                                                                                    |
| $U^*$                                   | Brzina uvlačenja (maziva u klin)                                                                                                                                                     |
| $u, v, w$                               | Komponente brzine klizanja u smjeru osi $x, y$ i $z$                                                                                                                                 |
| $U, V, W$                               | Bezdimenzijske komponente brzine klizanja u smjeru osi $x, y$ i $z$ (odnosno proračunski parametri brzine klizanja)                                                                  |
| $V_1$                                   | Volumen ležaja                                                                                                                                                                       |
| $W_z$                                   | Pomak u smjeru osi $z$                                                                                                                                                               |
| $x'$                                    | Prividna koordinata                                                                                                                                                                  |
| $X'$                                    | Bezdimenzijska prividna koordinata                                                                                                                                                   |
| $x, y, z$                               | Koordinate sistema                                                                                                                                                                   |
| $X, Y, Z$                               | Bezdimenzijske koordinate sistema                                                                                                                                                    |
| $x_{ul}, x_{iz}$                        | Koordinata $x$ na ulazu u područje dodira i na izlazu iz područja dodira                                                                                                             |
| $\delta(x)$                             | Lokalna elastična deformacija                                                                                                                                                        |
| $\bar{\delta}_i$                        | Bezdimenzijska lokalna elastična deformacija u nekoj točki                                                                                                                           |
| $\bar{\delta}_{ij}$                     | Bezdimenzijska elementarna elastična deformacija                                                                                                                                     |
| $\Delta$                                | Trošenje površine                                                                                                                                                                    |
| $\Delta_s$                              | Zbroj pojedinačnih trošenja                                                                                                                                                          |
| $\Delta_1$                              | Trošenje rukavca                                                                                                                                                                     |
| $\Delta_2$                              | Trošenje čahure                                                                                                                                                                      |
| $\Delta p$                              | Pretlak u kliznom ležaju                                                                                                                                                             |
| $\Delta T$                              | Srednja vrijednost porasta temperature mazivog ulja pri prolasku kroz ležaj ( $\Delta T_1$ ), odnosno srednja vrijednost razlike temperature mazivog ulja u ležaju i površine ležaja |
| $\varepsilon$                           | Relativna ekscentričnost rukavca                                                                                                                                                     |
| $\eta$                                  | Apsolutni ili dinamički viskozitet maziva                                                                                                                                            |
| $\bar{\eta}$                            | Bezdimenzijski apsolutni viskozitet maziva                                                                                                                                           |
| $\eta_0$                                | Prosječan viskozitet maziva kod atmosferskog tlaka                                                                                                                                   |
| $\eta_x^*, \eta_y^*$                    | Ekvivalentni viskoziteti maziva                                                                                                                                                      |
| $\varphi$                               | Kutna koordinata                                                                                                                                                                     |
| $\varphi_g$                             | Granična vrijednost kutne koordinate                                                                                                                                                 |
| $\Phi$                                  | Kut položaja rukavca; kut nagiba proporcionalnog dijela krivulja trošenja                                                                                                            |
| $\Gamma_1, \dots, \Gamma_7$             | Karakteristične funkcije za primjenu različitih reoloških modela                                                                                                                     |
| $\Gamma_{1k}, \Gamma_{1r}, \Gamma_{1s}$ | Utjecaj klina, razvlačenja i stlačivanja u osnovnoj <i>Reynoldsovoj jednadžbi</i>                                                                                                    |
| $\psi$                                  | Relativna zračnost ležaja                                                                                                                                                            |
| $\lambda$                               | Omjer širine ležaja i nazivnog promjera ležaja (unutarnji promjer čahure)                                                                                                            |

|                      |                                                                                                  |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\nu_1, \nu_2$       | Poissonov omjer za materijal rukavca i čahure ležaja (odnosno cilindar i podloga)                |
| $\omega$             | Kutna brzina                                                                                     |
| $\omega_1$           | Kutna brzina rukavca                                                                             |
| $\omega_{pr}$        | Prijelazna kutna brzina rukavca                                                                  |
| $\Omega$             | Granična brzina vrtnje                                                                           |
| $\overline{\Omega}$  | Bezdimenzijska granična brzina vrtnje                                                            |
| $\Pi$                | Supstitucijska veličina u izrazu (3.25)                                                          |
| $\rho$               | Gustoća                                                                                          |
| $\bar{\rho}$         | Bezdimenzijska gustoća                                                                           |
| $\rho_x^*, \rho_y^*$ | Ekvivalentne gustoća maziva                                                                      |
| $\sigma$             | Granica dodirne i kontaktne izdržljivosti                                                        |
| $\sigma_H$           | Kontaktno ili Hertzovo naprezanje                                                                |
| $\tau$               | Smično naprezanje u mazivom filmu                                                                |
| $\tau_0, \tau_L$     | Konstante u reološkim modelima                                                                   |
| $\theta_1, \theta_2$ | Bezdimenzijski faktori temperature za cilindar i ravnu podlogu (odnosno rukavac i čahura ležaja) |
| $\nu$                | Omjer frekvencije vrtnje                                                                         |
| $\bar{\nu}$          | Bezdimenzijski omjer frekvencije vrtnje                                                          |

#### POPIS ČESTO RABLJENIH INDEKSA

|        |                                                   |
|--------|---------------------------------------------------|
| e, eff | Stvarna ili efektivna veličina                    |
| m      | Mazivo                                            |
| t      | Tijelo (cilindar ili rukavac, podloga ili čahura) |
| z      | Zrak                                              |

Primjedba:

Veličine čije su oznake dane u navedenom popisu u ovom radu izražavaju se kao bezdimenzijske veličine ili imaju vrijednosti izražene u jedinicama međunarodnog sistema jedinica SI: metar (m), Newton (N) i sekunda (s) i iz njih izvedenih jedinica.

## **PREDGOVOR**

---

Kod pojedinih strojnih elemenata (zupčanici, ležajevi, itd.), direktan dodir njihovih površina nepoželjna je, ali uglavnom i neizbježna pojava. Obzirom da je riječ o koncentriranom dodiru, opterećenje se prenosi preko površina koje su male u odnosu na izmjere strojnih dijelova što uzrokuje pojavu izuzetno visokih tlakova. Uz ovakav način rada, trenje koje se javlja između dijelova, uzrok je trošenja koje se manifestira kroz procese trošenja (rupičenje, listanje, mikro-zavarivanje, itd.).

Ideja da se između dva tijela u dodiru uvede posrednik, krutina ili tekućina takvih karakteristika da smanji trenje, starija je od 4 tisućljeća, ali se znanstveno obrađuje tek nešto manje od 200 godina. Izučavanjem područja proširena su saznanja o prirodi ovakvih kontakata, te je razvijeno mnoštvo rješenja u različitim segmentima ove problematike. Može se reći da razumijevanje procesa kojima su izloženi takvi strojni dijelovi igra odlučujuću ulogu, kako u njihovom konstruiranju, tako i u uporabi.

Ovaj je rad izrađen u sklopu projekta "Istraživanje temeljnih elemenata strojarskih sustava (0120-009)", financiranog od strane Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske, s ciljem povećanja nosivosti i smanjenja troškova izrade i eksploatacije, povećanja uporabnog vijeka, određivanja granica nosivosti te temeljnih spoznaja o klizno-valjnim kontaktima temeljnih strojnih sklopova i elemenata.

Istraživanje u ovom radu odnosi se na područje temeljnih elemenata strojeva, poglavito nosivost podmazivanih klizno-valjnih parova. Pojam klizno-valjnog para odnosi se na dva opterećena elementa čije se površine ili dijelovi površina dodiruju sa ili bez prisustva maziva, te se međusobno relativno gibaju uz određeni odnos klizanja i valjanja.

U uvodnom dijelu rada predstavljene su teorijske osnove dodira dvaju krutih tijela, te su sistematizirani tipovi kontakata i njima svojstveni tipovi oštećenja. Rupičenje i zaribavanje posebno su izdvojeni kao češći oblici trošenja kod klizno-valjnih parova.

Sistematski su obrađene tri relevantne teorije podmazivanog dodira:

- hidrodinamička (HD), kojom je obrađen dodir dvaju idealno krutih tijela u prisustvu maziva za koje se uzima da ima karakteristike *Newtonovog* fluida (*Newtonovo* mazivo), te u izotermičkim uvjetima,
- elastohidrodinamička (EHD), kojom je obrađen dodir dvaju elastičnih tijela u prisustvu maziva čiji viskozitet zavisi o tlaku, te u izotermičkim uvjetima,
- termoelastohidrodinamička (TEHD), kojom su uz uvjete EHD teorije uključeni i utjecaji vezani uz promjenu temperature.

Za svaku od navedenih teorija dana je uvodna analiza, te obrađeno područje primjene na jednodijelni klizni radijalni ležaj. U sklopu razmatranja EHD teorije, pored razrade za *Newtonovo*, obrađen je i slučaj *ne-Newtonovog* maziva, te je dat pregled češće korištenih reoloških modela kojima se opisuje veza između smičnog naprezanja i brzine smične deformacije. Rezultati primjene pojedine teorije predloženi su dijagramima za svaki relevantni čimbenik.

### **Ključne riječi:**

klizno-valjni parovi, kontaktno naprezanje, viskozitet, podmazivanje

Research presented in this work deals with basic machine elements, especially with load carrying capacity of lubricated pairs with sliding and rolling motion involved. Such pair could be described as couple of loaded elements contacting over common surface in presence or without lubricant, in relative motion with some ratio of sliding and rolling.

Introduction gives theoretical basics for rigid bodies contact, systematisation of such contacts and corresponding damages that usually occur. Two models of wear, pitting and scuffing, are outlined as commonly found at pairs mentioned.

Three theories of lubricated contact are studied and presented:

Hydrodynamic (HD), that deals with contact between two ideally rigid bodies in presence of Newtonian lubricant in isothermal environment,

Elastohydrodynamic (EHD), that deals with elastic bodies, *Newtonian* or *non-Newtonian* lubricant whose viscosity depends on pressure and isothermal environment,

Termoelastohydrodynamic (TEHD), for equal conditions as EHD but widen for thermal influence.

Analysis was conducted for each theory mentioned, as well as study and appliance on simple journal bearing. In part of EHD study mostly used rheological models for *non-Newtonian* lubricants are shown. Results for each theory and corresponding factors of influence are presented in diagram form.

### **Keywords:**

sliding-rolling pairs, contact stress, viscosity, lubrication

U uvodnom dijelu rada dat je pregled površina dodira, kao i pregled mogućih kombinacija tijela u dodiru glede geometrijskih oblika tih površina. U nastavku su nabrojani neki primjeri klizno-valjnih parova, te uz njih vezana problematika, kako bi se ukazalo ne samo na zastupljenost problema, nego i na značajne razlike koje se među njima javljaju. Obrađeno je i područje trošenja, odnosno vrsta oštećenja koja najčešće nalazimo kod ovih parova.

### 1.1. HERTZOV NEPOSREDNI DODIR

Strojni sistemi (kao što su npr. klizni i valjni ležajevi, zupčanički prijenosi, pužni zupčanički prijenosi, razni drugi mehanizmi i sl.) ostvaruju međusobni dodir u točki ili po crti. Porastom sile i pojavom elastičnih deformacija, točke i crte postaju površine dodira s izmjerama vrlo malim u usporedbi s izmjerama strojnih dijelova u dodiru.

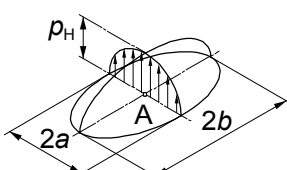
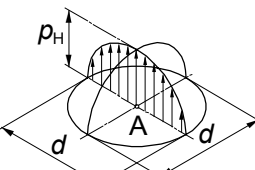
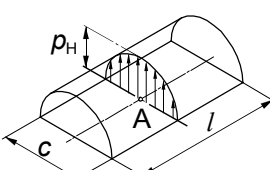
Ove površine često se u literaturi zovu Hertzove površine dodira ili Hertzove kontaktne površine. Zbog sila koje djeluju okomito na dodirne površine, na mjestima dodira javlja se kontaktno ili Hertzovo naprezanje [1, 2, 3].

Kontaktna ili površinska čvrstoća dijelova u dodiru pri statičkom opterećenju tlačnom silom ocjenjuje se prema maksimalnom kontaktnom naprezanju [4]

$$\sigma_{H,\max} = p_H$$

koje se javlja u središtu površine dodira A (tablica 1.1.)

**Tablica 1.1. Geometrijski oblici i izmjere površina dodira**

| Dodir u točki |                                                                                     | Dodir po crti                                                                       |                                                                                       |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| a             | Eliptična                                                                           | b                                                                                   | Kružna                                                                                |
|               |  |  |  |

$p_H$  – Hertzov tlak ili kontaktno naprezanje

Naprezanja na površinama dodira smanjuju se udaljavanjem od točke A po nelinearnoj zakonitosti. Nelinearna zakonitost postoji i kod zavisnosti između površina dodira i vrijednosti normalne sile  $F$ .

U općem slučaju dodira dvaju zaobljenih tijela opterećenih silom  $F$ , na mjestu dodira (točka A, tab. 1.1.) formiraju se površine dodira koje se po geometrijskom obliku mogu sistematizirati prema tablici 1.1. U slučaju da je polumjer zakrivljenosti površine dodira jednog od tijela mnogo veći u odnosu na ostale izmjere, promatra se slučaj dodira zaobljenog tijela s ravnom pločom.

U tablici 1.2. dat je pregled mogućih kombinacija geometrijskih tijela u dodiru glede geometrijskog oblika površina dodira iz tablice 1.1.

**Tablica 1.2. Pregled mogućih kombinacija geometrijskih tijela u dodiru glede geometrijskih oblika površina dodira iz tablice 1.1**

|   |                                            |  |  |
|---|--------------------------------------------|--|--|
| a | Eliptična površina dodira - Dodir u točki  |  |  |
|   |                                            |  |  |
| b | Kružna površina dodira - Dodir u točki     |  |  |
|   |                                            |  |  |
| c | Pravokutna površina dodira - Dodir po crti |  |  |
|   |                                            |  |  |

## 1.2. KLIZNO-VALJNI PAROVI

Pojava klizanja i/ili valjanja prisutna je između bilo koja dva dijela koji se, tijekom dodira preko jedne ili više površina, međusobno relativno gibaju. Predmet razmatranja u ovom radu je nosivost podmazanih elemenata kod kojih se manifestira navedena pojava, a kod kojih su površine dodira male u odnosu na ostale dimenzije (zupčanici, ležajevi, tarenice, itd.). Ovi su elementi, poradi principa njihovog djelovanja, tijekom eksploatacije izloženi teškim radnim uvjetima što im je zajednički nazivnik.

S aspekta trenja koje se javlja tijekom normalnog rada, elemente možemo podijeliti u dvije skupine:

- elemente čije se djelovanje temelji na prisutnosti trenja (npr. tarenice) i
- elemente kod kojih je trenje nepoželjno (npr. zupčanici i ležajevi).

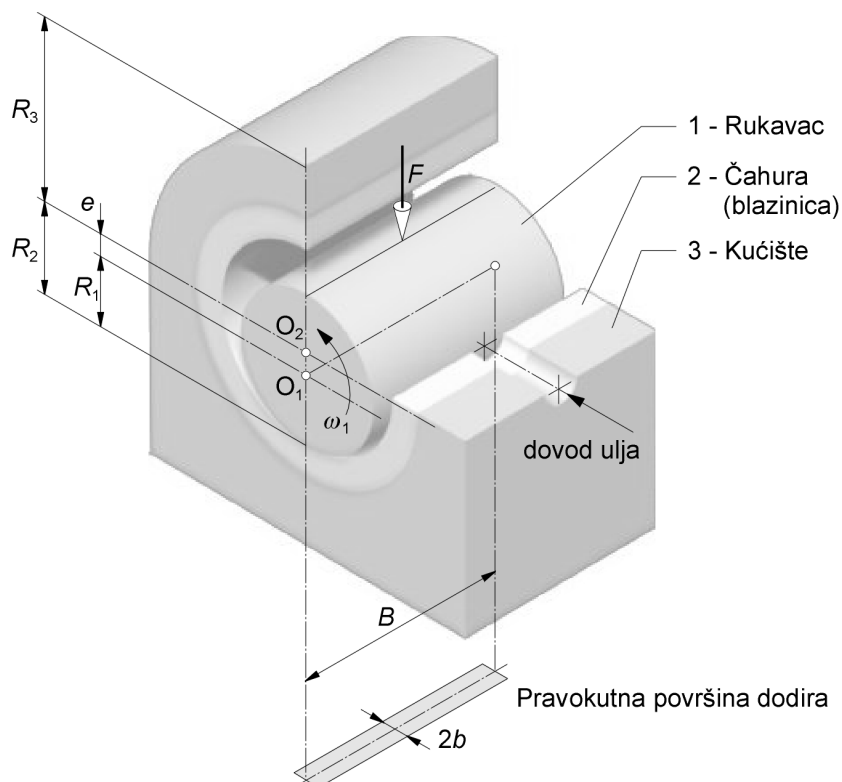
Trenje, međutim, nije jedina pojava koja prati rad ovakvih elemenata. Naime, njihov dodir rezultira i cijelim nizom mehaničkih i kemijskih procesa (poglavlje 1.3.1) koji im, generalno uzevši, smanjuju performanse i vijek trajanja, te u konačnici vode potpunom gubitku funkcije. Podmazivanje klizno-valjnih parova stoga nije samo u funkciju smanjivanja trenja, već i potpunog razdvajanja površina dodira u cilju postizanja tzv. hidrodinamičkog plivanja (poglavlje 1.4). Navedena problematika obrađena je kroz tri glavne teorije:

- hidrodinamičku, (poglavlje 2.),
- elastohidrodinamičku, (poglavlje 3.), i
- termoelastohidrodinamičku, (poglavlje 4.).

Sve tri teorije načelno opisuju isti cilj – ostvarivanje uvjeta u kojima se cijelo opterećenje između dva tijela prenosi preko mazivog filma bez direktnog dodira između tih tijela. Obzirom na geometriju pojedinih klizno-valjnih parova, navedene uvjete je najlakše ostvariti kod rotiranja rukavca u kliznom radijalnom ležaju, a samo djelomično kod npr. zupčanika. Naime, u prvom slučaju, uz pretpostavku kontinuirane dobave maziva, film je neprekinut, a radijusi zakrivljenosti konstantni (slika 1.1). Kod čelnika s evolventnim ozubljenjem mazivi se film stvara za svaki novi zahvat zuba, a radijusi zakrivljenosti mijenjaju duž zahvatne crte [5]. Zupčanici stoga najčešće rade u uvjetima mješovitog trenja.

Područje ovog rada, istraživanje nosivosti klizno-valjnih parova, biti će obrađeno razmatranjem primjera kliznog radijalnog ležaja, vjerojatno najstarijeg, najpoznatijeg i najrasprostranjenijeg od svih tipova ležaja.

Sistem kliznog radijalnog ležaja u principu se sastoji od cilindričnog rukavca (1) uloženog u cilindrični tuljak (čahura ili blazinica) 2, koji s kućištem (3) tvori cjelinu (slika 1.1.).



**Slika 1.1. Principijelni prikaz kliznog radijalnog ležaja opterećenog silom  $F$  u stanju mirovanja ( $\omega_1 = 0$ ) i tzv. suhom dodiru**

Ovdje je dodir između rukavca i čahure ostvaren po crti, preko uske pravokutne površine koja ima ploštinu  $2 \cdot b \cdot B$ , gdje je  $b$  tzv. *poluširina Hertzove deformacije*, koja se za navedeni primjer može izračunati prema [6] pomoću izraza

$$b = 1,128 \sqrt{\frac{F \cdot R}{E' \cdot B}}, \quad (1.1)$$

gdje je  $E'$  ekvivalentni modul elastičnosti - prema izrazu (1.2.), a  $R$  ekvivalentni polumjer zakrivljenja - prema izrazu (1.3.) (kao da se radi o dodiru cilindra polumjera  $R$  i ravne horizontalne podloge ili ploče).

$$E' = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 \cdot (1 - \nu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \nu_1^2)}, \quad (1.2)$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}, \quad (1.3)$$

gdje su  $E_1$  i  $E_2$  moduli elastičnosti (*Joungovi moduli*), a  $\nu_1$  i  $\nu_2$  *Poissonovi omjeri* za materijal rukavca i čahure ležaja.  $R_1$  i  $R_2$  su polumjeri zakrivljenosti rukavca i čahure.

Kao što je već istaknuto, posljedica djelovanja opterećenja silom  $F$  na površini ploštine  $2 \cdot b \cdot B$  (za stacionarni i statički slučaj) je pojava maksimalnog naprezanja ili tzv. *maksimalnog Hertzovog tlaka*  $\sigma_{Hmax} = p_H$  koji se može izračunati prema [6] pomoću izraza (1.4):

$$\sigma_{H,\max} = p_H = 0,443 \sqrt{\frac{F \cdot E'}{B \cdot R}}. \quad (1.4)$$

Pomak po okomici na površinu dodira u smjeru djelovanja sile  $F$ , u trenutku postizanja poluširine Hertzove deformacije  $b$ , iznosi prema [6]

$$W_z = 1,82 \cdot \frac{F \cdot [1 - \ln(b/2)]}{B \cdot E'} \quad (1.5)$$

### 1.3. TROŠENJE POVRŠINA DODIRA

Radni vijek većine strojnih dijelova, pri dovoljno visokoj čvrstoći, ograničen je trošenjem radnih površina. Trošenje ili habanje je rezultat procesa razaranja i odvajanja (otkidanja) materijala s površine strojnog dijela. Promjena oblika i izmjera dijela uslijed trošenja smanjuje točnost spajanja površina i uzrokuje pojavu šumova, buke, udara i vibracija pri radu.

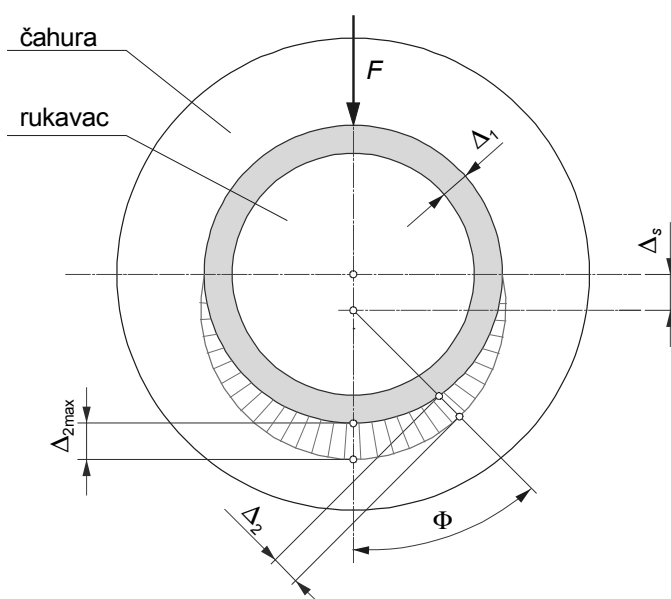
U općem slučaju, za neko vrijeme rada  $t_r$ , pri promjeni specifičnog tlaka  $p_{sp}$  i relativnoj brzini klizanja  $u$ , trošenje površine  $\Delta$  može se odrediti prema [6] pomoću izraza (1.6), gdje je  $K$ -koeficijent trošenja koji uzima u obzir trenje materijala dijelova u dodiru, geometrijske parametre površina i način podmazivanja.

$$\Delta = K \cdot \int_0^{t_r} p_{sp} \cdot u \cdot dt. \quad (1.6)$$

Trošenje se mjeri okomito na površinu trenja. Obostrano trošenje dijelova u dodiru  $\Delta_s$  određeno je zbrojem pojedinačnih trošenja  $\Delta_i$ :

$$\Delta_s = \Delta_1 + \Delta_2. \quad (1.7)$$

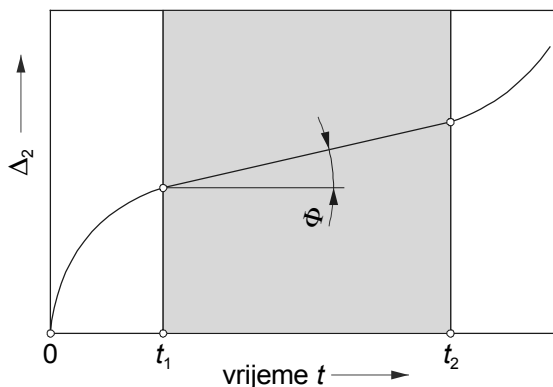
Tako npr., za klizni radijalni ležaj, pri konstantnoj radijalnoj sili  $F$  i kutnoj brzini  $\omega_1$ , rukavac ima ravnomjerno trošenje po konturi  $\Delta_1$  (slika 1.2.).



Slika 1.2. Shematski prikaz trošenja rukavca i čahure kliznog radijalnog ležaja [6]

Trošenje čahure  $\Delta_2$  ovisi o kutu položaja rukavca  $\Phi$  i mijenja se po zakonitosti (slika 1.3.)

$$\Delta_2 = \Delta_{2\max} \cdot \cos \Phi. \quad (1.8)$$



Slika 1.3. Vremenski periodi trošenja površina koje su u dodiru [6]

Geometrijska os rukavca postaviti će se na izmjeru koja odgovara ukupnom trošenju  $\Delta_s$ . Proces trošenja se može podijeliti na tri vremenska perioda (slika 1.3.).

1. Period puštanja u pogon do nekog vremena  $t_1$  je tzv. *period uhodavanja* ili *urađivanja* radnih površina. U ovom vremenskom periodu, kao rezultat elastičnih i plastičnih deformacija mikro-neravnina, formira se novi mikro-reljef površina s nekom ravnomjernom hrapavosti. Proces uhodavanja prati razvijanje topline, zbog čijeg smanjenja se ovaj proces provodi u uvjetima blažim od eksploatacijskih (pri manjim iznosima parametara opterećenja od onih u eksploataciji). U cilju smanjenja vremena uhodavanja, potrebno je, na osnovu eksperimentalnih podataka, odrediti parametre ravnomjerne hrapavosti, a za izradu strojnog dijela definirati hrapavost vrlo blisku ravnomjernoj.
2. Period nakon uhodavanja ( $t_2 - t_1$ ) je tzv. *period određenog trošenja* ili *period prihvatljivog trošenja*. Ovaj vremenski period karakteriziran je minimalnim trošenjem pri zadanim uvjetima rada. Izravnanje radnih površina u procesu uhodavanja stvara pretpostavke za njihov elastični dodir. Treba uvijek težiti takvim rješenjima koja ovaj period maksimalno produljuju.
3. Period nakon zadovoljavajuće dugog vremena rada  $t_2$  je tzv. *period katastrofalnog istrošenja* koje je nedopustivo u eksploataciji, jer se zbog povećanja zračnosti između radnih površina javljaju udari koji temeljno mijenjaju svojstva površinskih slojeva dajući im neželjenu krtost (lomljivost).

### 1.3.1. VRSTE OŠTEĆENJA TROŠENJEM

Svaki je strojni element u većoj ili manjoj mjeri podložan trošenju. Većina je autora u modernoj literaturi suglasna da su samo četiri osnovna mehanizma trošenja [7]:

- abrazija - trošenje istiskivanjem materijala, uzrokovano tvrdim česticama ili tvrdim izbočinama. Može se opisati kao mikro-rezanje abrazivom nedefinirane geometrije oštrice.
- adhezija - prijelaz materijala s jedne na drugu tarnu plohu pri relativnom gibanju, a zbog procesa mikro-zavarivanja.
- umor površine - odvajanje čestica s površine uslijed cikličkih promjena naprezanja.
- tribokorozija - trošenje pri kojem prevladavaju kemijske i elektrokemijske reakcije materijala s okolišem.

Svi su navedeni mehanizmi u većini slučajeva prisutni tijekom eksploatacije, samo se mijenja njihov utjecaj. Oštećenja koja proizlaze iz navedenih mehanizama trošenja presudna su za karakteristike i vijek trajanja pojedinih elemenata. Tablica 1.3 prikazuje izvadak iz podjele slučajeva trošenja, te razinu opasnosti za pojedini mehanizam [7].

**Tablica 1.3 Podjela slučajeva trošenja [7]**

|                                                                         | Tip trošenja | Relativno gibanje | Mehanizam trošenja <sup>1</sup> /stupanj opasnosti <sup>2</sup> |    |    |    |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------|----|----|----|
|                                                                         |              |                   | AB                                                              | AD | UP | TK |
| 1.                                                                      | Klizno       | klizanje          | 4                                                               | 1  | 3  | 5  |
| 2.                                                                      | Kotrljajuće  | kotrljanje        | 4                                                               | 4  | 1  | 5  |
| 3.                                                                      | Udarno       | udarci            | 3                                                               | 3  | 1  | 5  |
| 5.                                                                      | Abrazija     | klizanje          | 1                                                               |    | 4  | 5  |
| 1) AB – abrazija, AD – adhezija, UP – umor površine, TK – tribokorozija |              |                   |                                                                 |    |    |    |
| 2) 5 – najniži, 4 – niski, 3 – srednji, 2 – visoki, 1 – jako visoki     |              |                   |                                                                 |    |    |    |

U tablici 1.4 [8] dat je izvadak pregleda uzroka nastajanja i vrsta oštećenja kod zupčanog para s aspekta normalne eksploatacije (pogon, održavanje) i posebno za uvjete podmazivanja. Analizom predloženih podataka može se naglasiti veći utjecaj sljedećih oblika trošenja:

- abrazivno trošenje (B) i brazdanje (E),
- zaribavanje (F),
- rupičavost (G),
- stvaranje valovitosti (K) i
- hladna plastična deformacija (M).

Tablica 1.4 Uzroci nastajanja i vrste oštećenja zupčanog para bez pojave loma [8]

| 5. Pogon, održavanje           | A | B                      | C | D | E | F | G | H | I | J                            | K | L | M | N | O |
|--------------------------------|---|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|------------------------------|---|---|---|---|---|
| 5.1 Česta promjena opterećenja |   |                        |   |   |   |   | • |   |   |                              |   |   |   |   |   |
| 5.2 Udari, vibracije           |   |                        |   |   |   |   | • | • |   | •                            |   |   | • |   | • |
| 5.3 Preopterećenje             |   |                        |   |   | • | • | • | • |   |                              | • |   | • |   |   |
| 5.4 Manjkavo održavanje        |   | •                      |   |   |   | • | • |   |   |                              |   |   | • |   |   |
| 5.5 Manjkava kontrola          |   | •                      |   |   |   | • | • |   |   |                              |   |   | • |   |   |
| 6. Podmazivanje                |   |                        |   |   |   |   |   |   |   |                              |   |   |   |   |   |
| 6.1 Nedostatak maziva          | • | •                      |   |   |   | • |   |   |   |                              | • | • | • |   |   |
| 6.2 Pogrešan viskozitet maziva | • |                        |   |   | • | • | • |   |   |                              | • |   |   |   | • |
| 6.3 Nečistoće                  |   | •                      |   | • | • |   |   |   |   | •                            |   |   |   | • |   |
| 6.4 Nedostatna kvaliteta       | • |                        |   |   | • | • | • |   |   |                              | • |   | • |   | • |
| 6.5 Nepouzdan dovod maziva     |   | •                      |   |   |   | • |   |   |   |                              | • | • | • |   |   |
| A Normalno trošenje            | F | Zaribavanje (scuffing) |   |   |   |   |   |   | K | Stvaranje valovitosti        |   |   |   |   |   |
| B Abrazivno trošenje           | G | Rupičavost (pitting)   |   |   |   |   |   |   | L | Vruća plastična deformacija  |   |   |   |   |   |
| C Smetnje u zahvatu zubi*      | H | Ljuštenje              |   |   |   |   |   |   | M | Hladna plastična deformacija |   |   |   |   |   |
| D Ogrebotine                   | I | Pukotine u materijalu  |   |   |   |   |   |   | N | Kemijska korozija            |   |   |   |   |   |
| E Brazde                       | J | Utiskivanje            |   |   |   |   |   |   | O | Korozija trenja (fretting)   |   |   |   |   |   |
| *prouzročene trošenjem         |   |                        |   |   |   |   |   |   |   |                              |   |   |   |   |   |

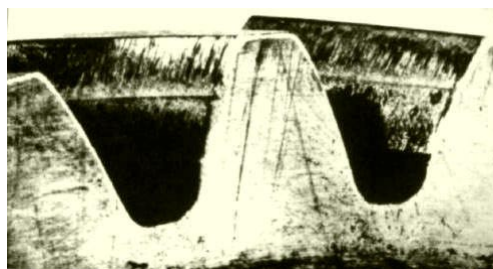
Za slučaj razmatranja samo pogona i održavanja mogu se izdvojiti:

- zaribavanje (F),
- rupičavost (G) i
- hladna plastična deformacija (M).

Zbog opće primjene zupčanika, istraživanje ovih, očito najčešćih oblika oštećenja je od velikog značaja. U daljnjem razmatranju obuhvatit ćemo samo zaribavanje i rupičavost.

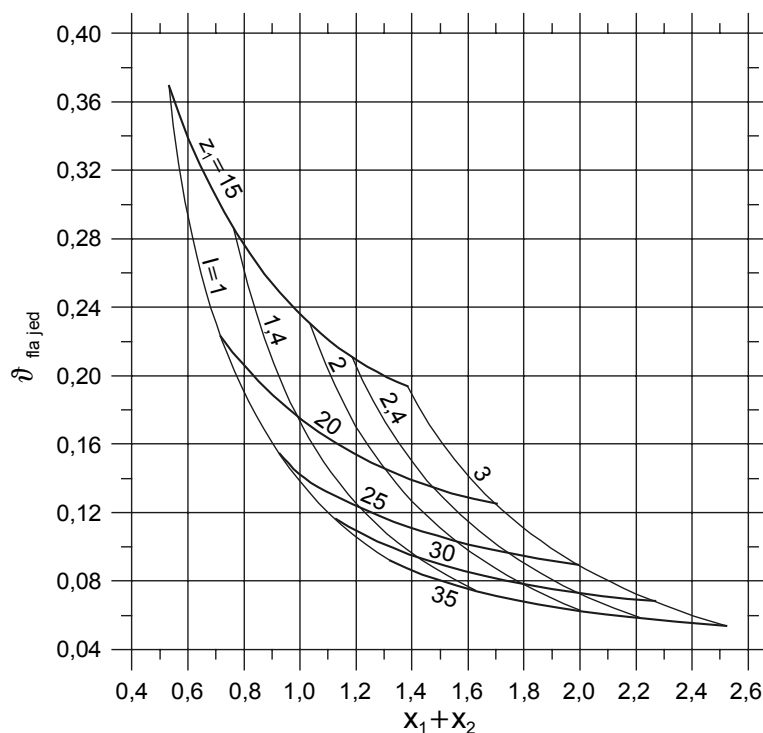
### Zaribavanje

Zaribavanje, oblik adhezijskog trošenja, nastaje kada debljina mazivog filma nije dostatna za razdvajanje dviju površina koje se međusobno relativno gibaju. Direktni dodir između metalnih površina, djelovanjem povišenog trenja, inducira nagli porast temperature [9] te mikro-zavarivanje. Odmah zatim dolazi do kidanja mikro-zavara i odnošenja dijela materijala s jedne od površina. Na mjestu otkidanja materijala nastaje udubina na prvoj površini, a na mjestu zavara izbočina na drugoj. Ova će izbočina u daljnjem kontaktu djelovati kao abraziv, te stvarati brazde na prvoj površini (slika 1.4.).



Slika 1.4. Prepoznatljiv oblik oštećenja kod zaribavanja

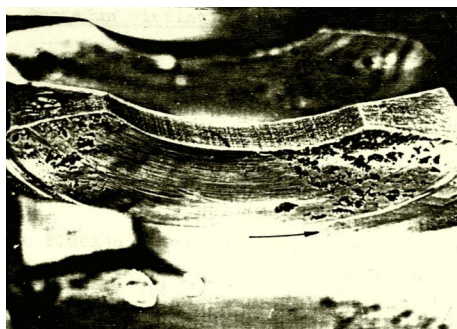
Na slici 1.5 dijagramski je predložen rezultat postupka optimalizacije zavisnosti najvećeg temperaturnog udara o sumi pomaka profila i prijenosnom omjeru zupčanog para [5]. Dijagram upućuje na zaključak da će temperaturni udar biti to manji što je suma pomaka profila veća, odnosno za veće prijenosne omjere.



Slika 1.5. Ovisnost optimalne sume faktora pomaka profila o jediničnom temperaturnom udaru [5]

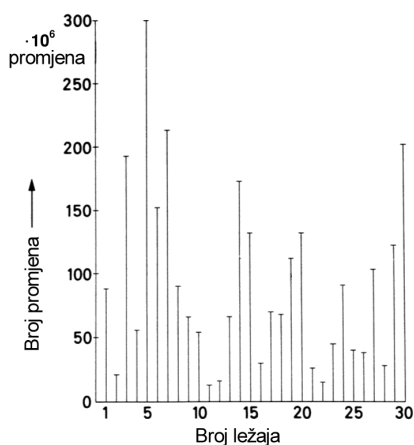
### ***Rupičavost (Pitting)***

Rupičenje je takav oblik trošenja gdje, uslijed velikog broja cikličkih promjena opterećenja, dolazi do nastanka pukotina u materijalu. U slučaju podmazivanog dodira, ulazak maziva u pukotinu potpomaže njezino napredovanje, te u sprezi s cikličkim opterećenjem konačno dovodi do otkidanja dijela materijala [7]. Slika 1.6 prikazuje pojavu pittinga na ulaznoj strani zuba kod loše slike nošenja [10].



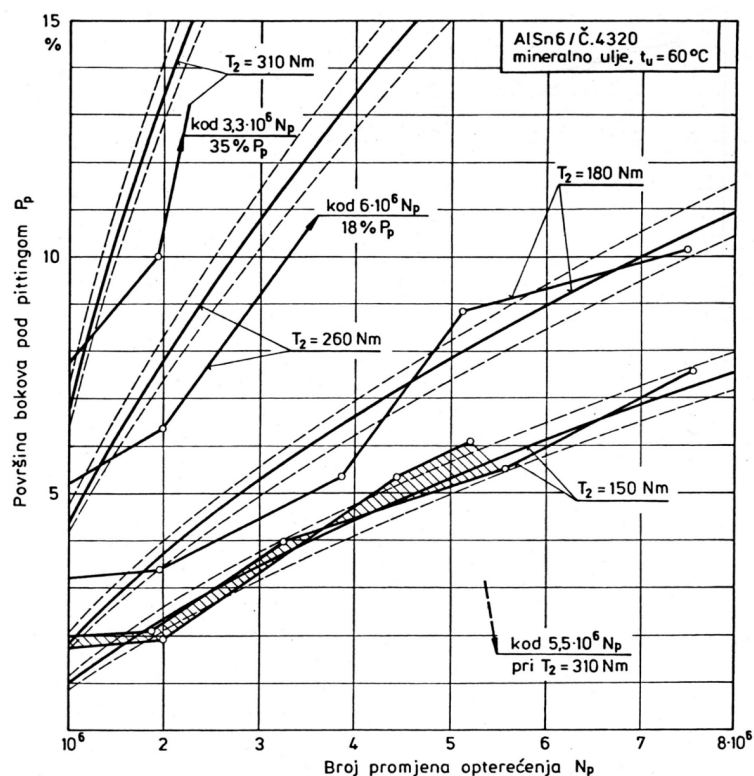
Slika 1.6 Pojava pittinga i na ulaznoj strani zuba kod loše slike nošenja [10]

Pojava rupičenja, pored broja ciklusa promjene opterećenja, ovisi između ostaloga i o homogenosti materijala, te veličini opterećenja. Slika 1.7 [11] prikazuje rezultat ispitivanja 30 jednakih kugličnih ležajeva FAG 6309 pod jednakim opterećenjem i pri jednakoj brzini vrtnje. Veliko rasipanje u postignutom broju ciklusa prije pojave rupičenja objašnjava se razlikom u homogenosti materijala ležajeva.



**Slika 1.7 Rasipanje postignutog broja ciklusa prije pojave rupičenja kod 30 jednakih ležajeva FAG 6309 [11]**

Slika 1.8 [10] prikazuje velik utjecaj opterećenja na povećanje rupičenjem oštećene površine kod kola pužnog prijenosnika.

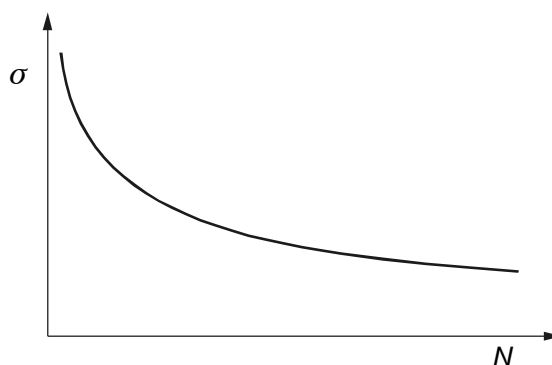


**Slika 1.8 Utjecaj opterećenja na povećanje rupičenjem oštećene površine. Brzina klizanja  $v_k=2,9$  m/s je konstanta. [10]**

Maksimalno naprezanje kod kojeg dovoljno velik broj ciklusa opterećenja ne uzrokuje pojavu rupičenja zove se *granica kontaktne ili dodirne izdržljivosti*. Krivulja dodirne izdržljivosti (slika 1.9) utvrđuje se eksperimentalno i aproksimativno, a njen se oblik može definirati dvoparametarskom jednadžbom oblika

$$\sigma^m \cdot N = \text{konst.}, \quad (1.9)$$

gdje je  $N$  broj ciklusa opterećenja, a  $m$  eksponent koji ovisi o svojstvima materijala i obliku dijela.



Slika 1.9 Krivulja dodirne izdržljivosti

Na granicu dodirne izdržljivosti, pored već navedenih parametara, utječu još i mikrogeometrija površine, tvrdoća (s povećanjem tvrdoće površine povećava se otpornost stvaranja pittinga), podmazivanje (s većim vrijednostima viskoziteta maziva viša je i granica dodirne izdržljivosti) itd.

### 1.3.2. POSTOJANOST NA TROŠENJE

Sposobnost materijala da se opire trošenju naziva se *postojanost na trošenje*. Za kvalitativnu ocjenu postojanosti na trošenje upotrebljavaju se tzv. *integracijski intenziteti trošenja* [6]:

- crtasti ili linijski  $I_C = \Delta/L$ ,
- maseni  $I_M = \rho \cdot I_C$  i,
- energijski  $I_E = I_C \cdot A_k / F_T$ ,

gdje je:

- $L$  - put trenja,
- $\rho$  - gustoća materijala,
- $A_k$  - nominalna površina klizanja površine u dodiru,
- $F_T$  - sila trenja.

Na intenzitet trošenja utječu: specifični tlak, modul elastičnosti materijala, hrapavost i valovitost površine, temperatura, brzina klizanja, vrsta podmazivanja, te konstrukcijske karakteristike kliznog (ili tarnog) dodira [12].

Za relativnu ocjenu postojanosti na trošenje materijala češće se upotrebljava bezdimenzijski *crtasti* ili *linijski integracijski intenzitet trošenja*  $I_C$ , koji se kod različitih parova u dodiru mijenja u području od  $10^{-12}$  do  $10^{-3}$  [6].

Četvrti parametar koji karakterizira postojanost na trošenje je brzina trošenja  $I_U$  [6]

$$I_U = K_U \cdot p_{sp}^m \cdot u^n, \quad (1.10)$$

gdje eksponent  $m$  ovisi o obliku uzajamnog djelovanja površina dodira (elastični dodir, plastični dodir ili mikro-erozijski dodir). U periodu uhodavanja  $m$  je 1 do 3, a u periodu prihvatljivog trošenja  $m=1$ . Za uhodane površine eksponent  $n$  je također jednak jedinici ( $n=1$ ), zbog čega je brzina trošenja u 2. periodu proporcionalna  $\tan \Phi$  (slika 1.3.). Brzina trošenja je slučajna veličina pa se za njeno određivanje treba upotrebljavati teorija vjerojatnosti.

#### 1.4. POSREDNI DODIR

Iz navedenog se može zaključiti da sigurna pogonska funkcija stroja i njegov radni vijek ovise o konstruiranju i dimenzioniranju njegovih dijelova u dodiru s obzirom na trošenje. To se, između ostalog, postiže i tako da se kod određenog opterećenja i određene relativne brzine klizanja, te dopuštene temperature spriječi neposredni dodir metala po metalu (tzv. *suhi dodir*). Dodir mora biti ostvaren posredno preko tankog mazivog sloja tzv. *mazivog filma*. Dakle, kada su dva strojna dijela u relativnom gibanju tlačno opterećena silom, uporabom tankog mazivog filma sprječava se neposredni dodir njihovih radnih površina.

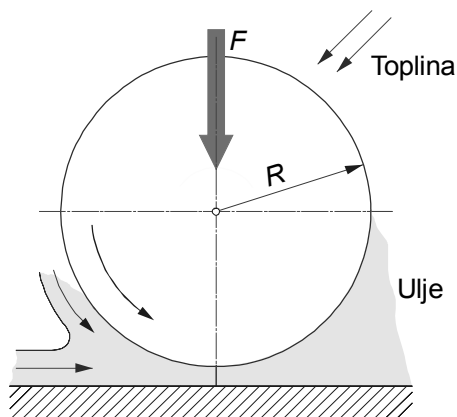
Opiranje gibanju strojnog dijela koje relativno kliže u odnosu na drugi strojni dio dovodi do gubitka (rasipanja) kinetičke energije i može prouzročiti oštećenja njihovih radnih površina. Zagrijavanje uslijed trenja, koje može prouzročiti zapaljenje maziva, predstavlja vjerojatno najdulje poznatu negativno ocjenjenu pojavu rasipanja kinetičke energije.

