Numeričko modeliranje procesa deformiranja uz pretpostavku velikih deformacija

Karšaj, Igor

Doctoral thesis / Disertacija

2006

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:924269

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA UZ PRETPOSTAVKU VELIKIH DEFORMACIJA

DOKTORSKI RAD

Igor Karšaj, dipl.ing.

ZAGREB, 2006.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA UZ PRETPOSTAVKU VELIKIH DEFORMACIJA

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Prof.dr.sc. Jurica Sorić

Igor Karšaj, dipl.ing.

ZAGREB, 2006.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	539.389
Ključne riječi:	velike deformacije, multiplikativna neelastičnost, proširena slobodna energija, kinematsko i izotropno očvršćenje, anizotropni elastični zakon, anizotropna funkcija tečenja, eksponencijalno preslikavanje
Znanstveno područje:	TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje:	strojarstvo
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
Mentor rada:	Prof.dr.sc. Jurica Sorić
Broj stranica:	199
Broj slika:	69
Broj tablica:	4
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	120
Datum obrane:	
Povjerenstvo:	Prof.dr.sc. Ivo Alfirević, FSB, Zagreb Prof.dr.sc. Jurica Sorić, FSB, Zagreb Prof. Dr.-Ing. Carlo Sansour, School of Civil Engineering, University of Nottingham, UK
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

Zahvala (Acknowledgments)

During my PhD study I have been very closely working with Prof. Dr.-Ing. Carlo Sansour to whom I owe my deepest thanks. He stimulated, influenced and focused my study and writing. His versatility and dedication to scientific excellence provided a unique learning experience for me.

My sincere thanks go to Professor Jurica Sorić, my mentor and supervisor, a person who introduced me to an attractive field of computational mechanics. His detailed scientific criticism and suggestions for improvements of this thesis were of immeasurable help.

I am very thankful for valuable suggestions that I received from my jury member Professor Ivo Alfirević. The part of research I made at the Institute for Structural Analysis of the University of Karlsruhe. Special thanks in this respect go to Prof. Dr. Werner Wagner, Head of the Institute. Financial support of the Alexander von Humboldt Foundation is gratefully acknowledged. As well, I want especially to mention Professor Zdenko Tonković with whom I have had many productive discussions.

My greatest debt is to my parents who have provided encouragement and unwavering support throughout my life. I am very indebted to Jelena for her steady support and patience.

Sadržaj

Predgovor **viii**

Sažetak **xii**

Summary **xiv**

Popis slika **xv**

Popis oznaka **xxii**

1 Uvod **1**

1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja i motivacija 1

1.2 Hipoteza rada 12

2 Pregled osnova mehanike kontinuuma **15**

2.1 Tenzorska analiza i algebra 15

2.2 Kinematika kontinuuma 19

2.2.1 Konfiguracije i pomak materijalnog tijela 19

2.2.2 Tenzor gradijenta deformiranja 21

2.2.3 Tenzori deformiranosti i tenzori deformacije 23

2.2.4 Polarno razlaganje tenzora gradijenta deformiranja 26

2.2.5 Prijenos unaprijed i prijenos unazad 27
2.2.6 Tenzor gradijenta brzine 28
2.2.7 Multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja 28
2.3 Tenzori naprezanja 31
2.3.1 Vektor naprezanja i Cauchyjev tenzor naprezanja 31
2.3.2 Alternativni tenzori naprezanja 33
2.4 Opći zakoni mehanike kontinuuma 35
2.4.1 Zakon održanja mase 35
2.4.2 Zakon održanja količine gibanja 35
2.4.3 Zakon momenta količine gibanja 36
2.4.4 Zakon održanja energije 36
2.4.5 Drugi zakon termodinamike 37
2.4.6 Clausius-Duhemova nejednadžba 37
2.4.7 Disipacijska nejednadžba 38
2.5 Objektivnost tenzora 39

3 Velike elastoplastične deformacije 42
3.1 Kriteriji tečenja 42
3.2 Očvršćenje materijala 45
3.3 Lie grupa 48
3.4 Eksponencijalno preslikavanje 50
3.5 Materijalni modeli kod velikih elastoplastičnih deformacija 53

4 Izotropni materijalni model 56
4.1 Kinematičke relacije materijalnog modela 56

4.2 Slobodna energija i reducirana disipacijaska nejednakost 59
4.3 Multiplikativno razlaganje $\mathbf{F} = \mathbf{f_p}\mathbf{f_e}$ 64
4.4 Neelastično ponašanje materijala 66
4.5 Prijelaz na referentnu konfiguraciju 68
4.6 Numerička formulacija - lokalna iteracija 71
4.6.1 Derivacija $\partial\boldsymbol{\Gamma}/\partial\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$ 75
4.6.2 Derivacija $\partial\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}/\partial\mathbf{L_p}$ 77
4.6.3 Derivacija $(\partial\mathbf{L_p}/\partial\boldsymbol{\nu})(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\boldsymbol{\Gamma})$ 77
4.7 Algoritamski tangentni operator 80
4.7.1 Derivacije $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{L_p}$ 81
4.7.2 Derivacije $(\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C})|_{\text{explicit}}$ i $(\partial\boldsymbol{\Gamma}/\partial\mathbf{C})|_{\text{explicit}}$ 82
4.7.3 Derivacija $\partial\mathbf{L_p}/\partial\mathbf{C}$ 83

5 Anizotropni materijalni model 88
5.1 Slobodna energija i reducirana disipacijaska funkcija 88
5.2 Utjecaj rotacije krutog tijela na invarijante i slobodnu energiju 93
5.3 Anizotropne evolucijske jednadžbe i neelastični gradijent deformiranja 94
5.4 Numerička formulacija - lokalna iteracija 100
5.4.1 Derivacija $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$ 103
5.4.2 Derivacija $(\partial\mathbf{L_p}/\partial\boldsymbol{\nu})(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\boldsymbol{\Xi})$ 104
5.5 Algoritamski tangentni operator 107
5.5.1 Derivacija $(\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C})|_{\text{explicit}}$ 108
5.5.2 Derivacija $\partial\mathbf{L_p}/\partial\mathbf{C}$ 109
5.6 Materijalni parametri 110

5.6.1 Elastični materijalni parametri 110
5.6.2 Neelastični materijalni parametri 113
5.7 Vrtložnost kod plastičnih materijala 115

6 Formulacija konačnog elementa 120
6.1 Osnovne relacije u teoriji ljusaka 121
6.1.1 Opis ljuskastog kontinuuma 121
6.1.2 Pomaci i deformacije ljuskastog kontinuuma 124
6.1.3 Varijacijska formulacija 126
6.2 Formulacija konačnog elementa 128
6.2.1 Jednadžba konačnog elementa 129
6.2.2 *Enhanced* strain funkcional 130

7 Numerički primjeri 134
7.1 Elastoplastično deformiranje izotropnih materijala 135
7.1.1 Jednoosno opterećena membrana 135
7.1.2 Čisto smicanje 138
7.1.3 Pravokutna ploča opterećena cikličkim opterećenjem u ravnini 141
7.1.4 Napuhivanje kvadratne ploče 145
7.1.5 Scordelis-Lo cilindrični krov 149
7.1.6 Polovica sfere opterećena linijskim opterećenjem 152
7.2 Elastoplastično deformiranje anizotropnih materijala 159
7.2.1 Jednoosno opterećena membrana 159
7.2.2 *Isoerror* postupak 161
7.2.3 'Napuhivanje' kvadratne ploče 164
7.2.4 'Napuhivanje' kružne ploče 166

7.2.5 Kružna ploča opterećena radijalnim linijskim opterećenjem 171
7.2.6 Cilindrični krov opterećen linijskim opterećenjem . . . 175

8 Zaključak **181**

Bibliografija **185**

Predgovor

U vrijeme velikog tržišnog natjecanja za što boljim i jeftinijim proizvodima, učinkovitost izrade uz što veće iskorištenje materijala nameće se kao osnovni zahtjev u proizvodnji. Kod optimiranja proizvodnje veliku ulogu imaju inženjeri, koji uz dobro razumijevanje svih fizikalnih i mehaničkih procesa, moraju posjedovati i velika znanja u užem području svoga djelovanja. Konstruktori se susreću, uz mnoge druge, s problemom odabira najpogodnijeg materijala koji će zadovoljiti sve zahtjeve postavljene u razvoju novog proizvoda. Potrebno je napraviti ravnotežu između cijene, mase proizvoda, vanjskog izgleda materijala s njegovim mehaničkim svojstvima. Dugo vremena se eksperimentalno ispitivanje koristilo kao jedini način ispitivanja materijala. U posljednje vrijeme, razvojem jakih računala numeričko modeliranje procesa deformiranja dobiva sve veću ulogu kao zamjena za mnogo skuplju eksperimentalnu provjeru. Da bi se simuliralo stvarno ponašanje nekog proizvoda potrebno je napraviti detaljnu razradu problema. Kao prvo potrebno se odlučiti za numeričku metodu koja može opisati ponašanje proizvoda, npr. metoda konačnih elemenata, metoda konačnih volumena i dr. Odabir odgovarajućeg opisa ponašanja materijala (materijalni model) uz poznavanje mehaničkih svojstava toga materijala, opterećenja koja djeluju, međudjelovanja proizvoda s okolinom (rubni uvjeti) nameće se kao osnovni zadatak.

Ovaj rad je jedan korak prema što vjernijem modeliranju ponašanja ma-

terijala. Izveden je materijalni model koji se može koristiti za metale i materijale koji se ponašaju slično metalima. Modelira se elastično i plastično ponašanje materijala kod pojave velikih pomaka i deformacija (velike elastoplastične deformacije). Kako bi se što točnije opisalo plastično ponašanje materijala koriste se različiti modeli izotropnog i kinematičkog očvršćenja materijala. U ovom radu razvijen je novi oblik kinematičkog očvršćenja (*free-energy based*) koji omogućuje točniji prikaz ponašanja stvarnog materijala. Također se smanjuje i vrijeme proračuna jer novi oblik očvršćenja numerički pojednostavljuje izvedeni model što je vrlo bitno kod projektiranja. Razvijeni materijalni model može opisati ponašanje materijala koji imaju jednaka svojstva u svim smjerovima (izotropni materijali), ali i onih kojima su svojstva zadana s tri međusobno okomite ravnine (ortotropni materijali). Isto tako se formulacija može proširiti za materijale s proizvoljno raspoređenim materijalnim osima (anizotropni materijali). Opisivanje ortotropnog ponašanja materijala znatno povećava područje primjene ovog modela, npr. na opisivanje procesa dubokog vučenja i valjanja metala, modeliranje deformiranja različitih kompozitnih materijala kao i ponašanja biomaterijala.

Cijeli rad sastoji se od osam poglavlja.

- U **Poglavlju 1** dan je pregled dosadašnjih istraživanja u području malih i velikih elastoplastičnih deformacija s posebnim osvrtom na modeliranje kinematičkog očvršćenja. Također su navedeni radovi koji se bave istraživanjem anizotropnog ponašanja materijala s kratkim komentarom njihovih doprinosa, ali i nedostataka. Nedostaci dosadašnjih istraživanja su poticaj izradi ovog rada. Ukratko je iznesen način na koji su riješeni navedeni problemi.

- **Poglavlje 2** donosi kratak pregled osnova mehanike kontinuuma. Uglavnom su navedene veličine i operacije koje se kasnije pojavljuju u izvodu

novog materijalnog modela. Ovaj dio je također iskorišten kako bi se pokazao zapis veličina na način kako je korišteno dalje u ovom radu.

- Razni kriteriji tečenja materijala koji se koriste kod izotropnih, ali i ortotropnih materijala ukratko su opisani u **Poglavlju 3**. Definicija izotropnog i kinematičkog očvršćenja i njihova međusobna razlika također se može naći u ovom odjeljku. Prikazane su osnovne razlike između hipoelastičnih i hiperelastičnih materijalnih modela kao i prednosti jednog u odnosu na drugi. Definicija i način na koji se programira eksponencijalno preslikavanje kao i njegova derivacija s obzirom na argument detaljno su opisane.

- **Poglavlje 4** daje pregled izotropnog materijalnog modela s ugrađenim nelinearnim izotropnim i novim oblikom kinematičkog očvršćenja. Uz pomoć novog, u ovom radu predloženog, multiplikativnog razlaganja zadanog u trenutnoj konfiguraciji izvedene su konstitutivne jednadžbe. Za opisivanje prijelaza materijala u plastično područje koristi se von Misesova funkcija tečenja. Izvedene evolucijske jednadžbe prebačene su u referentnu konfiguraciju kako bi se olakšala njihova numerička integracija. Vremensko obnavljanje varijabli (*update*) ostvareno je upotrebom eksponencijalnog preslikavanja. Izveden je konzistentni tangentni modul koji znatno ubrzava vrijeme proračuna. Kod numeričke integracije poseban napor je uložen u pravilno prepoznavanje međuzavisnosti varijabli.

- Anizotropni materijalni model prikazan je u **Poglavlju 5**. Anizotropno ponašanje materijala određeno je u elastičnom području preko izraza za slobodnu energiju. S druge strane, anizotropno tečenje materijala zadano je preko kvadratne invarijantne funkcije izvedene prema Hillu.

Formulacija vrijedi općenito, ali je u ovom radu ograničena na ortotropne materijale. Svojstva kod ortotropnih materijala, zadaju se za tri međusobno okomite osi. Ovdje su te osi opisane pomoću strukturnih tenzora koji se lako mogu rotirati što znatno olakšava opisivanje položaja glavnih materijalnih pravaca u odnosu na početni koordinatni sustav. Izvedene jednadžbe su integrirane istim postupkom kao u poglavlju 4, ali su ovdje izrazi puno složeniji. Na kraju je opisana pojava vrtložnosti (*spin*) koja je naročito izražena kod anizotropnih materijala.

- **Poglavlje 6** donosi formulaciju konačnog elementa u koji je ugrađen izvedeni materijalni model na nivou točke integracije. Prikazane su osnovne jednadžbe pomoću kojih je izveden konačni element.

- Numerički primjeri prikazani su u **Poglavlju 7** koje je podijeljeno na dvije veće cjeline. U prvoj su prikazani primjeri napravljeni s izotropnim materijalnim modelom koji sadrži novi oblik kinematičkog očvršćenja. Rađena je usporedba dobivenih krivulja u dijagramu opterećenje - pomak s krivuljama iz dostupne literature. U drugom dijelu su primjeri napravljeni s ortotropnim materijalnim modelom. U oba slučaja za primjere su prikazani deformirani oblici kao i krivulje opterećenja za različite oblike očvršćenja ili položaja materijalnih osi (kod ortotropnog modela).

- Rad završava **Zaključkom** u kojem su pregledno navedeni svi znanstveni doprinosi.

Sažetak

U ovom radu izveden je materijalni model za opisivanje izotropnog i anizotropnog ponašanja materijala kod pojave velikih elastoplastičnih deformacija. Za model detaljno su izvedene jednadžbe potrebne za numeričku formulaciju.

Prvi, izotropni materijalni model donosi novi oblik kinematičkog očvršćenja izveden iz proširenog izraza za slobodnu energiju. Neelastična varijabla kinematičkog očvršćenja slijedi iz, u ovom radu predloženog, izraza za multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja u trenutnoj konfiguraciji. Izvedeni izraz za *back stress* je simetričan i dokazana je njegova objektivnost. Pokazano je da se simetričan *back stress* tenzor može dobiti samo u slučaju kada se derivira prošireni izraz za slobodnu energiju zadan u trenutnoj konfiguraciji. Kako bi se modeliralo tečenje materijala koristi se asocijativni von Misesov zakon tečenja proširen s mehanizmom nelinearnog izotropnog očvršćenja. U razvijenom numeričkom algoritmu primjenjuje se eksponencijalno preslikavanje (*exponential map*). U svrhu postizanja kvadratične konvergencije globalnog iteracijskog postupka, izveden je konzistentni elastoplastični tangentni modul.

Drugi dio rada odnosi se na modeliranje anizotropije u slučaju multiplikativne plastičnosti kao i detaljnu razradu numeričkog postupka. Anizotropno ponašanje ugrađeno je u elastični konstitutivni zakon pomoću materijalnih invarijanti. Njih čine strukturni tenzori koji određuju smjer glavnih osi i

elastična deformacija zapisana u obliku $\mathbf{C_e}$, koja je nezavisna o gibanju krutog tijela. Anizotropna granica tečenja modelirana je pomoću Hillovog oblika funkcije tečenja. Pretpostavlja se kvadratna funkcija materijalnih invarijanti po načelima teorema o funkcijama s nesimetričnim argumentima. Invarijante su određene pomoću strukturnih tenzora i Eshelbyjeva tenzora naprezanja. Iako formulacija vrijedi za općeniti anizotropni slučaj, ovaj rad je napravljen za slučaj ortotropnog ponašanja materijala. Očvršćivanje materijala u neelastičnom području opisano je modelom nelinearnog izotropnog očvršćenja. Integracija jednadžbi, kao i u izotropnom materijalnom modelu, napravljena je pomoću eksponencijalnog preslikavanja neelastičnog dijela gradijenta deformiranja. Jednadžbe potrebne za numeričku implementaciju modela u potpunosti su izvedene. Posebna pažnja posvećena je izvodu konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula. Pokazano je da konzistentna linearizacija može biti izvedena i za ovako složene modele uz potpunu upotrebu implicitne zavisnosti među varijablama. Razmotrena je pojava vrtložnosti plastičnih materijala (*plastic material spin*), koja je osobito uočljiva kod anizotropnih materijala, i to posebno njen utjecaj na disipaciju. Predložen je oblik invarijanti iz kojih se može dobiti formulacija bez pojave vrtložnosti.

Algoritmi su ugrađeni na nivou točke integracije u ljuskasti konačni element koji omogućuje primjenu trodimenzijskih konstitutivnih relacija. Učinkovitost predloženog algoritma pokazana je numeričkim primjerima.

Ključne riječi: velike deformacije, multiplikativna neelastičnost, elastoplastično ponašanje materijala, proširena slobodna energija, kinematsko očvršćenje, izotropno očvršćenje, anizotropni elastični zakon, anizotropna funkcija tečenja, eksponencijalno preslikavanje, vrtložnost plastičnih materijala

Summary

A constitutive model for isotropic and anisotropic elastoplasticity at finite strains together with its numerical implementation is developed. Accordingly, formulation is splitted into two parts.

In the isotropic material model, a free energy-based formulation incorporating the effect of kinematic hardening is proposed. The formulation is able to reproduce symmetric expressions for the back stress while incorporating the multiplicative decomposition of the deformation gradient. Kinematic hardening is combined with isotropic hardening where an associative flow rule and von Mises yield criterion are applied. It is shown that the symmetry of the back stress is strongly related to its treatment as a truly spatial tensor, where contraction operations are to be conducted using the current metric. The latter depends naturally on the deformation gradient itself. An accurate and trivial wise objective integration algorithm employing the exponential map is developed which preserves the plastic incompressibility condition. In order to ensure a high convergence rate in the global iteration approach, an algorithmic tangent operator is derived.

Second part of this work concernes anisotropic elastoplasticity at finite strains together with its numerical implementation. An anisotropic elastic constitutive law is described in an invariant setting by use of the structural tensors and the elastic strain measure $\mathbf{C_e}$. The elastic strain tensor as

well as the structural tensors are assumed to be invariant with respect to a superimposed rigid body rotation. An anisotropic Hill-type yield criterion, described by a non-symmetric Eshelby-like stress tensor and further structural tensors, is developed, where use is made of representation theorems for functions with no-symmetric arguments. The model considers non-linear isotropic hardening as well. Explicit results for the specific case of orthotropic anisotropy are given. The associative flow rule is employed and the features of the inelastic flow rule are discussed in full. It is shown that the classical definition of the plastic material spin is meaningless in conjunction with the present formulation. As well as in isotropic material model the associative flow rule is integrated using the exponential map. The numerical treatment of the problem is fully developed and expressions related to the local iteration and the consistent tangent operator are considered in detail. It is shown that while the consistent linearisation of the model is quite complicated, it still can be achieved if various intriguing implicit dependencies are identified and correctly dealt with.

The computational algorithms are implemented and applied to a shell finite element which allows the use of complete three-dimensional constitutive laws. Various numerical examples of three-dimensional deformations of whole structural components are presented. Robustness and efficiency of the proposed algorithm are demonstrated by numerical examples.

Keywords: large strains, multiplicative inelasticity, elastoplasticity, stored energy functions, kinematic hardening, isotropic hardening, anisotropic elastic law, anisotropic yield function, exponential map, plastic material spin

Popis slika

2.1 Konfiguracija i pomak materijalnog tijela 19
2.2 Gradijent deformiranja: materijalna i prostorna krivulja 22
2.3 Prikaz polarnog razlaganja tenzora gradijenta deformiranja . . 26
2.4 Mikromehanički efekti deformiranja na klizne sustave 29
2.5 Multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja 30
2.6 Vektor naprezanja za referentnu i trenutnu konfiguraciju . . . 32

3.1 Grafički prikaz von Misesove i Trescine plohe tečenja 43
3.2 Bauschingerov efekt 44
3.3 Grafički prikaz izotropnog očvršćenja 46
3.4 Grafički prikaz kinematičkog očvršćenja 47

6.1 Geometrija ljuskastog kontinuuma 122
6.2 Četveročvorni ljuskasti konačni element s 28 stupnjeva slobode 133

7.1 Jednoosno opterećena membrana: geometrija i materijalni parametri 135
7.2 Jednoosno opterećena membrana: način opterećivanja membrane 136
7.3 Jednoosno opterećena membrana: krivulje opterećenja za slučaj kinematičkog očvršćenja 136

7.4 Jednoosno opterećena membrana: krivulje opterećenja za slučaj kinematičkog očvršćenja 137
7.5 Jednoosno opterećena membrana: krivulje opterećenja za slučaj istovremenog izotropnog i kinematičkog očvršćenja . 138
7.6 Čisto smicanje: geometrija i materijalni parametri 139
7.7 Čisto smicanje: usporedba rezultata dobivenih pomoću izvedenog modela za izotropne materijale s rezultatima za materijalni model ugrađen u program za konačne elemente ABAQUS139
7.8 Čisto smicanje: usporedba rezultata dobivenih pomoću izvedenog modela za izotropne materijale s rezultatima iz Bruhns et al. [1] 140
7.9 Čisto smicanje: ovisnost posmičnih naprezanja o kutnoj deformaciji pri cikličkom opterećenju 141
7.10 Pravokutna ploča: geometrija i materijalni parametri . . . 142
7.11 Pravokutna ploča: prikaz cikličkog opterećenja kvadratne ploče pomoću dijagrama koji daje ovisnost narinutog pomaka točke A o vremenu 142
7.12 Pravokutna ploča: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj izotropnog očvršćenja . . 143
7.13 Pravokutna ploča: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj kinematičkog očvršćenja 143
7.14 Pravokutna ploča: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj izotropnog i kinematičkog očvršćenja 144
7.15 Pravokutna ploča: deformirani oblik za krajnji a) gornji i b) donji položaj 145

7.16 Napuhivanje kvadratne ploče: geometrija i materijalni parametri 146
7.17 Napuhivanje kvadratne ploče: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u Klinkel [2] za elastičan-idealnoplastičan slučaj 146
7.18 Napuhivanje kvadratne ploče: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za elastičan idealno plastičan slučaj, za slučaj izotropnog, kinematičkog očvršćenja kao i izotropnog i kinematičkog očvršćenja 147
7.19 Napuhivanje kvadratne ploče: deformirani oblik materijala s izotropnim i kinematičkim očvršćenjem za pomak a) $w_A = 0$ mm, b) $w_A = 33$ mm, c) $w_A = 85$ mm i d) $w_A = 140$ mm 148
7.20 Scordelis-Lo: a) geometrija, b) materijalni parametri 149
7.21 Scordelis-Lo: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u Roehl & Ramm [3] za elastičan idealno plastičan slučaj 150
7.22 Scordelis-Lo: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za elastičan idealno plastičan slučaj, za slučaj izotropnog, kinematičkog očvršćenja kao i izotropnog i kinematičkog očvršćenja 151
7.23 Scordelis-Lo: deformirani oblik materijala s izotropnim očvršćenjem pri pomaku a) $w_A = 0$ mm, b) $w_A = 600$ mm, c) $w_A = 1200$ mm i d) $w_A = 2500$ mm 152
7.24 Sfera: geometrija i materijalni parametri 153

7.25 SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u SORIĆ ET AL. [4] and TONKOVIĆ ET AL. [5] pri izotropnom očvršćenju i uz slobodne rotacije gornjeg ruba 154
7.26 SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u SORIĆ ET AL. [4] and TONKOVIĆ ET AL. [5] pri izotropnom očvršćenju i uz spriječene rotacije gornjeg ruba 155
7.27 SFERA: meridijalni presjek deformiranog oblika pri pomaku 55 mm za slučaj a) slobodnih rotacija gornjeg ruba i b) spriječenih rotacija gornjeg ruba 155
7.28 SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za slučaj izotropnog i izotropnog i kinematičkog očvršćenja za obje vrste rubnih uvjeta 156
7.29 SFERA: deformirani oblik - slobodne rotacije gornjeg ruba pri pomaku 55 mm 157
7.30 SFERA: deformirani oblik - spriječene rotacije gornjeg ruba pri pomaku 55 mm 157
7.31 JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: geometrija epruvete na kojoj je napravljen eksperiment, iz LADEMO ET AL. [6] . . 159
7.32 JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: geometrija i materijalni parametri 160
7.33 JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: usporedba plohe tečenja dobivene numerički i eksperimentalno 160
7.34 ISOERROR POSTUPAK: ploha tečenja s točkama opterećenja A, B i C, prema SIMO & TAYLOR [7] 161

7.35 ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj A 162
7.36 ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj B 162
7.37 ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj C 163
7.38 ANIZOTROPNA KVADRATNA PLOČA: geometrija i materijalni parametri 165
7.39 ANIZOTROPNA KVADRATNA PLOČA: deformirana konfiguracija pri zakretu materijalnih osi za a) 0°, b) 30°, c) 45° i d) 60° 166
7.40 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: geometrija modela 167
7.41 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 25 mm za a) materijal A i b) materijal C 168
7.42 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 50 mm za a) materijal A i b) materijal C 168
7.43 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 75 mm za a) materijal A i b) materijal C 169
7.44 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik na kraju procesa deformiranja za a) materijal A i b) materijal C 169

7.45 'Napuhivanje' kružne ploče: izometrijska projekcija deformirane konfiguracije za a) materijal A, b) materijal C i c) materijal B 170
7.46 Radijalno opterećena ploča: geometrija i materijalni parametri 172
7.47 Radijalno opterećena ploča: deformirani oblik pri pomaku točke T od 20 mm za a) materijal A i b) materijal C . . 173
7.48 Radijalno opterećena ploča: deformirani oblik pri pomaku točke T od 40 mm za a) materijal A i b) materijal C . . 173
7.49 Radijalno opterećena ploča: deformirani oblik pri pomaku točke T od 59 mm za a) materijal A i b) materijal C . . 174
7.50 Radijalno opterećena ploča: dijagram ovisnosti faktora opterećenja o radijalnom pomaku točke T za materijale A, B i C 174
7.51 Cilindrični krov: geometrija i materijalni parametri 175
7.52 Cilindrični krov: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 0° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz . . 176
7.53 Cilindrični krov: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 30° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz . . 176
7.54 Cilindrični krov: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 45° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz . . 177
7.55 Cilindrični krov: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 60° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz . . 177
7.56 Cilindrični krov: krivulje ovisnosti opterećenja o vertikalnom pomaku točke A 178
7.57 Cilindrični krov: krivulje ovisnosti opterećenja o vertikalnom pomaku točke B 179

Popis tablica

4.1 Integracijski algoritam konstitutivnog modela za izotropne materijale 79
4.2 Numerički algoritam konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula kod izotropnih materijala 87

5.1 Integracijski algoritam konstitutivnog modela za anizotropne materijale 106
5.2 Numerički algoritam konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula kod anizotropnih materijala 111

Popis oznaka

Popis oznaka		
OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\mathbf{b}$	lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti	left Cauchy-Green deformation tensor
$\mathbf{b_e}$	elastični dio lijevog Cauchy-Greenova tenzora deformiranosti	elastic part of left Cauchy-Green deformation tensor
$\mathbf{b_q}$	unutarnja varijabla kinematičkog očvršćenja	internal kinematic hardening variable
$\mathbf{C}$	desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti	right Cauchy-Green deformation tensor
c	parametar kinematičkog očvršćenja	kinematic hardening parameter
$\mathbf{C_e}$	elastični dio desnog Cauchy-Greenova tenzora deformiranosti	elastic part of right Cauchy-Green deformation tensor
$\mathbf{C_p}$	neelastični dio desnog Cauchy-Greenova tenzora deformiranosti	inelastic part of right Cauchy-Green deformation tensor
$\mathbf{d}$	tenzor brzine deformacije	rate of deformation tensor
$\mathcal{D}$	disipacija	dissipation

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\mathcal{D}_r$	reducirana disipacija	reduced dissipation
$\mathrm{d}s$	prostorna elementarna površina	spatial elemental surface
$\mathrm{d}s^\circ$	materijalna elementarna površina	material elemental surface
$\mathbf{E}$	Lagrangeov tenzor deformacije	Lagrangian strain tensor
E	modul elastičnosti	modulus of elasticity
$\mathbf{e}$	Eulerov tenzor deformacije	Eulerian strain tensor
e	energija	energy
$\mathbf{E}^{(1)}$	materijalni Biotov tenzor deformacije	Biot material strain tensor
$\mathbf{e}^{(1)}$	prostorni Biotov tenzor deformacije	Biot spatial strain tensor
$\mathbf{E}^{(2)}$	materijalni Henckyjev tenzor deformacije	Hencky material strain tensor
$\mathbf{e}^{(2)}$	prostorni Henckyjev tenzor deformacije	Hencky spatial strain tensor
$\mathbf{F}$	tenzor gradijenta deformiranja	deformation gradient tensor
$\mathbf{f}$	gustoća obujamne sile	body force density
$\mathbf{F_e}$	materijalni elastični dio gradijenta deformiranja	material elastic part of deformation gradient
$\mathbf{f_e}$	prostorni elastični dio gradijenta deformiranja	spatial elastic part of deformation gradient
$\mathbf{F_p}$	materijalni neelastični dio gradijenta deformiranja	material inelastic part of deformation gradient
$\mathbf{f_p}$	prostorni neelastični dio gradijenta deformiranja	spatial inelastic part of deformation gradient

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
F, G, H	Hillove materijalne konstante za normalna naprezanja	Hill's yield normal material constants
L, M, N	Hillove materijalne konstante za posmična naprezanja	Hill yield shear material constants
$\mathbf{G}$	Eshelbyjev tenzor naprezanja	Eshelby stress tensor
$\mathbf{g}_k$	kovarijantna baza	covariant base
$\mathbf{g}^k$	kontravarijantna baza	contravariant base
h	Cauchyjev tok entropije	Cauchy entropy flux
H	Piola-Kirchhoffov tok entropije	Piola-Kirchhoff entropy flux
H	parametar izotropnog očvršćenja	isotropic hardening parameter
$\mathbf{I}$	jedinični tenzor 2. reda	unit second order tensor
I_1, I_2, I_3	invarijante tenzora drugog reda	second order tensor invariants
$I_1 \dots I_6$	invarijante kod ortotropne granice tečenja	orthotropic yield function invariants
J	Jacobijeva determinanta	Jacobian determinant
$J_1 \dots J_6$	invarijante elastične slobodne energije	elastic material invariants
$\mathbf{l}$	prostorni tenzor gradijenta brzine	spatial velocity gradient tensor
$\mathbf{L}$	materijalni tenzor gradijenta brzine	material velocity gradient tensor
${}_i\mathbf{M_e}$	strukturni tenzor elastične otrotropije	structural tensor for elastic orthotropy
${}_i\mathbf{M_y}$	strukturni tenzor otrotropne granice tečenja	structural tensor at yield orthotropy

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\mathbf{n}$, $\mathbf{N}$	prostorni i materijalni jedinični vektor normale	spatial and material unit vector
$\mathbf{P}$	prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja	first Piola-Kirchhoff stress tensor
$\mathbf{R}$	tenzor zakreta	rotation tensor
r, R	prostorni i materijalni izvor entropije	spatial and material entropy source
$\tilde{r}$, $\tilde{R}$	izvor entropije po jedinici vremena i jedinici obujma u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji	entropy source per unit time and per unit current and reference volume
$\mathbf{Q}$	ortogonalan tenzor	orthogonal tensor
$\mathbf{Q}$	*back stress* u referentnoj konfiguraciji	referent back stress
$\mathbf{q}$	*back stress* tenzor u trenutnoj konfiguraciji	spatial back stress
$\mathbf{S}$	drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja	second Piola-Kirchhoff stress tensor
$\tilde{S}$	entropija	entropy
$\tilde{s}$, $\tilde{s}_c$	gustoća entropije u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji	entropy per unit spatial and material volume
t	vrijeme	time
$\mathbf{t}$	površinsko opterećenje	surface traction
$\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$	prostorni i materijalni vektor naprezanja	spatial and material stress vector
$\tilde{T}$	ukupni prirast entropije	total production of entropy
$\mathbf{T_B}$	Biotov tenzor naprezanja	Biot stress tensor

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\mathbf{U}$	desni tenzor izduženja	right strech tensor
$\mathbf{U}$, $\mathbf{u}$	vektor pomaka u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji	displacement vector at referent and spatial configuration
$\mathbf{v}$	lijevi tenzor izduženja	left strech tensor
v, V	prostorni i materijalni obujam	spatial and material volume
${}_i\mathbf{v_e}$	materijalne osi elastične ortotropije	priveleged material directions for elastic orthotropy
${}_i\mathbf{v_y}$	materijalne osi za otrotropnu granicu tečenja	priveleged material directions at yield orthotropy
$\mathbf{w}$	tenzor vrtložnosti	spin tensor
w	snaga naprezanja	stress power
$\mathbf{w_p}$, $\mathbf{W_p}$	prostorna i materijalna vrtložnost plastičnih materijala	spatial and referent plastic material spin
$\mathbf{X}$	materijalne koordinate	material coordinates
$\mathbf{x}$	prostorne koordinate	spatial coordinates
Y	varijabla izotropnog očvršćenja	isotropic hardening variable
Z	unutarnja varijabla izotropnog očvršćenja	internal isotropic hardening variable
α_1, α_2	elastični koeficijenti	elastic constants
$\alpha_1 \dots \alpha_{12}$	elastične materijalne konstante	elastic material constants
$\mathcal{B}$	područje kontinuuma	continuum body
$\beta_1 \dots \beta_9$	materijalne konstante pri ortotropnoj granici tečenja	yield material constants
Γ	materijalna krivulja	material curve

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\boldsymbol{\Gamma}$	materijalni relativni tenzor naprezanja	referent relative stress tensor
$\boldsymbol{\gamma}$	prostorni relativni tenzor naprezanja	spatial relative stress tensor
γ	prostorna krivulja	spatial curve
θ	apsolutna temperatura	absolut temperature
θ^{α}	prostorne koordinate	spatial coordinates
λ	plastični množitelj	plastic multiplier
ν	Poissonov faktor	Poisson's ratio
$\boldsymbol{\nu}$	jedinični vektor normale na plohu tečenja	normal to yield surface
$\boldsymbol{\Xi}$	tenzor naprezanja sličan Eshelbyjevom tenzoru	Eshelby-like stress tensor
$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}$	Mandelov tenzor naprezanja	Mandel stress tensor
ρ	gustoća u trenutnoj konfiguraciji	spatial density
$\rho_{\circ}$	gustoća u referentnoj konfiguraciji	referent density
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyjev tenzor naprezanja	Cauchy stress tensor
σ_{ij}^{Y}	granica tečenja ortotropnog materijala	orthotropic yield stresses
σ_Y	granica tečenja	yield stress
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoffov tenzor naprezanja	Kirchhoff stress tensor
ϕ	funkcija tečenja	yield function
χ	gibanje tijela	body motion
χ	ekvivalentna granica tečenja	equivalent yield stress

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
ψ	Helmholtzova slobodna energija	Helmholtz free energy
ψ_{e}	elastična Helmholtzova slobodna energija	elastic Helmholtz free energy
ψ_{i}	dio Helmholtzove slobodne energije koji se odnosi na izotropno očvršćenje	isotropic hardening part of Helmholtz free energy
ψ_{k}	dio Helmholtzove slobodne energije koji se odnosi na kinematičko očvršćenje	kinematic hardening part of Helmholtz free energy
Ω	proizvoljno područje fizikalnog prostora	arbitrary region of physical space
$\partial\Omega$	rubna ploha	boundary surface

Ostale oznake i indeksi		
OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\dot{\square}$	derivacija po vremenu	time derivative
$\tilde{\square}$	tenzor u međukonfiguraciji	tensor at the intermediate configuration
$\square^{\mathrm{T}}$	transponirani tenzor	transposed tensor
$\square^{-1}$	inverzni tenzor	inverse tensor
$\square_{\mathrm{e}}$	elastični dio tenzora $\square$	elastic part of tensor $\square$
$\square_{\mathrm{p}}$	neelastični dio tenzora $\square$	inelastic part of tensor $\square$
$\square^{+}$	zapis vrijednosti na gornjoj plohi ljuske	notation for upper surface
$\square^{-}$	zapis vrijednosti na donjoj plohi ljuske	notation for lower surface
$\square^{s}$	zapis vrijednosti na rubnoj plohi	notation for lateral surface
$\| \square \|$	norma tenzora	norm of tensor
$\frac{\partial \square_1}{\partial \square_2}\big\|_{\mathrm{explicit}}$	derivacija po argumentu deriviranja ($\square_2$), ali samo tamo gdje je taj argument u funkciji eksplicitno izražen	derivative of those terms which explicitly appear in the quantity with respect to which the derivative is considered
$\det \square$	determinanta	determinant
$\mathrm{dev}\, \square$	devijatorski dio tenzora	deviatoric tensor
$\mathrm{div}\ \square$	divergencija tenzora	divergence of tensor
$\mathrm{grad}\ \square$	gradijent tenzora	gradient of tensor
$\mathrm{tr}\, \square$	trag tenzora	trace of tensor

OZNAKA	HRVATSKI NAZIV	ENGLESKI NAZIV
$\mathrm{sph}\,\square$	sferni dio tenzora	spherical tensor
$GL^+(3,\mathbb{R})$	grupa linearnih transformacija s pozitivnim determinantama kod matrica dimenzije 3x3	linear group of 3×3 real matrices with positive determinant
$SL^+(3,\mathbb{R})$	posebna grupa linearnih transformacija kod matrica dimenzije 3x3 koja ima determinante jednake jedinici, $\det\square = 1$	special linear group of 3×3 real matrices with determinants equal one, $\det\square = 1$

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja i motivacija

Numeričko modeliranje stvarnog ponašanja materijala u elastoplastičnom području predmet je istraživanja velikog broja znanstvenika što je rezultiralo mnogim znanstvenim publikacijama. Najčešće se koriste dva načina modeliranja očvršćivanja materijala; izotropno i kinematičko očvršćenje. Modeliranje odgovarajućeg oblika kinematičkog očvršćenja je vrlo složeno i njegovo točno modeliranje uz pretpostavku velikih deformacija još je uvijek vezano uz veliki broj otvorenih pitanja.

Prvi modeli kinematičkog očvršćenja razvijeni su u teoriji malih deformacija (*small strain theory*) čija je formulacija relativno jednostavna. Modeli kinematičkog očvršćenja mogu se podijeliti u dvije osnovne grupe. U prvu grupu pripadaju radovi u kojima se modelira konstitutivna jednadžba iz koje se integriranjem može dobiti izraz za *back stress* (*rate-type model*). Razvijeni su razni modeli, od jednostavnih do vrlo složenih. Jedan od jednostavnijih,

ali vrlo često korišten je Pragerov model kinematičkog očvršćenja, PRAGER [8], gdje je *back stress* proporcionalan plastičnom dijelu tenzora deformacije. Kasnije je taj model često korišten npr. u SORIĆ ET AL. [4], BATHE & MONTANS [9]. Armstrong-Frederickov model je nelinearni oblik kinematičkog očvršćenja, vidi ARMSTRONG & FREDERICK [10], koji koristi više parametara pa bolje može opisati stvarno ponašanje materijala. Može se naći u radovima YAGUCHI ET AL. [11], WANG ET AL. [12]. Razni drugi načini modeliranja mogu se još naći u CHABOCHE & NOUAILHAS [13], LEHMANN [14], TONKOVIĆ ET AL. [5]. U drugu grupu pripadaju modeli gdje se ponašanje materijala, ali i očvršćenje opisuju pomoću odgovarajuće potencijalne funkcije (prošireni izraz za slobodnu energiju). Prvi takav model predložio je ZIEGLER [15], a kasnije se s manjim promjenama može naći kod MARTIN & NAPPI [16], REDDY & MARTIN [17], NGUYEN [18], PUZRIN & HOULSBY [19]. Jednadžbe koje opisuju plastično ponašanje materijala izravno slijede iz potencijalne funkcije dok se izraz za kinematičko očvršćenje se dobije u eksplicitnom obliku. To predstavlja određenu prednost u odnosu na *rate-type* modele kinematičkog očvršćenja. Upotreba potencijalne funkcije pri modeliranju kinematičkog očvršćenja kod teorije malih deformacija relativno je lagana zbog pretpostavke o aditivnom razlaganju tenzora deformacije.

Nedostaci teorije malih deformacija javljuju se kod njene primjene na probleme gužvanja materijala, dubokog vučenja, *crasha* i sl. U tim slučajevima nastaju velike deformacije tako da se pretpostavke usvojene u teoriji malih deformacija više ne mogu primijeniti s dovoljnom točnošću. Prijelaz u područje velikih deformacija (*large strain theory*) nije ni u kojem slučaju trivijalan već zahtjeva veliki oprez. Za razliku od aditivnog razlaganja tenzora deformacije u teoriji malih deformacija, teorija velikih deformacija temelji se na složenijem multiplikativnom razlaganju tenzora deformiranja, kao što je

predloženo u radovima Kröner (1960) i Lee (1969). Multiplikativno razlaganje znatno otežava numeričko modeliranje pa se u nekim radovima upotrebom logaritamske deformacije uspjelo dobiti mnogo jednostavnije aditivno razlaganje tenzora deformacije, npr. Eterovic & Bathe [20], Perić et al. [21], Rouainia & Perić [22], Sansour & Kollmann [23], Sansour & Wagner [24]. Aditivno razlaganje omogućuje primjenu metoda teorije malih deformacija i to znatno pojednostavljuje numeričko modeliranje. Ipak, pristup temeljen na logaritamskoj deformaciji ima i nekih nedostataka. Logaritamska deformacija zahtjeva upotrebu polarnog razlaganja što utječe na složenost izraza. Vrlo je složeno dobiti derivaciju logaritamskih deformacija jer uz tenzore izduženja koji su funkcije vremena također su i glavni pravci (*principal direction*) promjenjivi s vremenom. Također, ako se slobodna energija i odabere kao kvadratna funkcija logaritamskih deformacija, ona kod vrlo velikih deformacija nema eliptični oblik. Pošto je u teoriji velikih deformacija potrebno razlikovati različite konfiguracije, razvijeni su različiti materijalni modeli vezani uz referentnu konfiguraciju, Svendsen [25], Sansour & Wagner [26], Wallin et al. [27], međukonfiguraciju (*intermediate*), Tsakmakis [28], Menzel et al. [29], ili uz trenutnu konfiguraciju, Dogui & Sidoroff [30], Bruhns et al. [1], Başar & Itskov [31], Sorić et al. [32]. U trenutnoj konfiguraciji uobičajeno je koristiti Kirchhoffov i Cauchyjev tenzor naprezanja, što je naročito pogodno jer oni imaju fizikalno značenje, u međukonfiguraciji Mandelov tenzor dok se u referentnoj konfiguraciji koriste drugi Piola-Kirchhoffov ili Eshelbyjev tenzor naprezanja (Maugin [33]).

Prilikom modeliranja izotropnog očvršćenja čest izbor je nelinearna funkcija prema Voceu (1955) koja vrlo dobro može opisati stvarnu promjenu plohe tečenja. S druge strane, proširenje formulacije kinematičkog očvršćenja iz teorije malih u velike deformacije zahtjeva puno više truda i opreza. Kao i kod

tenzora naprezanja, oblik *back stress* tenzora ovisi o konfiguraciji u kojoj je definiran.

Kada se *rate-type* model kinematičkog očvršćenja modelira u trenutnoj konfiguraciji, konstitutivna jednadžba za *back stress* mora biti objektivna derivacija. Postizanje objektivnosti nije jednostavno, tako se primjerice za nekada često primjenjivanu Zaremba-Jaumannovu derivaciju pokazalo da daje fizikalno neprihvatljive rezultate pri velikim rotacijama. Razvijeni su i mnogi drugi oblici objektivnih derivacija kao npr. Oldroydova, Cotter-Rivlinova, Truesdellova, Green-Naghdijeva. Simo je pokazao da se integriranjem tih objektivnih derivacija ne može u potpunosti opisati elastično nelinearno ponašanje, Simo & Hughes [34]. U člancima Reed & Atluri [35], Im & Atluri [36], Johnson & Bammann [37], Fish & Shek [38] mogu se naći opća razmatranja o objektivnim derivacijama. Razvijeni su različiti modeli koji opisuju kinematičko očvršćenje uz upotrebu različitih objektivnih derivacija. Pragerov model može se naći u Bruhns et al. [39], Xiao et al. [40], Gomaa et al. [41] (uz upotrebu logaritamske objektivne derivacije), zatim u Naghdabadi et al. [42] koji koristi *corotational rate* logaritamske deformacije. Frederick-Armstrongov model kinematičkog očvršćenja koristi se u Tsakmakis [28], Tsakmakis & Willuweit [43], Häusler et al. [44], Wang et al. [12]. Oblikovanje varijable kinematičkog očvršćenja pomoću Green-Naghdijeve objektivne derivacije može se naći u Eterovic & Bathe [20], Papadopoulos & Lu [45], Başar & Itskov [31], Schieck & Stumpf [46], Ekh & Runesson [47].

Druga mogućnost je modeliranje materijalnog modela i *back stress* tenzora u referentnoj konfiguraciji. Tu nije potrebno paziti na objektivnost jer veličine zadane u referentnoj konfiguraciji su invarijantne i ne ovise o gibanju tijela. Derivacija po vremenu nameće se kao idealno rješenje za konstitutivnu

jednadžbu koja se odnosi na kinematičko očvršćenje. *Back stress* mora u trenutnoj konfiguraciji biti simetričan jer je to veličina koja odgovara Kirchhoffovom tenzoru naprezanja i mora imati sličan oblik. Kirchhoffov tenzor je simetričan prema zakonu očuvanja momenta količine gibanja pa mora biti i *back stress*. No, ako se materijalni *back stress* tenzor prebaci u trenutnu konfiguraciju, on gubi simetričnost. Iz toga se može zaključiti da formulacija u referentnoj konfiguraciji nije dobro rješenje.

Također se mogu naći pokušaji proširivanja formulacija temeljenih na proširenom izrazu za slobodnu energiju iz teorije malih deformacija u teoriju velikih deformacija uz upotrebu multiplikativne dekompozicije gradijenta deformiranja, VAN DER GIESSEN [48], MENZEL ET AL. [29], SVENDSEN [25], ORTIZ & STAINIER [49], WALLIN ET AL. [27]. *Back stress* tenzor se dobije deriviranjem proširene slobodne energije s obzirom na neelastični dio gradijenta deformiranja pa ga se može zvati materijalnim tenzorom. Ti pokušaji nisu polučili uspjeh jer se prebacivanjem u trenutnu konfiguraciju gubi simetričnost *back stress* tenzora.

Jednadžbe materijalnog modela kao što su zakon tečenja, te jednadžbe koje opisuju izotropno i kinematičko očvršćenje predstavljaju sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda koje je potrebno riješiti uz određene početne i rubne uvjete. Postoji više različitih metoda od kojih su najčešće tzv. *return mapping* i eksponencijalno projiciranje (*exponential mapping*). Numerička integracija konstitutivnih jednadžbi na temelju *return mapping* algoritma je poseban oblik unatražne (*backward*) Eulerove metode. Prvo se provodi elastični prediktorski korak u kojem se zadovoljavaju uvjeti ravnoteže sila (*trial step*), a nakon toga slijedi plastični korektorski korak u kojem se zadovoljava kriterij tečenja (*plastic corrector*). Iterativnim ponavljanjem dolazi se do rješenja. Metoda je ograničena na male elastične deformacije. Može se

naći u radovima Simo & Ortiz [50], Simo & Hughes [34], Perić et al. [21], Wang et al. [12], Sorić et al. [32]. Postupkom eksponencijalnog projiciranja vrši se egzaktna integracija konstitutivnih jednadžbi po vremenu ili prirastu opterećenja uz pretpostavku velikih elastičnih i plastičnih deformacija. Metoda eksponencijalnog projiciranja prvi put je predložena u Eterovic & Bathe [20] i Weber & Anand [51] uz ograničenje na simetrične argumente. Proširena je u Sansour & Kollmann [23] za nesimetrične argumente funkcije, a u Sansour & Wagner [26] izveden je algoritam koji omogućuje numeričko računanje derivacija eksponencijalne funkcije po njenom argumentu. Metoda je primijenjena na materijalne modele u Rouainia & Perić [22], Miehe [52], Meschke & Liu [53], Başar & Itskov [31].

Da bi se ostvarila jednoznačna veza između deformacije i naprezanja u plastičnom području izvodi se tangentni modul. Jednostavniji oblik koji se može izvesti naziva se kontinuumski tangentni modul, npr. u Başar & Itskov [31], Wallin et al. [27]. Taj oblik tangente narušava kvadratičnu konvergenciju rješenja u globalnom Newtonovom iterativnom postupku rješavanja nelinearnih jednadžbi na nivou točke integracije konačnog elementa. Posljedica toga je sporija konvergencija rješenja što opet zahtjeva manje priraste. Puno učinkovitiji oblik je konzistentni elastoplastični tangentni modul (*consistent elastoplastic tangent modulus*). Naziv konzistentan slijedi iz toga što on dosljedno prati integracijski postupak. Predstavlja linearizaciju tenzora naprezanja s obzirom na njemu konjugirani tenzor deformacije. Pravilno izveden algoritam omogućuje kvadratičnu konvergenciju kod Newtonovog iterativnog postupka. Konzistetna linearizacija primijenjena je u mnogim materijalnim modelima, npr. Simo [54], Klinkel [2], Papadopoulos & Lu [45], Sansour & Kollmann [23], Fish & Shek [38], Sansour & Wagner [26], Sorić et al. [32].