Dakle, stvarna učinkovitost podmazivanja je što posrednim dodirom radnih površina svodi mogućnost oštećenja i gubitak energije na minimum.

Podmazivanje, kao jedno od najvažnijih komponenti u tribološkom lancu podmazivanje - trenje - materijal, je vještina koja je vrlo stara i još uvijek nedovoljno istražena. Korisna primjena maziva počela je još prije četiri milenija. Najraniji zapisani pokušaji primjene podmazivanja sežu u 2400 godine p.n.e. [13]. U to vrijeme, tankim mazivim filmom maslinovog ulja, podmazivali su se klizači sanjki koje su služile za prijevoz ogromne statue Tia. Također je poznato da su stari Egipćani i Rimljani podmazivali mašću glavine i

osovine kotača svojih bojnih kola. Retrospektivno se može dokazati da podmazivanje predstavlja vitalni element u oblikovanju, konstruiranju i dimenzioniranju strojnih sistema.

U današnje vrijeme, kada je sasvim jasno da su energetske izvor ograničeni i kada se na strojne dijelove postavljaju vrlo strogi zahtjevi glede radnog vijeka, logično je pojačano zanimanje u svezi problematike podmazivanja. Stoga se i ovaj rad bavi proučavanjem nosivosti klizno-valjnih kontakata s aspekta hidro-dinamičkog podmazivanja, kada je postignut period podnošljivog trošenja (šrafirani dio dijagrama na slici 1.3.), tj. kada se utjecaj hrapavosti površina u dodiru može zanemariti bez većih posljedica. Rad se bavi i analizom do sada razvijenih teorija hidrodinamičkog podmazivanja na primjeru klasičnog dodira po crti koji se realizira dodirom cilindra ekvivalentnog polumjera  $R$  (prema izrazu 1.3.) i ravne horizontalne podloge (ili ploče). Cilj ove analize je da se pokušaju odvojiti bitni od nebitnih utjecaja. Osnova hidrodinamičkog podmazivanja je pojava povlačenja stanovite količine tekućeg maziva, prouzročena vrtnjom cilindra, u konvergirajući procjep između dviju površina (slika 1.10).



**Slika 1.10. Osnovni princip na kojem se temelji studija**

Temeljni zahtjev koji se ovdje postavlja je da mazivi film ne smije biti prekinut bez obzira na uvjete rada (npr. opterećenje, temperaturu itd.). Spoznaje koje će uslijediti na temelju gornje analize primijenit će se na praktični primjer kliznog radijalnog ležaja, za koji će se istraživati utjecaj uvjeta rada (opterećenje, brzina vrtnje rukavca, temperatura, vrsta mazivog ulja) na njegove statičke i dinamičke karakteristike performansi.

# 2

## KLASIČNA TEORIJA HIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA

---

*U prvom su dijelu drugog poglavlja obrađene teorijske osnove hidrodinamičkog podmazivanja, s posebnim osvrtom na Sommerfeldov broj, granično podmazivanje i utjecaj kavitacije. U drugom dijelu je opisan razvoj primjene HD teorije na klizni radijalni ležaj, te postupak rješavanja.*

### 2.1. TEORIJSKE OSNOVE

#### 2.1.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA

Prva kvantitativna istraživanja hidrodinamičkog podmazivanja provedena su koncem 19. stoljeća. Još 1874. godine, *Stefan* je u Njemačkoj istraživao stlačivanje maziva između dviju ravnih ploča koje se približavaju po okomici [9]. Originalni radovi o mazivom filmu između kliznih površina pojavili su se neovisno nekoliko godina kasnije u Engleskoj i Rusiji. U Engleskoj je *Tower* [15] proveo eksperimentalno istraživanje s namjerom da odredi trenje osovina kotača željezničkog vagona i promotri nastajanje hidrodinamičkog tlaka u prvotnom jednostavnom kliznom radijalnom ležaju. Tlakovi koji su se pojavili tijekom ovih prvih eksperimenata (1885. godine) bili su toliko visoki da su istisnuli čep iz otvora za dovođenje maziva u kućište ležaja. Rezultati *Towerovog* istraživanja su zainteresirali *Reynoldsa* koji je dokazao da se oni mogu objasniti pomoću zakona hidrodinamike, te je 1886. godine objavio svoju klasičnu teoriju hidrodinamičkog podmazivanja [16], koja je često upotrebljavana i još se uvijek upotrebljava u znanstvenom proučavanju podmazivanja, te u proračunima suvremenih sistema.

Otprilike u isto vrijeme u Rusiji je *Petrov* neovisno proveo eksperimentalno istraživanje na ležajevima podmazivanim mineralnim uljem i došao do zaključka da je trenje u ležaju uzrokovano pojavom smičnih naprezanja u mazivom filmu. Primjenom *Newtonovog zakona* viskoziteta na koncentrični rukavac koji se vrti, *Petrov* je moment viskoznog trenja izrazio preko viskoziteta maziva, brzine vrtnje i veličine ležaja. Formula *Petrova* još uvijek zadovoljava pri proračunu nisko-opterećenih radijalnih ležaja.

### 2.1.2. TEORIJSKA ANALIZA

Uvođenjem tekućeg mazivog sloja između dviju ravnomjerno hrapavih površina koje su u relativnom gibanju, osigurano je djelovanje podmazivanja koje značajno doprinosi smanjenju faktora trenja. Ovi mazivi slojevi obično su vrlo tanki pa su sile viskoznog trenja velike u usporedbi s inercijskim silama koje se mogu zanemariti. *Navier-Stokesove jednadžbe* mehanike viskoznih fluida mogu se svesti na *Reynoldsovu jednadžbu* teorije hidrodinamičkog podmazivanja uz isključenje utjecaja inercije [16]. *Reynoldsova jednadžba*, uz zanemarivanje brzine u smjeru osi  $y$  (slika 2.1), glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho \cdot h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \cdot h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \Gamma_k + \Gamma_r + \Gamma_s \quad (2.1)$$

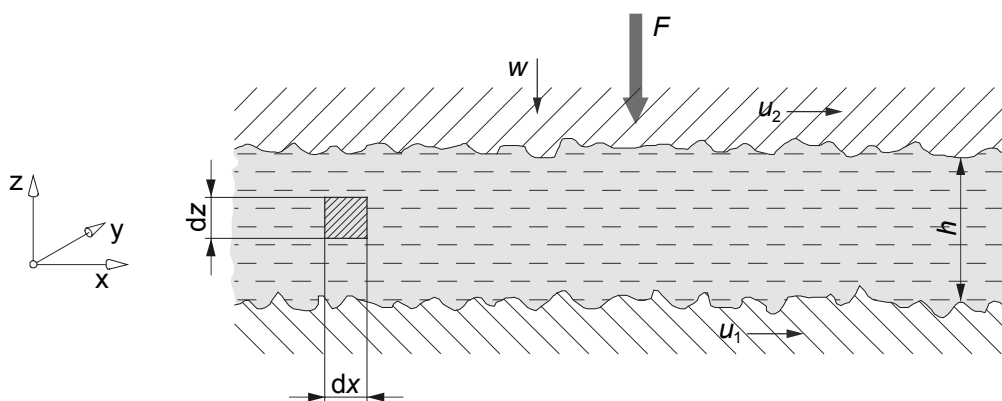
Fizikalno značenje jednadžbe (2.1) je da nastojanje hidrodinamičkog tlaka  $p$  unutar mazivog filma (debljine  $h$ , gustoće  $\rho$  i viskoznosti  $\eta$ ) ovisi o tri člana koji uzimaju u obzir *utjecaj klina*  $\Gamma_k$ , *utjecaj razvlačenja*  $\Gamma_r$  i *utjecaj stlačivanja*  $\Gamma_s$  maziva.

$$\text{Utjecaj klina} \quad \Gamma_k = 6 \cdot (u_1 - u_2) \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\text{Utjecaj razvlačenja} \quad \Gamma_r = 6 \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) \quad (2.3)$$

$$\text{Utjecaj stlačivanja} \quad \Gamma_s = 12 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Oznake u jednadžbama (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) u svezi su sa slikom 2.1.



Slika 2.1. Opći slučaj klizanja uz prisustvo tekućeg maziva

Najznačajniji član u jednadžbi (2.1) je  $\Gamma_k$  kojim se uzima u obzir utjecaj klina, posebice pri proračunu kliznih radijalnih ležaja. Ovaj član se može rastaviti na dvije komponente od kojih je prva u svezi sa promjenom gustoće maziva  $\rho$  u smjeru osi  $x$ , a druga je posljedica promjene debljine mazivog sloja  $h$  u smjeru iste osi, tj.

$$\Gamma_k = 6 \cdot h \cdot (u_1 - u_2) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + 6 \cdot \rho \cdot (u_1 - u_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Pretpostavi li se da nema promjene gustoće maziva u smjeru bilo koje osi, te da ona nije funkcija vremena, može se prva komponenta u jednadžbi (2.5) izostaviti, dok u jednadžbama (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) gustoća iščezava.

Utjecaj razvlačenja  $\Gamma_r$  (*stretch-film case*) obuhvaća pojavu promjene površinskih brzina  $u_1$  i  $u_2$ . Razvlačenje se može pojaviti u slučaju kada se brzina mazivog filma poveća tijekom ulaza i prolaska kroz procjep, a uslijed smanjenja površine presjeka procjepa. Utjecaj razvlačenja  $\Gamma_r$  je malen u usporedbi s utjecajem klina  $\Gamma_k$  i utjecajem stlačivanja  $\Gamma_s$ .

Pojava stlačivanja uvjetovana je približavanjem gornje površine brzinom  $w$  po okomici, neovisno o tome da li postoji ili ne postoji klizanje površina. Do ove pojave može doći npr. zbog udara, postupnim stlačivanjem ili (što je najčešći slučaj) relativnom vibracijom u smjeru okomice na površinu. Kod mirnog rada vrijednost ovog faktora teži nuli, premda je važno napomenuti da, u praksi, to najčešće neće biti slučaj, niti će vrijednost uvijek biti zanemariva.

Budući da je dovoljno znati brzinu klizanja samo jedne od površina, a ne apsolutne vrijednosti brzina obaju površina, uz  $u_2=0$ , može se smatrati da donja površina ima brzinu klizanja  $u=u_1$ . Osim toga, iako je u mazivom filmu moguća promjena viskoziteta, u konkretnoj primjeni uobičajeno se koristi prosječni viskozitet  $\bar{\eta}^1$  koji prema [17] iznosi

$$\bar{\eta} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \eta dx dy. \quad (2.6)$$

Uz navedene postavke, jednadžba (2.1) poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \cdot \eta \cdot u \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + 6 \cdot \eta \cdot h \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 12 \cdot \eta \cdot w. \quad (2.7)$$

U slučaju da nema stlačivanja, zadnji član na desnoj strani jednadžbe (2.7) se izostavlja. Također, ako se zanemari i utjecaj razvlačenja (drugi član na desnoj strani ove jednadžbe), jedini izvor hidrodinamičkog tlaka koji preostaje biti će utjecaj klina koji je uvjetovan odgovarajućim promjenama debljine mazivog filma u smjeru osi  $x$ . Kao što se i ranije pokazalo, upravo ovaj utjecaj određuje nosivu sposobnost kod većine kliznih ležaja. Reynoldsova jednadžba u dvije dimenzije, uz pobrojana pojednostavljenja, poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6 \cdot \eta \cdot u \cdot \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.7a)$$

<sup>1</sup> U ovom je izrazu označen sa  $\bar{\eta}$ , ali u daljnjem tekstu će se upotrebljavati oznaka  $\eta$ .

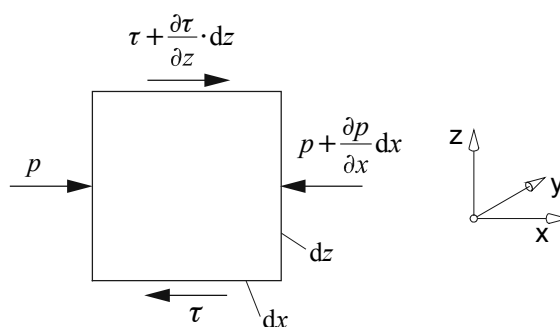
**Tablica 2.1. Pretpostavke na kojima se temelji klasična *Reynoldsova* teorija hidrodinamičkog podmazivanja [16]**

|   | PARAMETRI ILI UTJECAJI                          | PRETPOSTAVKE                                |
|---|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1 | Gravitacijske sile mazivog filma                | Zanemaruju se                               |
| 2 | Inercijske sile mazivog filma                   | Zanemaruju se                               |
| 3 | Mazivo                                          | Newtonov viskozni fluid, nestlačivo         |
| 4 | Viskozitet                                      | Konstantan                                  |
| 5 | Temperatura                                     | Konstantna                                  |
| 6 | Debljina mazivog filma                          | Mala u usporedbi s drugim izmjerama sistema |
| 7 | Smik (klizanje) na granici fluid-kruta površina | Ne postoji                                  |
| 8 | Površinska napetost                             | Zanemaruje se                               |
| 9 | Stanje površina                                 | Ravnomjerno hrapave, krute                  |

*Reynoldsova* klasična teorija hidrodinamičkog podmazivanja temelji se na pretpostavkama koje su definirane u tablici 2.1 [16]. Pretpostavke 7 i 8 uobičajene su svugdje u hidrodinamici, a pretpostavke 1 i 2, uslijed pretpostavke 6, omogućavaju da se komponente diljem osi  $z$  mogu zanemariti. Pretpostavke 3, 4, i 5 bile su potpuno isključene pri gornjem sravnjivanju i poopćavanju prvotne teorije po *Reynoldsu*.

### 2.1.3. RASPODJELA BRZINA

Izdvoji li se element mazivog filma s dvije krute granice (slika 2.2.), može se postaviti jednačba ravnoteže sila tlaka i viskoznog trenja u smjeru osi  $z$ :

**Slika 2.2. Ravnoteža elementa mazivog filma**

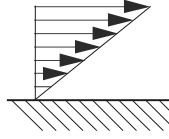
$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dz + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right) dx = 0, \quad (2.8)$$

odnosno

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Uvrsti li se u jednadžbu (2.9.) *Newtonova formula*<sup>2</sup>  $\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$  dobit će se jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.10)$$



koja nakon dvostrukog integriranja daje komponentu brzine diljem osi x za neku proizvoljnu točku unutar mazivog filma:

$$u = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z^2 + C_1 \cdot z + C_2. \quad (2.11)$$

Ovdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integriranja koje se određuju iz graničnih uvjeta: za  $z = 0$ ,  $u = u_1$ , a za  $z = h$ ,  $u = u_2$  (slika 2.1). Slijedi

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot h, \quad C_2 = u_1.$$

Uz sve gore navedeno, konačno se može napisati

$$u = -\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (h \cdot z - z^2) + \left[ u_1 + \frac{z}{h} \cdot (u_2 - u_1) \right], \quad (2.12)$$

gdje  $-\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (h \cdot z - z^2)$  predstavlja paraboličnu raspodjelu brzine (*Poiseuille flow*), a

$u_1 + \frac{z}{h} \cdot (u_2 - u_1)$  linearnu promjenu brzine smika (*Couette flow*).

Analogijom u poprečnom smjeru, tj. u smjeru osi y, komponenta brzine  $v$  imati će oblik

$$v = -\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \cdot z \cdot (h - z), \quad (2.13)$$

gdje je  $(\partial p / \partial y)$  - gradijent tlaka u smjeru osi y.

#### 2.1.4. SOMMERFELDOV BROJ

*Sommerfeldov broj*  $So$  u teoriji hidrodinamičkog podmazivanja predstavlja osnovni proračunski parametar koji je definiran kao omjer sila tlaka i sila viskoznog trenja u mazivom filmu. Prema [18]  $So$  je definiran sljedećim izrazom:

$$So = \frac{\bar{p} \cdot \psi_{\text{eff}}^2}{\eta_{\text{eff}} \cdot \omega_h}, \quad (2.14)$$

gdje je

<sup>2</sup> Ova formula predstavlja definiciju tzv. Newtonovog fluida: Neki je fluid Newtonov ako je smično naprezanje proporcionalno brzini smične deformacije.

- $\bar{p}$  - specifično opterećenje,  $\bar{p} = \frac{F}{DB}$ ,
- $\psi_{\text{eff}}$  – relativna efektivna zračnost, ,
- $\eta_{\text{eff}}$  – efektivni viskozitet maziva,
- $\omega_h$  – hidrodinamička kutna brzina.

Posljednjim se mogu uzeti u obzir kutne brzine svakog pojedinog elementa u sustavu, a u slučaju kliznog ležaja s nepomičnom blazinicom ta je brzina jednaka kutnoj brzini rukavca. Srednja vrijednost relativne zračnosti određuje se na temelju poznavanja najvećih i najmanjih izmjera za čahuru i rukavac:

$$\psi_{\max} = \frac{D_{\max} - D_{J,\min}}{D}, \quad \psi_{\min} = \frac{D_{\min} - D_{J,\max}}{D}, \quad \bar{\psi} = 0,5(\psi_{\max} + \psi_{\min}). \quad (2.14a)$$

Promjena relativne zračnosti određuje se na temelju efektivne temperature mazivog filma koja se, za ovaj slučaj, uzima kao srednja temperatura čahure i rukavca (2.14b). U slučaju kada se razlika temperatura čahure i rukavca mora uzeti u obzir, promjena relativne zračnosti se određuje obzirom na pripadne temperature i koeficijente linearnog produljenja (2.14c):

$$\Delta\psi = (\alpha_{l,B} - \alpha_{l,J})(T_{\text{eff}} - 20), \quad (2.14b)$$

$$\Delta\psi = \alpha_{l,B}(T_B - 20) - \alpha_{l,J}(T_S - 20). \quad (2.14c)$$

Efektivna relativna zračnost određena je sumom srednje relativne zračnosti i promjene zračnosti uslijed razlike u temperaturi:

$$\psi_{\text{eff}} = \bar{\psi} + \Delta\psi. \quad (2.14d)$$

Efektivni dinamički viskozitet maziva uzima se obzirom na efektivnu temperaturu mazivog filma, za ovaj slučaj, srednju temperaturu maziva na ulazu i izlazu iz ležaja.

*Sommerfeldov broj*  $So$  ima fundamentalno značenje za rješavanje problema podmazivanja, te predstavlja najvažniji parametar pri projektiranju i konstruiranju kliznih ležaja (vidi poglavlje 2.2.6).

### 2.1.5. GRANIČNO PODMAZIVANJE

Nakon proučavanja osnovnih principa hidrodinamičkog podmazivanja ili tzv. *podmazivanja s relativno debelim mazivim filmom*, potrebno je razmotriti i utjecaj smanjenja debljine mazivog filma do razine pri kojoj može doći do djelomičnog mehaničkog dodira. Svojstva podmazivanja u potpuno hidrodinamičkim uvjetima su izotropna i istovrsna, neovisno o gradijentu temperature, no to ne vrijedi za tzv. *granično podmazivanje*. Svojstva

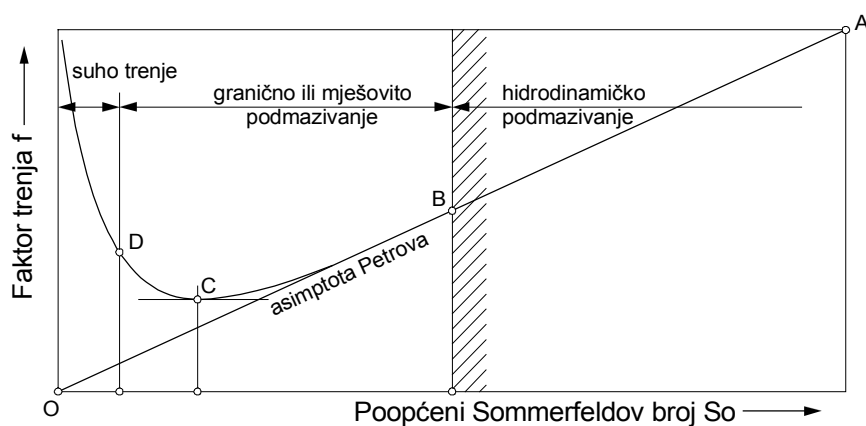
mazivih filmova u uvjetima mješovitog i graničnog podmazivanja vrlo je teško odrediti obzirom da unutar graničnih ploha dolazi do uzajamnih fizikalnih i kemijskih djelovanja.

Potpuni hidrodinamički režim podmazivanja karakteriziran je prisustvom maziva koje potpuno razdvaja površine dodira. Kada krute površine ne dodiruju jedna drugu, praktički ne dolazi do njihovog trošenja, a opiranje gibanju određeno je jedino viskozitetom maziva.

Međutim, ukoliko gibanje započinje iz stanja mirovanja, osnovna količina maziva biva istisnuta iz područja dodira, a na površinama ostaje samo adsorbirani sloj maziva (situacija je identična i u trenutku zaustavljanja). Ovaj sloj može imati debljinu od samo nekoliko molekularnih slojeva, no i takav je u stanju spriječiti zaribavanje površina i osigurati njihovo klizanje. Adsorbirani sloj je čvrsto vezan molekularnim silama s metalnom podlogom i očigledno u većoj mjeri gubi svoje uobičajene karakteristike svojstvene mazivim fluidima.

U posebno teškim uvjetima adsorbirani sloj maziva može izgorjeti. U takvim se slučajevima zaribavanje može spriječiti uporabom mazivih ulja s posebnim dodacima, čvrstih maziva (kao što je npr. grafit), odnosno uporabom kemijskih prevlaka od oksida ili sulfida metala. Teži uvjeti, pri kojima nije moguće idealno hidrodinamičko podmazivanje, klasificirani su kao uvjeti *neidealnog* ili *graničnog podmazivanja*. U takvim uvjetima, osobit značaj imaju svojstva površina u dodiru (najčešće metalne površine) i fizikalno-kemijska struktura maziva.

Ukoliko su uvjeti rada takvi da je nemoguće osigurati potpuno hidrodinamičko razdvajanje dviju površina dodira, pojava graničnog podmazivanja često je popraćena mješovitim režimom. Mješovito podmazivanje uključuje djelomični dodir istaknutih vrhova ravnomjerno hrapave površine i prisustvo dovoljne veličine količine maziva u udubinama. Granično podmazivanje je u svezi sa složenim adsorpcijama i međusobnim fizikalno-kemijskim djelovanjima koja određuju stvarnu prirodu dodira krutih tijela u mješovitom režimu, čak i u slučajevima odsustva velike količine maziva u udubinama površina.



Slika 2.3. Režimi podmazivanja za par kliznih površina

Slika 2.3. prikazuje dijagram ovisnosti faktora trenja  $f$  o *Sommerfeldovom* broju  $So$ . Očigledno je da većim vrijednostima  $So$  odgovaraju veće vrijednosti debljina mazivog filma, dakle i uvjetima potpunog hidrodinamičkog režima s očiglednom proporcionalnošću između  $f$  i  $So$ . Asimptota OA se može promatrati kao grafički prikaz formule *Petrova* i slaže se s proračunom prema klasičnoj teoriji podmazivanja pri velikim vrijednostima *Sommerfeldovog* broja  $So$ . To je djelomice primjenjivo kod rada kliznih radijalnih ležaja. Vrlo male vrijednosti  $So$  odgovaraju suhom trenju<sup>3</sup> (ili zaribavanju u slučaju metalnog dodira). Međupodručje između suhog trenja i potpunog hidrodinamičkog režima podmazivanja može se klasificirati kao granično ili mješovito podmazivanje. Dakle, pojava graničnog podmazivanja može prouzročiti faktore trenja koji, ili prelaze vrijednost za čisto hidrodinamičko podmazivanje, ili su bliski minimalnoj vrijednosti označenoj točkom C u dijagramu na slici 2.3. U prvom slučaju, stvarno opiranje pomicanju u mazivom fluidu dat će rezultate velikih sila trenja. Sljedeća promišljanja objašnjavaju postojanje točke C s minimalnim trenjem.

Trenje u uvjetima graničnog podmazivanja  $f_g$ , može se predočiti u obliku zbroja triju komponenti: fluidne, krute i deformabilne. Tada je ukupni faktor  $f_g$  jednak:

$$f_g = f_f + f_k + f_d. \quad (2.15)$$

U ovom izrazu je  $f_f$  komponenta uvjetovana pomicanjem mazivog sloja, koje je identično (točka 2.1.4.) i zato proporcionalno viskozitetu maziva  $\eta$ . Ako se promotri slika 2.1 kao slučaj potpunog ili čistog hidrodinamičkog režima podmazivanja dviju površina dodira, očigledno je da u tom slučaju, za održavanje potpuno razdvojenih površina relativna brzina klizanja ( $u_1-u_2$  ili  $u$ ) mora biti velika. Degeneriranje hidrodinamičkog podmazivanja u mješovito i granično duž krivulje ABCD na slici 2.3 može se najjednostavnije objasniti padom brzine  $u$ . Razdvojenost kliznih površina se smanjuje, a početak režima graničnog podmazivanja karakterizira pojava komponente suhog trenja. Ovo trenje postupno proizvodi toplinske posljedice koje, smanjenjem viskoziteta  $\eta$ , ograničavaju opseg podmazivanja. U konačnom iznosu, sniženje  $f_f$  zbog smanjenja  $\eta$  može biti značajnije od nove komponente  $f_k$ , a u tim uvjetima ukupni faktor se smanjuje na dijelu krivulje BC do minimalnog iznosa C u dijagramu na slici 2.3. Dio pune nominalne površine koja sudjeluje u suhom trenju (s daljnjim sniženjem brzine) raste, te se formira odgovarajuća komponenta faktora graničnog trenja. Zbog toga će faktor trenja rasti na dijelu krivulje CD (slika 2.3.).

Vrlo je teško točno ustanoviti što se istodobno događa s deformabilnom komponentom  $f_d$ , no nema dvojbe da je njena promjena u procesu ostvarivanja prijelaza ABCD mala u usporedbi s promjenom  $f_f$  i  $f_k$ .

Uvjet minimalnog trenja, koje je prikazano točkom C, predstavlja idealni cilj pri projektiranju i konstruiranju strojnih sistema, a posebice ležaja. Nažalost, ova točka je vrlo

<sup>3</sup> Trenje bez prisutnosti maziva

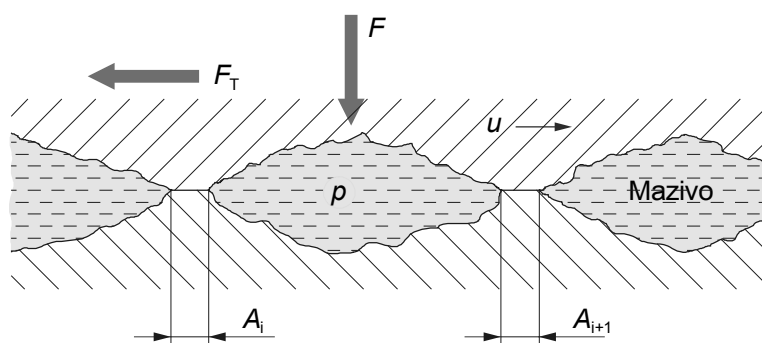
labilna i postoji velika vjerojatnost zaribavanja, uzduž krivulje od C prema gore, ukoliko su površine bez nečistoća. Najveći prirast trenja, tijekom eksploatacije u potpuno hidrodinamičkom području, je značajan za karakteristike izdržljivosti i radni vijek strojnog sistema.

Na slici 2.4. prikazan je uvjet mješovitog ili graničnog podmazivanja pri klizanju metala po metalu. Ako se sa  $A_t$  označi nominalna površina dodira površina koje klizu, može se sila trenja  $F_T$  napisati u obliku zbroja sila suhog trenja na vrhovima neravnina, fluidnog trenja u udubinama i sile struganja  $F_s$  kao što slijedi

$$F_T = A_t \cdot [k_p \cdot \tau_k + (1 - k_p) \cdot \tau_f] + F_s. \quad (2.16)$$

Ovdje je  $k_p$ -udio površine  $A_t$  na kojem se ostvaruje dodir krutog tijela, a  $\tau$ -smično naprezanje ( $k$  - krutog tijela,  $f$  - fluida). Kako je opterećenje  $F$  oslonjeno na krute vrhove neravnina, hidrodinamički tlak u udubinama može se napisati

$$F = A_t \cdot [k_p \cdot R_e + (1 - k_p) \cdot p], \quad (2.17)$$



Slika 2.4. Granično podmazivanje pri klizanju metala po metalu

gdje je  $R_e$  - naprezanje tečenja mekšeg materijala, a  $p$  - hidrodinamički tlak u udubinama. Kako je  $\tau_k \gg \tau_f$ ,  $p$  je samo malo manje od  $R_e$  u izrazu (2.17.) pa je nužno je odrediti srednji tlak  $\bar{p}$  kao  $R_e > \bar{p} > p$ . Sada se izraz (2.17.) može napisati u pojednostavljenom obliku

$$F = A_t \cdot \bar{p}. \quad (2.18)$$

Ako se sada  $F_T$  podijeli sa  $F$  dobit će se izraz za faktor trenja u uvjetima graničnog podmazivanja  $f_g$ :

$$f_g = \frac{F_T}{F} = k_p \cdot \frac{\tau_k}{\bar{p}} + (1 - k_p) \cdot \frac{\tau_f}{\bar{p}} + f_s, \quad (2.19)$$

gdje se komponenta struganja  $f_s = F_s / A_t \cdot \bar{p}$  može zanemariti, kako u ovom izrazu tako i dalje. Drugi član u desnom dijelu izraza je također vrlo mali u usporedbi s prvim pa je

$$f_g = k_p \cdot \frac{\tau_k}{\bar{p}}. \quad (2.20)$$

Ako se pretpostavi postojanje suhog dodira između metalnih površina koje se kliču, opterećenje  $F$  i sila trenja  $F_T$  mogu se definirati izrazima  $F = A_t \cdot k_p \cdot R_e$  i  $F_T = A_t \cdot k_p \cdot \tau_k + F_s$ , te ako se stavi  $R_e \approx \bar{p}$  i zanemari sila struganja  $F_s$ , u uvjetima suhog trenja slijedi

$$f_g = \frac{F_T}{F} = \frac{\tau_k}{\bar{p}}, \quad (2.21)$$

a iz izraza (2.20.) i (2.21.) slijedi

$$\frac{f_g}{f_s} = k_p \rightarrow f_g \ll f_s$$

Ovu posljednju konstataciju ( $f_g \ll f_s$ ) potvrđuju i eksperimentalni rezultati.

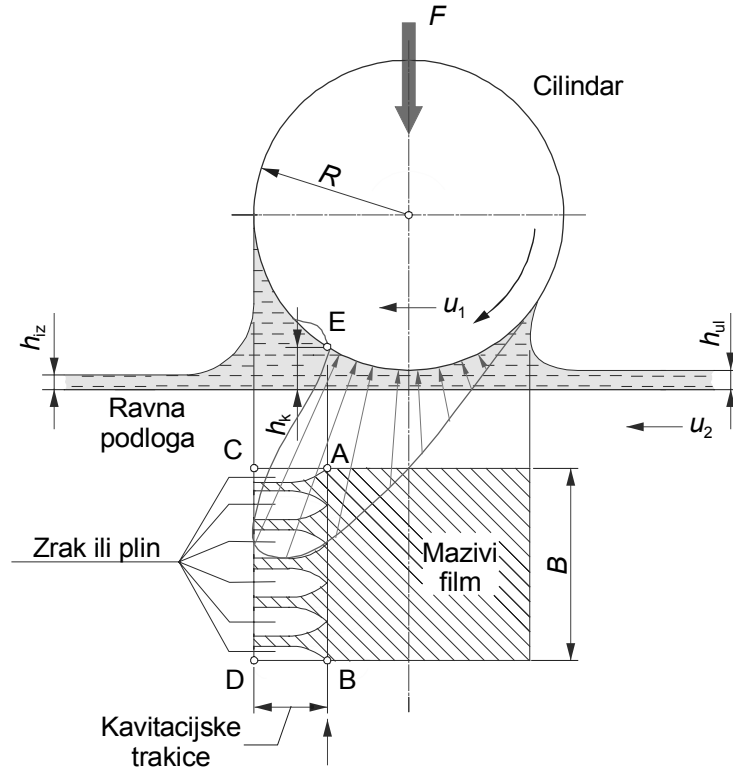
U gore navedenoj analizi nije se spominjala priroda suhog i fluidnog dodira, pa dobiveni izrazi mogu biti uporabljeni kako za mješovito, tako i za granično podmazivanje. U konkretnim primjerima uvjet graničnog podmazivanja određuje se na osnovu povezanosti  $f_k$  i  $f_f$  sa svojstvima površina dodira, sa pojavom adsorpcije i sa opsežnim svojstvima fluida.

### 2.1.6. KAVITACIJA

Kavitacija se javlja uslijed pada lokalnog tlaka u mazivom filmu do nivoa tlaka površina dodira. U takvim uvjetima se stvaraju i brzo rastu mjehurići ispunjeni plinom ili parom. Prilikom njihovog premještanja u područje povišenog tlaka oni se rasprskavaju oslobađajući pri tome značajnu energiju koja uzrokuje jako erozijsko trošenje površina. Pojam kavitacije obradio je još 1754. godine *Euler* u svojoj teoriji hidrauličkih turbina, a prvi puta je eksperimentalno istraživana 1895. godine u svezi s proučavanjem oštećenja pogonskih brodskih vijaka [17]. Trošenje materijala ležaja je rezultat djelovanja kavitacije u tankim mazivim slojevima.

Jedan od najslikovitijih prikaza pojave kavitacije je na primjeru posrednog dodira cilindra i ravne podloge – dodir po crti (slika 2.5).

Iza rotirajućeg cilindra stvara se kavitacijski tok ili tzv. kavitacijske trakice u trenutku kada hidrodinamički tlak poprima negativnu vrijednost. Pod djelovanjem površinske napetosti mazivi film se postupno raspada na trakice što dovodi do znatnog suženja mazivog filma u odnosu na njegovu prvotnu širinu.



**Slika 2.5. Predodžba pojave kavitacije na primjeru opterećenog i podmazivanog dodira po crti između cilindra i ravne podloge**

Gradijent tlaka i sam tlak padaju na nulu u točki E (slika 2.5) gdje je debljina mazivog filma jednaka  $h_k$ . Ako je  $Q$  potrebna količina maziva između površine cilindra i podloge tada je:

$$Q = u_2 \cdot h_{ul} = u_2 \cdot h_{iz} = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \cdot h_k, \quad (2.22)$$

odnosno uz omjer  $k_u = \frac{u_1}{u_2}$  slijedi

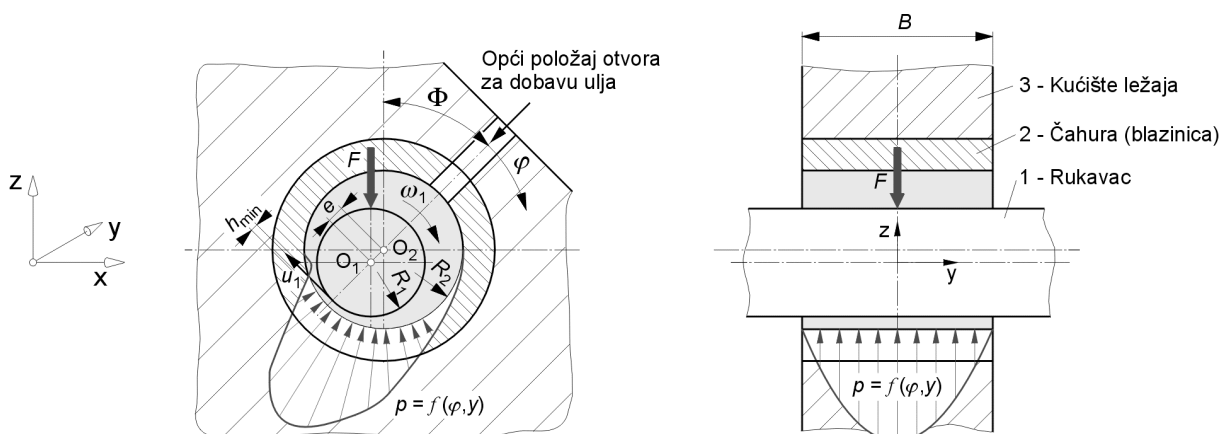
$$h_k = \frac{2}{1+k_u} \cdot h_{u_1} \quad (2.23)$$

Pretpostavka da gradijent tlaka bude jednak nuli u točki E (slika 2.5) znači da u tom presjeku započinje režim kavitacije. Uvjet čistog klizanja ( $k_u=0$ ) ovdje je nedopustiv zbog toga što se uz ovaj uvjet mazivo nastoji gomilati ispred cilindra, a ne iza njega (što mijenja raspored tlaka u cijelosti). Osim toga, nema niti kavitacijskog režima koji je predložen na slici 2.5. Zbog toga se izraz (2.23) upotrebljava samo za veličinu  $k_u$  blisku jedinici. U slučaju čistog valjanja,  $k_u=1$ , a  $h_k=h_{ul}$ , kod kliznih radijalnih ležaja donja površina je zakrivljena, pa se zbog toga brzina stvaranja i iščezavanja mazivog filma odgovarajuće snižava.

## 2.2. PRIMJENA HD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE<sup>4</sup>

### 2.2.1. TEORIJSKA ANALIZA

Povećanje radne sigurnosti strojeva i produljenje njihovog radnog vijeka, značajno ovisi o oblikovanju i dimenzioniranju ležaja glede postojanosti na trošenje. Još u uvodnom dijelu ovog rada, rečeno je ukoliko se želi spriječiti ili maksimalno smanjiti trošenje dijelova u dodiru, da se ne smije dopustiti neposredni dodir metala po metalu, već se mora osigurati posredni dodir preko mazivog filma. Ovaj mazivi film ne smije se prekinuti bez obzira na veličinu opterećenja, kako mehaničkog tako i toplinskog (termičkog). Za razliku od dodira po crti cilindra i ravne horizontalne podloge, kod kliznog radijalnog ležaja nosivi mazivi sloj ili film se definira kod ekscentričnog položaja rukavca. "Usisno" djelovanje rukavca koji se vrti oko svoje središnje osi omogućuje dobavu maziva u procjep ležaja i stvaranje hidrodinamičkog tlaka u tom konvergirajućem procjepu. Zbog konkavnog zakrivljenja čahure ležaja (slika 2.6 i slika 1.1), mazivi film se brže i lakše stvara nego u slučaju dodira po crti cilindra i ravne podloge (slika 1.4). Općenita raspodjela hidrodinamičkog tlaka u konvergirajućem procjepu predložena je na slici 2.6.



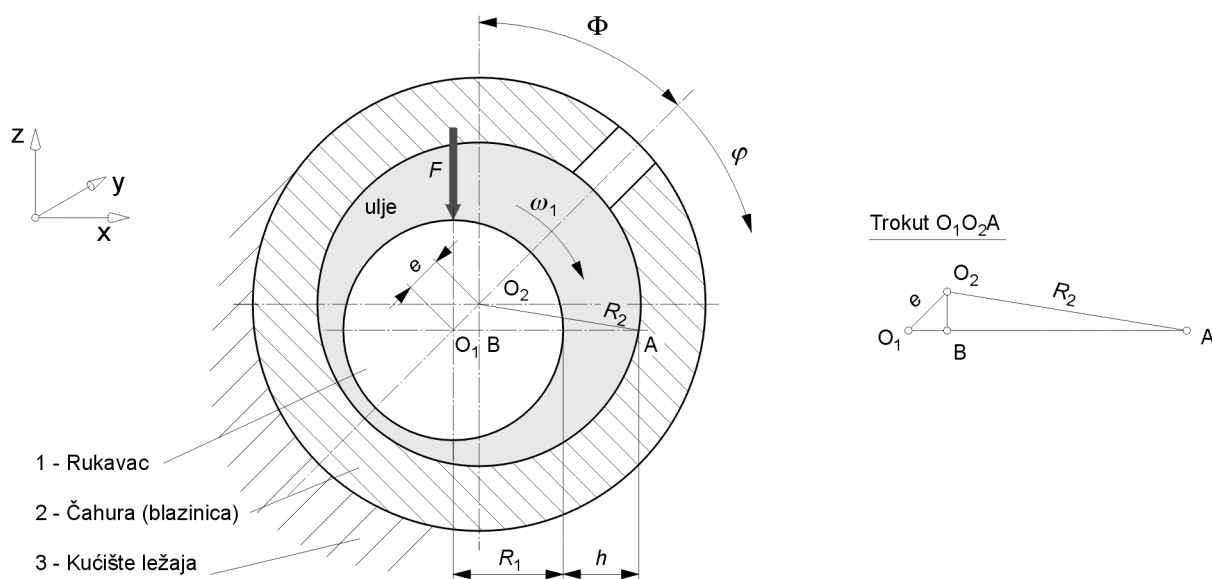
Slika 2.6. Shematska predodžba kliznog radijalnog ležaja s općenitom raspodjelom hidrodinamičkog tlaka  $p=f(\varphi, y)$  ispod rukavca

Do pogonske ekscentričnosti rukavca  $e$  (slika 2.6) može se doći tako da se integral hidrodinamičkog tlaka u procjepu uravnoteži s vanjskim opterećenjem rukavca  $F$ . U cilju lakše provedbe daljnje analize, u svezi s proučenim teorijama koje se zasnivaju na klasičnoj hidrodinamičkoj teoriji podmazivanja, potrebno je detaljno proučiti osnovne postavke kod proračuna kliznog radijalnog ležaja.

<sup>4</sup> U ovom radu proučavanje je ograničeno na klizne radijalne ležajeve najjednostavnije konstrukcije s jednoslojnom čahuricom (blazinicom)

Na slici 2.7 predložen je shematski poprečni presjek kliznog radijalnog ležaja. Nepomična čahura (tuljak, blazinica ili košuljica) (2) polumjera  $R_2$  obuhvaća brzohodni rukavac (1) polumjera  $R_1$ . Međuprostor, koji je uvjetovan odgovarajućom srednjom zračnošću  $C$ , ispunjen je mazivim uljem s apsolutnim viskozitetom  $\eta^5$ . Rukavac je izvrgnut djelovanju vanjskog opterećenja predloženog silom  $F$ . Tijekom normalnog režima rada spojnice središta  $\overline{O_1O_2}$  je otklonjena glede vertikalne osi ležaja za kut  $\Phi$  (u smjeru vrtnje rukavca). Ovaj kut se može nazvati *kut položaja rukavca*. On je promjenjiv s opterećenjem, tj.  $\Phi = f(F)$ . U slučaju da opterećenje ne djeluje ( $F=0$ ) ekscentričnost rukavca  $e=0$ , a kut  $\Phi$  je neodređen (slučaj kao kod *Newtonovog* i *Petrovljevog* ležaja) [17]. S druge strane, kada opterećenje ima konačnu vrijednost  $F$  i rukavac se ne vrti ( $\omega_1=0$ ), ekscentričnost rukavca  $e=\Delta R=R_2-R_1$  i  $\Phi=0$ . U normalnom režimu rada klin mazivog ulja se sužava, a hidrodinamički tlak  $p$  dovoljno poraste da može uravnotežiti opterećenje  $F$ . Uvede li se kutna koordinata  $\varphi$  neke točke unutar mazivog filma za trokut  $\Delta O_1AO_2$  na slici 2.7 može se napisati

$$\begin{aligned}\overline{O_1A} &= R_1 + h = \overline{O_1B} + \overline{BA} = e \cdot \cos \varphi + \sqrt{(R_1 + C)^2 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \\ &= e \cdot \cos \varphi + (R_1 + C) \cdot \sqrt{1 - \left[ \frac{e}{(R_1 + C)} \right]^2 \cdot \sin^2 \varphi}.\end{aligned}$$



Slika 2.7. Shematska predodžba poprečnog presjeka kliznog radijalnog ležaja (veza sa slikom 2.6 i slikom 1.1)

Obzirom da je uglavnom  $R_1 > 10^3 \cdot e$  i  $e \approx C$  [17], slijedi  $\left( \frac{e}{(R_1 + C)} \right)_{\min}^2 \approx 10^{-6}$  pa je prihvatljivo zanemarivanje ovog člana u izrazu za  $\overline{O_1A}$ . Dakle, može se napisati da je

<sup>5</sup> Dinamički viskozitet

$$\frac{h}{C} = 1 + \frac{e}{C} \cdot \cos \varphi, \quad (2.24)$$

gdje se bezdimenzijski omjer  $(e/C)=\varepsilon$  u literaturi naziva *relativna ekscentričnost rukavca*. Iz jednadžbe (2.24) je jasno da bezdimenzijska debljina mazivog filma  $h/C$  ima maksimalnu vrijednost kod  $\varphi=0^\circ$ , a minimalnu vrijednost kod  $\varphi=180^\circ$ .

Uz pretpostavku da je širina ležaja B na slici 2.6 velika u usporedbi s polumjerom čahure  $R_2$  ( $B>R_2$ ), gubici uslijed bočnog propuštanja (istiskivanja, postranog toka) maziva se mogu zanemariti [17]. To dopušta krajnje pojednostavljenje *Reynoldsove jednadžbe* (2.7) u oblik

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \cdot \frac{dp}{dx} \right) = 6 \cdot \eta \cdot u_1 \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Ako se uvrsti da je  $u_1=u$  (budući da čahura miruje je  $u_2=0$ ) i zatim provede jednostruko integriranje u granicama za  $h$  ( $h_1=h_e^6$ ,  $h_2=h$ ) dobiva se

$$\frac{dp}{dx} = 6 \cdot \eta \cdot u \cdot \frac{h - h_e}{h^3}. \quad (2.25)$$

Prethodni se izraz u literaturi često može naći u obliku

$$\frac{dp}{dx} = 12 \cdot \eta \cdot U^* \cdot \frac{h - h_e}{h^3}, \quad (2.25a)$$

gdje je  $U^*$  poznata kao brzina uvlačenja. Vrijednost brzine uvlačenja potrebno je odrediti za svaki pojedini slučaj, a u razmatranom je jednaka  $(u_1 + u_2)/2 = u/2$  [19].

Ako se umjesto  $x$  uvede  $R_1 \cdot \varphi$  i u jednadžbu (2.25) uvrsti  $h$  iz jednadžbe (2.24), nakon provedenog integriranja slijedi izraz za hidrodinamički tlak  $p$  u mazivom filmu

$$p = \frac{6 \cdot \eta \cdot u \cdot R_1}{C^2} \cdot \left[ \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} - \frac{h_e}{C} \cdot \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^3} \right] + C_4. \quad (2.26)$$

Uporabom *Sommerfeldove* zamjene [20], te uz granične uvjete

$$p = p_a \text{ kod } \varphi = 0, \quad \text{konstanta integracije } C_4 = p_a \text{ i}$$

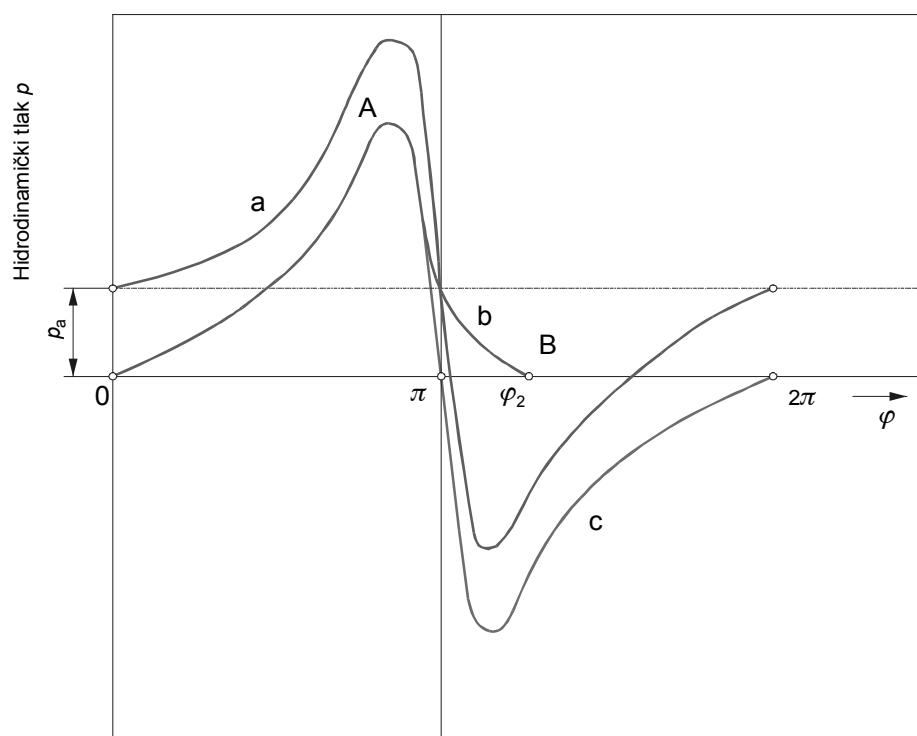
$$p(2\pi) = p(0), \quad h_e = \frac{2C(1 - \varepsilon^2)}{2 + \varepsilon^2},$$

gdje je  $p_a$  atmosferski tlak, može se riješiti integral u izrazu (2.26) i dobiti pretlak  $p$  u obliku

$$p = p_a + \frac{6 \cdot \eta \cdot u \cdot R_1 \cdot \varepsilon}{C^2} \cdot \left[ \frac{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi}{(2 + \varepsilon^2) \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \right]. \quad (2.27)$$

<sup>6</sup>  $h_e$  je konstanta koja odgovara onoj debljini mazivog filma koja bi se pojavila kod  $(dp/dx)=0$ , odnosno kod maksimalnog tlaka  $p$

Raspodjela tlaka dobivena izrazom (2.27), prikazana na slici 2.8 krivuljama a i c, uvijek će biti antisimetrična za vrijednosti  $\varphi=\pi$  i  $p=p_a$ . Međutim, i pored toga što se u području  $\pi < \varphi < 2\pi$  krivulja hidrodinamičkog tlaka poklapa s teorijskom raspodjelom prema izrazu (2.26), u teorijskom razmatranju nije uzeta u obzir pojava kavitacije. U stvarnosti mazivo može podnijeti vrlo ograničene negativne tlakove bez pojave emulgacije i mjehurića zraka. Stoga se u teorijskom razmatranju, u području  $\pi < \varphi < 2\pi$ , moraju uzeti stvarni granični uvjeti koji imaju oblik  $p=0$  kod  $\varphi=0$ ,  $(dp/d\varphi)=0$  i  $p=0$  kod  $\varphi=\varphi_2$ . Kada u stvarnosti ne bi postojala kavitacija, ležaj bi teško ostvario sposobnost nošenja, ukoliko utjecaj iščeznuća ulaznog klina ne bi u potpunosti bio nadoknađen utjecajem izlaznog klina mazivog filma.



**Slika 2.8. Stvarna i teorijska raspodjela hidrodinamičkog tlaka u kliznom radijalnom ležaju (a - teorijska raspodjela, b - raspodjela glede stvarnih graničnih uvjeta, c - krivulja prirasta tlaka) [19]**

Krivulja b na slici 2.8 predočava potpunu raspodjelu hidrodinamičkog tlaka koja integriranjem daje sposobnost nošenja ležaja  $F$ . Iz predodžbe na slici 2.8 proizlaze granični uvjeti za krivulju hidrodinamičkog tlaka:

$$p=0 \text{ kod } \varphi=0 \text{ i } \varphi=\varphi_2,$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = 0 \text{ } \varphi=\varphi_2. \quad (2.28)$$

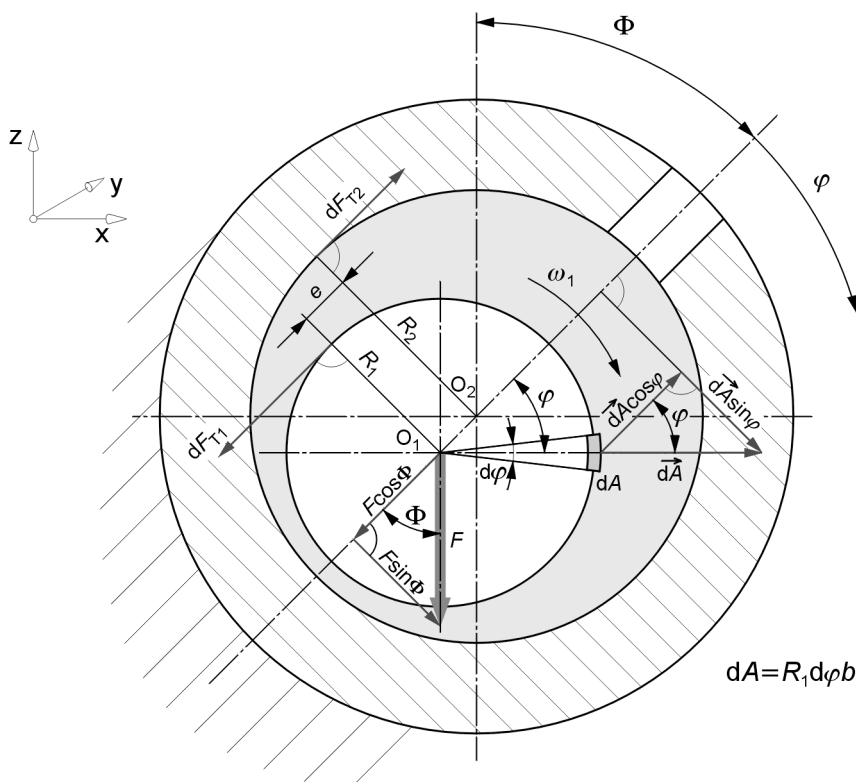
### 2.2.2. SPOSOBNOST NOŠENJA

Elementarna površina  $dA$  na površini rukavca (slika 2.9), koja je određena elementarnim kutom  $d\varphi$  s vrhom u središtu rukavca  $O_1$ , može se predložiti vektorom  $d\vec{A}$  s komponentama  $d\vec{A} \cdot \cos \varphi$  (paralelna sa spojnicom središta  $\overline{O_1O_2}$ ) i  $d\vec{A} \cdot \sin \varphi$  (okomito na spojnicu središta  $\overline{O_1O_2}$ ). Sila  $F$  koja djeluje na rukavac također se može rastaviti na dvije komponente:  $F \cdot \cos \Phi$  (paralelna sa spojnicom središta  $\overline{O_1O_2}$ ) i  $F \cdot \sin \Phi$  (okomita na spojnicu središta  $\overline{O_1O_2}$ ) (slika 2.9). Uz navedeno slijedi

$$\begin{aligned} F \cdot \sin \Phi &= \int p \cdot d\vec{A} \cdot \sin \varphi d\varphi = B \cdot R_1 \cdot \int_0^{2\pi} p \cdot \sin \varphi d\varphi = \\ &= B \cdot R_1 \cdot \left( -p \cdot \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi \right) = -B \cdot R_1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{dp}{d\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

što uz jednadžbu (2.25); odnosno (2.26) daje izraz

$$F \cdot \sin \Phi = \frac{6 \cdot \eta \cdot u \cdot B \cdot R_1^2}{C^2} \cdot \left[ \frac{h_e}{C} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^3} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \right]. \quad (2.29)$$



Slika 2.9. Shematska predodžba za određivanje sposobnosti nošenja i momenta trenja u kliznom radijalnom ležaju

Pomoću metode uporabljene za ocjenjivanje tlaka [20] u jednadžbi (2.26), dokazuje se da se izraz (2.29) može svesti na sljedeći oblik:

$$F \cdot \sin \Phi = \frac{12 \cdot \pi \cdot \eta \cdot u \cdot B \cdot \varepsilon}{(2 + \varepsilon)^2 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot \left( \frac{R_1}{C} \right)^2. \quad (2.29a)$$

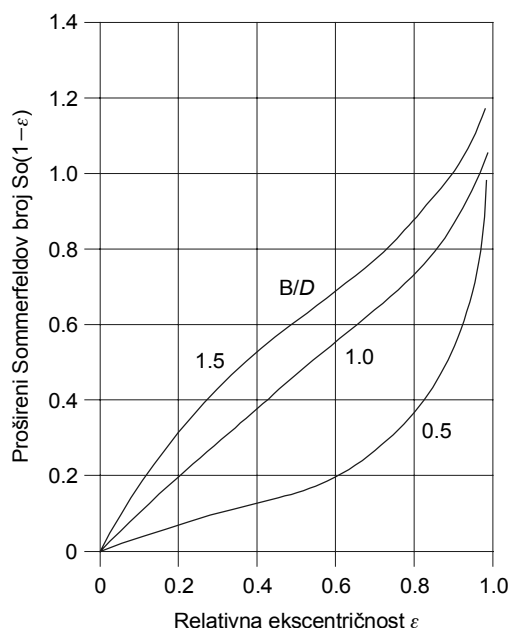
Kut položaja rukavca  $\Phi$  može se odrediti iz izraza

$$F \cdot \cos \Phi = \int p \cdot d\vec{A} \cdot \cos \varphi d\varphi = B \cdot R_1 \cdot \int_0^{2\pi} p \cdot \cos \varphi d\varphi$$

koji u konačnom računu teži nuli [20]. Ako je  $F \neq 0$ , tada je  $\Phi = 0$  ili  $\Phi = \pi/2$ . Na taj način  $F \cdot \sin \Phi$  prelazi u  $F$ , a izraz (2.29a) neposredno određuje sposobnost nošenja ležaja. Uvrštavanjem  $F = B \cdot 2 \cdot R_1 \cdot \bar{p}$ ,  $\sin \Phi = 1$  i  $(C/R_1) = \psi$  u jednadžbu (2.29a) slijedi izraz za *Sommerfeldov broj*

$$So = \frac{6 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{(2 + \varepsilon^2) \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = f(\varepsilon) \quad (2.30)$$

ovisan samo o relativnoj ekscentričnosti  $\varepsilon$ .



**Slika 2.10. Prošireni Sommerfeldov broj  $So \cdot (1 - \varepsilon)$  ovisan o relativnoj ekscentričnosti  $\varepsilon$  i omjeru  $B/D$  [21]**

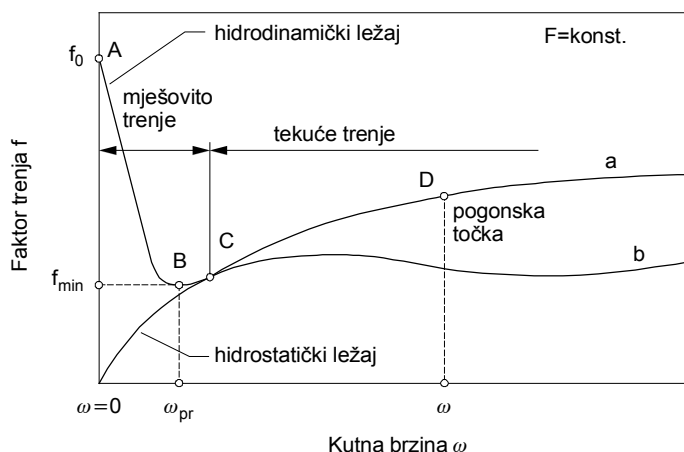
Na slici 2.10 predložena je sposobnost nošenja ležaja prema jednadžbi (2.7), odnosno jednadžbi (2.25), u obliku proširenog *Sommerfeldovog broja*  $So \cdot (1 - \varepsilon)$  kod promjenljive relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$  i promjenljivog omjera  $B/D$  (gdje je  $D = 2 \cdot R_1$ ), pod uvjetima nestlačivog *Newtonovog maziva*, laminarnog toka, apsolutno čistih i razmjerno hrapavih

(odnosno glatkih) kliznih površina ležaja, aksijalno paralelnog procjepa, te konstantne temperature mazivog filma (teorija izotermičkog hidrodinamičkog podmazivanja - klasična teorija hidrodinamičkog podmazivanja).

Kod stvarnih (izvedbenih) ležaja rješenje  $\Phi = \pi/2$  je nerealno, jer je ono uvjetovano uključivanjem negativnih tlakova u matematičku operaciju integriranja za određivanje sposobnosti nošenja ležaja. Ako se ne dopusti sudjelovanje negativnih tlakova u procesu podmazivanja prije i tijekom pojave kavitacije, rezultat je uporabiv za slučaj realnog ležaja uz  $\Phi < \pi/2$ .

### 2.2.3. REŽIMI TRENJA

Mogući režimi trenja u kliznom radijalnom ležaju mogu se rastumačiti pomoću *Stribeckove krivulje* [21], odnosno krivulje ovisnosti faktora trenja  $f$  o kutnoj brzini  $\omega$  pri konstantnoj (a) i promjenljivoj (b) temperaturi ležaja (slika 2.11).



Slika 2.11. Shematizirana *Stribeckova krivulja* kod kliznog radijalnog ležaja za konstantnu (a) i promjenljivu (b) temperaturu [21]

Faktor trenja  $f$  definiran je kao omjer dvostrukog momenta trenja i produkta sile i promjera ležaja, tj.  $f = 2 \cdot M_T / (F \cdot D)$ . Za  $\omega = 0$  (točka A) faktor trenja nazivamo statičkim, a kako se ovdje radi o dodiru krutih tijela, on iznosi  $f_0 = F_T / F$  i ovisi o materijalu para rukavac - čahura ležaja. Porastom brzine vrtnje rukavca faktor trenja opada i kod  $\omega = \omega_{pr}$  (točka B) postiže svoj minimum. Za  $\omega > \omega_{pr}$  faktor trenja  $f$  do točke C raste progresivno, a do pogonske točke D i dalje degresivno. Točka C razdvaja područje tzv. *mješovitog trenja* od područja *tekućeg trenja*. Već je ranije istaknuto da u području mješovitog trenja, pored tekućeg trenja, postoji i dodir krutih tijela (suhi ili metalni dodir). Jedino je u području tekućeg trenja moguć pogon bez trošenja, zbog čega pogonska točka D mora ležati desno od točke C. *Stribeckova krivulja* (a) na slici 2.11 vrijedi za konstantnu temperaturu ležaja, odnosno viskozitet maziva kod konstantne temperature. U praktičnoj primjeni temperatura je najčešće promjenljiva veličina. Povišena temperatura uzrokuje, radi opadanja viskoziteta maziva, pad faktora trenja, koji je

nadomješten porastom brzine vrtnje (krivulja b na slici 2.11). Nadomještanjem se postiže skoro konstantna vrijednost faktora trenja kao kod zakona trenja krutih tijela u suhom dodiru. Međutim, niske vrijednosti faktora trenja pokazuju da se radi o tekućem trenju.

Da bi se osigurao pogonski siguran rad, pogonska točka D kliznog radijalnog ležaja se mora nalaziti u području tekućeg trenja (područje bez trošenja) bez da se prekorači dopuštena maksimalna temperatura. Sigurnost od trošenja je definirana pomoću sigurnosne razlike između pogonske  $\omega$  i prijelazne brzine vrtnje  $\omega_{pr}$  ( $\omega > \omega_{pr}$ ), odnosno prema [21] za

$$\begin{aligned} 10 \text{ ms}^{-1} \geq u \geq 3 \text{ ms}^{-1} &\Rightarrow (\omega / \omega_{pr}) \geq U, \\ u \leq 3 \text{ ms}^{-1} &\Rightarrow (\omega / \omega_{pr}) = 3, \\ u > 3 \text{ ms}^{-1} &\Rightarrow (\omega / \omega_{pr}) \geq 10, \end{aligned}$$

gdje je  $U$  numerička vrijednost obodne brzine rukavca.

Za  $0.5 < (B/D) < \infty$  prijelazna kutna brzina rukavca  $\omega_{pr}$  prema [21] iznosi

$$\omega_{pr} = \frac{F}{C_{pr} \cdot \eta \cdot V_1}, \quad (2.31)$$

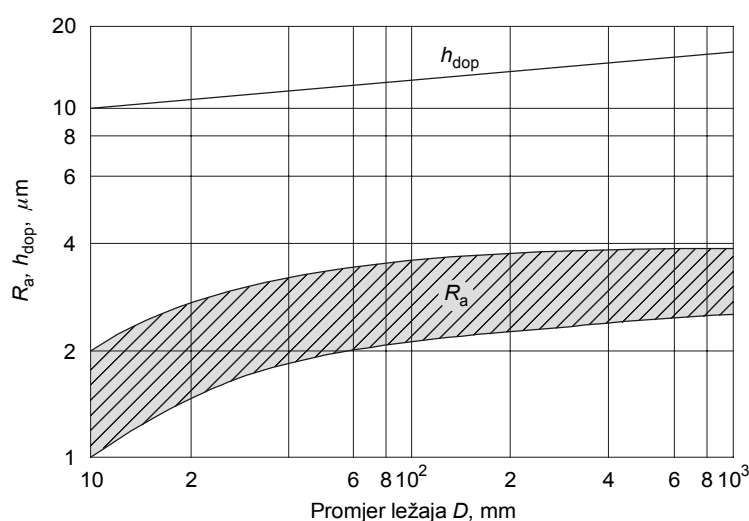
gdje je:

$$V_1 - \text{volumen ležaja} \quad V_1 = \frac{D^2 \cdot \pi \cdot B}{4},$$

$$C_{pr} - \text{konstanta ovisna o geometriji procjepa} \quad C_{pr} = \frac{2 \cdot \psi \cdot h_{dop}}{\pi},$$

$\psi$  - relativna zračnost ležaja ( $\psi = C/D$ ),

$h_{dop}$  - dopuštena minimalna debljina mazivog filma prema slici 2.12 [21].



Slika 2.12. Najniže vrijednosti dopuštene minimalne debljine mazivog filma  $h_{dop}$  i hrapavosti  $R_a$  ovisne o promjeru ležaja  $D$  [21]

Ako se, npr. pretpostavi  $\psi = 2 \cdot 10^{-3}$  i  $h_{\text{dop}} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , tada slijedi  $C_{\text{pr}} = 1.0 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ .

S ovom vrijednošću za  $C_{\text{pr}}$  proračun uglavnom ostaje u sigurnosnom području ( $\omega > \omega_{\text{pr}}$ ).

Prijelazno opterećenje  $F_{\text{pr}}$  ili preopterećenje ležaja na granici mješovitog trenja za  $0.5 < (B/D) < \infty$  prema [21] iznosi

$$F_{\text{pr}} = C_{\text{pr}} \cdot \eta \cdot V_1 \cdot \omega \quad (2.32)$$

pa se sigurnost od trošenja može odrediti i omjerom  $F_{\text{pr}}/F$ .

## 2.2.4. MOMENT TRENJA

U režimu normalnog rada mazivi film u kliznom radijalnom ležaju izložen je stalnom pomicanju koje uzrokuje pojavu sila trenja  $F_{T1}$  i  $F_{T2}$ , koje djeluju tangencijalno na površine rukavca i čahure (slika 2.9). Zbog ekscentričnosti, pravci i smjerovi ovih sila se ne poklapaju. To se može dokazati pomoću izraza

$$\tau = \eta \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{z=h} = \frac{h}{2} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{\eta \cdot u}{h} \quad (2.33)$$

za površinu rukavca ( $z=h$ ) i odgovarajućeg izraza za površinu čahure ( $z=0$ ). Na taj način se dobivaju izrazi

$$\tau_1 = \eta \cdot \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=h} = \frac{h}{2 \cdot R_1} \cdot \frac{dp}{d\varphi} + \frac{\eta \cdot u}{h} \quad (2.33a)$$

$$\tau_2 = \eta \cdot \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0} = \frac{-h}{2 \cdot R_2} \cdot \frac{dp}{d\varphi} + \frac{\eta \cdot u}{h} \quad (2.33b)$$

Iz ovih izraza je očigledno daje  $\tau_1 > \tau_2$ . Ako je

$$F_{T1} = B \cdot R_1 \cdot \int \tau_1 \cdot d\varphi \quad \text{i} \quad F_{T2} = B \cdot R_2 \cdot \int \tau_2 \cdot d\varphi,$$

tada je  $F_{T1} > F_{T2}$ . Izrazi za  $F_{T1}$  i  $F_{T2}$  mogu se dobiti iz jednadžbe (2.27) za  $(dp/d\varphi)$ , te izraza (2.33a) i (2.33b), a može se pokazati da su  $F_{T1}$  i  $F_{T2}$  funkcije  $So$  i  $\varepsilon$  [20].

Uzrok razlike sila trenja  $F_{T1}$  i  $F_{T2}$  jasno se može uočiti ako se mazivo u ležaju promatra kao slobodno tijelo koje je ograničeno površinama i koje je u stanju djelovanja tlakova i smičnih naprezanja. Za smjer vrtnje rukavca predložen na slici 2.9, na to zamišljeno slobodno tijelo sa strane rukavca djeluje moment  $M_{T1} = F \cdot R_1$  suprotno od smjera kazaljke na satu, a sa strane čahure djeluje moment  $M_{T2} = F \cdot R_2$  u smjeru kazaljke na satu. Istodobno, promjenjive sile tlaka koje su prouzročene sužavajućim mazivim klinom, djeluju u smjeru okomice na krivocrtne granice maziva. Novi moment prouzročen ovim silama može se prije svega izraziti preko momenta opterećenja  $F \cdot e \cdot \sin \Phi$ , ako je opterećenje  $F$  smješteno u središtu rukavca

$O_1$ , a njegova reakcija u središtu čahure (ležaja)  $O_2$ . Moment tlaka ili opterećenja djeluje u smjeru kazaljke na satu, pa je moguće usporediti djelujuće momente na mazivi film u smjeru i suprotno od smjera kazaljke na satu:

$$F_{T2} \cdot R_2 + F \cdot e \cdot \sin \Phi = F_{T1} \cdot R_1 \quad (2.34)$$

Uz  $R_2 \approx R_1$ , te dijeljenjem izraza (2.34) sa  $F \cdot R_1$  dobiva se izraz koji sadrži faktor trenja rukavca ( $f_1 = F_{T1}/F$ ) i čahure ( $f_2 = F_{T2}/F$ ):

$$f_2 + \frac{e}{R_1} \cdot \sin \Phi = f_1$$

Uz  $\Phi = \pi/2$ , pogodnije je ovaj izraz napisati u obliku

$$\frac{R_1}{C} \cdot f_2 + \varepsilon = \frac{R_1}{C} \cdot f_1, \quad (2.35)$$

što omogućava zaključak da je razlika tzv. poopćenih faktora trenja rukavca i čahure ležaja identična relativnoj ekscentričnosti  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{R_1}{C} \cdot f_1 - \frac{R_1}{C} \cdot f_2 = \frac{R_1}{C} \cdot (f_1 - f_2).$$

## 2.2.5. PORAST TEMPERATURE

Zbog značajne ovisnosti viskoziteta maziva i općih karakteristika ležaja o porastu temperature u kliznom radijalnom ležaju, potrebno je u proračun uvesti i izraze za porast temperature. Jednadžba ravnoteže energije ili topline u sistemu, pri odgovarajućim uvjetima, može se napisati na sljedeći način:

$$\underbrace{F_T \cdot u}_{\text{Energija koja se troši na trenje u kliznom ležaju}} = \underbrace{\rho \cdot c_m \cdot Q \cdot \Delta T_1}_{\text{Toplina koja se odvodi mazivim uljem koje cirkulira kroz ležaj}} + \underbrace{k_m \cdot A_1 \cdot \Delta T_2}_{\text{Toplina koja se predaje konvekcijom, od mazivog ulja na rukavac i dalje na ležaj}}.$$

gdje je:

$F_T$  - srednja vrijednost sile trenja u ležaju,

$Q$  - količina mazivog ulja utrošenog za hlađenje,

$\Delta T_1$  - srednja vrijednost porasta temperature mazivog ulja pri prolasku kroz ležaj,

$\Delta T_2$  - srednja vrijednost razlike temperature mazivog ulja u ležaju i površine  $A_1$ .

Ako se pretpostavi da je :  $\Delta T \approx \Delta T_1 \approx \Delta T_2$ ,  $A_1 = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot B$  i  $F_T = f \cdot F$ , dobit će se:

$$f \cdot F \cdot u = (\rho \cdot c_m \cdot Q + 2 \cdot \pi \cdot R_2 \cdot B \cdot k_m) \cdot \Delta T.$$

Svođenjem ove jednadžbe na projekciju površine ležaja  $2 \cdot R_2 \cdot B$ , te uz  $\bar{p} = F/(2 \cdot R_2 \cdot B)$  i  $q = Q/(2 \cdot R_2 \cdot B)$ , dobiva se

$$\frac{f \cdot u}{q} = \mathbf{B} = \frac{\Delta T}{\bar{p}} \cdot \left( \rho \cdot c_m + \frac{\pi \cdot k_m}{q} \right), \quad (2.36)$$

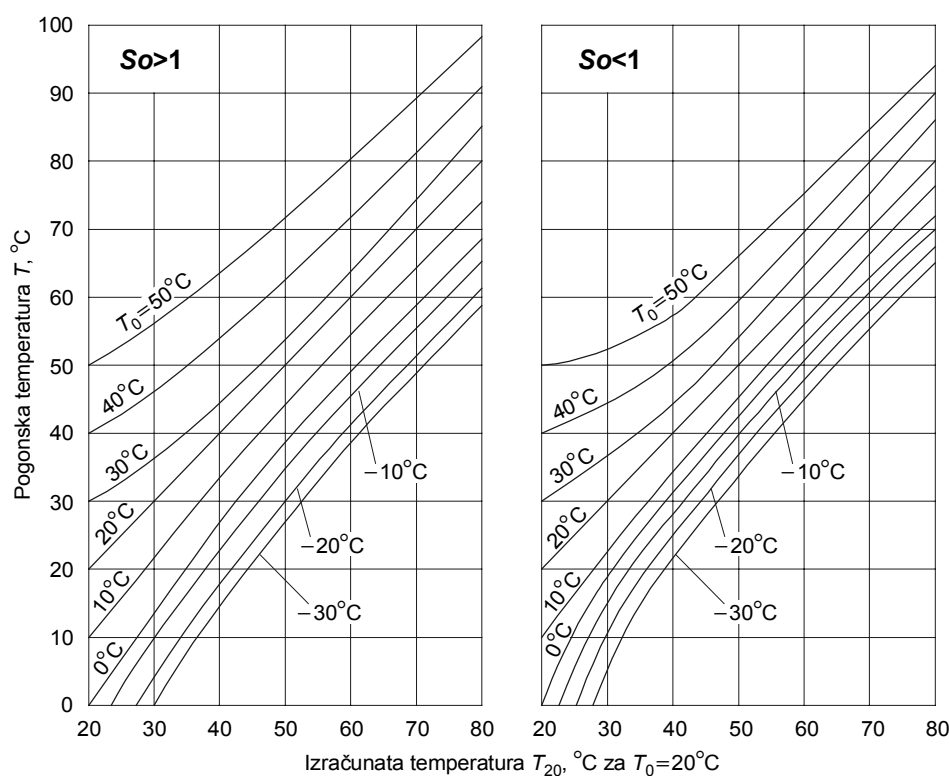
gdje je  $\mathbf{B}$  - temperaturni broj. Ako se ispusti drugi član u zagradi u izrazu (2.36) (zbog zanemarivog utjecaja [17]), dobiva se

$$\Delta T \approx \frac{\bar{p} \cdot \mathbf{B}}{\rho \cdot c_m}. \quad (2.37)$$

Za većinu mazivih ulja produkt  $p \cdot c_m$  ima vrijednost  $\approx 1800 \text{ kJ/m}^3\text{K}$  [17]. Temperaturni broj  $\mathbf{B}$  ovisi o *Sommerfeldovom broju*  $So$  i omjeru  $R_2/B$  za ležajeve konačne širine  $B$ .

## 2.2.6. POSTUPAK RJEŠAVANJA

U izrazu (2.37) slijedi da se u praktičnom proračunu kliznog radijalnog ležaja također mora upotrebljavati iteracijska metoda. U dosadašnjem proučavanju dalo se uočiti da većina proračunskih parametara (npr. srednji hidrodinamički tlak, sposobnost nošenja, moment trenja itd.) predstavljaju funkcije *Sommerfeldovog broja*  $So$ , koji je obrnuto proporcionalan apsolutnom viskozitetu mazivog ulja  $\eta$ . Ukoliko  $\eta$  značajno ovisi o porastu temperature  $\Delta T$  u ležaju, potrebno je realno procijeniti  $\eta$  (ili  $\Delta T$ ) za odgovarajuće izabrano mazivo ulje (obzirom da su prvotne vrijednosti nepoznate).



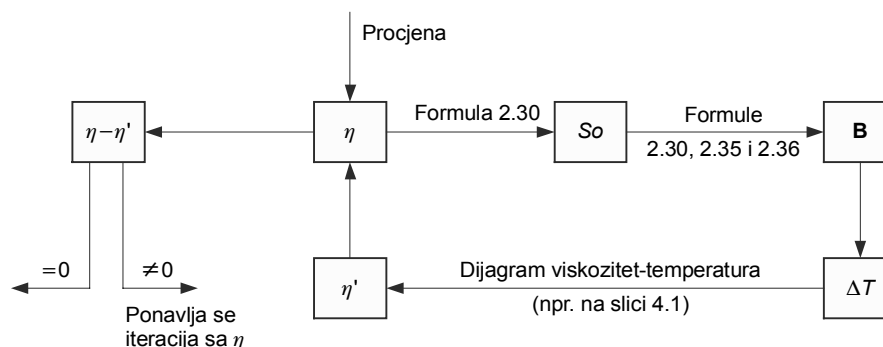
Slika 2.13. Temperatura u ležaju kod temperature okoliša  $T_0 \neq 20^\circ\text{C}$  [21]

Za određivanje granične temperature ležaja ovisno o vrsti upotrebljavanog mazivog ulja mogu se za procjenu upotrebljavati dijagrami na slici 2.13, odnosno dijagram na slici 4.1.

Ova procijenjena vrijednost upotrebljava se u proračunu prema shemi

$$\eta \Rightarrow So \Rightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \Delta T \Rightarrow \eta_r,$$

sukladno slici 2.14.



**Slika 2.14. Iteracijski naizmjenični proračun kliznog radijalnog ležaja [18]**

Ukoliko se izračunati viskozitet  $\eta_r$  ne razlikuje od prvotno procijenjenog  $\eta$ , tada će vrijednosti za  $So$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\Delta T$  (koje su dobivene prema navedenoj shemi proračuna) biti važeće. U slučaju da je  $\eta_r \neq \eta$ , iteracijski postupak se ponavlja sve dok razlika  $\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i$  ne bude dovoljno mala i dok proračun  $\eta_r$  ne daje zadovoljavajuće točne rezultate.

Jedan od kritičnih parametara kod proračuna ležaja za konkretnu uporabu je bezdimenzijska minimalna debljina mazivog filma ( $h_{\min}/C$ ). Uz  $\varphi = \pi$  i izraz (2.24) slijedi

$$\frac{h_{\min}}{C} = 1 - \varepsilon = f(So). \quad (2.38)$$

Pri zadanom omjeru  $B/D$  slijedi da je  $So$  odlučujući faktor i pri određivanju veličine ( $h_{\min}/C$ ). U općem slučaju ovaj omjer prema [17] mora biti smješten u sljedećem području

$$\frac{2 \cdot R_a}{C} < \frac{h_{\min}}{C} < 0.35, \quad (2.39)$$

gdje je  $R_a$  - amplituda neravnina površine rukavca ili čahure (prosječno odstupanje profila) koja se kreće od  $20 \mu\text{m}$  za grubo brušenje do  $0.5 \mu\text{m}$  za fino završno honovanje. Budući se radijalna zračnost  $C$  najčešće mijenja u granicama  $(0.0005 \div 0.003) \cdot R_1$  [17], minimalno područje omjera nejednadžbi (2.39) mijenja se od  $40/(3 \cdot R_1)$  do  $1/R_1$  (za polumjer  $R_1$  izražen u milimetrima). Minimalna granica za ( $h_{\min}/C$ ) potrebna je zbog sigurnosti da neće nastupiti mješoviti ili granični režim podmazivanja u uvjetima visokog opterećenja, budući da djelomični dodir krutih tijela dovodi do zaribavanja i značajnog skraćivanja radnog vijeka

ležaja. S druge strane, maksimalna granica se utvrđuje zbog isključivanja nestabilnosti u uvjetima niskog opterećenja i udaranja<sup>7</sup>.

Praktično izvedeni ležajevi, za razliku od opisanog primjera i poopćene teorije ležaja, razlikuju se po posljedicama uslijed elastične deformacije površine dodira, hrapavosti površine dodira, toplinskog širenja rukavca i ležaja, turbulentnog toka mazivog ulja, neuravnoteženosti i pomicanja osi rukavca prilikom montaže. Osim toga, viskozitet i gustoća mazivog ulja nikad nisu nepromjenjivi o čemu će detaljnije biti govora u sljedećem poglavlju.

---

<sup>7</sup> Udaranje se definira kao rezonancijsko njihanje rukavca u ležaju kod tekućeg trenja i male relativne ekscentričnosti, a obično se javlja kada je brzina vrtnje rukavca dvostruko veća od prve kritične brzine promatranog sistema ležaja.

# 3

---

## TEORIJA ELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA

---

*U trećem se poglavlju obrađuju teorijske osnove EHD podmazivanja, te primjena na klizni radijalni ležaj. Dat je poseban osvrt na zavisnost viskoziteta o tlaku. Pobrojane su pretpostavke na kojima se temelji EHD teorija. Tablično su prikazani neki od poznatijih reoloških modela koji opisuju odnos između smičnog naprezanja i brzine smične deformacije za ne-Newtonove fluide.*

### 3.1. TEORIJSKE OSNOVE

#### 3.1.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA I OSNOVNE POSTAVKE

Još 1936. godine *Peepler* [22] je pokazao da elastična deformacija malih površina kod podmazivanih koncentriranih dodira igra dominirajuću ulogu kod porasta hidrodinamičkog tlaka i formiranja mazivog filma. Nakon toga, na temelju klasične *Reynoldsove* teorije podmazivanja i *Hertzovog* opisa elastične deformacije<sup>8</sup> iz 1895. godine [2, 3], uslijedila su daljnja proučavanja elastičnog deformiranja podmazivanih površina dodira [23, 24]. Utemeljiteljima teorije elastohidrodinamičkog podmazivanja smatraju se *Dowson* i *Higginson* [25, 26, 27]. Konceptijski razvoj ove teorije ukorijenjen je u mehanici kontinuuma i to posebice u dva njezina područja: *mehanici fluida* i *teoriji elastičnosti*.

Teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja može se najjednostavnije definirati kao "proučavanje uvjeta u kojima elastična deformacija tijela u dodiru igra značajnu ulogu u procesu hidrodinamičkog podmazivanja" [26]. Do pojave ove teorije, pomoću klasične *Reynoldsove* teorije hidrodinamičkog podmazivanja, problem visoko opterećenih formalnih i neformalnih dodira bio je nerješiv jer je bilo teško za pretpostaviti da se podmazivanje može oduprijeti iznimno visokom kontaktnom tlaku. Međutim, ako se pretpostavi ovisnost viskoziteta maziva o tlaku i uzme u obzir elastična deformacija tlačno opterećenih malih površina u dodiru, može se dokazati da je moguće ostvariti zadovoljavajuće podmazivanje i u takvim uvjetima. Dva najvažnija djelovanja koja su prisutna kod elastohidrodinamičkih

---

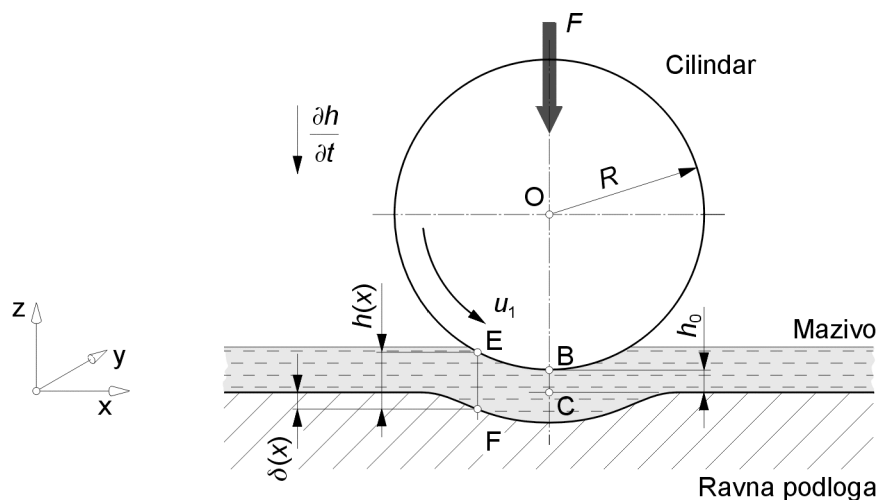
<sup>8</sup> Hertz je predložio da se deformacija poluravnine ispod opterećenja koje je jednako raspodjeli tlaka na površini cilindra poklapa sa stvarnom deformacijom cilindra.

dodira, a ne uzimaju se u obzir u klasičnoj hidrodinamičkoj teoriji su: utjecaj visokog tlaka na viskozitet tekućeg maziva i postojeća lokalna deformacija elastičnog tijela<sup>9</sup> u dodiru.

Zbog ovih djelovanja korjenito se mijenja geometrija mazivog filma, a zajedno s njom dolazi do preraspodjele tlaka u dodiru. U biti, hidrodinamički tlak koji raste mora biti ravnomjeran s elastičnim tlakovima u tijelima na mjestu dodira, a rješenje zajedničkog sustava jednažbi podmazivanja i elastične deformacije određuje konačne elastohidrodinamičke uvjete u području dodira.

### 3.1.2. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ BEZ RELATIVNOG KLIZANJA

Konfiguracija koja je najpodesnija za teorijsku analizu elastohidrodinamičkog problema je primjer dvodimenzionalnog formalnog dodira po crti. Svaki koncentrirani dodir po crti (vidi tablicu 1.2. pod c) može se predložiti dodiranjem cilindra i ravne podloge ili ploče. Ako se, npr. radi o tzv. unutarnjem dodiru (npr. slučaj kliznog radijalnog ležaja, potrebno je polumjere zakrivljenja, rukavca i čahure, povezati pomoću izraza 1.3). Dakle, neka je poopćeni primjer opterećeni i podmazivani dodir po crti realiziran pomoću krutog cilindra koji se približava deformabilnoj (elastičnoj) ravnoj podlozi (slika 3.1).



Slika 3.1. Primjer poopćenog elastohidrodinamičkog problema (kruti cilindar i deformabilna ravna podloga) [27]

Potrebno je odmah istaknuti da se deformacija elastične ravne podloge, koja je u dodiru s krutim cilindrom ekvivalentnog polumjera zakrivljenja  $R$ , može promatrati kao zbroj deformacija cilindra i podloge [27]. Na taj način ovaj primjer zadržava opći karakter, a krutost cilindra ne ograničava općenitost pristupa.

<sup>9</sup> Tijela u dodiru mogu biti kruta, elastična (deformabilna) ili može postojati tzv. kombinirani dodir. U primjeru kliznog radijalnog ležaja najčešća je kombinacija kruti rukavac - deformabilna čahura.

Ako je  $h_0$  debljina mazivog filma mjerena od najniže točke cilindra B do još uvijek nedeformirane ploče u točki C (slika 3.1), tada se stvarna debljina mazivog filma  $h$  na bilo kojoj koordinati  $x$  ispod cilindra u području dodira može napisati u obliku

$$h = h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2 \cdot R} + \delta(x), \quad (3.1)$$

gdje je  $\delta(x)$  lokalna elastična deformacija podloge. Prema [27] se  $\delta(x)$  može napisati u obliku

$$\delta(x) = -\frac{2}{\pi \cdot E'} \int_{s_{ul}}^{s_{iz}} p(s) \cdot \ln(x-s)^2 ds + C, \quad (3.2)$$

gdje je  $E'$  - ekvivalentni modul elastičnosti (*Joungov modul*) prema izrazu (1.2.), a  $C$ -konstanta integriranja. Tlak  $p(s)$  u jednadžbi (3.2) mijenja se u zavisnosti od  $s$  u granicama intervala  $s_{ul}$  i  $s_{iz}$ , međutim, logaritmi u podintegralnom izrazu stvara poteškoće pri numeričkom integriranju<sup>10</sup>. Kada se tlak  $p(s)$  izrazi u obliku integrabilne funkcije, deformacija je kontinuirana i konačna u području opterećenja pa se tlak može prikazati pomoću *Lagrangeovog interpolacijskog polinoma*.

$$p(s) = p_0 \cdot \sum_{i=1}^N A_i \cdot s^i. \quad (3.3)$$

Uvrsti li se jednadžba (3.3) u jednadžbu (3.2), nakon sređivanja slijedi

$$\delta(x) = -\frac{2 \cdot p_0}{\pi \cdot E} \cdot \sum_{i=1}^N A_i \cdot z_i \quad (3.4)$$

gdje je  $z_i$  prema [27] jednako

$$z_i = \int_{s_{ul}}^{s_{iz}} s^i \cdot \ln(x-s)^2 ds = \frac{2}{i+1} \left[ (s_{iz}^{i+1} - x^{i+1}) \cdot \ln|x-s_{iz}| - (s_{ul}^{i+1} - x^{i+1}) \cdot \ln|x-s_{ul}| - \right. \\ \left. - \frac{1}{i+1} \cdot (s_{iz}^{i+1} - s_{ul}^{i+1}) - \frac{1}{i} \cdot x \cdot (s_{iz}^i - s_{ul}^i) - \dots - \frac{1}{2} \cdot x^{i-1} \cdot (s_{iz}^2 - s_{ul}^2) - x^i \cdot (s_{iz} - s_{ul}) \right] \quad (3.5)$$

Za dovoljno točnu ocjenu deformacije  $\delta(x)$  obično zadovoljava rastavljanje  $z_i$  na samo tri člana niza [27].

Približavanje cilindra ravnoj podlozi (slika 3.1) može se opisati modificiranom *Reynoldsovom* jednadžbom koja ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.6)$$

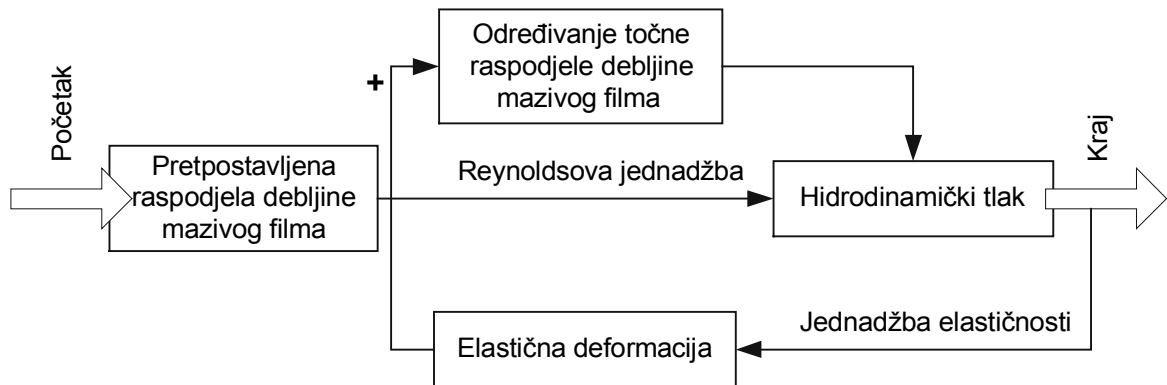
te uz granične uvjete za hidrodinamički tlak  $p$

$$p = 0 \text{ za } x = x_{ul}, \quad \text{ i } \quad p = \partial p / \partial x = 0 \text{ za } x = x_{iz}. \quad (3.7)$$

<sup>10</sup> Zato što pri  $x=s$  logaritamska funkcija teži u  $-\infty$ .