Izotropni materijalni model je ograničen i s njim se ne mogu modelirati sve pojave koje se javljaju kod materijala. Pretpostavka da svaki dio materijala ostaje izotropan tijekom procesa deformiranja sve je manje točna što više odmiče proces deformiranja. Pojedina kristalna vlakna se produljuju u pravcu djelovanja veće sile i kao posljedica se javlja anizotropna struktura tj. makroskopski gledano odnos naprezanje - deformacija i granica tečenja više nisu jednaki u svim smjerovima. Taj oblik anizotropije naziva se inducirana anizotropija (*induced anisotropy*). S druge strane materijal može imati prethodno anizotropnu strukturu. To se javlja kod metala koji su hladno valjani ili nekih materijala na kojima su rađeni razni mehanički i termički postupci obrade u kojima je moguća rekristalizacija. Isto tako postoje materijali koji su po svojoj strukturi anizotropni npr. kompoziti, zatim neki biomaterijali (*annulus fibrosus*, kosti, krvne žile ...) i dr. Više se o mikrostrukturi materijala može naći u monografijama Hull & Clyne [55], Kocks et al. [56], Phillips [57]. Da bi se modeliralo anizotropno ponašanje najpogodnije bi bilo koristiti modele razvijene na mezo i mikro nivou (*crystal and polycrystal micro mechanics formulations, dislocation dynamics formulations*), ali te metode još uvijek zahtijevaju upotrebu snažnih računala i veliki utrošak vremena. Stoga je fenomenološko promatranje ponašanja materijala i modeliranje na makro nivou još uvijek vrlo atraktivno i privlači veliku pažnju.

Većina radova u prošlosti temeljena je na eksperimentalnoj potvrdi anizotropnog kriterija kod tečenja materijala. Eksperimentalna mjerenja za različite materijale i različite načine opterećenja mogu se naći u mnogim radovima, npr. Miastkowski & Szczepinski [58], Phillips & Moon [59], Ikegami [60], Helling et al. [61], Khan & Wang [62], Qui & Lippmann [63]. O teškoćama provođenja eksperimenta pri mjerenju plohe

tečenja i problemima opisivanja naprezanja i *back stress* tenzora može se naći u radu Ishikawa [64]. Jedan od najpopularnijih zapisa ortotropne granice tečenja je Hillov kriterij tečenja, vidi Hill [65]. To je ustvari prošireni von Misesov izraz, određen sa šest materijalnih komponenti. Njegov nedostatak je to što se ne mogu modelirati razna specifična eksperimentalno pokazana ponašanja određenih materijala. Zbog toga su razvijeni razni drugi matematički modeli temeljeni na pokusima provedenim za određene materijale. Tako za aluminijske legure postoji nekoliko različitih kriterija koji se mogu naći u sljedećim radovima Barlat et al. [66], Lademo et al. [6], Bron & Besson [67], Stoughton & Yoon [68], Banabic et al. [69]. Za materijale sa strukturom koja se sastoji od kubičnih kristala vrijedi granica tečenja prema Darrieulat & Montheillet [70]. Također se mogu naći različiti pokušaji traženja generalnog izraza za funkciju tečenja, koji će obuhvatiti više različitih formulacija, Karafillis & Boyce [71], Mollica & Srinivasa [72], Oller et al. [73], Wu [74]. Najveći nedostatak tih općih izraza je vrlo složen oblik koji se vrlo teško može koristiti u numeričkom modeliranju. Svi ovi izrazi rađeni su prema teoriji malih deformacija i teško se mogu zapisati veličinama koje vrijede u teoriji velikih deformacija. Iz tih razloga se Hillov kriterij nametnuo kao jednostavan i zadovoljavajuće točan izraz kojim se može modelirati granica tečenja, i koji se uz određene izmjene može koristiti u multiplikativnoj neelastičnosti tj. u teoriji koja se temelji na multiplikativnom razlaganju tenzora deformiranosti.

Anizotropno ponašanje najjednostavnije se može opisati tako da se algoritmi temeljeni na aditivnom razlaganju tenzora deformacije prošire na područje velikih deformacija. Papadopoulos & Lu [75] predložili su model za prikazivanje anizotropnih materijala pomoću vlastitih vrijednosti tenzora naprezanja i deformacije (*generalized stress-strain measures*, Papadopoulos

& Lu [45]) . Na sličan način problemu su pristupili i Schroeder et al. [76], uz određenu razliku pri upotrebi invarijanti kod zapisa slobodne energije i funkcije tečenja. Zakon tečenja ograničen im je samo na simetrične veličine, a pošto je formulacija rađena pomoću nesimetričnog Mandelova tenzora unosi se određena greška. U Miehe et al. [77] razvijen je algoritam za formulaciju anizotropije kod velikih elastoplastičnih deformacija temeljen na pojmu plastičnih metričkih tenzora uz upotrebu logaritamske deformacije. Prednosti ovih modela temeljenih na aditivnom razlaganju je jednostavan oblik za numeričko modeliranje i brže vrijeme računanja. No ti modeli su ograničeni na područje malih elastičnih deformacija. Itskov je pokazao da modeli temeljeni na aditivnom razlaganju tenzora deformacije daju loše rezultate kada se pojavljuju velike rotacije (npr. *simple shear* test), vidi Itskov [78].

Istovremeno, multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja se vrlo uspješno koristi za izotropne materijale. Taj način razlaganja je vrlo atraktivan zato što ima direktnu fizikalnu interpretaciju kada se promatraju klizne ravnine (klizna ravnina je ravnina s najgušće slaganim atomima u kristalnoj rešetci metala). Kod anizotropnog ponašanja materijala multiplikativna neelastičnost još uvijek nije u potpunosti istražena. Javljaju se problemi kod modeliranja elastičnog anizotropnog ponašanja kao i anizotropnog ponašanja materijala na granici tečenja. U literaturi se može naći nekoliko radova koji se na manje ili više uspješan način bave multiplikativnom neelastičnošću anizotropnih materijala. Tako je u Sansour & Kollmann [79] i Sansour & Bocko [80] dana samo formulacija elastičnog anizotropnog ponašanja materijala. Napravljen je pregled elastične anizotropije ovisno o formulaciji konstitutivnih jednadžbi u referentnoj, trenutnoj konfiguraciji ili međukonfiguraciji. Za određivanje osi ortotropije materijala (tri međusobno okomite ravnine) koriste se strukturni tenzori. Modeli opisuju anizotropno

viskoplastično ponašanje uz upotrebu Bodner-Partomova modela. Svendsen [81] donosi teoretski pregled nekih pogleda na modeliranje elastičnog i neelastičnog anizotropnog ponašanja. Posebno se razmatraju unutrašnje varijable, zapisane u obliku strukturnih tenzora, koje mogu opisivati pojavu inducirane anizotropije. Formulacija u trenutnoj konfiguraciji predstavljena je u Menzel & Steinmann [82]. Koriste se strukturni tenzori koji se transformiraju na kovarijantni način. U radu Eidel & Gruttmann [83] i Gruttmann & Eidel [84] također je izvedena multiplikativna formulacija ortotropne elastoplastičnosti. Sve jednadžbe zadane su u invarijantnom obliku s obzirom na međukonfiguraciju. U numeričkom postupku koristi se eksponencijalno preslikavanje. Kao veći nedostatak može se istaknuti nepotpuna formulacija funkcije tečenja. Naime, koristi se nesimetrični Mandelov tenzor, a granica tečenja modelirana je samo uz pomoć njegova simetričnog dijela. Drugačiji pristup modeliranja materijala nazvan je *substructure modelling* i potječe od Mandela i Dafaliasa. To je makroskopski pristup temeljen na mehanici kontinuuma koji uzima u obzir da se materijal sastoji od mnogo različito orijentiranih kristala (*substructure*) čiji se položaj i svojstva mogu opisati pomoću određenih unutarnjih veličina rotiranih na međukonfiguraciju. Modeli anizotropnog ponašanja temeljenih na modeliranju podstruktura (*substructure modelling*) mogu se naći kod Haupt & Kersten [85], Tsakmakis [86] i Bucher et al. [87]. Nadalje, potaknuti eksperimentima (npr. *reverse torsion*, *large strain shear* test i dr.) koji se ne poklapaju s modelima granice tečenja, navedenih u prethodnim odlomcima, razvijeni su anizotropni materijalni modeli vezani uz kristalnu strukturu metala. Koristi se plastična vrtložnost (*plastic spin*) kako bi se opisala promjena svojstava materijala kako za različite smjerove tako i promjena koja nastaje tijekom procesa deformiranja, vidi Kuroda [88], Dafalias [89], Kowalc-

zyk & Gambin [90], Tugcu et al. [91].

Kao što je već bilo spomenuto, modeliranje konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula znatno utječe na brzinu proračuna pomoću numeričkih algoritama. To je pogotovo značajno u tako složenim modelima koji se javljaju kod anizotropnog ponašanja materijala. Konzistentni tangentni modul se može naći u radovima Papadopoulos & Lu [75] i Schroeder et al. [76] koji se temelje na aditivnom razlaganju tenzora deformacije koja omogućava jednostavniji numerički postupak sličan onome u linearnoj teoriji. No, za multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja nije moguće naći, u dostupnoj literaturi, u potpunosti izveden postupak računanja tangentnog modula. Tako su npr. Menzel & Steinmann [82] i Eidel & Gruttmann [83] tangentni modul približno izračunali, zanemareni su neki članovi, jer je konzistentna linearizacija uz upotrebu multiplikativne dekompozicije gradijenta deformiranja smatrana presloženom. Konzistentni tangentni modul može se naći u Sansour & Kollmann [79] i Sansour & Bocko [80], no oni opisuju samo anizotropno elastično ponašanje materijala dok se funkcija tečenja smatra izotropnom.

Iz izloženog pregleda dosadašnjih istraživanja može se vidjeti da je ostalo dosta otvorenih pitanja koja je potrebno riješiti:

- Izotropno ponašanje materijala
    - Teško je modelirati kinematičko očvršćenje koje će opisati stvarno ponašanje materijala, a da pri tome zadovolji uvjete objektivnosti i da u trenutnoj konfiguraciji bude simetrično.
    - Potreba za integriranjem derivacije *back stress* tenzora.
    - Numerička integracija je vrlo zahtjevna. Numerički algoritam izveden za izotropno ponašanje ne može se jednostavno prilagoditi

za anizotropno ponašanje materijala.

- Anizotropno ponašanje materijala
  - Ne postoji jedan materijalni model koji objedinjuje sljedeće zahtjeve
    - multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja,
    - invarijantni zapis slobodne energije,
    - invarijantni zapis funkcije tečenja,
    - strukturni tenzori koji nezavisno mogu opisati smjerove elastične anizotropije i anizotropne granice tečenja,
    - upotreba eksponencijalnog preslikavanja za usklađivanje (*update*) varijabli.
  - Funkcija tečenja ograničena je na simetrične tenzore naprezanja.
  - Nije izveden konzistentni tangentni modul za multiplikativnu neelastičnost.

Svi ti nedostaci izloženih materijalnih modela stvaraju motiv da se uloži napor kako bi se napravio novi stabilniji algoritam koji će s većom točnošću opisati ponašanje materijala.

1.2 Hipoteza rada

Ovaj rad će pokušati riješiti otvorena pitanja navedena u prethodnom odjeljku. Moguće je razviti materijalni model koji će vjerno opisivati mehanizme očvršćenja materijala kod velikih elastoplastičnih deformacija. Pravilnim izvođenjem konstitutivnih jednadžbi bez pojednostavljenja, koja smanjuju točnost rješenja, moguće je povećati sigurnost i pouzdanost konstrukcija.

Prvi dio istraživanja temeljit će se na razvoju novog oblika kinematičkog očvršćenja iz proširenog izraza za slobodnu energiju. Posebnu pažnju je potrebno usmjeriti na pravilan odabir unutarnje neelastične varijable koja će opisati kinematičko očvršćenje. To nameće potrebu za zapisom novog oblika multiplikativne dekompozicije gradijenta deformiranosti u trenutnoj konfiguraciji. Prostorni neelastični dio gradijenta deformiranosti bit će tražena unutarnja varijabla koja zadovoljava zahtjev za objektivnošću. Simetričan oblik *back stress* tenzora može se ostvariti pravilnim izborom neelastičnog dijela slobodne energije koji se odnosi na kinematičko očvršćenje. Bit će primijenjena von Misesova funkcija tečenja zajedno s nelinearnim izotropnim očvršćenjem. Numerička integracija konstitutivnih jednadžbi materijalnog modela bit će napravljena uz pomoć Newtonovog iterativnog postupka i upotrebom eksponencijalnog preslikavanja. Bit će izveden konzistentni elastoplastični tangentni modul kao linearizacija drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja s obzirom na desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti. Model će se ugraditi na nivou točke integracije u konačni element razvijen u Sansour & Kollmann [23] i Sansour & Wagner [26].

Drugi dio istraživanja bit će usmjeren na proširenje modela kako bi se mogli provoditi numerički proračuni za anizotropne materijale. Anizotropno elastično ponašanje bit će modelirano uz korištenje multiplikativnog razlaganja tenzora deformiranosti preko slobodne energije. Izraz za slobodnu energiju bit će kvadratna funkcija invarijanti koje su određene preko tenzora deformacije i strukturnog tenzora. Strukturni tenzor određivat će glavne pravce materijala i te će se osi vrlo lako zakretati uz pomoć rotacijskih tenzora. Anizotropno plastično ponašanje bit će modelirano uz pomoć Hillovog oblika funkcije tečenja prilagođenog za velike deformacije. Funkcija tečenja također će biti određena pomoću invarijanti. Invarijante će se sastojati od struktur-

nih tenzora i tenzora naprezanja. Funkcija tečenja neće biti više ograničena na simetrične argumente što će predstavljati veliku prednost novog modela. Kod numeričke integracije koristit će se eksponencijalno preslikavanje, a konzistentni tangentni modul imat će isti oblik kao u izotropnom materijalnom modelu. To će predstavljati prednost tog oblika tangentnog modula jer se za drugačiji materijalni model zahtijevaju samo manje promjene (derivacija tenzora naprezanja i funkcije tečenja).

Poglavlje 2

Pregled osnova mehanike kontinuuma

Ovo poglavlje donosi pregled osnova mehanike kontinuuma s posebnim osvrtom na dijelove koji su važni za formulaciju novog materijalnog modela, prikazanu u poglavlju 4. Kao literatura korištene su sljedeće knjige Başar & Weichert [92], Alfirević [93], Holzapfel [94], Fung & Tong [95], Belytschko et al. [96], Lemaitre & Chaboche [97], Khan & Huang [98], Lubliner [99], u kojima se može naći i detaljniji pregled osnova mehanike kontinuuma.

2.1 Tenzorska analiza i algebra

U ovom odjeljku predstavljen je sažeti pregled tenzorske analize i algebre potrebne u daljnjem praćenju jednadžbi i njihovih izvoda. Zapis tenzora i operacija s tenzorima koristit će se na isti način dalje u tekstu.

Pojam tenzora se može definirati na tri načina:

1. kao operatore transformacije

2. kao elemente linearnih vektorskih prostora

3. kao sustav funkcija koji se pri transformaciji koordinatnih sustava ponašaju na određeni (tenzorski) način.

Potreba za korištenjem tenzora dolazi iz njihovog svojstva invarijantnosti, ne ovise o koordinatnom sustavu. Koriste se tri načina označivanja tenzora

1. Simbolički zapis pomoću masnih uspravnih slova, npr. $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Xi}$ ...

2. Zapis pomoću dijada, trijada i općenito polijada

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{g}_1 + v_2\mathbf{g}_2 + v_3\mathbf{g}_3 = v_k\mathbf{g}_k \\ \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{11}\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \sigma_{12}\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \cdots + \sigma_{33}\mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 = \sigma_{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \end{aligned}$$

3. Indeksni zapis, npr. v_i, σ_{ij} ...

U ovom radu većinom se koristiti simbolički zapis osim u slučajevima gdje se zbog složenosti izvoda simboličkim zapisom ne može u potpunosti prikazati složena struktura jednadžbi, tada se koristi indeksni zapis. No, taj prijelaz uvijek je posebno naglašen.

Za ilustraciju tenzorske algebre koriste se oznake i to za skalar λ, tenzor drugog reda $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ i tenzor četvrtog reda $\mathbf{D}$.

Skalarni umnožak

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \Longrightarrow C_{ij} = A_{ia}B_{aj}$$

Tenzorski umnožak

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \Longrightarrow D_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$$

Posebni tenzori

jedinični tenzor u krivolinijskim koordinatama

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i$$

jedinični tenzor u pravokutnim koordinatama

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverzni tenzor drugog reda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (A^{-1})^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{I}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

transponirani tenzor drugog reda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} &= (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{ij}\, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = A_{ji}\, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \\ (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \end{aligned}$$

simetrični tenzor

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

antisimetrični tenzor

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad A_{ij} = -A_{ji}$$

trag tenzora drugog reda

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}\ \mathbf{A} = \mathbf{I} : \mathbf{A} = A_i{}^i = A^i{}_i$$

norma tenzora drugog reda

$$\| \mathbf{A} \| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{\mathrm{tr}\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})}$$

ortogonalan tenzor

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$$

sferni dio tenzora drugog reda

$$\mathrm{sph}\ \mathbf{A} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\ \mathbf{A})\mathbf{I}$$

devijatorski dio tenzora drugog reda

$$\begin{aligned} \mathrm{dev}\,\mathbf{A} &= \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\ \mathbf{A})\mathbf{I} \\ \mathbf{A} &= \mathrm{dev}\,\mathbf{A} + \mathrm{sph}\ \mathbf{A} \end{aligned}$$

Dvostruko skalarno množenje

$$\lambda = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathrm{tr}\ (\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\ (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\ (\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}\ (\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})$$

$$\lambda = A_{ij}B_{ij}$$

$$\lambda = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathrm{tr}\ (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\ (\mathbf{B}\mathbf{A})$$

$$\lambda = A_{ij}B_{ji}$$

Deriviranje tenzora s obzirom na drugi tenzor

$$\mathbf{B}_{,\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial A_{kl}}\ \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = D_{ij}{}^{kl}\ \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l$$

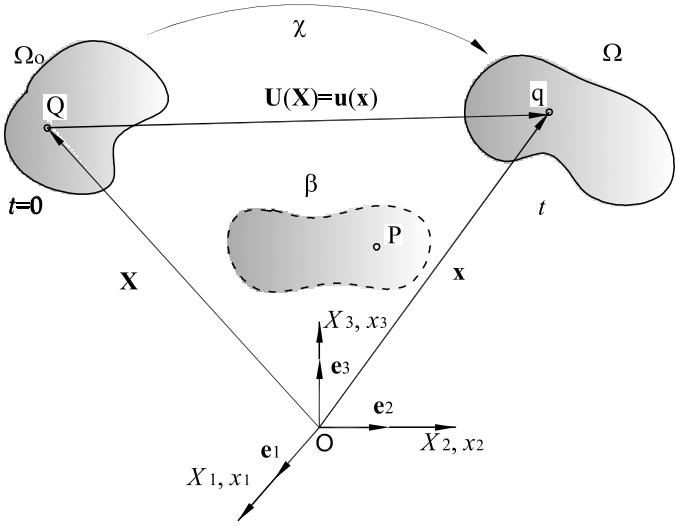
Invarijante tenzora drugog reda A

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \mathrm{tr}\ \mathbf{A} \\ \mathrm{I}_2 &= \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\ \mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}\ \mathbf{A}^2\right] \\ \mathrm{I}_3 &= \det \mathbf{A} = \frac{1}{3}\left[\mathrm{tr}\ \mathbf{A}^3 - \frac{3}{2}\mathrm{tr}\ \mathbf{A}^2 \mathrm{tr}\ \mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\ \mathbf{A})^3\right] \end{aligned}$$

2.2 Kinematika kontinuuma

2.2.1 Konfiguracije i pomak materijalnog tijela

U mehanici kontinuuma koristi se makroskopski pristup (*macroscopic approach*) koji tijelo promatra kao cjelinu zanemarujući njegovu kristalitnu i molekularnu strukturu. Pretpostavlja se da je tijelo jednoliko ispunjeno ma-



Slika 2.1: Konfiguracija i pomak materijalnog tijela

terijom i da posjeduje masu m. Na tijelu $\mathcal{B}$ koje se nalazi u trodimenzijskom Euklidovom prostoru u vremenu t promatra se jedna čestica koja se naziva materijalna točka, na slici 2.1 označena slovom P. S točkom O označeno je ishodište rereferentnog koordinatnog sustava s vektorima $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Tijelo $\mathcal{B}$ giba se u vremenu kroz prostor zauzimajući različite položaje, označene kao $\Omega_\circ, \cdots, \Omega$. Tih položaja može biti beskonačno mnogo, ali je svaki točno

određen u vremenu.

Položaj $\Omega_\circ$, u trenutku $t = 0$, često se naziva referentna odnosno materijalna konfiguracija (*referent or material configuration*). Položaj materijalne točke P na mjestu $Q \in \mathcal{B}$ u vremenu $t = 0$ određen je vektorom položaja $\mathbf{X}$ u odnosu na nepomično ishodište O. Ako se materijalno tijelo $\mathcal{B}$ s položaja Ω_o pomakne u položaj Ω u nekom trenutku t gdje je $t > t_0$ tada se to naziva trenutna ili prostorna konfiguracija (*actual or spatial configuration*). Sada se čestica P nalazi na mjestu $q \in \mathcal{B}$ određena vektorom položaja $\mathbf{x}$. Komponente vektora $\mathbf{X} = X_a\ \mathbf{e}_a$ i $\mathbf{x} = x_a\ \mathbf{e}_a$ nazivaju se materijalne (ili referentne) odnosno prostorne (ili trenutne) koordinate.

Postoje dva opisa gibanja kontinuuma:

Materijalni (referentni) pristup , naziva se još i Lagrangeov, gibanje se opisuje pomoću materijalnih koordinata (X_1, X_2 i X_3) i vremena t.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \tag{2.1}$$

gdje $\boldsymbol{\chi}$ predstavlja gibanje, tj. određuje položaj koordinate $\mathbf{x}$ u odnosu na $\mathbf{X}$.

Prostorni (trenutni) pristup , naziva se još i Eulerov, određen je prostornim koordinatama (x_1, x_2 i x_3) i vremenom t.

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), \tag{2.2}$$

gdje je $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ inverzno gibanje u ovisnosti o koordinati $\mathbf{x}$.

Pomak materijalne čestice određen je na sljedeći način:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \tag{2.4}$$

Lako se može pokazati da je $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

2.2.2 Tenzor gradijenta deformiranja

Gibanje materijalnog tijela opisano je izrazima (2.1) i (2.2). Konfiguracija Ω u trenutku t deformirana je s obzirom na referentnu konfiguraciju $\Omega_\circ$. Zbog deformiranja, točke, linije, površine i obujmi u referentnoj konfiguraciji transformiraju se u trenutnu konfiguraciju. Osnova kinematičke analize je određivanje odnosa geometrijskih elemenata u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji.

Tenzor gradijenta deformiranja $\mathbf{F}$ je vrlo bitna veličina u nelinearnoj mehanici kontinuuma jer predstavlja linearni operator koji povezuje diferencijalni element linije $\mathrm{d}\mathbf{X}$ u referentnoj konfiguraciji s diferencijalnim elementom $\mathrm{d}\mathbf{x}$ u trenutnoj konfiguraciji. Do njega se može doći sljedećim razmatranjem. Promatra se preslikavanje materijalne točke $\mathrm{Q} \in \Omega_\circ$ određene vektorom položaja $\mathbf{X}$ u točku $\mathrm{q} \in \Omega$ određene vektorom $\mathbf{x}$, slika 2.1. Na konfiguraciji $\Omega_\circ$ može se uočiti materijalna krivulja (*material curve*), $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Gamma}(\xi) \subset \Omega_\circ$, koja nije funkcija vremena i gdje ξ predstavlja parametar prema slici 2.2. Prilikom gibanja $\boldsymbol{\chi}$ ta krivulja se deformira u prostornu krivulju (*spatial curve*), $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(\xi, t) \subset \Omega$, u nekom trenutku t. Za trenutak t prostorna krivulja se može zapisati sljedećim izrazima

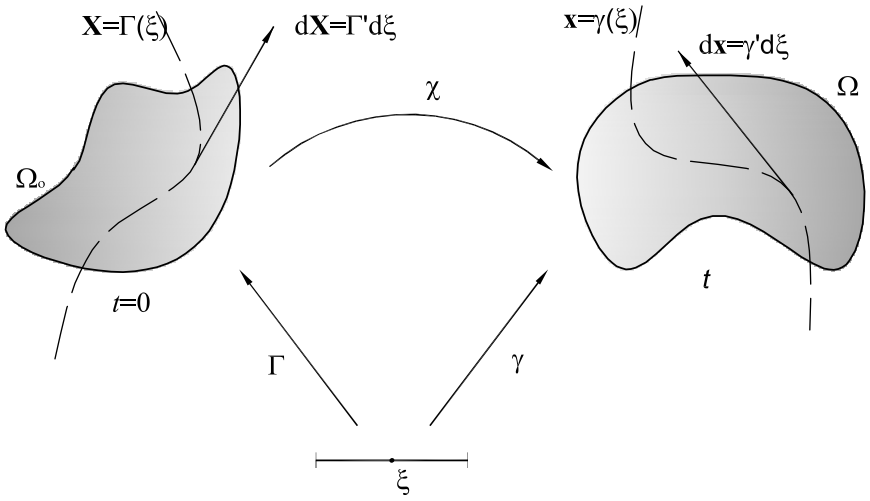
$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(\xi, t) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Gamma}(\xi), t). \tag{2.5}$$

Vektori tangente (*tangent vector*) na prostornu i materijalnu krivulju su zadani kao

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\xi, t)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}\mathbf{X} = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}(\xi, t)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi. \tag{2.6}$$

U literaturi se za $\mathrm{d}\mathbf{x}$ i $\mathrm{d}\mathbf{X}$ koriste i nazivi prostorni element krivulje (*spatial line element*) i materijalni element krivulje (*material line element*).

Uzimajući u obzir relaciju (2.5) i primjenom lančanog pravila izraz za



Slika 2.2: Gradijent deformiranja: materijalna i prostorna krivulja

prostorni linijski element d$\mathbf{x}$, zadan jednadžbom (2.6), može se zapisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\xi, t)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Gamma}(\xi), t)}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi. \tag{2.7}$$

Ako se u prethodnu jednadžbu uvrsti sljedeća zavisnost $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Gamma}(\xi)$, tada slijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi. \tag{2.8}$$

Druga derivacija na desnoj strani prema jednadžbi (2.6) predstavlja materijalni linijski element d$\mathbf{X}$ pa se sada izraz (2.8) može pisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.9}$$

gdje $\mathbf{F}$ predstavlja gradijent deformiranja zadan na sljedeći način

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \tag{2.10}$$

$\mathbf{F}$ opisuje gibanje u neposrednoj okolini oko materijalne točke. Pošto su u njemu nezavisne koordinate materijalne koordinate, naziva se i materijalni

tenzor deformiranja. Prostorni gradijent deformiranja označava se s $\mathbf{F}^{-1}$ i opisuje preslikavanje prostornog elementa d$\mathbf{x}$ u materijalni element d$\mathbf{X}$.

Iz jednadžbe (2.3) može se izraziti gradijent pomaka u materijalnoj konfiguraciji

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}}, \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{I}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

isto kao i gradijent pomaka u trenutnoj konfiguraciji iz jednadžbe (2.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}, \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2.3 Tenzori deformiranosti i tenzori deformacije

Tenzori deformiranosti povezuju kvadrat diferencijalnog elementa materijalne duljine $(\mathrm{d}s)^2$ u trenutnoj konfiguraciji s kvadratom diferencijalnog elementa $(\mathrm{d}s^\circ)^2$ u referentnoj konfiguraciji. Uzimajući u obzir jednadžbu (2.10) kvadrat elementarne duljine u trenutnoj konfiguraciji iznosi

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathrm{d}X_J \mathrm{d}X_K, \tag{2.13}$$

pa ako se uvede oznaka

$$C_{JK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} = F_{iJ} F_{iK} \tag{2.14}$$

može se pisati

$$(\mathrm{d}s)^2 = C_{JK} \mathrm{d}X_J \mathrm{d}X_K, \tag{2.15}$$

gdje je $\mathbf{C}$ desni Cauchy-Greenov tenzor. S druge strane kvadrat diferencijalnog elementa $(\mathrm{d}s^\circ)^2$ u referentnoj konfiguraciji je

$$(\mathrm{d}s^\circ)^2 = \mathrm{d}X_I \mathrm{d}X_I = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \frac{\partial X_I}{\partial x_k} \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k, \tag{2.16}$$

što se sada može zapisati kao

$$(\mathrm{d}s^\circ)^2 = b_{jk}^{-1}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k, \tag{2.17}$$

gdje je $\mathbf{b}^{-1}$ je inverzna vrijednost lijevog Cauchy-Greenov tenzora deformiranosti za kojeg vrijedi

$$b_{jk}^{-1} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j}\frac{\partial X_I}{\partial x_k} = F_{Ij}^{-1}F_{Ik}^{-1}. \tag{2.18}$$

Ponekad se u literaturi tenzor $\mathbf{b}$ naziva još i Fingerov tenzor deformiranosti. Tenzori deformiranosti $\mathbf{b}^{-1}$ i $\mathbf{C}$ dani u indeksnom zapisu u jednadžbama (2.14) i (2.18) mogu se prikazati u simboličkom zapisu kao

$$\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}. \tag{2.20}$$

Tenzori deformacije definirani su kao razlika kvadrata duljine elementarne dužine u trenutnoj i referentnoj konfiguraciji. Prema (2.13) i (2.16) vrijedi

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{X}\ \mathbf{C}\ \mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.21}$$

$$(\mathrm{d}s^\circ)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X}\ \mathbf{I}\ \mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.22}$$

pa je razlika kvadrata duljina

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s^\circ)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\ (\mathbf{C}-\mathbf{I})\ \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{X}\ 2\mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{X}, \tag{2.23}$$

gdje $\mathbf{E}$ označava Lagrangeov tenzor deformacije

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}). \tag{2.24}$$

Tenzor $\mathbf{E}$ još se zove i Green-Lagrangeov tenzor deformacije.

Kada je deformiranje tijela zadano u Eulerovim koordinatama, vrijedi

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathbf{I}\ \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.25}$$

$$(\mathrm{d}s^\circ)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathbf{b}^{-1}\ \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.26}$$

Sada je razlika kvadrata

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}s^\circ)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x}\,(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x}\,2\mathbf{e}\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.27}$$

gdje je $\mathbf{e}$ Eulerov tenzor deformacije

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}). \tag{2.28}$$

Naziva se još i Almansi-Eulerov tenzor deformacije.

Za tenzore deformacije koristi se i opći zapis, vidi Başar & Weichert [92]. Uz pomoć tenzora izduženja $\mathbf{U}$ i $\mathbf{v}$, vidi odjeljak 2.2.4, može se izraz za materijalne tenzore deformacije zapisati kao

$$\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{U}) := \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{za} \quad m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & \text{za} \quad m = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Za različite vrijednosti m postoje različiti materijalni tenzori deformacije

GREEN-LAGRANGE: $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$ za $m = 2$

BIOT: $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$ za $m = 1$

HENCKY: $\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$ za $m = 0$

Sličan zapis vrijedi za tenzore deformacije u trenutnoj konfiguraciji

$$\mathbf{e}^{(m)}(\mathbf{v}) := \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{v}^m - \mathbf{I}) & \text{za} \quad m \neq 0 \\ \ln \mathbf{v} & \text{za} \quad m = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

koji za različite vrijednosti m poprima sljedeće oblike

ALMANSI: $\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}^2)$ za $m = -2$

BIOT: $\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{h} = \mathbf{I} - \mathbf{v}$ za $m = -1$

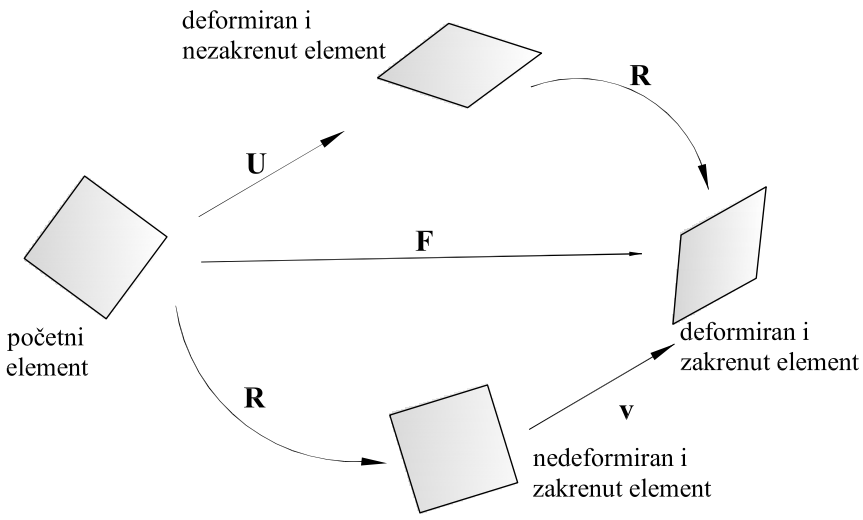
HENCKY: $\mathbf{e}^{(0)} = \ln \mathbf{v}$ za $m = 0$

2.2.4 Polarno razlaganje tenzora gradijenta deformiranja

Prema Cauchyjevom teoremu polarne dekompozicije bilo koji nesingularni tenzor drugog reda može se rastaviti na jedan ortogonalni i jedan simetričan tenzor. U skladu s tim gradijent deformiranja $\mathbf{F}$ razlaže se na tenzor zakreta $\mathbf{R}$ i tenzore izduženja $\mathbf{U}$ i $\mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{vR}. \tag{2.31}$$

Tenzori izduženja određeni su kao pozitivno definitni simetrični tenzori. Tenzor $\mathbf{U}$ odnosi se na referentnu konfiguraciju i naziva se desni tenzor izduženja (*right or material stretch tensor*) dok je $\mathbf{v}$ određen u odnosu na trenutnu konfiguraciju i zove se lijevi tenzor izduženja (*left or spatial stretch tensor*).



Slika 2.3: Prikaz polarnog razlaganja tenzora gradijenta deformiranja

Njihove su veze s tenzorima deformiranosti

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \qquad \text{i} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}^2 \tag{2.32}$$

Tenzor $\mathbf{R}$ u jednadžbi (2.31) predstavlja tenzor zakreta (*rotation tensor*). To je ortogonalni tenzor, za kojeg vrijedi da je $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ i njegova determinanta je jednaka jedinici, $\det \mathbf{R} = 1$. Na slici 2.3 prikazano je deformiranje elementa i to na dva načina ovisno kojim redosljedom su primjenjeni tenzori zakreta i izduženja.

Razlikuju se dva posebna slučaja; *rotacija krutog tijela* kod koje su $\mathbf{U} = \mathbf{v} = \mathbf{I}$ pa je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ i *čisto rastezanje* kod kojeg je $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ pa je $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{v}$.

2.2.5 Prijenos unaprijed i prijenos unazad

Kao što je već spomenuto, vektori i tenzori mogu pripadati odnosno biti zadani u odnosu na trenutnu ili u odnosu na referentnu konfiguraciju. Tenzor gradijenta deformiranja daje vezu između te dvije konfiguracije, a koristi se kod preslikavanja s trenutne konfiguracije na referentnu i obratno. Prijenos unaprijed (*push-forward*) je operacije koja preslikava vektore ili tenzore s referentne konfiguracije na trenutnu konfiguraciju. Označava se obično s $\boldsymbol{\chi}_*(\bullet)$. Prijenos unazad (*pull back*) je inverzna operacija koja vrši preslikavanje s trenutne na referentnu konfiguraciju. Koristi se oznaka $\boldsymbol{\chi}_*^{-1}(\bullet)$. Kod preslikavanja kovarijantnih tenzorskih komponenata $(\bullet)_k$ vrijedi

$$\boldsymbol{\chi}_*(\bullet)_k = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}(\bullet)_k\mathbf{F}^{-1}, \qquad \boldsymbol{\chi}_*^{-1}(\bullet)_k = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\bullet)_k\mathbf{F}, \tag{2.33}$$

dok za preslikavanje kontravarijantnih tenzorskih komponenata $(\bullet)^k$ vrijedi

$$\boldsymbol{\chi}_*(\bullet)^k = \mathbf{F}(\bullet)^k\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\chi}_*^{-1}(\bullet)^k = \mathbf{F}^{-1}(\bullet)^k\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}. \tag{2.34}$$

Dokaz ovih relacija može se naći primjerice u Holzapfel [94, str. 84].

2.2.6 Tenzor gradijenta brzine

Za razliku od elastičnog deformiranja, gdje se na osnovi početne i krajnje konfiguracije mogu odrediti deformacije, kod plastičnog ponašanja materijala bitno je poznavati cijeli proces deformiranja tj. potrebno je poznavati $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$. U skladu s tim javlja se potreba za računanjem tenzora gradijenta brzine (*velocity gradient*). Gradijent brzine je određen izrazom

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \qquad \text{ili} \qquad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l}\mathbf{F}. \tag{2.35}$$

Tenzor gradijenta brzine može se rastaviti na simetričan i antisimetričan dio

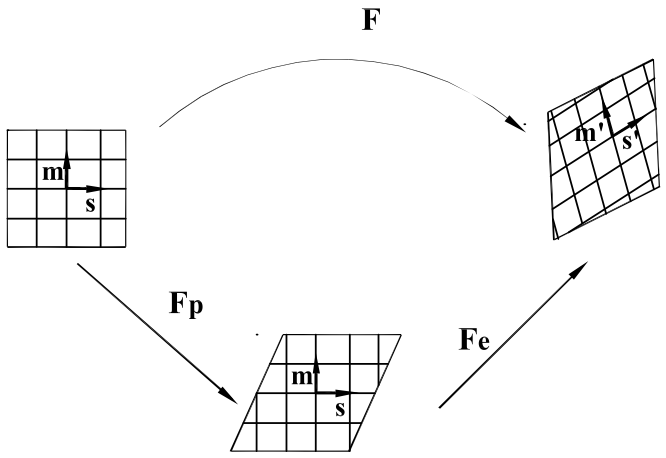
$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}, \tag{2.36}$$

gdje $\mathbf{d}$ označava tenzor brzine deformacije (*rate of deformation tensor*) i označava brzinu kojom se mijenja kvadrat elementarne duljine dok je $\mathbf{w}$ tenzor vrtložnosti (*spin tensor*) i on zapravo opisuje rotaciju čestice oko neke točke.

2.2.7 Multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja

Formulacija nelinearne plastičnosti potaknuta je mikromehaničkom predodžbom o plastičnosti kod monokristala (*single-crystal metal plasticity*). Kada je monokristal opterećen vlačno, silu se može rastaviti na njegovu normalnu i smičnu komponentu u nekoj ravnini kristala. Deformiranjem kristala nastaje niz paralelnih linija koje se nazivaju klizne linije. Činjenica da su klizne linije međusobno paralelne i da se ne moraju podudarati sa klizanjem uzduž ravnina maksimalnog posmičnog naprezanja, znači da je proces klizanja čvrsto povezan s kristalografijom kristala. Ravnina po kojoj se vrši klizanje naziva se klizna ravnina, a smjer u kojem se kliže je klizni pravac. Jedna klizna

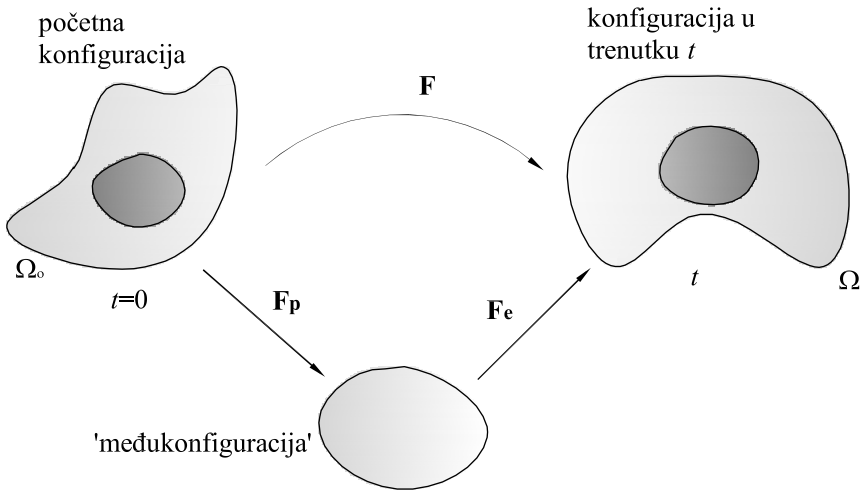
ravnina i njoj pripadajući klizni pravci čine klizni sustav. Klizni pravac je obično pravac s najgušće slaganim atomima, dok se ravnina s najgušće slaganim atomima naziva kliznom ravninom. Kod kristala s više kliznih sustava obično se aktivira onaj kojem je komponenta smičnog naprezanja najveća.



Slika 2.4: Mikromehanički efekti deformiranja na klizne sustave

Poznavanjem energije međuatomnih veza može se procijeniti veličina smičnog naprezanja potrebnog za plastično tečenje mehanizmom klizanja. Ta vrijednost je reda veličine $G/30$, gdje je G je modul smičnosti. Na osnovi toga teorijska smična čvrstoća monokristala za željezo ($G = 83000$ MPa) je $\tau_t = 2700$ MPa, a za aluminij ($G = 27000$ MPa) $\tau_t = 900$ MPa. No, eksperimentalno je utvrđeno da je smična čvrstoća za željezo samo 20 MPa, a za aluminij 1 MPa. Teoretska čvrtoća dobiva se jedino kod *whiskera* (sitni monokristali poput vlati). Razliku između teoretske i eksperimentalne čvrstoće objasnili su Polanyi, Orowan i Taylor. Oni su pretpostavili da realni kristali nisu savršeno građeni već imaju pogreške koje su nazvali dislokacijama. Tako se s mikromehaničkog stajališta plastično tečenje može predočiti kao tečenje

materijala kroz rešetku uz pomoć gibanja dislokacija.



Slika 2.5: Multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja

Kristali s jednim kliznim sustavom označenim kao $\mathbf{m}, \mathbf{s}$, gdje su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{s}$ dva međusobno okomita jedinična vektora, mogu se predočiti pomoću slike 2.4. Jedinični vektori $\mathbf{s}, \mathbf{m}$ vezani su uz rešetku i plastično tečenje može se opisati tenzorom $\mathbf{F_p}$ kao

$$\mathbf{F_p} = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{s} \otimes \mathbf{m}, \tag{2.37}$$

gdje je γ smično tečenje u kliznom sustavu. Na osnovi toga se može deformacija kristala rastaviti na deformacije uzrokovane rastezanjem i rotacijom kristalne rešetke $\mathbf{F_e}$, a onda djelovanjem $\mathbf{F_p}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e F_p}. \tag{2.38}$$

Prema ovom izrazu, stanje deformacije određeno tenzorom gradijenta deformiranja $\mathbf{F}$ može se pretpostaviti kao da je dobiveno prvo plastičnom deformacijom za gradijent deformiranja $\mathbf{F_p}$, a zatim elastično za $\mathbf{F_e}$, slika 2.5.

2.3 Tenzori naprezanja

U prethodnom odjeljku razmatrane su osnovne relacije kinematike kontinuuma prilikom gibanja i deformiranja materijalnog tijela. Kao posljedica, javlja se međudjelovanje susjednih materijalnih točaka unutar tijela koje utječe na pojavu naprezanja. Tenzor naprezanja može se izraziti u referentnoj ili trenutnoj konfiguraciji pa u skladu s tim postoje različiti zapisi.

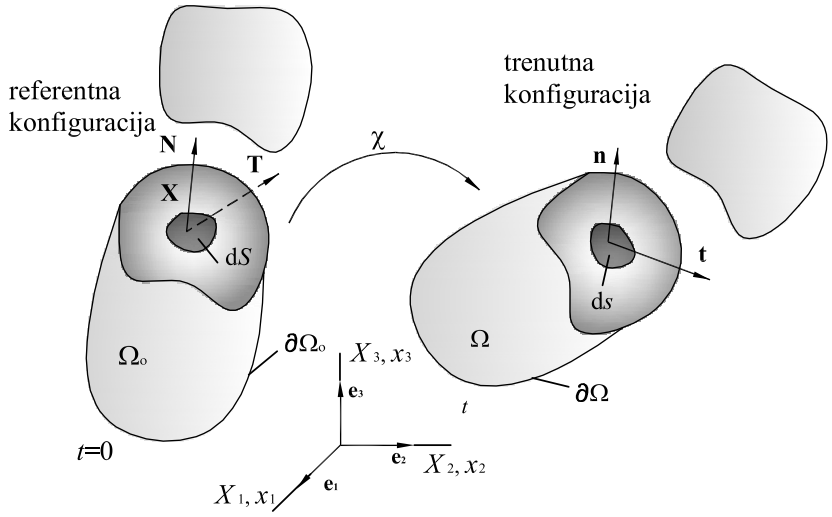
2.3.1 Vektor naprezanja i Cauchyjev tenzor naprezanja

Na slici 2.6 prikazano je materijalno tijelo $\mathcal{B}$ koje u vremenu t zauzima prostor Ω i ima rubnu plohu $\partial\Omega$. Na to tijelo djeluju površinske i obujamne sile koje uzrokuju gibanje i deformiranje tijela. Ako se to tijelo podijeli se na dva dijela, moraju na presječnim površinama djelovati sile kako bi se ti dijelovi nastavili gibati i deformirati na isti način kao prije podjele. Na presjeku tijela u trenutnoj konfiguraciji postoji elementarna ploština $\mathrm{d}s \subset \partial\Omega$ čija se orijentacija u prostoru može opisati s jediničnim vektorom $\mathbf{n}$. Dio ukupne sile koja djeluje na presječnim plohama, a odnosi se na elementarnu ploštinu $\mathrm{d}s$ označava se s $\mathrm{d}\mathbf{f}$. U trenutku $t = 0$ tijelo $\mathcal{B}$ je zauzimalo prostor $\Omega_\circ$ i imalo rubnu plohu $\partial\Omega_\circ$. U referentnoj konfiguraciji na presječnoj plohi postoji elementarna ploština $\mathrm{d}S \subset \partial\Omega_\circ$ s pripadajućim jediničnim vektorom smjera $\mathbf{N}$. Prema Cauchyjevom postulatu za svaku elementarnu površinu vrijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{t}\mathrm{d}s = \mathbf{T}\mathrm{d}S, \tag{2.39}$$

gdje je $\mathbf{t}$ Cauchyjev vektor naprezanja (*Cauchy traction vector*), a $\mathbf{T}$ je prvi Piola-Kirchhoffov vektor naprezanja (*first Piola Kirchhoff traction vector*).

Prema Cauchyjevom teoremu o naprezanjima (*Cauchy's stress theorem*)



Slika 2.6: Vektor naprezanja za referentnu i trenutnu konfiguraciju

postoje tenzori $\boldsymbol{\sigma}$ i $\mathbf{P}$ linearni s obzirom na $\mathbf{n}$ i $\mathbf{N}$ za koje vrijedi

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \qquad \longleftrightarrow \qquad t_a = \sigma_{ab} n_b, \tag{2.40}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} \qquad \longleftrightarrow \qquad T_a = P_{aA} N_A. \tag{2.41}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ je simetričan tenzor u trenutnoj konfiguraciji nazvan Cauchyjev tenzor naprezanja (*Cauchy stress tensor*), dok $\mathbf{P}$ označava prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja (*first Piola-Kirchhoff stress tensor*). Prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja je nesimetričan i u stvari dualan tenzor kojem jedan indeks odnosi na prostorne koordinate, a drugi na materijalne koordinate.

Na osnovi jednadžbi (2.39) do (2.41) moguće je dobiti vezu između ova dva tenzora naprezanja

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \qquad \text{ili} \qquad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}. \tag{2.42}$$

Ovdje J predstavlja Jacobijevu determinantu $J = \det \mathbf{F}$.

2.3.2 Alternativni tenzori naprezanja

Već spomenuti Cauchyjev i prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja predstavljaju samo dvije od više mogućnosti opisa stanja naprezanja u deformiranom tijelu. Najčešće korišteni oblici su:

Kirchhoffov tenzor naprezanja, $\boldsymbol{\tau}$:

Prostorni tenzor koji se vrlo često koristi jer ima svoje pravo fizikalno značenje. Od Cauchyjeva tenzora $\boldsymbol{\sigma}$ razlikuje samo za Jacobijan J pa se oni mogu poistovjetiti za nestlačive materijale ($J = 1$),

$$\boldsymbol{\tau} \;=\; J\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.43}$$

Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, S :

Nema fizikalno značenje ako se razmatra prikaz pomoću vektora naprezanja. To je simetričan, kontravarijantan tenzor vezan za referentnu konfiguraciju. Dobiven je prijenosom unazad (*pull back*) kovarijantnog tenzora $\boldsymbol{\tau}$,

$$\mathbf{S} \;=\; \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \quad\longleftrightarrow\quad S_{AB} = F^{-1}_{Aa}F^{-1}_{Bb}\tau_{ab}, \tag{2.44}$$

$$\mathbf{S} \;=\; J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}. \tag{2.45}$$

U mehanici kontinuuma često se koristi kod modeliranja materijalnih modela i konstitutivnih jednadžbi zbog svoje simetričnosti i zbog toga što je to u potpunosti materijalan tenzor.

Biotov tenzor naprezanja, $\mathbf{T}_{\mathrm{B}}$:

Biotov tenzor jest materijalni tenzor naprezanja određen sljedećim izrazom

$$\mathbf{T}_{\mathrm{B}} \;=\; \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \quad\longleftrightarrow\quad (T_{\mathrm{B}})_{AB} = R_{aA}P_{aB}, \tag{2.46}$$

gdje je $\mathbf{R}$ tenzor zakreta. Iz njegove definicije se može zaključiti da je to nesimetrični tenzor koji u osnovi nije pozitivno definitan.

Eshelbyjev tenzor naprezanja, G :

Eshelbyjev tenzor se još naziva i tenzor elastičnog energetskog momenta (*elastic energy-momentum tensor*). Zadan je sljedećim izrazom

$$\mathbf{G} = -J\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}}\left(\frac{\psi(\mathbf{F})}{J}\right) \quad \longleftrightarrow \quad G_{AB} = -JF_{aA}\frac{\partial}{\partial F_{aB}}\left(\frac{\psi}{J}\right), \tag{2.47}$$

prema Maugin [33] i Maugin & Epstein [100]. Može se također zapisati

$$\mathbf{G} = \psi(\mathbf{F})\mathbf{I} - \mathbf{CS} = \psi(\mathbf{F})\mathbf{I} - \boldsymbol{\Xi}, \tag{2.48}$$

gdje je $\mathbf{C}$ desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti, $\mathbf{S}$ drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, ψ slobodna Helmholtzova energija. Eshelbyjev tenzor $\mathbf{G}$ simetričan je s obzirom na $\mathbf{C}$

$$\mathbf{GC} = \mathbf{CG}^{\mathrm{T}}. \tag{2.49}$$

U jednadžbi (2.48) $\boldsymbol{\Xi}$ je tenzor naprezanja sličan Eshelbyjevom tenzoru (*Eshelby-like stress tensor*). Njihovi sferni dijelovi su jednaki, a razlikuju se u devijatorskom dijelu. Taj oblik naprezanja bit će korišten u izvodu materijalnog modela. Zbog sličnosti, dalje u tekstu naziva se Eshelbyjev tenzor naprezanja.

Mandelov tenzor naprezanja, $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}$:

Nesimetrični tenzor zadan u odnosu na takozvanu međukonfiguraciju

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}_{\mathbf{e}}^{-\mathrm{T}}. \tag{2.50}$$

Simetričan je s obzirom na elastični dio desnog Cauchy-Greenova tenzora deformiranosti $\mathbf{C_e}$

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}\mathbf{C_e} = \mathbf{C_e}\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^{\mathrm{T}}. \tag{2.51}$$

No, u posebnom slučaju kada se radi s izotropnim materijalima vrijedi klasični uvjet simetrije

$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}} = \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^{\mathrm{T}}. \tag{2.52}$$

2.4 Opći zakoni mehanike kontinuuma

2.4.1 Zakon održanja mase

Svako materijalno tijelo $\mathcal{B}$ posjeduje masu, m, koja je mjera količine materije u tijelu $\mathcal{B}$. Kod makroskopskog promatranja kontinuuma pretpostavlja se da je masa jednoliko i neprekinuto raspoređena, Alfirević [101]. Masa je skalarna veličina i u klasičnoj mehanici pretpostavlja se da se ne mijenja tijekom gibanja tj. masa ne može nastati ili nestati tj. vrijedi

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.53}$$

gdje je $\mathbf{v} = \mathrm{D}\mathbf{x}/\mathrm{D}t$ brzina gibanja. Za slučaj nestlačivog kontinuuma, $\dot{\rho} = 0$, pa vrijedi

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2.54}$$

2.4.2 Zakon održanja količine gibanja

Ako neko tijelo $\mathcal{B}$ zauzima neki prostor Ω i omeđeno je rubnom plohom $\mathrm{d}\Omega$ i na njegov elementarni obujam $\mathrm{d}V$ djeluje obujamna sila $\mathbf{f}$, a na njegovu elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ vanjsko kontinuirano opterećenje $\mathbf{t}$ prema zakonu

o održanju količine gibanja vrijedi

$$\text{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{2.55}$$

Ako je ubrzanje jednako nuli, jednadžbe gibanja prelaze u Cauchyjeve jednadžbe ravnoteže

$$\text{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \tag{2.56}$$

2.4.3 Zakon momenta količine gibanja

Zakon momenta količine gibanja kaže da je promjena po vremenu momenta količine gibanja za ishodište 0 jednaka rezultirajućem momentu svih vanjskih sila za istu točku 0. Matematičkim zapisom zakona momenta količine gibanja i razvojem tih jednadžbi kao konačni izraz dobije se sljedeća relacija

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \qquad\qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}, \tag{2.57}$$

Iz čega se može zaključiti da je Cauchyjev tenzor naprezanja simetričan. To vrijedi za nepolarni kontinuum dok za polarni (Cosseratov) kontinuum to nije slučaj.

2.4.4 Zakon održanja energije

Zakon održanja energije u referentnoj konfiguraciji ima sljedeći oblik

$$\rho\dot{e} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{div}\,\mathbf{Q} + R, \tag{2.58}$$

gdje je e označava unutrašnju energiju, $\mathbf{Q}$ gustoću toplinskog toka, a R je gustoća izvora topline u referentnoj konfiguraciji. Zakon održanja energije ujedno izražava i **prvi zakon termodinamike**. Porast ukupne energije sustava ($\rho\dot{e}$) jednak je zbroju dovedene topline sustavu ($-\text{div}\,\mathbf{Q}+R$) i izvršenog rada nad sustavom ($\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$). Ukupna energija može se podijeliti na kinetičku,

potencijalnu, unutrašnju energiju, prema potrebi tu ulaze i električna, kemijska i nuklearna energija.

2.4.5 Drugi zakon termodinamike

Smjer prijenosa energije točno je određen drugim zakonom termodinamike. Fizikalna razmatranja pokazala su da toplina uvijek prelazi s toplijeg na hladnije tijelo, isto tako mehanička energija se pri trenju pretvara u toplinu, ali se ona nikad ne može ponovo pretvoriti u mehaničku energiju. Da bi se to opisalo uvodi se pojam entropije $\tilde{S}$, koji predstavlja mjeru nereda i slučajnosti na mikroskopskoj razini. Raspodjela entropije po jedinici obujma u trenutnoj konfiguraciji je dana kao $\tilde{s}_c = \tilde{s}_c(\mathbf{x}, t)$ dok je u referentnoj konfiguraciji $\tilde{s} = \tilde{s}(\mathbf{X}, t)$. U skladu s tim entropija je

$$\tilde{S}(t) = \int_{\Omega} \tilde{s}_c(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}v = \int_{\Omega_o} \tilde{s}(\mathbf{X}, t)\mathrm{d}V. \tag{2.59}$$

Brzina promjene entropije zadana je izrazom

$$\varrho(t) = -\int_{\partial\Omega} \mathbf{hn}\mathrm{d}s + \int_{\Omega} \tilde{r}\mathrm{d}v = -\int_{\partial\Omega_o} \mathbf{HN}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_o} \tilde{R}\mathrm{d}V, \tag{2.60}$$

gdje $\mathbf{H}$ i $\mathbf{h}$ predstavljaju tok entropije u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji, a $\tilde{R}$ i $\tilde{r}$ izvore entropije po jedinici vremena i obujma u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji. Sada se totalni prirast entropije može prikazati kao

$$\tilde{T}(t) = \frac{D}{Dt}\tilde{S}(t) - \varrho(t) \geq 0, \tag{2.61}$$

što predstavlja matematički zapis **drugog zakona termodinamike**.

2.4.6 Clausius-Duhemova nejednadžba

Često se veličine vezane uz tok entropije ($\mathbf{h}$, $\mathbf{H}$) i izvore entropije ($\tilde{r}$, $\tilde{R}$) prikazuju na sljedeći način

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{q}}{\Theta}, \qquad \tilde{r} = \frac{r}{\Theta} \qquad i \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}, \qquad \tilde{R} = \frac{R}{\Theta}, \tag{2.62}$$

gdje su r i R gustoća snage toplinskih izvora, a $\mathbf{q}$ i $\mathbf{Q}$ vektori toplinskog toka za trenutnu odnosno referentnu konfiguraciju. Veličina Θ predstavlja apsolutnu temperaturu, javlja se kao funkcija vremena i izražava se u Kelvinima K. Sada se jednadžba (2.61) uz pomoć (2.60) može prikazati kao

$$\varrho(t) = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega} \tilde{s}_c \mathrm{d}v + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\Theta}\mathbf{n}\mathrm{d}s - \int_{\Omega} \frac{r}{\Theta}\mathrm{d}v \geq 0, \tag{2.63}$$

$$\varrho(t) = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_o} \tilde{s}\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega_o} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta}\mathbf{N}\mathrm{d}S - \int_{\Omega_o} \frac{R}{\Theta}\mathrm{d}V \geq 0, \tag{2.64}$$

i ti izrazi se nazivaju Clausius-Duhemove nejednakosti.

2.4.7 Disipacijska nejednadžba

Ako se za jednadžbu (2.64) uzme u obzir da se nalazi u referentnoj konfiguraciji i da taj izraz ne ovisi o vremenu t, te ako se R zamijeni s izrazom za prvi zakon termodinamike (2.58) dobije se Clausius-Planckova nejednakost

$$\mathcal{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{e} + \Theta\dot{\tilde{s}} \geq 0, \tag{2.65}$$

koja se još naziva i disipacijska nejednakost. Ako se sada iskoristi izraz za Helmholtzovu slobodnu energiju

$$\psi = e - \Theta\tilde{s}, \tag{2.66}$$

može se Clausius-Planckova nejednakost zapisati na sljedeći način

$$\mathcal{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\psi} - \tilde{s}\dot{\Theta} \geq 0, \tag{2.67}$$

koji se puno češće može naći u literaturi. U mehanici se obično ne uzimaju u obzir toplinski učinci pa se može zanemariti zadnji član u prethodnoj jednadžbi,

$$\mathcal{D} = w - \dot{\psi} \geq 0, \tag{2.68}$$

gdje je w snaga naprezanja (*stress power*). Ona predstavlja brzinu promjene unutrašnjeg mehaničkog rada. U trenutnoj konfiguraciji može se izraziti kao

$$\rho_o \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}, \tag{2.69}$$

odnosno u referentnoj konfiguraciji

$$\rho_o \dot{e} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T}_{\mathrm{B}} : \dot{\mathbf{H}}, \tag{2.70}$$

gdje su $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T_B}$ tenzori naprezanja određeni u odjeljku 2.3.1 i 2.3.2, a $\mathbf{d}$, $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ i $\dot{\mathbf{H}}$ su gradijenti tenzora deformacije, koji su prikazani u odjeljcima 2.2.3 i 2.2.6.

2.5 Objektivnost tenzora

Konstitutivne jednadžbe moraju biti nezavisne o izboru referentnog koordinatnog sustava. Tako, na primjer, dva promatrača moraju opažati jednako stanje naprezanja u nekom tijelu bez obzira da li se oni nalaze u nekom jednolikom gibanju jedan u odnosu na drugog. Promatra se deformirana konfiguracija tijela $\mathcal{B}$ koja zauzima prostor Ω u nekom trenutku t i neka je vektor položaja točke P na tijelu $\mathcal{B}$ dan kao $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Ako se konfiguracija Ω zarotira u novi položaj $\tilde{\Omega}$ pomoću ortogonalnog tenzora $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$, tada je

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \tag{2.71}$$

novi položaj točke P u konfiguraciji $\tilde{\Omega}$. Ortogonalni tenzor $\mathbf{Q}$ je samo funkcija vremena t budući da je transformacija iz Ω u $\tilde{\Omega}$ samo rotacija krutog tijela. Uz pomoć (2.10) slijedi izraz za transformaciju gradijenta deformiranja

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}. \tag{2.72}$$

Veličina je objektivna ako se transformira na sljedeći način

Skalari:

$$\tilde{\alpha} \;=\; \alpha(\mathbf{QF}) = \alpha(\mathbf{F}), \tag{2.73}$$

Vektori:

$$\tilde{\mathbf{v}} \;=\; \mathbf{v}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\mathbf{v}(\mathbf{F}), \tag{2.74}$$

Tenzori drugog reda:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \;=\; \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{2.75}$$

U analizi velikih deformacija moraju se koristiti samo objektivne veličine. Tu treba biti oprezan jer neki tenzor može biti objektivan dok njegova derivacija nije objektivna. Primjer za to je Cauchyjev tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ koji je objektivan tenzor, ali njegova derivacija nije

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{2.76}$$

Iz toga razloga se uvode razne objektivne derivacije od kojih su najpoznatije:

Oldroydova

$$\boldsymbol{\sigma}^{\circ} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} + (\mathrm{tr}\ \mathbf{l})\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.77}$$

Jaumannova

$$\boldsymbol{\sigma}^{\triangledown} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} - \mathbf{w}\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.78}$$

konvektivna

$$\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}. \tag{2.79}$$

Treba naglasiti da postoje invarijantne veličine, koje su zadane u referentnoj konfiguraciji. One se ne ponašaju prema zakonu objektivnih veličina, ali su zato potpuno nezavisne o gibanju krutog tijela. Primjer takvih veličina su desni Cauchy-Greenov tenzor, drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja za koje vrijedi

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \qquad \text{i} \qquad \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}. \tag{2.80}$$

Poglavlje 3

Velike elastoplastične deformacije

3.1 Kriteriji tečenja

Eksperimentalnom analizom pokazano je da plastično tečenje materijala ne ovisi o hidrostatskom tlaku, LUBLINER [99], ALFIREVIĆ [93], tj. potpuno je neovisno o prvoj invarijanti tenzora naprezanja. Iz toga slijedi da posmična naprezanja utječu na pojavu tečenja materijala. Postoji više vrsta kriterija tečenja temeljenih na posmičnom naprezanju (*shear-stress based*), ali su samo dva u široj upotrebi kod metala, von Misesov i Trescin kriterij tečenja, slika 3.1. Kod oba kriterija tečenje ne ovisi o hidrostatskom pritisku (*hydrostatic-pressure-independent materials*).

Von Misesov kriterij tečenja, pretpostavka je da će do tečenja doći samo onda kada druga invarijanta tenzora naprezanja dosegne kritičnu vrijednost, dana obično kao materijalno svojstvo k. Ploha tečenja ima oblik kružnog cilindra, 3.1. U skladu s tim plastični potencijal tečenja

iznosi

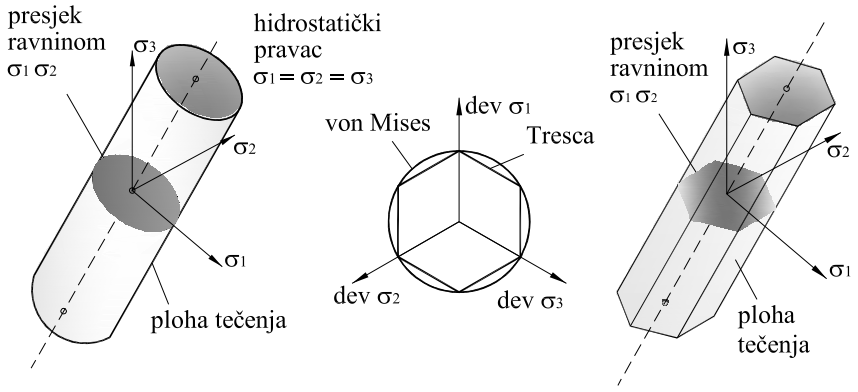
$$\phi(J_2) = J_2 - k^2 = 0. \tag{3.1}$$

Prema **Trescinom kriteriju** do tečenja materijala dolazi kada maksimalno posmično naprezanje dosegne kritičnu vrijednost. Plastični potencijal tečenja ima sljedeći oblik

$$\phi(\tau_{max}) = \tau_{max} - k^2 = 0, \tag{3.2}$$

gdje je k materijalna konstanta koja se može odrediti jednoosnim testom (*uniaxial test*) i za koju vrijedi $k = \sigma_Y/2$. Ploha tečenja u ovom slučaju ima oblik šesterostrane prizme, projekcija plohe tečenja u devijatorsku ravninu je pravilna šesterostrana prizma, slika 3.1.

Bitno je ovdje spomenuti da su to kriteriji tečenja koji se odnose na izotropne materijale. U slučaju anizotropnog ponašanja materijala ovi izrazi postaju mnogo složeniji. Kod ortotropnog ponašanja materijala vrlo često



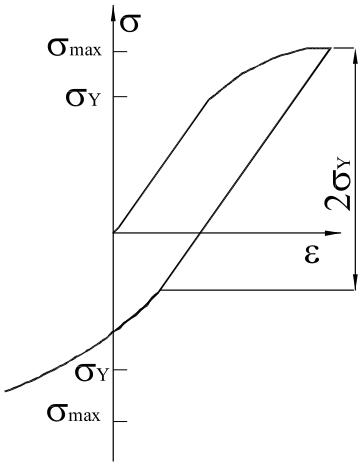
Slika 3.1: Grafički prikaz von Misesove i Trescine plohe tečenja

se koristi Hillov kriterij tečenja koji je ustvari modifikacija von Misesovog kriterija tečenja HILL [65]. On počiva na tri osnovne pretpostavke

1. Materijal je ortotropan. Postoje tri međusobno okomite ravnine simetrije koje se sijeku u osima ortotropije.

2. Hidrostatički tlak ne utječe na tečenje.

3. Nema Bauschingerova efekta. Bauschingerov efekt se može opisati na sljedeći način: Ako se uzorak prvo vlačno deformira, zrna kristalne strukture se zakreću u smjeru osi opterećenja i uzorak dobiva anizotropnu strukturu. Rasterećenjem, gledajući na mikroskopskom nivou, javljaju se zaostala naprezanja između kristalnih zrna. Kada se nakon toga uzorak optereti tlačno, zbog zaostalih naprezanja, do plastičnog tečenja dolazi pri manjem naprezanju, slika 3.2. Bauschingerov efekt se ne javlja kod monokristala pošto nema zrnate strukture koja uzrokuje pojavu zaostalih naprezanja.



Slika 3.2: Bauschingerov efekt

Kriterij tečenja za ortotropne materijale Hill je formulirao na sljedeći način, Hill [65]

$$\begin{aligned} 2\phi(\sigma_{ij}) =& F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + \\ &+ 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdje su F, G, H, L, M i N materijalne konstante koje određuju ortotropno plastično ponašanje materijala. Mogu se odrediti iz normalnih (σ_{11}^{y}, σ_{22}^{y}, σ_{33}^{y}) i posmičnih granica tečenja (σ_{12}^{y}, σ_{23}^{y}, σ_{13}^{y}) određenih za tri glavne ravnine ortotropije

$$F = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{3.4}$$

$$G = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{3.5}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{3.6}$$

$$L = \frac{1}{2(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}, \tag{3.7}$$

$$M = \frac{1}{2(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2}, \tag{3.8}$$

$$N = \frac{1}{2(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2}. \tag{3.9}$$

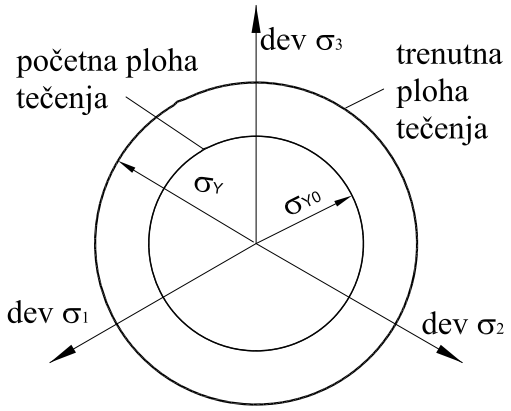
3.2 Očvršćenje materijala

Eksperimentima je utvrđeno da početna ploha tečenja tijekom procesa plastičnog deformiranja mijenja svoj položaj i da točka koja opisuje stanje opterećenja uvijek leži na plohi tečenja. Način kako opisati promjenu položaja plohe tečenja je jedan od velikih problema kod modeliranja plastičnog deformiranja materijala. Razvijena su razna pravila po kojima se modelira promjena položaja plohe tečenja i ona se nazivaju očvršćenje materijala (*hardening rules*). Dva najčešća modela su:

- **Izotropno očvršćenje** (*isotropic hardening*), koje pretpostavlja jednoliko širenje početne plohe tečenja tako da središte plohe ostaje nepromjenjeno, slika 3.3. Ono ne može opisati Bauschingerov efekt. Osnovni matematički izraz je (za slučaj von Misesova uvjeta tečenja)

$$\phi(J_2) = J_2 - (k + Y)^2 = 0, \tag{3.10}$$

gdje Y predstavlja izotropno očvršćenje.

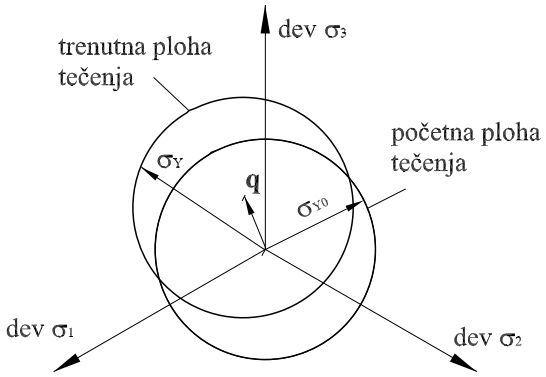


Slika 3.3: Grafički prikaz izotropnog očvršćenja

- Kod **kinematičkog očvršćenja** (*kinematic hardening*) početna ploha tečenja prilikom procesa plastičnog deformiranja translatira se kao kruto tijelo u prostoru naprezanja bez rotiranja i promjene veličine, slika 3.4. Iz toga razloga veličina, oblik i orijentacija početne plohe tečenja se zadržava. Kinematičkim očvršćenjem moguće je opisati Bauschingerov efekt. Izraz za kinematičko očvršćenje glasi (za slučaj von Misesova uvjeta tečenja)

$$\phi = f(\mathbf{S} - \mathbf{q}) - k^2 = 0, \tag{3.11}$$

gdje je $\mathbf{S}$ naprezanje, $\mathbf{q}$ predstavlja tenzor drugog reda nazvan *back*



Slika 3.4: Grafički prikaz kinematičkog očvršćenja

stress tenzor i on daje koordinate centra trenutne plohe tečenja. Neki od najčešće korištenih oblika kinematičkog očvršćenja su:

- **Pragerovo očvršćenje**: Osnova kinematičkog očvršćenja je određivanje *back stress* tenzora $\mathbf{q}$. Najjednostavniji način je da se pretpostavi linearna veza između $\mathrm{d}\mathbf{q}$ i $\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{P}}$ pa Pragerovo očvršćenje (Prager, 1955, 1956) ima sljedeći oblik

$$\mathrm{d}\mathbf{q} = c\,\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{P}}, \tag{3.12}$$

  gdje je c konstanta materijala, a $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathbf{P}}$ je neelastični dio deformacije. Ono se u stvari ne poklapa u potpunosti s definicijom kinematičkog očvršćenja jer se prilikom transformacije javlja i promjena veličine plohe tečenja.

- **Zieglerovo očvršćenje**: Razvijeno je kao modifikacija Pragerova očvršćenja kako bi opisivalo samo kinematičko očvršćenje (Ziegler, 1959). Pretpostavka je da se translacija odvija u smjeru relativnog

naprezanja $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S} - \mathbf{q}$ tako da vrijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{q} = \mathrm{d}\mu(\mathbf{S} - \mathbf{q}), \tag{3.13}$$

gdje je $\mathrm{d}\mu$ faktor proporcionalsti koji ovisi o povijesti deformacije i o samom materijalu. Na taj način se ploha tečenja translatira, a da pri tome ne dolazi do promjene veličine i oblika kinematičkog očvršćenja.

- **Armstrong-Frederickovo očvršćenje:** To je nelinearno kinematičko očvršćenje koje predstavlja poopćenje Pragerovog očvršćenja tako da mu je dodan *dynamic recovery term* tj. dio koji se odnosi na povijest deformiranja, kojim se može bolje opisati višeosni Bauschingerov efekt. Može se opisati sljedećim izrazom

$$\dot{\mathbf{q}} = c_1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\mathbf{p}} - \frac{c_2}{\zeta_\circ} \dot{\lambda} \mathbf{q}, \tag{3.14}$$

gdje su c_1, c_2 i $\zeta_\circ$ parametri materijala, a λ je plastični množitelj (*plastic multiplier*) o kojem će biti više govora u odjeljku 4.4.

3.3 Lie grupa

Pojam Lie grupe prvi je uveo u 19. stoljeću norveški matematičar Sophus Lie radeći na problemima integracijskih metoda kod diferencijalnih jednadžbi i problemima geometrije. Za daljnji razvoj zaslužni su W. Killing, E. Cartan i H.Weyl koji su Lie grupe postavili kao temelj za razne matematičke i fizikalne proračune. Ovdje je dan samo kratki pregled korištenih pojmova iz Lie algebre i Lie grupa dok se detaljniji opis može naći primjerice u Hall [102] i Rossman [103].

Lie grupa je neprekinuti matematički prostor (*manifold*) G kod kojeg vrijedi

- preslikavanje pri množenju (*multiplication map*)

$$(g_1, g_2) \in G \times G \longrightarrow g_1 g_2 \in G. \tag{3.15}$$

  Ako su g_1 i g_2 elementi prostora G tada je i njihov umnožak $g_1 g_2$ također element prostora G.

- inverzno preslikavanje (*inverse map*)

$$g \in G \longrightarrow g^{-1} \in G. \tag{3.16}$$

  Ako je g element prostora G tada je i njemu inverzni oblik također element prostora G.

Za ova preslikavanja moraju vrijediti aksiomi o grupama o kojima se više može naći u HALL [102] i ROSSMAN [103]. Za svaki element $g \in G$ postoje dva preslikavanja G tj. lijevo i desno množenje

$$L_g(h) = gh, \qquad R_g(h) = hg^{-1}. \tag{3.17}$$

Neke od važnijih Lie grupa su:

- Za skup svih $n \times n$ nesingularnih matrica s članovima koji dolaze iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ kaže se da pripadaju **općoj linearnoj grupi** $GL(n, \mathbb{R})$ (*general linear group*). Ona ustvari označava grupu linearnih transformacija čiji elementi imaju pozitivne determinante.

- **Posebna linearna grupa** $SL(n, \mathbb{R})$ (*special linear group*) je skup $n \times n$ realnih nesingularnih matrica čiji elementi imaju determinantejednake jedinici. Ona je podgrupa opće linearne grupe.

- **Ortogonalna grupa** $O(n)$ (*orthogonal group*) označava grupu linearnih transformacija za skup realnih matrica $n \times n$ ako vrijedi $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$. Vrijedi $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

- **Posebna ortogonalna grupa** $SO(n)$ (*special orthogonal group*) je podgrupa $O(n)$, a samim time i $GL(n, \mathbb{R})$ koja ima determinante jednake jedinici.

Lie algebra na nekom skupu npr. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, je vektorski prostor $\mathfrak{g}$ (*vector space*) s bilinearnim preslikavanjem $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, koje se još naziva Lie zagrada (*Lie bracket*) i označava se s $(x, y) \mapsto [x, y]$. Ona mora zadovoljiti sljedeće uvjete:

1. $[x, x] = 0$ za sve $x \in \mathfrak{g}$,
2. Jacobijev identitet: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ za sve $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

3.4 Eksponencijalno preslikavanje

Eksponencijalno preslikavanje (*exponential map*) je osnovna operacija teorije Lie grupa. To je preslikavanje Lie algebre neke Lie grupe u novu grupu. Svojstva nove grupe određena su preko Lie algebre korištene u preslikavanju. Obična eksponencijalna funkcija u matematici može se prikazati kao specijalni slučaj eksponencijalnog preslikavanja. Eksponencijalno preslikavanje ima sva svojstva eksponencijalnih funkcija, ali se i u nekim važnim dijelovima razlikuje npr. derivacija eksponencijalnog preslikavanja.

U mehanici kontinuuma eksponencijalno preslikavanje se koristi prilikom integracije konstitutivnih jednadžbi razvijenog materijalnog modela. Služi za usklađivanje (*update*) varijabli prilikom numeričkog postupka integriranja. Kod metala, eksponencijalno preslikavanje primjenjuje se za vremensko usklađivanje neelastičnog dijela gradijenta deformiranja $\mathbf{F_p}$ koji je član Lie grupe $SL^+(3, \mathbb{R})$. Na taj način se ostvaruje nestlačivost plastičnih deformacija jer vrijedi da je $\det \mathbf{F_p} = 1$. Prvi put je upotrebljena u radovima Eterovic & Bathe [20] i Weber & Anand [51] za funkcije sa simetričnim

argumentima. Primjena na nesimetrične argumente funkcije napravljena je u radu SANSOUR & KOLLMANN [23], a derivacija eksponencijalnog preslikavanja s obzirom na njen argument prvi put je upotrebljena u SANSOUR & WAGNER [26]. Kod matričnih Lie grupa pri eksponencijalnom preslikavanju za bilo koji argument $\boldsymbol{\beta}$ vrijedi

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\beta}} = \exp\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{\beta}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{\beta}^3 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{\beta}^4 + \cdots . \tag{3.18}$$

Argument $\boldsymbol{\beta}$ ima svoje invarijante

$$I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{\beta}, \tag{3.19}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{\beta}^2), \tag{3.20}$$

$$I_3 = \det\boldsymbol{\beta}. \tag{3.21}$$

Uz pomoć Cayley-Hamiltonove jednadžbe vrijedi

$$\boldsymbol{\beta}^3 = I_3\mathbf{1} - I_2\boldsymbol{\beta} + I_1\boldsymbol{\beta}^2, \tag{3.22}$$

a pošto je $\exp\boldsymbol{\beta}$ izotropna funkcija od $\boldsymbol{\beta}$ vrijedi

$$\exp\boldsymbol{\beta} = \alpha_0(I_1, I_2, I_3)\mathbf{1} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{\beta} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{\beta}^2, \tag{3.23}$$

gdje su α_0, α_1 i α_2 funkcije invarijanti i njih treba naći uz pomoć jednadžbe (3.22). Za bilo koju potenciju n argumenta funkcije $\boldsymbol{\beta}$ vrijedi

$$\boldsymbol{\beta}^n = \gamma_0^{(n)}\mathbf{1} + \gamma_1^{(n)}\boldsymbol{\beta} + \gamma_2^{(n)}\boldsymbol{\beta}^2 \tag{3.24}$$

gdje su početne vrijednosti dane kao

$$\gamma_0^{(3)} = I_3, \qquad \gamma_1^{(3)} = -I_2 \qquad \gamma_2^{(3)} = I_1. \tag{3.25}$$

Uz pomoć jednadžbe (3.22) slijede izrazi

$$\gamma_0^{(n)} = I_3\gamma_2^{(n-1)}, \tag{3.26}$$

$$\gamma_1^{(n)} = \gamma_0^{(n-1)} - I_2\gamma_2^{(n-1)}, \tag{3.27}$$

$$\gamma_2^{(n)} = \gamma_1^{(n-1)} + I_1\gamma_2^{(n-1)}. \tag{3.28}$$

Funkcije varijabli α_0, α_1 i α_2 određuju se kao

$$\alpha_0 = 1 + \frac{1}{3!} I_3 + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \gamma_0^{(n)}, \tag{3.29}$$

$$\alpha_1 = 1 - \frac{1}{3!} I_2 + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \gamma_1^{(n)}, \tag{3.30}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} I_1 + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \gamma_2^{(n)}. \tag{3.31}$$

Parametar N daje točnost kojom se računa eksponencijalna funkcija.

Potrebno je izračunati i derivaciju eksponencijalne funkcije. Iz (3.23) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \exp \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = & \frac{1}{3!} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{1} + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \frac{\partial \gamma_0^{(n)}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3!} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta} + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \frac{\partial \gamma_1^{(n)}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta} \\ & + \frac{1}{3!} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta}^2 + \sum_{n=4}^{N} \frac{1}{n!} \frac{\partial \gamma_2^{(n)}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta}^2 + \alpha_1 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \alpha_2 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}^2}{\partial \boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \tag{3.32}$$

gdje je

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{1}, \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\beta}} = I_1 \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}, \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\beta}} = I_3 \boldsymbol{\beta}^{-\mathrm{T}}. \tag{3.35}$$

Budući da se ovi izrazi koriste unutar algoritma prilikom integracije evolucijskih jednadžbi, vrijeme ΔT je vrlo malo. To omogućuje da se iz jednadžbe (3.18) koriste samo prva četiri člana, a da se ne naruši točnost izračuna. Tada vrijedi mnogo jednostavniji izraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \exp \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = & \frac{1}{3!} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{1} - \frac{1}{3!} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{3!} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{\beta}^2 + \\ & \left(1 - \frac{1}{3!} I_2\right) \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} I_1\right) \frac{\partial \boldsymbol{\beta}^2}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.5 Materijalni modeli kod velikih elastoplastičnih deformacija

Materijalni modeli kod velikih elastoplastičnih deformacija mogu se podijeliti s obzirom na način prikaza elastičnih deformacija na:

Hipoelastični - plastični materijalni modeli (*hypoelastic - plastic material model*) opisuju materijale kod kojih je brzina naprezanja linearna homogena funkcija brzine deformacije. Za njega vrijedi izraz

$$\boldsymbol{\sigma}^{\diamond} = \mathbb{C} : \mathbf{D_e}, \tag{3.37}$$

gdje je $\boldsymbol{\sigma}^{\diamond}$ neka objektivna derivacija tenzora naprezanja, $\mathbb{C}$ je tenzor elastičnosti i $\mathbf{D_e}$ je elastičan dio tenzora brzine deformacije. Komponente tenzora elastičnosti $\mathbb{C}$ nisu u općem slučaju konstantne nego ovise o naprezanju i deformaciji. Hipoelastični model temelji se na aditivnom razlaganju tenzora brzine deformacije na elastičan i plastičan dio. Prilikom primjene na probleme koje je potrebno opisivati teorijom velikih deformacija potrebno je obratiti pažnju na ograničenja hipoelastičnih modela. U teoriji velikih deformacija koriste se samo u slučajevima kada su elastične deformacije male u odnosu na plastične. Osnovni razlog je što hipoelastični modeli nisu konzervativni tj. u zatvorenom ciklusu rad nije jednak nuli. Nekonzervativnost nema utjecaj na plastično ponašanje materijala, a uz pretpostavku malih elastičnih deformacija nema veliki utjecaj na konačno rješenje. Osnovni cilj ovog modela je nužnost formulacije objektivne derivacije tenzora naprezanja koja se nalazi u nekom odnosu prema elastičnom dijelu tenzora brzine deformacije, više o objektivnosti se može naći u odjeljku 2.5.

Nedostaci hipoelastičnih - plastičnih materijalnih modela su;

- Nekonzervativnost, jer u zatvorenom ciklusu rad nije jednak nuli.
- Tenzor elastičnosti se pretpostavlja konstantnim.
- Kriterij tečenja mora biti izotropna funkcija naprezanja.
- Hipoelastični izrazi moraju biti integrirani po vremenu kako bi se odredilo naprezanje. Kako bi se spriječio utjecaj velikih rotacija potrebno je izraziti objektivni, inkrementalni algoritam za računanje naprezanja.

Drugi i treći nedostatak se ne odnosi na *corotational* formulaciju naprezanja kod koje se upotrebljava *corotational* Kirchhoffov tenzor naprezanja

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}. \tag{3.38}$$

Hiperelastični - plastični materijalni modeli (*hyperelastic - plastic material model*) razvijeni su kako bi riješili nedostatke koji se pojavljuju kod hipoelastičnih modela. Glavno obilježje hiperelastičnih materijala je postojanje energije deformacije (*strain energy*) $W = \rho_\circ \psi$ koja se može izraziti kao funkcija tenzora deformiranosti odnosno kao funkcija tenzora deformacije. Funkcija W je elastični potencijal i predstavlja raspodjelu energije deformacije po jedinici obujma, $\rho_\circ$ je gustoća nedeformiranog tijela, a ψ izražava raspodjelu energije deformacije po masi i naziva se Helmholtzova slobodna energija (*Helmholtz free energy*). Pošto se elastično ponašanje materijala određuje iz potencijala sustav je konzervativan u nekom zatvorenom ciklusu. Derivacijom elastičnog potencijala po vremenu dobiva se snaga naprezanja (*stress power*)

$$w = \dot{W} = \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \rho_\circ \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}, \tag{3.39}$$

za slučaj kada je $W = W(\mathbf{E})$, gdje je $\mathbf{E}$ Green-Lagrangeov tenzor deformacije. Prema lančanom pravilu derivacija W po vremenu glasi

$$\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{3.40}$$

iz jednadžbe (3.39) slijedi izraz za tenzor naprezanja (u ovom slučaju drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja)

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \tag{3.41}$$

Osnovna razlika hiperelastičnih - plastičnih u odnosu na hipoelastične - plastične modele je u

1. tenzor naprezanja izražen je preko tenzora deformacije iz hiperelastičnog potencijala, a ne integriranjem objektivne derivacije,
2. objektivnost je automatski zadovoljena.

Poglavlje 4

Izotropni materijalni model

4.1 Kinematičke relacije materijalnog modela

U ovom odjeljku još jednom će biti dan poseban osvrt na neke kinematičke relacije nužne u izvodu novog materijalnog modela. Kao što je već spomenuto u odjeljku 2.2.7, opis neelastičnih deformacija temelji se na multiplikativnom razlaganju gradijenta deformiranja

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e}\mathbf{F_p}, \tag{4.1}$$

gdje je $\mathbf{F_e}$ elastičan, a $\mathbf{F_p}$ neelastičan dio tenzora deformiranosti. Kada se razmatraju metali za neelastični dio vrijedi $\mathbf{F_p} \in SL^+(3,\mathbb{R})$ što znači da su neelastične deformacije nestlačive, više o Lie grupama u odjeljku 3.3. Grupa $SL^+(3,\mathbb{R})$ označava određenu linearnu grupu koja ima determinante jednake jedinici, $\det \mathbf{F_p} = 1$.

Na osnovi (4.1) mogu se odrediti sljedeći lijevi Cauchy-Greenovi tenzori u trenutnoj konfiguraciji

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{b_e} = \mathbf{F_e}\mathbf{F_e}^{\mathrm{T}}, \tag{4.3}$$

gdje je $\mathbf{b_e}$ elastični dio tenzora deformiranosti. Na isti način određeni su desni Cauchy-Greenovi tenzori deformiranosti za referentnu konfiguraciju

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{C_e} = \mathbf{F_e}^{\mathrm{T}}\mathbf{F_e}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{C_p} = \mathbf{F_p}^{\mathrm{T}}\mathbf{F_p}, \tag{4.6}$$

gdje je $\mathbf{C_e}$ elastični tenzor, a $\mathbf{C_p}$ je njegov neelastični par. Definicije tenzora deformiranosti i deformacije opisane su u odjeljku 2.2.3.

Ako se uzme u obzir da je tenzor gradijenta deformiranja $\mathbf{F}$ element opće linearne grupe $GL^{+}(3,\mathbb{R})$, koja označava grupu linearnih transformacija s pozitivnim determinantama, nameće se potreba za određivanjem njegovih vremenskih derivacija

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l}\mathbf{F}, \tag{4.7}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{L}, \tag{4.8}$$

gdje je $\mathbf{l}$ lijevi, a $\mathbf{L}$ desni gradijent brzine. Gradijent deformiranja zadan je izrazom

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \tag{4.9}$$

i na osnovi toga za $\dot{\mathbf{F}}$ i $\mathbf{F}^{-1}$ vrijedi

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i \qquad\qquad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i. \tag{4.10}$$

Iz (4.7) slijedi

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \Longrightarrow \mathbf{l} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i. \tag{4.11}$$

Iz prethodne jednadžbe može se uočiti da je $\mathbf{l}$ izražen preko mješovitih komponenata (*mixed-variant tensor*). Na sličan način se može pokazati i da je

desni gradijent brzine izražen preko mješovitih komponenata. Iz jednadžbi (4.7) i (4.8) dobije se sljedeća veza

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{l}\mathbf{F}. \tag{4.12}$$

Kao što se vidi $\mathbf{L}$ se dobije prijenosom unazad (*pull back*) lijevog gradijenta brzine iz trenutne u početnu konfiguraciju. Pošto je i $\mathbf{F_p} \in SL^+(3,\mathbb{R})$ mogu se odrediti lijevi i desni gradijent brzine za neelastični tenzor gradijenta deformiranja. Isto vrijedi i za $\mathbf{F_e}$. Njihovi gradijenti su

$$\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{e} = \mathbf{l_e}\mathbf{F_e}, \tag{4.13}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p} = \mathbf{F_p}\mathbf{L_p}. \tag{4.14}$$

Ako se sada jednadžba (4.1) derivira po vremenu slijedi

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_\mathbf{e}\mathbf{F_p} + \mathbf{F_e}\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p}, \tag{4.15}$$

te nakon uvrštavanja (4.13) i (4.14) dobiva se

$$\mathbf{l} = \mathbf{l_e} + \mathbf{F}\mathbf{L_p}\mathbf{F}^{-1}, \tag{4.16}$$

kojim se određuje miješano-varijantni prijenos unaprijed (*push-forward*) neelastičnog gradijenta $\mathbf{L_p}$ kao

$$\mathbf{l_p} = \mathbf{F}\mathbf{L_p}\mathbf{F}^{-1}\ , \tag{4.17}$$

koji se ujedno naziva i prostorni neelastični gradijent. Iz (4.16) i (4.17) može se zapisati slijedeći izraz

$$\mathbf{l} = \mathbf{l_e} + \mathbf{l_p}\ . \tag{4.18}$$

Ovdje je važno naglasiti da se u unutar klasične teorije velikih plastičnih deformacija pretpostavlja da je $\mathbf{F_p}$ potpuno određen evolucijskom jednadžbom za materijalni gradijent deformiranja $\mathbf{L_p}$. Glavna posljedica toga je da je tenzor $\mathbf{F_p}$ materijalni tenzor i kao takav ne ovisi o gibanju krutog tijela.

4.2 Slobodna energija i reducirana disipacijaska nejednakost

Pretpostavlja se da je elastično ponašanje tijela potpuno određeno slobodnom energijom ψ. Izotropno očvršćenje određeno je preko skalarne veličine Z, a kinematičko očvršćenje preko tenzora drugog reda oblika sličnog tenzoru deformacije koji je označen s $\mathbf{b_q}$. U skladu s tim pretpostavlja se postojanje slobodne energije u sljedećem obliku $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{b_e}, \mathbf{b_q}, Z)$ zadane u trenutnoj konfiguraciji. Oblik $\mathbf{b_e}$ je potpuno određen s (4.3) dok je oblik $\mathbf{b_q}$ tek potrebno odrediti. Izgled $\mathbf{b_q}$ usko je povezan s uvjetom da *back stress* treba biti simetričan tenzor drugog reda. Potrebno je izabrati odgovarajuću neelastičnu veličinu određenu u trenutnoj konfiguraciji. Kao logičan izbor nameće se prijenos unaprijed (*push forward*) $\mathbf{F_p}$ ili $\mathbf{F_p^{-1}}$ u trenutnu konfiguraciju. Ta operacija uvjetuje ovisnost o $\mathbf{F}$ što nije dobro jer plastično deformiranje mora ovisiti samo o neelastičnim varijablama. Kako bi se izbjegao utjecaj $\mathbf{F}$ na neelastične veličine u trenutnoj konfiguraciji nameće se prema jednadžbi (4.17) miješana kovarijantna-kontravarijantna tranformacija. U skladu s tim prostorni neelastični tenzor ima sljedeći oblik

$$\mathbf{f_p^{-1}} = \mathbf{F}\mathbf{F_p^{-1}}\mathbf{F}^{-1}. \tag{4.19}$$

$\mathbf{f_p^{-1}}$ se sada definira kao neelastični prostorni gradijent deformiranja što će biti naknadno pokazano u odjeljku 4.3. Budući da je to tenzor u trenutnoj konfiguraciji, potrebno je dokazati njegovu objektivnost. Više o objektivnosti tenzora može se naći u odjeljku 2.5. Ako se uzme da je

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \tag{4.20}$$

slijedi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{p}}^{-1} =& \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \\ =& \mathbf{Q}\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{4.21}$$

što je ustvari zakon promjene objektivne veličine. Ovdje je još jednom važno napomenuti da je $\mathbf{F_p}$ materijalni tenzor neovisan o gibanju krutog tijela.

Sada, kad je određena prostorna neelastična veličina koja odgovara neelastičnom tenzoru deformacije u linearnoj teoriji, nameće se izbor $\mathbf{b_q}$ u sljedećem obliku

$$\mathbf{b_q} = \mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}, \tag{4.22}$$

koji je u skladu s oblikom $\mathbf{b_e}$, (4.3). Kasnije će biti pokazano da on osigurava simetričan oblik *back stress* tenzora.

Koristeći pretpostavku $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{b_e}, \mathbf{b_q}, Z)$ može se slobodna energija podijeliti na elastični dio $\psi_{\mathrm{e}}(\mathbf{b_e})$ i neelastični dio. Neelastični dio dalje se dijeli na dio koji ovisi o kinematičkom očvršćenju $\psi_{\mathrm{k}}(\mathbf{b_q})$ i izotropnom očvršćenju $\psi_{\mathrm{i}}(Z)$, tako da je

$$\begin{aligned}\psi =& \psi^{\text{elastično}} + \psi^{\text{neelastično}}, \\ \psi =& \psi_{\mathrm{e}}(\mathbf{b_e}) + \psi_{\mathrm{k}}(\mathbf{b_q}) + \psi_{\mathrm{i}}(Z).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Kada je jednom određen oblik slobodne energije prirodno slijedi razvoj disipacijske nejednakosti, odjeljak 2.4.7. Ona je određena kao gustoća snage naprezanja minus gradijent promjene energije (Maugin [104])

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} - \rho_{\circ}\dot{\psi}(\mathbf{b_e}, \mathbf{b_q}, Z), \tag{4.24}$$

gdje je $\boldsymbol{\tau}$ Kirchhoffov tenzor naprezanja, $\rho_{\circ}$ gustoća u materijalnoj konfiguraciji. Ako se jednadžba (4.23) uvrsti u (4.24) slijedi

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} - \rho_{\circ}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b_e}} : \dot{\mathbf{b}}_{\mathbf{e}} - \rho_{\circ}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b_q}} : \dot{\mathbf{b}}_{\mathbf{q}} - \rho_{\circ}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\cdot\dot{Z} \geq 0. \tag{4.25}$$

Za daljnji razvoj disipacije potrebno je odrediti derivacije $\mathbf{b_e}$ i $\mathbf{b_q}$. Ako se jednadžba (4.1) uvrsti u (4.3) dobije se

$$\mathbf{b_e} = \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{4.26}$$

iz koje deriviranjem po vremenu slijedi

$$\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{e} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}, \tag{4.27}$$

a kada se uvrste izrazi (4.7) i (4.14) dobiva se

$$\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{e} = \mathbf{l}\mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}\mathbf{L_p}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{L_p}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}^{\mathrm{T}}. \tag{4.28}$$

Uz pomoć jednadžbi (4.3) i (4.17) može se zapisati sljedeći oblik derivacije $\mathbf{b_e}$

$$\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{e} = \mathbf{l}\mathbf{b_e} - \mathbf{l_p}\mathbf{b_e} - \mathbf{b_e}\mathbf{l_p}^{\mathrm{T}} + \mathbf{b_e}\mathbf{l}^{\mathrm{T}}. \tag{4.29}$$

Na isti način, iz jednadžbi (4.1) i (4.19) deriviranjem se dobije

$$\mathbf{b_q} = \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{q} =& \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \\ & \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\dot{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \\ & \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{F}}_\mathbf{p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pomoću izraza (4.7), (4.14) i transformacije (4.17), slijedi

$$\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{q} = \mathbf{l}\mathbf{b_q} + \mathbf{b_q}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} - \mathbf{f_p}^{-1}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}})\mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}} - \mathbf{l_p}\mathbf{b_q} - \mathbf{b_q}\mathbf{l_p}^{\mathrm{T}}\,. \tag{4.32}$$

Uz pretpostavku da su $\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{e}$ i $\dot{\mathbf{b}}_\mathbf{q}$ izotropne funkcije (za izotropne funkcije vrijedi $f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = f(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})$, gdje su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ proizvoljni tenzori drugog reda, a $\mathbf{Q}$ je bilo koji ortogonalni tenzor) i uvrštavanjem jednadžbi (4.29) i (4.32)

u izraz za disipacijsku nejednakost (4.25), te grupiranjem po $\mathbf{l}$ i $\mathbf{l_p}$ slijedi

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\tau} - 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} \mathbf{b_e} - 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{b_q} + 2\rho_\circ \mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{f_p}^{-1} \right) : \mathbf{l} + \left(2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} \mathbf{b_e} + 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{b_q} \right) : \mathbf{l_p} - \rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial Z} \cdot \dot{Z} \geq 0. \tag{4.33}$$

Prilikom grupiranja izraza oko gradijenata brzine korištene su sljedeće matematičke relacije

$$\mathbf{a} : (\mathbf{bc}) = (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}) : \mathbf{c} = (\mathbf{ac}^{\mathrm{T}}) : \mathbf{b}, \tag{4.34}$$

gdje su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ proizvoljni tenzori drugog reda.

Uz uvjet da jednadžba (4.33) mora biti ispunjena za sve realne slučajeve, Colleman-Noll procedura, slijede izrazi da tenzor naprezanja i reduciranu disipacijsku jednadžbu

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} \mathbf{b_e} + 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{b_q} - 2\rho_\circ \mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{f_p}^{-1}, \tag{4.35}$$

$$\mathcal{D}_r = \left(2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} \mathbf{b_e} + 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{b_q} \right) : \mathbf{l_p} - \rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial Z} \cdot \dot{Z} \geq 0 \, . \tag{4.36}$$

Uvođenjem oznaka

$$Y = - \rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial Z} \, , \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} \mathbf{b_e} + 2\rho_\circ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_q}} \mathbf{b_q}, \tag{4.38}$$

reducirana disipacijska jednadžba (4.36) može se napisati kao

$$\mathcal{D}_r = \boldsymbol{\gamma} : \mathbf{l_p} + Y \cdot \dot{Z} \ \geq 0. \tag{4.39}$$

Ovdje Y predstavlja izotropno očvršćenje energijski konjugirano unutarnjoj varijabli Z, a $\boldsymbol{\gamma}$ predstavlja relativni tenzor naprezanja energijski konjugiran neelastičnom gradijentu $\mathbf{l_p}$. Relativni tenzor je jednak

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}. \tag{4.40}$$

gdje je $\mathbf{q}$ *back stress* tenzor određen sa sljedećim eksplicitnim izrazom

$$\mathbf{q} = -2\rho_\circ \mathbf{f}_\mathbf{p}^{-\mathrm{T}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}_\mathbf{q}} \mathbf{f}_\mathbf{p}^{-1}. \tag{4.41}$$

Iz ovog se izraza lako može zaključiti da je $\mathbf{q}$ simetričan tenzor ($\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}$) ako je derivacija $\partial\psi/\partial\mathbf{b}_\mathbf{q}$ simetrična, što će uvjetovati izbor dijela slobodne energije koji se odnosi na kinematičko očvršćenje. Također se vidi razlika u odnosu na *rate-type* formulacije jer se ovdje izraz za *back stress* dobije eksplicitno.

U skladu s uobičajenim izrazima u literaturi (npr. Perić et al. [21], Tsakmakis & Willuweit [43], Simo [105]) elastična slobodna energija, kao funkcija elastičnog dijela tenzora deformiranosti $\mathbf{b}_\mathbf{e}$, je dana izrazom

$$\psi_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\alpha_1 \left(\mathrm{tr}(\mathbf{b}_\mathbf{e} - \mathbf{1})\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \mathrm{tr}(\mathbf{b}_\mathbf{e} - \mathbf{1})^2, \tag{4.42}$$

gdje su α_1 i α_2 elastične konstante. Te se konstante mogu izraziti preko modula elastičnosti E i Poissonova faktora ν, tj.

$$\alpha_1 = \frac{E\nu(1-2\nu)}{4(1+\nu)}, \tag{4.43}$$

$$\alpha_2 = \frac{E}{4(1+\nu)}. \tag{4.44}$$

Za dio energije koji se odnosi na kinematičko očvršćenje pretpostavljen je sljedeći oblik

$$\psi_\mathrm{k} = c\ \mathrm{tr}\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{q}, \tag{4.45}$$

gdje je c parametar kinematičkog očvršćenja, a za $\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{q}$ vrijedi izraz

$$\tilde{\mathbf{b}}_\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}_\mathbf{q}}{(\det \mathbf{b}_\mathbf{q})^{1/3}}. \tag{4.46}$$

Sam je oblik ψ_k kod metala uvjetovan pretpostavkom da na plastično deformiranje ne utječe hidrostatički tlak već samo posmično naprezanje tj. sferni dio *back stress* tenzora trebao bi biti jednak nuli, $\mathrm{tr}\,\mathbf{q} = 0$.