### 3.1.3. POSTUPAK RJEŠAVANJA

Navedene teorijske osnove omogućuju rješavanje poopćenog elastohidrodinamičkog problema svodeći ga na opću iteracijsku metodu koja potvrđuje spojivost (kompatibilnost) između hidrodinamičkog tlaka u mazivom filmu i elastičnih tlakova (*Hertzovih tlakova*) koji se javljaju između deformabilnih tijela uslijed njihovog stvarnog dodira (ovdje je prešutno izostavljena relativna brzina klizanja, no njen je utjecaj očigledan iz jednadžbe (2.7) i biti će kasnije detaljno razmotren). Jednostavnije rečeno, početna (pretpostavljena) raspodjela debljine mazivog filma dobivena iz *Reynoldsove* jednadžbe upotrijebit će se za određivanje raspodjele hidrodinamičkog tlaka. Nakon toga se za ovaj tlak, po odgovarajućoj jednadžbi elastične deformacije, odredi početna ocjena elastičnih deformacija koja se dalje koristi za točno određivanje postojeće raspodjele debljine mazivog filma. Proces iteracije traje tako dugo, dok razlika u raspodjeli debljina mazivog filma ne bude zadovoljavajuće mala glede prethodnog iteracijskog koraka. Iteracijska metoda je predložena na slici 3.2.



Slika 3.2. Opća iteracijska metoda rješavanja problema elastohidrodinamičkog podmazivanja

Potrebna iteracija za osiguranje kompatibilnosti raspodjele elastičnih i hidrodinamičkih tlakova na mjestu dodira, za primjer na slici 3.1, odvijala bi se prema shemi na slici 3.2 na sljedeći način:

Ako se na početku zanemari vrijednost  $\delta(x)$  i iskoristi izraz (3.1) u jednadžbi (3.6) za proračun hidrodinamičkog tlaka  $p$ , uz zadovoljenje graničnih uvjeta (3.7), dobivena raspodjela tlaka može se uvrstiti u izraz (3.3) ili (3.4) za proračun lokalne elastične deformacije  $\delta(x)$ .

Razumljivo je da deformacija mijenja početnu raspodjelu debljine mazivog filma. Ovaj proces traje sve dotle dok razlike u promjeni  $\delta(x)$ , dobivene u nekom iteracijskom koraku, ne postanu zadovoljavajuće male glede potvrde spojivosti hidrodinamičkog i elastičnog djelovanja.

Zanimljivo je naglasiti da početna pretpostavljena distribucija tlaka ispod cilindra odgovara hidrodinamičkom djelovanju, tako da će u početnim fazama približavanja prevladati hidrodinamički uvjeti. U završnoj fazi će prevladavati elastični uvjeti dodira, tako da će konačna ravnoteža cilindra na elastičnoj ravnoj podlozi (slika 3.1) ovisiti samo o elastičnim svojstvima podloge. Na taj se način, u slučaju približavanja po okomici, raspodjela hidrodinamičkog tlaka podešava prema raspodjeli elastičnog tlaka koja je izračunata na temelju *Hertzove teorije* [3, 17].

Još jednom je potrebno istaknuti općenitost problema s okomitim približavanjem, predloženog na slici 3.1. Već je rečeno da dodir između mnogih strojnih dijelova može biti predložen s dva geometrijski i kinematički ekvivalentna cilindra. Uz prisutno podmazivanje dovoljan je jedan elastični cilindar u blizini krute ravne podloge ili kruti cilindar u blizini elastične ravne podloge, kao što je predloženo na slici 3.1. Na ovaj se način mogu premodelirati elastični, hidrodinamički i kinematički uvjeti prvotnog dodira.

U svezi s netom opisanom iteracijskom metodom, treba naglasiti da ona nije uvijek neposredno upotrebljiva u postojećem obliku za konkretan problem podmazivanja. Tako, npr. kod dodira metala s metalom elastohidrodinamički tlakovi koji se javljaju mijenjaju viskozitet maziva za nekoliko redova veličina, a prilikom klizanja potrebno je uzeti u obzir i toplinsko djelovanje. Ovakve posljedice bitno utječu na promjenu iteracijske metode prikazane na slici 3.2, o čemu će još biti govora.

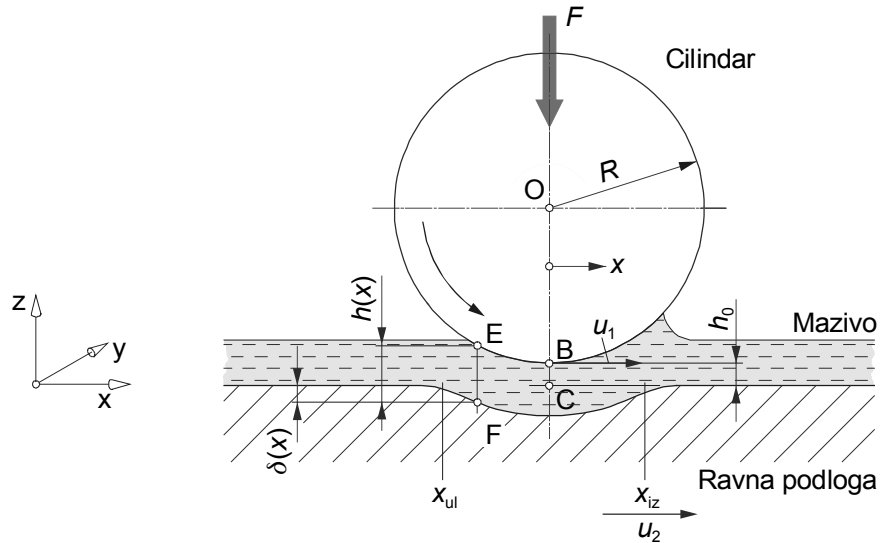
#### 3.1.4. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ S RELATIVNIM KLIZANJEM

Ukoliko se kruti cilindar (1) i deformabilna ravna podloga (2) (ili neka druga kombinacija) nalaze u relativnom klizanju (slika 3.3), odnosi između hidrodinamičkog tlaka i kliznog mazivog filma mogu se opisati pomoću modificirane *Reynoldsove* jednadžbe, koja ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6 \cdot \eta \cdot u \cdot \frac{\partial h}{\partial x}^{11}, \quad (3.8)$$

gdje je  $u$  relativna brzina klizanja (ako podloga miruje  $u_2=0$ , a  $u=u_1$ ). Ovaj problem se također može riješiti iteracijskom metodom koji je shematski predložen na slici 3.2, uz kavitacijski uvjet  $p \geq 0$  i granične uvjete  $p(x_{ul})=0$ , odnosno  $p(x_{iz})=0$ . Ulazno područje dodira mora biti dovoljno veliko kako bi se izbjegla pojava siromašnog podmazivanja. Preporuka je da početak ovog područja bude  $x_{ul} \leq -4 \cdot b$  ovisno o opterećenju  $F$  [28]. Završetak područja dodira (izlazno područje dodira)  $x_{iz}$  određuje se iz kavitacijskog uvjeta.

<sup>11</sup> Ova jednadžba vrijedi za nestlačivo mazivo. Ukoliko se uzima u obzir stlačivost, jednadžba se mora dopuniti s gustoćom  $\rho=\rho(p)$

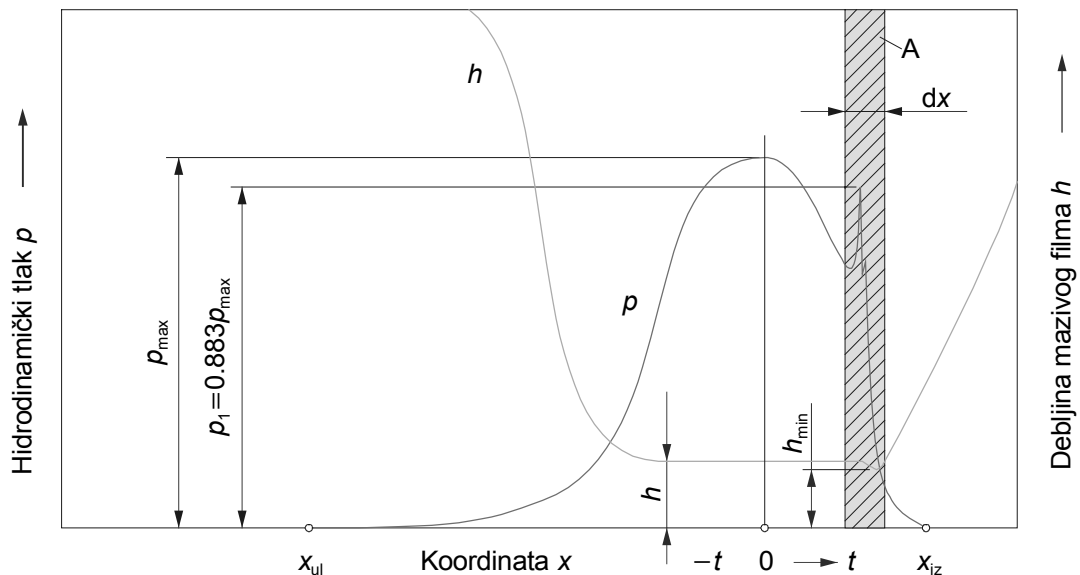


**Slika 3.3. Kruti cilindar i deformabilna (elastična) ravna podloga uz relativno klizanje i elastohidrodinamičko podmazivanje**

Lokalna elastična deformacija  $\delta(x)$ , u izrazu (3.1) za proračun debljine mazivog filma, može se odrediti pomoću jednadžbe (3.2). Konstanta  $h_0$  u izrazu (3.1) određuje se pomoću jednadžbe ravnoteže vanjskog opterećenja i hidrodinamičkog tlaka u području dodira:

$$F = \int_{s_{ul}}^{s_{iz}} p(s) ds. \quad (3.9)$$

Na slici 3.4 je predložena karakteristična raspodjela tlaka i debljine mazivog filma kod elastohidrodinamičkog podmazivanja dodira po crti u ovisnosti o koordinati  $x$ .



**Slika 3.4. Karakteristična raspodjela tlaka i debljine mazivog filma kod elastohidrodinamičkog podmazivanja dodira po crti [28]**

Iz predodžbe se daje uočiti da se u mazivom filmu javlja suženje u izlaznom području dodira što se objašnjava uvjetom neprekinutosti (kontinuiteta) mazivog filma. U ulaznom području dodira tlak raste na račun smanjenja debljine mazivog filma, a zbog relativno brzog opadanja tlaka, prema izlazu iz područja dodira, debljina mazivog filma raste kako bi se očuvala neprekinutost toka maziva bez kavitacije.

Međutim, u vrlo uskom području dodira  $\Delta x$ , prije samog napuštanja područja, smanjenje debljine mazivog filma uvjetuje kratkotrajni skok tlaka u obliku tzv. šiljka tlaka<sup>12</sup>.

Već je spomenuto da na apsolutni viskozitet maziva utječe visoki tlak koji se javlja kod elastohidrodinamičkog podmazivanja. Ova se zavisnost najjednostavnije može opisati izrazom

$$\eta = \eta_0 \cdot f(p), \quad (3.10)$$

gdje je  $\eta_0$  – prosječni viskozitet maziva kod atmosferskog tlaka koji se može odrediti pomoću izraza (2.6), a  $f(p)$  – promjena viskoziteta u funkciji tlaka. Kod elastohidrodinamičkog podmazivanja najčešće upotrebljavani izrazi za izračunavanje viskoziteta maziva u zavisnosti o hidrodinamičkom tlaku dati su prema [28]:

$$\text{Barusov izraz:} \quad \eta = \eta_0 \cdot \exp(mp)^{13} \quad (3.11)$$

$$\text{Roelandsov izraz:} \quad \eta = \eta_0 \cdot \exp \left\{ \frac{m \cdot p_0}{r} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{p}{p_0} \right)^r - 1 \right] \right\} \quad (3.12)$$

gdje je  $m$  - tlačno-viskozni koeficijent,  $r$  - tlačno-viskozni indeks, a  $p_0 = 1,981 \cdot 10^8$  Pa konstanta. Između  $m$ ,  $r$  i  $p_0$  postoji sljedeća međuzavisnost

$$m = \frac{\ln \eta_0 + 9,67}{p_0} \cdot r. \quad (3.13)$$

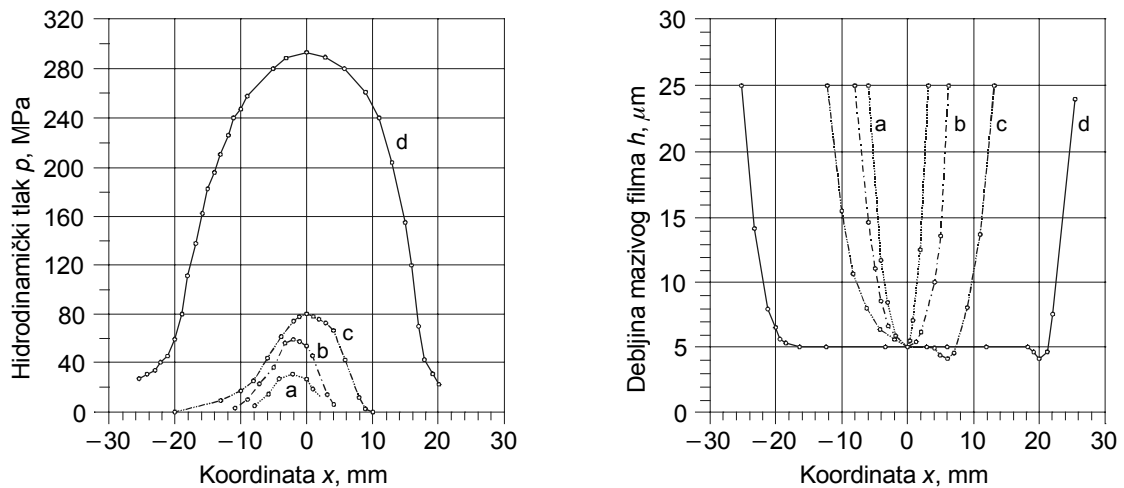
Na slici 3.5 predočene su četiri različite kombinacije najutjecajnijih svojstava na raspodjelu tlaka i debljinu mazivog filma kod visokog opterećenja. Predodžba vrijedi za podmazivani dodir po crti cilindra koji klizi po nepomičnoj ravnoj podlozi [27].

Dijagram na slici 3.5 vrijedi za ekvivalentni polumjer zakrivljenja cilindra  $R=2,0$  m, relativnu brzinu klizanja  $u=1,0$  ms<sup>-1</sup>, ekvivalentni modul elastičnosti  $E'=108$  GPa i *Poissonov* omjer  $\nu=0,3$  (materijal cilindra i materijal podloge su identični),  $\eta_0=0,137$  Pas. Krivulje a, b, c i d odgovaraju odnosu narinutih opterećenja u omjeru 1:2:4:6. Razmatranje dijagrama upućuje na dva važna zaključka:

<sup>12</sup> Šiljak tlaka je teorijski pojam i praktično se može teško ustvrditi. Neke teorije [12] su pokazale da šiljak tlaka ovisi o ekvivalentnom modulu elastičnosti  $E'$  i viskozitetu maziva (odnosno tzv. piezokoeficijentu  $m$ ). Stlačivost maziva utječe na pomicanje šiljka u smjeru toka i na smanjenje njegove veličine.

<sup>13</sup>  $\eta_0 \cdot \exp(m \cdot p)$  je uobičajena zamjena za izraz  $\eta_0^{m \cdot p}$ .

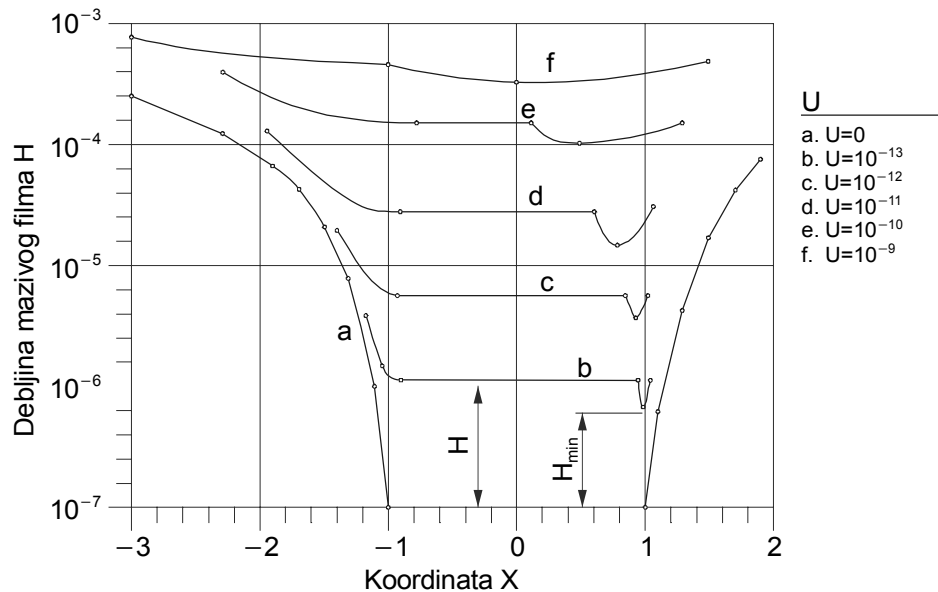
- s povećanjem opterećenja povećava se područje u kojem je promjena debljine filma relativno mala; najmanja debljina mazivog filma, na izlazu, iznosi otprilike 3/4 iznosa gdje je promjena debljine gotovo paralelna s osi  $x$ ,
- promjena debljine filma je relativno mala obzirom na značajnu promjenu opterećenja.



**Slika 3.5. Utjecaj promjene viskoziteta i elastične deformacije na raspodjelu hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma:**  
 a - kruti cilindar, konstantni viskozitet maziva;  
 b - kruti cilindar, viskozitet maziva ovisan o tlaku;  
 c - elastični cilindar, konstantni viskozitet maziva;  
 d - elastični cilindar, viskozitet maziva ovisan o tlaku. [27]

Na slici 3.5 predložena su sva karakteristična svojstva elastohidrodinamičkog mazivog filma, izuzev jednog značajnog svojstva, tzv. šiljka ili skoka tlaka koji je u direktnoj svezi sa smanjenom debljinom mazivog filma. Navedeno svojstvo je izostalo (slika 3.5, lijevo, usp. slika 3.4,  $p_1$ ) zbog male relativne brzine klizanja, ali će se razmatrati kod analize nekih konkretnih primjera u nastavku ovog rada.

U cilju kompletiranja predodžbe o utjecajima koji djeluju na opća svojstva elastohidrodinamičkog mazivog filma, ne smije se zaobići utjecaj relativne brzine klizanja. Istraživanja su pokazala da promjena relativne brzine klizanja ima najradikalniji i najznačajniji utjecaj na raspodjelu tlaka i geometriju mazivog filma kod elastohidrodinamičkog dodira [17]. Na slici 3.6 predložen je utjecaj promjene relativne brzine klizanja na geometriju debljine mazivog filma ispod cilindra na ravnoj podlozi (mazivo je mineralno ulje) [27].



Slika 3.6. Utjecaj relativne brzine klizanja na promjenu debljine mazivog filma [27]

U dijagramu je  $H=h/R$  - bezdimenzijska debljina mazivog filma,  $X=x/b$  - bezdimenzijska koordinata i  $u$  - relativna brzina klizanja, a vrijedi za bezdimenzijski parametar opterećenja  $F=3 \cdot 10^{-5}$  i bezdimenzijski parametar materijala  $G=5000$  (o ova dva bezdimenzijska parametra bit će više govora u sljedećem odjeljku). Iz dijagrama se može zaključiti:

- s povećanjem relativne brzine klizanja raste debljina mazivog filma, te pokriva sve veće područje Hertzovog dodira (vidjeti područje ograničeno krivuljama 1 i 2),
- u slučaju najmanje relativne brzine klizanja  $u$ , minimalna debljina mazivog filma iznosi približno 75% od one kod maksimalnog tlaka (u  $X=0$ ), a s povećanjem brzine razlike postaju sve manje, da bi kod vrlo velikih brzina potpuno iščezla.

Kod manjih brzina teorijska krivulja hidrodinamičkog tlaka se skoro poklapa s krivuljom *Hertzovog tlaka*, a s povećanjem brzine dolazi do značajnog odstupanja.

Karakteristični šiljak tlaka se pomiče u smjeru toka i raste po iznosu i iznad vrijednosti tlaka u središtu dodira (slika 3.8). Ovo ukazuje da stlačivost maziva i porast brzine imaju suprotno djelovanje na veličinu i položaj drugog skoka (šiljka) tlaka.

### 3.1.5. OSNOVNI PRORAČUNSKI PARAMETRI

Kod promatranja utjecaja relativne brzine klizanja  $u$  na opća svojstva elastohidrodinamičkog mazivog filma u točki 3.1.4., prvi puta je uveden pojam tzv. *bezdimenzijskih veličina i parametara*. Osnovni razlog uvođenja bezdimenzijskih veličina je bitno pojednostavljenje analize i ocjene njihovog utjecaja na karakteristike elastohidrodinamičkog podmazivanja. U literaturi se susreću sljedeća tri važna proračunska parametra teorije elastohidrodinamičkog podmazivanja:

$$\text{Parametar opterećenja} \quad F = \frac{F}{E' \cdot R}, \quad (3.14)$$

$$\text{Parametar brzine} \quad U = \frac{\eta_0 \cdot u}{E' \cdot R}, \quad (3.15)$$

$$\text{Parametar materijala} \quad G = m \cdot E', \quad (3.16)$$

*Grubin* [29] je prvi pokušao riješiti problem istodobnog djelovanja svih važnih utjecaja na elastohidrodinamičko podmazivanje i to tako da je objedinio parametre opterećenja, brzine i materijala u izrazu za proračun srednje debljine mazivog filma. On je krenuo od pretpostavke da površine tijela u dodiru, uz prisutno podmazivanje u području visokog tlaka, imaju istu geometriju kao i u slučaju suhog dodira. Zatim je pretpostavio da tlak na ulazu u područje dodira dostiže vrlo visoku vrijednost. Rješenjem *Reynoldsove* jednadžbe odredio je srednju debljinu mazivog filma u bezdimenzijskom obliku

$$H = 1,95 \cdot G^{0,727} \cdot U^{0,727} \cdot F^{-0,091} \quad (3.17)$$

ili u obliku<sup>14</sup>

$$\frac{h}{R} = 1,95 \cdot (m \cdot E')^{0,727} \cdot \left( \frac{\eta_0 \cdot u}{E' \cdot R} \right)^{0,727} \cdot \left( \frac{F}{E' \cdot R} \right)^{-0,091}. \quad (3.18)$$

*Downson* i *Higginson* [27] su došli do analognog izraza za minimalnu debljinu mazivog filma

$$\frac{h_{\min}}{R} = 1,6 \cdot (m \cdot E')^{0,6} \cdot \left( \frac{\eta_0 \cdot u}{E' \cdot R} \right)^{0,7} \cdot \left( \frac{F}{E' \cdot R} \right)^{-0,13}. \quad (3.19)$$

Kako su eksponenti u oba izraza mali, kao i interval promjene modula elastičnosti  $E'$  za visoko opterećene dodire (npr. čelik - bronca), to  $h_{\min}$  gotovo da i ne ovisi o  $E'$ . Nadalje, kako je to već rečeno za dijagram na slici 3.5, veličina  $h_{\min}$  praktički nije u svezi s opterećenjem  $F$  pa se za prvu aproksimaciju može pretpostaviti da parametar opterećenja  $F$  i  $h_{\min}$  ne ovise jedan o drugome. Na osnovu toga se izraz (3.19) može napisati u sljedećem pojednostavljenom obliku

$$h_{\min} = K_S (\eta_0 \cdot u)^{0,7}, \quad (3.20)$$

gdje  $K_S$  objedinjava sve konstantne veličine. Međutim, u praktičnoj primjeni, kod pojave elastohidrodinamičkog filma, potrebno je debljinu  $h$  ili  $h_{\min}$  izračunati ovisno o svim parametrima kao što to omogućuju izrazi (3.17), (3.18) i (3.19).

<sup>14</sup> Radi zornijeg prikaza oba su izraza svedena na oblik s istim grupama značajki, različit od njihovog izvornog oblika

### 3.1.6. ELASTOHIDRODINAMIČKA ZNAČAJKA

Analizom vremena trajanja lokalne elastične deformacije i vremena klizanja preko površine dodira, može se doći do izraza sljedećeg oblika

$$K_{EH} = \frac{p_H}{E'} \cdot \frac{F}{\eta \cdot u \cdot R} \quad (3.21)$$

Omjer  $(p_H/E')$  naziva se elastohidrodinamički broj, a  $K_{EH}$  je tzv. elastohidrodinamička značajka ili elastohidrodinamička karakteristika. Usporedi li se omjer  $(F/\eta u R)$  s jednadžbom (2.14), uočava se sličnost s poopćenim *Sommerfeldovim* brojem u teoriji hidrodinamičkog podmazivanja. Odatle slijedi da je elastohidrodinamička značajka  $K_{EH}$  daljnje poopćenje *Sommerfeldovog* broja za slučaj kada dolazi do lokalnih deformacija površine jednog ili oba tijela koja se nalaze u podmazivanom dodiru i relativnom klizanju. U posebnom slučaju, kada je *Hertzov tlak dodira* jednak hidrodinamičkom tlaku ( $p_H=p$ ) elastohidrodinamička značajka je jednaka jedinici ( $K_{EH}=1$ ) [30].

### 3.1.7. REOLOŠKI MODELI

Pretpostavke na kojima se temelji teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja definirane su u tablici 3.1.

**Tablica 3.1. Pretpostavke na kojima se temelji teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja**

|    | PARAMETRI ILI UTJECAJI                            | PRETPOSTAVKE                                     |
|----|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1  | Gravitacijske sile mazivog filma                  | Zanemaruju se                                    |
| 2  | Inercijske sile mazivog filma                     | Zanemaruju se                                    |
| 3  | MAZIVO                                            | Newtonov viskozni fluid                          |
| 4  |                                                   | Stlačivo                                         |
| 5  | Viskozitet maziva                                 | Ovisi o tlaku                                    |
| 6  | Temperatura                                       | Konstantna                                       |
| 7  | DEBLJINA MAZIVOG FILMA                            | Mala u usporedbi s drugim izmjerama sistema      |
| 8  |                                                   | Značajno ovisi o lokalnoj elastičnoj deformaciji |
| 9  | Smik (klizanje) na granici fluida- kruta površina | Ne postoji                                       |
| 10 | Površinska napetost                               | Zanemaruje se                                    |
| 11 | STANJE POVRŠINA                                   | Ravnomjerno hrapave                              |
| 12 |                                                   | Krute ili deformabilne                           |

Navedene pretpostavke teško mogu u potpunosti zadovoljiti sve uvjete eksploatacije i zahtjeve na radni vijek. Stoga teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja, koja se temelji na gornjim pretpostavkama, već dulje vrijeme zaslužuje atribut "klasična". Naime, stalno usložavanje uvjeta eksploatacije i zahtjeva za produljenjem radnog vijeka strojeva utjecalo je na potrebu pronalaženja maziva za uporabu koja se više ne ponašaju kao *Newtonov viskozni*

*fluid*. Stoga je važno dati stanovita pojašnjenja i definicije, odnosno razmotriti i utjecaj ponašanja *ne-Newtonovih maziva* u teoriji elastohidrodinamičkog podmazivanja. Spoznaja o kakvom je mazivu riječ dobiva se na temelju *reološkog modela* ili *reološkog zakona*<sup>15</sup> koji definira odnos između smičnog naprezanja i brzine smične deformacije u mazivu. U tablici 3.2 dat je pregled najpoznatijih reoloških modela koji se koriste u analizi problema elastohidrodinamičkog podmazivanja [17, 31, 32].

**Tablica 3.2. Pregled najpoznatijih reoloških modela koji su u uporabi**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | NAZIV MODELA                                                   | MATEMATIČKI OPIS MODELA                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Linearni viskozni model ili Newtonov model                     | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau}{\eta}$                                                                        |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Linearni viskozni model ili Bingamov model                     | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau + \tau_0}{\eta}$                                                               |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Nelinearni viskozni model ili Eyringov model                   | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \sinh \frac{\tau}{\tau_0}$                                      |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Linearni viskoelastični model                                  | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \cdot \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$                                   |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Nelinearni viskoelastični model ili Johnson-Tevaarwerkov model | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \cdot \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \sinh \frac{\tau}{\tau_0}$ |
| 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Nelinearni viskoplastični model ili Bair-Winerov model         | $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_L}{\eta} \cdot \ln \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_L} \right)$                    |
| 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Eksponecijalni model                                           | $\frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\tau}{\eta} \right)^n, n = \frac{1}{N}$                                      |
| 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Kubični model                                                  | $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \cdot (\tau + N_K \cdot \tau^3)$                                           |
| Gdje je:<br><br>$z$ - Os okomita na tok mazivog filma,<br>$u$ - komponenta brzine u smjeru toka mazivog filma, odnosno u smjeru osi x,<br>$\eta$ - apsolutni viskozitet maziva,<br>$\tau$ - smično naprezanje u mazivom filmu,<br>$\tau_0, \tau_L$ - konstante,<br>$G$ - modul smika ili klizanja,<br>$n$ - eksponent,<br>$N$ - pokazatelj eksponenta (za $N > 1$ dobiva se dilatacijsko, a za $N < 1$ pseudoplastično ponašanje maziva)<br>$N_K$ - koeficijent nelinearnosti kod kubičnog modela ( $N_K = 0$ za Newtonovo mazivo, a $N_K > 0$ za pseudoplastično mazivo). |                                                                |                                                                                                                            |

<sup>15</sup> Reologija (grčki: reos+logia) je znanost o toku tekućeg fluida i deformacijama koje pri tome nastaju

### 3.1.8. TEORIJSKA ANALIZA ZA SLUČAJ ELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA PSEUDOPLASTIČNIM MAZIVOM

Budući da se u novije vrijeme elastohidrodinamičko podmazivanje upotrebljava pod vrlo strogim uvjetima (pri velikim brzinama i visokom opterećenju), zahtijeva se uporaba visokovrijednih mazivih ulja s dodatkom aditiva. Ovakva maziva ulja se više ne ponašaju kao *Newtonov viskozni fluid*, već kao neki od fluida čiji odnos između smičnog naprezanja i brzine smične deformacije ima oblik definiran u tablici 3.2 i spada u grupu tzv. *pseudoplastičnih maziva*. Kubični model ima izrazito nelinearni odnos smičnog naprezanja  $\tau$  i brzine smične deformacije (vidjeti tablicu 3.2 pod 8), pa će u nastavku ove studije upravo on biti uzet u razmatranje.

Matematičke postavke i kriteriji proračuna za elastohidrodinamički podmazivani dodir po crti temelje se na sljedećim pretpostavkama [33]<sup>16</sup>:

- lokalna elastična deformacija površina  $\delta(x)$  računa se za polu-beskonačni cilindar u dodiru po crti s ravnom podlogom i uvjetima ravninskog naprezanja (slika 3.3);
- postrani tok ili postrano propuštanje maziva je zanemarivo radi relativno velike gustoće maziva, odnosno radi ekstremno malog područja dodira pod visokim tlakom;
- granično područje je definirano uvjetima:  $p = 0$  za veliku udaljenost od područja visokog tlaka i  $p = dp/dx = 0$  u kavitacijskom području (izlazno područje dodira).

Kao što je predloženo u tablici 3.2 pod 8, kubični model za pseudoplastično mazivo može se matematički opisati aproksimativnom jednačbom trećeg stupnja [31]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \cdot (\tau + N_K \cdot \tau^3), \quad (3.22)$$

gdje je  $\eta$ - inicijalni, odnosno referentni viskozitet koji odgovara apsolutnom viskozitetu za *Newtonov viskozni fluid*.

Gibanje maziva se može opisati prema izrazu (2.9)

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Uz zanemarivanje promjene tlaka mazivog filma u smjeru debljine, integriranjem gornje jednačbe dobiva se:

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z + C_3, \quad (3.23)$$

<sup>16</sup> Ova analiza se temelji na numeričkom modelu koji su razvili Houprtt i Hamrock [34] neznatno modificiranom zbog prilagodbe karakteristikama pseudoplastičnih maziva i primjeru predloženom na slici 3.3.

gdje je  $C_3$  - konstanta integriranja. Uvrštenjem jednadžbe (3.23) u jednadžbu (3.22) i integriranjem uz granične uvjete  $u(z=0)=u_2$ , te  $u(z=h)=u_1$ , odnosno za nepomičnu podlogu  $u_2=0$ ,  $u=u_1$ , slijedi:

$$\left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_3\right)^3 + \left[\frac{1}{N_K} + \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_3\right) + \frac{\eta \cdot u}{N_K \cdot h} = 0. \quad (3.24)$$

Ovako modificirana *Reynoldsova* jednadžba za pseudoplastično mazivo može se napisati i na drugačiji način, kao:

$$\Pi^3 + A_1 \cdot \Pi + A_2 = 0, \quad (3.25)$$

gdje je:

$$\Pi = \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + C_3, \quad A_1 = \frac{1}{N_K} + \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{\eta \cdot u}{N_K \cdot h}.$$

Nakon stanovitog sređivanja, uz zanemarivanje članova s malim veličinama i svođenje na bezdimenzijski oblik pomoću sljedećeg supstituiranja [33]:

$$P = \frac{p}{p_H}, \quad X = \frac{x}{b}, \quad H = \frac{h \cdot R}{b^2}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\bar{N}_K = N_K \cdot p_H^2, \quad U = \frac{\eta_0 \cdot u}{E' \cdot R}, \quad K = \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot U}{4 \cdot F^2},$$

slijedi novi oblik jednadžbe (3.25):

$$\frac{H^3}{12} \cdot \frac{dP}{dX} + \frac{H^5}{10} \cdot \frac{F}{\pi} \cdot \bar{N}_K \cdot \left(\frac{dP}{dX}\right)^3 = \frac{K}{6} \cdot \bar{\eta} \cdot \left(H - \frac{\bar{\rho}_e \cdot H_e}{\bar{\rho}}\right). \quad (3.26)$$

Bezdimenzijska elastična deformacija u nekoj točki  $X$  poluširine elastične deformacije, koja je rezultat proizvoljne raspodjele tlaka, može se napisati u obliku:

$$\bar{\delta} = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{X_{ul}}^{X_{iz}} P \cdot \ln(X - X')^2 dX' - \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{8 \cdot R^2 \cdot F}{\pi}\right). \quad (3.27)$$

Integral u jednadžbi (3.27) može se izračunati analitički uz pretpostavku da je tlak opisan polinomom drugog stupnja u intervalu od  $X_{j-1}$  do  $X_{j+1}$ . Prema tome, lokalna elastična deformacija na nekom mjestu  $i$  dobivena je kombiniranjem ukupne posljedice tlaka za svako elementarno područje površine dodira,

$$\bar{\delta}_i = \sum_{j=2,4,\dots}^{N-1} d\bar{\delta}_{ij}, \quad (3.28)$$

gdje  $d\bar{\delta}_{ij}$  označava elementarnu elastičnu deformaciju koja je posljedica djelovanja tlaka u području od  $X_{j-1}$  do  $X_{j+1}$ . Uz funkcije za  $P$  i  $dP/dX'$ , elementarna elastična deformacija se može izraziti kao:

$$d\bar{\delta}_{ij} = dD_{i,j-1} \cdot P_{j-1} + dD_{i,j} \cdot P_j + dD_{i,j+1} \cdot P_{j+1} + \text{konst.}, \quad (3.29)$$

gdje su  $dD$  elementarni utjecajni faktori koje su definirali *Houpert* i *Hamrock* [34]. Konačno se jednačba elastične deformacije (3.27) može napisati kao funkcija tlaka u čvoru I:

$$\bar{\delta}_i = \sum_{j=1}^N D_{i,j} \cdot P_j - \frac{1}{4} \cdot \ln \left( \frac{8 \cdot R^2 \cdot F}{\pi} \right), \quad (3.30)$$

gdje se utjecajni faktori  $D_{ij}$  mogu odrediti pomoću elementarnih utjecajnih faktora  $dD_{ij}$  uz sljedeću međusobnu zavisnost:

$$D_{i,j} = \begin{cases} dD_{i,j} \\ dD_{i,j}(X_{j-2}, X_j) + dD_{i,j}(X_j, X_{j+2}) \end{cases} \quad \text{ako je } \begin{cases} j \text{ paran} \\ j \text{ neparan} \end{cases}.$$

Na temelju gore istaknutog i osnovnog izraza za debljinu mazivog filma (3.1) koji uključuje i elastične deformacije površina dodira napisanog u najjednostavnijem obliku:

$$h(x) = h_0 + s(x) + \delta(x),$$

gdje je  $s(x)$  -razmak uvjetovan geometrijom nedeformiranog cilindra u središtu dodira, koji uz paraboličnu aproksimaciju ima bezdimenzijski oblik:

$$S(X) = \frac{X^2}{2}.$$

Konačno se može definirati izraz za bezdimenzijsku debljinu mazivog filma u bilo kojem čvoru  $i$ :

$$H_i = H_0 + \frac{X_i^2}{2} + \sum_{j=1}^N D_{i,j} \cdot P_j. \quad (3.31)$$

Uz sve ranije pretpostavke, konačno se može napisati i bezdimenzijska *Reynoldsova* jednačba u obliku:

$$\frac{H_i^3}{12} \cdot \left( \frac{dP}{dX} \right)_i + \frac{H_i^5}{10} \cdot \frac{F}{\pi} \cdot \bar{N}_K \cdot \left( \frac{dP}{dX} \right)_i^3 - \frac{K}{6} \cdot \bar{\eta}_i \cdot \left( H_i - \frac{\bar{\rho}_e \cdot H_e}{\bar{\rho}_i} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Zbog vrlo visokih tlakova stlačivost maziva se više ne smije zanemariti, pa se za gustoću maziva (npr. mineralno ulje) najčešće upotrebljava izraz u bezdimenzijskom obliku prema [27]:

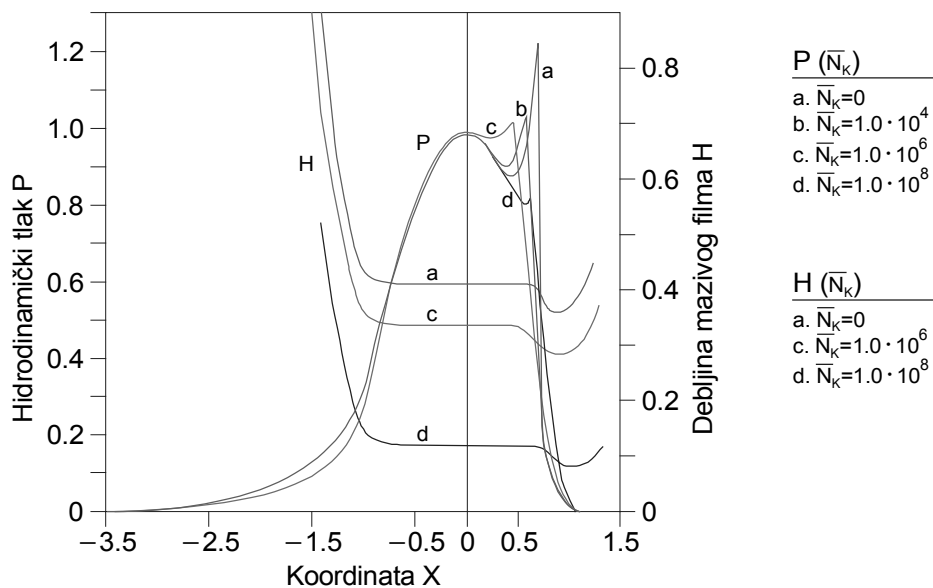
$$\bar{\rho}_i = 1 + \frac{0.6 \cdot 10^{-9} \cdot p_H \cdot P_i}{1 + 1.7 \cdot 10^{-9} \cdot p_H \cdot P_i} \quad (3.33)$$

Viskozitet je također značajno ovisan o ekstremno visokim tlakovima, pa se za proračun najčešće upotrebljava *Roelandsov* izraz (3.12) [35] u bezdimenzijskom obliku:

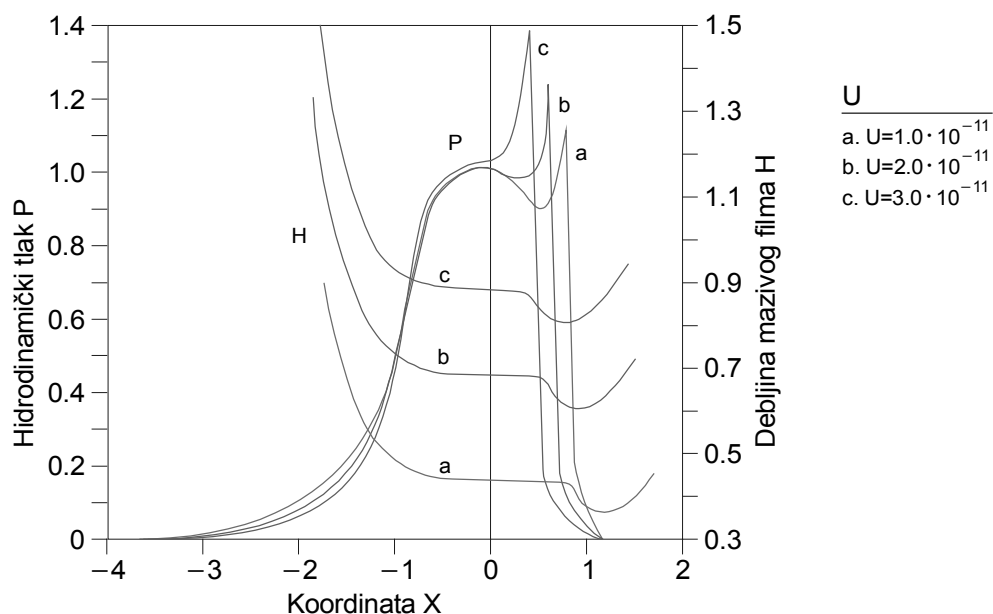
$$\bar{\eta}_i = \exp(\ln \eta_0 + 9.67) \cdot \left[ -1 + (1 + 5.1 \cdot 10^{-9} \cdot p_H \cdot P_i)^r \right], \quad (3.34)$$

gdje je  $r$  tlačno-viskozni indeks ili *Roelandsov* eksponent koji je ovisan o vrsti maziva i visini tlaka.

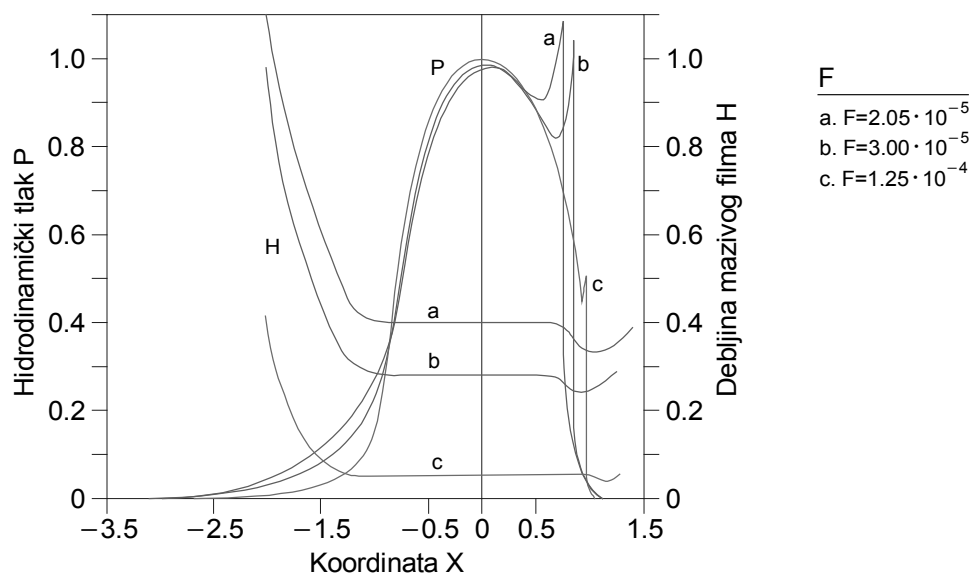
Teorijska postavka problema elastohidrodinamičkog podmazivanja pseudoplastičnim mazivom uz uključenu stlačivost može se analizirati na primjerima za koje su uporabom *Newton-Raphsonove integracijske metode* [34, 36] istodobno (simultano) riješene jednačbe (3.30) i (3.32), s konačnim ciljem dobivanja raspodjele tlaka  $p$  i debljine mazivog filma  $h$  u području dodira.