Za daljnji razvoj jednadžbi (4.35) i (4.38) potrebno je izračunati derivacije slobodne energije. Derivacija ψ_{e} po tenzoru $\mathbf{b_e}$ iznosi

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b_e}} = \alpha_1 \mathrm{tr}\,(\mathbf{b_e} - \mathbf{1})\mathbf{1} + \alpha_2(\mathbf{b_e} - \mathbf{1}), \tag{4.47}$$

dok je derivacija slobodne energije koja se odnosi na kinematičko očvršćenje jednaka

$$\frac{\partial \psi_{\mathrm{k}}}{\partial \mathbf{b_q}} = \frac{c}{(\det \mathbf{b_q})^{1/3}} \mathrm{dev}\,\mathbf{1}. \tag{4.48}$$

Kada se jednadžbe (4.47) i (4.48) uvrste u (4.38) i (4.41), slijedi

$$\boldsymbol{\gamma} = 2\rho_\circ \left(\alpha_1 \mathrm{tr}\,(\mathbf{b_e} - \mathbf{1})\mathbf{b_e} + \alpha_2(\mathbf{b_e} - \mathbf{1})\mathbf{b_e}\right) + \rho_\circ \frac{c}{(\det \mathbf{b_q})^{1/3}}\, \mathrm{dev}\,(\mathbf{b_q}), \tag{4.49}$$

$$\mathbf{q} = -\rho_\circ \frac{c}{(\det \mathbf{f_p}^{-1})^{2/3}}\, \mathrm{dev}\,(\mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{f_p}^{-1})\ . \tag{4.50}$$

Ovdje je još bitno napomenuti, kao što se vidi iz jednadžbe (4.50), da *back stress* ne ovisi linearno o tenzoru $\mathbf{b_q} = \mathbf{f_p}^{-1}\mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}}$.

4.3 Multiplikativno razlaganje $\mathbf{F} = \mathbf{f_p}\mathbf{f_e}$

Glavna motivacija za ovo razlaganje je pitanje mogu li se izrazi u odjeljku 4.2 mogu izvesti bez transformacije miješano varijantnih veličina iz referentne konfiguracije. Cilj je odrediti neelastičan dio gradijenta deformiranja u trenutnoj konfiguraciji. Početna pretpostavka je da vrijedi sljedeći oblik razlaganja u trenutnoj konfiguraciji

$$\mathbf{F} = \mathbf{f_p}\mathbf{f_e}. \tag{4.51}$$

Ako se pretpostavi da su elastični dijelovi u (4.1) i (4.51) jednaki

$$\mathbf{F_e} = \mathbf{f_e}, \tag{4.52}$$

tada slijedi

$$\mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1} = \mathbf{f_p}^{-1}\mathbf{F} \tag{4.53}$$

iz čega je moguće izvesti ovisnost prostornog o materijalnom neelastičnom dijelu

$$\mathbf{f_p}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F}^{-1}. \tag{4.54}$$

To je u skladu s (4.19). Pretpostavka (4.52) osigurava da su elastični tenzori deformiranosti kao i elastična slobodna energija neovisni o primjenjenom razlaganju.

Unutarnja varijabla kinematičkog očvršćenja u (4.22) pretpostavljena je kao

$$\mathbf{b_q} = \mathbf{f_p}^{-1}\mathbf{f_p}^{-\mathrm{T}}.$$

Sada je za $\mathbf{f_p}^{-1}$ pokazano da predstavlja inverzni oblik prostornog neelastičnog dijela gradijenta deformiranja, pa predloženi oblik za $\mathbf{b_q}$ u stvari ima strukturu tenzora deformacije (npr. slično kao u jednadžbi (4.6)). To pokazuje opravdanost odabira strukture unutrašnje veličine $\mathbf{b_q}$ jer zadovoljava pretpostavku teorije plastičnosti da se očvršćenje može opisati samo pomoću neelastičnih varijabli.

Tenzor $\mathbf{f_p}$ određen je jednadžbom (4.54) pa kao takav ne može biti element Lie grupe $GL^+(3,\mathbb{R})$ (osnovni pojmovi Lie grupa i Lie algebre mogu se naći u odjeljku 3.3). Stoga se gradijenti deformiranja $\mathbf{f_p}$ ne mogu odrediti na isti način kako su napravljeni za neelastični gradijent tenzora deformiranja u jednadžbi (4.14). Da bi se ipak izveo gradijent deformiranja tenzora $\mathbf{f_p}^{-1}$ potrebno je napraviti sljedeće razmatranje:

> Za bilo koji element Lie grupe $GL^+(3,\mathbb{R})$, recimo $\mathbf{F}$, u njegovoj bliskoj okolini vrijedi izraz
>
> $$\mathbf{F}_{\text{blisko}} = \exp(t\mathbf{l})\mathbf{F}\ , \tag{4.55}$$
>
> gdje je $\mathbf{l}$ dio Lie algebre, dok je t je vremenska varijabla. Ako se eks-

ponencijalna funkcija (odjeljak 3.4)

$$\exp(t\mathbf{l}) = \mathbf{1} + (t\mathbf{l}) + \frac{1}{2!}(t\mathbf{l})^2 + \frac{1}{3!}(t\mathbf{l})^3 + \cdots \tag{4.56}$$

derivira po vremenu za neki trenutak t, gdje $t \to 0$ slijedi izraz za gradijent tenzora $\mathbf{F}$

$$\left(\frac{D\mathbf{F}_{\text{blisko}}}{Dt}\right)_{t=0} = \mathbf{l}\mathbf{F}\ . \tag{4.57}$$

Derivacija po vremenu tenzora $\mathbf{f_p}$, oblika prema jednadžbi (4.54), može se zapisati na sljedeći način

$$\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{p} = \left[\frac{D}{Dt}\left(\exp(t\mathbf{l})\mathbf{F}\mathbf{F}_\mathbf{p}\exp(t\mathbf{L}_\mathbf{p})\mathbf{F}\exp(-t\mathbf{l})\right)\right]_{t=0}. \tag{4.58}$$

Ovdje je uzeto u obzir da su $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F_p}$ članovi Lie grupe, a $\mathbf{l}$ i $\mathbf{L_p}$ su članovi Lie algebre, pa vrijedi izraz (4.56). Uz pomoć relacije (4.57) slijedi

$$\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{p} = \mathbf{l}\mathbf{f}_\mathbf{p} + \mathbf{f}_\mathbf{p}\mathbf{l}_\mathbf{p} - \mathbf{f}_\mathbf{p}\mathbf{l}\,, \tag{4.59}$$

što je ustvari način dobivanja gradijenta deformiranja neelastične veličine u trenutnoj konfiguraciji. Valja naglasiti da se taj izraz poklapa s onim izvedenim u jednadžbama (4.30) do (4.32).

4.4 Neelastično ponašanje materijala

Pretpostavlja se postojanje potpuno elastičnog područja E opisanog konveksnom funkcijom tečenja ϕ izražene preko relativnog tenzora naprezanja i varijabli koje su konjugirane unutarnjim varijablama $\mathbf{b_q}$ i Z

$$E := \{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q}, Y) : \phi(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q}, Y) \leq 0\}. \tag{4.60}$$

Za opisivanje neelastičnog deformiranja metala von Misesova funkcija je izražena na sljedeći način

$$\phi = \| \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \| - \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\sigma_Y - Y)\,, \tag{4.61}$$

gdje σ_Y označava granicu tečenja. Devijator relativnog tenzora naprezanja prema (4.40) iznosi

$$\operatorname{dev}\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{dev}\boldsymbol{\tau} - \operatorname{dev}\mathbf{q}, \tag{4.62}$$

dok je funkcija izotropnog očvršćenja Y jednaka

$$Y = -HZ - (\sigma_\infty - \sigma_Y)\cdot(1 - \exp(-\eta Z))\,. \tag{4.63}$$

Ovdje H označava koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja, σ_∞ čvrstoću zasićenja (*saturation yield stress*), η parametar materijala vezan uz σ_∞.

Iz II. zakona termodinamike, a time i disipacijske nejednadžbe, slijedi princip maksimuma disipacijske energije, Lubliner [99], Simo & Hughes [34]. Prema njemu trenutno stanje $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q}) \in E$ je jedno među svim mogućim dopustivim (*admisible*) stanjima $(\boldsymbol{\gamma}^\star, \mathbf{q}^\star) \in E$ koje dovodi do maksimuma disipacijske energije. Na osnovi njega može se zapisati varijacijska jednadžba

$$\int \left(-\left(\boldsymbol{\gamma} : \mathbf{l_p} + Y\cdot\dot{Z}\right) + \lambda\phi(\gamma, \mathbf{Y})\right) \mathrm{d}s = \mathrm{stat}. \tag{4.64}$$

U ovoj jednadžbi λ je plastični množitelj (*plastic multiplier*), a ds označava parametrizaciju deformacijske krivulje. Na osnovi principa maksimuma disipacijske energije iz varijacijske jednadžbe, Sorić et al. [106], slijede asocijativne evolucijske jednadžbe (*evolution equations*) za gradijent brzine deformiranja i varijablu izotropnog očvršćenja

$$\mathbf{l_p} = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\gamma}}, \tag{4.65}$$

$$\dot{Z} = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial Y}. \tag{4.66}$$

Jednadžbe se nadopunjuju s Kuhn-Tuckerovim uvjetima optimalizacijske teorije

$$\lambda \geq 0\,, \qquad \lambda\,\phi(\boldsymbol{\gamma}, Y) = 0\,, \qquad \phi(\boldsymbol{\gamma}, Y) \leq 0\,. \tag{4.67}$$

Oni uvjetuju da u elastičnom području funkcija tečenja mora ostati negativna i da je plastični množitelj nula (plastične deformacije su konstantne) dok u plastičnom području funkcija tečenja je nula (naprezanja su na plohi tečenja) i plastični množitelj je pozitivan. Uz Kuhn-Tuckerove uvjete potrebno je navesti i uvjet konzistencije

$$\lambda\dot{\phi}(\boldsymbol{\gamma}, Y) = 0. \tag{4.68}$$

Derivacija funkcije tečenja daje informaciju radi li se o elastičnom rasterećivanju, neutralnom opterećivanju ili plastičnom opterećivanju.

Ako se u evolucijske jednadžbe (4.65) i (4.66) uvrste derivacije funkcije tečenja (4.61) po $\boldsymbol{\gamma}$ i Y

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\gamma}}{\parallel \operatorname{dev}\boldsymbol{\gamma} \parallel}, \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{4.70}$$

vrijede sljedeći izrazi

$$\mathbf{l_p} = \lambda\frac{\operatorname{dev}\boldsymbol{\gamma}}{\parallel \operatorname{dev}\boldsymbol{\gamma} \parallel} = \lambda\boldsymbol{\nu}, \tag{4.71}$$

$$\dot{Z} = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{4.72}$$

Ovdje je $\boldsymbol{\nu}$ jedinični vektor normale na plohu tečenja. Jednadžbe (4.71) i (4.72) zajedno s slobodnom energijom (4.42) i (4.45) odnosno izrazima za relativni tenzor naprezanja (4.37) i izotropno očvršćenje (4.38) čine cjelovitu formulaciju konstitutivnog modela.

4.5 Prijelaz na referentnu konfiguraciju

S numeričkog stajališta čini se korisno sve izraze prebaciti u referentnu konfiguraciju bez ikakvog mijenjanja teorije kako bi se olakšao postupak numeričke

integracije u referentnoj konfiguraciji. Proizvoljni tenzor drugog reda u trenutnoj konfiguraciji $\boldsymbol{\pi}$ može se prikazati u odnosu na referentnu konfiguraciju postupkom prijenosa unazad (*pull back*) prema sljedećoj relaciji

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}. \tag{4.73}$$

Ovdje $\boldsymbol{\Pi}$ označava bilo koji tenzor u referentnoj konfiguraciji. U skladu s tim vrijede ove transformacije

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}, \tag{4.74}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}, \tag{4.75}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{q} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}. \tag{4.76}$$

Pri čemu $\boldsymbol{\Xi}$ označava tenzor koji se po glavnim osima i sfernom dijelu poklapa s Eshelbyjevim tenzorom, (Maugin [33], Sansour [107]). $\boldsymbol{\Gamma}$ je materijalni relativni tenzor naprezanja, a $\mathbf{Q}$ označava *back stress* u referentnoj konfiguraciji pa u skladu s (4.40) vrijedi

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Xi} - \mathbf{Q}\,. \tag{4.77}$$

Treba napomenuti da je ova transformacija potaknuta invarijantnošću izraza za gustoću snage naprezanja u trenutnoj i referentoj konfiguraciji

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L}\,, \tag{4.78}$$

gdje su $\mathbf{l}$ i $\mathbf{L}$ zadani jednadžbama (4.7) i (4.8). Također treba naglasiti da se do ovog materijalnog oblika teorije može doći samo ako je tenzor naprezanja izražen preko mješovitih komponenata.

Potrebno je asocijativni zakon tečenja u trenutnoj konfiguraciji (4.71) zapisati u referentnoj konfiguraciji uz pomoć transformacije prema jednadžbi

(4.17)

$$\mathbf{l_p} = \lambda \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma}}{\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \|}, \tag{4.79}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{L_p}\mathbf{F}^{-1} = \lambda \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma}}{\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \|}, \tag{4.80}$$

$$\mathbf{L_p} = \lambda \frac{(\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \|}, \tag{4.81}$$

Ako se uzme u obzir način računanja norme tenzora, odjeljak 2.1 i međuovisnost prostornog i materijalnog relativnog tenzora naprezanja (4.75) vrijedi

$$\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\gamma} \| = \| \operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma} \| . \tag{4.82}$$

Pomoću gornje jednadžbe može se izvesti izraz za asocijativni zakon tečenja u referentnoj konfiguraciji

$$\mathbf{L_p} = \lambda \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}}{\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma} \|} = \lambda \boldsymbol{\nu}. \tag{4.83}$$

Jednadžba (4.72) u materijalnoj konfiguraciji ostaje istog izgleda

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda. \tag{4.84}$$

Funkcija tečenja opisana u trenutnoj konfiguraciji izrazom (4.61) u referentnoj konfiguraciji zahvaljujući jednakosti (4.82) glasi

$$\phi = \| \operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + Y) = 0. \tag{4.85}$$

Sljedeći korak je prebacivanje izraza za relativni tenzor naprezanja (4.49) i *back stress* tenzor (4.50) iz trenutne u referentnu konfiguraciju. Pošto je tenzor naprezanja funkcija elastičnog lijevog Cauchy-Greenovog tenzora $\mathbf{b_e}$ i unutarnje varijable kinematičkog očvršćenja $\mathbf{b_q}$, prvo je razmotren prijenos unazad tih veličina. Pri tome je $\mathbf{b_e}$ zadan izrazom (4.26) pa uz pomoć izraza za $\mathbf{C}$ (4.4) i $\mathbf{C_p}$ (4.6) slijedi

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b_e})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{F_p}^{-1}\mathbf{F_p}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{C}\mathbf{C_p}^{-1}. \tag{4.86}$$

Tenzor $\mathbf{b_q}$ zadan jednadžbom (4.19) prelazi u

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b_q})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{C}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Uzimajući u obzir način računanja determinante tenzora, odjeljak 2.1 i odnosa neelastičnih gradijenata deformiranja (4.54) slijedi relacija

$$\det \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1} = \det \mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-1}. \tag{4.88}$$

Sada uz jednadžbe (4.86), (4.87) i (4.88) relativni tenzor naprezanja u referentnoj konfiguraciji glasi

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} = \rho_\circ \Big[&2\alpha_1 \mathrm{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} + 2\alpha_2(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}} \\ &+ \frac{c}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1})^{2/3}} \mathrm{dev}\,(\mathbf{C}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}})\Big]. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Uz zapis tenzora $\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-1}$ u referentnoj konfiguraciji

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{-1})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} &= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{F}^{-1})\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \tag{4.90}$$

slijedi i izraz za *back stress* tenzor (4.50) u referentnoj konfiguraciji

$$\mathbf{Q} = -\rho_\circ \frac{c}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{p}}{}^{-1})^{2/3}} \mathrm{dev}\,(\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}^{-1}). \tag{4.91}$$

4.6 Numerička formulacija - lokalna iteracija

Jednadžbe materijalnog modela kao što su zakon tečenja, te jednadžbe koje opisuju kinematičko i izotropno očvršćenje predstavljaju sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda ovisnih o vremenu. Njih je potrebno riješiti uzimajući u obzir početne i rubne uvjete. To nije moguće napraviti direktno već se koristi približna, numerička metoda. U ovom radu korištena je prediktorsko-korektorska metoda:

Prediktor: Za neka dva trenutka $[t_n, t_{n+1}]$ postoji vremenski prirast $\Delta T = t_{n+1} - t_n$. U trenutku t_n pretpostavlja se da su poznati pomaci i unutarnje varijable, a njihove nove vrijednosti moraju se odrediti u trenutku t_{n+1}. Uz pretpostavku elastičnog ponašanja materijala zadovoljava se uvjet ravnoteže sila. Ako se taj novi položaj (*trial*) nalazi u elastičnom području ($\phi < 0$) tada je to stvarno stanje naprezanja. Ukoliko su se pojavile plastične deformacije novo stanje naprezanja nalazi se izvan plohe tečenja ($\phi > 0$) što je fizikalno neprihvatljivo. Zadovoljen je uvjet ravnoteže, ali nije zadovoljen kriterij tečenja. Tada se javlja potreba za plastičnim korektorskim korakom.

Korektor: Zadovoljava se uvjet tečenja, te se nameću Kuhn-Tuckerovi uvjeti. No, nametanjem ovih uvjeta narušava se ravnoteža sila. Iz toga razloga se plastični korektorski korak provodi iterativno dok nisu zadovoljena oba uvjeta u granicama zadane točnosti ($\phi \leqslant |$ greška $|$)

Kao što je već bilo govora u prethodnim odjeljcima, $\mathbf{F_p}$ je element Lie grupe $SL^+(3, \mathbb{R}^3)$, a $\mathbf{L_p}$ je član Lie algebre. Iz toga razloga se u vremenskoj integraciji može koristiti eksponencijalno preslikavanje u obliku

$$\mathbf{F_p^{-1}}|_{n+1} = \exp(-\Delta T\, \mathbf{L_p})\mathbf{F_p^{-1}}|_n, \tag{4.92}$$

Ono osigurava egzaktnu integraciju diferencijalnih jednadžbi po vremenu i uzima u obzir postojanje velikih elastičnih i plastičnih deformacija. Ujedno osigurava nestlačivost pri plastičnom deformiranju metala. Razvoj eksponencijalnog preslikavanja napravljen je korištenjem algoritma razvijenog u Sansour & Kollmann [23] dok je njegova derivacija s obzirom na njegov argument napravljena u skladu s Sansour & Wagner [26]. Opis primjenjenog algoritma može se vidjeti u odjeljku 3.4.

U *trial* položaju određuje se vrijednost $\mathbf{C}$. Kako bi se odredio tenzor naprezanja (4.89) potrebno je odrediti veličinu $\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}$ za trenutak t_{n+1}

$$\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mid_{n+1} = \mathbf{C}\mid_{n+1} \exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p}) \mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mid_n \exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p}^{\mathrm{T}}). \tag{4.93}$$

S druge strane, gradijent $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ (4.83) ovisi o relativnom tenzoru naprezanja. Ta međuzavisnost veličina utječe na složenost iteracijskog postupka. Osnova postupka je izračunati točnu vrijednost plastičnog množitelja λ za trenutak t_{n+1} uz pomoć Newtonove metode. Pošto naprezanje i brzina deformacije nisu koaksijalni potrebno je uzeti u obzir ovisnost funkcije tečenja o tenzorskim veličinama. Prilikom iterativnog postupka ne mijenja se samo iznos već i glavne osi naprezanja. Za bilo koji korak t_{n+1} nova vrijednost λ je

$$\lambda|_{n+1} = \lambda|_n + \Delta\lambda. \tag{4.94}$$

Pomoću $\lambda|_{n+1}$ radi se obnavljanje (*update*) unutarnje varijable Z, (4.84)

$$Z\mid_{n+1} = Z\mid_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta T \lambda|_{n+1}. \tag{4.95}$$

Vrijednost $\Delta\lambda$ dobije se linearizacijom funkcije tečenja, (4.85), na sljedeći način

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right|_n \Delta\lambda = \phi|_{n+1} - \phi|_n. \tag{4.96}$$

Kod pojave plastičnih deformacija vrijedi $\phi|_{n+1} = 0$ i uz pomoć lančanog deriviranja slijedi

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{\Gamma}}\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)\Bigg|_n \cdot \Delta\lambda = -\phi|_n\,, \tag{4.97}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{\Gamma}}\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^{-1}\Bigg|_n \phi|_n.} \tag{4.98}$$

Derivacije funkcije tečenja (4.85) s obzirom na $\mathbf{\Gamma}$ i Y se vrlo lako mogu dobiti prema izrazima

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{\Gamma}} = \frac{\operatorname{dev} \mathbf{\Gamma}}{\| \operatorname{dev} \mathbf{\Gamma} \|} \frac{\partial \operatorname{dev} \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{\Gamma}}, \tag{4.99}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{4.100}$$

isto kao i derivacija varijable izotropnog očvršćenja po λ

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta T \left[H + \eta \left(\sigma_\infty - \sigma_Y \right) \exp \left(-\eta Z \mid_{n+1} \right) \right]. \tag{4.101}$$

U jednadžbi (4.99) potrebno je još odrediti derivaciju devijatora tenzora naprezanja po naprezanju. Ova derivacija je korištena i kasnije u izvodima jer derivacija devijatora proizvoljnog tenzora po tom tenzoru ima ovaj oblik

$$\frac{\partial (\operatorname{dev} \Gamma)_a{}^b}{\partial \Gamma_c{}^d} = \delta_a{}^c \delta^b{}_d - \frac{1}{3} \delta^c{}_d \delta_a{}^b. \tag{4.102}$$

U daljnjem tekstu bit će korištena indeksna notacija kako bi se olakšalo praćenje vrlo složenih derivacija. Izraz $\partial \mathbf{\Gamma} / \partial \lambda$ je izveden tako da se uzme u obzir ovisnost relativnog tenzora naprezanja o $\mathbf{L_p}$. Gradijent neelastičnog gradijenta deformiranja dalje ovisi o λ i $\boldsymbol{\nu}$ i preko njih opet o $\mathbf{\Gamma}$, tako da vrijedi

$$\frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f} \left(\left. \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \lambda} \right|_{\text{explicit}} + \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} \frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial \Gamma_m{}^n} \frac{\partial \Gamma_m{}^n}{\partial \lambda} \right). \tag{4.103}$$

Derivacija $\partial \mathbf{\Gamma} / \partial \lambda$ nalazi se s obje strane jednadžbe, prebacivanjem na lijevu stranu slijedi izraz

$$\boxed{\frac{\partial \Gamma_m{}^n}{\partial \lambda} = \left(\delta_c{}^m \delta_n{}^d - \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f} \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} \frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial \Gamma_m{}^n} \right)^{-1} \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f} \left. \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \lambda} \right|_{\text{explicit}}.} \tag{4.104}$$

Zagrada na lijevoj strani ove jednadžbe je tenzor četvrtog za kojeg treba naći njemu inverznu matricu. Indeks *explicit* označava derivaciju po argumentu deriviranja, ali samo tamo gdje je taj argument u funkciji eksplicitno izražen. Ne gleda se ovisnost o tom argumentu preko nekih drugih varijabli i funkcija. Tako je npr. u (4.104) derivacija $\mathbf{L_p}$,

$$\mathbf{L_p} = \lambda \frac{\operatorname{dev} \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}}}{\| \operatorname{dev} \mathbf{\Gamma} \|} = \lambda \boldsymbol{\nu}, \tag{4.105}$$

po λ samo derivacija po eksplicitno izraženom λ, a ne uzima se u obzir to da je relativni tenzor naprezanja $\mathbf{\Gamma}$ isto tako implicitno funkcija λ. Iz izloženog slijedi

$$\left.\frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{e}{}_{f}}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}} = \frac{(\operatorname{dev} \Gamma)_{f}{}^{e}}{\| \operatorname{dev} \Gamma \|} = \nu^{e}{}_{f}. \tag{4.106}$$

Za derivaciju $\partial \mathbf{\Gamma} / \partial \mathbf{L_p}$ koristi se lančano pravilo

$$\frac{\partial \Gamma_{i}{}^{j}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{k}{}_{l}} = \frac{\partial (\Gamma)_{i}{}^{j}}{\partial (F_{\mathrm{p}}^{-1})^{r}{}_{s}} \frac{\partial (F_{\mathrm{p}}^{-1})^{r}{}_{s}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{k}{}_{l}}. \tag{4.107}$$

Izvod svih potrebnih derivacija je detaljno prikazan u narednim odjeljcima 4.6.1, 4.6.2 i 4.6.3. Ti izvodi će kasnije biti korisni kod izvođenja elastoplastičnog tangentnog operatora.

4.6.1 Derivacija $\partial \mathbf{\Gamma} / \partial \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}$

Relativni tenzor naprezanja $\mathbf{\Gamma}$, (4.89) podijeljen je na dva dijela kako bi se rezultati iz ovog odjeljka mogli koristiti pri izvodu konzistentnog tangentnog operatora

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{I}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{II}} \tag{4.108}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{I}} = 2\rho_{\circ}\alpha_1 \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} + 2\rho_{\circ}\alpha_2(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}, \tag{4.109}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{II}} = \rho_{\circ} \frac{c}{(\det \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1})^{2/3}} \operatorname{dev}\left(\mathbf{C}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}\right). \tag{4.110}$$

Derivacija relativnog naprezanja po $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$, uz prethodno napravljeno razdvajanje (4.108), napravljena je pomoću lančanog pravila

$$\frac{\partial \Gamma_i{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = \frac{\partial (\Gamma^\mathrm{I})_i{}^j}{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b} \frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \frac{\partial (\Gamma^\mathrm{II})_i{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}. \tag{4.111}$$

Derivacije u (4.111) jednake su

$$\frac{\partial (\Gamma^\mathrm{I})_i{}^j}{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b} = 2\rho_\circ \Big\{ \alpha_1 [\delta^a{}_b (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^j + ((CC_\mathrm{p}^{-1})_r{}^r - 3)\delta_i{}^a \delta^j{}_b] + \alpha_2 [\delta_i{}^a (CC_\mathrm{p}^{-1})_b{}^j + ((CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a - \delta_i{}^a)\delta^j{}_b] \Big\}, \tag{4.112}$$

$$\frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^c{}_d} = C_{ar} (F_\mathrm{p}^{-1})^{bs} + C_{au} (F_\mathrm{p}^{-1})^{us} \delta^b{}_r \,, \tag{4.113}$$

dok je

$$\frac{\partial (\Gamma^\mathrm{II})_i{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = \frac{c}{(\det F_\mathrm{p}^{-1} \mid_n)^{2/3}} \frac{\partial \mathrm{dev}\, [C_{ia} (F_\mathrm{p}^{-1})^a{}_b (C^{-1})^{bc} (F_\mathrm{p}^{-1})^j{}_c]}{\partial [C_{ia} (F_\mathrm{p}^{-1})^a{}_b (C^{-1})^{bc} (F_\mathrm{p}^{-1})^j{}_c]} [C_{ir} (C^{-1})^{sa} (F_\mathrm{p}^{-1})^j{}_a - C_{ia} (F_\mathrm{p}^{-1})^a{}_b (C^{-1})^{bs} \delta^j{}_r] \,. \tag{4.114}$$

Derivacija devijatora nekog tenzora drugog reda po tom istom tenzoru napravljena je jednadžbom (4.102). Za bilo koji tenzor drugog reda $\mathbf{A}$ prema Bamberg & Sternberg [108] vrijedi izraz

$$\det(\exp(\mathbf{A})) = \exp(\mathrm{tr}\ \mathbf{A}), \tag{4.115}$$

tada za $\det \mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_{n+1}$ uz pomoć jednadžbe (4.92) vrijedi

$$\det(\mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_{n+1}) = \det[\exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p}) \mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_n] \tag{4.116}$$

$$= \det[\exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p})] \det(\mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_n) \tag{4.117}$$

$$= \exp[\mathrm{tr}\ (-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p})] \det(\mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_n) \tag{4.118}$$

i ako se upotrijebi izraz (4.83) za $\mathbf{L}_\mathbf{p}$, tada je

$$\det(\mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_{n+1}) = \exp\left[-\Delta T \lambda\ \mathrm{tr}\ \left(\frac{\mathrm{dev}\, \mathbf{\Gamma}^\mathrm{T}}{\parallel \mathrm{dev}\, \mathbf{\Gamma} \parallel} \right) \right] \det(\mathbf{F}_\mathbf{p} \mid_n). \tag{4.119}$$

Trag devijatora nekog tenzora je jednak nuli, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{dev}\,\mathbf{\Gamma}) = 0$ pa slijedi

$$\det(\mathbf{F_p}\,|_{n+1}) = \exp(0)\det(\mathbf{F_p}\,|_n), \tag{4.120}$$

$$\det(\mathbf{F_p}\,|_{n+1}) = \det(\mathbf{F_p}\,|_n). \tag{4.121}$$

Iz jednadžbe (4.121) se vidi da je determinanta određena za trenutak t_{n+1} jednaka onoj za t_n. To znači da se tijekom integriranja iznos determinante ne mijenja pa je njegova derivacija jednaka nuli.

4.6.2 Derivacija $\partial \mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}/\partial \mathbf{L_p}$

Druga derivacija na desnoj strani jednadžbe (4.107) rješava se uz pomoć eksponencijalnog preslikavanja (4.92), pa vrijedi lančano pravilo za deriviranje

$$\frac{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}{\partial (L_\mathrm{p})^k{}_l} = \frac{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}{\partial [\exp(-\Delta T L_\mathrm{p})]^e{}_f}\frac{\partial [\exp(-\Delta T L_\mathrm{p})]^e{}_f}{\partial (-\Delta T L_\mathrm{p})^g{}_h}\frac{\partial (-\Delta T L_\mathrm{p})^g{}_h}{\partial (L_\mathrm{p})^k{}_l}\,. \tag{4.122}$$

Prva derivacija u (4.122) je

$$\frac{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}{\partial [\exp(-\Delta T L_\mathrm{p})]^e{}_f} = (F_\mathrm{p}^{-1}|_n)^f{}_s \delta^r{}_e\,. \tag{4.123}$$

dok se za drugu koristi izraz izveden u Sansour & Wagner [26], izvedeno u odjeljku 3.4. Rezultat tog deriviranja je tenzor četvrtog reda koji predstavlja tangentu eksponencijalnog preslikavanja s obzirom na njegov argument, označen slovom $\mathbf{\Upsilon}$. Sada izraz (4.122) glasi

$$\frac{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}{\partial (L_\mathrm{p})^k{}_l} = -\Delta T \Upsilon^r{}_{fk}{}^l (F_\mathrm{p}^{-1}|_n)^f{}_s, \tag{4.124}$$

koji zajedno s izrazom dobivenim u prošlom odjeljku daje derivaciju $\partial \mathbf{\Gamma}/\partial \mathbf{L_p}$.

4.6.3 Derivacija $(\partial \mathbf{L_p}/\partial \boldsymbol{\nu})(\partial \boldsymbol{\nu}/\partial \mathbf{\Gamma})$

U jednadžbi (4.104) potrebno je još odrediti derivacije $(\partial \mathbf{L_p}/\partial \boldsymbol{\nu})(\partial \boldsymbol{\nu}/\partial \mathbf{\Gamma})$. Prvo slijedi derivacija $\mathbf{L_p}$ po $\boldsymbol{\nu}$ koja je vrlo jednostavna

$$\frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} = \lambda \delta^e{}_g \delta_f{}^h. \tag{4.125}$$

Normalu na plohu tečenja

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}}{\| \operatorname{dev} \boldsymbol{\Gamma} \|}, \tag{4.126}$$

potrebno je derivirati po relativnom tenzoru naprezanja

$$\frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial \Gamma_m{}^n} = \frac{1}{\| \operatorname{dev} \Gamma \|} \left[\frac{\partial (\operatorname{dev} \Gamma)_h{}^g}{\partial \Gamma_m{}^n} - \frac{(\operatorname{dev} \Gamma)_h{}^g (\operatorname{dev} \Gamma)^u{}_v}{\| \operatorname{dev} \Gamma \|^2} \frac{\partial (\operatorname{dev} \Gamma)_u{}^v}{\partial \Gamma_m{}^n} \right]. \tag{4.127}$$

Sada su izračunate sve derivacije u jednadžbi (4.104)

$$\frac{\partial \Gamma_m{}^n}{\partial \lambda} = \left(\delta_c{}^m \delta_n{}^d - \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_{\mathrm{p}})^e{}_f} \frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} \frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial \Gamma_m{}^n} \right)^{-1} \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_{\mathrm{p}})^e{}_f} \frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^e{}_f}{\partial \lambda} \bigg|_{\text{explicit}}.$$

U zagradi s desne strane potrebno je naći inverzni tenzor četvrtog i daljnim množenjem s preostala dva tenzora dobije se vrijednost za $\partial \boldsymbol{\Gamma} / \partial \lambda$. Ta je vrijednost potrebna za $\Delta \lambda$, izraz (4.98), kao i izrazi dobiveni u jednadžbama (4.99), (4.100) i (4.101)

$$\Delta \lambda = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^{-1} \Bigg|_n \phi|_n. \tag{4.128}$$

Ovisnost svih drugih veličina dana je preko $\Delta \lambda$ tako da se one mogu obnoviti za trenutak t_{n+1}.

Sažeti tablični prikaz izvedenog algoritma konstitutivnog modela za izotropne materijale prikazan je tablicom 4.1.

Tablica 4.1: Integracijski algoritam konstitutivnog modela za izotropne materijale

1. Ulazni podaci

   materijalni parametri - E, ν, H, c, σ_∞, η, σ_Y

   ulazne veličine na razini točke integracije - $\mathbf{C}|_{n+1}$, $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}|_n$

2. Prediktor

   $\boldsymbol{\Gamma}|_{\text{trial}} = \rho_\circ \left[2\alpha_1 \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} + 2\alpha_2(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-\mathbf{1}} + \frac{c}{(\det \mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1})^{2/3}} \text{dev}\,(\mathbf{C}\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-\text{T}})\right]$

   $\phi|_{\text{trial}} = \| \text{dev}\,\boldsymbol{\Gamma}|_{\text{trial}} \| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + Y)$

3. Kontrola uvjeta tečenja

   IF $\phi|_{\text{trial}} \leq 0$ THEN GOTO 6

4. Izračunavanje plastičnog množitelja

   $\Delta\lambda = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial\boldsymbol{\Gamma}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^{-1}\Big|_n \phi|_n.$

5. Obnavljanje (*update*) varijabli

   $\lambda|_{n+1} = \lambda|_n + \Delta\lambda$

   $Z\,|_{n+1} = Z\,|_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta T\lambda|_{n+1}$

   $\mathbf{L}_\mathbf{p}|_{n+1} = \lambda|_{n+1}\frac{\text{dev}\,\boldsymbol{\Gamma}^{\text{T}}}{\| \text{dev}\,\boldsymbol{\Gamma}\|}$

   $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}|_{n+1} = \exp(-\Delta T\,\mathbf{L}_\mathbf{p})\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}|_n$

   $\boldsymbol{\Gamma}|_{n+1} = \rho_\circ \left[2\alpha_1 \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} + 2\alpha_2(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} - \mathbf{1})\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-\mathbf{1}} + \frac{c}{(\det \mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1})^{2/3}} \text{dev}\,(\mathbf{C}\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-\text{T}})\right]$

   $\phi|_{n+1} = \| \text{dev}\,\boldsymbol{\Gamma}|_{n+1} \| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + Y|_{n+1})$

   GOTO 3

6. Konzistentni elastoplastični tangentni modul

   $\mathbb{C} = 2\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}}$

   $\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} = \frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Xi}}{\partial\mathbf{C}}$

7. Izlazne vrijednosti

   $\mathbb{C}$, $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}|_{n+1}$, $\mathbf{S}_{n+1}$

4.7 Algoritamski tangentni operator

Linearno elastične deformacije jednoznačna su funkcija naprezanja. Za razliku od toga u nelinearnim proračunima kao i pri pojavi plastičnog deformiranja materijala veza između inkrementa naprezanja i inkrementa deformacija dana je tangentnim modulom.

Kontinuum tangentni modul nije konzistentan s postupkom numeričke integracije jednadžbi materijalnog modela pa je narušena kvadratična konvergencija globalnog inkrementalno-iterativnog postupka. To ne utječe na točnost rješavanja jednadžbi već se samo smanjuje veličina koraka u inkrementalnom rješavanju, a samim time i brzina proračuna.

Konzistetni elastoplastični tangentni modul dobije se linearizacijom tenzora naprezanja s obzirom na njemu komplementarnu deformaciju. On je konzistentan s integracijskim algoritmom i zato omogućuje kvadratičnu konvergenciju i brže postizanje rješenja u globalnom Newtonovom iterativnom postupku.

Za ovaj materijalni model izveden je konzistentni algoritamski tangentni modul kao linearizacija drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja $\mathbf{S}$ s obzirom na desni Cauchy-Greenov tenzor $\mathbf{C}$. U odjeljku 3.5 pokazano je da se tenzor naprezanja može izvesti iz slobodne energije ψ deriviranjem po tenzoru deformiranosti. Za taj slučaj vrijedi potpuni diferencijal

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbb{C} : \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{C}. \tag{4.129}$$

Iz kojeg se može izvesti potpuna linearizaciju naprezanja s obzirom na deformaciju tj. slijedi izraz za tangentni modul

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}. \tag{4.130}$$

Za drugi Piola-Kirchhoffov tenzor $\mathbf{S}$ vrijedi

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Xi}. \tag{4.131}$$

U skladu s tim napravljena je sljedeća linearizacija

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}.} \tag{4.132}$$

Prvi izraz na desnoj strani se lako dobije

$$\frac{\partial (C^{-1})^{al}}{\partial (C)_{ij}}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(C^{-1})^{jl}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(S)^{jb}\,. \tag{4.133}$$

Izračun derivacije $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C}$ temelji se na istim principima kao račun za lokalnu iteraciju. Potrebno je posebnu pažnju obratiti na identificiranje eksplicitnih derivacija kao što je već opisano u odjeljku 4.6. U skladu s tim derivacija tenzora naprezanja je

$$\boxed{\frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial (L_\mathrm{p})^g{}_h}\frac{\partial (L_\mathrm{p})^g{}_h}{\partial C_{kl}} + \left.\frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}}.} \tag{4.134}$$

Derivacije su izvedene u posebnim odjeljcima kako bi praćenje izvoda bilo što jednostavnije.

4.7.1 Derivacije $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{L_p}$

Tenzor naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$ u skladu s jednadžbama (4.77), (4.91), (4.109) i (4.110) može se zapisati kao

$$\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Gamma}^\mathrm{I} + \boldsymbol{\Gamma}^\mathrm{II} + \mathbf{Q}. \tag{4.135}$$

Derivacija tenzora naprezanja po $\mathbf{L_p}$ je

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^\mathrm{I}}{\partial \mathbf{L_p}} + \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^\mathrm{II}}{\partial \mathbf{L_p}} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{L_p}}. \tag{4.136}$$

Derivacije $\partial\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{I}}/\partial\mathbf{L_p}$ i $\partial\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{I}}/\partial\mathbf{L_p}$ već su napravljene u odjeljcima 4.6.1 i 4.6.2. Za posljednji član u (4.135) vrijedi

$$\frac{\partial Q_a{}^b}{\partial (L_{\mathrm{p}})^k{}_l} = \frac{\partial Q_a{}^b}{\partial (F_{\mathrm{p}}^{-1})^r{}_s} \frac{\partial (F_{\mathrm{p}}^{-1})^r{}_s}{\partial (L_{\mathrm{p}})^k{}_l}, \tag{4.137}$$

gdje je

$$\frac{\partial Q_a{}^b}{(F_{\mathrm{p}}^{-1})^r{}_s} = -\frac{c}{(\det F_{\mathrm{p}}{}^{-1}\,|_n)^{2/3}} \frac{\partial \mathrm{dev}\,[(F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_a C_{mn} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^n{}_o (C^{-1})^{ob}]}{\partial [(F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_a C_{mn} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^n{}_o (C^{-1})^{ob}]}$$
$$\left[\delta_a{}^s C_{rn} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^n{}_o (C^{-1})^{ob} + (F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_a C_{mr} (C^{-1})^{sb}\right], \tag{4.138}$$

a drugi član na desnoj strani izveden je u odjeljku 4.6.2.

Pri numeričkom rješavanju za vrijednost $\partial\mathbf{\Xi}/\partial\mathbf{L_p}$ koristi se vrijednost koja se dobije u zadnjoj iteraciji numeričkog integracijskog postupka.

4.7.2 Derivacije $(\partial\mathbf{\Xi}/\partial\mathbf{C})|_{\mathrm{explicit}}$ i $(\partial\mathbf{\Gamma}/\partial\mathbf{C})|_{\mathrm{explicit}}$

Tenzor naprezanja $\mathbf{\Xi}$ rastavljen je na tri pribrojnika, prema jednadžbi (4.135). Svaki dio eksplicitno je deriviran po $\mathbf{C}$ pa je

$$\left.\frac{\partial (\Gamma^{\mathrm{I}})_a{}^b}{\partial C_{kl}}\right|_{\mathrm{explicit}} = \frac{\partial (\Gamma^{\mathrm{I}})_a{}^b}{\partial (CC_{\mathrm{p}}^{-1})_u{}^v} \left.\frac{\partial (CC_{\mathrm{p}}^{-1})_u{}^v}{\partial C_{kl}}\right|_{\mathrm{explicit}}. \tag{4.139}$$

Izraz $\partial\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{I}}/\partial\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}$ je već određen jednadžbom (4.112) dok je

$$\left.\frac{\partial (CC_{\mathrm{p}}^{-1})_u{}^v}{\partial C_{rs}}\right|_{\mathrm{explicit}} = \delta_u{}^r (F_{\mathrm{p}}^{-1})^{sc} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^v{}_c. \tag{4.140}$$

Eksplicitna derivacija $\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{II}}$ po $\mathbf{C}$ je

$$\left.\frac{\partial (\Gamma^{\mathrm{II}})_a{}^b}{C_{kl}}\right|_{\mathrm{explicit}} = \frac{c}{(\det F_{\mathrm{p}}^{-1}\,|_n)^{2/3}} \frac{\partial \mathrm{dev}\,[C_{am} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_n (C^{-1})^{no} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^b{}_o]}{\partial [C_{am} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_n (C^{-1})^{no} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^b{}_o]}$$
$$\left[\delta_a{}^k (F_{\mathrm{p}}^{-1})^l{}_n (C^{-1})^{no} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^b{}_o - C_{am} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^m{}_n (C^{-1})^{nk} (C^{-1})^{ol} (F_{\mathrm{p}}^{-1})^b{}_o\right] \tag{4.141}$$

dok eksplicitna derivacija *back stress* tenzora iznosi

$$\left.\frac{\partial Q_a{}^b}{C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} = -\frac{c}{(\det F_{\text{p}}{}^{-1}\,|_n)^{2/3}}\frac{\partial \text{dev}\,[(F_{\text{p}}^{-1})^m{}_a C_{mn}(F_{\text{p}}^{-1})^n{}_o(C^{-1})^{ob}]}{\partial[(F_{\text{p}}^{-1})^m{}_a C_{mn}(F_{\text{p}}^{-1})^n{}_o(C^{-1})^{ob}]}$$
$$\left[(F_{\text{p}}^{-1})^k{}_a(F_{\text{p}}^{-1})^l{}_o(C^{-1})^{ob} - (F_{\text{p}}^{-1})^m{}_a C_{mn}(F_{\text{p}}^{-1})^n{}_o(C^{-1})^{ok}(C^{-1})^{bl}\right]. \quad (4.142)$$

U jednadžbama (4.141) i (4.142) derivacija devijatora po njegovom argumentu izvodi se na isti način kao u jednadžbi (4.102).

Prema izrazima (4.135) i (4.108), sada vrijedi

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\text{I}}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\text{II}}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}} + \left.\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}, \quad (4.143)$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\text{I}}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\text{II}}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}. \quad (4.144)$$

4.7.3 Derivacija $\partial \mathbf{L_p}/\partial \mathbf{C}$

Da bi se dobila jednadžba (4.134) još uvijek nedostaje derivacija $\mathbf{L_p}$ po $\mathbf{C}$. Da bi se ona izračunala prvo su napravljene derivacije $\mathbf{L_p}$ i $\boldsymbol{\nu}$ po tenzoru $\mathbf{C}$

$$\frac{\partial (L_{\text{p}})^i{}_j}{\partial C_{kl}} = \left.\frac{\partial (L_{\text{p}})^i{}_j}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}} + \left.\frac{\partial (L_{\text{p}})^i{}_j}{\partial \nu^a{}_b}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial C_{rs}}, \quad (4.145)$$

$$\frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial C_{rs}} = \frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial \Gamma_c{}^d}\left[\left.\frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} + \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f}\frac{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f}{\partial C_{rs}}\right]. \quad (4.146)$$

Ako se (4.145) uvrsti u (4.146), slijedi

$$\frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial C_{rs}} = \frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial \Gamma_c{}^d}\left[\left.\frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} + \frac{\partial \Gamma_c{}^d}{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f}\left(\left.\frac{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}} + \left.\frac{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial C_{rs}}\right)\right]. \quad (4.147)$$

Ovdje treba napomenuti da derivacija $\partial \mathbf{L_p}/\partial \mathbf{C}$ nije mogla biti direktno izvedena jer ona ovisi o derivaciji $\partial \lambda/\partial \mathbf{C}$ koja je opet funkcija $\partial \mathbf{L_p}/\partial \mathbf{C}$. U

jednadžbi (4.147) eksplicitne derivacije iznose

$$\left.\frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{i}{}_{j}}{\partial \nu^{a}{}_{b}}\right|_{\text{explicit}} = \lambda \delta_{a}{}^{i} \delta_{j}{}^{b}, \tag{4.148}$$

$$\left.\frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{e}{}_{f}}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}} = \nu^{e}{}_{f} \ . \tag{4.149}$$

Nedostaje još derivacija $\partial\lambda/\partial\mathbf{C}$. Ako se derivira funkcija tečenja, jednadžba (4.85), s obzirom na $\mathbf{C}$ slijedi

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{rs}} = \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{a}{}^{b}} \frac{\partial \Gamma_{a}{}^{b}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{c}{}_{d}} \left.\frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{c}{}_{d}}{\partial \nu^{e}{}_{f}}\right|_{\text{explicit}} \frac{\partial \nu^{e}{}_{f}}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{a}{}^{b}} \left.\frac{\partial \Gamma_{a}{}^{b}}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}}. \tag{4.150}$$

Ako se sada u nju uvrsti jednadžba (4.149) i riješi po $\partial\lambda/\partial\mathbf{C}$ dobije se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}} = \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \left[\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{a}{}^{b}} \frac{\partial \Gamma_{a}{}^{b}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{c}{}_{d}} \frac{\partial \nu^{c}{}_{d}}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{a}{}^{b}} \left.\frac{\partial \Gamma_{a}{}^{b}}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} \right]. \tag{4.151}$$

Derivacije $\partial\phi/\partial\lambda$ i $\partial\phi/\partial\mathbf{\Gamma}$ su već izvedene u 4.6. Prilikom numeričke implementacije algoritma potrebno je obratiti pažnju na to da te derivacije imaju zadovoljavajuću točnost tek u zadnjoj iteraciji numeričkog postupka integriranja i ta vrijednost se onda koristi kod računa tangentnog modula. Nakon uvrštavanja (4.151) u (4.147), derivacija $\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{C}$ može se eksplicitno pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_{g}{}^{h}}{\partial C_{rs}} = & \left[\delta_{g}{}^{a} \delta^{h}{}_{b} - \frac{\partial \nu^{a}{}_{b}}{\partial \Gamma_{c}{}^{d}} \frac{\partial \Gamma_{c}{}^{d}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{e}{}_{f}} \left(\frac{\lambda}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \nu^{e}{}_{f} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{u}{}^{v}} \frac{\partial \Gamma_{u}{}^{v}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{g}{}_{h}} + \lambda \delta_{g}{}^{e} \delta_{f}{}^{h} \right) \right]^{-1} \\ & \left(\frac{\partial \nu^{a}{}_{b}}{\partial \Gamma_{c}{}^{d}} \frac{\partial \Gamma_{c}{}^{d}}{\partial (L_{\mathrm{p}})^{e}{}_{f}} \nu^{e}{}_{f} \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma_{u}{}^{v}} + \frac{\partial \nu^{a}{}_{b}}{\partial \Gamma_{u}{}^{v}} \right) \left.\frac{\partial \Gamma_{u}{}^{v}}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}}. \end{aligned} \tag{4.152}$$

$\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{C}$ se sada može izračunati jer su svi izrazi koji se nalaze u ovoj jednadžbi poznati:

- $\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{\Gamma} \Longrightarrow$ jednadžba (4.127),
- $\partial\mathbf{\Gamma}/\partial\mathbf{L_p} \Longrightarrow$ odjeljci 4.6.1 i 4.6.2,

- $\partial\phi/\partial\lambda \Longrightarrow$ tenzor četvrtog reda kojeg treba invertirati u jednadžbi (4.128) - koristi se zadnja vrijednost u lokalnoj iteraciji,
- $\partial\phi/\partial\mathbf{\Gamma} \Longrightarrow$ jednadžba (4.99),
- $\partial\mathbf{\Gamma}/\partial\mathbf{C}|_{\text{explicit}} \Longrightarrow$ odjeljak 4.7.2.