**Slika 3.7. Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za  $F=2,05 \cdot 10^{-5}$ ,  $U=1,0 \cdot 10^{-11}$  i  $G=5,0 \cdot 10^3$  [33]**



Slika 3.8. Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za  $F=2,05 \cdot 10^{-5}$ ,  $G=5,0 \cdot 10^3$  i  $\bar{N}_K=1,0 \cdot 10^2$  [33]



Slika 3.9. Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma za  $U=1,0 \cdot 10^{-11}$ ,  $G=5,0 \cdot 10^3$  i  $\bar{N}_K=1,0 \cdot 10^2$  [33]

Na temelju rezultata<sup>17</sup> predloženih na slikama 3.7, 3.8 i 3.9, te usporedbe s karakterističnom raspodjelom na slici 3.4 i rezultatima na slikama 3.5 i 3.6 mogu se izvesti sljedeći zaključci:

- šljak hidrodinamičkog tlaka i debljina mazivog filma opadaju s rastom koeficijenta nelinearnosti  $\bar{N}_K$  (slika 3.7);

<sup>17</sup> Upotrebljavani su rezultati iz [33]

- šiljak hidrodinamičkog tlaka značajno i vrlo karakteristično raste s rastom brzine klizanja, a s padom brzine klizanja značajno se smanjuje debljina mazivog filma (slika 3.8);
- šiljak hidrodinamičkog tlaka značajno pada i pomiče se u pozitivnom smjeru osi  $x$  s rastom opterećenja, a debljina mazivog filma se značajno smanjuje (slika 3.9).

Generalno slijedi da *ne-Newtonovo mazivo* bitno mijenja sliku raspodjele hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma u izlaznom području dodira, dok u središtu dodira ( $X=0$ ) takoreći nema razlike u usporedbi s *Newtonovim viskoznim mazivom*.

## 3.2. PRIMJENA EHD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE

### 3.2.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA

Klasična teorija elastohidrodinamičkog podmazivanja pretpostavlja da se mazivo ulje ponaša kao *Newtonov viskozni fluid*. Međutim, karakteristike mazivih ulja (zbog potrebe zadovoljavanja složenih uvjeta uporabe) vrlo često se poboljšavaju dodavanjem različitih aditiva (vidjeti točku 3.1.8). Maziva ulja, koja su zgusnuta polimerima, ponašaju se kao pseudoplastični ili dilatacijski fluidi. Viskozitet ovih mazivih ulja je promjenjiv i obično slijedi nelinearni odnos između smičnog naprezanja i brzine smičnih deformacija, koji je definiran reološkim zakonima ili modelima u tablici 3.2, te točkama 3.1.5 i 4.1 ovog rada. U točki 4.1 je proučeno djelovanje reološkog modela na porast temperature u mazivom filmu u usporedbi s *Newtonovim modelom*. Zaključak je da je reološko djelovanje na porast temperature u mazivom filmu značajno, ali da ne postoji značajnija razlika kod pojedinih modela u usporedbi s *Newtonovim modelom*. To upućuje na zaključak da se neće počinuti velika greška ukoliko se *ne-Newtonovo ponašanje* mazivog ulja ne uzme u razmatranje. Prije nego što se provede završna analiza, u ovoj točki još jedanput će se, uz ostala djelovanja, razmotriti i djelovanje reološke zakonitosti, ali ovaj puta na statičke i dinamičke karakteristike hidrodinamičkog kliznog radijalnog ležaja. U točki 3.1.8 je razmatran reološki model koji se u posljednje vrijeme vrlo često upotrebljava prilikom istraživanja ovih problema jer daje vrlo realističan odnos smičnog naprezanja i brzine smične deformacije. U literaturi je poznat kao *kubični model* ili *model kubičnog smičnog naprezanja* (aproksimacijska jednadžba trećeg stupnja). Model dobro odgovara pseudoplastičnim mazivim uljima koja se odlikuju izraženim *ne-Newtonovim ponašanjem*. Tijekom posljednja četiri desetljeća čitav niz istraživača je uključivao upravo ovaj model u svoja istraživanja.

*Horowitz i Steidler* [37] su riješili modificiranu *Reynoldsovu jednadžbu* pomoću metode konačnih diferencija i zatim proučili statičke karakteristike ležaja konačne širine  $B$ . *Tanner* [38] je riješio modificiranu *Reynoldsovu jednadžbu* s ugrađenim eksponencijalnim reološkim modelom (tablica 3.2 pod 7) za uske ležajeve. *Hsu* [39] je upotrebljavao model kubičnog smičnog naprezanja za *ne-Newtonova* maziva pri proučavanju statičkih karakteristika za beskonačno široke ležajeve. *Wada i Hayashi* [40, 41, 42] su modificirali *Reynoldsovu jednadžbu* s modelom kubičnog smičnog naprezanja i zatim je riješili uz pomoć tzv. perturbacijske tehnike [36]. *Swami i drugi* [43, 44, 45] su također riješili *Reynoldsovu jednadžbu* modificiranu s modelom kubičnog smičnog naprezanja pomoću metode konačnih diferencija. Predmet njihovog daljnjeg proučavanja bile su statičke i dinamičke karakteristike ležaja konačne širine  $B$ . *Tayal i drugi* [46, 47] su riješili *Navier-Stokesove jednadžbe* uporabom metode konačnih elemenata i bavili se proučavanjem statičkih i dinamičkih karakteristika ležaja konačne širine  $B$ , uključujući i model kubičnog smičnog naprezanja za *ne-Newtonovo ponašanje* mazivog ulja. U svim ovim istraživanjima pretpostavljeno je da su

rukavac i čahura apsolutno kruta tijela. Međutim, dostupne studije [48, 49, 50, 51, 52, 53] pokazuju da, i pored toga što je pretpostavljeno da je rukavac kruto tijelo, deformacija čahure značajno djeluje na karakteristike ležaja, posebice kod visokih opterećenja.

Posljednjim je navedenim istraživanjima, uz proučavanje karakteristika kliznog radijalnog ležaja, obuhvaćeno i razmatranje deformabilnost čahure. U ovim se istraživanjima upotrebljavao *Newtonov viskozni fluid*. Istraživanja ukazuju da se, za točnije utvrđivanje karakteristika ležaja, u razmatranje mora uključiti i deformabilnost čahure, odnosno elastične deformacije koje su posljedica opterećenja, što je zaključeno i u točkama 3.1.2 i 3.1.4 ovog rada.

Za odabrani primjer ležaja upotrijebit će se trodimenzionalna *Navier-Stokesova jednadžba* i *jednadžba kontinuiteta* u cilindričnim koordinatama ( $r, \varphi, v$ ) za hidrodinamičko polje toka i *Newtonovo viskozno mazivo*, te trodimenzionalne *jednadžbe elastičnosti* za polje elastične deformacije čahure. *Ne-Newtonov* karakter maziva ugrađen je pomoću modela kubičnog smičnog naprezanja (tablica 3.2 pod 8) koji se u bezdimenzijskom obliku može napisati na sljedeći način

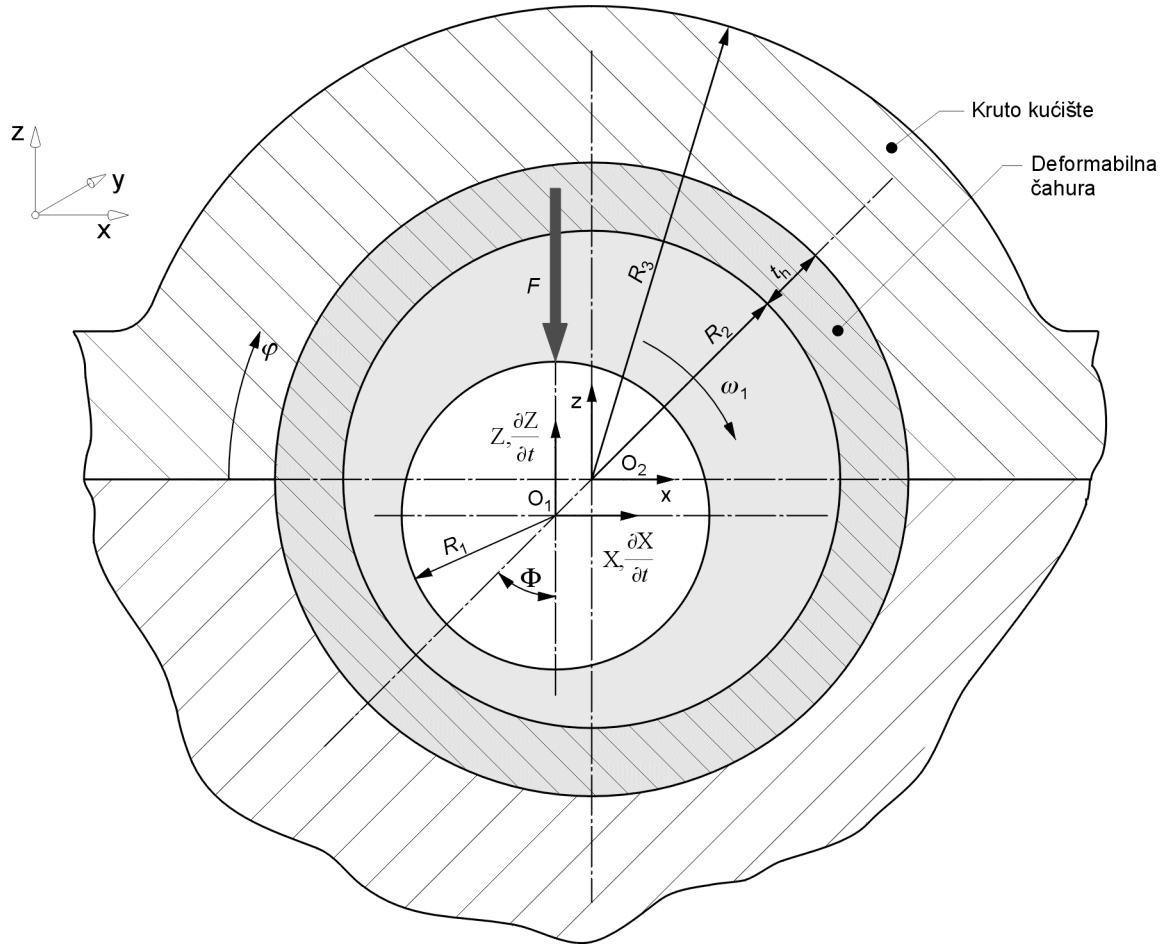
$$\tau + \bar{N}_K \cdot \bar{\tau}^3 = \bar{N}_d. \quad (3.35)$$

Spomenute jednadžbe riješene su metodom konačnih elemenata [54]. Područje pozitivnog tlaka u polju toka mazivog ulja u konvergirajućem procjepu može se ustvrditi pomoću prikladne iteracijske metode [36]. Bezdimenzijski koeficijent deformacije  $C_D$ , kao funkcija brzine vrtnje rukavca, geometrije ležaja, viskoziteta maziva, modula elastičnosti materijala čahure i debljine stjenke čahure, definiran je radi opisivanja deformabilnosti ležaja. Omjer debljine stjenke čahure i polumjera zakrivljenosti rukavca obično se uzima da je 0.4 [54].

U ovom dijelu rada razmotrit će se zavisnost statičkih karakteristika koje djeluju na sposobnost nošenja ležaja (kuta položaja, relativne ekscentričnosti i postranog toka mazivog ulja), odnosno dinamičkih karakteristika (granične brzine vrtnje i omjera frekvencije vrtnje) o opterećenju, koeficijentu deformacije i krutosti.

### 3.2.2. TEORIJSKA ANALIZA

Impulsna jednadžba (uz zanemarivanje izraza za lokalnu i konvekcijsku inerciju) jednadžbe kontinuiteta, koje vrijede za laminarni tok nestlačivog mazivog ulja u konvergirajućem procjepu kliznog radijalnog ležaja konačne širine  $B$  (slika 3.10), mogu se u bezdimenzijskom obliku napisati na sljedeći način [54]:



Slika 3.10. Shematska predodžba poprečnog presjeka kliznog radijalnog ležaja (dovod mazivog ulja nalazi se u gornjoj polovici) [54]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{R}_1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \nabla^2 \cdot U - \frac{2}{\bar{r}^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{U}{\bar{r}^2} \\ \bar{R}_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} &= \nabla^2 \cdot W - \frac{2}{\bar{r}^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{W}{\bar{r}^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \nabla \cdot V \end{aligned} \right\}, \quad (3.36)$$

gdje je

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\bar{R}_1^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \cdot \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{r}} + \frac{W}{\bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{R}_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} = 0. \quad (3.37)$$

Debljina mazivog filma za uravnoteženi klizni radijalni ležaj (slika 3.10) u bezdimenzijskom obliku može se napisati kao

$$H = \frac{h}{C} = 1 - X_1 \cdot \cos \varphi - Z_1 \cdot \sin \varphi + \bar{\delta}, \quad (3.38)$$

gdje je  $\delta$  - radijalna elastična deformacija na granici mazivo ulje - čahura, koja je posljedica hidrodinamičkog tlaka  $p$  razvijanog u mazivom filmu. Granični uvjeti za polje hidrodinamičkog tlaka definirani su kao što slijedi [54]:

$$\left. \begin{aligned} P &= 0 && \text{kod } \varphi = \varphi_1, \varphi_2 \\ P &= 0 && \text{kod } Y = \pm \lambda (\lambda = B/D, D = 2 \cdot R_2) \\ U = V = W &= 0 && \text{kod } \bar{r} = \bar{R}_1 + H \\ V &= 0 && \text{kod } \bar{r} = \bar{R}_1 \\ U &= 1 - X_1 \cdot \sin \varphi + Z_1 \cdot \cos \varphi \\ W &= 1 - X_1 \cdot \cos \varphi + Z_1 \cdot \sin \varphi \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= 0 && \text{kod } \varphi = \varphi_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3.39)$$

gdje je:

$$X_1 = \frac{1}{\omega_1 \cdot C} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial t}, \quad Z_1 = \frac{1}{\omega_1 \cdot C} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial t},$$

$$x_1 = -e \cdot \sin \Phi, \quad z_1 = -e \cdot \cos \Phi,$$

$x_1, z_1$  - koordinate središta rukavca  $O_1$  u odnosu na središte čahure (ležaja)  $O_2$ .

Rješenje jednadžbe (3.36) i (3.37) uz granične uvjete (3.39) dat će komponente brzine  $U, V$  i  $W$ , te raspodjelu hidrodinamičkog tlaka  $P$  u polju toka.

Upotrijebi li se formulacija konačnih elemenata (koja se temelji na *Garelnikovom modelu*), uz granične uvjete kod jednadžbe stanja elemenata, moguće je skupiti jednadžbe elemenata u sljedeću bezdimenzijsku jednadžbu sistema [55]:

$$[G] \cdot |\Phi| = |\bar{R}_{1H}| + X_1 \cdot |\bar{R}_{1X_1}| + Z_1 \cdot |\bar{R}_{1Z_1}|, \quad (3.40)$$

gdje su:  $[G]$  - matrica za materijal, a  $|\bar{R}_{1H}|, |\bar{R}_{1X_1}|, |\bar{R}_{1Z_1}|$  i  $|\Phi|$  čvorni vektori položaja rukavca.

Trodimenzijski 20-čvorni izoparametrijski elementi, u kojima ima 20 čvorova za brzinu i 8 krutih čvorova za hidrodinamički tlak, uporabljeni su za izdvajanje područja pozitivnog tlaka mazivog filma u konvergirajućem procjepu ležaja.

### 3.2.3. ANALIZA ČAHURE LEŽAJA

Deformacija čahure ležaja dobivena je uporabom trodimenzionalnog elastičnog modela. Formulacija konačnih elementa ovog modela dobivena je uporabom principa virtualnog rada [55], koji omogućava postavljanje sljedeće jednadžbe sistema za izdvajanje područja elastične deformacije čahure ležaja:

$$[K] \cdot |P| = C_D \cdot |F|, \quad (3.41)$$

gdje su:  $[K]$  - matrica krutosti sistema,  $|P|$  - čvorni vektor pomaka sistema,  $|F|$  - čvorni vektor vanjskog opterećenja  $F$  i  $C_D$  - bezdimenzijski koeficijent deformacije definiran izrazom

$$C_D = \frac{\eta_0 \cdot \omega_1}{E} \cdot \frac{t_h}{R_1} \cdot \left[ \frac{R_1}{C} \right]^3. \quad (3.42)$$

Čvorne komponente pomaka  $|P|$  u čahuri ležaja dobivene su rješavanjem jednadžbe (3.41) uz uvažavanje uvjeta nepomičnih čvorova na vanjskoj površini ležajne čahure uprešane u kruto kućište.

### 3.2.4. NE-NEWTONOV MODEL MAZIVOG ULJA

Model kubičnog smičnog naprezanja, koji daje nelinearni odnos između smičnog naprezanja i brzine smične deformacije za mazivo ulje, predložen je u bezdimenzijskom obliku jednadžbom (3.35). U ovoj jednadžbi je:  $\bar{\tau}$  - smično naprezanje,  $\bar{N}_d$  - brzina smične deformacije, a  $\bar{N}$  - koeficijent nelinearnosti u bezdimenzijskom obliku. Za proračun viskoziteta  $\bar{\eta}$ , brzina smične deformacije  $\bar{N}_d$  se uzima kao druga invarijanta brzine smične deformacije [56]:

$$\begin{aligned} \bar{N}_d = & \left\{ 2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{W}{\bar{r}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\bar{R}_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} - \frac{U}{\bar{r}} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{\bar{R}_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{1}{\bar{R}_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right\}^{0.5} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Za proračun i analizu bezdimenzijskog postranog toka  $Q_p$ , bezdimenzijske granične brzine vrtnje  $\bar{\Omega}$  i bezdimenzijskog omjera frekvencije vrtnje  $\bar{v}$  (dijagram stabilnosti) uporabljen je model *Sinhasana* i *Chandrawata* [52, 53, 54, 57, 58]. Radi opsežnosti analize teorijskih postavki one su izostavljene u ovom radu, no zbog sveobuhvatnosti istraživanja dati su rezultati proračuna uporabom ovog modela u obliku karakterističnih dijagrama [54].

### 3.2.5. POSTUPAK RJEŠAVANJA

Rješenje jednadžbe (3.40) daje čvorni tlak i komponente brzine u području pozitivnog hidrodinamičkog tlaka u polju toka mazivog ulja. Tako određene komponente brzine upotrebljavaju se za izračunavanje brzine smične deformacije  $\bar{N}_d$  za odabrani reološki model prema jednadžbi (3.43). Za izračunavanje smičnog naprezanja pomoću jednadžbe (3.35) upotrebljena je *Newton-Raphsonova metoda* [36]. Viskozitet  $\bar{\eta}$  se izračunava u svakoj *Gaussovoj* točki integriranja uporabom omjera  $\bar{\eta} = \bar{\tau} / \bar{N}_d$ . S ovako izračunatim viskozitetom opetuje se rješavanje jednadžbe (3.40) kako bi se dobili čvorni tlakovi komponente brzine. Iteracijski postupak se ponavlja dok se ne dobije zahtijevana konvergencija. Konvergirajući čvorni tlakovi se upotrebljavaju za proračun čvornih pomaka. Debljina mazivog filma se modificira promatranjem radijalne komponente čvornih pomaka, kako bi se dobilo rješenje čvornih tlakova i komponenti brzina za sljedeću iteraciju. U svakoj iteraciji utvrđuje se područje pozitivnog hidrodinamičkog tlaka. Iteracije zahtijevaju također određivanje kuta položaja rukavca  $\bar{\Phi}$  (odnosno  $\Phi$ ) koji se opire vertikalnom opterećenju rukavca  $\bar{F}$  (odnosno  $F$ )

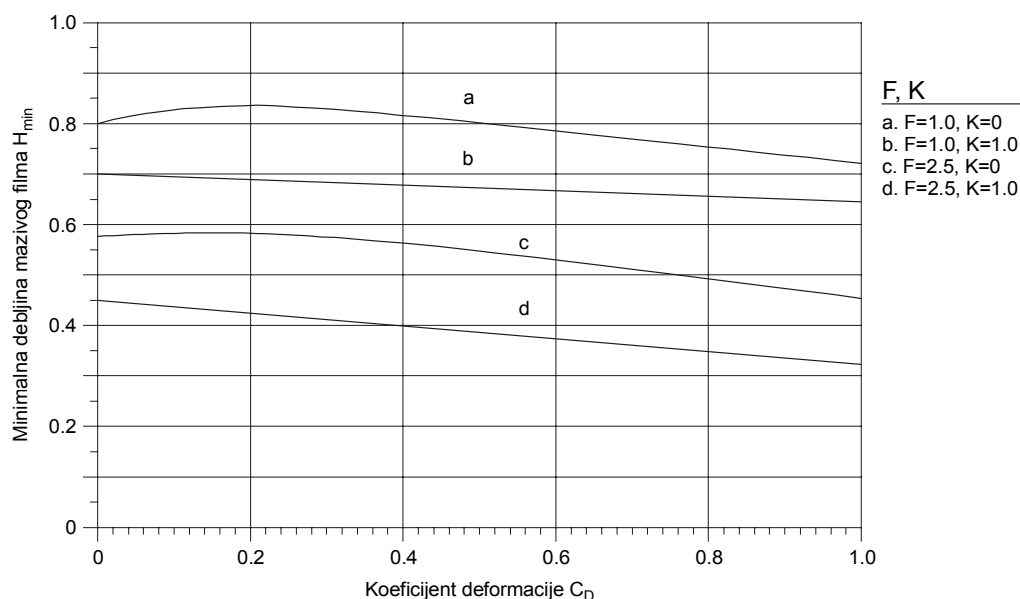
### 3.2.6. PREDODŽBA REZULTATA

Statičke i dinamičke karakteristike kliznog radijalnog ležaja (shematski prikazanog na slici 3.10), uzimajući u obzir deformabilnost čahure i *ne-Newtonov* karakter mazivog ulja, određene su za dvije vrijednosti bezdimenzijskog parametra opterećenja: a)  $F=1.0$  i b)  $F=2.5$  (što približno odgovara vanjskim opterećenjima  $F=6$  kN i  $F=15$  kN respektivno). Kako ležaj u normalnim okolnostima radi pri konstantnom opterećenju  $F$ , smatra se logičnim definiranje karakteristike pri konstantnom opterećenju i kod elastohidrodinamičke analize. Promatrani je primjer riješen za sljedeće podatke o geometriji ležaja i uvjetima rada:  $R_1=0.025$  m,  $t_h=0.010$  m,  $C=2.5 \cdot 10^{-5}$  m,  $B=0.050$  m,  $\lambda=1.0$ ,  $n_r=3000$  min<sup>-1</sup>,  $\eta_0=0.03$  Pas i  $\nu=0.3$  [54].

Vrijednosti karakteristika ležaja date su u obliku odgovarajućih dijagrama za po dvije vrijednosti parametra opterećenja  $F$ , krutosti  $K$  (a.  $K=0$  i b.  $K=1$ ) i koeficijenta deformacije  $C_D$  (a.  $C_D=0.01, 0.0$  i b.  $C_D=1.00$ )<sup>18</sup>.

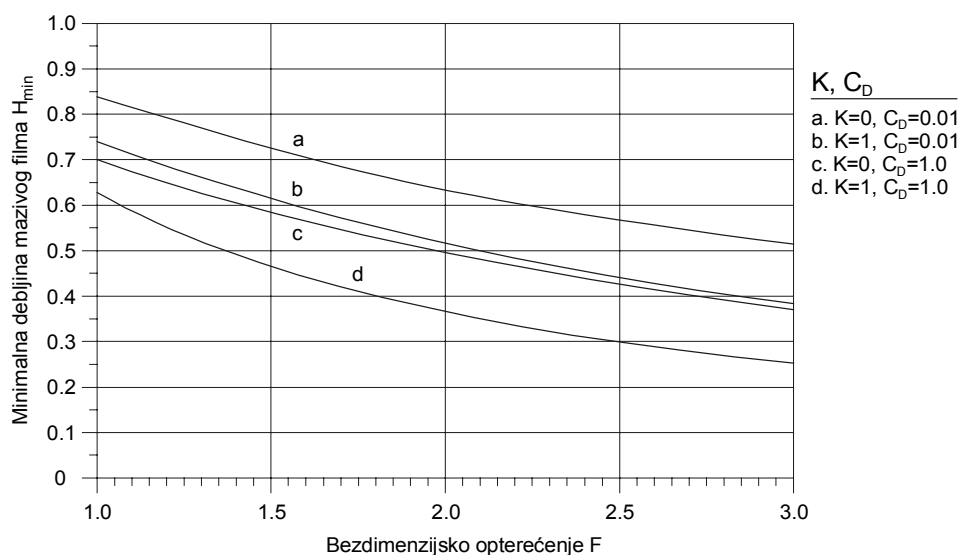
Na slici 3.11 predočena je ovisnost minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  o koeficijentu deformacije  $C_D$ , za dvije različite vrijednosti parametara opterećenja  $F$  i krutosti  $K$ . Očigledno je da se porastom  $F$ ,  $K$  i  $C_D$  smanjuje minimalna debljina mazivog filma  $H_{\min}$ .

<sup>18</sup> Prema [59] koeficijent deformacije  $C_D=0.05$  odgovara čahuri izrađenoj iz bronce ( $E=80 \dots 117 \cdot \text{GPa}$ ), a  $C_D=1.00$  odgovara čahuri izrađenoj iz materijala Texolit 2002 ( $E=4.6 \dots 6.72 \cdot \text{GPa}$ ).



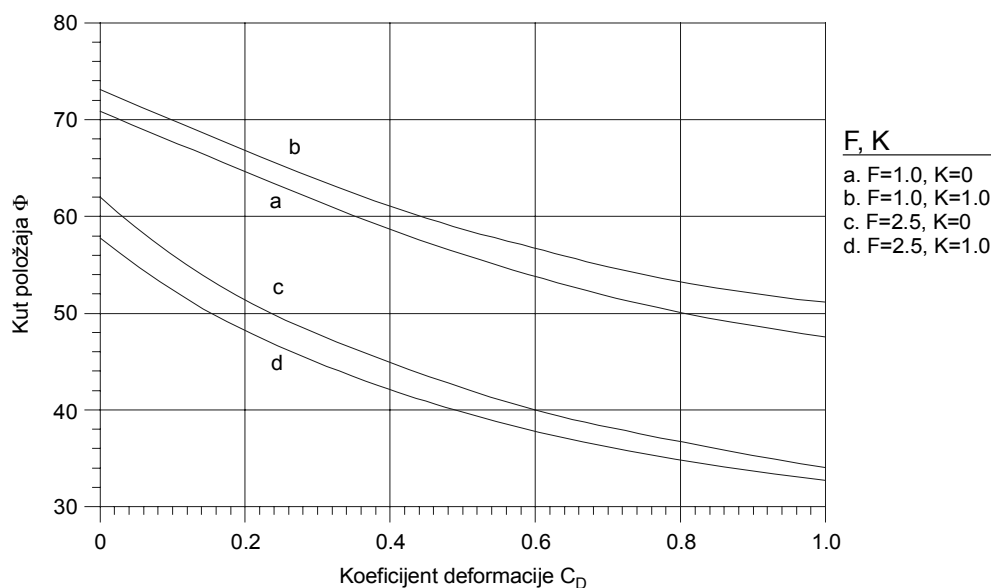
**Slika 3.11. Ovisnost minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

Na slici 3.12 predložena je ovisnost minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  o opterećenju  $F$ . Iz slike slijedi da se porastom opterećenja, za različite vrijednosti  $K$  i  $C_D$ , smanjuje minimalna debljina mazivog filma. Dakle,  $F$ ,  $K$  i  $C_D$  imaju slično djelovanje na minimalnu debljinu mazivog filma. Porastom krutosti  $K$  viskozitet mazivog ulja opada, što dovodi do smanjenja sposobnosti nošenja ležaja za zadanu vrijednost relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$ .



**Slika 3.12. Ovisnost minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  o opterećenju  $F$  za zadanu krutost  $K$  i koeficijent deformacije  $C_D$  [54]**

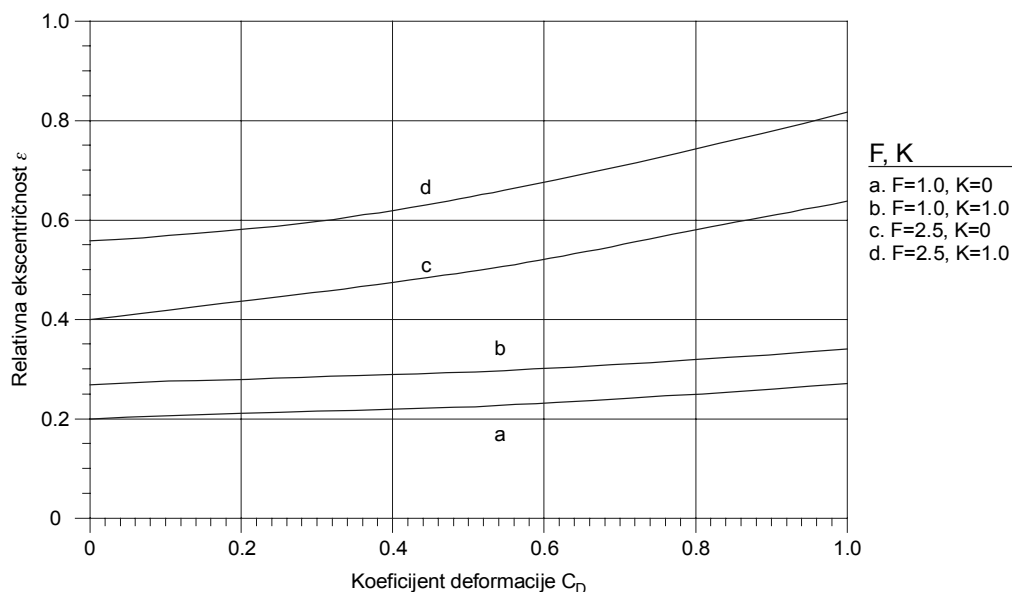
Za  $F=2.5$  ( $F \approx 15$  kN),  $K=0$  i  $C_D=0$  dobiva se  $h_{\min}=0.01475$  mm, a za  $K=1$  i  $C_D=0$  dobiva se  $h_{\min}=0.01125$  mm, što je 23.3% smanjenja minimalne debljine mazivog filma. Kod deformabilnog ležaja za  $C_D=1.00$  i  $K=0$  dobiva se  $h_{\min}=0.0083$  mm, što je 43.3% smanjenja. Ova usporedba upućuje na obvezatnost uzimanja u razmatranje deformabilnosti čahure, kako zbog proračuna minimalne debljine mazivog filma, tako i zbog pravilnog sparivanja materijala rukavca i čahure glede optimalnog oblikovanja kliznog ležaja.



**Slika 3.13. Ovisnost kuta položaja  $\Phi$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

Slika 3.13 predočava promjenu kuta položaja  $\Phi$  u ovisnosti o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadanu vrijednost opterećenja  $F$  i krutosti  $K$ . Očigledno je da kut položaja opada s porastom  $F$ ,  $K$  i  $C_D$ , što upućuje na zaključak da se dinamičke performanse ležaja mogu poboljšati porastom ovih parametara.

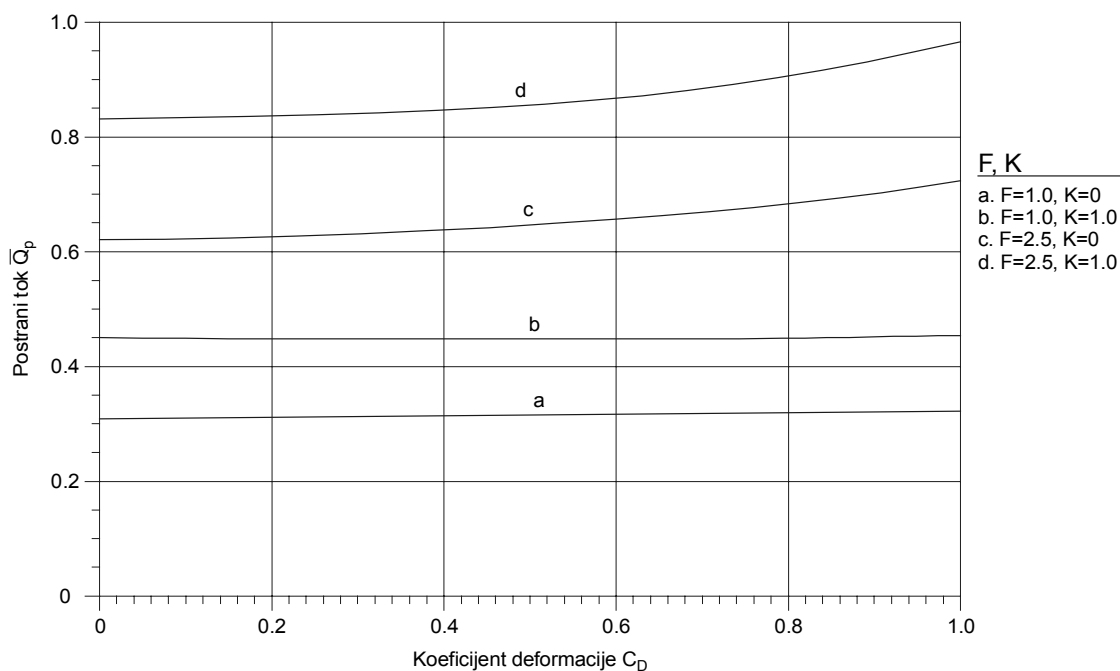
Ovisnost relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadane vrijednosti opterećenja  $F$  i krutosti  $K$ , dana je na slici 3.14. S porastom  $F$ ,  $K$  i  $C_D$  raste i  $\varepsilon$ . Porast  $\varepsilon$  je značajniji kod većeg opterećenja. Za  $F=2.5$ ,  $C_D=1.0$  i  $K=1$ ,  $\varepsilon$  raste za 100% glede  $\varepsilon$  za  $C_D=0$  i  $K=0$ .



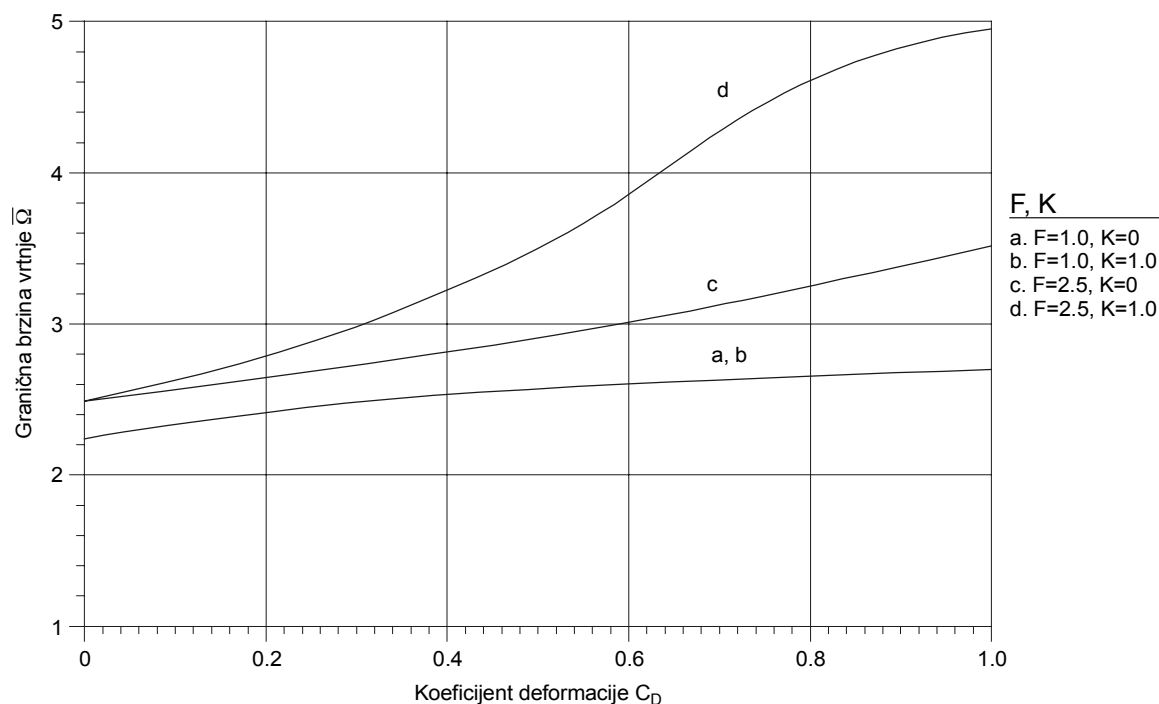
**Slika 3.14. Ovisnost relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

Slika 3.15 predočava promjenu postranog toka  $\bar{Q}_p$  u ovisnosti o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$ . Iz slike je očigledno da postrani tok raste s porastom  $F$ ,  $K$  i  $C_D$ . Kod  $F=2.5$ ,  $C_D=1.0$  i  $K=1$  porast iznosi 53.6% glede postranog toka kod jednakog opterećenja uz  $C_D=0$  i  $K=1$ . Bezdimenzijski postrani tok definiran je izrazom

$$\bar{Q}_p = \frac{Q_p}{\omega_1 \cdot C \cdot R_1^2} \quad (3.44)$$



**Slika 3.15. Ovisnost postranog toka  $\bar{Q}_p$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

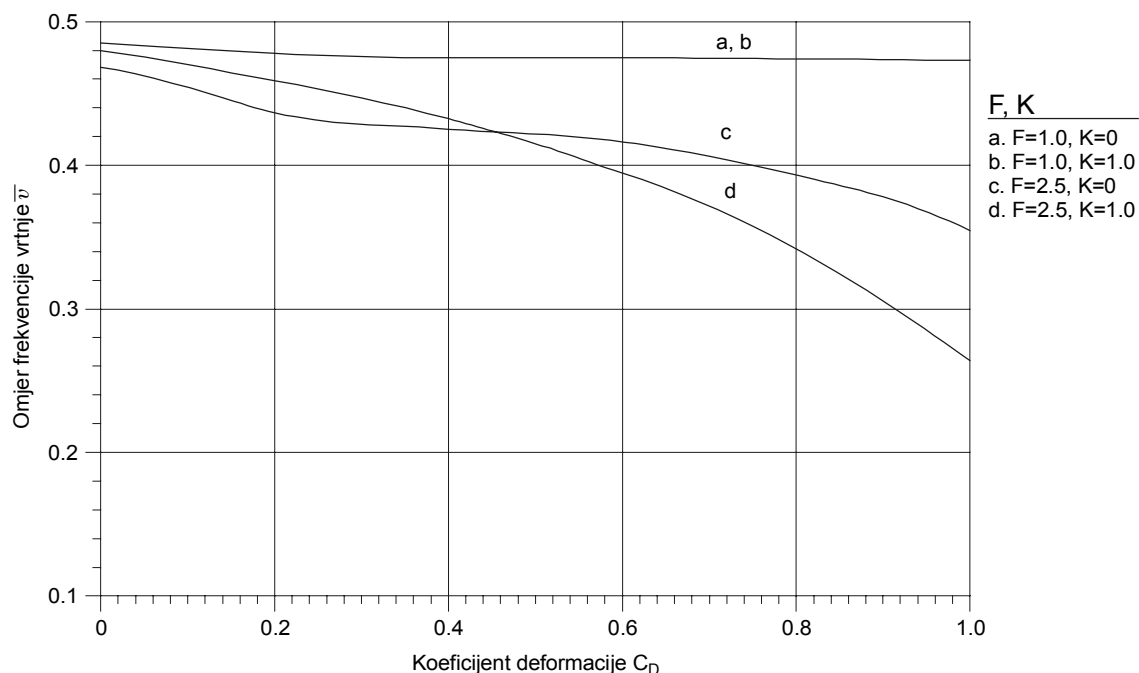


**Slika 3.16. Ovisnost granične brzine vrtnje rukavca  $\bar{\Omega}$  o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

Granična brzina vrtnje rukavca  $\bar{\Omega}$  (ili tzv. granica stabilnog rada ležaja) u ovisnosti o koeficijentu deformacije  $C_D$ , za različite vrijednosti opterećenja  $F$  i krutosti sistema  $K$ , predložena je na slici 3.16. Granična brzina vrtnje rukavca u bezdimenzijskom obliku definirana je izrazom

$$\bar{\Omega} = \Omega \cdot \left( \frac{C}{9} \right)^{0.5} \quad (3.45)$$

Za konstantno opterećenje  $F$ , granica stabilnog rada ležaja  $\bar{\Omega}$  raste kad raste  $C_D$  i  $K$ . Porast je značajniji kod višeg opterećenja. Također se primjećuje da, kod nižeg opterećenja, krutost  $K$  ima neznatan utjecaj na ovu granicu. Za  $F=1.0$ ,  $C_D=1.0$  i  $K=1$  granična brzina poraste za 17% glede vrijednosti koja odgovara deformabilnom ležaju ( $C_D=1.0$  i  $K=0$ ) kod jednakog opterećenja. Isti postotak porasta bilježi se i kod usporedbe s krutim ležajem ( $C_D=0$  i  $K=0$ ), jer su vrijednosti vrlo bliske i stapaju se u jednu krivulju. Kod višeg opterećenja ( $F=2.5$ ) porast granične brzine vrtnje rukavca za  $C_D=1.0$  i  $K=1$  je 100 % glede vrijednosti za kruti ležaj ( $C_D=0$  i  $K=0$ ). U ovom slučaju  $C_D$  i  $K$  značajno djeluju na graničnu brzinu vrtnje rukavca, odnosno granicu stabilnog rada ležaja.



**Slika 3.17. Ovisnost omjera frekvencije vrtnje ( $\bar{v}$  ( $\bar{v} = v / \omega_1$ )) o koeficijentu deformacije  $C_D$  za zadano opterećenje  $F$  i krutost  $K$  [54]**

Na slici 3.17 predložena je promjena omjera frekvencije vrtnje  $\bar{v}$  u ovisnosti o koeficijentu deformacije  $C_D$ , za dva različita opterećenja  $F$  i dvije različite krutosti  $K$ . Iz slike se može primijetiti da omjer frekvencije vrtnje opada s porastom  $F$ ,  $K$  i  $C_D$ . Pad je značajniji kod višeg opterećenja. Za  $C_D=1.0$  i  $K=1.0$  i  $F=1$  pad u odnosu na  $C_D=0.01$  iznosi 5%, dok je za  $F=2.5$  pad 41.5%. Za  $F=1.0$  rezultati za  $K=0$  i  $F=1$  su vrlo bliski i stapaju se u jednu krivulju ovisnosti  $\bar{v}$  o  $C_D$ .

Na temelju predloženih rezultata može se zaključiti da s porastom opterećenja, te porastom koeficijenta deformacije i krutosti (deformabilni ležaj) dolazi do smanjenja minimalne debljine mazivog filma, kuta položaja rukavca i omjera frekvencije vrtnje, dok se istodobno relativna ekscentričnost, postrani tok mazivog ulja (istiskivanje ili propuštanje) i granična brzina vrtnje rukavca povećavaju. Dakle, utvrđeno je da krutost sistema ležaja  $K_L$  i koeficijent deformacije  $C_D$  značajno djeluju na sve promatrane karakteristike performansi kliznog ležaja i to posebice kod viših opterećenja  $F$ .

# 4

## TEORIJA TERMOELASTOHIDRODINAMIČKOG PODMAZIVANJA

---

*U četvrtom se poglavlju obrađuje najmlađa od tri teorije: TEHD teorija podmazivanja. Dat je pregled razvoja teorije, kao i pregled razvoja primjene na klizni radijalni ležaj. Predočeni su utjecaji pojedinih parametara na radne karakteristike ležaja.*

### 4.1. TEORIJSKE OSNOVE

#### 4.1.1. OPĆENITO O PODMAZIVANJU PRI VISOKIM TEMPERATURAMA

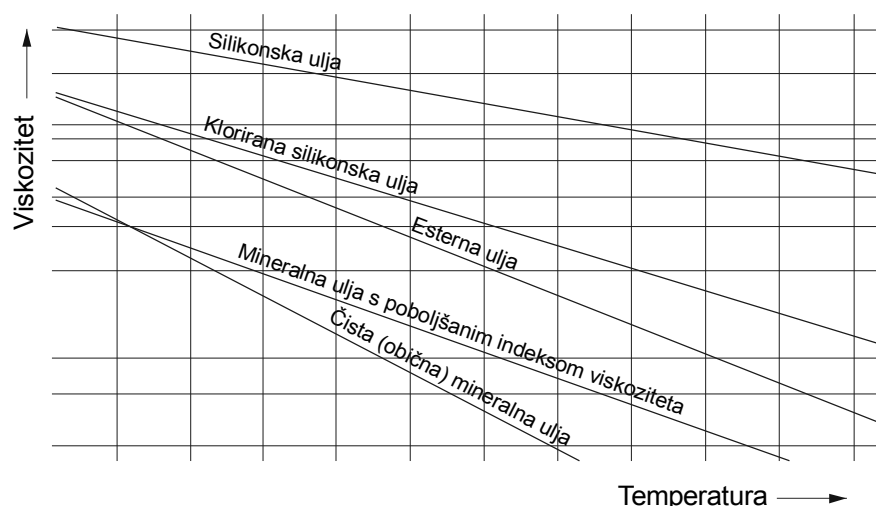
U dosadašnjem proučavanju razmatrani su izotermički procesi, tj. pretpostavljena je konstantna temperatura, i to takvog iznosa da je njezino djelovanje na proces podmazivanja bilo zanemarivo. Međutim, današnji zahtjevi za opterećenjem i brzinom su takvi da se utjecaj temperature na gustoću i viskozitet maziva, te toplinske deformacije dijelova u dodiru više ne smiju zanemariti. Naime, porast iznosa temperature već od 10°C može prouzročiti takvu promjenu viskoziteta koja će za posljedicu imati porast hidrodinamičkog tlaka za 28 MPa [60], odnosno konačnu posljedicu - značajno smanjenje debljine mazivog filma. Svako smanjenje debljine mazivog filma, kod visokih opterećenja i velikih brzina, predstavlja opasnost njegovog prekida ili izgaranja zbog visoke temperature. Dakle, stvara se opasnost od trošenja koje je detaljnije razmotreno u točki 1.3.

Prije no što se pristupi analizi teorije termoelastohidrodinamičkog podmazivanja, potrebno je razmotriti nekoliko faktora i problema koji utječu na podmazivanje pri visokim temperaturama. Kao prvo, visoke temperature se mogu najbolje definirati kao temperature koje su dovoljno visoke da uzrokuju promjene i ograničenja koja su nepoznata kod nižih temperatura. Općenito, granice visokih temperatura za maziva su niže od onih za druge materijale u promatranom sistemu, a gornja granica temperature (glede ispravne funkcije sistema) određena je stabilnošću maziva [61]. Uzimanja ili ne uzimanje temperature u razmatranje, ovisi ne samo o njenom iznosu već i o vremenu djelovanja. Tako npr. tzv. *flash temperatura*, koja se javlja u visoko opterećenim podmazivanim dodirima uslijed viskoznog grijanja u tankom mazivom filmu djeluje od  $10^{-8}$  do  $10^{-4}$  sekundi i dostiže iznos od 150°C do

500°C [61]. Neki autori [62] preporučuju da temperatura mazivog filma ne prelazi vrijednost od 82°C kod hidrodinamički podmazivanih kliznih radijalnih ležaja.

Međutim, generalno se može uzeti da granična temperatura, koja se može tolerirati kod dodira po crti podmazivanih kvalitetnijim i skupljim uljima<sup>19</sup>, iznosi od 150°C do 200°C [61].

Negativni utjecaj visoke temperature na mazivo je višestruk<sup>20</sup>, no ograničiti ćemo se na najpoznatiji, a to je utjecaj na viskozitet.



Slika 4.1. Ovisnost viskoziteta o temperaturi za različite vrste ulja [61]

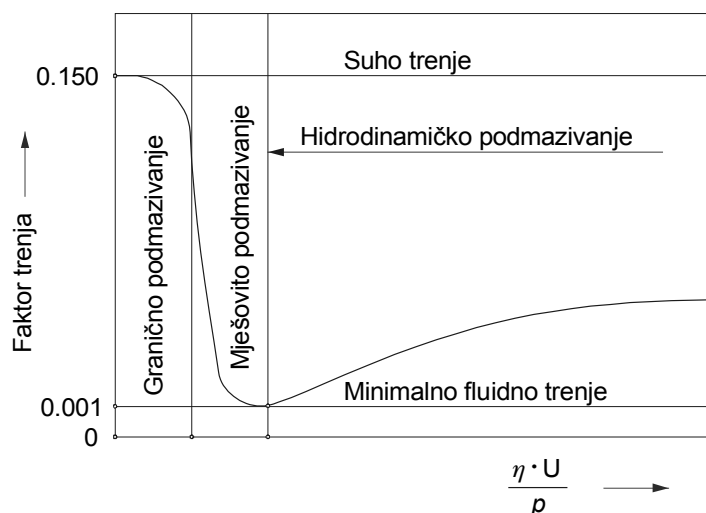
Na slici 4.1 [61] predložen je tipičan dijagram ovisnosti apsolutnog viskoziteta na temperaturi  $T$  za različite vrste mazivih ulja. Potrebno je istaknuti da vrijednost viskoziteta ulja koje se upotrebljava kod proračuna ležaja ili debljine mazivog filma predstavljaju dinamički ili apsolutni viskozitet koji je produkt kinematičkog viskoziteta i gustoće maziva. S obzirom na to da porastom temperature opada gustoća i dinamički (apsolutni) viskozitet opada više nego kinematički.

Krivulja na slici 4.2., koja se često zove *Stribeckova krivulja* (premda su je u ovom obliku prvi kreirali *S.A.* i *T.R. McKee* [61]), predločava ovisnost faktora trenja  $f$  o bezdimenzijskom izrazu  $(\eta \cdot u/p)$  - parametru ležaja (gdje  $\eta$  predstavlja viskozitet,  $u$  brzinu i  $p$  tlak), odnosno predločava djelovanje viskoziteta na trenje od potpuno hidrodinamičkog do graničnog podmazivanja. Jasno je da visoki viskozitet neće moći opstati kod visoke temperature, pa će sistem provesti više vremena u graničnom podmazivanju, što treba izbjeći odgovarajućim proračunom<sup>21</sup>.

<sup>19</sup> Npr. silikonska ulja

<sup>20</sup> Pad viskoziteta, promjena stanja, oksidiranje, adsorpcija, itd.

<sup>21</sup> Izborom mazivog ulja, debljine mazivog filma, hlađenje i sl.

Slika 4.2. Ovisnost faktora trenja o izrazu ( $\eta \cdot U/p$ )

#### 4.1.2. TEORIJSKA ANALIZA

Teorija termoelastohidrodinamičkog podmazivanja zasniva se na važećim pretpostavkama navedenim u tablici 3.1, uz dopunsku pretpostavku o djelovanju temperature na proces podmazivanja. Ove pretpostavke trebaju doprinijeti daljnjem približavanju problema podmazivanja stvarnim eksploatacijskim uvjetima.

Matematička analiza, kao i kod prethodnih teorija podmazivanja, započinje s postavkom odgovarajuće prilagođene *Reynoldsove jednadžbe* čijim rješavanjem se dolazi do raspodjele hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma u promatranom mazivom dodiru. Već je rečeno da je *Reynolds* još 1886. godine [16] postavio prvu diferencijalnu jednadžbu za postojeću raspodjelu hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma kod klznog ležaja uz pretpostavku da je mazivo izoviskozni i nestlačivi fluid. *Dowson* [63] je 1962. godine postavio poopćenu *Reynoldsovu jednadžbu* za mazivo koje se ponaša kao *Newtonov fluid*. Ovaj oblik *Reynoldsove jednadžbe* često je upotrebljavan za analizu promjene fluidnih svojstava mazivog filma (uzduž i poprijeko), te za analizu problema termoelastohidrodinamičkog podmazivanja dodira u točki i dodira po crti (iz tablice 1.2) [64, 65, 66].

Za bolje razumijevanje i proučavanje mehanizama elastohidrodinamičkog podmazivanja, treba svakako u razmatranje uključiti i reološka svojstva maziva u kombinaciji s temperaturom u mazivom filmu. Od prvih rješenja problema podmazivanja [29, 67] u uporabi su bili različiti reološki modeli (kao što su *Dyson - Wilsonov* model [68], nelinearni viskoelastični model [69], viskoelastoplastični model [70], itd.). Svi oni su uglavnom predviđali strmi pad smičnog naprezanja s rastom brzine smične deformacije. U tablici 3.2 dat je pregled nekih od najpoznatijih reoloških modela koji su u uporabi.

Dosta dugo se u proučavanju *ne-Newtonovog* elastohidrodinamičkog podmazivanja za određivanje polja hidrodinamičkog tlaka upotrebljavalo rješenje *Reynoldsove jednadžbe* ili

pretpostavka *Hertzovog tlaka*. Jedino se za dobivanje polja smičnog naprezanja upotrebljavao neki od reoloških modela, koji opisuju *ne-Newtonovo* ponašanje maziva. Međutim, tijekom nekoliko zadnjih godina prezentirano je mnoštvo studija u svezi sa cjelovitim rješanjem problema *ne-Newtonovog* elastohidrodinamičkog podmazivanja [33, 71, 72, 73].

1989. godine prvi put je prezentirana poopćena *Reynoldsova jednadžba* [74] koja je modificirana tako da je prikladna za cjelovitost rješenja problema termoelastohidrodinamičkog podmazivanja s mogućnošću uključivanja nekoliko reoloških modela. U nastavku ovog rada bit će prikazano daljnje poopćenje *Reynoldsove jednadžbe* [32] glede cjelovitosti rješavanja problema podmazivanja, neovisno o tome da li je mazivi film u stabilnom ili nestabilnom stanju toka.

Prema koordinatnom sustavu prikazanom na slici 4.3 (veza sa slikom 3.3), za uključivanje većine reoloških modela iz tablice 3.2, gradijenti brzine smične deformacije mogu se definirati sa

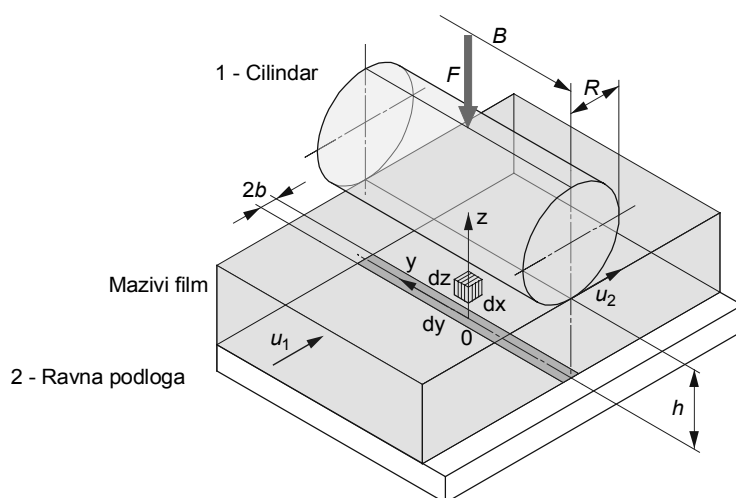
$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_x(\tau_x, \tau_y, \eta), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = f_y(\tau_x, \tau_y, \eta). \quad (4.1)$$

Jednadžbe ravnoteže za elementarni volumen ( $dx \cdot dy \cdot dz$ ) mazivog filma (prema slici 4.3) mogu se napisati u obliku [32]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tau_y}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Umjesto prosječnog viskoziteta definiranog izrazom (2.6), uvodi se komplet funkcija tzv. ekvivalentnog viskoziteta pomoću definicija

$$\eta_x^* = \frac{\tau_x}{f_x(\tau_x, \tau_y, \eta)}, \quad \eta_y^* = \frac{\tau_y}{f_y(\tau_x, \tau_y, \eta)}. \quad (4.3)$$



**Slika 4.3.** Poopćena predodžba podmazivanog dodira po crti (cilindra i ravne podloge) s elementarnim volumenom mazivog filma

Uvrštavanjem jednadžbi (4.1) u jednadžbe (4.3) slijedi

$$\tau_x = \eta_x^* \cdot \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \tau_y = \eta_y^* \cdot \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4.4),$$

odnosno uvrštavanjem jednadžbi (4.4) u jednadžbe ravnoteže (4.2) dobit će se jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_x^* \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_y^* \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.5)$$

Ako se jednadžbe (4.5) dvaput integriraju po koordinati  $z$ , uz konstante integriranja dobivene iz graničnih uvjeta za polje brzina:

$$\left. \begin{aligned} u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1 \quad \text{za} \quad z = 0 \\ u = u_2, \quad v = v_2, \quad w = w_2 \quad \text{za} \quad z = h \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

dobivaju se komponente brzine  $u$  i  $v$  u obliku

$$\left. \begin{aligned} u = u_1 + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left( \int_0^z \frac{z' dz'}{\eta_x^*} - \frac{\eta_{ex}}{\eta'_{ex}} \cdot h \cdot \int_0^z \frac{dz'}{\eta_x^*} \right) + \frac{\eta_{ex} \cdot (u_2 - u_1)}{h} \cdot \int_0^z \frac{dz'}{\eta_x^*} \\ v = v_1 + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \left( \int_0^z \frac{z' dz'}{\eta_y^*} - \frac{\eta_{ey}}{\eta'_{ey}} \cdot h \cdot \int_0^z \frac{dz'}{\eta_y^*} \right) + \frac{\eta_{ey} \cdot (v_2 - v_1)}{h} \cdot \int_0^z \frac{dz'}{\eta_y^*} \end{aligned} \right\}, \quad (4.7)$$

gdje je:

$$\frac{1}{\eta_{ex}} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \frac{dz}{\eta_x^*}, \quad \frac{1}{\eta_{ey}} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \frac{dz}{\eta_y^*}, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\eta'_{ex}} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h \frac{z dz}{\eta_x^*}, \quad \frac{1}{\eta'_{ey}} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h \frac{z dz}{\eta_y^*}. \quad (4.9)$$

Izrazi za tok mase fluida u smjeru osi  $x$  i osi  $y$  mogu se definirati na sljedeći način

$$Q_x = \int_0^h \rho \cdot u \, dz, \quad Q_y = \int_0^h \rho \cdot v \, dz \quad (4.10)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (4.7) u jednadžbu (4.10) i integriranja slijedi

$$\left. \begin{aligned} Q_x = -\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ex} \cdot h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_x^* \cdot h \cdot \bar{u} \\ Q_y = -\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ey} \cdot h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_y^* \cdot h \cdot \bar{v} \end{aligned} \right\}, \quad (4.11)$$

gdje je

$$\bar{u} = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad (4.12)$$

$$\left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{\text{ex}} = 12 \cdot \left( \frac{\eta_{\text{ex}} \cdot \rho'_{\text{ex}}}{\eta'_{\text{ex}}} - \rho''_{\text{ex}} \right) \left. \vphantom{\left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{\text{ex}}} \right\}, \quad (4.13)$$

$$\left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{\text{ey}} = 12 \cdot \left( \frac{\eta_{\text{ey}} \cdot \rho'_{\text{ey}}}{\eta'_{\text{ey}}} - \rho''_{\text{ey}} \right) \left. \vphantom{\left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{\text{ey}}} \right\},$$

$$\rho_x^* = \frac{1}{\bar{u}} \cdot \left[ \rho'_{\text{ex}} \cdot \eta_{\text{ex}} \cdot (u_2 - u_1) + \rho_e \cdot u_1 \right] \left. \vphantom{\rho_x^*} \right\}, \quad (4.14)$$

$$\rho_y^* = \frac{1}{\bar{v}} \cdot \left[ \rho'_{\text{ey}} \cdot \eta_{\text{ey}} \cdot (v_2 - v_1) + \rho_e \cdot v_1 \right] \left. \vphantom{\rho_y^*} \right\},$$

$$\rho'_{\text{ex}} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h \rho \int_0^z \frac{dz'}{\eta_x^*} dz, \quad \rho'_{\text{ey}} = \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h \rho \int_0^z \frac{dz'}{\eta_y^*} dz, \quad (4.15)$$

$$\rho''_{\text{ex}} = \frac{1}{h^3} \cdot \int_0^h \rho \int_0^z \frac{z' dz'}{\eta_x^*} dz, \quad \rho''_{\text{ey}} = \frac{1}{h^3} \cdot \int_0^h \rho \int_0^z \frac{z' dz'}{\eta_y^*} dz, \quad (4.16)$$

$$\rho_e = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \rho dz. \quad (4.17)$$

Jednadžba kontinuiteta, koja predstavlja očuvanje mase maziva, glasi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0. \quad (4.18)$$

Integriranjem ove jednadžbe uz štovanje koordinate  $z$  između granica  $0$  i  $h$ , te uporabom općeg rezultata dobiva se

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h f(x, y, z) dz - f(x, y, z) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (4.19)$$

Uz štovanje jednadžbe

$$\rho_2 \cdot w_2 = \rho_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 \cdot u_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \rho_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4.20)$$

dobiva se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho \cdot u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho \cdot v dz = 0 \quad (4.21)$$

ili

$$\frac{\partial(\rho_e \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0. \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (4.11) u jednadžbu (4.22) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ex} \cdot h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ey} \cdot h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \\ = 12 \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho_x^* \cdot \bar{u} \cdot h) + 12 \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\rho_y^* \cdot \bar{v} \cdot h) + 12 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e \cdot h). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Za *Newtonov fluid*  $\eta_x^* = \eta_y^* = \eta$  jednadžba (4.23) je ekvivalentna *Dowsonovoj* modificiranoj *Reynoldsovoj jednadžbi* [63, 64]. Osim toga, uz izotermički pretpostavku, ova jednadžba postaje jednaka onoj za elastohidrodinamičko podmazivanje s uključenim viskozitetom i gustoćom ovisnima o hidrodinamičkom tlaku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho \cdot h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho \cdot h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ = 12 \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot \bar{u} \cdot h) + 12 \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot \bar{v} \cdot h) + 12 \cdot \frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.1.3. POSTUPAK RJEŠAVANJA

Ključni problem kod primjene jednadžbe (4.23) je kako izračunati izraze za ekvivalentne viskozitete  $\eta_x^*$  i  $\eta_y^*$ . Postupak istodobnog računanja izraza za ekvivalentne viskozitete, smična naprezanja i komponente brzina, može se u najkraćim crtama opisati kako slijedi.

Integriranjem jednadžbi (4.2) po koordinati  $z$  dobivaju se izrazi

$$\tau_x = \tau_{x1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \tau_y = \tau_{y1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4.25)$$

gdje su  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$  smična naprezanja na površini ravne podloge [2] na slici 4.3.

Uvrštavanjem jednadžbi (4.25) u jednadžbe (4.1) i nakon integriranja, dobit će se jednadžbe

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h f_x(\tau_{x1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \tau_{y1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \eta) dz &= u_2 - u_1 \\ \int_0^h f_y(\tau_{x1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \tau_{y1} + z \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \eta) dz &= v_2 - v_1 \end{aligned} \right\}. \quad (4.26)$$

Jednadžbe (4.26) se upotrebljavaju za određivanje  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$ . Kada se u analizu uvede i reološki model (npr. *Eyringov viskozni model*, tablica 3.2 pod 3), tada postoje samo dvije nepoznate

varijable u jednadžbi (4.26):  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$ . Kada se u analizu uvede i viskoelastični ili viskoelastoplastični model, tada u istoj jednadžbi postoje, osim nepoznatih varijabli  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$ , i nepoznate komponente  $u$  i  $v$ . Međutim, ako se aktualne vrijednosti  $u$  i  $v$  odrede proračunom temperature i potom uvrste u jednadžbe (4.26), tada  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$  ponovno postaju jedine varijable.

Za određivanje raspodjele  $\eta_x^*$  i  $\eta_y^*$  kroz mazivi film, potrebno je pretpostaviti da je proračunsko područje (dijelom osi  $x$ ) sastavljeno od niza ekvidistantnih čvorova, odnosno

$$0 = z_1 < z_2 < z_3 \dots < z_{n-1} < z_n = h.$$

Sam numerički postupak se odvija sljedećim redoslijedom:

1. Vrijednosti  $\tau_{x1}$  i  $\tau_{y1}$  se izračunavaju rješavanjem jednadžbi (4.26);
2. Sve vrijednosti  $\tau_{xi}$  i  $\tau_{yi}$  (za  $i=2,3,4, \dots, n$ ) se izračunavaju uporabom jednadžbi (4.25);
3. Sve vrijednosti  $(\partial u / \partial z)_i$  i  $(\partial v / \partial z)_i$  (za  $i=1,2,3, \dots, n$ ) se izračunavaju pomoću jednadžbi (4.1);
4. Sve vrijednosti  $u_i$  i  $v_i$  (za  $i=1,2,3, \dots, n$ ) se izračunavaju pomoću sljedećih jednadžbi:

$$u = u_1 + \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad v = v_1 + \int_0^z \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (4.27)$$

5. Sve vrijednosti  $\eta_{xi}^*$  i  $\eta_{yi}^*$  (za  $i=1,2,3, \dots, n$ ) se izračunavaju pomoću jednadžbi (4.3).

Nova poopćena *Reynoldsova jednadžba* (4.23) može se upotrijebiti i za proračunavanje prijelaznog termoelastohidrodinamičkog podmazivanja, no u nastavku ovog rada biti će prikazano samo rješenje za najjednostavniji stacionarni problem dodira po crti (cilindar - ravna horizontalna podloga) uz termoelastohidrodinamičko podmazivanje. Uzimajući u obzir samo utjecaj klina, jednadžba (4.23) se može reducirati u jednostavni oblik (uz  $u_1=u$  i  $u_2=0 \rightarrow \bar{u} = u/2$ )

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ex} \cdot h^3 \cdot \frac{dp}{dx} \right] = 6 \cdot u \cdot \frac{d(\rho_x^* \cdot h)}{dx}. \quad (4.28)$$

Za računanje viskoziteta može se upotrijebiti *Roelandsova formula*, koju je *Houpert* preradio kako bi i djelovanje temperature bilo uzeto u obzir [75, 76], tako da izraz (4.29) ima oblik:

$$\eta = \eta_0 \exp \left\{ (\ln \eta_0 + 9.67) \cdot \left[ -1 + (1 + 5,1 \cdot 10^{-9} \cdot p)^r \right] + a_1 \cdot T_0 \cdot (1 - T) \right\}. \quad (4.29)$$

Gustoća maziva je također promjenjiva kroz mazivi film (dijelom i poprijeko), pa se za njeno izračunavanje može upotrijebiti izraz prema [27, 73, 76]

$$\rho = \rho_0 \cdot \left( 1 + \frac{0,6 \cdot 10^{-9} \cdot p}{1 + 1,7 \cdot 10^{-9} \cdot p} \right) \cdot [1 - a_2 \cdot T_0 \cdot (T - 1)]. \quad (4.30)$$

U jednadžbi (4.29) i jednadžbi (4.30) vrijednosti s indeksom 0 su vrijednosti kod temperature okoline.

Debljina mazivog filma se izračunava pomoću izraza (3.1) i (3.2), odnosno u bezdimenzijskom obliku pomoću izraza (3.31).

Jednadžba energije u koju je uključena temperatura u mazivom filmu može se napisati u obliku

$$\rho \cdot c_m \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - k_m \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{T}{\rho} \cdot u \cdot \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{dp}{dx} = \tau_x \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.31)$$

uz granične uvjete:

$$T_1(x) = \theta_1 \cdot \int_{x_{ul}}^{x_{iz}} \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=h} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')}} , \quad T_2(x) = \theta_2 \cdot \int_{x_{ul}}^{x_{iz}} \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')}} , \quad (4.32)$$

gdje su  $\theta_1$  i  $\theta_2$  bezdimenzijski faktori temperature prema [77, 78]. Ovi faktori su ovisni o *poluširini Hertzove deformacije*  $b$ , koeficijentu toplinske provodljivosti maziva  $k_m$  tijela u dodiru ( $k_1$  i  $k_2$ ), njihovim specifičnim toplotinama ( $c_1$  i  $c_2$ ), ekvivalentnom polumjeru zakrivljenosti  $R$ , gustoćama tijela ( $\rho_1$  i  $\rho_2$ ) i brzini klizanja  $u$ .

#### 4.1.4. PREDODŽBA REZULTATA

Utjecaj reološkog djelovanja promotrit će se na pet reoloških modela navedenih u tablici 3.1 pod 1, 3, 4, 5 i 6. Za daljnju analizu potrebno je u matematičkim opisima reoloških modela u tablici 3.2  $\tau$  zamijeniti s  $\tau_x$ . Ako se nakon toga upotrijebi prva od jednadžbi (4.26), uz štovanje smičnog naprezanja na ravnoj horizontalnoj podlozi [2] (slika 4.3), dobit će se sljedeće jednadžbe:

$$1. \text{ Model} \quad \tau_{x1} = \frac{u - \Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (4.33)$$

$$2. \text{ Model} \quad \tau_{x1} = \tau_0 \cdot \ln \frac{[u^2 + (\Gamma_3^2 - \Gamma_4^2)]^{0,5} - u}{\Gamma_3 + \Gamma_4} \quad (4.34)$$

$$3. \text{ Model} \quad \tau_{x1} = \frac{\Gamma_5 - \Gamma_6 - \Gamma_1 - u}{\Gamma_2 + \Gamma_7} \quad (4.35)$$

$$4. \text{ Model} \quad \Gamma_3 \cdot \sinh\left(\frac{\tau_{x1}}{\tau_0}\right) + \Gamma_4 \cdot \cosh\left(\frac{\tau_{x1}}{\tau_0}\right) + \Gamma_8 \cdot \left(\frac{\tau_{x1}}{\tau_0}\right) + \Gamma_9 = 0 \quad (4.36)$$

$$5. \text{ Model: } \int_0^h \frac{\tau_L}{\eta} \cdot \ln \left( 1 - \frac{\tau_{x1}}{\tau_L} - \frac{z}{\tau_L} \cdot \frac{dp}{dx} \right) dz - u = 0 \quad (4.37)$$

U jednadžbama (4.33) do (4.37), funkcije  $\Gamma_1$  do  $\Gamma_9$  definirane su kao:

$$\Gamma_1 = \frac{dp}{dx} \cdot \int_0^h \frac{z dz}{\eta}, \quad (4.38)$$

$$\Gamma_2 = \int_0^h \frac{dz}{\eta}, \quad (4.39)$$

$$\Gamma_3 = \int_0^h \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \cosh \left( \frac{z}{\tau_0} \cdot \frac{dp}{dx} \right) dz, \quad (4.40)$$

$$\Gamma_4 = \int_0^h \frac{\tau_0}{\eta} \cdot \sinh \left( \frac{z}{\tau_0} \cdot \frac{dp}{dx} \right) dz, \quad (4.41)$$

$$\Gamma_5 \equiv \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_0^h \frac{u \cdot \hat{\tau}_x}{G} dz, \quad (4.42)$$

$$\Gamma_6 \equiv \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \int_0^h \frac{u \cdot z}{G} dz, \quad (4.43)$$

$$\Gamma_7 \equiv \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_0^h \frac{u}{G} dz, \quad (4.44)$$

$$\Gamma_8 \equiv \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_0^h \frac{\tau_0 \cdot u}{G} dz, \quad (4.45)$$

$$\Gamma_9 = u + \Gamma_6 - \Gamma_5, \quad (4.46)$$

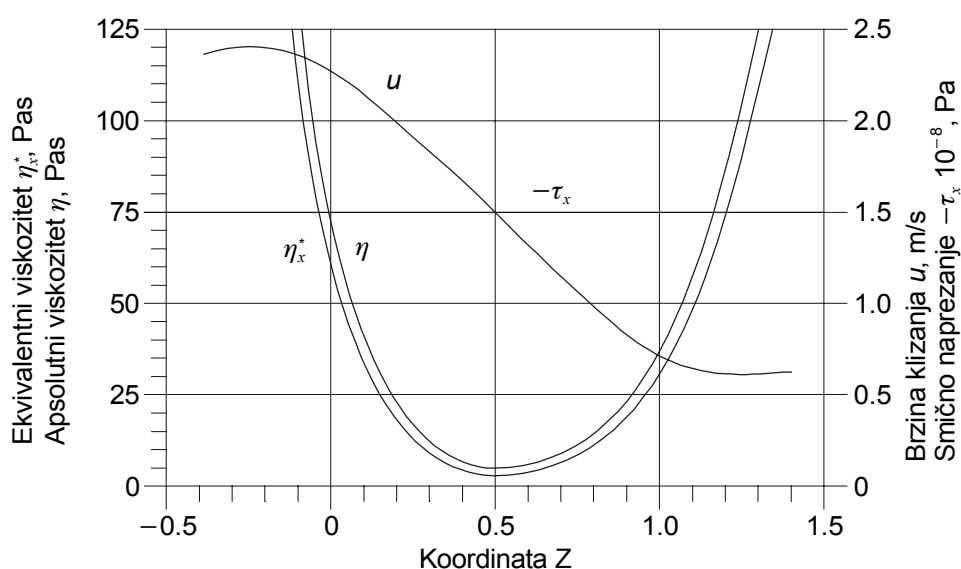
gdje je  $\hat{\tau}_x$  u jednadžbi (4.42) smično naprezanje o točki  $(x-\Delta x)$ . Za prva tri odabrana reološka modela vrijednosti za  $\tau_{x1}$  mogu se neposredno izračunati iz jednadžbe (4.33), (4.34) i (4.35), a za preostala dva vrijednosti za  $\tau_{x1}$  mogu se izračunati numeričkim rješavanjem jednadžbi (4.36) i (4.37).

Numerički model za rješavanje energije (4.31) skoro u potpunosti slijedi model *Chenga* [77], s tim što je modificiran zbog ugrađenih reoloških modela i različitosti upotrijebljene jednadžbe energije. Gore opisani iteracijski postupak za dobivanje raspodjele tlaka i debljine mazivog filma kod elastohidrodinamički podmazivanih dodira po crti [32] također je modificiran zbog uvođenja toplinskog i *ne-Newtonovog* djelovanja.

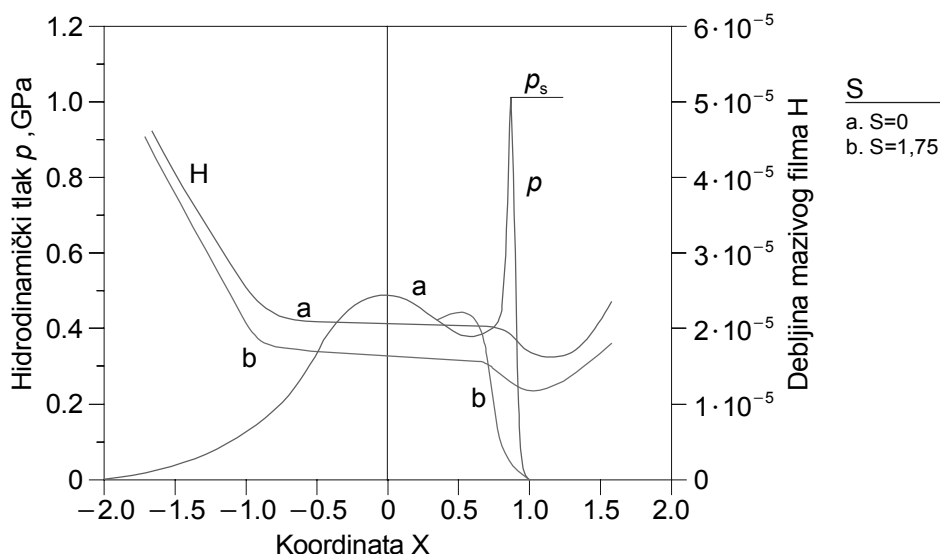
Houpert [75] je ustvrdio da uporabom *Roelandsove formule* za viskozitet (3.12) odnosno (4.29), modul smika  $G$  i *Eyringovo smično naprežanje*  $\tau_0$  mogu biti za jedan red veličina veći od onih dobivenih po *Barusovoj formuli* (3.11), te da se *Eyringovo smično naprežanje*  $\tau_0$  može razmatrati neovisno o postojećoj temperaturi i tlaku. Zbog toga će u ovom dijelu rada vrijednosti za  $G$  i  $\tau_0$  biti konstantne ( $G=2.0 \cdot 10^{18}$  Pa,  $\tau_0=1.8 \cdot 10^7$  Pa).

Prema *Bair - Winerovom modelu* (nelinearni viskoplastični reološki model naveden pod 6 u tablici 3.2), granično smično naprežanje  $\tau_L$  ovisno je o temperaturi i tlaku. Međutim, u dostupnoj literaturi nisu nađeni podaci usporedivi s podacima dobivenim za viskozitet po *Roelandsovoj formuli*, pa će se zbog toga upotrijebiti podaci *Wanga i Zhanga* [71]. Podaci koji su potrebni za analizu ovog problema uzeti su prema preporuci [65, 71, 75]:  $R=0.05$  m,  $E=2.28 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\eta_0=0.08$  Pas,  $r=0.6$ ,  $a_1=0.0466$  K<sup>-1</sup>,  $a_2=6.5 \cdot 10^{-4}$  K<sup>-1</sup>,  $k=0.14$  W/mK,  $c_m=2.0 \cdot 10^3$  J/kgK,  $k_1=k_2=46$  W/mK,  $c_1=c_2=470$  J/kgK,  $\rho_0=890$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_1=\rho_2=7850$  kg/m<sup>3</sup> i  $T_0=303$  K (30°C). Bezdimenzijski proračunski parametri uzeti za predodžbu su : parametar opterećenja  $F$ , parametar brzine  $U$  i omjer klizanje-valjanje  $S$  (ali samo za usporedbu, jer se u konkretnom problemu radi o čistom klizanju za koje je  $S=2$ ).

Za *Johnson - Tevaarwerkov* reološki model (tablica 3.2 pod 5) promjena viskoziteta  $\eta$ , ekvivalentnog viskoziteta  $\eta_x^*$ , brzine klizanja  $u$  i negativnog smičnog naprežanja  $\tau_x$  u središtu dodira, predloženi su na slici 4.4. Razlika između  $\eta$  i  $\eta_x^*$  općenito je prilično mala, što se može objasniti uvođenjem izraza za viskozitet (4.29). Budući da je gradijent tlaka ( $dp/dx$ ) neovisan o koordinati  $z$ , iz jednadžbe (4.2) slijedi da je i  $\tau_x$  također linearno uz štovanje  $z$ .

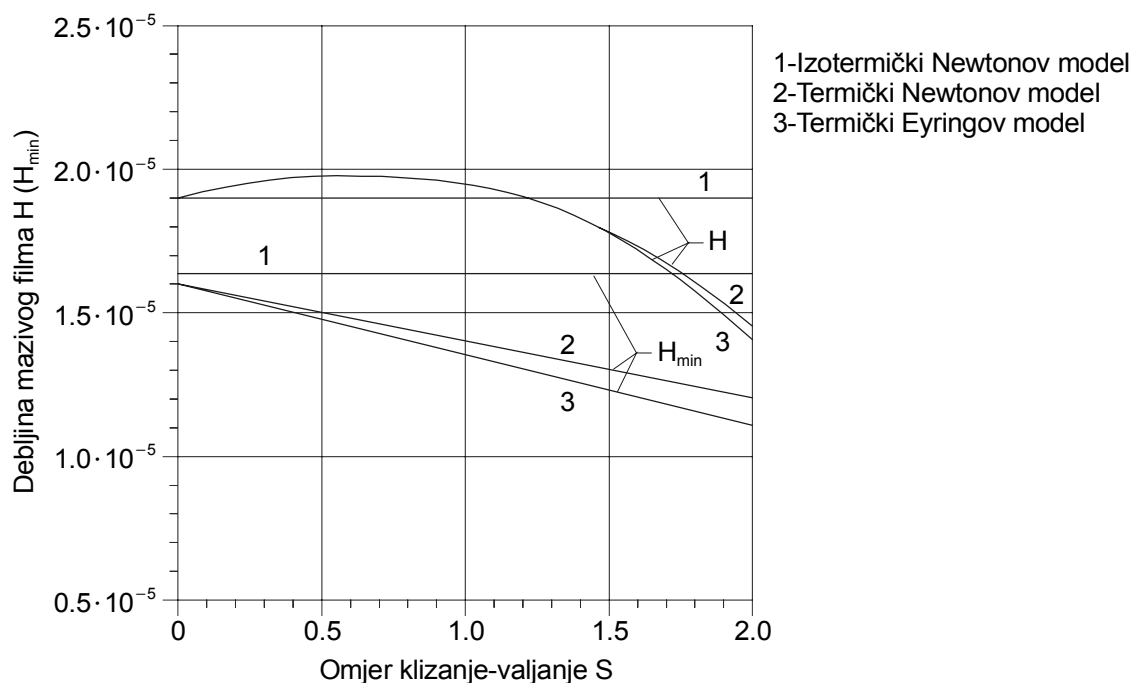


Slika 4.4. Promjena  $\eta$ ,  $\eta_x^*$ ,  $u$  i  $-\tau_x$  kroz mazivi film ( $0 \leq z \leq h$ ) u središtu dodira ( $x=0$ ) za  $U=1 \cdot 10^{-11}$ ,  $F=3.0 \cdot 10^{-5}$  i  $S=1$  (gdje je  $Z=z/h$ ) [32]



Slika 4.5. Promjena tlaka i debljine mazivog filma za  $U=1 \cdot 10^{-11}$  i  $F=3.0 \cdot 10^{-5}$ , te dvije granične vrijednosti omjera  $S$  [32]

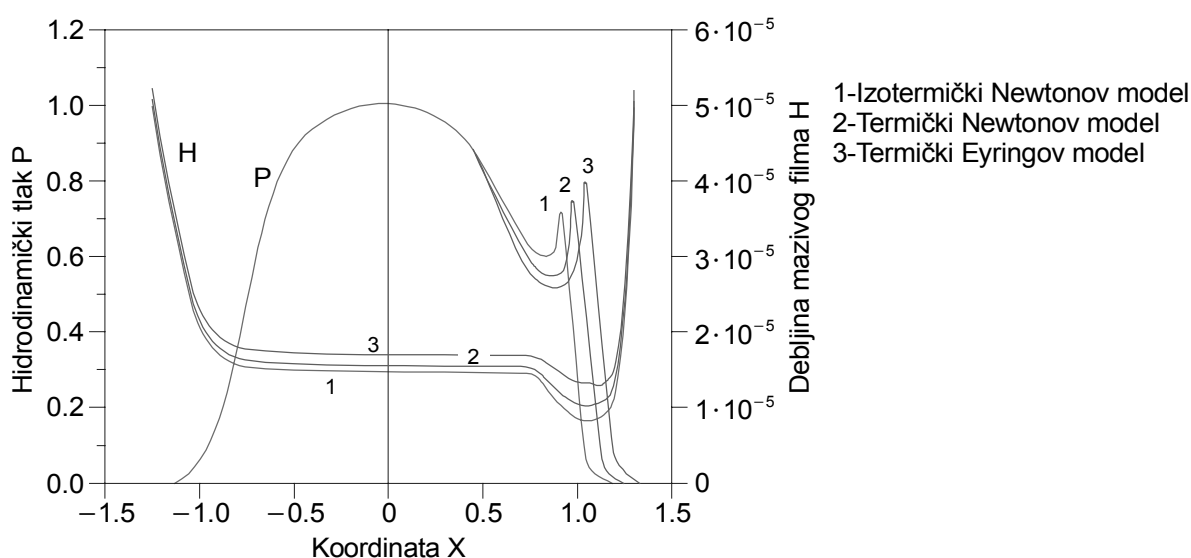
Na slici 4.5 predložena je raspodjela hidrodinamičkog tlaka  $p$  i debljina mazivog filma  $H$  dobivena uporabom *Johnson - Tevaarwerkovog* modela (5. Model), uz dvije vrijednosti omjera klizanja-valjanja ( $S=0$  za čisto valjanje i  $S=1,75$ ). Očigledno je da većem omjeru  $S$  odgovaraju smanjenje debljine mazivog filma, opadanje šiljka tlaka i njegovo pomicanje prema središtu dodira.



Slika 4.6. Promjena debljine mazivog filma u središtu dodira i minimalne debljine mazivog filma ovisno o omjeru  $S$ , za  $U=1 \cdot 10^{-11}$  i  $F=6.0 \cdot 10^{-5}$  (gdje je  $H=h/R$ ,  $H_{min}=h_{min}/R$ , 1-Izotermički Newtonov model, 2-Termički Newtonov model, 3-Termički Eyringov model) [32]

Na slici 4.6 predočena je debljina mazivog filma  $H$  u središtu dodira i minimalna debljina mazivog filma  $H_{\min}$  u bezdimenzijskom obliku ovisno o omjeru  $S$ . Vrijednosti su dobivene uporabom *Eyringovog* i *Newtonovog reološkog modela*, a dana je i usporedba s vrijednostima za izotermički *Newtonov model*. Iz predodžbe se može zaključiti da *ne-Newtonovo* ponašanje maziva nema veliki utjecaj na debljinu mazivog filma. Zavisnost između debljine mazivog filma i omjera  $S$  gotovo je linearna (termički Newtonov i Eyringov model).

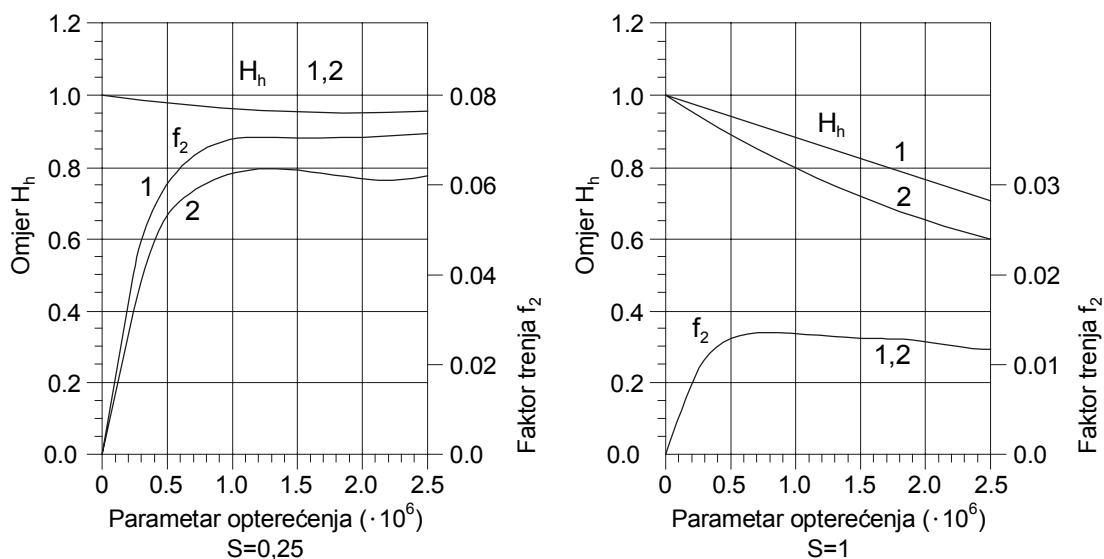
Predodžba na slici 4.7 predstavlja usporedbu raspodjele hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma visoko opterećenog dodira po crti, za *izotermički Newtonov*, za *toplinski (termički) Newtonov* i *toplinski (termički) Eyringov reološki model*. Ovaj posljednji daje najniži šiljak tlaka i najmanju debljinu mazivog filma, ali stvarne razlike su zanemarive.



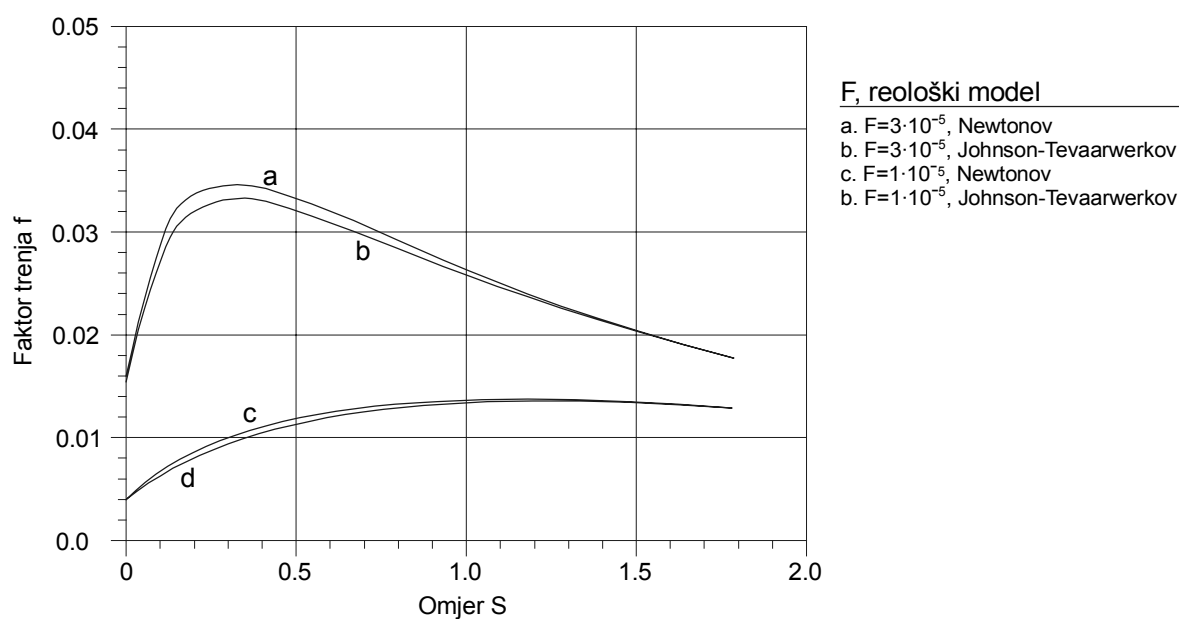
**Slika 4.7. Raspodjela hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma**  
za  $F=2.4 \cdot 10^{-4}$  ( $p_H=1.42$  Gpa),  $U=1 \cdot 10^{-11}$  i  $S=1$  (gdje je  $H=h/R$ ,  $X=x/b$ ,  $P=p/p_H$ ,  
1-Termički Eyringov model, 2-Termički Newtonov model i 3-Izotermički Newtonov model) [32]

Slika 4.8 predočava usporedbu promjene parametra  $H_h$  (omjer termičke i izotermičke minimalne debljine mazivog filma) i faktora trenja  $f_2$  (podloge) ovisno o parametru opterećenja  $F$  i omjeru  $S$ . Iz predodžbe slijedi da za veći omjer  $S$  *ne-Newtonovo* ponašanje maziva značajno djeluje na smanjenje faktora trenja  $f_2$  kao i na minimalnu debljinu mazivog filma (slika 4.8.b).

Analiza predodžbe ovisnosti faktora trenja  $f_2$  na slici 4.9 pokazuje da kod većih omjera  $S$  faktor trenja  $f_2$  opada, međutim beznačajno ovisi o uporabljenom reološkom modelu i visini opterećenja. Za niže vrijednosti  $G$  i  $\tau_0$  ova je zavisnost izraženija, ali i dalje zanemariva.