Treba napomenuti da je potrebno raditi inverziju tenzora četvrtog reda (prvi član s desne strane u uglatoj zagradi). S tim rezultatom se onda ulazi u jednadžbu (4.151)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial C_{rs}} = \frac{1}{-\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}}\left[\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\Gamma_a{}^b}\frac{\partial\Gamma_a{}^b}{\partial(L_\mathrm{p})^c{}_d}\frac{\partial\nu^c{}_d}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial\phi}{\partial\Gamma_a{}^b}\frac{\partial\Gamma_a{}^b}{\partial C_{rs}}\bigg|_{\text{explicit}}\right],$$

dok su ostali izrazi već prije određeni:

- $\partial\phi/\partial\lambda \Longrightarrow$ tenzor četvrtog reda kojeg treba invertirati u jednadžbi (4.128) - koristi se zadnja vrijednost u lokalnoj iteraciji,
- $\partial\phi/\partial\mathbf{\Gamma} \Longrightarrow$ jednadžba (4.99),
- $\partial\mathbf{\Gamma}/\partial\mathbf{L_p} \Longrightarrow$ odjeljci 4.6.1 i 4.6.2,
- $\partial\mathbf{\Gamma}/\partial\mathbf{C}|_{\text{explicit}} \Longrightarrow$ odjeljak 4.7.2.

Sada su poznati $\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\mathbf{C}$ i $\partial\lambda/\partial\mathbf{C}$ pa se može riješiti jednadžba (4.145)

$$\frac{\partial(L_\mathrm{p})^i{}_j}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial(L_\mathrm{p})^i{}_j}{\partial\lambda}\bigg|_{\text{explicit}}\frac{\partial\lambda}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial(L_\mathrm{p})^i{}_j}{\partial\nu^a{}_b}\bigg|_{\text{explicit}}\frac{\partial\nu^a{}_b}{\partial C_{rs}},$$

a onda i (4.134)

$$\frac{\partial\Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial\Xi_a{}^b}{\partial(L_\mathrm{p})^g{}_h}\frac{\partial(L_\mathrm{p})^g{}_h}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial\Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}}\bigg|_{\text{explicit}}.$$

Uz pomoć $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C}$ slijedi izraz za konzistentni elastoplastični tangentni operator, prema (4.132)

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}.$$

odnosno prema (4.130)

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}.$$

Na kraju je bitno napomenuti da tangentni operator nije simetričan što je posljedica teorije temeljene na multiplikativnom razlaganju gradijenta deformiranja kao i složene strukture integracijskog algoritma. Prikaz najvažnijih jednadžbi konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula može se naći u tablici 4.2.

Tablica 4.2: Numerički algoritam konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula kod izotropnih materijala

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial (C^{-1})^{al}}{\partial (C)_{ij}}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(S)^{jb} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}}\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \mathbf{C}} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \mathbf{C}} = \left.\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} + \left.\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}},$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\left[\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{L_p}}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}} + \left.\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}\right] \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}} = \left[\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{L_p}}\left(\frac{\lambda}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\boldsymbol{\nu}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{L_p}} + \lambda \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{L_p}}\boldsymbol{\nu}\frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}\right)\left.\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}$$

Poglavlje 5

Anizotropni materijalni model

U ovom poglavlju izveden je konstitutivni model kojim se može opisati ponašanje anizotropnih materijala. Modelom se može opisati anizotropno elastično ponašanje materijala kao i anizotropna funkcija tečenja. Formulacija konstitutivnih jednadžbi napravljena je u referentnoj konfiguraciji. Numerička formulacija rađena je istim postupkom kako je već pokazano u odjeljku 4.1.

5.1 Slobodna energija i reducirana disipacijaska funkcija

Za razliku od izotropnog materijalnog modela iz prethodnog poglavlja izvedenog u trenutnoj konfiguraciji, anizotropni model je razvijen u materijalnoj konfiguraciji. Ovdje vrijede iste kinematičke relacije već opisane u odjeljku 4.1. Za početak, potrebno je dodatnu pažnju posvetiti oblikovanju snage naprezanja. Kao logičan izbor nameće se zapis pomoću Kirchhoffovog tenzora $\boldsymbol{\tau}$ i Eshelbyjeva tenzora naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$ na sljedeći način

$$\mathcal{W} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L}. \tag{5.1}$$

Lako se može zamijetiti da je $\boldsymbol{\Xi}$ materijalni tenzor, a $\boldsymbol{\tau}$ je njegov par u trenutnoj konfiguraciji. Oni su međusobno povezani miješano varijantnim prijenosom unazad (*pull back*)

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}. \tag{5.2}$$

Kao i u izotropnom materijalnom modelu, pretpostavlja se da je elastično ponašanje materijala potpuno određeno slobodnom energijom ψ. U ovom slučaju kao unutarnja varijabla koristi se skalar Z kako bi se opisao mehanizam izotropnog očvršćenja. Slobodna energija pretpostavljena je kao suma elastičnog i neelastičnog dijela

$$\psi = \psi_{\mathrm{e}}(\mathbf{C_e}) + \psi_{\mathrm{i}}(Z). \tag{5.3}$$

Elastična slobodna energija izotropna je funkcija materijalnog elastičnog tenzora $\mathbf{C_e}$ i strukturnih tenzora ${}_i\mathbf{M_e}$. Strukturni tenzori određuju glavne pravce deformiranja materijala. U ovom radu korišteni su materijalni strukturni tenzori određeni u skladu sa Sansour & Kollmann [79] i Sansour & Bocko [80]. Materijalni strukturni tenzori određeni su za slučaj ortotropnog ponašanja materijala pomoću tri okomita vektora koji predstavljaju glavne pravce ${}_i\mathbf{v_e}$ gdje je $i = 1, 2, 3$. Za njih vrijedi izraz

$${}_i\mathbf{v_e} \cdot {}_j\mathbf{v_e} = \delta_{ij}, \tag{5.4}$$

a δ_{ij} predstavlja Kroneckerov delta. S glavnim pravcima mogu se odrediti strukturni tenzori u materijalnoj konfiguraciji, prema Spencer [109], Smith [110], Boehler [111], kao

$${}_i\mathbf{M_e} = {}_i\mathbf{v_e} \otimes {}_i\mathbf{v_e}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.5}$$

Očito je da za slučaj ortotropnog ponašanja materijala postoje tri strukturna tenzora. Treba napomenuti da su oni u ovom slučaju vezani za referentnu konfiguraciju.

Slobodna energija ψ je određena kao izotropna funkcija dva argumenta $\mathbf{C_e}$ i ${}_i\mathbf{M_e}$: $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{C_e}, {}_i\mathbf{M_e})$. Potpuni prikaz izotropne funkcije može se postići ovisnošću o tzv. nezavisnim invarijantama (*integrity basis*). To je minimalni broj invarijanti koji može u potpunosti opisati neku pojavu. Iz izraza (4.5) i (5.5) vidi se da su tenzori $\mathbf{C_e}$ i ${}_i\mathbf{M_e}$ simetrični pa prema BOEHLER [111] za simetrične argumente mogu se zapisati sljedeće invarijante

$$J_i = \text{tr}\ \left[({}_i\mathbf{M_e})\mathbf{C_e}\right], \quad i = 1,2,3, \tag{5.6}$$

$$J_{(i+3)} = \text{tr}\ \left[({}_i\mathbf{M_e})\mathbf{C_e}^2\right], \quad i = 1,2,3, \tag{5.7}$$

$$J_7 = \text{tr}\ \left[\mathbf{C_e}^3\right]\ . \tag{5.8}$$

Pomoću tih invarijanti može se onda opisati elastična slobodna energija. Ovisnost o invarijantama može biti općenita, ali u ovom slučaju je ograničena tako da bude kvadratna funkcija deformacija. U skladu s tim izraz za elastičnu slobodnu energiju glasi

$$\rho_0\psi_\text{e} = \sum_{i=1}^{3}\left[\alpha_i J_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{(ij)}J_iJ_j + \alpha_{(i+9)}J_{(i+3)}\right]. \tag{5.9}$$

Ovdje su $\alpha_i, \alpha_{(ij)}, \alpha_{i+9}$ materijalne konstante, gdje je $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Zapis pomoću α_{ij} napravljen je kako bi se omogućio sažeti prikaz pa vrijede sljedeći izrazi: $\alpha_{(11)} = \alpha_4$, $\alpha_{(22)} = \alpha_5$, $\alpha_{(33)} = \alpha_6$, $\alpha_{(12)} = \alpha_{(21)} = \alpha_7$, $\alpha_{(13)} = \alpha_{(31)} = \alpha_8$, $\alpha_{(23)} = \alpha_{(32)} = \alpha_9$.

Sada kada su određeni snaga naprezanja u referentnoj konfiguraciji (5.1) i slobodna energija, slijedi izraz za disipacijsku funkciju

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L} - \rho_0\dot{\psi}. \tag{5.10}$$

U skladu s oblikom slobodne energije (5.3) disipacijska funkcija još se može zapisati kao

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C_e}} : \dot{\mathbf{C}}_\mathbf{e} - \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial Z}\cdot\dot{Z} \geq 0. \tag{5.11}$$

Ovdje je još jednom potrebno naglasiti da uz pretpostavku da je $\mathbf{F_p}$ materijalni tenzor, odjeljak 4.1, slijedi i da je $\mathbf{C_e} = \mathbf{F_p^{-T}} \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}}$ također materijalni tenzor. Ako se uzme derivacija $\dot{\mathbf{C}}_\mathbf{e}$

$$\dot{\mathbf{C}}_\mathbf{e} = \mathbf{F_p^{-T}} \mathbf{L}^\mathrm{T} \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}} + \mathbf{F_p^{-T}} \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{F_p^{-1}} - \mathbf{F_p^{-T}} \mathbf{L_p^T} \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}} - \mathbf{F_p^{-T}} \mathbf{C} \mathbf{L_p^T} \mathbf{F_p^{-1}}, \quad (5.12)$$

tada slijedi razvoj disipacijske nejednakosti

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = &\left(\boldsymbol{\Xi} - 2\rho_0 \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}} \frac{\partial \psi(\mathbf{C_e}, Z)}{\partial \mathbf{C_e}} \mathbf{F_p^{-T}} \right) : \mathbf{L} \\ &+ 2\rho_0 \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}} \frac{\partial \psi(\mathbf{C_e}, Z)}{\partial \mathbf{C_e}} \mathbf{F_p^{-T}} : \mathbf{L_p} - \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{C_e}, Z)}{\partial Z} \cdot \dot{Z} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uz uvjet da ova nejednadžba mora biti ispunjena za sve realne slučajeve, Colleman-Noll procedura, vrijede izrazi za termodinamičke sile (*thermodynamical forces*)

$$\boldsymbol{\Xi} = 2\rho_0 \mathbf{C} \mathbf{F_p^{-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C_e}} \mathbf{F_p^{-T}}, \quad (5.14)$$

$$Y = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial Z}. \quad (5.15)$$

Ovdje je Y sila konjugirana unutarnjoj varijabli Z. Uzimajući u obzir ove izraze disipacijska nejednakost poprima sljedeći reducirani oblik

$$\mathcal{D}_r = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L_p} + Y \cdot \dot{Z} \geq 0, \quad (5.16)$$

gdje $\mathcal{D}_r$ označava reduciranu disipacijsku funkciju.

Kako bi se odredio izraz za $\boldsymbol{\Xi}$, prema (5.14) potrebno je derivirati slobodnu energiju, prikazanu jednadžbom (5.9), po $\mathbf{C_e}$. Uz pomoć pravila lančanog deriviranja, vrijedi

$$\frac{\partial \psi_\mathrm{e}}{\partial \mathbf{C_e}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi_\mathrm{e}}{\partial J_i} \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{C_e}} + \frac{\partial \psi_\mathrm{e}}{\partial J_{i+3}} \frac{\partial J_{i+3}}{\partial \mathbf{C_e}} \right). \quad (5.17)$$

Derivacije slobodne energije po invarijantama su

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_1} = \alpha_1 + \alpha_4 J_1 + \alpha_7 J_2 + \alpha_8 J_3, \tag{5.18}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_2} = \alpha_2 + \alpha_5 J_2 + \alpha_7 J_1 + \alpha_9 J_3, \tag{5.19}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_3} = \alpha_3 + \alpha_6 J_3 + \alpha_8 J_1 + \alpha_9 J_2, \tag{5.20}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_4} = \alpha_{10}, \tag{5.21}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_5} = \alpha_{11}, \tag{5.22}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial J_6} = \alpha_{12}, \tag{5.23}$$

a derivacije invarijanti po elastičnom desnom Cauchy-Greenovom tenzoru su

$$\frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial \mathbf{C_e}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_i} \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{C_e}} + \frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_{i+3}} \frac{\partial J_{i+3}}{\partial \mathbf{C_e}} \right), \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{C_e}} = {}_i\mathbf{M_e}, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial J_{i+3}}{\partial \mathbf{C_e}} = {}_i\mathbf{M_e}\mathbf{C_e} + \mathbf{C_e}\,{}_i\mathbf{M_e}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.26}$$

Ako se prethodno prikazane derivacije uvrste u jednadžbu (5.14) tenzor naprezanja se može zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{\Xi} = 2\rho_0 \Bigg\{ \sum_{i=1}^{3} \Bigg[& \frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_i} \mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \\ & + \frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_{(i+3)}} \left(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}})\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \right) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Ovdje je uvedena oznaka za promijenjeni strukturni tenzor (*modified structural tensor*), ${}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}$, određen kao

$$({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) = \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}({}_i\mathbf{M}_{\mathbf{e}})\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.28}$$

Kao što se može vidjeti iz jednadžbe (5.27), tenzor naprezanja ovisi o veličini $\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}$ koja se javlja i u izrazu za izotropni tenzor naprezanja (4.89). Razlika

u odnosu na izotropni slučaj su promijenjeni strukturni tenzori kojima su određeni glavni pravci ortotropije.

5.2 Utjecaj rotacije krutog tijela na invarijante i slobodnu energiju

U prethodnom odjeljku elastično ponašanje materijala opisano je slobodnom energijom koja je funkcija materijalnih strukturnih tenzora i elastičnog tenzora deformiranosti: $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{C_e}, {}_i\mathbf{M_e}, Z)$. Slobodna energija je onda određena kao izotropna funkcija svojih argumenata koje su dovele do definicije devet invarijanti. U cilju sveobuhvatne analize anizotropnog elastičnog ponašanja materijala potrebno je posebno razmotriti utjecaj rotacije krutog tijela (*superimposed rigid body rotations*) na invarijante, koje čine slobodnu energiju, kao i na samu slobodnu energiju.

Veliki utjecaj na ispravnost prethodno iznesene formulacije elastičnog anizotropnog ponašanja materijala ima priroda neelastičnog gradijenta deformiranja $\mathbf{F_p}$. Razmotren je utjecaj rotacije krutog tijela ovisno o usvojenom shvaćanju prirode $\mathbf{F_p}$.

- U slučaju pretpostavke da $\mathbf{F_p}$ nije materijalni tenzor, pri narinutom gibanju krutog tijela vrijedi $\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{p} = \mathbf{Q}\mathbf{F_p}$ odnosno $\hat{\mathbf{C}}_\mathbf{e} = \mathbf{Q}\mathbf{C_e}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$, gdje je $\mathbf{Q} \in SO(3)$. Ako se pogleda samo jedna invarijanta, recimo $J_1 = \mathrm{tr}\,[({}_1\mathbf{M_e})\mathbf{C_e}]$ slijedi

$$\hat{J}_1 = \mathrm{tr}\,\left[({}_1\mathbf{M_e})\mathbf{Q}\mathbf{C_e}\mathbf{Q}^T\right] \neq J_1. \tag{5.29}$$

  Lako se može zaključiti da onda ova formulacija nije invarijantna s obzirom na rotaciju krutog tijela tj. da ta formulacija nije korektno

izvedena. Kako bi se dobilo rješenje ovog problema potrebno je napraviti ψ invarijantnom s obzirom na djelovanje $SO(3)$ na $\mathbf{F_p}$. To se može osigurati tako da se strukturni tenzori podvrgnu nametnutoj rotaciji tj. mora biti

$$\psi(\mathbf{C_e}, {}_i\mathbf{M_e}, Z) = \hat{\psi}(\mathbf{Q}\mathbf{C_e}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{Q}\,({}_i\mathbf{M_e})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, Z). \tag{5.30}$$

Na taj način strukturni tenzori više neće biti materijalni tenzori. No, ovo rješenje nije predmet razmatranja ovog rada.

- Uz pretpostavku da je $\mathbf{F_p}$ materijalni tenzor, kao što je pretpostavljeno u ovom radu (odjeljci 4.1 i 4.3), bespredmetno je razmatrati rotacije krutog tijela jer je ono potpuno nezavisno o njima. Isto tako je i $\mathbf{C_e}$ materijalni tenzor i ne ovisi o gibanju krutog tijela. Prije je već spomenuto da je i ${}_i\mathbf{M_e}$ materijalni tenzor, pa je prema tome i slobodna energija nezavisna o gibanju krutog tijela, tj.

$$\psi(\mathbf{C_e}, {}_i\mathbf{M_e}, Z) = \hat{\psi}(\mathbf{C_e}, {}_i\mathbf{M_e}, Z). \tag{5.31}$$

To je u skladu s razmatranjima u Scheidler & Wright [112], Sansour & Kollmann [23], Svendsen [81] i Sansour & Bocko [80].

Na ovaj je način pokazano da formulacija elastičnog anizotropnog ponašanja u referentnoj konfiguraciji ima smisla jedino ako se pretpostavi da je neelastični gradijent deformiranja materijalni tenzor.

5.3 Anizotropne evolucijske jednadžbe i neelastični gradijent deformiranja

Sada kada je određeno elastično anizotropno ponašanje materijala može se pristupiti modeliranju anizotropnog neelastičnog ponašanja pomoću funkcije

tečenja. Kao prvo potrebno je odrediti argumente funkcije tečenja. Za argumente se uvijek uzima veličina koja se nalazi u reduciranoj disipacijskoj nejednakosti (5.16), a u ovom slučaju to je $\boldsymbol{\Xi}$. Eshelbyjev tenzor naprezanja dobar je izbor jer je on materijalna veličina kao i glavni pravci anizotropije koji su također zadani u referentnoj konfiguraciji. Nadalje, kako bi se mogla ostvariti nestlačivost materijala pri plastičnom deformiranju, funkcija tečenja mora ovisiti o devijatoru tenzora naprezanja. Kako bi se opisalo anizotropno ponašanje, argumente funkcije tečenja moraju činiti i strukturni tenzori. Formulacija je napravljena za slučaj ortotropnog ponašanja materijala. Treba napomenuti kako formulacija vrijedi za opći slučaj anizotropije tj. da nije ograničena samo za ortotropne materijale. No, ortotropija je dobro opisana u literaturi i lako se mogu naći materijalni parametri.

Tri glavna pravca ortotropije ovdje su označeni vektorima ${}_i\mathbf{v}_\mathbf{y}$, gdje je $i = 1, 2, 3$ i za njih vrijedi izraz

$$ {}_i\mathbf{v}_\mathbf{y} \cdot {}_j\mathbf{v}_\mathbf{y} = \delta_{ij}, \tag{5.32} $$

tj. to su međusobno okomiti pravci. S glavnim pravcima mogu se odrediti strukturni tenzori u materijalnoj konfiguraciji, prema Spencer [109], Smith [110], Boehler [111], kao

$$ {}_i\mathbf{M}_\mathbf{y} = {}_i\mathbf{v}_\mathbf{y} \otimes {}_i\mathbf{v}_\mathbf{y}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5.33} $$

Kao što se može vidjeti neelastični strukturni tenzor označen je indeksom $\mathbf{y}$, ${}_i\mathbf{M}_\mathbf{y}$.

Pošto su određeni strukturni tenzori, funkcija tečenja sada se pretpostavlja u kvadratnom obliku kao izotropna funkcija devijatora tenzora naprezanja $\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}$ i tri strukturna tenzora ${}_i\mathbf{M}_\mathbf{y}$

$$ \phi = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sigma^{\mathrm{y}}_{11} \sqrt{\chi} - (1 - Y) \right]. \tag{5.34} $$

Ovdje Y predstavlja nelinearnu funkcija koja opisuje mehanizam izotropnog očvršćenja i zadana je izrazom

$$Y = -HZ - (\sigma_\infty - \sigma_{11}^{\mathrm{y}})\left[1 - \exp(-\eta Z)\right], \tag{5.35}$$

gdje H označava koeficijent linearnog izotropnog očvršćenja, σ_{11}^{y} je granica tečenja u smjeru 1, a σ_∞ i η su parametri kojima se može modelirati nelinearno izotropno očvršćenje. Varijabla χ označava ekvivalentno naprezanje i skladu s prethodnim razmatranjem mora biti funkcija devijatora naprezanja.

Sljedeći cilj je oblikovati potpuni prikaz ekvivalentnog naprezanja $\chi = \hat{\chi}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}, {}_i\mathbf{M}_{\mathbf{y}})$, gdje je $i = 1, 2, 3$. To se postiže zapisom pomoću međusobno nezavisnog skupa invarijanti (*integrity basis*). Tenzor naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$ je nesimetričan tenzor pa je potrebno devijator naprezanja, $\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}$, podijeliti na simetrični i antisimetrični dio: $\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi} = \operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}} + \operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}}$. Dalje, prema Zheng [113] zapis nezavisnog skupa invarijanti u slučaju nesimetričnih argumenata je

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \operatorname{tr}\left[(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^2\right], && (5.36)\\
\tilde{I}_2 &= \operatorname{tr}\left[(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^3\right], && (5.37)\\
\tilde{I}_3 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} -_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}\right], && (5.38)\\
\tilde{I}_4 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}1} +_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}\right], && (5.39)\\
\tilde{I}_5 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} -_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^2\right], && (5.40)\\
\tilde{I}_6 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} +_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^2\right], && (5.41)\\
\tilde{I}_7 &= \operatorname{tr}\left[(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], && (5.42)\\
\tilde{I}_8 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} -_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], && (5.43)\\
\tilde{I}_9 &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} +_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], && (5.44)\\
\tilde{I}_{10} &= \operatorname{tr}\left[({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} +_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{y}} -_2 \mathbf{M}_{\mathbf{y}})\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}}\right], && (5.45)\\
\tilde{I}_{11} &= \operatorname{tr}\left[\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], && (5.46)
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_{12} = \mathrm{tr}\left[({}_1\mathbf{M_y} -_2 \mathbf{M_y})\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], \tag{5.47}$$

$$\tilde{I}_{13} = \mathrm{tr}\left[({}_1\mathbf{M_y} +_2 \mathbf{M_y})\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], \tag{5.48}$$

$$\tilde{I}_{14} = \mathrm{tr}\left[({}_1\mathbf{M_y} -_2 \mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^2(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right]. \tag{5.49}$$

Treba uzeti u obzir da vrijedi uvjet

$${}_1\mathbf{M_y} + {}_2\mathbf{M_y} + {}_3\mathbf{M_y} = \mathbf{1}\,. \tag{5.50}$$

Ograničavanjem na linearne i kvadratne članove koji trebaju činiti funkciju tečenja, i uz pomoć uvjeta (5.50) invarijante se mogu zapisati kao

$$I_i^* = \mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}}\right], \qquad i = 1,2,3, \tag{5.51}$$

$$I_{i+3}^* = \mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{sim}})^2\right], \qquad i = 1,2,3, \tag{5.52}$$

$$I_{i+6}^* = \mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}_{\mathrm{anti}})^2\right], \qquad i = 1,2,3. \tag{5.53}$$

Ako se uzme u obzir definicija $(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})_{\mathrm{sim}}$ i $(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})_{\mathrm{anti}}$ vrijedi $\mathrm{tr}\,(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})_{\mathrm{anti}} = 0$ i $\mathrm{tr}\,[(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})_{\mathrm{sim}}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})_{\mathrm{anti}}] = 0$. Uz pomoć tih izraza invarijante se mogu zapisati kao funkcije devijatora tenzora naprezanja:

$$I_i = \mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})\,\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}\right], \qquad i = 1,2,3 \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} I_{i+3} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})\left((\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^2 + (\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}})^2\right)\right] \\ &= \mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^2\right],\ i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$I_{i+6} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\left[({}_i\mathbf{M_y})\,\left(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}\,\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}} + \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}\right)\right], \qquad i = 1,2,3\,, \tag{5.56}$$

što je mnogo prikladnije za proračunski model nego da se moraju upotrebljavati simetrični i antisimetrični dijelovi tenzora naprezanja. Ovdje je potrebno napomenuti da nije moguće uzeti samo simetrični dio tenzora naprezanja kao što se vidi iz izraza (5.51) do (5.53).

Kako su sada određene invarijante, ekvivalentna granica tečenja χ, sadržano u izrazu za funkciju tečenja (5.34), može se zapisati kao kvadratna funkcija invarijanti

$$\chi = \sum_{i=1}^{3} \left[\beta_i I_i^2 + \beta_{(i+6)} I_{(i+3)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \beta_{(i+j+1)} I_i I_j + \beta_{(i+9)} I_{(i+6)} \right], \quad \text{za } i \neq j\,, \tag{5.57}$$

gdje su β_1 - β_{12} materijalne konstante. Tenzori $\boldsymbol{\tau}$ i $\boldsymbol{\Xi}$ su fizikalno ekvivalentne veličine tj. funkcija tečenja mora biti jednaka i u trenutnoj i u referentnoj konfiguraciji. Za neku funkciju $\phi(\boldsymbol{\tau})$ u trenutnoj konfiguraciji mora njezin prijenos unazad biti ili $\phi(\boldsymbol{\Xi})$ ili $\phi(\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}})$, ali ne mogu biti oba oblika istovremeno. Iz toga razloga mogu se iz izraza (5.57) ispustiti invarijante I_{i+6}, pa izraz za ekvivalentnu granicu tečenja glasi

$$\chi = \sum_{i=1}^{3} \left[\beta_i I_i^2 + \beta_{(i+6)} I_{(i+3)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \beta_{(i+j+1)} I_i I_j \right], \quad \text{for } i \neq j\,. \tag{5.58}$$

Kao što se može zamijetiti prethodni izraz ovisi o ukupno devet materijalnih konstanti.

Budući da je sada određena funkcija tečenja, potrebno je izvesti zakon tečenja. Pretpostavlja se postojanje potpuno elastičnog područja E opisanog konveksnom funkcijom tečenja ϕ izražene preko Eshelbyjevog tenzora naprezanja i varijable konjugirane unutarnjoj varijabli Z

$$E := \{(\boldsymbol{\Xi}, Y) : \phi(\boldsymbol{\Xi}, Y) \leq 0\}. \tag{5.59}$$

Isto kao i kod izotropnog materijalnog modela, odjeljak 4.4, iz II zakona termodinamike slijedi princip maksimuma disipacijske energije koji se može zapisati kao sljedeća varijacijska jednadžba

$$\int \left(- \left(\boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L_p} + Y \cdot \dot{Z} \right) + \lambda \phi(\boldsymbol{\Xi}, Y) \right) \mathrm{d}s = \text{stat.} \tag{5.60}$$

Ovdje λ predstavlja plastični množitelj, a ds označava parametrizaciju deformacijske krivulje. Iz jednadžbe (5.60) slijede evolucijske jednadžbe za gradijent brzine deformiranja i varijablu izotropnog očvršćenja

$$\mathbf{L_p} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}}, \tag{5.61}$$

$$\dot{Z} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial Y}. \tag{5.62}$$

Jednadžbe se nadopunjuju s Kuhn-Tuckerovim uvjetima

$$\lambda \geq 0\,, \qquad \lambda\ \phi(\boldsymbol{\Xi}, Y) = 0\,, \qquad \phi(\boldsymbol{\Xi}, Y) \leq 0\,, \tag{5.63}$$

i uvjetom konzistencije

$$\lambda \dot{\phi}(\boldsymbol{\Xi}, Y) = 0. \tag{5.64}$$

Uz pomoć jednadžbi (5.34), (5.54), (5.55) i (5.58) derivacija $\partial\phi/\partial\boldsymbol{\Xi}$ se primjenom lančanog deriviranja može zapisati kao

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}} = \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \chi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}} + \frac{\partial \chi}{\partial I_{i+3}} \frac{\partial I_{i+3}}{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}} \right) \frac{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}}{\partial \boldsymbol{\Xi}}. \tag{5.65}$$

Pojedine derivacije u prethodnom izrazu su

$$\frac{\partial \phi}{\partial \chi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_{11}^{\mathrm{y}}}{2\sqrt{\chi}}, \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_1} = 2\beta_1 I_1 + \beta_4 I_2 + \beta_5 I_3, \tag{5.67}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_2} = 2\beta_2 I_2 + \beta_4 I_1 + \beta_6 I_3, \tag{5.68}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_3} = 2\beta_3 I_3 + \beta_5 I_1 + \beta_6 I_2, \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_4} = \beta_7, \tag{5.70}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_5} = \beta_8, \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial I_6} = \beta_9, \tag{5.72}$$

kao i derivacije invarijanti po dev $\boldsymbol{\Xi}$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}} = ({}_i\mathbf{M}_\mathbf{y})^{\mathrm{T}}, \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial I_{i+3}}{\partial \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}} = ({}_i\mathbf{M}_\mathbf{y})\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}} + \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}({}_i\mathbf{M}_\mathbf{y}). \tag{5.74}$$

Na osnovi prethodnih derivacija, evolucijske jednadžbe (5.61) i (5.62) mogu se pisati kao

$$\mathbf{L}_\mathbf{p} = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sigma^{\mathrm{y}}_{11}}{2\sqrt{\chi}}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\chi}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}} + \frac{\partial\chi}{\partial I_{i+3}}\frac{\partial I_{i+3}}{\partial \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}}\right)\frac{\partial \mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi}}{\partial\boldsymbol{\Xi}} \tag{5.75}$$

$$\mathbf{L}_\mathbf{p} = \lambda\boldsymbol{\nu}, \tag{5.76}$$

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda, \tag{5.77}$$

gdje je

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Xi}}, \tag{5.78}$$

normala na plohu tečenja.

Jednadžbe (5.75) i (5.77) zajedno s slobodnom energijom (5.9) odnosno izrazima za tenzor naprezanja (5.14) i izotropno očvršćenje (5.15) čine cjelovitu formulaciju konstitutivnog modela.

5.4 Numerička formulacija - lokalna iteracija

Postupak numeričke integracije konstitutivnih jednadžbi sličan je onom detaljno razrađenom u odjeljku 4.6. Kod anizotropnog materijalnog modela koristi se isti postupak, ali se mijenjaju pojedine derivacije koje ovdje imaju puno složeniji oblik. Kako bi se olakšalo praćenje izvoda, ponovljene su osnovne pretpostavke i jednadžbe iterativnog postupka.

Neelastični gradijent deformiranja u trenutku t_{n+1} određen je uz pomoć eksponencijalnog preslikavanja

$$\mathbf{F}^{-1}_\mathbf{p}|_{n+1} = \exp(-\Delta T\,\mathbf{L}_\mathbf{p})\mathbf{F}^{-1}_\mathbf{p}|_n, \tag{5.79}$$

koje osigurava ispunjavanje uvjeta nestlačivosti kod plastičnog deformiranja metala.

Kao što je već bilo naglašeno u *trial* položaju, vrijednost $\mathbf{C}$ poznata je za trenutak t_{n+1} dok se $\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}$ tek treba izračunati

$$\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mid_{n+1} = \mathbf{C}\mid_{n+1} \exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p})\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mid_n \exp(-\Delta T \mathbf{L}_\mathbf{p}^{\mathrm{T}}). \tag{5.80}$$

Kao što se vidi iz jednadžbe (5.27), tenzor naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$ ovisi o $\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}$ i modificiranom strukturnom tenzoru ${}_i\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{y}$. Kako bi se odredio modificirani strukturni tenzor za trenutak t_{n+1}, koristi se izraz za $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$ prema (5.79) dok sam strukturni tenzor ${}_i\mathbf{M}_\mathbf{y}$ nije podložan promijeni.

S druge strane, gradijent $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ prema (5.76) ovisi o tenzoru naprezanja. Kao što se može vidjeti postoji složena međuovisnost varijabli. Da bi se taj problem riješio potrebno je odrediti faktor proporcionalnosti λ uz pomoć potpunog Newtonovog iteracijskog postupka. Za bilo koji korak t_{n+1} obnovljena vrijednost λ je

$$\lambda|_{n+1} = \lambda|_n + \Delta\lambda. \tag{5.81}$$

Inkrement $\Delta\lambda$ određuje i novu vrijednost unutrašnje varijable Z, prema (5.77) vrijedi

$$Z\mid_{n+1} = Z\mid_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta T \lambda|_{n+1}. \tag{5.82}$$

Prirast plastičnog množitelja $\Delta\lambda$ može se dobiti slično kao i u izotropnom modelu (4.97), linearizacijom funkcije tečenja, (5.34), tj.

$$\Delta\lambda = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\Xi}}\frac{\partial\boldsymbol{\Xi}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\right)^{-1}\Bigg|_n \phi|_n. \tag{5.83}$$

Neke derivacije u (5.83) su jednostavne, pa se mogu direktno dobiti. Tako je

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_{11}^{\mathrm{y}}}{2\sqrt{\chi}} \left[\frac{\partial \chi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}} + \frac{\partial \chi}{\partial I_{i+3}} \frac{\partial I_{i+3}}{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}} \right] \frac{\partial \mathrm{dev}\, \boldsymbol{\Xi}}{\partial \boldsymbol{\Xi}}, \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{5.85}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Delta T \left[H + \eta \left(\sigma_\infty - \sigma_y \right) \exp\left(-\eta Z \mid_{n+1} \right) \right]. \tag{5.86}$$

Dalje u tekstu koristi se indeksna notacija koja omogućuje bolji uvid u složene derivacije i međuzavisnost varijabli. Posljednji član u jednadžbi (5.84) je

$$\frac{\partial (\mathrm{dev}\, \Xi)_a{}^b}{\partial \Xi_c{}^d} = \delta_a{}^c \delta^b{}_d - \frac{1}{3}\, \delta^c{}_d \delta_a{}^b, \tag{5.87}$$

dok su derivacije $\partial\chi/\partial I_i$ i $\partial\chi/\partial I_{i+3}$ prikazane jednadžbama (5.66) do (5.72), a derivacije invarijanti po devijatoru tenzora naprezanja jednadžbama (5.73) i (5.74).

Izraz $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\lambda$ je izveden tako da je uzeta u obzir ovisnost tenzora naprezanja o tenzoru $\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}$ koji opet ovisi o $\mathbf{L}_\mathbf{p}$. Gradijent neelastičnog gradijenta deformiranja dalje ovisi o λ i $\boldsymbol{\nu}$ i preko njih opet o $\boldsymbol{\Xi}$. U skladu s izrazom (4.103) kod izotropnog modela, za anizotropni model vrijedi

$$\frac{\partial \Xi_m{}^n}{\partial \lambda} = \left(\delta_c{}^m \delta_n{}^d - \frac{\partial \Xi_c{}^d}{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f} \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} \frac{\partial \nu^g{}_h}{\partial \Xi_m{}^n} \right)^{-1} \frac{\partial \Xi_c{}^d}{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f} \frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \lambda}\bigg|_{\mathrm{explicit}}. \tag{5.88}$$

Treba još jednom istaknuti da indeks *explicit* označava derivaciju po argumentu deriviranja, ali samo tamo gdje je taj argument u funkciji eksplicitno izražen. Sada je potrebno odrediti derivacije u (5.88). Eksplicitna derivacija $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ po λ je

$$\frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \lambda}\bigg|_{\mathrm{explicit}} = \nu^e{}_f, \tag{5.89}$$

i njegov oblik se može vidjeti u jednadžbi (5.75). Za derivaciju $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{L_p}$ koristi se pravilo lančanog deriviranja gdje se uzima u obzir ovisnost tenzora naprezanja o $\mathbf{F_p^{-1}}$ kao i njega o $\mathbf{L_p}$

$$\frac{\partial \Xi_i{}^j}{\partial (L_\mathrm{p})^k{}_l} = \frac{\partial (\Xi)_i{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} \frac{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}{\partial (L_\mathrm{p})^k{}_l}. \tag{5.90}$$

Derivacija $\partial\mathbf{F_p^{-1}}/\partial\mathbf{L_p}$ već je prije prikazana jednadžbom (4.124). Ostale derivacije u (5.90) prikazane su zasebno u narednim odjeljcima.

5.4.1 Derivacija $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{F_p^{-1}}$

Deriviranjem tenzora naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$, zadanog jednadžbom (5.27), po neelastičnom gradijentu deformiranja $\mathbf{F_p^{-1}}$ dobiva se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Xi_i{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = 2\rho_0 \Bigg\{ \sum_{i=1}^{3} \Bigg[& \frac{\partial^2 \psi}{\partial (J_i) \partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} \; (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^j + \\
& \frac{\partial \psi}{\partial J_i} \left(\frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^j + (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a \frac{\partial ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} \right) + \\
& \frac{\partial \psi}{\partial J_{i+3}} \left(\frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^b (CC_\mathrm{p}^{-1})_b{}^j + (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^b \frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_b{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} + \right. \\
& (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a \frac{\partial ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^b}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} (CC_\mathrm{p}^{-1})_b{}^j + (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b \frac{\partial ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_b{}^j}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} + \\
& \left. \frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_b{}^j + (CC_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a \frac{\partial (CC_\mathrm{p}^{-1})_a{}^b}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})_r{}^s} ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_b{}^j \right) \Bigg] \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Derivacije $\partial\psi/\partial J_i$ i $\partial\psi/\partial J_{i+3}$ mogu se naći u jednadžbama (5.18) do (5.23), dok je

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial (J_i) \partial (F_\mathrm{p}^{-1})_s^r} = \begin{cases} 2\alpha_2 \frac{\partial J_1}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_7 \frac{\partial J_2}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_8 \frac{\partial J_3}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}, \\ 2\alpha_4 \frac{\partial J_2}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_7 \frac{\partial J_1}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_9 \frac{\partial J_3}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}, \\ 2\alpha_6 \frac{\partial J_3}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_8 \frac{\partial J_1}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} + \alpha_9 \frac{\partial J_2}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s}, \end{cases}$$

a derivacija J_i po $\mathbf{F}_\mathrm{p}^{-1}$ jednaka je

$$\frac{\partial J_i}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = ({}_iM_\mathrm{e})^{ms} C_{ru} (F_\mathrm{p}^{-1})^u{}_m + ({}_iM_\mathrm{e})^{sn} (F_\mathrm{p}^{-1})^t{}_n C_{tr}, \qquad i = 1,2,3. \tag{5.92}$$

Da bi se u potpunosti odredila derivacija (5.91) potrebno je derivirati $\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}$ po $\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$, tj.

$$\frac{\partial (C C_\mathrm{p}^{-1})_i{}^a}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = C_{ir} (F_\mathrm{p}^{-1})^{as} + C_{iu} (F_\mathrm{p}^{-1})^{us} \delta^a{}_r, \tag{5.93}$$

kao i

$$\frac{\partial ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_a{}^b}{\partial (F_\mathrm{p}^{-1})^r{}_s} = -(F_\mathrm{p})^s{}_a ({}_i\bar{M}_\mathrm{e})_r{}^b + (\mathbf{F}_\mathbf{p}^\mathrm{T}{}_i\mathbf{M}_\mathrm{e})^{as} \delta^b{}_r. \tag{5.94}$$

Sada je derivacija $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{F}_\mathbf{p}^{-1}$ u potpunosti izražena. Dalje se može koristiti kako u izvodu lokalne iteracije tako i u izvodu konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula u odjeljku 5.5.

5.4.2 Derivacija $(\partial\mathbf{L}_\mathbf{p}/\partial\boldsymbol{\nu})(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\boldsymbol{\Xi})$

U jednadžbi (5.88) potrebno odrediti izraz $(\partial\mathbf{L}_\mathbf{p}/\partial\boldsymbol{\nu})(\partial\boldsymbol{\nu}/\partial\boldsymbol{\Xi})$. Derivacija $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ po $\boldsymbol{\nu}$ je vrlo jednostavna

$$\frac{\partial (L_\mathrm{p})^e{}_f}{\partial \nu^g{}_h} = \lambda. \tag{5.95}$$

Derivacija jedinične normale na plohu tečenja (5.78) po tenzoru naprezanja ima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu^i{}_j}{\partial \Xi_r{}^s} =& \frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi \partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} \frac{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}{\partial \Xi_r{}^s} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \chi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l} + \frac{\partial \chi}{\partial I_{i+3}} \frac{\partial I_{i+3}}{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l} \right) \\ & \frac{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l}{\partial \Xi_i{}^j} + \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial I_i \partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} \frac{\partial I_i}{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \chi}{\partial I_{i+3}} \frac{\partial^2 I_{i+3}}{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l \partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} \right) \frac{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l}{\partial \Xi_i{}^j} \frac{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}{\partial \Xi_r{}^s},\end{aligned} \tag{5.96}$$

gdje je

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi \partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_{11}^\mathrm{y}}{4(\sqrt{\chi})^3} \frac{\partial \chi}{\partial (\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}, \tag{5.97}$$

a derivacija $\partial\chi/\partial(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})$ je već napravljena u jednadžbi (5.65). Ako se izrazi za $\partial\chi/\partial I_k$, gdje je $k = 1\ldots6$, zadani s izrazima (5.67) do (5.69) deriviraju po devijatoru tenzora naprezanja, dobije se

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial(I_k)\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} = \begin{cases} 2\beta_1\frac{\partial I_1}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_4\frac{\partial I_2}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_5\frac{\partial I_3}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}, \\ 2\beta_2\frac{\partial I_2}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_4\frac{\partial I_1}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_6\frac{\partial I_3}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}, \\ 2\beta_3\frac{\partial I_3}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_5\frac{\partial I_1}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} + \beta_6\frac{\partial I_2}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u}, \\ 0, \\ 0, \\ 0, \end{cases}$$

dok je druga derivacija I_{i+3}, za $i = 1, 2, 3$, po devijatoru naprezanja prema (5.74) dana izrazom

$$\frac{\partial^2 I_{i+3}}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l\partial(\operatorname{dev}\Xi)_t{}^u} = ({}_iM_{\mathrm{y}})_u{}^k\delta_l{}^t + ({}_iM_{\mathrm{y}})_l{}^t\delta_u{}^k. \tag{5.98}$$

Ove derivacije u potpunosti određuju prirast plastičnog množitelja $\Delta\lambda$, a njegovim poznavanjem mogu se odrediti sve ostale veličine prema jednadžbama (5.79), (5.80), (5.81) i (5.82). Time je završeno numeričko integriranje konstitutivnih jednadžbi. Cijeli postupak još je jednom ukratko prikazan u tablici 5.1.

Tablica 5.1: Integracijski algoritam konstitutivnog modela za anizotropne materijale

1. Ulazni podaci

   materijalni parametri - E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{13}, ν_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}, H, c, σ_∞, η, σ^{y}_{11}, σ^{y}_{22} , σ^{y}_{33}, σ^{y}_{12}, σ^{y}_{13}, σ^{y}_{23}

   ulazne veličine na razini točke integracije - $\mathbf{C}|_{n+1}$, $\mathbf{F}^{-1}_{\mathbf{p}}|_n$

   položaj materijalnih osi - ${}_i\mathbf{M}_{\mathbf{e}}$ i ${}_i\mathbf{M}_{\mathbf{y}}$ gdje je $i = 1, 2, 3$

2. Prediktor

   $$\boldsymbol{\Xi}|_{trial} = 2\rho_0 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_i} \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) + \frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_{(i+3)}} \left(\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \right) \right] \right\}$$

   $$\phi|_{trial} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \left[\sigma^{\mathrm{y}}_{11} \sqrt{\chi} - (1 - Y) \right]$$

3. Kontrola uvjeta tečenja

   IF $\phi|_{trial} \leq 0$ THEN GOTO 6

4. Izračunavanje plastičnog množitelja

   $$\Delta\lambda = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \phi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^{-1} \Bigg|_n \phi|_n.$$

5. Obnavljanje (*update*) varijabli

   $$\lambda|_{n+1} = \lambda|_n + \Delta\lambda$$

   $$Z\,|_{n+1} = Z\,|_n + \sqrt{\tfrac{2}{3}} \Delta T \lambda|_{n+1}$$

   $$\mathbf{F}^{-1}_{\mathbf{p}}|_{n+1} = \exp(-\Delta T\, \mathbf{L}_{\mathbf{p}}) \mathbf{F}^{-1}_{\mathbf{p}}|_n$$

   $$\boldsymbol{\Xi}|_{trial} = 2\rho_0 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_i} \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) + \frac{\partial \psi_{\mathrm{e}}}{\partial J_{(i+3)}} \left(\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{p}} ({}_i\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}}) \right) \right] \right\}$$

   $$\phi|_{n+1} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \left[\sigma^{\mathrm{y}}_{11} \sqrt{\chi} - (1 - Y) \right]$$

   GOTO 3

6. Konzistentni elastoplastični tangentni modul

   $$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}$$

   $$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}$$

7. Izlazne vrijednosti

   $\mathbb{C}$, $\mathbf{F}^{-1}_{\mathbf{p}}|_{n+1}$, $\mathbf{S}_{n+1}$

5.5 Algoritamski tangentni operator

Postupak izračunavanja konzistentnog algoritamskog tangentnog operatora već je opisan kod modela za izotropne materijale u odjeljku 4.7. Ovdje su dane najvažnije jednadžbe i derivacije koje se razlikuju u odnosu na izotropni model. Potrebno je naglasiti da zbog vrlo složene ovisnosti među varijablama, što je posljedica složene anizotropne strukture, konzistentni tangentni modul do sada nije bio izveden za anizotropne materijalne modele kod kojih se koristi multiplikativno razlaganje gradijenta deformiranja.

Tangentni modul računa se kao linearizacija drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja $\mathbf{S}$ s obzirom na desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti $\mathbf{C}$

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}. \tag{5.99}$$

gdje je

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}. \tag{5.100}$$

Prvi član na desnoj strani može se vrlo jednostavno izvesti i on iznosi

$$\frac{\partial (C^{-1})^{al}}{\partial (C)_{ij}}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(C^{-1})^{jl}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(S)^{jb}\,. \tag{5.101}$$

Derivacija $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C}$ može se dobiti upotrebom pravila lančanog deriviranja na sljedeći način

$$\frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial (L_\mathrm{p})^g{}_h}\frac{\partial (L_\mathrm{p})^g{}_h}{\partial C_{kl}} + \left.\frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}}. \tag{5.102}$$

Derivacija $\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{L_p}$ već je napravljena u odjeljcima 5.4.1 i 5.4.2. U numeričkom algoritmu za račun tangentnog modula koristi se posljednja vrijednost koja se dobije u iterativnom postupku numeričkog integriranja konstitutivnih jednadžbi (lokalna iteracija). Ostale derivacije su dalje opet izračunate u narednim odjeljcima kako bi praćenje izvoda bilo što jednostavnije.

5.5.1 Derivacija $(\partial\boldsymbol{\Xi}/\partial\mathbf{C})|_{\text{explicit}}$

Kao što je već bilo objašnjeno u odjeljku 4.6 eksplicitna derivacija znači derivaciju po argumentu deriviranja, ali samo tamo gdje je taj argument u funkciji eksplicitno izražen. Ne gleda se zavisnost o tom argumentu preko nekih drugih varijabli i funkcija. Tako je eksplicitna derivacija tenzora naprezanja (5.27) po desnom Cauchy-Greenovom tenzoru deformiranosti jednaka

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \Xi_i{}^j}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} &= 2\rho_0 \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left[\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial J_i \partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_a{}^j + \right.\right. \\ &\left. \frac{\partial\psi}{\partial J_i} \left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_a{}^j + \frac{\partial\psi}{\partial J_{(i+3)}} \left[\left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_a{}^b (CC_{\text{p}}^{-1})_b{}^j \right. \\ &+ (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_a{}^b \left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_b{}^j}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} (CC_{\text{p}}^{-1})_a{}^b ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_b{}^j \\ &\left.\left. + (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^a \left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_a{}^b}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} ({}_i\bar{M}_{\text{e}})_b{}^j \right] \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.103}$$

Da bi se odredila prethodna jednadžba, potrebno je derivaciju slobodne energije po invarijantama (5.18) - (5.20) još derivirati i po desnom Cauchy-Greenovom tenzoru deformiranosti

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial(J_i)\partial(C_{kl})}\right|_{\text{explicit}} = \begin{cases} \alpha_4 \left.\frac{\partial J_1}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_7 \left.\frac{\partial J_2}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_8 \left.\frac{\partial J_3}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}}, \\ \alpha_5 \left.\frac{\partial J_2}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_7 \left.\frac{\partial J_1}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_9 \left.\frac{\partial J_3}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}}, \\ \alpha_6 \left.\frac{\partial J_3}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_8 \left.\frac{\partial J_1}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} + \alpha_9 \left.\frac{\partial J_2}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}}, \end{cases} \tag{5.104}$$

gdje vrijedi

$$\left.\frac{\partial J_i}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} = ({}_iM_{\text{e}})^m{}_n (F_{\text{p}}^{-1})^k{}_m (F_{\text{p}}^{-1})^{ln}, \quad i = 1,2,3\,. \tag{5.105}$$

Posljednji nepoznati izraz u (5.103) je

$$\left.\frac{\partial (CC_{\text{p}}^{-1})_i{}^j}{\partial C_{kl}}\right|_{\text{explicit}} = \delta_i{}^k (F_{\text{p}}^{-1})^l{}_b (F_{\text{p}}^{-1})^{jb}. \tag{5.106}$$

5.5.2 Derivacija $\partial \mathbf{L_p}/\partial \mathbf{C}$

Postupak, kojim se može izračunati derivacija neelastičnog gradijenta deformiranja $\mathbf{L_p}$ po desnom Cauchy-Greenovom tenzoru deformiranosti $\mathbf{C}$, već je opisan kod izotropnog materijalnog modela u odjeljku 4.7.3. Ovdje su navedene samo ključni izrazi.