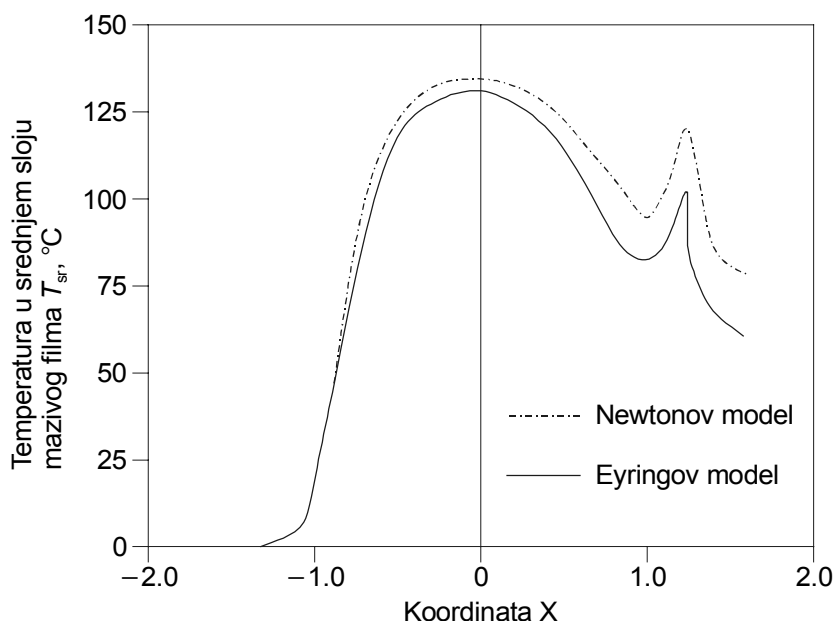


Slika 4.8. Promjena omjera  $H_h$  i faktora trenja  $f_2$  ovisno o opterećenju  $F$  i omjeru  $S$  za  $U=1 \cdot 10^{-11}$  (gdje je 1 - Newtonov model, a 2 - Eyringov model) [32]



Slika 4.9. Promjena faktora trenja  $f_2$  ovisno o omjeru  $S$  za  $U=1 \cdot 10^{-11}$ , različite parametre  $F$  i dva reološka modela [32]

Na slici 4.10 predložena je ovisnost temperature u srednjem sloju mazivog filma  $T_{sr}$  kod vrlo opterećenog dodira. Usprkos velikom opterećenju i omjeru  $S$ , *ne-Newtonovo* ponašanje maziva nema niti značajan, a niti dominirajući utjecaj na porast temperature u mazivom filmu.



Slika 4.10. Promjena temperature u srednjem sloju mazivog filma  $T_{sr}$  za  $F=2.4 \cdot 10^{-4}$ ,  $U=1 \cdot 10^{-11}$  i  $S=1$  [32]

Istraživanja *Murcha* i *Wilsona* [79] su pokazala da temperatura značajno djeluje na debljinu mazivog filma, posebice kod visokih brzina klizanja. *Sadeghi* i *Sui* [80] su u svojim istraživanjima potvrdili njihove rezultate i zaključkom sugerirali obaveznost uzimanja temperature u razmatranje kod elastohidrodinamički podmazivanih dodira. Na temelju njihovih istraživanja mogu se izdvojiti tri već pojašnjena bezdimenzijska proračunska parametra, koji značajno djeluju na performanse visoko opterećenih podmazivanih dodira po crti. Radi se o parametru opterećenja  $F$ , parametru brzine  $U$  i parametru materijala  $G$ . U svojoj analizi oni su promatrali i utjecaj omjera  $S$ , no pošto se u konkretnom primjeru radi o čistom klizanju, usporedbom klizanja glede valjanja dobit će se zorna predodžba djelovanja smika (klizanja) na porast temperature u mazivom filmu. U novije vrijeme promatra se djelovanje navedenih parametara na parametre performansi podmazivanog dodira kao sto su šiljak tlaka  $P_s$ , položaj šiljka tlaka  $X_s$ , minimalna debljina mazivog filma  $H_{min}$  i maksimalna temperatura u mazivom filmu  $T_{max}$ . Prije nego se razmotri ovo djelovanje prikazat će se nešto jednostavniji postupak rješavanja problema termoelastohidrodinamičkog podmazivanja dodira po crti, kada se *ne-Newtonovo* ponašanje maziva ne uzima u obzir.

Integrirana *Reynoldsova* *jednadžba* s ugrađenim toplinskim djelovanjem i svim drugim pretpostavkama, prilagodbama i graničnim uvjetima, može se prema [80] napisati u sljedećem bezdimenzijskom obliku:

$$H_i^3 \cdot \left( \frac{dP}{dX} \right)_i - \frac{K_1 \cdot U_1}{(J_2)_i} \cdot [H_i \cdot (J_3)_i - H_e \cdot (J_3)_e] - \frac{K_1 \cdot U_d}{(J_2)_i} \left[ H_i \cdot \frac{(J_1)_i}{(\bar{\eta}_{e0})_i} - H_e \cdot \frac{(J_1)_e}{(\bar{\eta}_{e0})_e} \right] = 0 \quad (4.47)$$

koji se može zamijeniti funkcijom  $f_i = 0$ , uz granične uvjete:

$$\int_{X_{ul}}^{X_{iz}} P dX = \frac{\pi}{2}, \quad P=0 \quad \text{za} \quad X=X_{ul} \\ P = \frac{dP}{dX} = 0 \quad \text{za} \quad X=X_{iz}, \quad (4.48)$$

gdje je:

- $H_i$  – bezdimenzijska debljina mazivog filma u nekom čvoru i prema izrazu (3.31),
- $H_e$  – bezdimenzijska debljina mazivog filma za  $dP/dX=0$ ,
- $K_1$  – bezdimenzijska konstanta,
- $J_1, J_2, J_3$  – bezdimenzijski prvi, drugi i treći integral,
- $U^*$  – bezdimenzijski parametar brzine.

$$K_1 = \frac{\pi^2 \cdot U^*}{16 \cdot F^2}, \quad J_1 = \int_0^1 \bar{\rho} \cdot \left( \int_0^Z \frac{dZ}{\bar{\eta}} \right) dZ, \quad J_2 = \frac{\bar{\eta}_{e1}}{\bar{\eta}_{e0}} \cdot J_1 - \int_0^1 \bar{\rho} \cdot \left( \int_0^Z \frac{Z}{\bar{\eta}} dZ \right) dZ \\ J_3 = \int_0^1 \bar{\rho} dZ, \quad \bar{\eta}_{e0} = \int_0^1 \frac{dZ}{\bar{\eta}}, \quad \bar{\eta}_{e1} = \int_0^1 \frac{Z}{\bar{\eta}} dZ, \quad U^* = \frac{\eta_0 \cdot \bar{u}}{E' \cdot R}.$$

Jednadžba energije u koju je uključena temperatura u mazivom filmu, može se prema [78] napisati u bezdimenzijskom obliku na sljedeći način

$$K_2^2 \frac{\partial}{\partial X} \left( c_m \cdot \bar{\rho} \cdot U \cdot T - \bar{k} \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z_1} \left( K_2 \cdot \bar{\rho} \cdot V \cdot T - \bar{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial Z_1} \right) = \bar{\eta} \left( \frac{\partial U}{\partial Z_1} \right)^2 + \bar{a}_2 \cdot T \cdot U \frac{dP}{dX} \quad (4.49)$$

S graničnim uvjetima (4.32) uz zamjenu koordinata  $x, x', x_{ul}, x_{iz}$  i  $z$  s koordinatama  $X, X', X_{ul}, X_{iz}$  i  $Z$ , odnosno  $dx'$  s  $dX'$ .

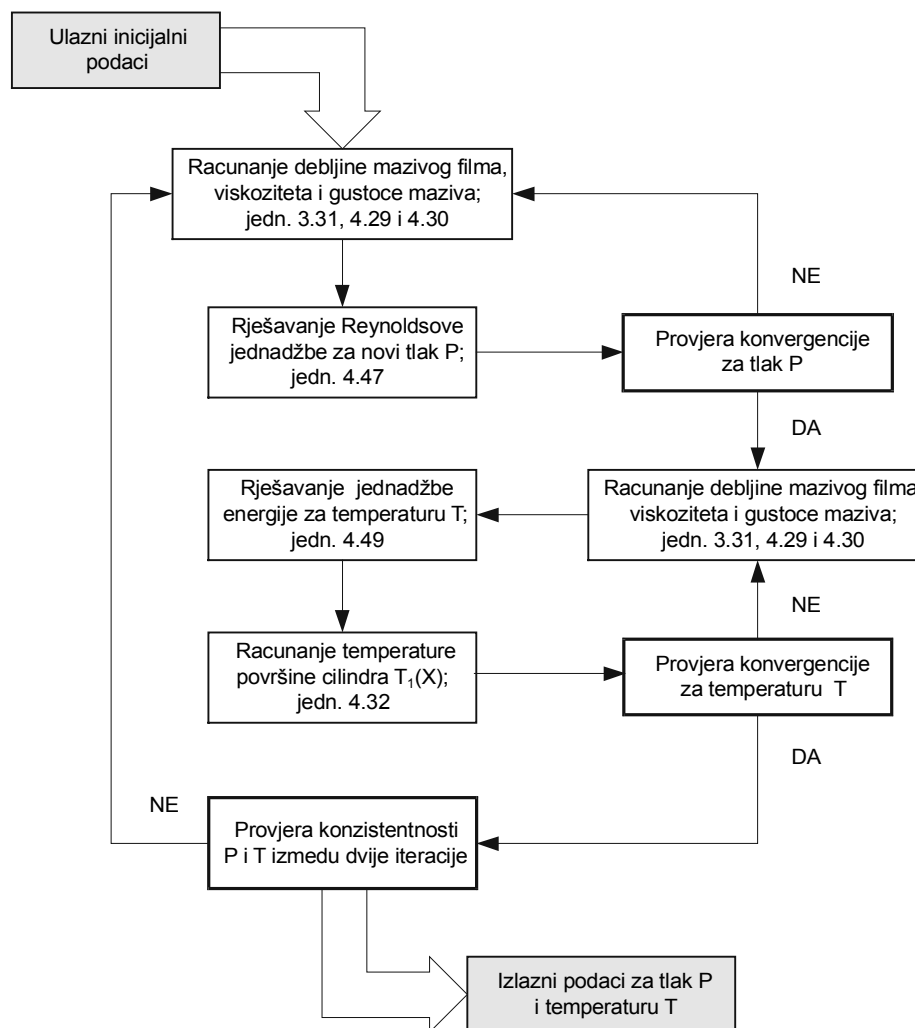
Pojedine oznake u jednadžbi (4.49) imaju sljedeće značenje:

$$K_2 = \frac{\bar{h}}{b}, \quad \bar{k} = \frac{k_m}{\rho_0 \cdot \bar{u} \cdot b}, \quad Z_1 = \frac{z}{h}, \quad X = \frac{x}{b}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_0 \cdot \bar{u}}{\rho_0 \cdot T_0 \cdot b}, \quad \bar{a}_2 = \frac{p_H \cdot K_2^2 \cdot a_2}{\rho_0}.$$

$Z_1$  je bezdimenzijska dubina unutar mazivog filma, a  $X$  je bezdimenzijska dubina u smjeru kotrljanja. Bezdimenzijski faktori temperature  $\theta_1$  i  $\theta_2$  se mogu uzeti približno jednaki ( $\theta_1 = \theta_2$ ), zbog toga što za  $u_2=0$   $\theta_2 \rightarrow \infty$ , pa i granica  $T_2(X) \rightarrow \infty$ . Dakle, prema [73, 77, 78, 80] ovaj faktor se može izračunati prema izrazu

$$\theta_1 \approx \theta_2 = \frac{k_m}{K_2 \cdot (\pi \cdot \rho \cdot c \cdot u \cdot k_t \cdot b)^{0.5}}, \quad (4.50)$$

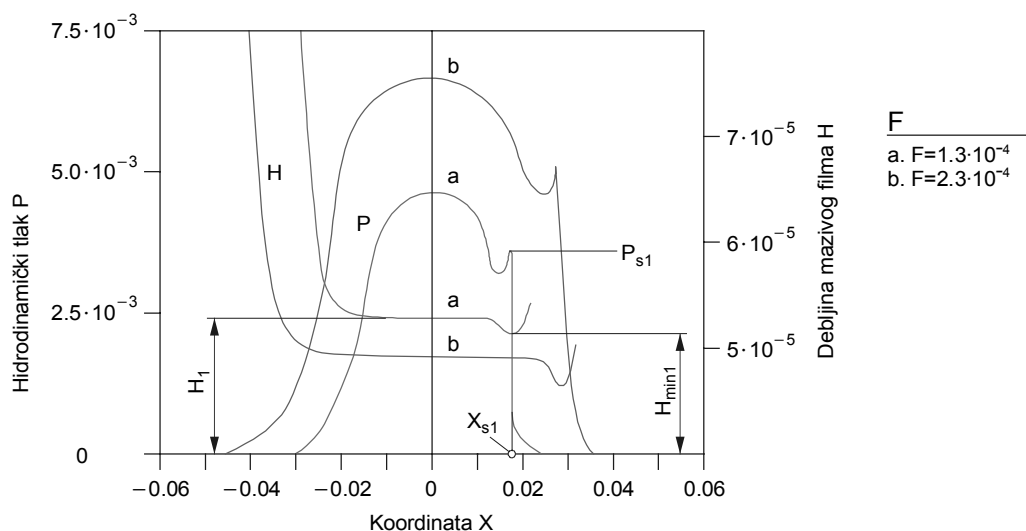
gdje je  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ,  $c = c_1 = c_2$ ,  $u = u_1$ ,  $k_t = k_1 = k_2$ .



Slika 4.11. Shematska predodžba iteracijskog modela za proračun raspodjele tlaka, debljine mazivog filma i temperature u njemu [80]

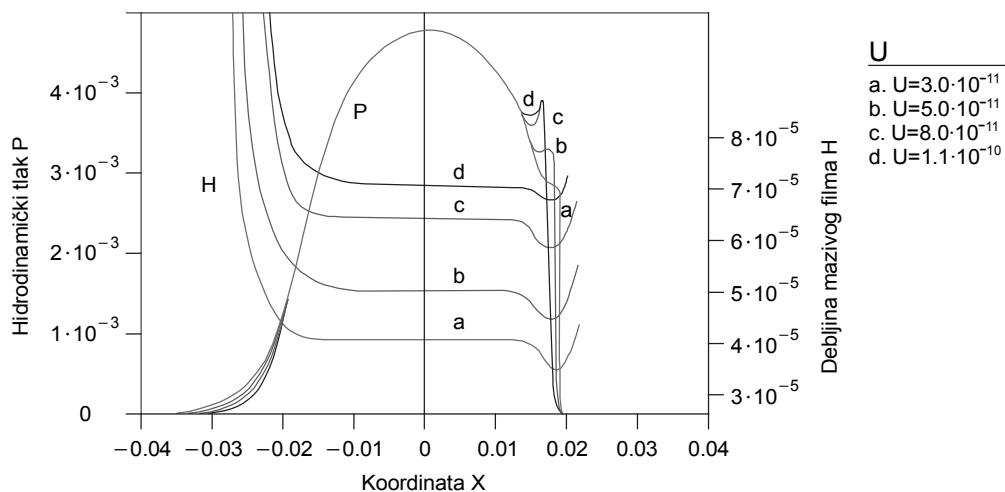
Za proračun viskoziteta maziva ovisnog o tlaku i temperaturi upotrebljava se *Roelandsova formula* koju je modificirao *Houpert* [75] u oblik definiran izrazom (4.29), a za gustoću maziva upotrebljava se modificirana *Dowson - Higginsova formula* definirana izrazom (4.30). Da bi se dobila odgovarajuća numerička rješenja treba istodobno rješavati jednadžbe (4.47), (3.31) i (4.49). Za ovo rješavanje podesan je iteracijski *Newton - Raphsonov model* prema [80, 81], koji je modificiran za konkretan problem termoelastohidrodinamičkog podmazivanja dodira po crti cilindra i ravne horizontalne podloge, prikazan na slici 3.3. Shematska predodžba ovog iteracijskog modela dana je na slici 4.11.

Ulazni inicijalni podaci uzimaju se za izotermičko stanje i s njima se, pomoću gornjeg modela, izračuna hidrodinamički tlak i debljina filma. Isti podaci se upotrebljavaju i za određivanje inicijalnog polja temperature unutar mazivog filma. Djelovanje temperature je ugrađeno u izraze za viskozitet i gustoću maziva, pa se iteracija dalje odvija po modelu koji je shematski predložen na slici 4.11. Iteracijski postupak traje sve dok temperatura, tlak i debljina mazivog filma u dvije uzastopne iteracije ne postignu očekivano malu razliku.



Slika 4.12. Ovisnost hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma o opterećenju  $F$  za  $U=7.3 \cdot 10^{-11}$  i  $G=3500$  [80]

Na slici 4.12 predložena je uobičajena ovisnost bezdimenzijskog hidrodinamičkog tlaka i bezdimenzijske debljine mazivog filma o različitim parametrima opterećenja, kod konstantnog parametra brzine i konstantnog parametra materijala ( $U=7.3 \cdot 10^{-11}$ ,  $G=3500$ ) u području dodira. Očigledno je da porast opterećenja  $F$  uzrokuje značajan porast hidrodinamičkog tlaka i pad debljine mazivog filma.



Slika 4.13. Ovisnost hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma o brzini klizanja  $U$  za  $F=1.3 \cdot 10^{-4}$  i  $G=3500$  [80]

Na slici 4.13 predložena je ovisnost bezdimenzijskog hidrodinamičkog tlaka i bezdimenzijske debljine mazivog filma o različitim parametrima brzine, kod konstantnog parametra opterećenja i konstantnog parametra materijala ( $F=1.3 \cdot 10^{-4}$ ,  $G=3500$ ) u području dodira. Iz predodžbe se zaključuje da povećanje brzine uzrokuje pomicanje šiljka tlaka ka središtu dodira, te da značajno djeluje na povećanje debljine mazivog filma.

#### 4.1.5. PRIJEDLOG POJEDNOSTAVLJENIH IZRAZA ZA PRORAČUNSKE BEZDIMENZIJSKE PARAMETRE

Umjesto složenih proračuna raspodjele hidrodinamičkog tlaka i debljine mazivog filma, u zadnje vrijeme se upotrebljavaju jednostavni izrazi eksponencijalnog oblika za određivanje amplitude i položaja šiljka tlaka ( $P_s$  i  $X_s$  na slici 4.12), minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$ , debljine mazivog filma u središtu dodira  $H$ , te maksimalne temperature u mazivom filmu  $T_{\max}$  kao funkcije radnih parametara ( $F$ ,  $U$  i  $G$ ). Po uzoru na *Grubina* [29] ove izraze uspješno su razvili i testirali *Sadeghi* i *Sui* [80]. Po uzoru na njihove izraze upotrebom eksponencijalne krivulje najmanjih kvadrata [36, 81] dobiveni su slični izrazi za čisto klizanje, tako da se za amplitudu šiljka tlaka može upotrebljavati izraz

$$P_s = 119 \cdot F^{0.174} \cdot U^{0.202} \cdot G^{-0.5} \quad (4.51)$$

Amplituda šiljka tlaka je vrlo značajan podatak budući da na udaljenosti  $X_s$  od središta dodira uzrokuje koncentraciju naprezanja kao i smanjenje debljine mazivog filma.

Položaj šiljka tlaka može se izračunati prema sličnom izrazu

$$X_s = 0.449 \cdot F^{0.598} \cdot U^{-0.033} \cdot G^{0.139} \quad (4.52)$$

Minimalna debljina mazivog filma i debljina mazivog filma u središtu dodira mogu se izračunati prema sljedećim izrazima:

$$H_{\min} = 8.78 \cdot 10^{-3} \cdot F^{-0.175} \cdot U^{0.624} \cdot G^{0.949} \quad (4.53)$$

$$H = 3.13 \cdot 10^2 \cdot F^{-0.141} \cdot U^{0.633} \cdot G^{0.881} \quad (4.54)$$

Maksimalna temperatura u mazivom filmu određuje se prema izrazu

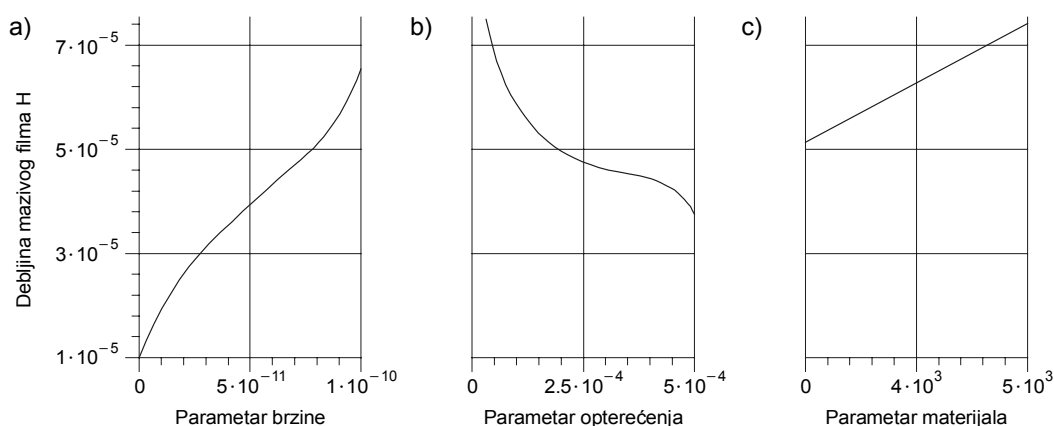
$$T_{\max} = 1.75 \cdot 10^{-5} \cdot F^{0.695} \cdot U^{0.408} \cdot G^{3.482} \quad (4.55)$$

Svi parametri u izrazima (4.51) do (4.55) su bezdimenzijski, a greške koje mogu nastati kod uporabe ovih izraza su ispod 8 %.

Jedan vrlo značajan produkt je  $\bar{p} \cdot H_e$ , koji se ovisno o bezdimenzijskim radnim parametrima ( $F$ ,  $U$  i  $G$ ) može izračunati pomoću izraza

$$\bar{p} \cdot H_e = 0.103 \cdot F^{-0.133} \cdot U^{0.623} \cdot G^{0.735} \quad (4.56)$$

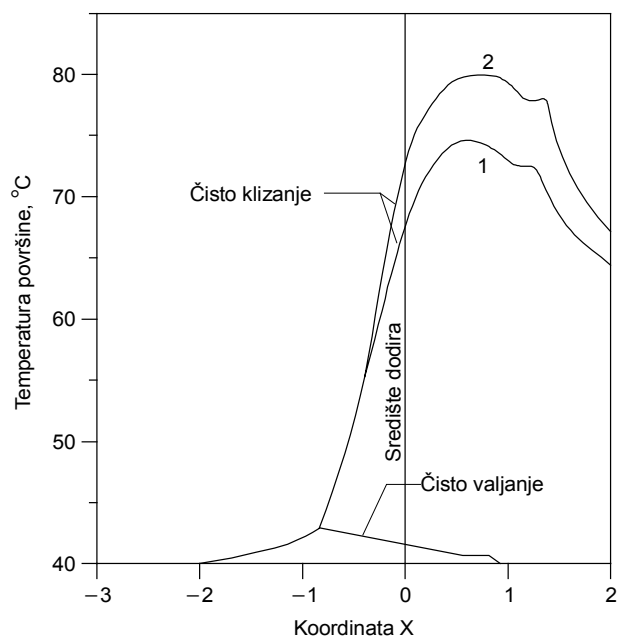
Poznavanje ovog produkta je vrlo značajno prilikom rješavanja problema termoelastohidrodinamičkog podmazivanja. Naime, integrirani oblik *Reynoldsove jednadžbe*  $f_i=0$  (4.47) zahtjeva inicijalnu pretpostavku  $\bar{p} \cdot H_e$ . Izraz (4.6) daje vrlo dobru inicijalnu pretpostavku za brzo konvergiranje numeričkih modela.



**Slika 4.14. Ovisnost minimalne debljine mazivog filma o parametru brzine  $U$  (a), parametru opterećenja  $F$  (b) i parametru materijala  $G$  (c)**

Na slici 4.14 dana je predodžba ovisnosti minimalne debljine mazivog filma o radnim parametrima. Predodžba je neka vrsta zaključka svega do sada rečenog i pokazuje da se rastom brzine klizanja  $U$  povećava debljina mazivog filma  $H_{\min}$  (slika 4.14.a), rastom opterećenja  $F$  ta se debljina smanjuje (slika 4.14.b), a rastom parametra materijala  $G$  (uporabom materijala s većim vrijednostima modula elastičnosti  $E$ ) opet povećava (slika 4.14.c). Očigledno je da su ove promjene vrlo velike i zbog toga nezanemarive.

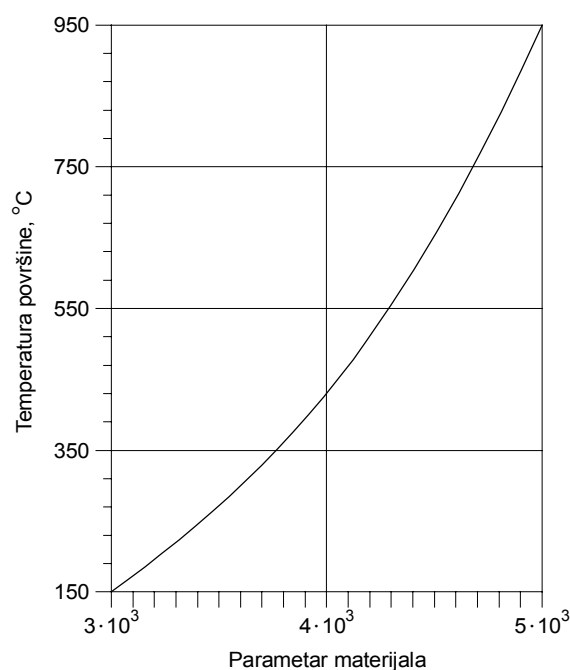
Na slici 4.15 dana je raspodjela temperature na površini kliznog dodira za dva različita parametra brzine klizanja (1. -  $U=7.3 \cdot 10^{-11}$  i 2. -  $U=5.5 \cdot 10^{-11}$ ) i parametra opterećenja  $F=1.3 \cdot 10^{-4}$ . Pri manjim brzinama bilježi se porast temperature na površini dodira, što se tumači kao posljedica duljeg zadržavanja maziva u području dodira, zbog čega je prijenos topline od maziva na površine dijelova u dodiru mnogo veći.



**Slika 4.15. Raspodjela temperature na površini dodira za dva različita parametra brzine  $U$  (1 -  $U=7.3 \cdot 10^{-11}$  i 2 -  $U=5.5 \cdot 10^{-11}$ ) [80]**

Prethodno predočeno pokazuje da parametar opterećenja  $F$  i parametar materijala  $G$  imaju najznačajnije djelovanje, kako kod elastohidrodinamičkog tlaka tako i kod termoelastohidrodinamičkog podmazivanja. Parametar brzine ima značajan utjecaj na sve ostale parametre, osim na položaj šiljka tlaka. Zbog smika u mazivom filmu prouzrokovanog relativnim klizanjem površina dodira, temperatura u mazivom filmu značajno raste. Ukoliko se i ne uključi neki od reoloških modela u razmatranje, neće se načiniti velika greška jer je utjecaj *ne-Newtonovog* ponašanja maziva na porast temperature bez većeg značaja (slika 4.10). Parametar materijala  $G$  značajno djeluje na rast temperature u mazivom filmu (slika 4.16). Vrlo visoke temperature se pojavljuju zbog izbora vrlo visokih vrijednosti parametra materijala  $G$  (npr. za čelik je uzet modul elastičnosti  $E=2.0 \cdot 10^{11}$  Pa, a za mazivo je uzet piezoviskozni koeficijent  $m=1.75 \cdot 10^{-8}$  Pa<sup>-1</sup>, što daje  $G=m \cdot E=3500$  [82]). Već je u točki 4.1.1 rečeno da ova tzv. *flash temperatura* može postići vrlo visoke vrijednosti, ali je vrijeme njezinog djelovanja vrlo kratko, pa se udio ove temperature u radnoj temperaturi nekog podmazivanog sistema procjenjuje na nekoliko postotaka [60]. Međutim, i to je dovoljno za njezino značajno djelovanje.

Provedena analiza i rezultati predočeni slikama 4.12 do 4.16 temelje se na podacima prema [65, 71, 75, 80, 82]:  $R=0.02$  m,  $E=2.0 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\eta_0=0.04$  Pas,  $\rho_0=846$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho=\rho_1=\rho_2=7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $m=1.75 \cdot 10^{-8}$  Pa<sup>-1</sup>,  $r=0.6$ ,  $a_1=0.042$  K<sup>-1</sup>,  $a_2=6.4 \cdot 10^{-4}$  K<sup>-1</sup>,  $k_m=0.14$  W/mK,  $k_t=k_1=k_2=47$  W/mK,  $\nu=0.3$ ,  $c_m=2.0 \cdot 10^3$  J/kgK,  $c=c_1=c_2=460$  J/kgK i  $T_0=313$  K (40°C).



Slika 4.16. Ovisnost maksimalne temperature u mazivom filmu o parametru materijala  $G$

## 4.2. PRIMJENA TEHD TEORIJE NA KLIZNE LEŽAJEVE

### 4.2.1. POVIJEST ISTRAŽIVANJA

U prethodnom dijelu ovog rada i točki 2.2 rečeno je da se podaci za oblikovanje i dimenzioniranje ležaja općenito određuju iz izotermičkog oblika *Reynoldsove jednadžbe*, uz ignoriranje elastohidrodinamičkog djelovanja. Međutim, usložavanje zahtjeva kod rotirajućih strojeva uvjetuje rad kliznih ležaja pri velikim brzinama vrtnje i visokim opterećenjima, što za posljedicu ima potrebu za znatno točnijim oblikovanjem i dimenzioniranjem ležaja. U teorijskom proučavanju dodira po crti primijećena je snažna ovisnost viskoziteta i gustoće mazivog ulja o hidrodinamičkom tlaku i temperaturi, što ukazuje na neizostavnu potrebu uključivanja ovih konstatacija u proračun ležaja. Ovisnost radijalne zračnosti  $C$  i elastične, odnosno termoelastične radijalne deformacije čahure i rukavca ležaja također mora biti uključena u proračun karakteristika performansi ležaja.

Tipični primjeri proučavanja toplinskog djelovanja u kliznim radijalnim ležajevima susreću se u čitavom nizu istraživačkih radova [83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91]. Detaljan pregled ovih i drugih ranijih radova o toplinskom djelovanju kod kliznih radijalnih ležaja prezentirao je *Khonsari* [91]. *Knight* i *Barrett* [86] su pretpostavili u svojim istraživanjima da se cjelokupan porast topline uslijed viskoznog trenja prenosi samo na mazivo ulje i njegov postrani tok (istiskivanje ili propuštanja). U svezi s tim, zanemarujući vođenje topline u mazivom filmu i čahuri, oni su promatrali tzv. zatvoreni oblik rješenja za srednju temperaturu mazivog filma. U svom kasnijem radu [92] uključili su i djelovanje prijenosa topline sa mazivog filma na okoliš, ali na aproksimirajući način. *Lund* i *Hansen* [87, 88] su upotrijebili polinom četvrtog stupnja za aproksimaciju temperature u mazivom filmu, dok su za promjenu periferne temperature upotrijebili izraze dobivene razvijanjem *Fourierovih nizova*. Također su uspjeli reducirati trodimenzijski oblik jednadžbe energije u dvodimenzijski, pretpostavljajući da je prosjek temperature diljem širine ležaja  $B$  jednak. *Khonsari* i *Beaman* [90] su riješili dvodimenzijsku jednadžbu energije i jednadžbu vođenja topline uz pretpostavku da se promjena temperature u aksijalnom pravcu može zanemariti.

*Boncompain* i *Frene* [83] su uspješno riješili trodimenzijsku jednadžbu energije u području mazivog filma i dvodimenzijsku jednadžbu vođenja topline za čahuru ležaja. U svom istraživanju su temperaturu rukavca na rubovima ležaja držali nepromjenjivom, a mijenjali su temperaturu unutar ležaja. *Ferron* i *Frene* [85] su slijedili sličan postupak s tom razlikom što su riješili i trodimenzijsku jednadžbu vođenja topline za čahuru ležaja. *Boncompain* i drugi [89] su pak upotrijebili i toplinske modele slične onima koje su upotrebljavali *Ferron* i *Frene* [85], ali su u svrhu utvrđivanja temperature rukavca postavili hipotezu o slobodnoj konvekciji na krajevima rukavca (u aksijalnom pravcu). *Medwell* i *Gethin* [84] su riješili jednadžbu energije i jednadžbu vođenja topline (za klizni radijalni ležaj s dva aksijalna utora za

podmazivanje) uporabom metode konačnih elemenata, uz ograničavanje područja rješenja samo za područje pozitivnog hidrodinamičkog tlaka u mazivom filmu.

Najveći broj napisanih studija općenito se bavi samo sa predviđanjem statičkih karakteristika performansi ležaja. Sadašnja tendencija ka tzv. *graničnom oblikovanju (limit design)* povećava mogućnost da ležajni sistemi rade kod brzina vrtnje koje su bliske ili iznad granične brzine vrtnje. Stoga je nužno točnije ustvrditi ovu granicu nestabilnosti ležajnog sistema još u procesu oblikovanja, kako bi se učvrstila pouzdanost sistema rukavca. Temeljem ovih spoznaja, u ovom dijelu rada istražiti će se termoelastohidrodinamičko djelovanje kod dinamički opterećenog kliznog radijalnog ležaja.

#### 4.2.2. TEORIJSKA ANALIZA

Poopćena *Reynoldsova jednadžba* [63] u bezdimenzijskom obliku, za poopćeni laminarni tok mazivog, nekompresibilnog *Newtonovog maziva*<sup>22</sup> u slobodnom procijepu dinamički opterećenog ležaja može se napisati [58] kao

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(H^3 \cdot J \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\right) \cdot \left(H^3 \cdot J \cdot \frac{\partial P}{\partial Y}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H - H \cdot \frac{\bar{\eta}_{el}}{\bar{\eta}_{e0}}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (4.57)$$

koja se može zamijeniti funkcijom  $f=0$ , gdje su  $J$ ,  $\bar{\eta}_{e0}$  i  $\bar{\eta}_{el}$  bezdimenzijski izraz definirani pomoću izraza:

$$J = \int_0^1 \frac{Z}{\bar{\eta}} \cdot \left(Z - \frac{\bar{\eta}_{el}}{\bar{\eta}_{e0}}\right) dZ, \quad \bar{\eta}_{e0} = \int_0^1 \frac{dZ}{\bar{\eta}}, \quad \bar{\eta}_{el} = \int_0^1 \frac{Z}{\bar{\eta}} dZ. \quad (4.58)$$

Bezdimenzijska debljina mazivog filma  $H$  može se definirati izrazom

$$H = 1 - (X_1 - X) \cdot \cos \varphi - (Z_1 + Z) \cdot \sin \varphi + \bar{\delta}, \quad (4.59)$$

gdje je  $\bar{\delta}$  - radijalna deformacija čahure na granici mazivo – čahura. Viskozitet, ovisan o hidrodinamičkom tlaku i temperaturi, u bezdimenzijskom obliku, se može prema [86] izraziti kao

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} = \exp \left[ a_3 \cdot P + (a_4 + a_5 \cdot P) \cdot \left( \frac{1-T}{T+T_0} \right) \right], \quad (4.60)$$

gdje su  $a_3$ ,  $a_4$  i  $a_5$  bezdimenzijski koeficijenti hidrodinamičkog tlaka i temperature,  $T_0$  bezdimenzijska referentna temperatura okoliša i  $T$  bezdimenzijska promjenljiva temperatura mazivog filma.

<sup>22</sup> U točkama 3.1.8 i 4.1.2 je utvrđeno da ne-Newtonovo ponašanje mazivog ulja nema značajniji utjecaj na proračunske parametre, što je djelomično i potvrđeno i u točki 3.2.

Jednadžba energije kod podmazivanja općenito se može dobiti pomoću uvođenja uobičajene aproksimacije za mazivi film u poopćenu jednadžbu energije [30]. Međutim, ova jednadžba vrijedi samo u području pozitivnog tlaka. Pojavom kavitacije dolazi do preobrazbe mazivog filma u niz traka koje su razdvojene plinom ili zrakom (vrlo slično češlju). Ovdje će se pretpostaviti da su trake maziva i plin raspoređeni tako da, unutar elementa koji se analizira metodom konačnih elemenata, svojstva maziva mogu biti predložena stvarnim svojstvima maziva koja će se definirati kasnije. Stoga se ranije spominjana trodimenzijska jednadžba energije može upotrijebiti, kako za područje potpunog podmazivanja tako i za područje kavitacije (odnosno područje ulaza mazivog ulja) u obliku izraza (4.61)

$$H^3 \left( U \cdot \frac{\partial T}{\partial \Lambda} + V \cdot \frac{\partial T}{\partial Y} + \frac{W}{H} \cdot \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = D_e \cdot \bar{\eta} \cdot \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Z} \right)^2 \right] + P_{Ee} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, \quad (4.61)$$

gdje je operator  $(\partial/\partial \Lambda)$  predstavlja promjenu oblika mazivog filma u pravokutno polje [87], a definiran je kao

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{Z}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (4.62)$$

Bezdimenzijske komponente brzine u smjeru osi x, y i z (slika 3.10), stvarni inverzni *Pecletov broj*  $P_{Ee}$  i stvarni disipacijski broj  $D_e$ <sup>23</sup> predloženi su sljedećim izrazima:

$$U = H^2 \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \int_0^Z \frac{Z}{\bar{\eta}} \cdot dZ - \frac{\bar{\eta}_{e1}}{\bar{\eta}_{e0}} \cdot \int_0^Z \frac{1_e}{\bar{\eta}} \cdot dZ, \quad (4.63)$$

$$V = H^2 \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} \cdot \int_0^Z \frac{Z}{\bar{\eta}} \cdot dZ, \quad (4.64)$$

$$W = Z \cdot U \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^Z H \cdot U \cdot dZ - \frac{\partial}{\partial Y} \int_0^Z H \cdot V \cdot dZ, \quad (4.65)$$

$$P_{Ee} = \frac{k_e}{c_e \cdot \rho_e \cdot \omega_1 \cdot C^2}, \quad (4.66)$$

$$D_e = \frac{\eta_e \cdot \omega_1 \cdot R_1^2}{c_e \cdot \rho_e \cdot T_0 \cdot C^2}, \quad (4.67)$$

gdje su  $k_e$ ,  $c_e$ ,  $\rho_e$  i  $\eta_e$  stvarne (efektivne) vrijednosti toplinske vodljivosti, specifične topline, gustoće i viskoziteta mazivog ulja. Sve ove veličine su funkcije cilindrične koordinate  $\varphi$  i mogu se definirati pomoću sljedećih izraza:

<sup>23</sup> Pokazatelj rasipanja topline

$$\left. \begin{aligned} k_e(\varphi) &= k_m \cdot l_e + k_z \cdot (1 - l_e) \\ c_e(\varphi) &= c_m \cdot l_e + c_z \cdot (1 - l_e) \\ \rho_e(\varphi) &= \rho_m \cdot l_e + \rho_z \cdot (1 - l_e) \\ \eta_e(\varphi) &= \eta_m \cdot l_e + \eta_z \cdot (1 - l_e) \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

U jednadžbama (4.68)  $l_e$  predstavlja omjer aktualne duljine oplakivane mazivim uljem i stvarne širine ležaja, odnosno jedinicu u podmazivanom području pozitivnog tlaka. Ovaj omjer je određen iz kontinuiteta toka u području kavitacije

$$\begin{aligned} - \text{ za područje kuta: } \varphi_g < \varphi \leq 350^\circ &\Rightarrow l_e = \frac{l_1}{l_0}, \\ - \text{ za područje kuta: } 10^\circ < \varphi \leq 170^\circ &\Rightarrow l_e = \frac{l_2}{l_0}, \end{aligned}$$

gdje se  $l_0$ ,  $l_1$  i  $l_2$  mogu izračunati prema izrazima:

$$l_0 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^1 H \cdot U \cdot dZ dY, \quad l_1 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^1 (H \cdot U) \Big|_{\varphi_g} dZ dY, \quad l_2 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^1 (H \cdot U) \Big|_{\varphi=10^\circ} dZ dY.$$

*Fourierova jednadžba* vođenja topline u bezdimenzijskim cilindričnim koordinatama daje raspodjelu temperature u čahuri i kućištu, za koje je pretpostavljeno da su cilindričnog oblika (slika 3.10) i da posjeduju jednaka toplinska svojstva. Ova jednadžba se može napisati u sljedećem obliku

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial Y^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.69)$$

Temperatura rukavca se može ustvrditi iz postavljene toplinske ravnoteže za rukavac, koja zahtijeva da cjeloviti toplinski tok prema i od rukavca bude jednak. Količina topline koju je preuzeo rukavac dana je izrazom koji ima oblik

$$\bar{Q}_{lp} = \frac{Q_{lp}}{k_m \cdot R_1 \cdot T_0} = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{k_e(\varphi)}{k_m \cdot C \cdot H} \cdot \frac{\partial T}{\partial Z} \Big|_{Z=1} d\varphi dY. \quad (4.70)$$

Uz pretpostavku o slobodnoj konvekciji na oba kraja rukavca slijedi

$$\bar{Q}_{lk} = \frac{Q_{lk}}{k_m \cdot R_1 \cdot T_0} = \frac{2 \cdot q_1 \cdot R_1}{k_l} \cdot \frac{k_1}{k_m} \cdot \frac{A_1}{R_1^2} \cdot (T_1 - T_0). \quad (4.71)$$

Za toplinsku ravnotežu rukavca je

$$\bar{Q}_{lp} = \bar{Q}_{lk}. \quad (4.72)$$

Radijalna deformacija čahure na granici mazivo-čahura  $\bar{\delta}$ , u jednadžbi (4.59) može se izračunati rješavanjem trodimenzijske jednadžbe elastičnosti. Detaljnije o ovoj jednadžbi i graničnim uvjetima može se naći u referenci [53].

#### 4.2.3. GRANIČNI UVJETI

Granični i komplementarni uvjeti predloženi i obrazloženi u [57] upotrijebljeni su za rješavanje jednadžbe (4.57). Toplinski granični uvjeti koji su uporabljeni za dobivanje rješenja jednadžbe (4.61) i jednadžbe (4.69), definirani su kao što slijedi

a) Područje polja toka mazivog filma - jednadžba (4.61):

$$- \text{ na granici mazivo - rukavac: } T|_{Z=1} = T_1 \quad (4.73)$$

$$- \text{ na granici mazivo - čahura : } T|_{Z=0} = T_2|_{\bar{r}=\bar{R}_2} \quad (4.74)$$

Na ulazu u kim ili procijep mazivog ulja temperatura  $T$  se parabolično mijenja od  $T_2$  na granici mazivo - čahura do  $T_1$  na granici mazivo - rukavac.

b) Područje tijela (čahura, kućište) - jednadžba (4.69)

- na granici mazivo - čahura iz kontinuiteta toplinskog toka slijedi

$$-\frac{k_2}{\bar{R}_1} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \bar{r}} \bigg|_{\bar{r}=\bar{R}_2} = \frac{k_e(\varphi)}{C \cdot H} \cdot \frac{\partial T}{\partial Z} \bigg|_{Z=0} \quad (4.75)$$

- na vanjskom dijelu kućišta ( $\bar{r} = \bar{R}_3$ ), iz pretpostavke o slobodnoj konvekciji i radijaciji slijedi:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{r}} \bigg|_{\bar{r}=\bar{R}_3} = \frac{q_2 \cdot \bar{R}_1}{k_2} \cdot (T_2|_{Z=0} - T_0) \quad (4.76)$$

- na pobočnoj površini ležaja ( $Y = \pm \lambda$ ) također su pretpostavljene slobodna konvekcija i radijacija. Na temelju ove pretpostavke slijedi:

$$\frac{\partial T_2}{\partial Y} \bigg|_{Y=\pm \lambda} = \frac{q_2 \cdot \bar{R}_1}{k_2} \cdot (T_2|_{Y=\pm \lambda} - T_0) \quad (4.77)$$

Za temperaturu na ulazu dobavnog utora (koji je smješten u gornjoj polovici poprečnog presjeka ležaja na slici 3.10) pretpostavljeno je  $T_{ul}=T_2$ .

Izrazi predloženi u [53] ugrađeni su u model proračuna i upotrijebljeni u odabranom primjeru proračuna statičkih i dinamičkih karakteristika kliznog radijalnog ležaja [58]. Gdje god je to bilo potrebno, uključena je i promjenljivost viskoziteta gustoće mazivog ulja s hidrodinamičkim tlakom i temperaturom.

#### 4.2.4. POSTUPAK RJEŠAVANJA

Jednadžba podmazivanja (*Reynoldsova jednadžba*) (4.57), jednadžba energije (4.61), jednadžba vođenja topline (*Fourierova jednadžba*) (4.69) i jednadžba elastičnosti (3.41) i (4.59) riješene su uporabom metode konačnih elemenata po uzoru na model *Medwell - Gethina* [84] koji je prilagođen promatranom primjeru. U ovom radu je u nekoliko navrata rečeno da se problem hidrodinamičkog, elastohidrodinamičkog i termoelastohidrodinamičkog podmazivanja rješava uporabom odgovarajuće iteracijske metode, odnosno odgovarajućeg iteracijskog modela. Za svaku promatranu relativnu ekscentričnost  $\varepsilon$ , iteracija je potrebna kako bi se polučila rješenja po tri navedene točke:

1. Konvergirajuće rješenje *Reynoldsove jednadžbe* koja zadovoljava komplementarne uvjete [53];
2. Kut položaja rukavca  $\Phi$  koji se opire opterećenju rukavca  $F$ ;
3. Konvergirajuće rješenje sistema jednadžbi koji tvore jednadžbe (4.57), (4.61), (4.69), (3.41) i (4.59).

U završnoj iteraciji, relativna ekscentričnost  $\varepsilon$  je modificirana tako da se uspostavi ravnotežni položaj središta rukavca  $O_1$  za zadano vanjsko opterećenje  $F$ , odnosno  $F$  (slika 3.10). Za promatranu relativnu ekscentričnost  $\varepsilon$ , toplinska polja za mazivo ulje, čahuru, kućište i rukavac ležaja uspostavljaju se za polje elastohidrodinamičkog tlaka i deformacije pomoću uvođenja toplinske ili termalne petlje u kojoj su istodobno (simultano) riješene jednadžba energije (4.61) i *Fourierova jednadžba* vođenja topline (4.69)

Temperatura rukavca se može odrediti nakon što se odrede konvergirajuća toplinska polja za mazivo ulje (mazivi film) i čahuru (odnosno kućište). Jednadžba energije (4.61) i *Fourierova jednadžba* vođenja topline (4.69) opetovano se rješavaju s modificiranom temperaturom rukavca  $T_1$ . Konvergencija toplinske petlje je postignuta kada temperatura mazivog ulja (u mazivom filmu)  $T$  u sukcesivnim iteracijama leži unutar razlike od 1%, a temperatura rukavca  $T$  unutar razlike od 0,1 %.

Statičke i dinamičke karakteristike za klizni radijalni ležaj odabran kao primjer u ovom radu izračunate su za teoriju izotermičkog hidrodinamičkog podmazivanja (HP), za teoriju izotermičkog elastohidrodinamičkog podmazivanja (EHP) i za teoriju termoelastohidrodinamičkog podmazivanja (TEHD) [58]. Radi usporedbe dati su i podaci za termohidrodinamičku analizu (TH).

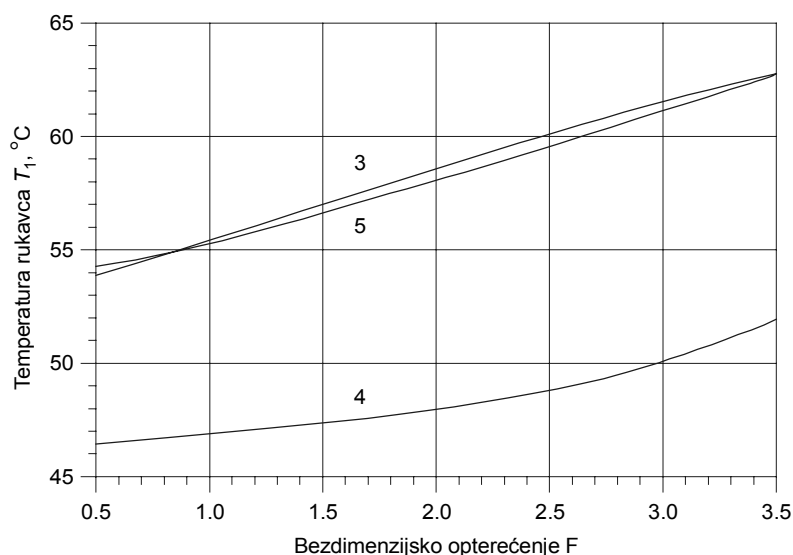
#### 4.2.5. PREDODŽBA REZULTATA

Proračuni za odabrani primjer kliznog ležaja provedeni su za sljedeće ulazne podatke o geometriji ležaja i radnim uvjetima [58]:

$R_1=0.025$  m,  $R_3=0.050$  m,  $B=0.050$  m,  $C=2.5 \cdot 10^{-5}$  i  $C=5.0 \cdot 10^{-5}$  m,  $n=4500$  min<sup>-1</sup>,  $d_2=0.010$  m,  $\eta(T_m=38^\circ\text{C}, p=0)=0.029$  Pas,  $\eta(T_m=38^\circ\text{C}, p=0.01 \text{ GPa})=0.240$  Pas,  $\eta(T_m=99^\circ\text{C}, p=0)=0.004$  Pas,  $\eta(T_m=99^\circ\text{C}, p=0.1 \text{ GPa})=0.018$  Pas,  $\eta_0=0.026$  Pas,  $a_3=0.264$ ,  $a_4=11.816$ ,  $a_5=0.490$ ,  $\rho=860$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_m=2000$  J/kgK,  $k_m=0.125$  W/mK,  $k_z=0.025$  W/mK,  $k_1=k_2=50$  W/mK,  $T_0=T_u=40^\circ\text{C}$  (kao referentna temperatura upotrebljava se  $T_0$ ),  $\nu_1=\nu_2=0.3$ .

Uz ranije razmotrene teorijske postavke glede odnosa viskozitet - elastohidrodinamički tlak - temperatura, promatrana je usporedna analiza ovisnosti temperature rukavca  $T_1$ , relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$ , kuta položaja rukavca  $\Phi$ , postranog toka  $Q_p$ , minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$ , granične brzine vrtnje rukavca  $\bar{\Omega}$ , te omjera frekvencije vrtnje  $\bar{v}$  o različitom opterećenju ležaja  $F$  (odnosno  $F$ ) kod različitih teorija hidrodinamičkog podmazivanja. Također je dana i usporedba glede termodinamičke analize (TH)

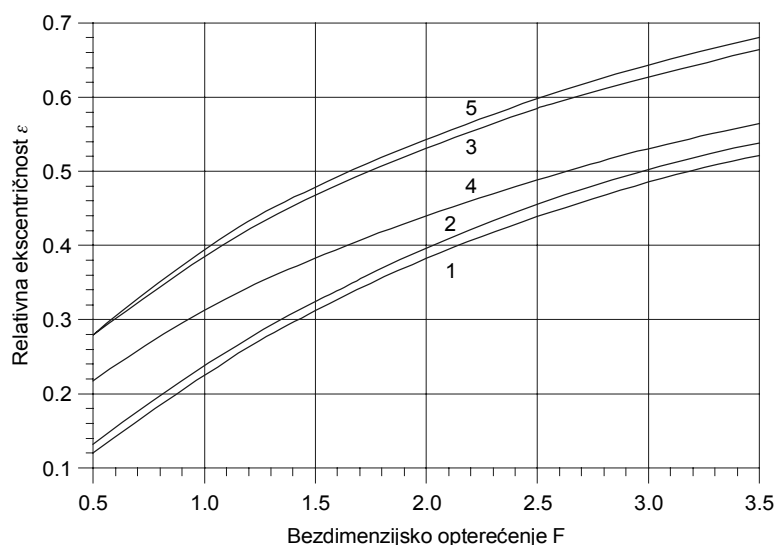
Rezultati za teoriju izotermičkog hidrodinamičkog podmazivanja (HP) i teoriju izotermičkog elastohidrodinamičkog podmazivanja (EHP) su općeniti i upotrebljivi za bilo koju kombinaciju  $\omega_1$ ,  $\eta_0$ ,  $C/R_1$ ,  $E$  i  $d_2/R_1$  koja daje vrijednost koeficijenta deformacije  $C_D=0.01$  prema jednadžbi (3.42). Za ilustriranje djelovanja zračnosti ležaja  $C$ , dani su rezultati kod termohidrodinamičke analize (TH) za dvije vrijednosti omjera  $C/R_1$  (0.001 i 0.002).



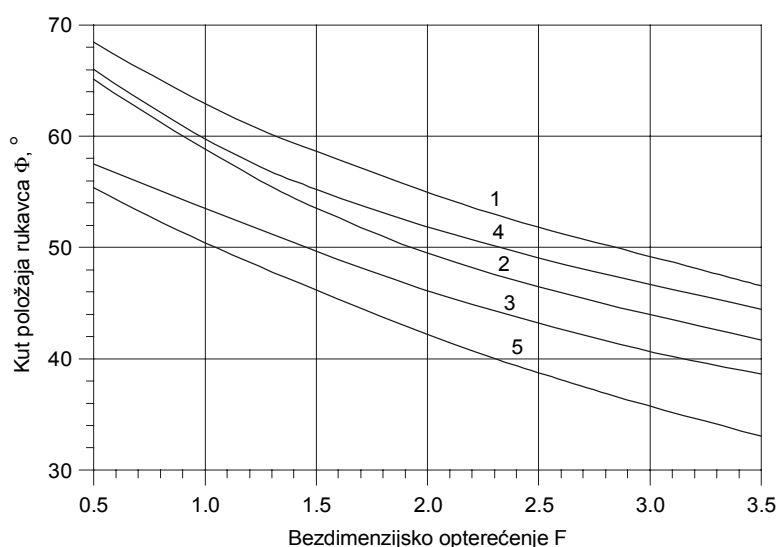
Slika 4.17. Ovisnost temperature rukavca  $T_1$  o opterećenju  $F$  za različito toplinsko djelovanje (3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]

Promjena temperature rukavca  $T_1$  s opterećenjem predočena je na slici 4.17. Ova temperatura raste s opterećenjem, ali je manje ili više neškodljiva kod deformabilnih ležaja (krivulje 3 i 5). Porast temperature rukavca ležaja s opterećenjem pokazatelj je porasta radne temperature ležaja. Uključivanje područja kavitacije u razmatranje je vrlo značajno, budući da kavitacija također djeluje na ovu temperaturu.

I toplinsko i elastohidrodinamičko djelovanje povećava relativnu ekscentričnost ležaja  $\varepsilon$  s porastom opterećenja  $F$  (slika 4.18), a smanjuje kut položaja  $\Phi$  (slika 4.19). Ovakve karakteristične ovisnosti mogu se pripisati snižavanju hidrodinamičkog tlaka mazivog ulja koje je prouzročeno promjenama radne zračnosti ležaja  $C$  i viskoziteta mazivog ulja  $\eta$ .

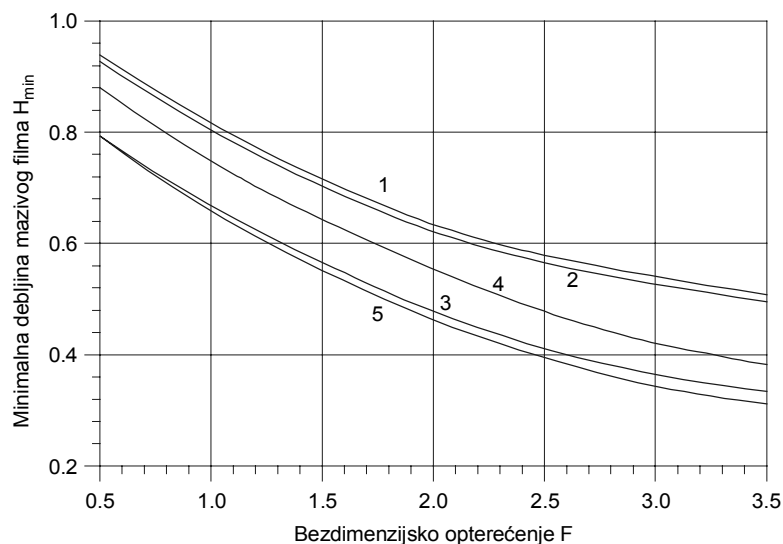


**Slika 4.18. Ovisnost relativne ekscentričnosti  $\varepsilon$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]**

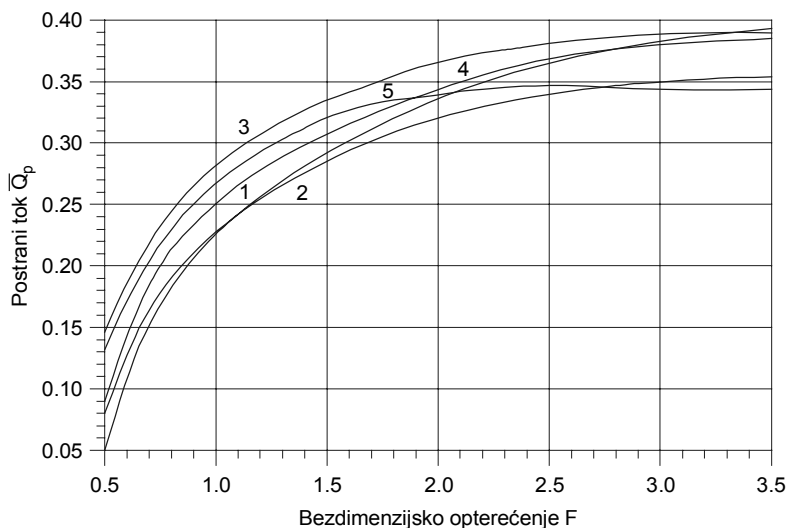


**Slika 4.19. Ovisnost kuta položaja rukavca  $\Phi$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]**

Slika 4.20 predočava promjenu minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  ovisno o opterećenju  $F$ . Ona se smanjuje toplinskim i elastohidrodinamičkim djelovanjem (krivulje 3 i 5). Točne vrijednosti minimalne debljine mazivog filma su značajne zbog određivanja željene završne strojne obrade kliznih površina rukavca i čahure ležaja, odnosno za definiranje odgovarajuće hrapavosti ovih površina.



**Slika 4.20. Ovisnost minimalne debljine mazivog filma  $H_{\min}$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0,001$ , 4. TH za  $C/R_1=0,002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0,001$ ) [58]**

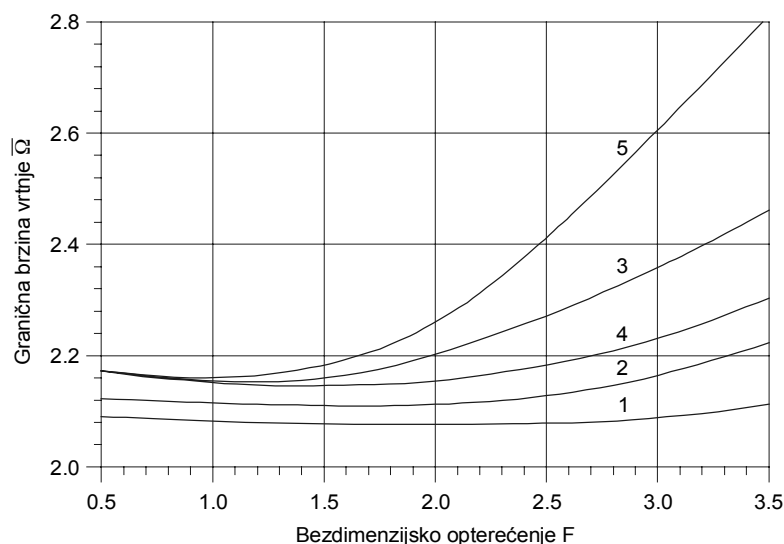


**Slika 4.21. Ovisnost postranog toka  $Q_p$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0,001$ , 4. TH za  $C/R_1=0,002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0,001$ ) [58]**

Iz ovisnosti postranog ili bočnog toka mazivog ulja  $Q_p$  o opterećenju  $F$  (slika 4.21) može se zamijetiti da je ovaj tok veći kod toplinskog djelovanja (krivulje 3, 4 i 5) za promatrana opterećenja ( $F=1.0$  i  $F=2.5$ ). Kod puno većih opterećenja  $F$  vrijednosti za  $Q_p$  se značajno smanjuju i kod toplinskog i kod elastohidrodinamičkog djelovanja, što se može objasniti prekoračenjem sposobnosti nošenja ležaja (koja je u ovom primjeru ograničena približno na vrijednost  $F=2.5$ ).

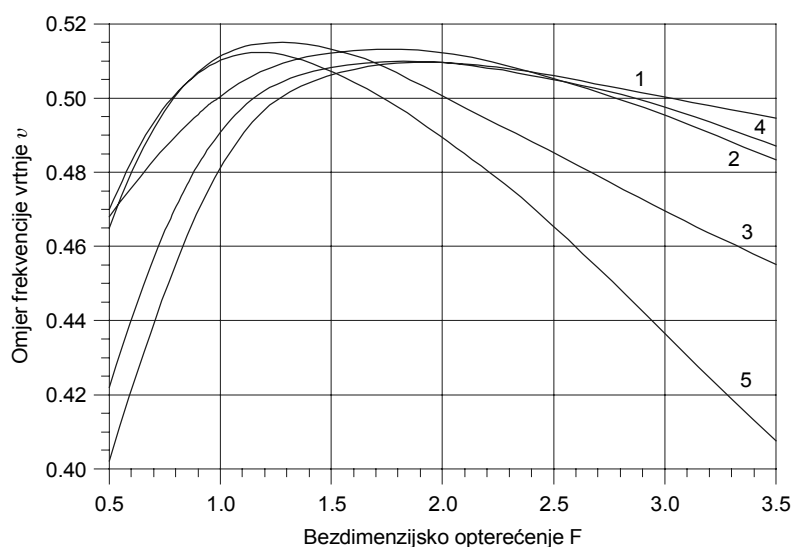
Djelovanje povećanog omjera  $C/R_1$  na  $\varepsilon$ ,  $\Phi$ ,  $H_{\min}$  i  $Q_p$  je takvo da je po vrijednostima bliže onima kod izotermičkih teorija (slike 4.18 do 4.21).

Parametri stabilnosti (granična brzina vrtnje  $\bar{\Omega}$  i omjer frekvencije vrtnje  $\bar{\nu}$  - dinamičke karakteristike ležaja) u ovisnosti o opterećenju predloženi su na slikama 3.22 i 3.23.



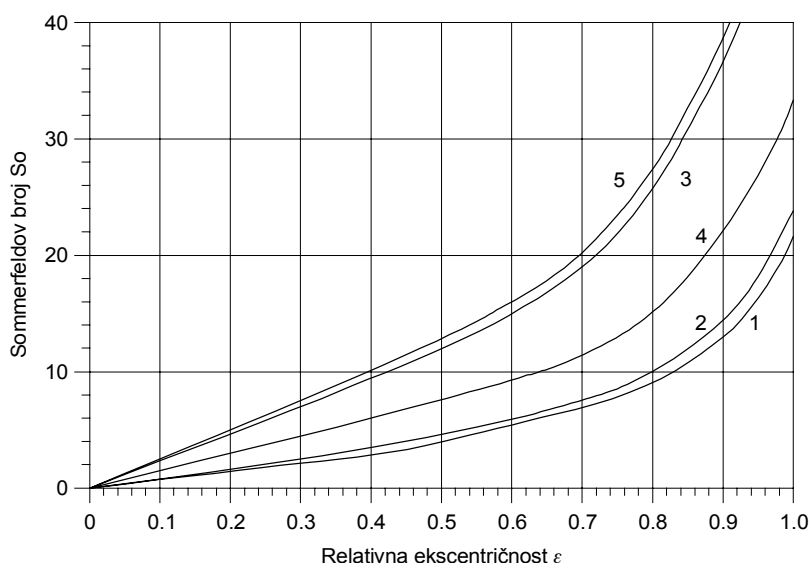
**Slika 4.22. Ovisnost granične brzine vrtnje  $\bar{\Omega}$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$  4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]**

Iz slike 4.22 se zamjećuje da granica nestabilnosti raste kako zbog toplinskog, tako i zbog elastohidrodinamičkog djelovanja (krivulje od 1 do 5), a omjer frekvencije vrtnje opada nakon stanovite vrijednosti opterećenja  $F$  (slika 4.23). Opadanje je značajnije kada se radi o toplinskom i elastohidrodinamičkom djelovanju (krivulje od 3 do 5). Veći omjer  $C/R_1$  djeluje na poboljšanje granica stabilnosti (vidjeti tokove krivulja 3 do 4).



**Slika 4.23. Ovisnost omjera frekvencije  $\bar{\nu}$  o opterećenju  $F$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]**

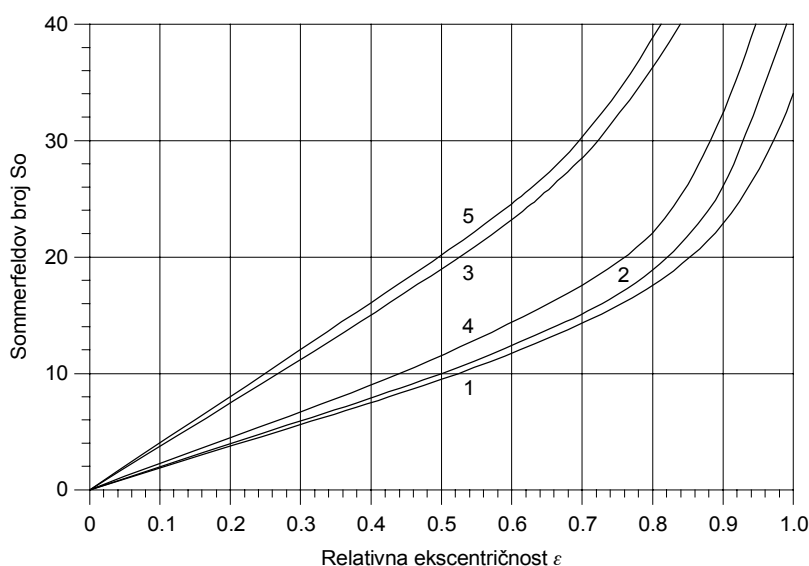
Na slici 4.24 predočena je ovisnost *Sommerfeldovog broja*  $So$  o relativnoj ekscentričnosti rukavca  $\varepsilon$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja. Dijagram ovisnosti  $So=f(\varepsilon)$  nacrtan je za omjer  $B/D=1$  i bezdimenzijski parametar opterećenja  $F=1.0$ .



**Slika 4.24.** Ovisnost *Sommerfeldovog broja*  $So$  o relativnoj ekscentričnosti  $\varepsilon$  kod različitih teorija podmazivanja, toplinskog djelovanja, omjera  $b/D=1$  i opterećenja  $F=1.0$  (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]

Na slici 4.25 predočena je ovisnost *Sommerfeldovog broja*  $So$  o relativnoj ekscentričnosti rukavca  $\varepsilon$  kod različitih teorija podmazivanja i toplinskog djelovanja. Dijagram ovisnosti  $So=f(\varepsilon)$  nacrtan je za omjer  $B/D=1$  i bezdimenzijski parametar opterećenja  $F=2.5$ .

U obje predodžbe očigledno je značajno toplinsko djelovanje na porast *Sommerfeldovog broja* kod istih vrijednosti relativne ekscentričnosti (krivulje 3 i 5). Veći omjer  $C/R_1$  smanjuje, a veća vrijednost bezdimenzijskog opterećenja povećava vrijednost *Sommerfeldovog broja*.



**Slika 4.25.** Ovisnost *Sommerfeldovog broja*  $So$  o relativnoj ekscentričnosti  $\varepsilon$  kod različitih teorija podmazivanja, toplinskog djelovanja, omjera  $b/D=1$  i opterećenja  $F=2.5$  (1. HP, 2. EHP, 3. TH za  $C/R_1=0.001$ , 4. TH za  $C/R_1=0.002$  i 5. TEHD za  $C/R_1=0.001$ ) [58]

# 5

## ZAKLJUČAK

### 5.1. REZULTATI RADA

U ovom radu metodički su obrađene sve relevantne teorijske postavke i odabrani modeli rješavanja problema posrednog dodira po crti koji može poslužiti kao pojednostavljeni primjer kliznog radijalnog ležaja. Spoznaje koje su proistekle iz ovog istraživanja i usporedivi eksperimentalni podaci primijenjeni su na konkretizirani primjer jednostavnog kliznog radijalnog ležaja s jednoslojnom čahuricom (blazinicom) i dobavom maziva u ne-tlačnom području. Utjecaj primjene različitih teorija hidrodinamičkog podmazivanja i toplinskog djelovanja na statičke i dinamičke karakteristike performansi ugrađen je u matematički model (poglavlje 4.2.2). Rezultati proračuna uporabom ovog modela predloženi su za odabrani primjer, geometriju, radne uvjete, materijal i vrstu mazivog ulja u obliku dijagramskih prikaza na slikama 4.17 do 4.25. Model koji je proistekao iz provedenog rada i rezultati dobiveni njegovom uporabom, omogućavaju kvalitativnu i kvantitativnu usporedbu utjecaja geometrije (makro-geometrije i mikro-geometrije) ležaja, materijala, vrste mazivog ulja i radnih uvjeta (opterećenja, brzine vrtnje rukavca, temperature itd.) na gore spomenute karakteristike.

Termoelastohidrodinamičko djelovanje je uključeno u model pomoću modificiranih hidrodinamičkih teorija podmazivanja (HP-teorija izotermičkog hidrodinamičkog podmazivanja, EHD-teorija izotermičkog elastohidrodinamičkog podmazivanja i TEHD-teorija termoelastohidrodinamičkog podmazivanja), a samo toplinsko djelovanje je uključeno pomoću zakona termodinamike uz štovanje graničnih uvjeta za konkretan problem. Istraživanje ukazuje na potrebu provođenja složenih izračuna kliznog radijalnog ležaja zbog značajne zavisnosti performansi o posljedicama povišene temperature i elastične deformacije čahure prouzročene visokim opterećenjem. Toplinsko djelovanje je pri tome mnogo veće, i ukoliko se zanemari može prouzročiti katastrofalne posljedice (manji *Sommerfeldov broj* ukazuje na snižavanje sposobnosti nošenja i smanjenje debljine mazivog filma, što povećava opasnost da, uslijed djelovanja opterećenja i lokalne elastične deformacije, uz sniženu vrijednost viskoziteta, dođe do prekida mazivog filma i neželjene pojave mješovitog, pa i

suhog trenja). Dakle, proračun utemeljen na teoriji termoelastohidrodinamičkog podmazivanja omogućava bitno točnije dimenzioniranje i oblikovanje visoko opterećenih kliznih radijalnih ležaja.

## **5.2. SMJEROVI DALJNJEG ISTRAŽIVANJA**

Područje istraživanja nosivosti klizno-valjnih parova je izuzetno bogato i obrađivano. Kronološkim pregledom obuhvaćen je, premda velik, samo dio autora koji su dali svoj obol razumijevanju fenomena koji se javljaju za različite modele i uvjete dodira. Značajan je napredak ostvaren u razvoju matematičkih modela i metoda za rješavanje ovakvih problema poglavito zahvaljujući napretku ostvarenom u tehnologiji i arhitekturi elektroničkih računala.

Obzirom na potencijal u opremi, moguće je modelima klizno-valjnih parova obuhvatiti faktore i utjecaje koji su u dosadašnjim razmatranjima bili zanemarivani ili pojednostavljeni, bilo zbog malog utjecaja, bilo zbog stupnja usložavanja proračuna.

Trend je rješavanja realnih problema naprednijim matematičkim metodama, kao i variranje pojedinih parametara u skladu s tehnološkim napretkom (uvođenje konstrukcijskih rješenja s novim materijalima, mazivima i sl.). S druge strane, rješavanje pojedinih fenomena, poglavito problema vršnog tlaka i zaribavanja, zastupljeno je najviše ispitivanjima karakteristika pojedinih materijala, ali nema značajnijih probitaka glede novih praručunskih modela. Ovo je područje u kojem autor vidi nastavak istraživanja i mogućnost razvoja, kako na teoretskim, tako i na proračunskim modelima.

## 6

## LITERATURA

- 
- [1] Hertz, H.: Journal of Mathematics, Crell's Journal, 92, 1881.
  - [2] Hertz, H.: Gesammelte Werke, Tom 1, Leipzig, 1895., 155.
  - [3] Тимошеико, С. П., Гудьер, Дж.: Теоря упругости, Наука, Москва, 1979.
  - [4] Биргер, И.А., Шор, Б.Ф., Иосилевич, Г.Б.: Расчет на прочность деталей машин, Справочник, Машиностроене, 1979., 702
  - [5] Srđan, P: Istraživanje zaribavanja cilindričnih evolventnih zupčanika, Magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2000.
  - [6] Заплетохин, В.А.: Конструирование деталей механических устройств, Справочник, Машиностроене, Ленинград, 1990.
  - [7] Ivušić, V.: Tribologija, Hrvatsko društvo za materijale i tribologiju, Zagreb, 2002.
  - [8] Kljajin, M.: Istraživanje graničnih područja nosivosti zupčanog para, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 1995.
  - [9] Blok, H.: The Surface Temperatures under Extreme Pressure Lubricating Conditions, Laboratorium der Royal Dutch Shell, 1937.
  - [10] Opalić, M.: Prilog istraživanju opteretivosti bokova pužnih kola pužnih prijenosnika, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 1984.
  - [11] Eschmann, P., Hasbargen, L., Weigand, K.: Ball and Roller Bearings, Theory, Design and Application, John Willey&Sons Ltd., 1985.
  - [12] Крагедьский, И.В., Алисин, В.В.: Трение, изнашивание и смазка, Справочник, Машиностроене, Кн. 1, 1978., 400.
  - [13] Dowson, D.: History of Tribology, Longman, London, 1979.
  - [14] Stefan, J.: Mathematic-Naturwissenschaft, Sber. bayer. Akad. Wissenschaft, KI. 69, 1874., 713.

- 
- [15] Tower, B.: Proc. Inst. Mech. Eng., 36, London, 1885, 58.
- [16] Reynolds, O.: On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. B. Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of olive oil, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol.117, London, 1886., 157-234.
- [17] Moor, F.D.: Principles and Applications of Tribology, Dublin, 1975.
- [18] ISO 7902-1: Hydrodynamic Plain Journal Bearings under Steady-state Conditions – Circular Cylindrical Bearings – Part 1: Calculation procedure, ISO, Geneva, 1998.
- [19] Williams, J.A.: Engineering Tribology, Oxford University Press Inc., 2000.
- [20] Pinkus, O.; Sternlich, B.: Theory of Hydrodynamic Lubrication, Mc Graw-Hill, New York (1961).
- [21] Beitz, W., Kuttner, K.H.: Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau, 15. Auflage, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [22] Peppler, W.: Untersuchungen über die Druckübertragung bei belasteten und geschmierten umlaufenden achsparallelen Zylindern, VDI Forschungsheft 42, Berlin, 1936.
- [23] Peppler, W.: Druckübertragung an geschmierten zylindrischen Gleit- und Walzflächen, VDI Forschungsheft 391, Berlin, 1938.
- [24] Ertel, A.M.: Hydrodynamic Lubrication Based on New Principles, Akad. Nauk. SSSR, Math. & Mech., 3, 1939, 41-52.
- [25] Dowson, D., Higginson, G.R.: A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem, International Journal Mechanical Engineering Science, 1, 1959., 1-6.
- [26] Dowson, D.: Paper R1, Elastohydrodynamic Lubrication, Proc. Inst. Engrs., Vol. 180, Pt.3B, 1965-1966, 7.
- [27] Dowson, D., Higginson, G.R.: Elastohydrodynamic Lubrication, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [28] Ten Napel, W.E.: Elastohydrodynamic in Counterformal and Conformal Contacts, Applied Scientific Research, 48, 1991., 159-173.
- [29] Grubin, A.N.: Fundamentals of the Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily Loaded Cylindrical Surfaces, In: Central Sci. Res. Inst. for Techn. and Mech. Engrng., Book Nr. 30, Moscow, 1949., 115-166.
- [30] Мур, Ф.Д.: Трение и смазка эластомеров, Химия, Москва, 1977.
- [31] Hashimoto, H.; Wada, S.: The Effect of Fluid Inertia Forces in Parallel Circular Squeeze Film Bearings Lubricated with Pseudoplastic Fluids, Journal of Tribology, 108, 1986., 282-287.

- 
- [32] Yang, P.; Wen, S.: A Generalized Reynolds Equation for Non-Newtonian Thermal Elastohydrodynamic Lubrication, Transactions of ASME, Journal of Tribology, Vol.112, 1990., 631-636.
- [33] Lin, T.-R., Lin, J.-F.: The Elastohydrodynamic Lubrication on Line Contacts with Pseudoplastics Fluid, Wear, 140, 1990., 235-249.
- [34] Houpert, L.G., Hamrock, B.J.: A Fast Approach for Calculating Film Thickness And Pressures in Elastohydrodynamically Contacts at High Loads, Journal of Tribology, 108, 1986., 411-420.
- [35] Roelands, C.J.A.: Correlation Aspects of Viscosity - Temperature - Pressure Relationship of Lubrication Oils, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1966.
- [36] Mc Cracken, D.D., Dorn, W.S.: Numerical Methods and Fortran Programming, John Wiley and Sons Inc., New York-London, 1965.
- [37] Horowitz, H.H., Steidler, F.E.: Calculated Performance of Non - Newtonian Lubricants in Finite Width Journal Bearings, Transactions of ASLE, 4 (1961) 275.
- [38] Tanner, R.I.: Short Bearing Solution for Pressure Distribution in a Non - Newtonian Lubricant, Jour. Appl. Mech., Trans. ASME, 76 (1964) 350.
- [39] Hsu. Y.C.: Non - Newtonian Flow in Infinite Length Full Journal Bearing, Trans. ASME, J. Lubr. Technol. 79 (1967) 329.
- [40] Wada, S.; Hayashi, H.: Hydrodynamic Lubrication of Journal Bearings by Pseudoplastic Lubricants, Bull. JSME, 14 (1971) 268.
- [41] Wada, S.; Hayashi, H.: Hydrodynamic Lubrication of Journal Bearings by Pseudoplastic Lubricants, Bull. JSME, 17 (1974) 967.
- [42] Wada, S.; Hayashi, H.: Hydrodynamic Lubrication of Journal Bearings by Non - Newtonian Lubricants, Bull. JSME, 20 (1977 ) 224.
- [43] Swamy, S.T.N., Prabhu, B.S., Rao, B.V.A.: Calculated Load Capacity of Non - Newtonian Lubricants in Finite Width Journal Bearings, Wear, 31 (1975 ) 277-285.
- [44] Swamy, S.T.N., Prabhu, B.S., Rao, B.V.A.: Stiffness and Damping Characteristics of Finite Width Journal Bearings with Non - Newtonian Film and their Application to Instability Prediction, Wear, 32 (1975) 379-390.
- [45] Swamy, S.T.N., Prabhu, B.S., Rao, B.V.A.: Steady State and Stability Characteristics of Hydrodynamic Journal of Bearing with a Non - Newtonian Lubricant, Wear, 42 (1977), 229-244.

- 
- [46] Tayal, S.P., Sinhasan, R., Singh, D.V.: Static Analysis of Hydrodynamic Journal Bearig Having Non - Newtonian Lubricants by Finite Element Method, Third ISME Conf. on Mech. Engng. II T, Delhi, India (1980) 245.
- [47] Tayal, S.P., Sinhasan, R., Singh, D.V.: Analysis of Hydrodynamic Journal Bearigs Having Non - Newtonian Lubricants (Cubic Shear Stress Law) by Finite Element Method, Ninth AIMTD Conf. II T, Kanpur, India (1980) 43.
- [48] Taylor, C.; Callaghan, J.F.O.: A Numerical Solution of the Elastohydrodynamic Problem Using Finite Elements, J. Mech. Eng. Sci., 144 (1972 ) 229.
- [49] Oh, K.P., Hubner, K.H.: Solution of the Elastohydrodynamic Finite Journal Bearing Problem, J. Lubr. Technol., 95, 3 (1973 ) 342.
- [50] Jam, S.C.; Sinhasan, R., Singh, D.V.: A Study of EHD Lubrication in a Journal Bearing with Piezoviscous Lubricant, Transactions of ASLE, 27 (2) (1980) 168-176.
- [51] La Bouff, G.A., Booker, J.F.: Dynamically Loaded Journal Bearing: A Finite Element Treatment for Rigid and Elastic Surfaces, Trans. ASME, J. Tribology, 107 ( 1985 ) 505.
- [52] Prabhakaran, N.H.; Sinhasan, R., Singh, D.V.: A Study of Elastohydrodynamic Lubrication: Finite Element Treatment for Rigid and Elastic Surfaces, Nat. Conf. on Industrial Tribology, Bombay, India (1986 ) 11-1-13.
- [53] Chandrawat, H.N., Sinhasan, R.: A Study of Steady State and Transient Performance Characteristics of a Flexible Shell Journal Bearing, Tribol. Int., 21(3) (1988) 137-148.
- [54] Sinhasan, R., Goyal, K.C.: Elastohydrodynamic Studies of Circular Journal Bearings with Non - Newtonian Lubricants, Tribol. International, Vol.23, 6 (1990 ) 419-428.
- [55] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, Tata McGraw-Hill (1979).
- [56] Darby, R.: Viscoelastic Fluids: An Introduction to their Properties and Behaviour, Marcel Dekker (1976).
- [57] Chandrawat, H.N., Sinhasan, R.A.: A Comparison Between Two Numerical Techniques for Hydrodynamic Journal Bearing Problems, Wear, 119 (1) (1987) 77-87
- [58] Sinhasan, R.A., Chandrawat, H.N.: An Elastohydrodynamic Study on Two-Axial-Groove Journal Bearing, Tribology International, 21(6) (1988 ) 341-351.
- [59] O'Conner, J.J., Boyd, J.: Standard Handbook of Lubrication Engineering, McGraw-Hill, New York (1968).
- [60] Sadeghi, F., Dow, T.A.: Thermal Effects in Rolling/Sliding Contacts, Part 2: Analysis of Thermal Effects in Fluid Film, Transactions of ASME, Journal of Tribology, Vol. 109, 3, 1987., 512-518.

- 
- [61] Lansdown, A.R.: High-Temperature Lubrication, Proc. Inst. Mech. Engrs., Journal of Mechanical Engineering Science, Part C, Vol.204, 1990., 279-291.
- [62] Fuller, Dudley, D.: Theory and Practice of Lubrication for Engineers, 2nd Ed., John Wiley and Sons Inc., New York, 1984.
- [63] Dowson, D.: A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication, International Journal of Mechanical Science, Vol.4, 1962., 159-170.
- [64] Dowson, D., Whitaker, A.V.: A Numerical Procedure for the Solution of Elastohydrodynamic Problem of Rolling and Sliding Contacts Lubricated by Newtonian Fluid, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol.180, Part 3B, 1966., 57-71.
- [65] Zhu, D., Wen, S.: A Full Numerical Solution for the Thermoelastohydrodynamic Problem in Elliptical Contacts, Transactions of ASME, Journal of Tribology, Vol.106, 1984., 246-254.
- [66] Ghosh, M.K., Hamrock, B.J.: Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts, Transactions of ASLE, Vol.28, 1985., 159-171.
- [67] Ertel, A.M.: Die Berechnung der Hydrodynamischen Schmierung gekrummter oberflächen unter hoher Belastung und Relativbewegung, Fortschr. Ber. VDIZ, Reihe 1, No. 115, 1948.
- [68] Dyson, A.; Wilson, A.R.: Film Thickness in Elastohydrodynamic Lubrication by Silicon Fluids, Proceeding of the Institution of Mech. Engrs., Vol.180, Part 3B, 1966., 97-112.
- [69] Johnson, K.L., Tevaarwerk, J.T.: Shear Behavior of EHD Oil Films, Proceedings of Royal Society, Series A, Vol.356, London, 1977., 215-236.
- [70] Bair, S.; Winer, W.O.: A Rheological Model of Elastohydrodynamic Contact Based on Primary Laboratory Data, Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, 1979., 258-265.
- [71] Wang, S.H., Zhang, H.H.: Combined Effects of Thermal and Non-Newtonian Character of Lubrication on Pressure, Film Profile, Temperature Rise and Shear Stress in EHL, Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol.109, 1987., 666-670.
- [72] Conry, T.F., Wang, S.; Cusano, C.: A Reynolds-Eyring Equation of Elastohydrodynamic Lubrication in Line Contacts, Trans. ASME, J. of Tribology, Vol. 109, 1987., 648-658.
- [73] Sui, P.C.; Sadeghi, F.: Non-Newtonian Thermal Elastohydrodynamic Lubrication, Trans. ASME, J. of Tribology, Vol.113, 1991., 390-397.

- 
- [74] Najji, B.; Bou-Said, B.; Berthe, D.: New Formulation of Lubrication with Non - Newtonian Fluids, Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 111, 1989., 29-34.
- [75] Houpert, L.: New Results of Traction Force Calculation in Elastohydrodynamic Lubrication, Trans. ASME, Journal of Tribology, Vol. 107, 1985., 241-248.
- [76] Roelands, C.J.A., Vlugter, J.C., Watermann, H.J.: The Viscosity-Pressure-Temperature Relationship of Lubricating Oils, Transaction of ASME, Journal of Basic Engineering, 85, 1963., 601-7.
- [77] Cheng, H.S.: A Refined Solution to the Thermal - Elastohydrodynamic Lubrication in Line Contacts, Transactions of ASLE, Vol. 8, 1965., 397-410.
- [78] Burton, R.A.: The Thermodynamics of Viscoelastic Film Under Shear and Compression, Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol. 180, Part 3B, 1966, 72-77.
- [79] Murch, L.E., Wilson, W.R.D.: A Thermal Elastohydrodynamic Inlet Zone Analysis, Trans. ASME, 97, 2 (1975 ) 212-216.
- [80] Sadeghi, F.; Sui, P.: Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Contacts, Trans. ASME, Journal of Tribology, 112, 2 , 1990., 189-195.
- [81] Dorn, W.S., Mc Cracken, D.D.: Numerical Methods with Fortran IV - Case Studies, John Wiley & Sons Inc., New York, 1972.
- [82] Baglin, K.P.: Some Aspects of Microelastohydrodynamic Lubrication of Rough Cylinders Finished with a Circumferential Lay, Proc. Instn. Engrs., Vol.204, Journal of Mechanical Engineering Science (1990) 145-158.
- [83] Boncompain, R., Frene, J.: Thermodynamic Analysis of a Finite Journal Bearings Static and Dynamic Characteristics, Proc. 6th Leeds-Lyon Symp. on Thermal Effects in Tribology, Institution of Mechanical Engineers, London (1980) 33-44.
- [84] Medwell, J.D., Gethin, D.T.: A Finite Element Analysis of Journal Bearing Lubrication, Proc. 10th Leeds-Lyon Symp. on Tribology, ed. D. Dowson et al, Butterworths, Guildford (1983).
- [85] Ferron, J., Frene, J.: A Study of Thermohydrodynamic Performance of a Plain Journal Bearing - Comparison Between Theory and Experiments, Transactions of ASME, Journal of Lubrication Technology, 105 (1983 ) 422-428.
- [86] Knight, J.D., Barret, L.E.: An Approximate Solution Technique for Multilobe Journal Bearings Including Thermal Effects with Comparison to Experiments, Transactions of ASLE, 26 (4), 1983., 501-508.

- [87] Lund, J.W., Hansen, P.K.: An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing, Part I: Theory, Transactions of ASME, Journal of Tribology, 106, 1984., 228-236.
- [88] Lund, J.W., Hansen, P.K.: An Approximate Analysis of the Temperature Conditions in a Journal Bearing, Part II: Application, Transactions of ASME, Journal of Tribology, 106, 1984., 237-245.
- [89] Boncompain, R., Fillon, M., Frene, J.: Analysis of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, Transactions of ASME, Journal of Tribology, 108 (1986 ) 219-224.
- [90] Khonsari, M.M., Beaman, J.J.: Thermohydrodynamic Analysis of Laminar Incompressible Journal Bearings, Transactions of ASLE, 29 (2) (1986) 141-150.
- [91] Khonsari, M.M.: A Review of Thermal Effects in Hydrodynamic Bearings, Part II: Journal Bearings, Transactions of ASLE, 30 (1) (1987 ) 26-33.
- [92] Knight, J.D., Barret, L.E.: Analysis of Axially Grooved Journal Bearings with Heat Transfer Effects, Transactions of ASLE, 30 (3) (1987) 316-323.

## KRATKI ŽIVOTOPIS

---

Dragan Žeželj rođen je 27. studenog 1965. godine u Varaždinu. Srednju matematičku školu je završio u Zagrebu. Dodiplomski studij na Fakultetu strojarstva i brodogradnje upisao je 1995. godine u Zagrebu, te diplomirao 1991.g. na usmjeranju "Energetika", odjel "Grijanje i klimatizacija".

Od 1992. do 1995. godine zaposlen je u poduzeću Grijanje, Zagreb, te radi na poslovima samostalnog konstruktora termoenergetske opreme. Tijekom zimskog semestra 1992. godine sudjeluje u izvođenju vježbi na Fakultetu strojarstva i brodogradnje iz kolegija Primjena računala kao honorarni asistent. Od 1995. do 1998 godine radi u poduzeću Larasystem d.o.o., Zagreb, na poslovima voditelja pojedinačnih radilišta.

Od kraja 1998. godine zaposlen je na Katedri za elemente strojeva i konstrukcija Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu u svojstvu mlađeg asistenta. Tijekom dosadašnjeg rada na fakultetu aktivno sudjeluje u nastavi iz sljedećih kolegija: Tehničko crtanje i dokumentacija, Elementi konstrukcija I i IIIB. Kao honorarni asistent sudjeluje u izvođenju vježbi iz kolegija Osnove mehaničkih konstrukcija pri studiju dizajna (Arhitektonski fakultet u Zagrebu), Tehnička dokumentacija pri Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, te Tehnička dokumentacija pri studiju fizike i politehnike (Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu).

Kao autor ili koautor objavio je 3 znanstvena i 10 stručnih radova u Hrvatskoj i inozemstvu. Član je Hrvatskog društva za elemente strojeva i konstrukcija. Govori i piše engleskim, a pasivno se služi njemačkim jezikom.

Oženjen je i otac jednog djeteta.

## SHORT BIOGRAPHY

---

Dragan Žeželj was born on November 27<sup>th</sup> 1965 in Varaždin. He completed secondary high school (mathematical gymnasia) in Zagreb, and graduated in 1991 at Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture of the University of Zagreb in field of Heating and Ventilation.

Since 1992 to 1998 he was employed in two companies as designer of thermo-energetic equipment and work-site manager.

Since fall 1998 he is younger assistant at the Department of Machine Elements and Design of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture participating in teaching and scientific activities.

As the author or co-author have published 3 scientific papers and 10 technical reports in Croatia and abroad. He is member of Croatian Society for Machine Elements and Design. Speaks and writes in English and can use German.

He is married and father of one child.