Prvo je potrebno izračunati derivaciju $\partial \boldsymbol{\nu}/\partial \mathbf{C}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_g{}^h}{\partial C_{rs}} = &\left[\delta_g{}^a \delta^h{}_b - \frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial \Xi_c{}^d} \frac{\partial \Xi_c{}^d}{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f} \left(\frac{\lambda}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \nu^e{}_f \frac{\partial \phi}{\partial \Xi_u{}^v} \frac{\partial \Xi_u{}^v}{\partial (L_{\text{p}})^g{}_h} + \lambda \delta_g{}^e \delta_f{}^h \right) \right]^{-1} \\ &\left[\left(\frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial \Xi_c{}^d} \frac{\partial \Xi_c{}^d}{\partial (L_{\text{p}})^e{}_f} \nu^e{}_f \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \frac{\partial \phi}{\partial \Xi_u{}^v} + \frac{\partial \nu^a{}_b}{\partial \Xi_u{}^v} \right) \left.\frac{\partial \Xi_u{}^v}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} \right],\end{aligned} \tag{5.107}$$

Svi su izrazi u jednadžbi (5.107) poznati; tako je derivacija $\partial \boldsymbol{\nu}/\partial \boldsymbol{\Xi}$ riješena u (5.96), $\partial \boldsymbol{\Xi}/\partial \mathbf{L_p}$ posebno u odjeljku 5.4.1, $\partial \phi/\partial \boldsymbol{\Xi}$ u (5.84), a $\partial \boldsymbol{\Xi}/\partial \mathbf{C}|_{\text{explicit}}$ u odjeljku 5.5.1. U skladu s tim može se izračunati derivacija $\partial \boldsymbol{\nu}/\partial \mathbf{C}$. S tim rezultatom se onda ulazi u jednadžbu kojom se može dobiti derivacija λ po $\mathbf{C}$ prema

$$\frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}} = \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}} \left[\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \Xi_a{}^b} \frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial (L_{\text{p}})^c{}_d} \frac{\partial \nu^c{}_d}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial \phi}{\partial \Xi_a{}^b} \left.\frac{\partial \Xi_a{}^b}{\partial C_{rs}}\right|_{\text{explicit}} \right]. \tag{5.108}$$

gdje se $\partial\phi/\partial\lambda$ dobije u lokalnoj iteraciji iz izraza (5.83) i to se koristi se zadnji rezultat u lokalnoj iteraciji. Taj rezultat zajedno s rezultatom jednadžbe (5.107) sada se treba uvrstiti u

$$\frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{i}{}_{j}}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{i}{}_{j}}{\partial \lambda}\bigg|_{\text{explicit}} \frac{\partial \lambda}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial (L_{\mathrm{p}})^{i}{}_{j}}{\partial \nu^{a}{}_{b}}\bigg|_{\text{explicit}} \frac{\partial \nu^{a}{}_{b}}{\partial C_{rs}}, \tag{5.109}$$

To je ujedno potreban izraz za derivaciju tenzora naprezanja zapisan jednadžbom (5.102), pomoću koje se onda izračunava konzistentni tangentni modul prema (5.100). Postupak izvoda konzistentnog tangentnog modula još je jednom ukratko prikazan u tablici 5.2

5.6 Materijalni parametri

Kako bi se numerički rezultati izračunati pomoću izvedenog algoritma mogli uspoređivati sa stvarnim rezultatima, potrebno je odrediti materijalne konstante α_1 do α_{12} kao i β_1 do β_9.

5.6.1 Elastični materijalni parametri

Kada se pretpostavi da je stanje naprezanja jednako nuli tada mora vrijediti da je $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ i $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1} = \mathbf{1}$, pa slijedi relacija

$$\boldsymbol{\Xi}\,|_{\mathbf{C}=\mathbf{1};\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}=\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{3} \left[2\frac{\partial \psi}{\partial J_i}({}_i\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) + 4\frac{\partial \psi}{\partial J_{i+3}}({}_i\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \right]_{\mathbf{C}=\mathbf{1};\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1}=\mathbf{1}} = 0\,. \tag{5.110}$$

Uz pomoć izraza (5.18) do (5.23) ova se jednadžba može pisati na sljedeći način

$$2\left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha_1 + \alpha_4 J_1 + \alpha_7 J_2 + \alpha_8 J_3\right]({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \\ \left[\alpha_2 + \alpha_5 J_2 + \alpha_7 J_1 + \alpha_9 J_3\right]({}_2\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \\ \left[\alpha_3 + \alpha_6 J_3 + \alpha_8 J_1 + \alpha_9 J_2\right]({}_3\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \end{array} \right\} + 4\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10}({}_1\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \\ \alpha_{11}({}_2\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \\ \alpha_{12}({}_3\mathbf{M}_{\mathbf{e}}) \end{array} \right\} = 0.$$

Tablica 5.2: Numerički algoritam konzistentnog elastoplastičnog tangentnog modula kod anizotropnih materijala

$$\mathbb{C} = 2\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}\boldsymbol{\Xi} + \mathbf{C}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial (C^{-1})^{al}}{\partial (C)_{ij}}(\Xi)_l{}^b = -(C^{-1})^{ai}(S)^{jb} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}}\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \mathbf{C}} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \mathbf{C}} = \left.\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \lambda}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} + \left.\frac{\partial \mathbf{L_p}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{\text{explicit}}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}},$$

$$\Downarrow \qquad \Vert$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\left[\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\left.\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}\right] \qquad \Downarrow$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \mathbf{C}} = \left[\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}}\left(\frac{\lambda}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\boldsymbol{\nu}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}} + \lambda \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right)\right]^{-1}$$
$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{L_p}}\boldsymbol{\nu}\frac{1}{-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\Xi}} + \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\right)\left.\frac{\partial \boldsymbol{\Xi}}{\partial \mathbf{C}}\right|_{\text{explicit}}$$

Zahvaljujući tome što su strukturni materijalni tenzori međusobno nezavisni mogu se iz prethodnog dobiti tri skalarna izraza. Oni pokazuju međuzavisnost konstanti.

$$\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_8 + 2\alpha_{10} = 0, \tag{5.111}$$

$$\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + 2\alpha_{11} = 0, \tag{5.112}$$

$$\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_9 + 2\alpha_{12} = 0. \tag{5.113}$$

Na taj način je smanjen broj materijalnih konstanti s dvanaest na devet.

Kako je derivacija slobodne energije po $\mathbf{C_e}$ linearna, uz pomoć tenzora četvrtog reda $\tilde{\mathbf{H}}$ može se zapisati

$$2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C_e}} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{C_e} - \mathbf{1}). \tag{5.114}$$

Ako se uzme u obzir simetričnost tenzora $\mathbf{C_e}$ i $\tilde{\mathbf{H}}$, može se tenzor $\tilde{\mathbf{H}}$ prikazati kao matrica $\mathbf{H}$ veličine 6×6. Prema literaturi, npr. Lemaitre & Chaboche [97], ona ima oblik

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_3E_1\Delta} & \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_3E_1\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12}}{E_3E_1\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta} & \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{pmatrix}, \tag{5.115}$$

gdje je ν_{ij} Poissonov koeficijent za različite materijalne osi, E_i Youngov modul, G_{ij} smični modul, a Δ je dan izrazom

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_2E_3}. \tag{5.116}$$

Za ortotropne materijale moraju vrijediti sljedeće jednakosti

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \tag{5.117}$$

Ako se matrica $\mathbf{H}$ zapisana jednadžbom (5.115) usporedi s izrazom (5.114), mogu se odrediti materijalne konstante α_1 do α_{12} u smislu klasične elastične teorije

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{2E_2E_3\Delta} - G_{12} - G_{13} + G_{23}\right), \tag{5.118}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{2E_3E_1\Delta} - G_{12} + G_{13} - G_{23}\right), \tag{5.119}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{2E_1E_2\Delta} + G_{12} - G_{13} - G_{23}\right), \tag{5.120}$$

$$\alpha_7 = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{4E_3E_1\Delta}, \tag{5.121}$$

$$\alpha_8 = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{4E_2E_3\Delta}, \tag{5.122}$$

$$\alpha_9 = \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}}{4E_1E_2\Delta}, \tag{5.123}$$

$$\alpha_{10} = \frac{1}{8}\left(G_{12} + G_{13} - G_{23}\right), \tag{5.124}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{8}\left(G_{12} - G_{13} + G_{23}\right), \tag{5.125}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{8}\left(-G_{12} + G_{13} + G_{23}\right). \tag{5.126}$$

Kao što se vidi ovdje nedostaju konstante α_1, α_2 i α_3 koje se mogu odrediti pomoću jednadžbi (5.111) do (5.113).

5.6.2 Neelastični materijalni parametri

Kako bi se u potpunosti odredile evolucijske jednadžbe, potrebno je odrediti konstante materijala β_1 do β_9 u jednadžbama (5.66) do (5.72). To je napravljeno tako da su ti izrazi uspoređeni s onima koji se mogu naći u Hill [65]. Da bi se mogla napraviti ta usporedba, potrebno je zapisati funkciju tečenja (5.34) u sljedećem obliku

$$\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi} : \mathbf{P} : \operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi} - 1 = 0. \tag{5.127}$$

Materijalne konstante mogu se sada dobiti ako se tenzor četvrtog reda $\mathbf{P}$ usporedi sa drugom derivacijom χ po tenzoru naprezanja dev $\boldsymbol{\Xi}$, koja je jednaka

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial(\operatorname{dev}\Xi)_a{}^b\partial(\operatorname{dev}\Xi)_k{}^l} = \sum_{i=1}^{3}\Big\{2\beta_i({}_iM_{\mathrm{y}})_b{}^a({}_iM_{\mathrm{y}})_l{}^k + \beta_{(i+6)}\left[({}_iM_{\mathrm{y}})_b{}^k\delta_l^a + ({}_iM_{\mathrm{y}})_l{}^a\delta^k{}_b\right] + \sum_{j=1}^{3}\left[\beta_{(i+j+1)}\left[({}_iM_{\mathrm{y}})_l{}^k({}_jM_{\mathrm{y}})^a{}_b + ({}_jM_{\mathrm{y}})_l{}^k({}_iM_{\mathrm{y}})^a{}_b\right]\right]\Big\}, \quad (5.128)$$

što se može zapisati u matričnom obliku kao

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}\partial\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}} = \begin{bmatrix} 2(\beta_1+\beta_7) & \beta_4 & \beta_5 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_4 & 2(\beta_2+\beta_8) & \beta_6 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_5 & \beta_6 & 2(\beta_3+\beta_9) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\beta_7+\beta_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\beta_7+\beta_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\beta_8+\beta_9) \end{bmatrix}.$$

Treba napomenuti kako je ta matrica veličine 9×9, ali ona ima nulte članove za neke kombinacije posmičnih komponenti. Tako je na primjer veličina na mjestu 1212 nula dok je na mjestu 1221 različita od nule. Ako se izuzmu redovi i stupci s nultim članovima dobije se matrica 6×6. Kada se to usporedi s Hillovom matricom, prema (3.4) do (3.9), tj.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}} & -\frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}+\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & -\frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}+\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}+\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & \frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}} & \frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}+\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & \frac{1}{\sigma_{11}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{22}^{\mathrm{y}\,2}}-\frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & \frac{1}{\sigma_{33}^{\mathrm{y}\,2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{12}^{\mathrm{y}\,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{13}^{\mathrm{y}\,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{23}^{\mathrm{y}\,2}} \end{bmatrix},$$

slijede izrazi za konstante β_i

$$\beta_1 = \frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.129}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.130}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.131}$$

$$\beta_4 = -\left(\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.132}$$

$$\beta_5 = -\left(\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.133}$$

$$\beta_6 = -\left(-\frac{1}{(\sigma_{11}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{22}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.134}$$

$$\beta_7 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.135}$$

$$\beta_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} - \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.136}$$

$$\beta_9 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(\sigma_{12}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{13}^{\mathrm{y}})^2} + \frac{1}{(\sigma_{23}^{\mathrm{y}})^2}\right), \tag{5.137}$$

gdje su σ_{11}^{y}, σ_{22}^{y}, σ_{33}^{y}, σ_{12}^{y} ,σ_{13}^{y} i σ_{23}^{y} eksperimentalne vrijednosti za normalne i posmične granice tečenja u smjerovima 1, 2 i 3.

5.7 Vrtložnost kod plastičnih materijala

Važno je upozoriti na razliku između plastične vrtložnosti (*plastic spin*) koji omogućuje opisivanje promjena smjera glavnih pravaca materijala i vrtložnosti plastičnih materijala (*plastic material spin*) koja označava antisimetrični dio $\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{p}}\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^{-1}$. Više o tome može se naći u Dafalias [114]. Ovdje je razmatrana vrtložnost plastičnih materijala.

Cilj ovog odjeljka je utvrditi postoji li utjecaj vrtložnosti plastičnih materijala na prethodno izloženu formulaciju anizotropnog materijalnog modela

tj. potrebno je utvrditi sadrži li izraz za neelastični gradijent deformiranja $\mathbf{L_p}$ (5.75) nepotrebne dijelove koji nemaju utjecaj na disipacijsku funkciju.

Izraz za snagu naprezanja (5.1) uz pomoć jednadžbe (4.18) u trenutnoj konfiguraciji može se zapisati kao

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l_e} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l_p}. \tag{5.138}$$

Samo drugi član na desnoj strani prethodnog izraza radi doprinos disipacijskoj funkciji. Doprinos disipacijskoj funkciji u referentnoj konfiguraciji prema jednadžbama (4.16) i (4.74) iznosi

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{l_p} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L_p}. \tag{5.139}$$

Prema definiciji, u odjeljku 2.3.2, $\boldsymbol{\tau}$ je simetričan tenzor, dok $\boldsymbol{\Xi}$ to nije. Budući da je umnožak simetričnog i antisimetričnog tenzora jednak nuli, samo će simetrični dio $\mathbf{l_p}$ dati doprinos disipacijskoj funkciji. Antisimetrični dio neelastičnog gradijenta deformiranja u trenutnoj konfiguraciji

$$\mathbf{w_p} = \frac{1}{2}(\mathbf{l_p} - \mathbf{l_p^T}), \tag{5.140}$$

nema nikakav utjecaj na disipacijsku funkciju jer je $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{w_p} = 0$. Ovdje $\mathbf{w_p}$ ujedno označava vrtložnost plastičnih materijala.

Prethodno iznesena formulacija anizotropnog materijalnog modela napravljena je u referentnoj konfiguraciji i koristi se Eshelbyjev tenzor naprezanja i njemu pripadajući neelastični gradijent deformiranja u referentnoj konfiguraciji $\mathbf{L_p}$. Prema izrazu (4.17) $\mathbf{L_p}$ je dobiven prijenosom unazad veličine $\mathbf{l_p}$. Stoga, ako antisimetrični dio $\mathbf{w_p}$ nema utjecaj na disipacijsku funkciju, ne smije ga imati niti veličina $\mathbf{W_p}$ koja se dobije prijenosom unazad veličine $\mathbf{w_p}$

$$\mathbf{W_p} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{w_p}\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{L_p} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{L_p^T}\mathbf{C})\,. \tag{5.141}$$

tj. mora vrijediti $\boldsymbol{\Xi} : \mathbf{W_p} = 0$. Kao što se vidi u (5.141) to nije jednostavno antisimetrični dio od $\mathbf{L_p}$ već on ima sličnu strukturu onoj koja se može naći u izrazu za transponirani Eshelbyjev tenzor naprezanja

$$\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{C}. \tag{5.142}$$

Tada su dijelovi koji utječu na disipaciju dani izrazom

$$\boldsymbol{\tau} : \frac{1}{2}(\mathbf{l_p} + \mathbf{l_p}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{\Xi} : \frac{1}{2}(\mathbf{L_p} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{L_p}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}) \, . \tag{5.143}$$

U skladu s gore izloženim može se provjeriti doprinosi li $\mathbf{L_p}$, određen jednadžbom (5.75), disipaciji tj. potrebno je odrediti veličinu $\mathbf{W_p}$ i ona mora biti jednak nuli. Tenzor $\mathbf{W_p}$, prema (5.141), može se dobiti iz jednadžbe (5.75), tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{W_p} =& \alpha \operatorname{dev} \sum_{i=3}^{3} \Big[2\beta_i I_i \left(({}_i\mathbf{M_y}) - \mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1} \right) + \beta_{(i+6)} \left(\mathbf{C}^{-1}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y}) \right. \\ &+ ({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C} - (\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}) \Big) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \beta_{(i+j+1)} \left(({}_i\mathbf{M_y})I_j + I_i({}_j\mathbf{M_y}) - I_j\mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1} - I_i\mathbf{C}({}_j\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1} \right) \Big] \\ & \qquad \text{za } i \neq j. \end{aligned} \tag{5.144}$$

Očito je da taj izraz nije jednak nuli.

Može se zaključiti da izabrana funkcija tečenja daje izraz za neelastični dio gradijenta deformiranja koji ima svoj doprinos na vrtložnost plastičnog materijala. Stoga se javlja potreba definiranja neelastičnog gradijenta koji neće utjecati na pojavu vrtložnosti. Prvi korak bi bio određivanje novih invarijanti koje čine funkciju tečenja. Tako bi invarijante (5.54) do (5.55) u skladu s izrazom (5.141) trebale glasiti

$$\hat{I}_i = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, \left[({}_i\mathbf{M_y})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi}) + ({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C} \right], \tag{5.145}$$

$$\hat{I}_{i+3} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, \left[({}_i\mathbf{M_y})(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})^2 + ({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1}(\operatorname{dev}\boldsymbol{\Xi})^2\mathbf{C} \right], \tag{5.146}$$

gdje je $i = 1, 2, 3$. Istim razmatranjem kao u odjeljku 5.3 slijedi izraz za ekvivalentno naprezanje $\hat{\chi}(\hat{I}_i, \hat{I}_{i+3})$, $i = 1, 2, 3$ i neelastični gradijent deformiranja

$$\begin{aligned}\mathbf{L_p} =& \frac{\alpha}{2}\mathrm{dev}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\chi}{\partial\hat{I}_i}\left({}_i\mathbf{M_y}) + \mathbf{C}^{-1}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}\right)\right. \\ &+ \frac{\partial\hat{\chi}}{\partial\hat{I}_{i+3}}\left(({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}} + (\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}}({}_i\mathbf{M_y})\right. \\ &\left.\left.+\mathbf{C}^{-1}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}} + (\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.147}$$

koji se uz pomoć jednadžbe (5.142) može zapisati kao

$$\begin{aligned}\mathbf{L_p} =& \frac{\alpha}{2}\mathrm{dev}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\chi}{\partial\hat{I}_i}\left({}_i\mathbf{M_y}) + \mathbf{C}^{-1}({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}\right)\right. \\ &+ \frac{\partial\chi}{\partial\hat{I}_{i+3}}\left(({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}^{-1}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C}({}_i\mathbf{M_y}) + \right. \\ &\left.\left.\mathbf{C}^{-1}({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})\mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1}(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})({}_i\mathbf{M_y})\mathbf{C}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.148}$$

Ovdje se odmah vidi da je zadovoljen uvjet

$$\mathbf{L_p} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{L_p}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{0}\,, \tag{5.149}$$

koji je potreban kako bi se modelirala funkcija tečenja bez pojave vrtložnosti plastičnih materijala. Ako se taj izraz usporedi s onim dobivenim u prvotnoj formulaciji

$$\mathbf{L_p} = \alpha\,\mathrm{dev}\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\chi}{\partial\hat{I}_i}({}_i\mathbf{M_y}) + \frac{\partial\chi}{\partial\hat{I}_{i+3}}\left(({}_i\mathbf{M_y})(\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}} + (\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\Xi})^{\mathrm{T}}({}_i\mathbf{M_y})\right)\right]. \tag{5.150}$$

vidi se razlika u složenosti i pojava ovisnosti zakona tečenja o veličini $\mathbf{C}$. Kada zakon tečenja χ ovisi samo o tenzoru naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$ (formulacija s uključenom vrtložnošću) tada invarijante I_i i I_{i+3} uz pomoć konstitutivnih jednadžbi (5.27) ovise o umnošcima $\mathrm{tr}\,[\mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1})], \mathrm{tr}\,[\mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{-1})^2]$. S druge strane, kada χ ovisi i o $\mathbf{C}$ (formulacija bez pojave vrtložnosti) tada su invarijante

ovisne o simetričnim argumentima tr $[\mathbf{M}(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1} + \mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{C})]$, tr $\{\mathbf{M}[(\mathbf{C}\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1})^2 + (\mathbf{C}_\mathbf{p}^{-1}\mathbf{C})^2]\}$. Nameće se zaključak da ovisnost invarijanti koje čine funkciju tečenja o $\mathbf{C}$ utječe samo na to da one budu građene od simetričnih veličina.

S numeričkog stajališta mnogo je jednostavnije raditi formulaciju kod koje izrazi nemaju dodatnu ovisnost o $\mathbf{C}$, kao što je bilo i učinjeno u ovom poglavlju. Ovdje je pokazano da neelastični gradijent deformiranja utječe na pojavu vrtložnosti plastičnog materijala. No, ona se odnosi samo na anizotropno ponašanje materijala, dok kod izotropnih materijala isčezava. Važno je spomenuti, iako vrtložnost plastičnih materijala nema utjecaj na disipacijsku funkciju, ona ipak utječe na određivanje $\mathbf{F}_\mathbf{p}$. Samim tim utječe na izraze za tenzore deformiranosti i naprezanja.

Poglavlje 6

Konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija

U ovom poglavlju opisan je ljuskasti konačni element u koji su na razini točke integracije ugrađeni materijalni modeli izvedeni u poglavljima 4 i 5. Izložene su samo osnovne relacije teorije ljusaka i formulacije konačnog elementa, a detaljan opis se može naći u radovima Sansour [115], Sansour & Kollmann [23] i Sansour & Wagner [26].

U prvom odjeljku dane su osnovne relacije teorije ljusaka koje omogućuju primjenu trodimenzijskih konstitutivnih zakona. Prvo su prikazane osnovne kinematske veličine, a nakon toga je opisano deformiranje ljuske. Na kraju je prikazan princip virtualnih pomaka iz kojeg se izvode jednadžbe konačnog elementa.

Drugi odjeljak odnosi se na izoparametarsku formulaciju ljuskastog konačnog elementa. To je element s četiri čvora, a svaki čvor ima po sedam stupnjeva slobode. Radi uklanjanja nepoželjnih *locking* efekata koristi se *enhanced strain* formulacija.

6.1 Osnovne relacije u teoriji ljusaka

Prikazane su osnovne relacije ljuskastog kontinuuma u trodimenzijskom Euklidovom prostoru. Kod opisivanja ljuske u obzir se uzima promjena debljine korištenjem kvadratne funkcije pomaka, odnosno moguće je prikazati linearnu promjenu deformacija po debljini ljuske. Taj opis ljuskastog kontinuuma omogućuje primjenu trodimenzijskog konstitutivnog zakona na ljuskaste elemente. Za prikaz deformacija koristi se desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti. Svi izvedeni izrazi mogu se koristiti pri modeliranju velikih elastoplastičnih deformacija. Za opis kuteva zakreta ne koristi se vektor zakreta (*rotation vector*) već vektor zakreta normale (*difference vector*) što znatno pojednostavljuje formulaciju, a ne utječe na njenu točnost.

6.1.1 Opis ljuskastog kontinuuma

Ljuskasti kontinuum opisuje se sa srednjom plohom $\mathcal{M}$ koja je ujedno i referentna površina ljuske $\mathcal{B}$. Ona se nalazi u trodimenzijskom Euklidovom prostoru i opisana je pomoću vektora položaja $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ koji je funkcija krivolinijskih koordinata θ^i, prema slici 6.1,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2). \tag{6.1}$$

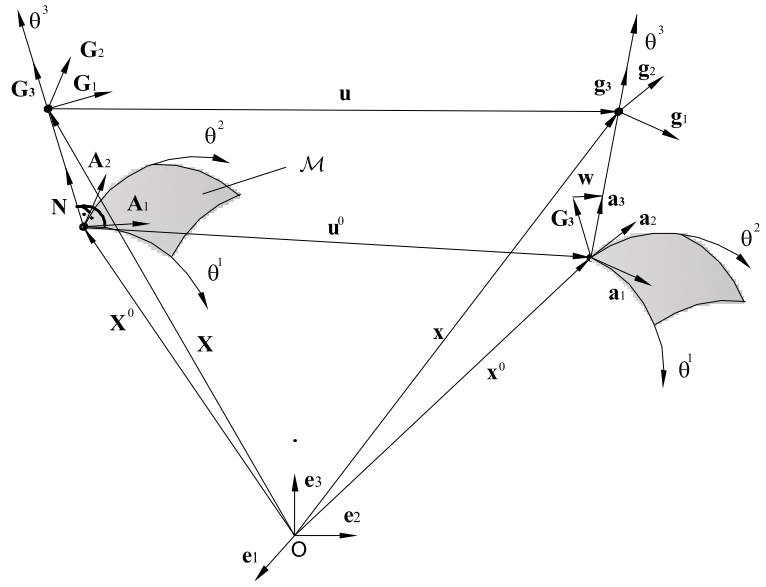
U skladu s tim osnovni vektori u referentnoj konfiguraciji zadani su kao

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i}. \tag{6.2}$$

Ovdje vrijedi $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$. Potrebno je napomenuti da su derivacije po koordinati θ^i označene s zarezom. Metrički tenzori (*metric tensors*) dani su kao skalarni produkt osnovnih vektora

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j. \tag{6.3}$$

Koordinata θ^3 je okomita na $\mathcal{M}$, a debljina ljuske zadana je s $z \in [-h/2, h/2]$, $h \in \mathbb{R}$. Vektori na tangencijalnu površinu na nedeformiranoj referentnoj konfiguraciji su $\mathbf{A}_\alpha (\alpha = 1, 2)$, a vektor okomit na površinu $\mathcal{M}$ označen je s $\mathbf{N}$, gdje je $\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_\alpha = 0$. Vrijedi relacija $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha|_{z=0}$.



Slika 6.1: Geometrija ljuskastog kontinuuma

Ljuskasti kontinuum u trenutnoj konfiguraciji može se opisati prema Sansour & Kollmann [23] sa sljedećim izrazom,

$$\mathbf{x}(\theta^\alpha, z) = \mathbf{x^0}(\theta^\alpha) + (z + z^2\chi(\theta^\alpha))\mathbf{a}_3(\theta^\alpha), \tag{6.4}$$

gdje je $\mathbf{x^0}$ vektor položaja srednje plohe ljuske. Jednadžba (6.4) izabrana je tako da omogući linearnu razdiobu deformacija po debljini. Član χ označava linearno promjenjiv dio što omogućuje primjenu trodimenzijskog konstitutivnog zakona.

Na sličan način kao i za referentno stanje mogu se odrediti osnovni vektori

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}, \tag{6.5}$$

gdje vrijedi $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$. Produktom osnovnih vektora dobiju se metrički tenzori

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j. \tag{6.6}$$

Metrički tenzor predstavlja prvi osnovni tenzor teorije površina. Osnovni vektori srednje plohe na deformiranoj konfiguraciji označeni su s $\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{a}_3$, pri čemu vrijedi $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha \neq 0$ i $|\mathbf{a}_3| \neq 1$. U skladu s prethodnim jednadžbama vrijedi $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha|_{z=0}$.

Drugi osnovni tenzor teorije površina koji se još naziva i tenzor zakrivljenosti (*curvature tensor*) na nedeformiranoj referentnoj površini zadan je s

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{N}_{,\beta}. \tag{6.7}$$

Veza osnovnih vektora za neku proizvoljnu točku ljuskastog kontinuuma s osnovnim vektorima srednje površine dana je pomoću tenzora ljuske (*shifter tensor*). On je određen sljedećom relacijom

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1} - z\mathbf{B}. \tag{6.8}$$

U skladu s tim, osnovni vektori u referentnoj konfiguraciji se mogu pisati kao

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + z\mathbf{N}_{,\alpha} = (\mathbf{1} - z\mathbf{B})\mathbf{A}_\alpha = \boldsymbol{\mu}\mathbf{A}_\alpha, \quad \mathbf{G}^\alpha = \boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{A}^\alpha, \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{N}. \tag{6.9}$$

Iz (6.4) i (6.5) slijede osnovni vektori u trenutnoj konfiguraciji

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x^0}}{\partial \theta^\alpha} + (z + z^2\chi)\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \theta^\alpha} + z^2\frac{\partial \chi}{\partial \theta^\alpha}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_\alpha + (z + z^2\chi)\mathbf{a}_{3,\alpha} + z^2\chi_{,\alpha}\mathbf{a}_3, \tag{6.10}$$

$$\mathbf{g}_3 = (1 + 2z\chi)\mathbf{a}_3. \tag{6.11}$$

6.1.2 Pomaci i deformacije ljuskastog kontinuuma

Gradijent deformiranja dobije se tenzorskim produktom osnovnih vektora

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \tag{6.12}$$

pa u skladu s tim iz jednadžbi (6.9), (6.10) i (6.11) slijedi

$$\begin{aligned}\mathbf{F} =& \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{N} \\ =& \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha + [(z + z^2\chi)\mathbf{a}_{3,\alpha} + z^2\chi_{,\alpha}\mathbf{a}_3] \otimes \mathbf{G}^\alpha + (1 + 2z\chi)\mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Kako bi se izraz za gradijent deformiranja mogao sažeto zapisati uvode se određene oznake. Tako je gradijent deformiranja za srednju površinu $\mathbf{F^0} = \mathbf{F}|_{z=0}$ određen s izrazom

$$\mathbf{F^0} = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{A}^\alpha + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{N}, \tag{6.14}$$

gdje moraju vrijediti relacije $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{F^0}\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{F^0}\mathbf{N}$. Nadalje, uvode se sljedeće oznake

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{A}^\alpha + 2\chi\mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{N}, \tag{6.15}$$

$$\mathbf{c} = (\chi\mathbf{a}_{3,\alpha} + \chi_{,\alpha}\mathbf{a}_3) \otimes \mathbf{A}^\alpha, \tag{6.16}$$

pa se u skladu s tim oznakama izraz za gradijent deformiranja može zapisati kao

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F^0} + z\mathbf{b} + z^2\mathbf{c})\boldsymbol{\mu}^{-1}. \tag{6.17}$$

Deformiranje ljuskastog kontinuuma moguće je opisati pomoću pomaka srednje plohe $\mathbf{u^0}$ i vektora zakreta normale $\mathbf{w}$. Prema slici 6.1 za njih vrijedi

$$\mathbf{u^0} : = \mathbf{x^0} - \mathbf{X^0}, \tag{6.18}$$

$$\mathbf{w} : = \mathbf{a}_3 - \mathbf{N}, \tag{6.19}$$

gdje $\mathbf{X^0}$ određuje referentnu konfiguraciju srednje plohe. Ako se to uvrsti u izraze (6.14) do (6.16) slijedi

$$\mathbf{F^0} = (\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}^\mathbf{0}_{,\alpha}) \otimes \mathbf{A}^\alpha + (\mathbf{N} + \mathbf{w}) \otimes \mathbf{N}, \tag{6.20}$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{B} + \mathbf{w}_{,\alpha} \otimes \mathbf{A}^\alpha + 2\chi(\mathbf{N} + \mathbf{w}) \otimes \mathbf{N}, \tag{6.21}$$

$$\mathbf{c} = -\chi\mathbf{B} + [\chi\mathbf{w}_{,\alpha} + \chi_{,\alpha}(\mathbf{N} + \mathbf{w})] \otimes \mathbf{A}^\alpha. \tag{6.22}$$

Uz pomoć (6.17) desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\mathrm{T}\mathbf{F}$ može se zapisati kao

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}}[&\mathbf{F^0}^\mathrm{T}\mathbf{F^0} + z(\mathbf{F^0}^\mathrm{T}\mathbf{b} + \mathbf{b}^\mathrm{T}\mathbf{F^0}) + z^2(\mathbf{b}^\mathrm{T}\mathbf{b} + \mathbf{F^0}^\mathrm{T}\mathbf{c} + \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{F^0}) \\ &+z^3(\mathbf{b}^\mathrm{T}\mathbf{c} + \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{b}) + z^4\mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{c}]\boldsymbol{\mu}^{-1}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Uz sljedeće definicije

$$\mathbf{C^0} = \mathbf{F^0}^\mathrm{T}\mathbf{F^0}, \tag{6.24}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F^0}^\mathrm{T}\mathbf{b} + \mathbf{b}^\mathrm{T}\mathbf{F^0}, \tag{6.25}$$

slijedi izraz za desni Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti prema (6.23)

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}}[\mathbf{C^0} + z\mathbf{K} + \cdots]\boldsymbol{\mu}^{-1}. \tag{6.26}$$

Uz pretpostavku tankih ljusaka, u prethodnom izrazu $\mathbf{C^0}$ i $\mathbf{K}$ uzimaju se dominantnima u odnosu na ostale članove koji se onda mogu zanemariti. Izrazi (6.24) i (6.25) mogu se zapisati na sljedeći način

$$\mathbf{C^0} = C_{\alpha\beta}\mathbf{A}^\beta \otimes \mathbf{A}^\alpha + C_{3\alpha}\mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{N} + C_{\alpha 3}\mathbf{N} \otimes \mathbf{A}^\alpha + C_{33}\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \tag{6.27}$$

$$\mathbf{K} = K_{\alpha\beta}\mathbf{A}^\beta \otimes \mathbf{A}^\alpha + K_{3\alpha}\mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{N} + K_{\alpha 3}\mathbf{N} \otimes \mathbf{A}^\alpha + K_{33}\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \tag{6.28}$$

gdje su pojedine komponente jednake

$$C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} + \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\beta} + \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\beta}), \tag{6.29}$$

$$C_{\alpha 3} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} + \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} \cdot \mathbf{w}, \tag{6.30}$$

$$C_{3\alpha} = C_{\alpha 3}, \tag{6.31}$$

$$C_{33} = 1 + 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}, \tag{6.32}$$

$$K_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + 2\left(\left\{\mathbf{N}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\beta} + \mathbf{N}_{,\beta} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} + \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} + u^0_{,\alpha} \cdot w_{,\beta} + u^0_{,\beta} \cdot w_{,\alpha}\right\}\right), \tag{6.33}$$

$$K_{\alpha 3} = (\mathbf{N}_{,\alpha} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{w}_{,\alpha} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_{,\alpha}) + \mathbf{2}\chi(\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{w} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{0}}_{,\alpha}), \tag{6.34}$$

$$K_{33} = 4\chi(1 + 2\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}). \tag{6.35}$$

6.1.3 Varijacijska formulacija

Princip virtualnih pomaka slijedi iz potencijalne energije Π i za opći trodimenzijski slučaj glasi

$$\delta\Pi = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\mathbf{S} : \delta\mathbf{C}\,\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{6.36}$$

gdje su $\mathbf{f}$ i $\mathbf{t}$ volumenske i površinske sile, $\mathbf{S}$ je drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, $\mathrm{d}V = \mu \mathrm{d}A\mathrm{d}z$, μ označava $\det\boldsymbol{\mu}$, i $\mathrm{d}A$ elementarnu površinu srednje plohe zadanu kao $\mathrm{d}A = \sqrt{A}\mathrm{d}\theta^1\mathrm{d}\theta^2$, $A = \det(A_{\alpha\beta})$. Ljuskasti kontinuum omeđen je s gornjom plohom $\partial\mathcal{B}^+$, donjom plohom $\partial\mathcal{B}^-$ i rubom ljuske $\partial\mathcal{B}^s$. U skladu s tim vrijede oznake $\mu^+ = \mu|_{z=h/2}$, $\mu^- = \mu|_{z=-h/2}$ i μ^s za rub ljuske kao i za elementarne površine $\mathrm{d}S^+ = \mu^+\mathrm{d}A, \mathrm{d}S^- = \mu^-\mathrm{d}A$ i $\mathrm{d}S^s = \mu^s\mathrm{d}z\mathrm{d}s$. Virtualni rad vanjskog opterećenja zapisan je kao

$$\delta\mathcal{W}_{ext} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}S. \tag{6.37}$$

Vanjsko opterećenje može se prikazati za gornju i donju plohu

$$\mathbf{p}: = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{f}\mu \,\mathrm{d}z + \mu^+\mathbf{t}^+ + \mu^-\mathbf{t}^-, \tag{6.38}$$

$$\mathbf{l}: = \int_{-h/2}^{h/2} z\mathbf{f}\mu \,\mathrm{d}z + \frac{h}{2}\mu^+\mathbf{t}^+ - \frac{h}{2}\mu^-\mathbf{t}^-, \tag{6.39}$$

$$\mathbf{q}: = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathbf{f}\mu \,\mathrm{d}z + \frac{h^2}{4}\mu^+\mathbf{t}^+ + \frac{h^2}{4}\mu^-\mathbf{t}^-, \tag{6.40}$$

kao i za rub ljuske

$$\mathbf{p}^s: = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{t}^s\mu^s \,\mathrm{d}z, \tag{6.41}$$

$$\mathbf{l}^s: = \int_{-h/2}^{h/2} z\mathbf{t}^s\mu^s \,\mathrm{d}z, \tag{6.42}$$

$$\mathbf{q}^s: = \int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathbf{t}^s\mu^s \,\mathrm{d}z, \tag{6.43}$$

U skladu s prethodnim izrazima za vanjsko opterećenje ljuske i pomoću relacije (6.4) slijedi oblik virtualnog rada vanjskog opterećenja

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{ext} = &\int_{\mathcal{M}} \left[\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{x^0} + (\mathbf{l}+\chi\mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{a}_3 + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right]\mathrm{d}A + \\ &\int_{\partial\mathcal{M}} \left[\mathbf{p}^s\cdot\delta\mathbf{x^0} + (\mathbf{l}^s+\chi\mathbf{q}^s)\cdot\delta\mathbf{a}_3 + (\mathbf{q}^s\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{6.44}$$

U prethodnom izrazu prvi integral predstavlja virtualni rad vanjskog opterećenja na gornjoj i donjoj plohi dok drugi integral predstavlja virtualni rad na rubnoj plohi. Kao što se može zamijetiti dobije se dvodimenzijski oblik rada vanjskih sila.

Za formulaciju virtualnog rada unutarnjih sila $\delta\mathcal{W}_{int}$ koristi se izraz

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Xi}, \tag{6.45}$$

jer je neelastični konstitutivni model, kao što je pokazano u poglavljima 4 i 5, izveden pomoću Eshelbyjeva tenzora naprezanja $\boldsymbol{\Xi}$. Prijenos unazad (*pull*

back) tenzora $\mathbf{S}$ pomoću $\boldsymbol{\mu}$ na srednju površinu glasi

$$\mathbf{S^0} = \boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}}. \tag{6.46}$$

Tenzor $\mathbf{S^0}$ je još uvijek funkcija varijable z. Vektori unutarnjih sila i momenata zadani su izrazima

$$\mathbf{n} : = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{1}{2}\mathbf{S^0}\,\mu\,\mathrm{d}z \tag{6.47}$$

$$\mathbf{m} : = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{z}{2}\mathbf{S^0}\,\mu\,\mathrm{d}z, \tag{6.48}$$

uz pomoć kojih slijedi princip virtualnih pomaka prema (6.36)

$$\begin{aligned}\delta\Pi = &\int_{\mathcal{M}} \left[\mathbf{n} : \delta\mathbf{C^0} + \mathbf{m} : \delta\mathbf{K}\right] \mathrm{d}A - \\ &\int_{\mathcal{M}} \left[\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{x^0} + (\mathbf{l}+\chi\mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{a}_3 + (\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right] dA - \\ &\int_{\partial\mathcal{M}} \left[\mathbf{p}^s\cdot\delta\mathbf{x^0} + (\mathbf{l}^s+\chi\mathbf{q}^s)\cdot\delta\mathbf{a}_3 + (\mathbf{q}^s\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right] \mathrm{d}s = 0.\end{aligned} \tag{6.49}$$

Prvi integral odnosi se na virtualni rad unutarnjih sila i momenata dok drugi i treći član prikazuju virtualni rad vanjskog opterećenja već prikazan izrazom (6.44). Za tanke ljuske članovi $\chi\mathbf{q}\cdot\delta\mathbf{a}_3, \mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_3\delta\chi$ u (6.49) mogu se zanemariti pošto su većeg reda. Zbog vrlo složene strukture integrali zadani izrazima (6.47) i (6.48) računaju se numerički.

6.2 Formulacija konačnog elementa

Geometrijske veličine koje opisuju plohu ljuske (veličine $B_{\alpha\beta}, \sqrt{A}$) se točno računaju u svakoj točki integracije. Prirodne koordinate koje opisuju površinu ljuske su preslikane na jedinični element pomoću bilinearne transformacije. Jacobijeva matrica izvedena je za središte elementa i koristi se za sve točke integracije. Izvedeni konačni element ima četiri čvora. Svaki čvor ima sedam

stupnjeva slobode, a to su tri komponente vektora pomaka **u**, tri komponente vektora zakreta normale **w** i parametar koji opisuje promjenu debljine ljuske χ.

6.2.1 Jednadžba konačnog elementa

Geometrija ljuskastog elementa pomoću metode konačnih elemenata opisuje se diskretiziranjem srednje plohe ljuske $\mathcal{M}$ u nel elemenata. U skladu s tim vrijedi

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{M}^h = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathcal{M}_e^h, \tag{6.50}$$

za koje vrijedi $\mathcal{M}_{e1}^h \cap \mathcal{M}_{e2}^h = \emptyset$ gdje je $e_1, e_2 \in [1, nel]$. Ovdje h predstavlja aproksimiranu vrijednost. Za prikaz površine $\mathcal{M}_e^h$ pomoću konačnih elemenata koristi se jedinični kvadrat '$\square$' prikazan preko normiranih koordinata

$$\square := (\xi, \eta) \in [-1, +1] \times [-1, +1]. \tag{6.51}$$

Koordinate θ^α zamijenjene su prirodnim koordinatama η i ξ. Za aproksimiranje geometrije ljuske i polja pomaka korištene su Lagrangeove bilinearne funkcije oblika

$$N_A(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_A)(1 + \eta\eta_A). \tag{6.52}$$

Pri opisivanju neke vektorske veličine $\mathbf{s}(\theta^\alpha) = s^i(\theta^\alpha)\mathbf{e}_i$ vrijedi

$$\mathbf{s}(\theta^\alpha) \approx \mathbf{s}(\xi, \eta) = \sum_{A=1}^{n} N_A(\xi, \eta)\mathbf{s}_A, \tag{6.53}$$

gdje indeks A predstavlja vrijednost veličine u čvorovima elementa, a indeks n označava broj čvorova. Veličine prikazane u odjeljku 6.1 mogu se prikazati u približnom obliku prilagođenom za upotrebu u metodi konačnih elemenata:

- položaj točke na srednjoj plohi nedeformirane ljuske

$$\mathbf{X}^0 \approx \mathbf{X}_h^0 = \sum_{A=1}^{n} N_A(\xi, \eta) X_A^0, \tag{6.54}$$

- položaj točke na srednjoj plohi deformirane ljuske

$$\mathbf{x}^0 \approx \mathbf{x}_h^0 = \sum_{A=1}^{n} N_A(\xi,\eta) x_A^0, \tag{6.55}$$

- osnovni vektori srednje nedeformirane plohe

$$(\mathbf{A}_i)_h = \sum_{A=1}^{n} N_{A,i} \mathbf{X}_A^0, \tag{6.56}$$

- osnovni vektori srednje deformirane plohe

$$(\mathbf{a}_i)_h = \sum_{A=1}^{n} N_{A,i} \mathbf{x}_A^0, \tag{6.57}$$

- vektor pomaka

$$\mathbf{u}_h^0 = \sum_{A=1}^{n} N_A(\xi,\eta)(\mathbf{x}_A^0 - \mathbf{X}_A^0) = \sum_{A=1}^{n} N_A(\xi,\eta)\mathbf{u}_A^0, \tag{6.58}$$

- vektor zakreta normale

$$\mathbf{w}_h = \sum_{A=1}^{n} N_{A,3}(\mathbf{x}_A^0 - \mathbf{X}_A^0) = \sum_{A=1}^{n} N_{A,3}\mathbf{u}_A^0, \tag{6.59}$$

- kinematička varijabla koja opisuje promjenu debljine deformirane ljuske

$$\chi_h = \sum_{A=1}^{n} N_A \chi_A \tag{6.60}$$

6.2.2 *Enhanced* strain funkcional

Kako bi se eliminirali neželjeni *locking* efekti, više o njima može se naći u radovima Klinkel [2] i Eckstein [116], korišten je *enhanced strain* koncept, već prije predstavljen u radu Simo & Rifai [117]. U ovom elementu 'pojačava' se (*enhanced*) tenzor deformiranosti. U skladu s tim razmatran je sljedeći funkcional

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{C}+\mathbf{C}^i)^{-1}\boldsymbol{\Xi} : \delta(\mathbf{C}+\mathbf{C}^i)\,\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{x}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{6.61}$$

gdje je $\mathbf{C}^i$ *enhanced strain* funkcija. Ako se uzme da $\mathbf{C}^i$ ne ovisi o pomacima vrijedi

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}+\mathbf{C}^i)^{-1}\boldsymbol{\Xi}:\delta\mathbf{C}\mathrm{d}V-\int_{\mathcal{B}}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V-\int_{\partial\mathcal{B}_0}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}S=0 \tag{6.62}$$

i

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}(\mathbf{C}+\mathbf{C}^i)^{-1}\boldsymbol{\Xi}:\delta\mathbf{C}^{\mathbf{i}}\mathrm{d}V=0\,. \tag{6.63}$$

Veličina $\mathbf{C}^i$ ima oblik $\mathbf{C}^i=\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}}\mathbf{C}^{0^i}\boldsymbol{\mu}^{-1}$ gdje $\mathbf{C}^{0^i}$ ne ovisi o z. Redukcija na dvodimenzijski slučaj napravljena je na isti način kao u izrazima (6.38) do (6.49)

$$\int_{\mathcal{M}}(\mathbf{n}:\delta\mathbf{C}^{\mathbf{0}}+\mathbf{m}:\delta\mathbf{K})\,\mathrm{d}A-\int_{\mathcal{M}}\left[\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{x}^{\mathbf{0}}+(\mathbf{l}+\chi\mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{a}_3+(\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right]\mathrm{d}A$$
$$-\int_{\partial\mathcal{M}}\left[\mathbf{p}^s\cdot\delta\mathbf{x}^{\mathbf{0}}+(\mathbf{l}^s+\chi\mathbf{q}^s)\cdot\delta\mathbf{a}_3+(\mathbf{q}^s\cdot\mathbf{a}_3)\delta\chi\right]\mathrm{d}s=0, \tag{6.64}$$

$$\int_{\mathcal{M}}\mathbf{n}:\delta\mathbf{C}^{\mathbf{0i}}\mathrm{d}A=0, \tag{6.65}$$

gdje su vektori unutrašnjih sila i momenata zadani s

$$\mathbf{n}:\;=\;\int_{-h/2}^{+h/2}\mathbf{S}\,\mu\,\mathrm{d}z\,, \tag{6.66}$$

$$\mathbf{m}:\;=\;\int_{-h/2}^{+h/2}z\mathbf{S}\,\mu\,\mathrm{d}z. \tag{6.67}$$

Interpolacijske funkcije za $\mathbf{C}^i$ uzete su u sljedećem obliku, prema Sansour & Kollmann [23],

$$C^i_{11}(\xi,\eta)\;=\;C_1\xi+C_2\xi\eta, \tag{6.68}$$

$$C^i_{22}(\xi,\eta)\;=\;C_3\eta+C_4\xi\eta, \tag{6.69}$$

$$C^i_{33}(\xi,\eta)\;=\;C_5\xi+C_6\eta+C_7\xi\eta, \tag{6.70}$$

$$C^i_{12}(\xi,\eta)\;=\;C_8\xi+C_9\eta+C_{10}\xi\eta, \tag{6.71}$$

$$C^i_{13}(\xi,\eta)\;=\;C_{11}\xi+C_{12}\xi\eta, \tag{6.72}$$

$$C^i_{23}(\xi,\eta)\;=\;C_{13}\eta+C_{14}\xi\eta. \tag{6.73}$$

Kao što se vidi veličine $C^i_{11}....C^i_{23}$ su komponente $\mathbf{C^{0_i}}$ zadane s obzirom na sustav $\mathbf{A}_i$. Uvođenjem interpolacijskih funkcija za pomake kao i za *enhanced* deformacije u izraze (6.64) i (6.65) dobije se sustav dvije nelinearne algebarske jednadžbe. Polje *enhanced* deformacija pretpostavlja se diskontinuirano po elementu, a eliminira se na razini elementa.

Linearizacija jednadžbi (6.64) i (6.65) napravljena je numerički. Tangentni operatori $\mathbb{C}$ dani su izrazom (4.130) za izotropni materijalni model i (5.99) za anizotropni materijalni model. Linearizacija izraza (6.64) i (6.65) daje sljedeće izraze

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}[\delta\Pi]\cdot(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{C^{0}}^{i}) &= \int_{\mathcal{M}}[\Delta\mathbf{n}:\delta\mathbf{C^0}+\Delta\mathbf{m}:\delta\mathbf{K}]\mathrm{d}A \\
&= \int_{\mathcal{M}}\Big\{[\mathbb{C}^{\mathbf{0}}(\Delta\mathbf{C^0}+\Delta\mathbf{C^{0_i}})+\mathbb{C}^{\mathbf{1}}\Delta\mathbf{K}]:\delta\mathbf{C^0} \\
&\quad +[\mathbb{C}^{\mathbf{1}}\Delta(\mathbf{C^0}+\mathbf{C^{0_i}})+\mathbb{C}^{\mathbf{2}}\Delta\mathbf{K}]:\delta\mathbf{K}\Big\}\,\mathrm{d}A, \qquad (6.74)\\
\mathrm{D}[\delta\Pi]\cdot(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{C^{0}}^{i}) &= \int_{\mathcal{M}}\Delta\mathbf{n}:\delta\mathbf{C^{0_i}}\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{\mathcal{M}}\Big([\mathbb{C}^{\mathbf{0}}(\Delta\mathbf{C^0}+\Delta\mathbf{C^{0_i}})+\mathbb{C}^{\mathbf{1}}\Delta\mathbf{K}]:\delta\mathbf{C^{0_i}}\Big)\,\mathrm{d}A. \qquad (6.75)
\end{aligned}$$

Ovdje vrijede sljedeće relacije

$$\begin{aligned}
(\mathbb{C}^{\mathbf{0}})^{ijkl} &: = \int_{-h/2}^{+h/2}(\boldsymbol{\mu}^{-1})^i_a(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^j_b(\mathbb{C})^{abrs}(\boldsymbol{\mu}^{-1})^k_r(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^l_s\,\mu\,dz, \qquad (6.76)\\
(\mathbb{C}^{\mathbf{1}})^{ijkl} &: = \int_{-h/2}^{+h/2}z\,(\boldsymbol{\mu}^{-1})^i_a(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^j_b(\mathbb{C})^{abrs}(\boldsymbol{\mu}^{-1})^k_r(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^l_s\,\mu\,dz, \qquad (6.77)\\
(\mathbb{C}^{\mathbf{2}})^{ijkl} &: = \int_{-h/2}^{+h/2}z^2\,(\boldsymbol{\mu}^{-1})^i_a(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^j_b(\mathbb{C})^{abrs}(\boldsymbol{\mu}^{-1})^k_r(\boldsymbol{\mu}^{-\mathrm{T}})^l_s\,\mu\,dz. \qquad (6.78)
\end{aligned}$$

Integrali u (6.76) do (6.78) zbog složene strukture računaju se numerički.

Jednadžbe (6.54) do (6.60) koriste se pri diskretizaciji varijacijskog problema (6.64). Izvedene su na razini konačnog elementa i primjenjuju se na globalnoj razini, te tvore sustav jednadžbi. Linearizacijom tog sustava izvodi

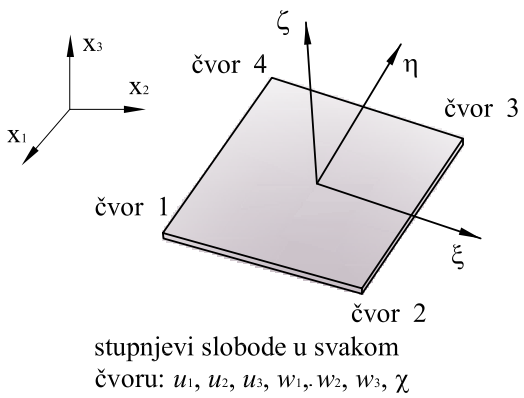
se linearizirana jednadžba konačnih elemenata

$$\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \tag{6.79}$$

gdje $\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ predstavlja matricu krutosti, $\mathbf{f}_{ext}$ vektor vanjskih sila, a $\mathbf{f}_{int}$ vektor unutarnjih sila. Inkrement $\Delta\mathbf{u}$ ima sedam komponenti (3 pomaka, 3 zakreta i veličina koja opisuje promjenu debljine ljuske), slika 6.2

$$\Delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = [\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_3 \quad \Delta w_1 \quad \Delta w_2 \quad \Delta w_3 \quad \Delta\chi] \tag{6.80}$$

Linearizirana jednadžba konačnog elementa rješava se inkrementalno - iterativnim postupcima.



Slika 6.2: Četveročvorni ljuskasti konačni element s 28 stupnjeva slobode

Poglavlje 7

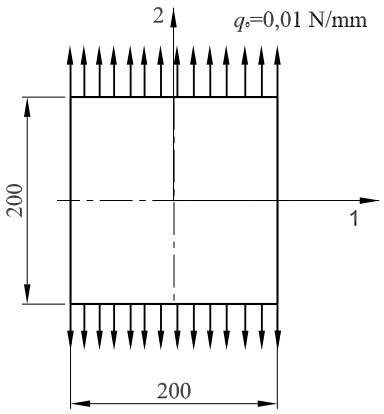
Numerički primjeri

Učinkovitost izvedenih algoritama za modeliranje procesa deformiranja uz pretpostavku velikih elastoplastičnih deformacija ispitana je na nizu numeričkih primjera. Kao što je već spomenuto u prethodnom poglavlju, numerički algoritmi su ugrađeni na razini točke integracije u programski kod za ljuskasti konačni element. Taj element razvio je Prof. Dr.-Ing. Carlo Sansour, a detaljno je opisan u radovima Sansour & Kollmann [23] i Sansour & Wagner [26]. Ovo poglavlje podijeljeno je na dva dijela: dok se u odjeljku 7.1 razmatraju razni numerički primjeri elastoplastičnog deformiranja konstrukcija sačinjenih od izotropnih materijala, u odjeljku 7.2 napravljen je proračun konstrukcija od anizotropnih materijala. Navedenim primjerima pokazana je točnost izvedenih materijalnih modela. Posebna pažnja posvećena je utvrđivanju točnosti opisivanja mehanizama očvršćenja (primjeri 7.1.1, 7.2.1, 7.2.2) kao i učinkovitost materijalnog modela kod problema velikih pomaka i rotacija za različite geometrije (primjeri 7.1.4, 7.1.5, 7.1.6). Također je pokazana učinkovitost numeričkog algoritma za anizotropne materijale za različite geometrije ljuski, ali i za različite orijentacije ortotropnih materijalnih osi (primjeri 7.2.4, 7.2.5, 7.2.3 i 7.2.6).

7.1 Elastoplastično deformiranje izotropnih materijala

7.1.1 Jednoosno opterećena membrana

U prvom primjeru modelirano je jednoosno opterećenje membrane uz upotrebu mehanizama nelinearnog izotropnog i u ovom radu izvedenog kinematičkog očvršćenja. Ovaj primjer je napravljen kako bi se ispitala točnost opisivanja navedenih mehanizama očvršćenja. Tanka kvadratna ploča, prikazana slikom 7.1, opterećena je linijskim opterećenjem promjenjive amplitude zadane prema slici 7.2. Zbog simetričnosti ploče i opterećenja u proračunskom modelu koristi se samo četvrtina ploče koja je diskretizirana jednim konačnim elementom. U proračunu se koristi materijal koji ima parametre prikazane na slici 7.1



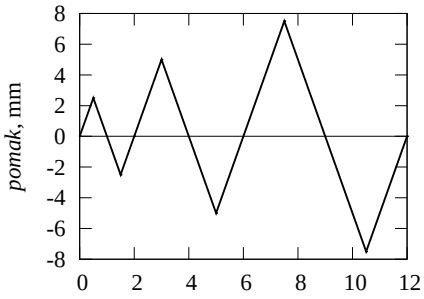
Materijalni parametri:

$E = 210000$ MPa, $\nu = 0,3$,
$\sigma_Y = 240$ MPa,
$H = 800$ MPa, $c = 800$ MPa,
$q_\circ = 0,01$ N/mm

Slika 7.1: Jednoosno opterećena membrana: geometrija i materijalni parametri

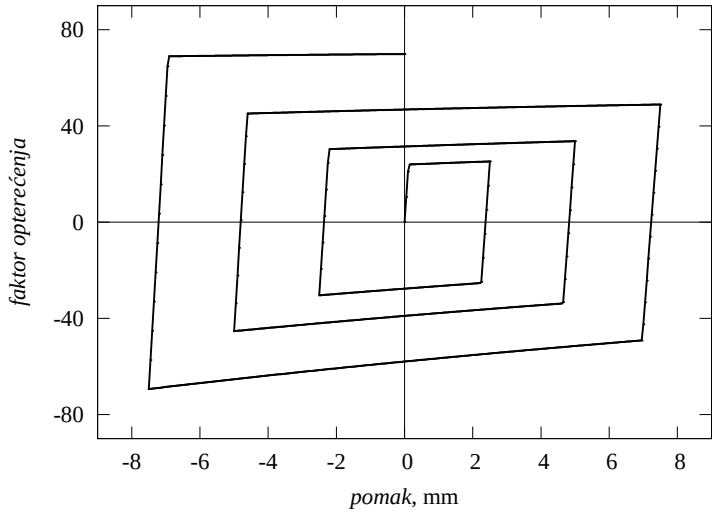
Na slikama 7.3, 7.4 i 7.5 prikazani su dijagrami međusobne ovisnosti opterećenja i pomaka gornjeg ruba ploče. Na ordinati se prikazuje opterećenje pomoću faktora opterećenja α zadanog kao $q = \alpha q_\circ$. U prvom slučaju na-

pravljen je proračun u kojem se uzima u obzir samo izotropno očvršćenje materijala ($H = 800$ MPa, $c = 0$ MPa).

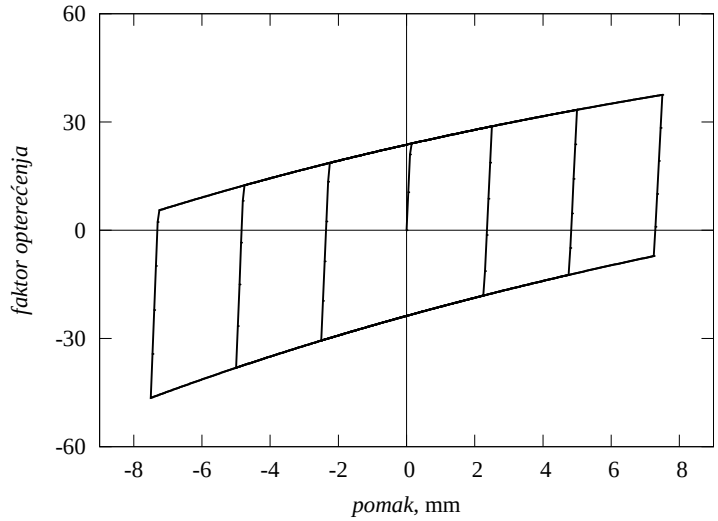


Slika 7.2: JEDNOOSNO OPTEREĆENA MEMBRANA: način opterećivanja membrane

Na dijagramu prikazanom slikom 7.3 može se uočiti da sa svakim novim ciklusom dolazi do povećanja granice tečenja i u vlačnom i u tlačnom području tj. ploha tečenja se jednoliko širi i u tlačno i u vlačno područje.

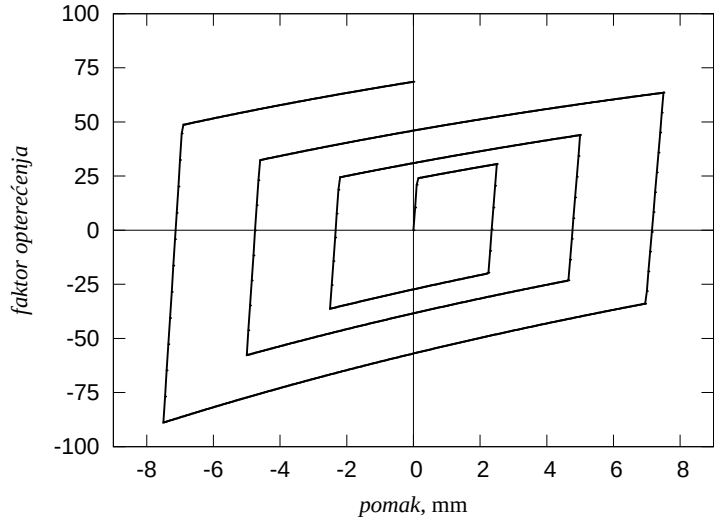


Slika 7.3: JEDNOOSNO OPTEREĆENA MEMBRANA: krivulje opterećenja za slučaj kinematičkog očvršćenja



Slika 7.4: JEDNOOSNO OPTEREĆENA MEMBRANA: krivulje opterećenja za slučaj kinematičkog očvršćenja

To jasno ukazuje da je izotropno očvršćenje materijala pravilno modelirano. Drugi proračun napravljen je samo s mehanizmom kinematičkog očvršćenja ($H = 0$ MPa, $c = 800$ MPa). U tom se slučaju dobije dijagram prema slici 7.4 na kojem se može uočiti da sa svakim novim ciklusom za pozitivne pomake dolazi do povećanja granice tečenja u vlačnom području. Istovremeno se smanjuje u tlačnom području. S druge strane za negativne pomake događa se potpuno obrnuta situacija, raste tlačna granica tečenja, a smanjuje se vlačna. Ta pojava naziva se još i Bauschingerov efekt i opisana je u odjeljku 3.1. Bauschingerov efekt jasno pokazuje pravilno modelirano kinematičko očvršćenje materijala što dokazuje ispravnost izvedenog mehanizma kinematičkog očvršćenja temeljenog na slobodnoj energiji. Za treći proračun u obzir su uzeta oba mehanizma očvršćenja ($H = 800$ MPa, $c = 800$ MPa) što se lako može uočiti na dijagramu 7.5 jer istovremeno dolazi do širenja plohe tečenja, ali i pojave Bauschingerova efekta.

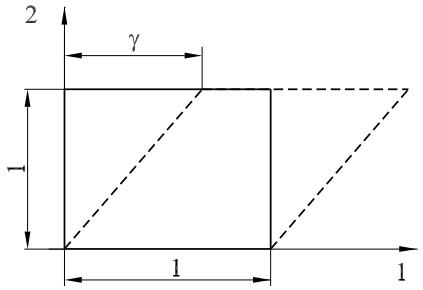


Slika 7.5: JEDNOOSNO OPTEREĆENA MEMBRANA: krivulje opterećenja za slučaj istovremenog izotropnog i kinematičkog očvršćenja

7.1.2 Čisto smicanje

Sljedeći primjer, kojim se može provjeriti izvedeni materijalni model, je čisto smicanje. Vrlo se često koristi u literaturi, PERIĆ ET AL. [21], BAŞAR & ITSKOV [31], ETEROVIC & BATHE [20], IBRAHIMBEGOVIĆ & CHORFI [118], TSAKMAKIS & WILLUWEIT [43], kao ogledni primjerak testa za velike elastoplastične deformacije i to posebno za modele koji imaju ugrađen mehanizam kinematičkog očvršćenja. Kvadratna ploča diskretizirana jednim konačnim elementom, slika 7.6, ima na donjem rubu spriječene sve pomake. Na gornjem rubu spriječeni su pomaci u smjeru osi *2* dok se on može slobodno gibati u smjeru osi *1*. Opterećenje se simulira inkrementiranjem pomaka gornjeg ruba. Kod takvog opterećenja ploče javljaju se velike kutne deformacije i rotacija glavnih osi deformacija. To može uzrokovati oscilirajuća rješenja za naprezanja u slučaju kada uvjet objektivnosti unutarnje varijable kinematičkog očvršćenja nije u potpunosti ispunjen. Parametri materijala za

koji je izvršen proračun nalaze se na slici 7.6.

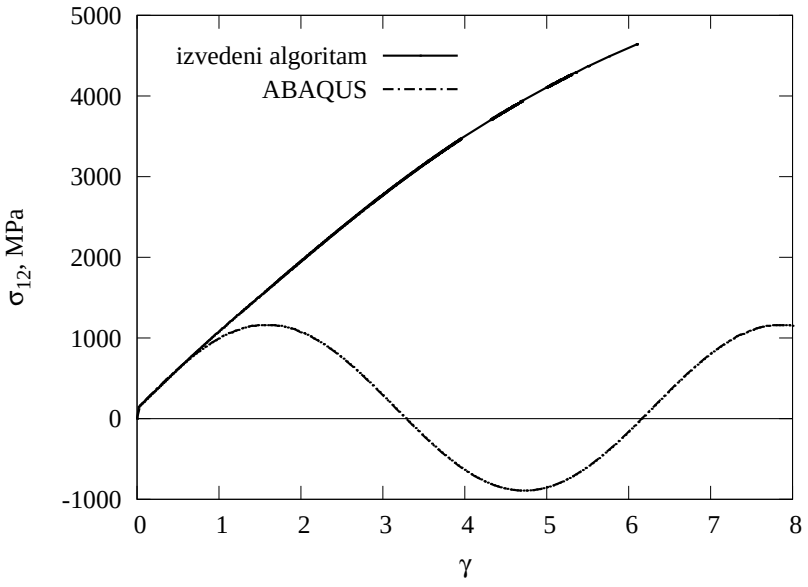


MATERIJALNI PARAMETRI:

$E = 206890$ MPa, $\nu = 0,29$,
$\sigma_Y = 220$ MPa,
$H = 0$ MPa, $c = 1000$ MPa,

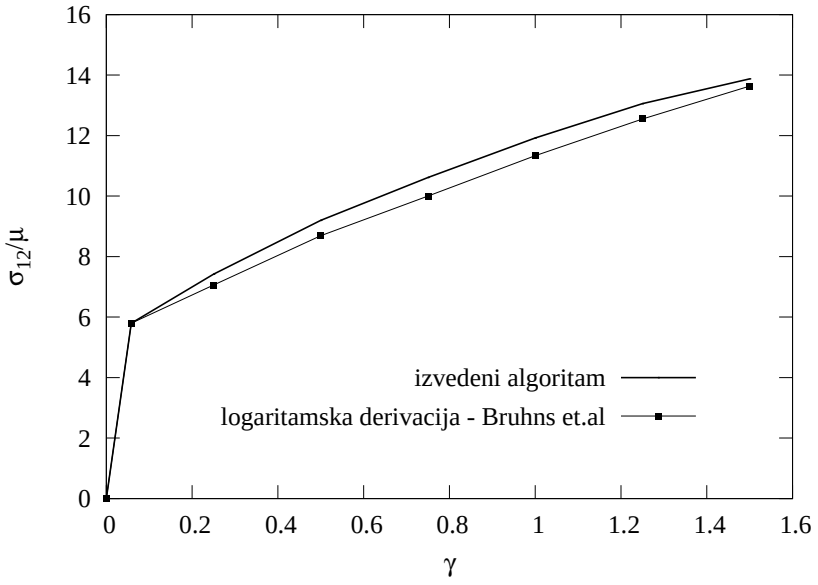
Slika 7.6: ČISTO SMICANJE: geometrija i materijalni parametri

Rezultati ovog primjera prikazani su obliku dijagrama na slici 7.7. Na apscisu je nanesena kutna deformacija γ dok je na ordinatu naneseno posmično naprezanje σ_{12}. Dobivene krivulje koje pokazuju ovisnost σ_{12} o γ



Slika 7.7: ČISTO SMICANJE: usporedba rezultata dobivenih pomoću izvedenog modela za izotropne materijale s rezultatima za materijalni model ugrađen u program za konačne elemente ABAQUS

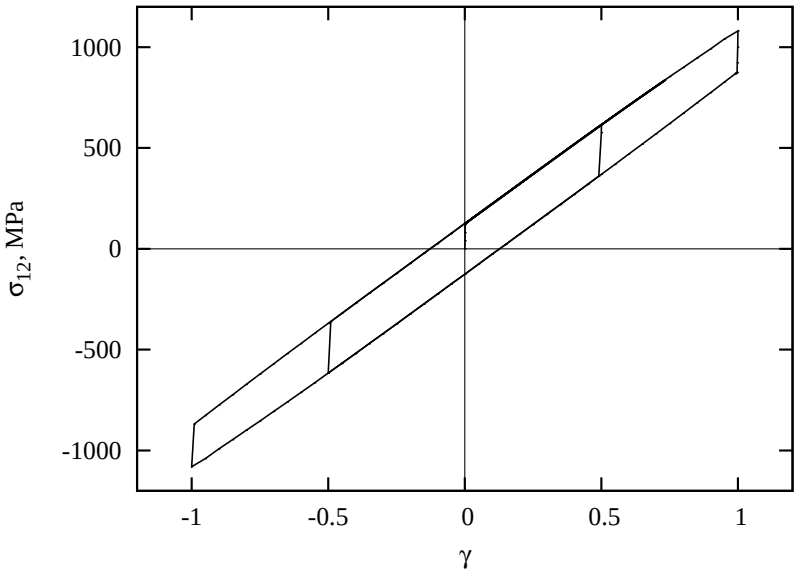
uspoređene su s krivuljama dobivenim pomoću materijalnog modela kod kojeg je korištena Zaremba-Jaumannova derivacija pri modeliranju kinematičkog očvršćenja, ABAQUS [119]. Kao što se vidi iz dijagrama, za razliku od neželjenog oscilatornog ponašanja modela s Zaremba-Jaumannovom derivacijom, krivulja kod izvedenog modela za izotropne materijale monotono raste s povećanjem posmične deformacije. To pokazuje da je modelirani mehanizam kinematičkog očvršćenja izveden pravilno.



Slika 7.8: ČISTO SMICANJE: usporedba rezultata dobivenih pomoću izvedenog modela za izotropne materijale s rezultatima iz BRUHNS ET AL. [1]

Isto tako krivulje ovisnosti bezdimenzionalnog faktora σ_{12}/μ o kutnoj deformaciji γ uspoređene su s nedavno razvijenom *corotational* logaritamskom derivacijom, XIAO ET AL. [40] i BRUHNS ET AL. [1], koja ne pokazuje oscilatorna ponašanja. Kao što se može vidjeti na slici 7.8 postoji dobro poklapanje među krivuljama. Ipak izvedeni model izotropnog očvršćenja ima prednost

u odnosu na model s logaritamskom derivacijom jer nije potrebno vršiti integriranje kako bi se dobilo kinematičko očvršćenje već ono direktno slijedi iz konstitutivnih jednadžbi.



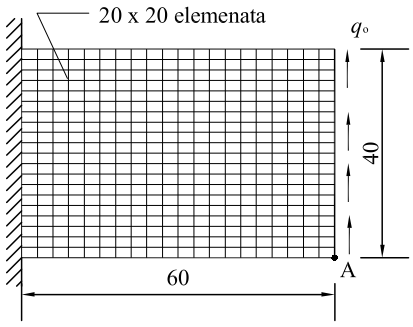
Slika 7.9: ČISTO SMICANJE: ovisnost posmičnih naprezanja o kutnoj deformaciji pri cikličkom opterećenju

Istražen je i utjecaj cikličkog opterećenja na problem čistog smicanja. Kao što se vidi iz dijagrama na slici 7.9 opisan je Bauschingerov efekt što još jednom potvrđuje dobro opisano kinematičko očvršćenje.

7.1.3 Pravokutna ploča opterećena cikličkim opterećenjem u ravnini

U ovom primjeru ispitana je točnost opisivanja mehanizama izotropnog i kinematičkog očvršćenja kod ploče opterećene posmičnim opterećenjem. Pravokutna ploča, zadana slikom 7.10, opterećena je na desnom rubu cikličkim opterećenjem referentnog iznosa $q_\circ$. Ukupno opterećenje izraženo je množe-

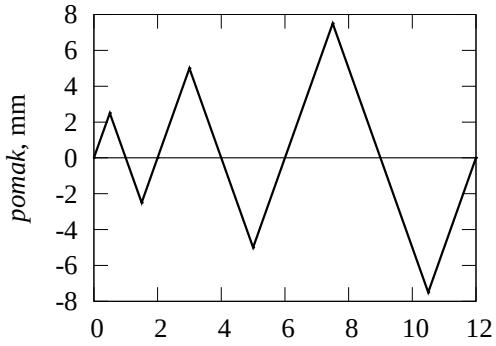
njem s tzv. faktorom opterećenja α kao $q = \alpha q_\circ$. Opterećenje je narinuto inkrementiranjem pomaka točke A na desnom rubu i to tako da se nakon svakog ciklusa pomak ruba udvostručuje, slika 7.11. Ploča je dikretizirana pomoću 400 konačnih elemenata. Materijalne konstante prikazane su na slici 7.10.



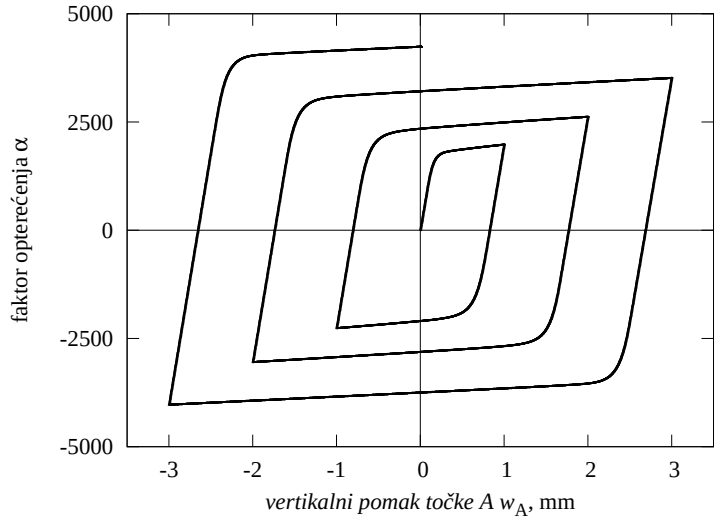
MATERIJALNI PARAMETRI:

$E = 210000$ MPa, $\nu = 0,3$,
$\sigma_Y = 240$ MPa,
$H = 1600$ MPa, $c = 1600$ MPa,

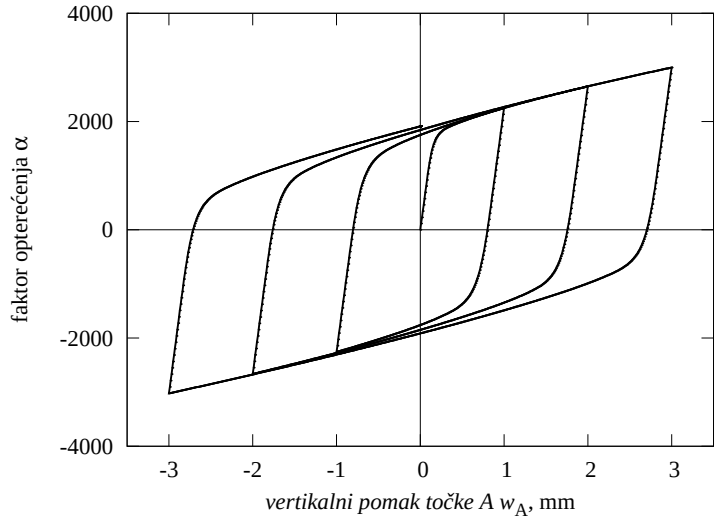
Slika 7.10: PRAVOKUTNA PLOČA: geometrija i materijalni parametri



Slika 7.11: PRAVOKUTNA PLOČA: prikaz cikličkog opterećenja kvadratne ploče pomoću dijagrama koji daje ovisnost narinutog pomaka točke A o vremenu



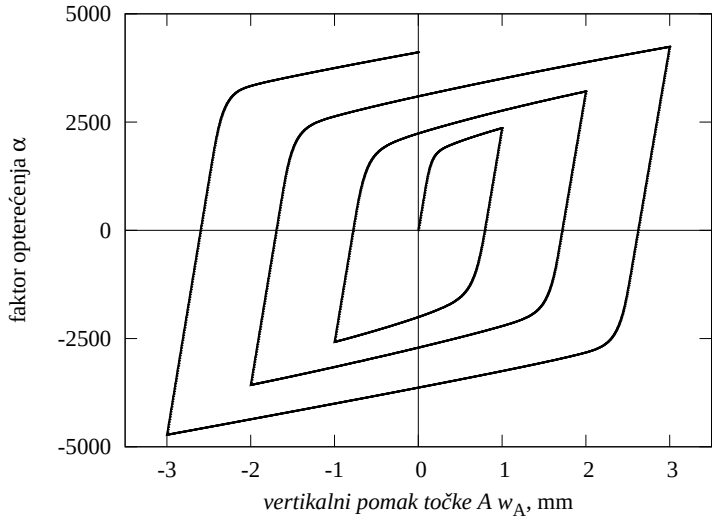
Slika 7.12: PRAVOKUTNA PLOČA: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj izotropnog očvršćenja



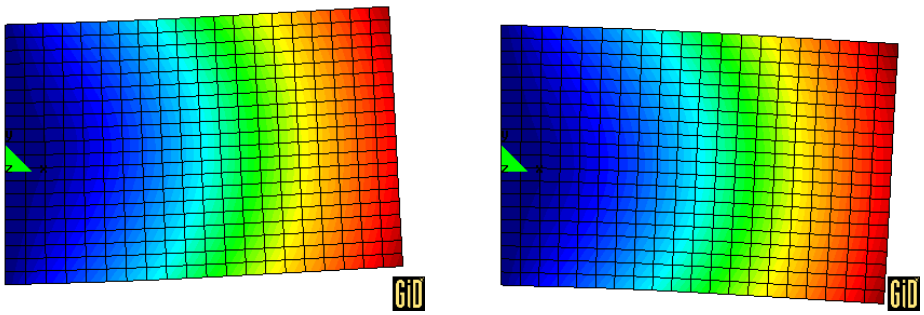
Slika 7.13: PRAVOKUTNA PLOČA: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj kinematičkog očvršćenja

Na slici 7.12 prikazane su krivulje međusobnog odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A. U ovom slučaju napravljen je proračun samo

kada postoji izotropno očvršćenje ($H = 1600$ MPa, $c = 0$ MPa). Iz dijagrama se jasno vidi da izvedeni numerički algoritam može opisati izotropno očvršćenje i u slučaju posmičnog opterećenja duž jednog ruba. Slična analiza napravljena je i za slučaj kinematičkog očvršćenja ($H = 0$ MPa, $c = 1600$ MPa) što je prikazano krivuljama na slici 7.13 koje točno opisuju Bauschingerov efekt. Radi potpunosti, napravljen je proračun s oba mehanizma očvršćenja ($H = 1600$ MPa, $c = 1600$ MPa) koji se prema slici 7.14 zorno prikazuje širenje plohe tečenja (izotropno očvršćenje), ali istovremeno uključuje i Bauschingerov efekt (kinematičko očvršćenje). Na slikama 7.15(a) i 7.15(b) prikazani su deformirani oblici za krajnji gornji položaj i krajnji donji položaj.



Slika 7.14: PRAVOKUTNA PLOČA: krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka točke A za slučaj izotropnog i kinematičkog očvršćenja



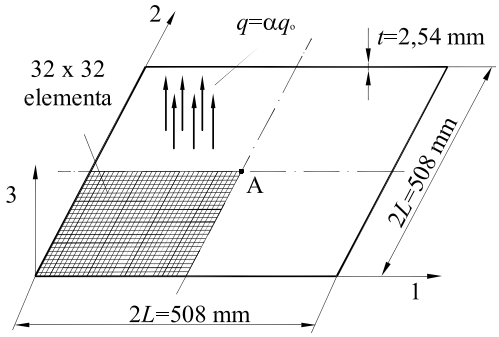
(a) (b)

Slika 7.15: PRAVOKUTNA PLOČA: deformirani oblik za krajnji a) gornji i b) donji položaj

KRITIČKI OSVRT: S posljednja tri primjera, jednoosno opterećenom pločom 7.1.1, čistim smicanjem 7.1.2 i posmično opterećenom pločom 7.1.3, pokazano je da su mehanizmi očvršćenja pravilno modelirani. Naročito je to bilo potrebno ispitati za novi oblik kinematičkog očvršćenja koji slijedi iz proširenog izraza za slobodnu energiju. Također je testom čistog smicanja pokazano da je postignuta objektivnost izvedenog algoritma jer nema pojave neželjenog oscilatornog ponašanja. Sljedeći primjeri pokazat će učinkovitost numeričkog algoritma u rješavanju problema velikih deformacija i rotacija za ploču kao i za različite ljuskaste konstrukcije.

7.1.4 Napuhivanje kvadratne ploče

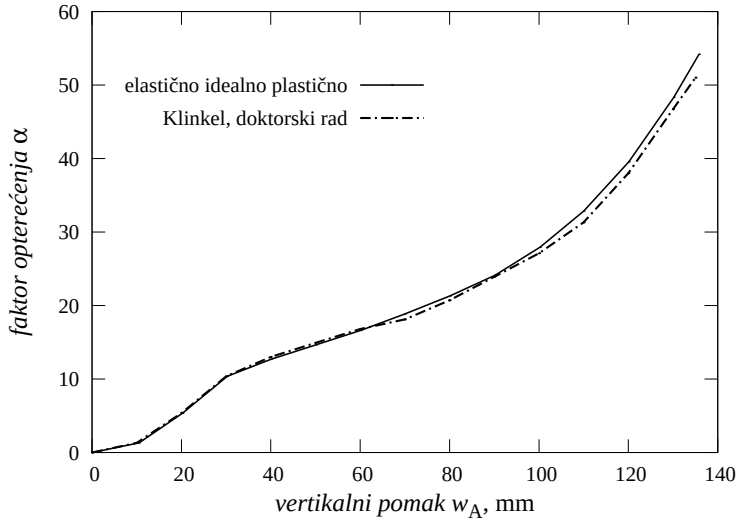
Cilj ovog primjera je razmotriti učinkovitost numeričke simulacije velikih elastoplastičnih deformacija uz pomoć izvedenog algoritma za probleme deformiranja ploča. Također, ovaj primjer je upotrijebljen kako bi se verificirali rezultati proračuna s onima koji se mogu naći u dostupnoj literaturi. Ploča je slobodno oslonjena o podlogu tj. spriječeni su samo vertikalni pomaci duž rubova dok su mogući horizontalni pomaci i rotacije, slika 7.16. Opterećena



MATERIJALNI PARAMETRI:

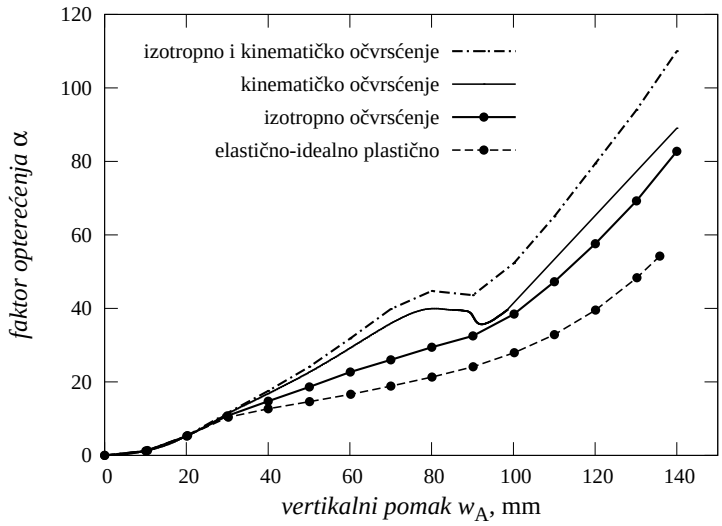
$E = 69000$ MPa, $\nu = 0,3$,
$\sigma_Y = 248$ MPa,
$H = 3000$ MPa, $c = 3000$ MPa,
$q_\circ = 0,01$ N/mm^2

Slika 7.16: NAPUHIVANJE KVADRATNE PLOČE: geometrija i materijalni parametri



Slika 7.17: NAPUHIVANJE KVADRATNE PLOČE: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u KLINKEL [2] za elastičan-idealnoplastičan slučaj

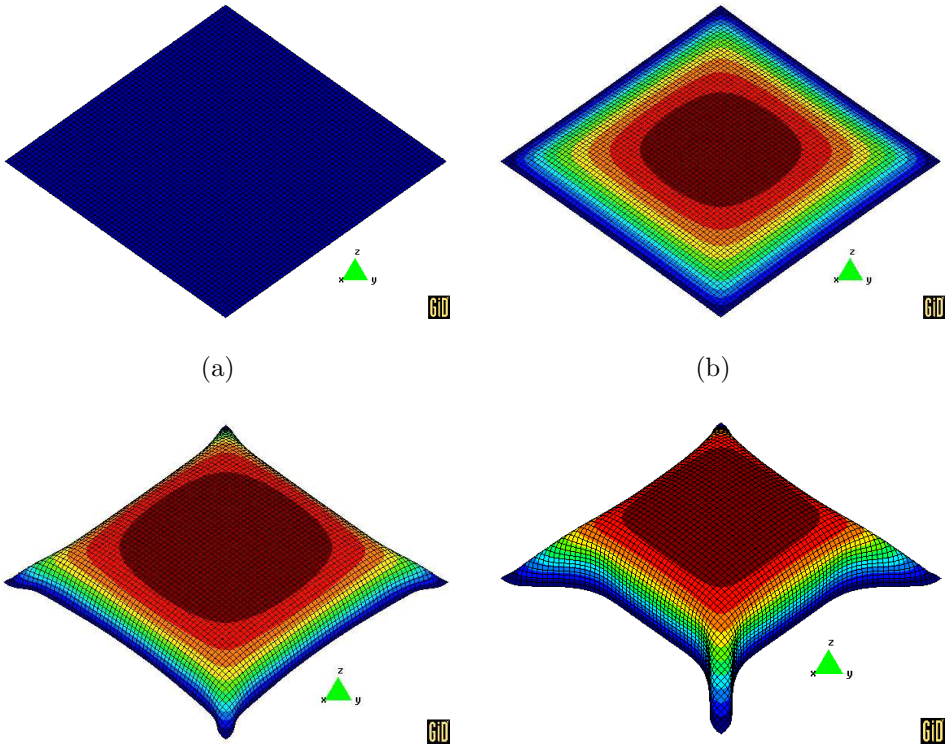
je jednolikim tlakom po površini, izražen kao $q = \alpha q_\circ$, uslijed kojeg dolazi do tzv. napuhivanja ploče. Opterećenje je konzervativno što znači da se tijekom procesa deformiranja smjer djelovanja opterećenja ne mijenja. Dimenzije ploče kao i materijalni parametri, slika 7.16 preuzeti su iz KLINKEL [2], BETSCH & STEIN [120] kako bi se dobiveni rezultati mogli usporediti s rezultatima u tim radovima. Poštujući uvjete simetrije opterećenja i geometrije, jedna četvrtina ploče je diskretizirana s 1089 konačnih elemenata (32×32).



Slika 7.18: NAPUHIVANJE KVADRATNE PLOČE: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za elastičan idealno plastičan slučaj, za slučaj izotropnog, kinematičkog očvršćenja kao i izotropnog i kinematičkog očvršćenja

Rezultati za elastičan idealno plastičan materijal ($H = 0$ MPa, $c = 0$ MPa) prikazani su u obliku dijagrama koji pokazuje odnos faktora opterećenja α i vertikalnog pomaka središnje točke A w_A. S namjerom da se verificira numerički algoritam taj rezultat je uspoređen s rezultatom koji je

dobiven pomoću numeričkog algoritma predstavljenog u KLINKEL [2]. Kao što se može vidjeti na slici 7.17 postoji dobro poklapanje krivulja, tek se neznatno razilaženje javlja nakon pomaka od 100 mm što je vjerojatno uzrokovano različitim formulacijama materijalnog modela. Nadalje, istražen je utjecaj različitih mehanizama očvršćenja na elastoplastično deformiranje materijala promatranjem položaja krivulja u $\alpha - w_A$ dijagramu. Prikazane su krivulje za elastično idealno plastični materijal, materijal s izotropnim očvršćenjem, s kinematičkim očvršćenjem i materijal koji ima oba modela očvršćenja kao što se može vidjeti na slici 7.18. Iz dijagrama se lako može



(a) (b)

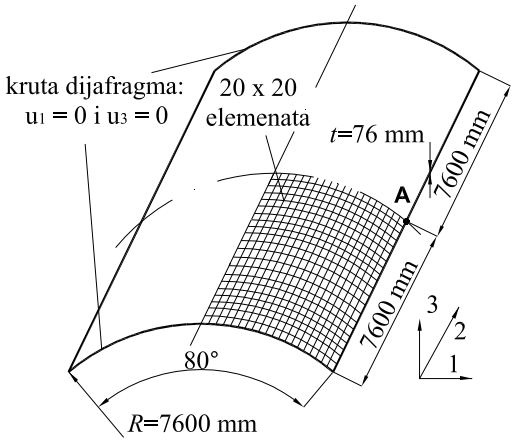
(c) (d)

Slika 7.19: NAPUHIVANJE KVADRATNE PLOČE: deformirani oblik materijala s izotropnim i kinematičkim očvršćenjem za pomak a) $w_A = 0$ mm, b) $w_A = 33$ mm, c) $w_A = 85$ mm i d) $w_A = 140$ mm

uočiti da izotropni i kinematički model dobro pokazuju očvršćenje materijala jer da bi se dobio isti pomak kao za elastično idealno plastični materijal potrebno je upotrijebiti puno veće opterećenje. Također se može primijetiti i da istovremena upotreba oba očvršćenja znatno više utječe na krivulje nego svako zasebno.

Na slici 7.19 prikazani su deformirani oblici za slučaj materijalnog modela s izotropnim i kinematičkim očvršćenjem kada je vertikalni pomak točke A jednak a) $w_A = 0$ mm, b) $w_A = 33$ mm, c) $w_A = 85$ mm i d) $w_A = 140$ mm. Iz prikazanih slika može se uočiti da s porastom pomaka w_A dolazi do povećanog tzv. gužvanja materijala u kutovima ploče. To su ustvari područja u kojima dolazi do pojačane plastifikacije i znatno je izraženiji utjecaj velikih elastoplastičnih deformacija.

7.1.5 Scordelis-Lo cilindrični krov



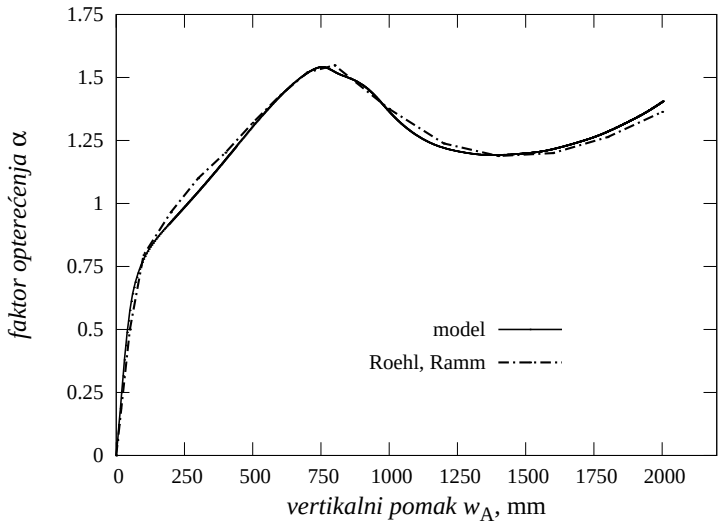
MATERIJALNI PARAMETRI:

$E = 21000$ MPa, $\nu = 0,0$,
$\sigma_Y = 4,2$ MPa,
$H = 800$ MPa, $c = 400$ MPa,
$q_\circ = 0,001$ N/mm^2

Slika 7.20: SCORDELIS-LO: a) geometrija, b) materijalni parametri

Scordelis-Lo cilindrični krov je vrlo čest primjer u literaturi (ROEHL &

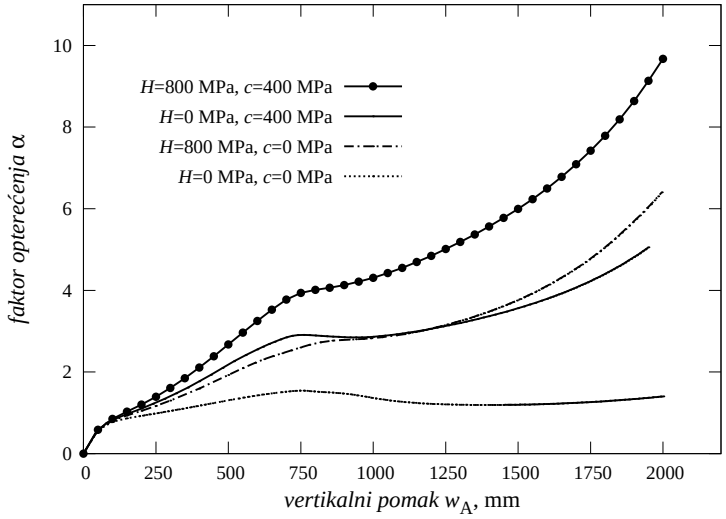
Ramm [3], Sorić et al. [4], Perić et al. [21]). Ovaj primjer je upotrijebljen kako bi se istražila učinkovitost izvedenog numeričkog algoritma kod problema gdje se javljaju velike elastoplastične deformacije na cilindričnim ljuskama. Cilindrični krov geometrije zadane slikom 7.20 opterećen je vlastitom težinom u smjeru *3*, izraženom kao umnožak faktora opterećenja α i referentne vrijednosti opterećenja $q_\circ$, $q = \alpha q_\circ$. Oba uzdužna ruba su slobodna, dok se s prednje i stražnje strane pretpostavlja postojanje krute dijafragme koje sprječava pomake u smjerovima *1* i *3*. Podaci o korištenom materijalu nalaze se na slici 7.20. Zahvaljujući simetriji opterećenja i geometrije u numeričkom proračunu koristi se samo četvrtina modela podijeljena mrežom od 20×20 konačnih elemenata.



Slika 7.21: Scordelis-Lo: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u Roehl & Ramm [3] za elastičan idealno plastičan slučaj

Rezultati proračuna prikazani su krivuljama koje pokazuju odnos faktora

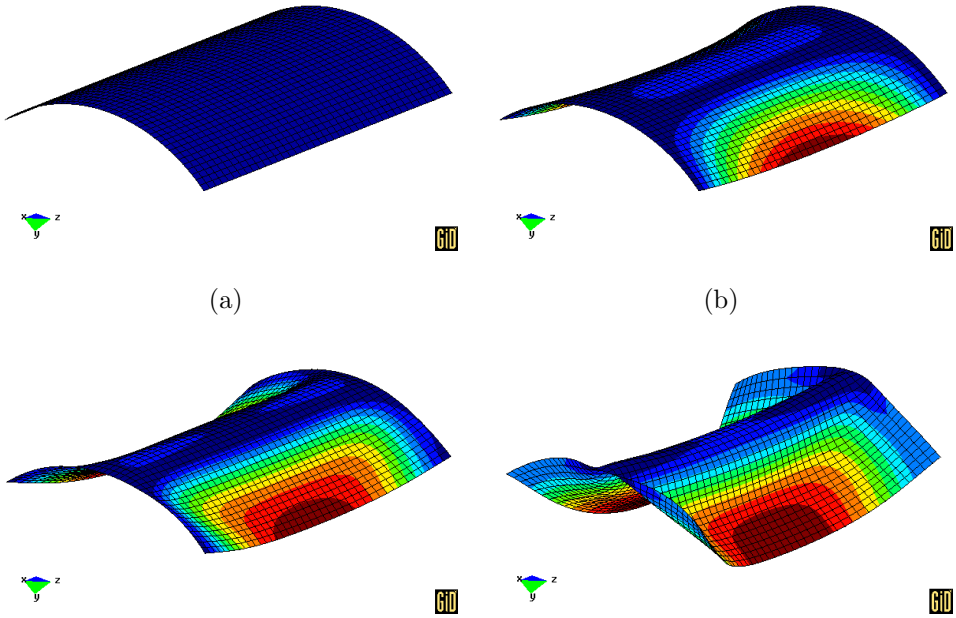
opterećenja i vertikalnog pomaka točke A (označene na slici 7.20). Kako bi se još jednom verificirao proračunski model rezultati za elastičan idealno plastičan slučaj ($H = 0$ MPa, $c = 0$ MPa) uspoređeni su s rezultatima iz Roehl & Ramm [3]. Kao što se može vidjeti na slici 7.21 postoji jako dobro poklapanje rezultata. Dijagramom na slici 7.22 napravljena je usporedba rezultata za različite mehanizme očvršćenja: bez očvršćenja ($H = 0$ MPa, $c = 0$ MPa), izotropno ($H = 800$ MPa, $c = 0$ MPa), kinematičko očvršćenje ($H = 0$ MPa, $c = 400$ MPa) i oba istovremeno ($H = 800$ MPa, $c = 400$ MPa). Kao što se može zamijetiti primjenom mehanizama očvršćenja dolazi do očekivanog porasta potrebnog opterećenja za isti pomak.



Slika 7.22: Scordelis-Lo: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za elastičan idealno plastičan slučaj, za slučaj izotropnog, kinematičkog očvršćenja kao i izotropnog i kinematičkog očvršćenja

Deformirani oblici cilindričnog krova za različite pomake prikazani su na slici 7.23. Izdvojeni su slučajevi za pomak točke A i to a) $w_A = 0$ mm, b)

$w_A = 600$ mm, c) $w_A = 1200$ mm i d) $w_A = 2500$ mm.



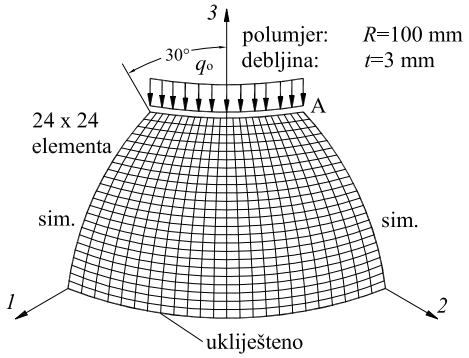
(a) (b)

(c) (d)

Slika 7.23: SCORDELIS-LO: deformirani oblik materijala s izotropnim očvršćenjem pri pomaku a) $w_A = 0$ mm, b) $w_A = 600$ mm, c) $w_A = 1200$ mm i d) $w_A = 2500$ mm

7.1.6 Polovica sfere opterećena linijskim opterećenjem

Kao test za sferne ljuskaste konstrukcije podvrgnute velikim elastoplastičnim deformacijama napravljen je numerički proračun polovice sfere. Taj primjer je također iskorišten kako bi se ovisno rubnim uvjetima ispitala pojava velikih deformacija i mogućnost njihovog proračuna ovim modelom. Kao usporedba korišteni su modeli izvedeni prema teoriji malih deformacija prema SORIĆ ET AL. [4] i TONKOVIĆ ET AL. [5] koji ne bi trebali moći točno opisati pojavu velikih deformacija.



MATERIJALNI PARAMETRI:

$E = 212000$ MPa, $\nu = 0,285$,
$\sigma_Y = 220$ MPa,
$H = 1200$ MPa, $c = 600$ MPa,
$q_\circ = 10$ N/mm

Slika 7.24: SFERA: geometrija i materijalni parametri

Polovica sfere geometrije prikazane na slici 7.24 opterećena je linijskim opterećenjem po gornjem rubu referentnog iznosa $q_\circ$ u smjeru prikazane osi *3*. Na donjem rubu sfera je ukliještena (spriječeni su svi pomaci i rotacije) dok su za gornji rub napravljeni proračuni s dvije vrste rubnih uvjeta:

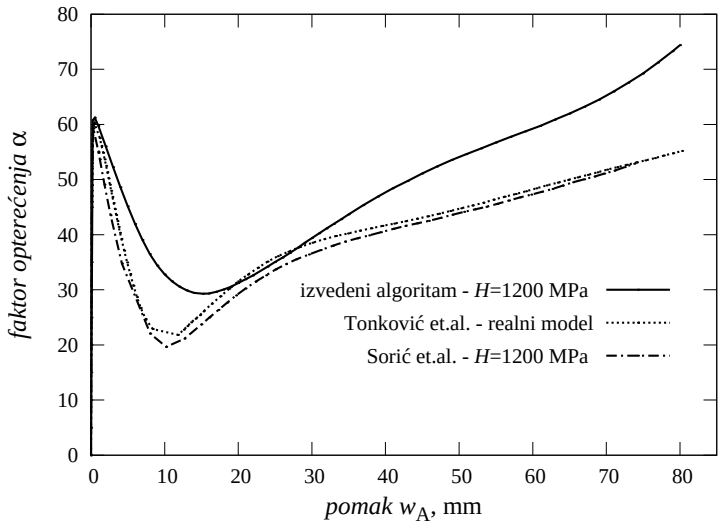
1. Na gornjem rubu su spriječeni pomaci u smjeru *1* i *2* dok su sve rotacije i pomak u smjeru *3* omogućeni, u tekstu ima oznaku SR.

2. Na gornjem rubu su spriječeni pomaci u smjeru *1* i *2* kao i sve rotacije, moguć je samo pomak u aksijalnom smjeru *3*, oznaka BR.

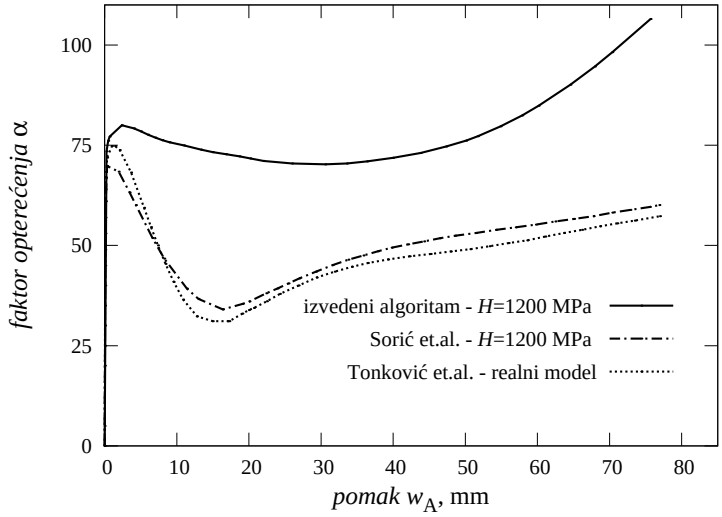
Svojstva korištenog materijala prikazana su na slici 7.24. Zahvaljujući simetriji modela i opterećenja koristi se samo četvrtina sfere koja je diskretizirana s 576 elemenata (24×24).

Rezultati za oba slučaja rubnih uvjeta prikazani su pomoću krivulja ovisnosti faktora opterećenja o vertikalnom pomaku točke A. Prvo je napravljena usporedba rezultata kada su na gornjem rubu moguće rotacije (SR) s rezultatima dobivenim pomoću numeričkih algoritama opisanih u SORIĆ ET AL. [4]

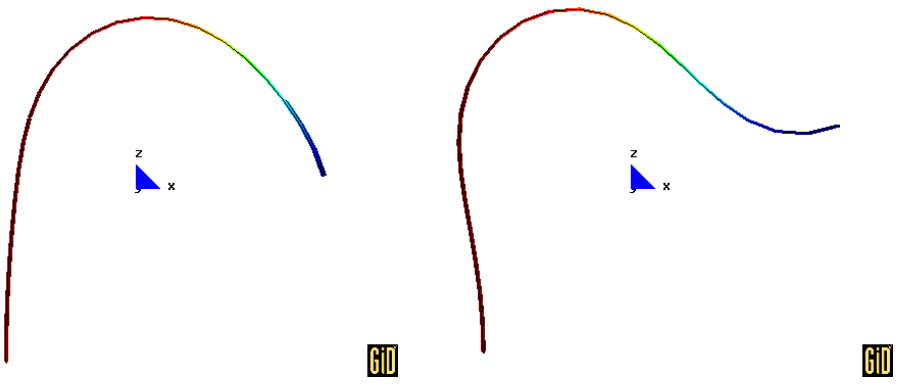
i TONKOVIĆ ET AL. [5]. Oba modela izvedena su uz pretpostavke teorije malih deformacija, a razlikuju se u načinu modeliranja mehanizama očvršćenja. Dok se u SORIĆ ET AL. [4] koristi nelinearni model izotropnog očvršćenja, sličan onome koji se koristi u materijalnom modelu izvedenom u ovom radu, i Pragerov oblik kinematičkog očvršćenja, u TONKOVIĆ ET AL. [5] ugrađen je model, prema LEHMANN [14], koji može realno opisati očvršćenje. Kao što se vidi na slici 7.25 postoji određeno nepodudaranje krivulja koje je znatnije izraženo s povećanjem pomaka (više od 40 mm). Nepodudaranje se javlja zbog utjecaja velikih deformacija koji se ne mogu opisati teorijom malih deformacija.



Slika 7.25: SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u SORIĆ ET AL. [4] and TONKOVIĆ ET AL. [5] pri izotropnom očvršćenju i uz slobodne rotacije gornjeg ruba



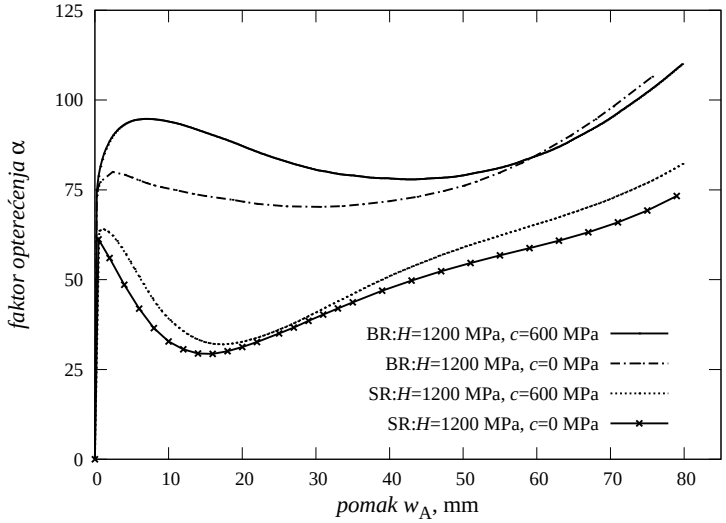
Slika 7.26: SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale s rezultatima dobivenim materijalnim modelom izloženim u SORIĆ ET AL. [4] and TONKOVIĆ ET AL. [5] pri izotropnom očvršćenju i uz spriječene rotacije gornjeg ruba



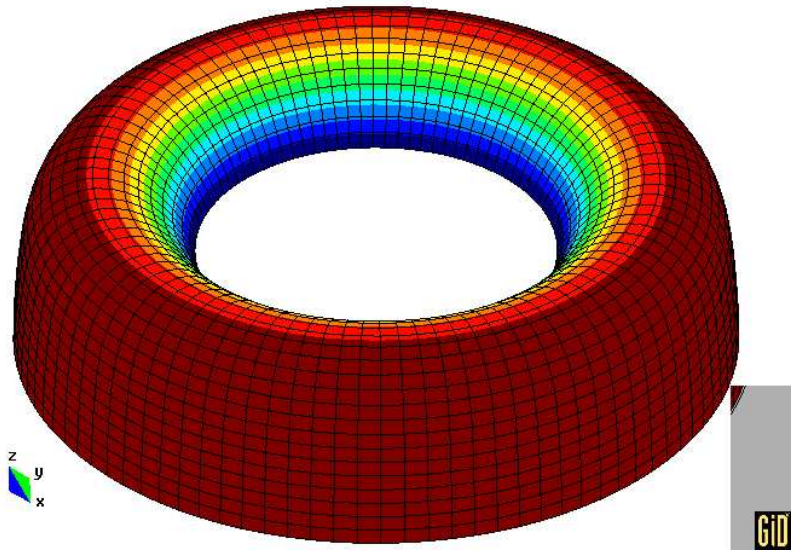
(a) (b)

Slika 7.27: SFERA: meridijalni presjek deformiranog oblika pri pomaku 55 mm za slučaj a) slobodnih rotacija gornjeg ruba i b) spriječenih rotacija gornjeg ruba

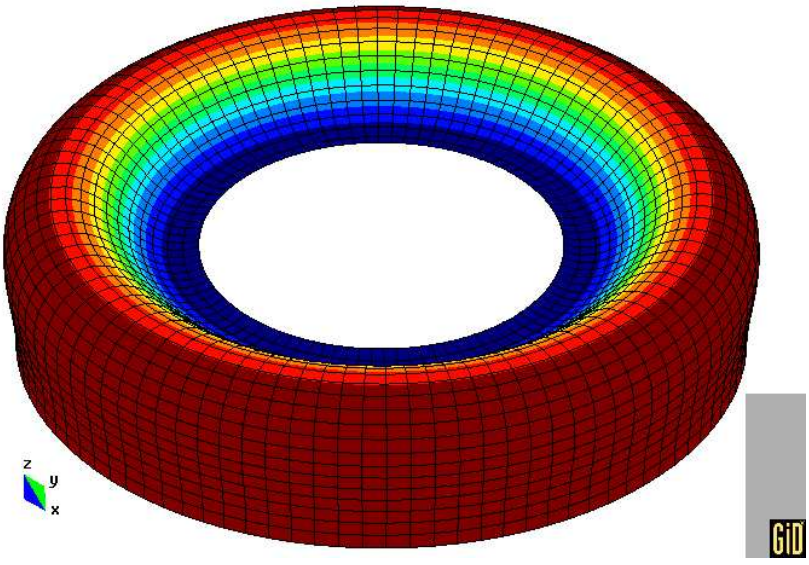
Drugi proračun je napravljen sa spriječenim rotacijama na gornjem rubu (BR). Kao što se može vidjeti iz dijagrama na slici 7.26 krivulje izvedenog materijalnog modela u potpunosti odudaraju od onih dobivenih pomoću teorije malih deformacija. Uzrok te razlike su rubni uvjeti tj. spriječene rotacije gornjeg ruba koje znatno utječu na pojavu velikih elastoplastičnih deformacija koje ne mogu biti obuhvaćene materijalnim modelima temeljenim na teoriji malih deformacija. To se može vidjeti i na prikazanim deformiranim oblicima sfere. Na slici 7.27(a) prikazan je slučaj sa slobodnim rotacijama gdje se vidi da ne postoji zakretanje gornjeg ruba već on kontinuirano ide prema dolje ovisno o opterećenju. Za razliku od toga prema slici 7.27(b) kada su spriječene rotacije dolazi do zakretanja dijela oko gornjeg ruba i to uzrokuje pojavu dodatnih velikih deformacija.



Slika 7.28: SFERA: usporedba rezultata izloženog modela za izotropne materijale za slučaj izotropnog i izotropnog i kinematičkog očvršćenja za obje vrste rubnih uvjeta



Slika 7.29: SFERA: deformirani oblik - slobodne rotacije gornjeg ruba pri pomaku 55 mm



Slika 7.30: SFERA: deformirani oblik - spriječene rotacije gornjeg ruba pri pomaku 55 mm

Na slici 7.28 prikazane su krivulje odnosa faktora opterećenja i vertikalnog pomaka gornjeg ruba za različite rubne uvjete i to za slučaj izotropnog očvršćenja kao i izotropnog i kinematičkog očvršćenja. Prikazane su samo krivulje dobivene pomoću materijalnog modela izvedenog u ovom radu. Na dijagramu se lako može uočiti da je za deformiranje sfere sa spriječenim rotacijama gornjeg ruba potrebno uložiti puno veće opterećenje nego kada su one slobodne. To se i očekivalo jer u tom slučaju dolazi do dodatnog deformiranja gornjeg ruba.

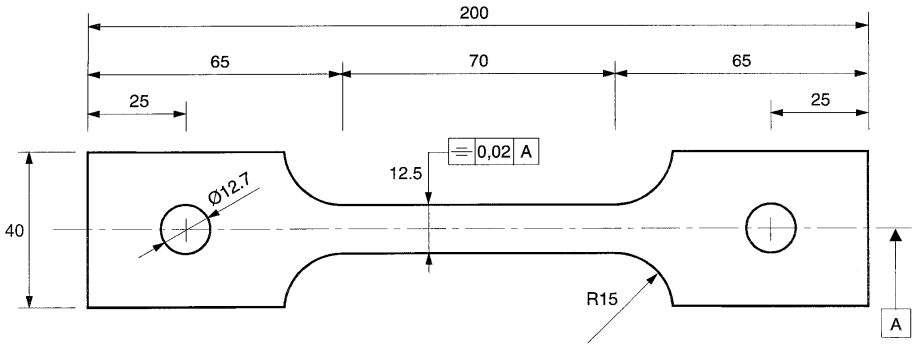
Deformirani oblik sfere pri pomaku gornjeg ruba $u_3 = 55$ mm za slučaj slobodnih rotacija gornjeg ruba može se vidjeti na slici 7.29, a za slučaj spriječenih na 7.30. Razlika u deformiranim oblicima naročito je uočljiva u načinu deformiranja gornjeg ruba.

KRITIČKI OSVRT: S posljednja tri primjera, napuhivanje kvadratne ploče 7.1.4, Scordelis-Lo cilindrični krov 7.1.5 i sfera opterećena linijskim opterećenjem 7.1.6, pokazano je da se izvedeni materijalni model može primjeniti za različite geometrije (ploče, cilindra, sfere) i da je moguće s njim opisati pojavu velikih elastoplastičnih deformacija. Također je pokazana ispravnost ugrađenih mehanizama očvršćenja što se moglo očitovati na prikazanim krivuljama odnosa opterećenja i pomaka. Napravljena je verifikacija modela usporedbom s rezultatima iz literature. Na primjeru deformiranja sfere pokazano je da se materijalnim modelima temeljenim na pretpostavkama teorije malih deformacija ne mogu točno prikazati procesi deformiranja s pojavom velikih elastoplastičnih deformacija. Dok materijalni model razvijen u ovom radu to može.

7.2 Elastoplastično deformiranje anizotropnih materijala

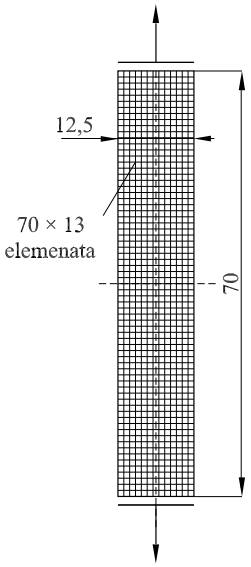
7.2.1 Jednoosno opterećena membrana

Cilj ovog primjera je usporediti rezultate koji se dobiju pomoću izvedenog numeričkog algoritma za anizotropne materijale s eksperimentalnim rezultatima iz literature. Namjera je ispitati točnost modelirane ortotropne granice tečenja.



Slika 7.31: JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: geometrija epruvete na kojoj je napravljen eksperiment, iz LADEMO ET AL. [6]

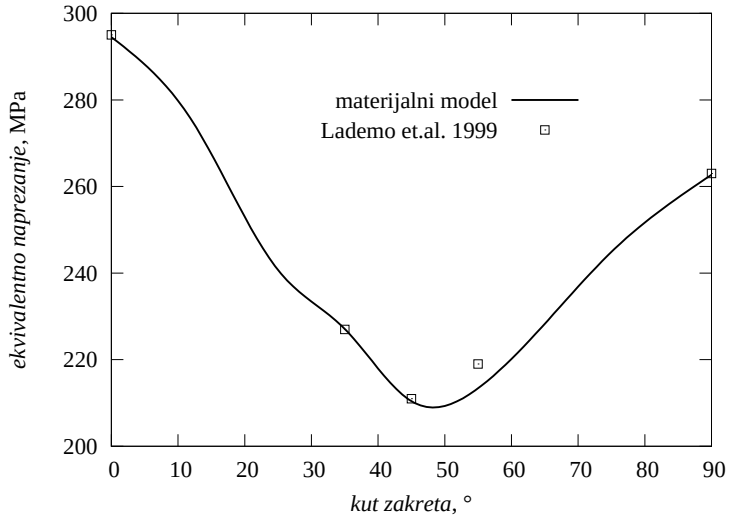
Kod ove usporedbe koriste se rezultati izloženi u LADEMO ET AL. [6], gdje je napravljen eksperiment na epruveti, slika 7.31, izrađenoj od aluminijske legure AA7108. Epruveta se jednoosno rasteže i pri tome su snimane konstante materijala. Eksperiment je napravljen za pet različitih slučajeva usmjerenosti glavnih osi ortotropije (0°, 35°, 45°, 55° i 90°) u odnosu na os epruvete. Pri numeričkoj verifikaciji izvedene formulacije napravljen je model prema slici 7.32 za koji su uzeti stvarni parametri materijala iz LADEMO ET AL. [6], slika 7.32. Ploča je diskretizirana s 70×13 elemenata.



MATERIJALNI PARAMETRI:

$E_1 = E_3 = 68135$ MPa, $E_2 = 69316$ MPa,
$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,32$,
$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 25808,7$ MPa,
$\sigma_{11}^{\mathrm{y}} = 295$, $\sigma_{22}^{\mathrm{y}} = 263$, $\sigma_{33}^{\mathrm{y}} = 216$ MPa,
$\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = 120,7$ MPa, $\sigma_{13}^{\mathrm{y}} = \sigma_{23}^{\mathrm{y}} = 140,7$ MPa,
$H = 1200$ MPa,

Slika 7.32: JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: geometrija i materijalni parametri

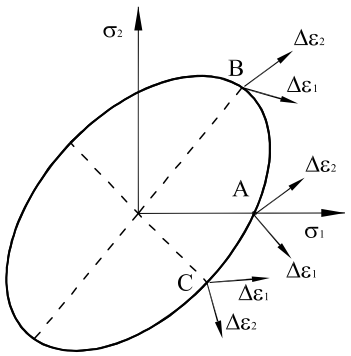


Slika 7.33: JEDNOOSNO OPTEREĆENA EPRUVETA: usporedba plohe tečenja dobivene numerički i eksperimentalno

Numerička simulacija izvedena je za različite kutove zakreta glavnih osi ortotropije u odnosu na primijenjeno opterećenje i to za 0°, 12°, 25°, 35°, 45°, 55°, 75°, i 90°. Na dijagramu prikazanom slikom 7.33 prikazane su eksperimentom izmjerene granice tečenja za različite kutove i one su uspoređene s numeričkim rezultatima. Kao što se može vidjeti postoji dobro poklapanje rezultata iz čega se može zaključiti da se izvedenim modelom za anizotropne materijale može vjerno opisati ortotropna granica tečenja.

7.2.2 *Isoerror* postupak

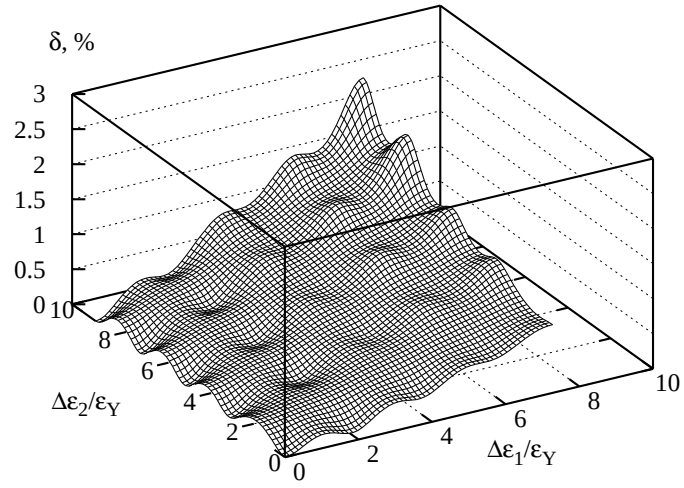
Greška numeričkog postupka pri numeričkoj integraciji može se utvrditi primijenom *isoerror* postupka. Sam postupak nije u potpunosti matematički određen, ali omogućava brzi numerički uvid u točnost lokalne iteracije. Metoda je opisana u radu Simo & Taylor [7]. Izabrana su tri karakteristična položaja na plohi tečenja, slika 7.34. Točka A označava jednoosno naprezanje, točka B dvoosno naprezanje i točka C čisto smicanje. Ovisno o testu koji se izvodi, element je doveden do stanja naprezanja označena točkom A, B ili



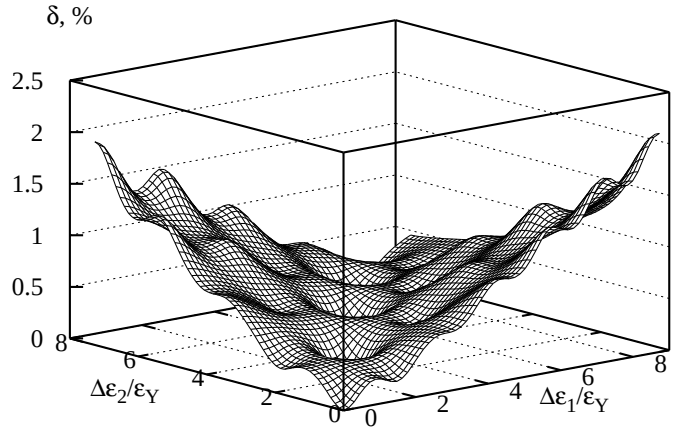
Materijalni parametri:

$E_1 = 48042,7$ MPa, $E_2 = E_3 = 41800$ MPa
$\nu_{12} = 0,2355$, $\nu_{13} = 0,258$, $\nu_{23} = 0,24$,
$G_{12} = 14214$ MPa, $G_{13} = G_{23} = 14804$ MPa,
$\sigma_{11}^{\mathrm{y}} = 180$ MPa, $\sigma_{22}^{\mathrm{y}} = 220$ MPa, $\sigma_{33}^{\mathrm{y}} = 250$ MPa,
$\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = 187$ MPa, $\sigma_{13}^{\mathrm{y}} = \sigma_{23}^{\mathrm{y}} = 127$ MPa,

Slika 7.34: Isoerror postupak: ploha tečenja s točkama opterećenja A, B i C, prema Simo & Taylor [7]



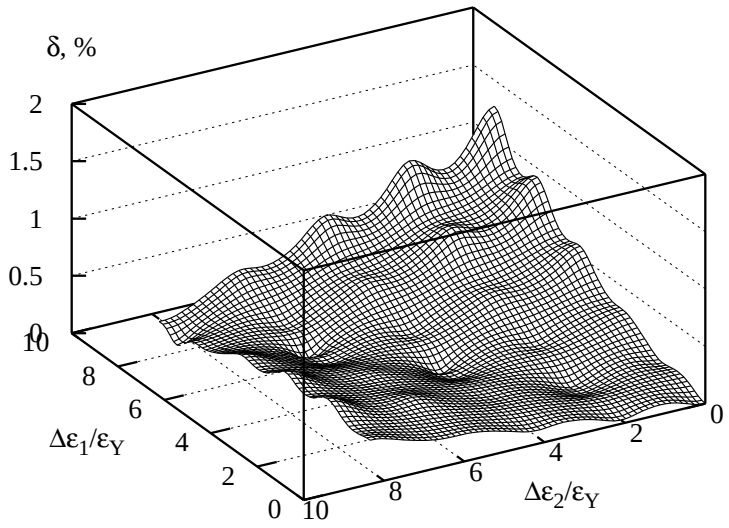
Slika 7.35: ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj A



Slika 7.36: ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj B

C, a nakon toga su mu narinute različite kombinacije inkremenata deformacije $(\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2)$. Ti inkrementi deformacije prvo se nanose u jednom koraku. Tako dobiveno naprezanje označeno je s $\mathbf{S}$. Nakon toga, traži se 'točan' iznos naprezanja $\mathbf{S}_*$ tako da se isti inkrementi deformacije ostvaruju ne više u jednom koraku već u puno malih podinkrementa. Potrebno je odrediti broj tih podinkrementa. To se radi tako da se povećava njihov broj sve dok promjena naprezanja između dva povećanja ne bude zanemariva u odnosu na sam iznos naprezanja $\Delta\mathbf{S}_*/\mathbf{S}_* \approxeq 0$. U ovom slučaju 'točno' rješenje se uzima za slučaj napravljenih 1000 podinkremenata. Greška numeričkog postupka δ izražena je kao relativni srednji korijen razlike između rješenja dobivenog u jednom koraku ($\mathbf{S}$) i 'točnog' rješenja ($\mathbf{S}_*$) i to prema sljedećem izrazu

$$\delta = \frac{\sqrt{[(\mathbf{S}-\mathbf{S}_*):(\mathbf{S}-\mathbf{S}_*)]}}{\sqrt{(\mathbf{S}_*:\mathbf{S}_*)}} \times 100. \tag{7.1}$$



Slika 7.37: ISOERROR POSTUPAK: Numerička greška integracijskog postupka u ovisnosti o primijenjenim inkrementima deformacije - slučaj C

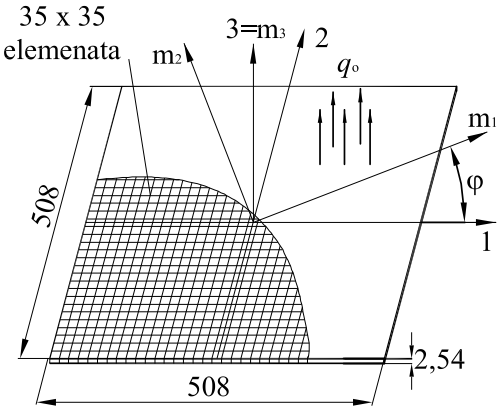
Navedenim postupkom ispitivana je greška izvedenog numeričkog modela za anizotropne materijale, parametri se mogu naći na slici 7.34. Za svaki par inkremenata deformacije $(\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2)$ nađena su pripadna naprezanja $\mathbf{S}$ i $\mathbf{S}_*$ i onda je prema formuli (7.1) izražena greška δ. Rezultati su prikazani u 3D dijagramima. Bazu tih dijagrama čine različiti parovi inkremenata deformacije koji su normalizirani s deformacijom koja se javlja kod granice tečenja (ε_Y). Greška δ izražena u postotcima nanosi se na vertikalnu os. Testom A, prema slici 7.35, može se vidjeti da je najveći iznos greške manji od 2,5% što je vrlo prihvatljiva vrijednost. Prikazane plohe za testove B i C, prema slikama 7.36 i 7.37, pokazuju simetričnost greške s obzirom na dijagonalu koja predstavlja linija $\Delta\varepsilon_1/\epsilon_Y = \Delta\varepsilon_2/\epsilon_Y$. To je bilo i za očekivati s obzirom na položaj točaka B i C na plohi tečenja. Greška ovdje također ne prelazi vrijednost od 2%. Prikazani rezultati pokazuju da je izvedeni numerički algoritam integracije konstitutivnih jednadžbi vrlo točan jer relativna greška u svim testovima ne prelazi vrijednost od 3%.

7.2.3 'Napuhivanje' kvadratne ploče

Kvadratna ploča upotrijebljena je kao testni primjer izvedenog materijalnog modela pri elastoplastičnom deformiranju anizotropnih materijala. Ploča iste geometrije, ali od izotropnog materijala već je razmotrena u primjeru 7.1.4. Napravljena je analiza utjecaja zakreta materijalnih osi na deformirani oblik.

Kvadratna ploča, geometrije prikazane na slici 7.38, podvrgnuta je jednolikom opterećenju po površini (konzervativno opterećenje - ne mijenja smjer tijekom procesa deformiranja) u smjeru *3*. Ploča je slobodno oslonjena o podlogu, što znači da su spriječeni pomaci u smjeru *3* dok su pomaci u smjerovima *1* i *2* kao i rotacije omogućene. U proračunu se koristi materijal s parametrima zadanim na slici 7.38. Kao što se može vidjeti, to je i elastično

kao i neelastično ortotropan materijal. Na slici 7.38 mogu se zamijetiti dva koordinatna sustava *123* i $m_1m_2m_3$. Sustav $m_1m_2m_3$ označava pravce glavnih osi ortotropije. Tijekom proračuna on se zakreće za kutove φ =0°, 30°, 45° i 60° u odnosu na koordinatni sustav *123*. Zbog toga ne postoji ravnina simetričnosti svojstava materijala i geometrije pa se ne mogu koristiti uvjeti simetrije. Ploča je podijeljena mrežom od 1225 (35×35) konačnih elemenata.

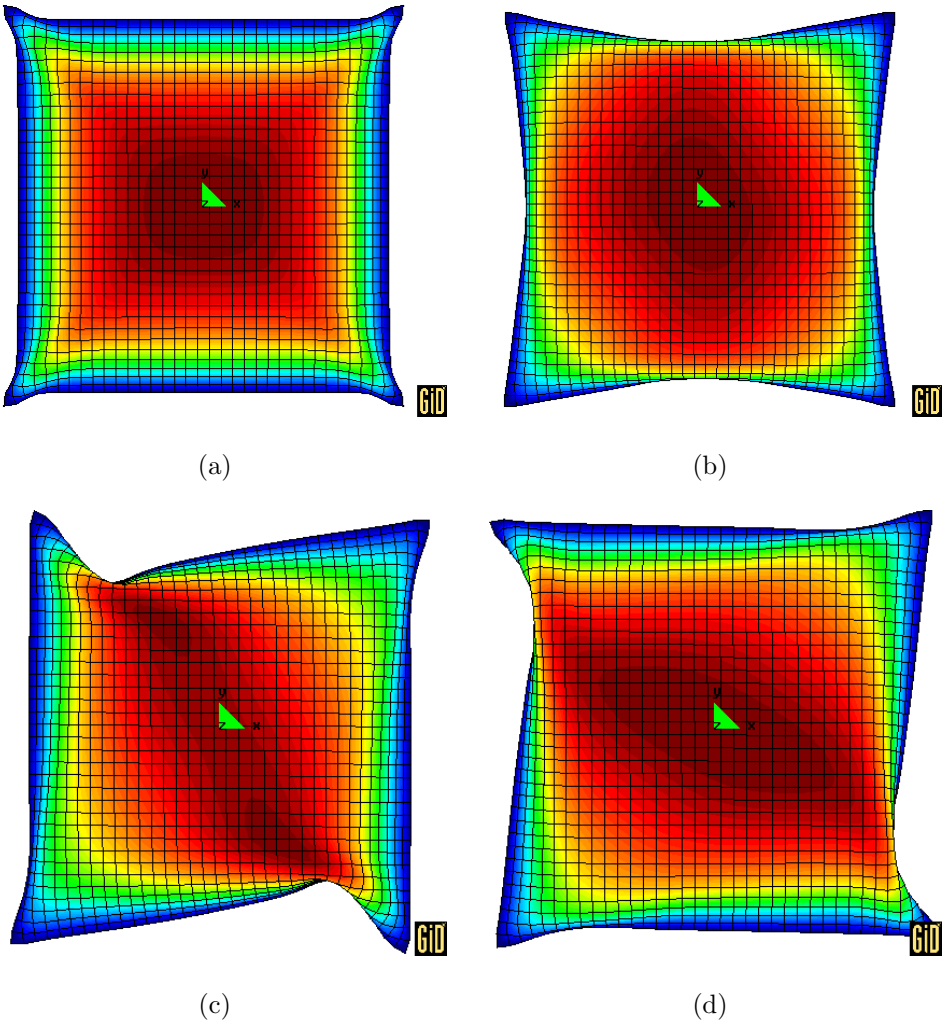


Materijalni parametri:

$E_1 = 210$ GPa, $E_2 = E_3 = 84$ GPa
$\nu_{12} = 0,229$, $\nu_{13} = 0,243$, $\nu_{23} = 0,19$,
$G_{12} = G_{13} = 42$ GPa, $G_{23} = 81$ GPa,
$\sigma_{11}^{\mathrm{y}} = 585$, $\sigma_{22}^{\mathrm{y}} = 810$, $\sigma_{33}^{\mathrm{y}} = 360$ MPa,
$\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = 286$, $\sigma_{13}^{\mathrm{y}} = 234$, $\sigma_{23}^{\mathrm{y}} = 260$ MPa,
$H = 2000$ MPa,
$q_{\mathrm{o}} = 1$ MPa.

Slika 7.38: Anizotropna kvadratna ploča: geometrija i materijalni parametri

Deformirani oblici za izračunate kutove φ prikazani su na slici 7.39. Na slikama područja iste boje imaju isti vertikalni pomak. Kao što se vidi iz slika s promjenom kuta zakreta materijalnih osi mijenja se i deformirani oblik. Ovim primjerom pokazano je da se izvedeni anizotropni materijalni model može primijeniti na probleme deformiranja ploča napravljenih od anizotropnih materijala.



(a) (b)

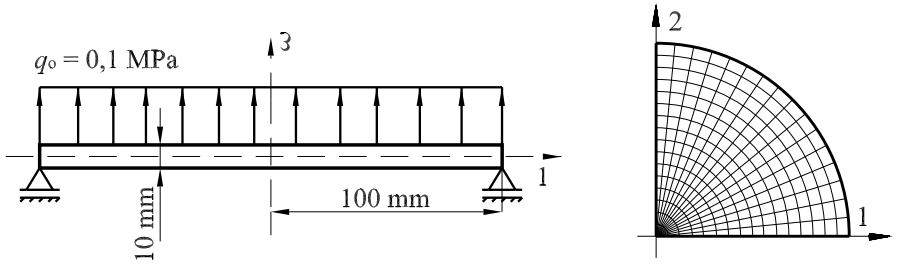
(c) (d)

Slika 7.39: ANIZOTROPNA KVADRATNA PLOČA: deformirana konfiguracija pri zakretu materijalnih osi za a) 0°, b) 30°, c) 45° i d) 60°

7.2.4 'Napuhivanje' kružne ploče

Slijedećim primjerom ispitano je da li je moguće izvedenim numeričkim algoritmom računati anizotropno ponašanje kod kružnih ploča. U obzir se uzima samo ortotropno neelastično ponašanje pri čemu se variraju parametri koji opisuju granicu tečenja i promatra se utjecaj na deformirani oblik. Kružna ploča, geometrije zadane slikom 7.40, opterećena je konzervativnim

opterećenjem u smjeru osi *3*. Korištena je geometrija i materijalni parametri kao u radu EIDEL & GRUTTMANN [83]. Duž ruba, ploča ima spriječene pomake samo u smjeru osi *3* tako da su mogući pomaci u smjerovima *1* i *2* kao i sve rotacije. Zahvaljujući geometrijskoj simetriji i simetriji materijalnih podataka, diskretizirana je četvrtina ploče s 16×16 elemenata.



Slika 7.40: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: geometrija modela

Korišteni materijal ima modul elastičnosti $E = 206900$ MPa, Poissonov koeficijent $\nu = 0,29$, koeficijent izotropnog očvršćenja $H = 2000$ MPa dok su materijalni parametri za ortotropnu granicu tečenja

$$\sigma_{11}^{\mathrm{y}} = \sigma_{22}^{\mathrm{y}} = \sigma_{33}^{\mathrm{y}} = 450 \text{ MPa},$$

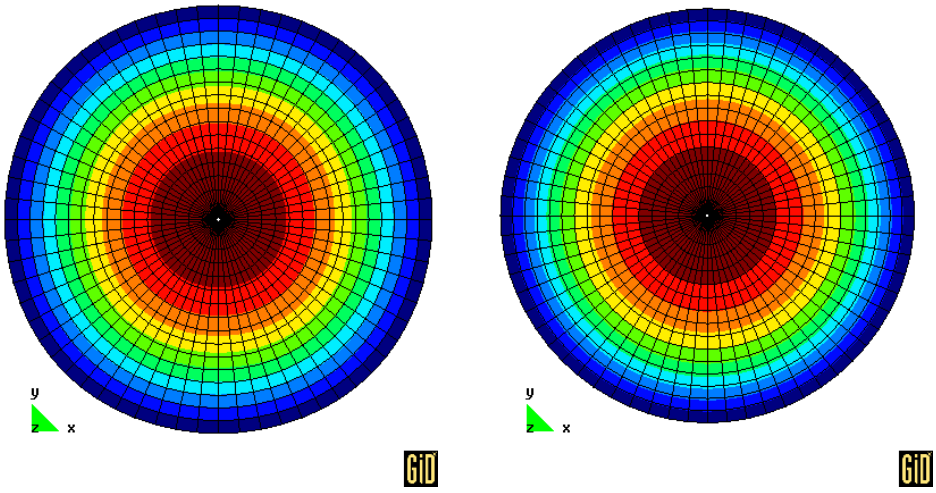
$$\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = \sigma_{13}^{\mathrm{y}} = \sigma_{23}^{\mathrm{y}},$$

materijal A: $\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_{11}^{\mathrm{y}}}{\sqrt{3}}$,

materijal B: $\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = \frac{\sigma_{11}^{\mathrm{y}}}{\sqrt{3}}$,

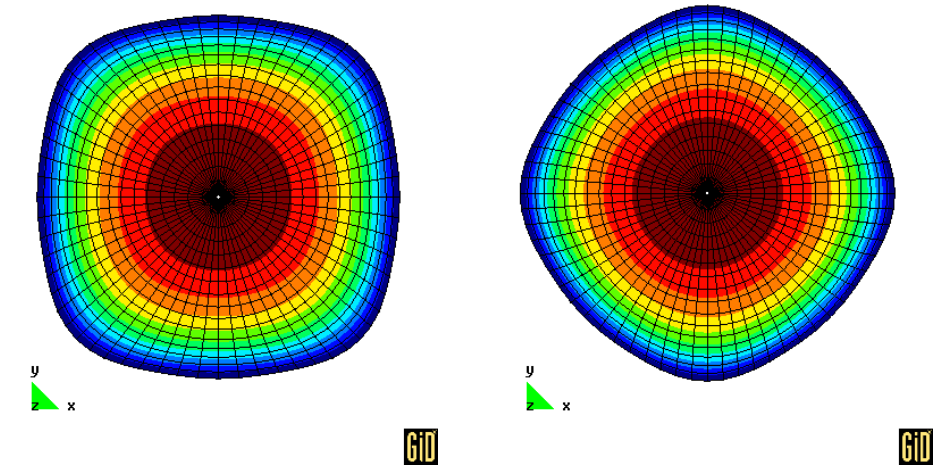
materijal C: $\sigma_{12}^{\mathrm{y}} = 2 \times \frac{\sigma_{11}^{\mathrm{y}}}{\sqrt{3}}$.

Kao što se može vidjeti promatra se slučaj s izotropnim elastičnim ponašanjem materijala i ortotropnom granicom tečenja. Razmatrana su tri različita materijala koji se razlikuju po vrijednosti posmičnih granica tečenja.



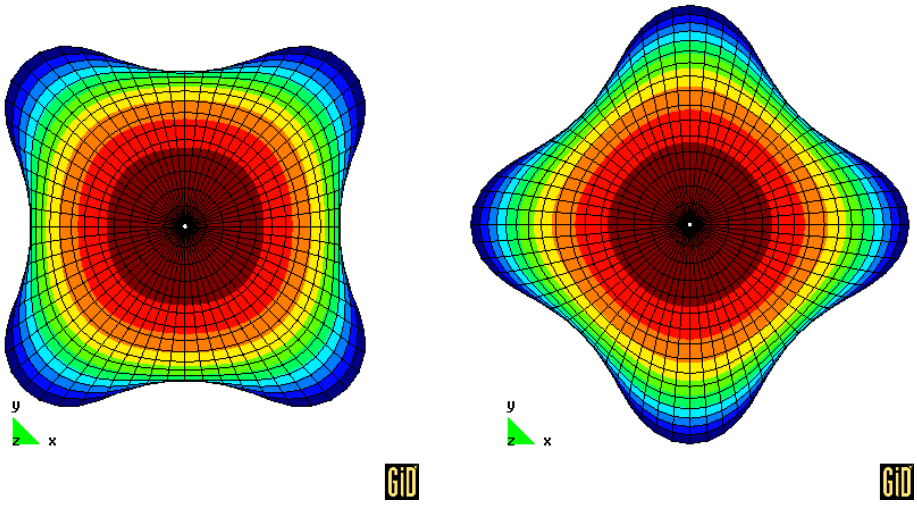
(a) (b)

Slika 7.41: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 25 mm za a) materijal A i b) materijal C



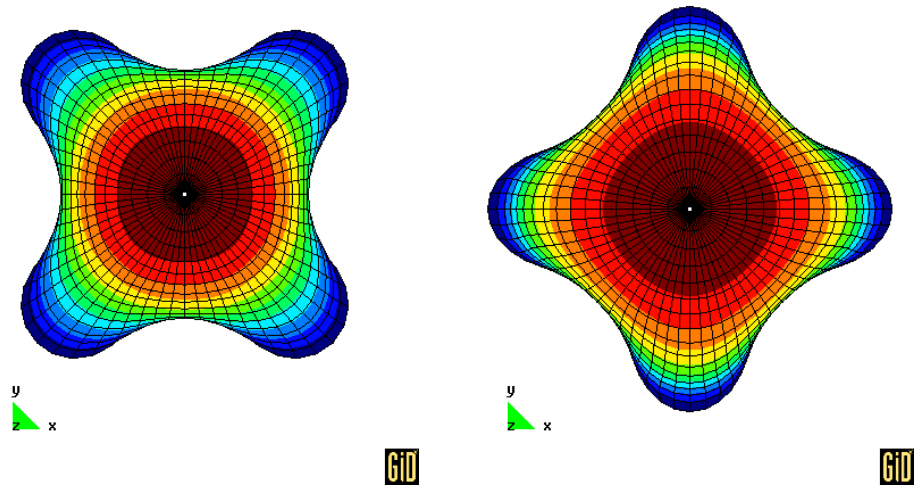
(a) (b)

Slika 7.42: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 50 mm za a) materijal A i b) materijal C



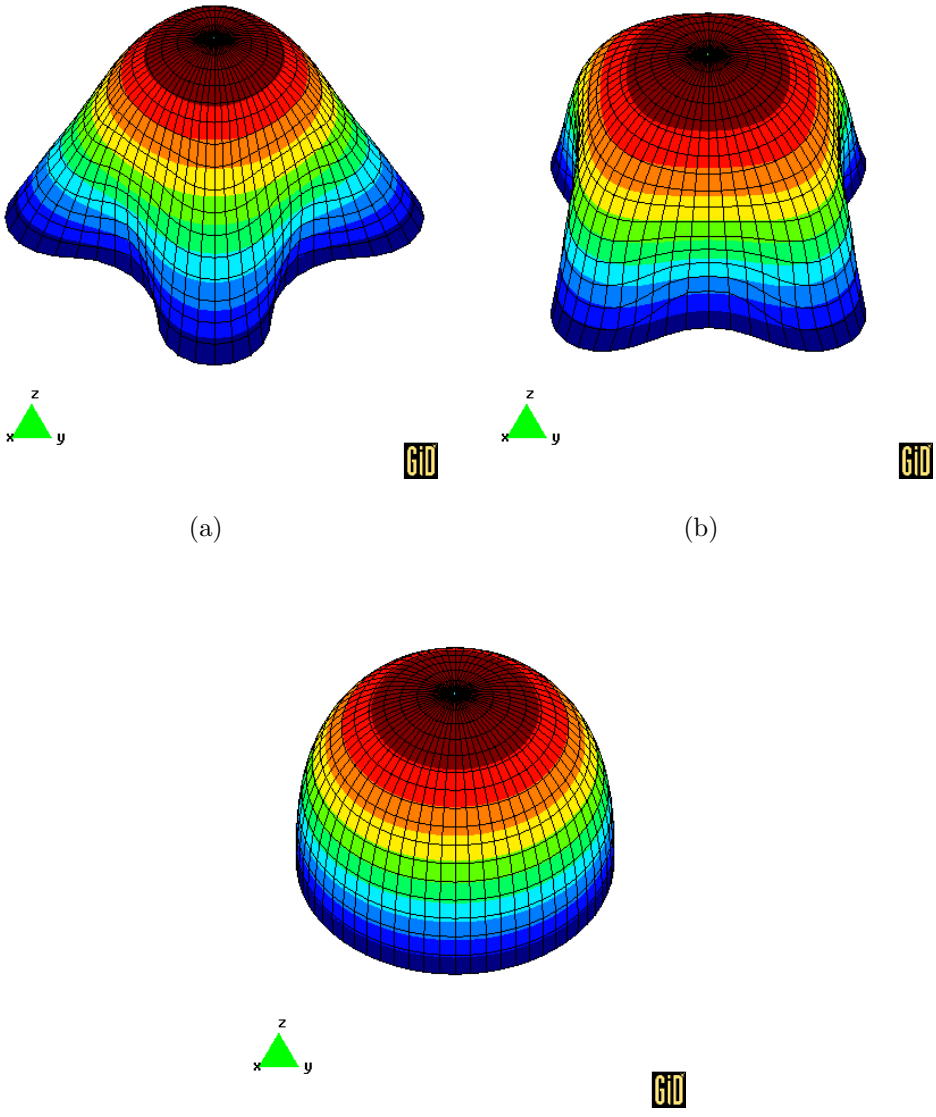
(a) (b)

Slika 7.43: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik pri pomaku središnje točke 75 mm za a) materijal A i b) materijal C



(a) (b)

Slika 7.44: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: deformirani oblik na kraju procesa deformiranja za a) materijal A i b) materijal C



(a) (b)

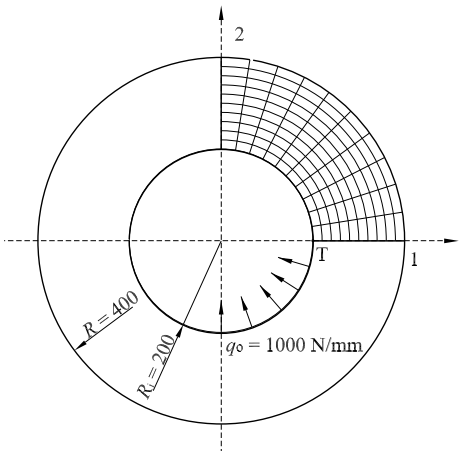
(c)

Slika 7.45: 'NAPUHIVANJE' KRUŽNE PLOČE: izometrijska projekcija deformirane konfiguracije za a) materijal A, b) materijal C i c) materijal B

Kao referentni slučaj koristi se materijal B koji je ujedno i izotropni slučaj. Materijal A ima polovičnu vrijednost posmičnih granica tečenja dok materijal C ima dvostruku vrijednost. Na slikama 7.41, 7.42, 7.43 i 7.44 prikazani su deformirani oblici za promatrani primjer i to usporedno za materijal C i materijal A pri pomaku središnje točke u iznosima od 25 mm, 50 mm, 75 mm i za krajnju deformaciju (95 mm). Na tim slikama se može uočiti povećanje plastičnih deformacija za materijal A u smjeru koji se nalazi pod kutom od 45° u odnosu na početni koordinatni sustav dok se kod materijala C ta koncentracija plastičnih deformacija javlja u smjeru koordinatnih osi. Deformirani oblici imaju isti oblik kao oni prikazani u Eidel & Gruttmann [83]. Iz prikazanog se lako vidi da se pomoću izvedene formulacije može pravilno modelirati anizotropno ponašanje materijala. Slika 7.45 pokazuje deformirani oblik za sva tri materijala u izometrijskoj projekciji.

7.2.5 Kružna ploča opterećena radijalnim linijskim opterećenjem

Ovaj primjer se koristi kao simulacija procesa dubokog vučenja bez korištenja kontaktnih konačnih elemenata. Primjer je uzet iz Papadopoulos & Lu [75]. Kružna ploča s koncentričnom rupom prikazana na slici 7.46 opterećena je radijalno usmjerenim opterećenjem referentnog iznosa $q_\circ = 1000$ N/mm. Ploča ima spriječene pomake u smjeru osi *3* tako da se javljaju samo ravninske deformacije. Zahvaljujući simetriji geometrije i materijalnih podataka proračunava se samo četvrtina modela koja je podijeljena s 10×10 konačnih elemenata. Razmatraju se tri materijala; izotropni (materijal B) i dva ortotropna slučaja (materijal A i C). Materijalni parametri zadani su slikom 7.46 i kao što se može zamijetiti to su elastično izotropni materijali s ortotropnom granicom tečenja.

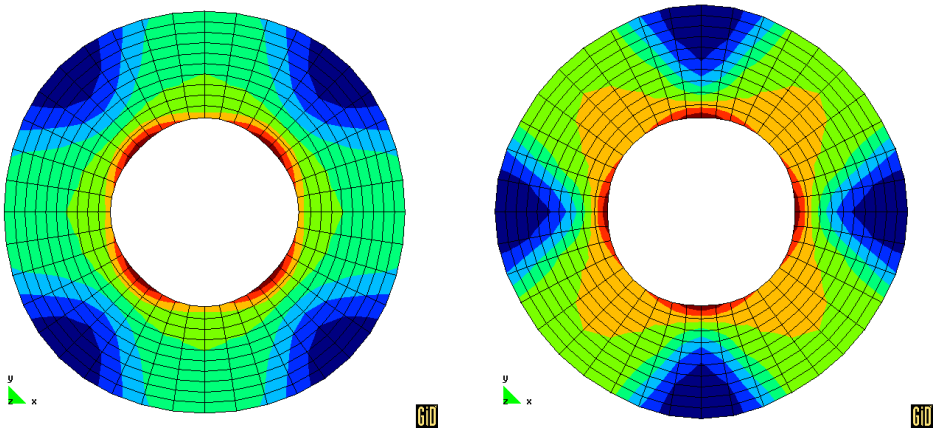


MATERIJALNI PARAMETRI:

$E = 69$ GPa, $\nu = 0,29$,
$\sigma^{\mathrm{y}}_{11} = \sigma^{\mathrm{y}}_{22} = \sigma^{\mathrm{y}}_{33} = 450$ MPa,
$\sigma^{\mathrm{y}}_{12} = \sigma^{\mathrm{y}}_{13} = \sigma^{\mathrm{y}}_{23}$,
materijal A: $\sigma^{\mathrm{y}}_{12} = 0,8 \times \frac{\sigma^{\mathrm{y}}_{11}}{\sqrt{3}}$,
materijal B: $\sigma^{\mathrm{y}}_{12} = \frac{\sigma^{\mathrm{y}}_{11}}{\sqrt{3}}$,
materijal C: $\sigma^{\mathrm{y}}_{12} = 2 \times \frac{\sigma^{\mathrm{y}}_{11}}{\sqrt{3}}$,
$H = 1000$ MPa.

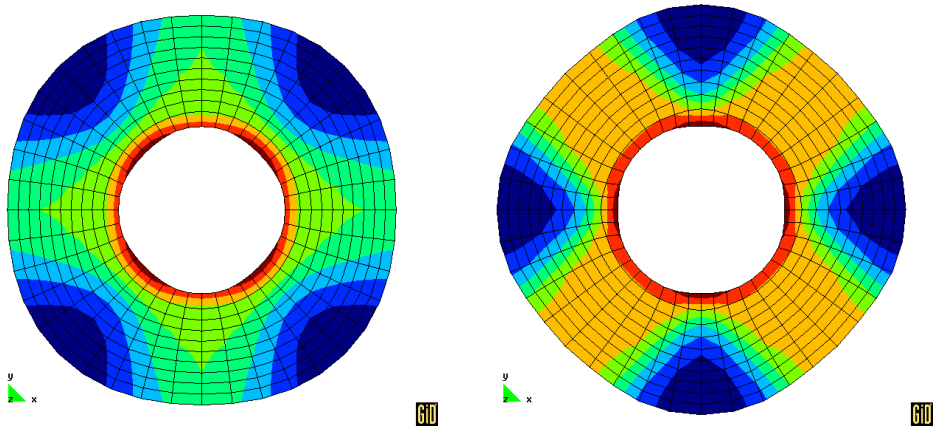
Slika 7.46: RADIJALNO OPTEREĆENA PLOČA: geometrija i materijalni parametri

Na slikama 7.47, 7.48 i 7.49 prikazani su deformirani oblici za materijal A i C pri radijalnom pomaku točke T od 20, 40 i 59 mm. Kao što je bilo za očekivati, u skladu s prethodnim primjerom, u slučaju A plastične deformacije se grupiraju u smjeru koji je pod 45° u odnosu na početni koordinatni sustav. S druge strane to grupiranje kod materijala C se javlja u pravcu početnih materijalnih osi. U oba slučaja (materijali A i C) može se primijetiti da se deformirani oblik ne poklapa s onim za izotropni materijal. Naime, kod izotropnih materijala, zbog jednolikog radijalnog opterećenja, dolazi do jednolikog radijalnog pomaka dok se kod ortotropnih materijala taj pomak ne poklapa s opterećenjem. To pokazuje da početna anizotropna struktura materijala utječe na deformirani oblik. Dijagram odnosa faktora opterećenja prema radijalnom pomaku točke T prikazan je na slici 7.50. Kao što se i očekivalo krivulja za materijal C nalazi se iznad krivulje za izotropni materijal B pošto ima dvostruko veću posmičnu granicu tečenja dok se krivulja za materijal A nalazi ispod jer ima manju posmičnu granicu tečenja od izotropnog materijala.



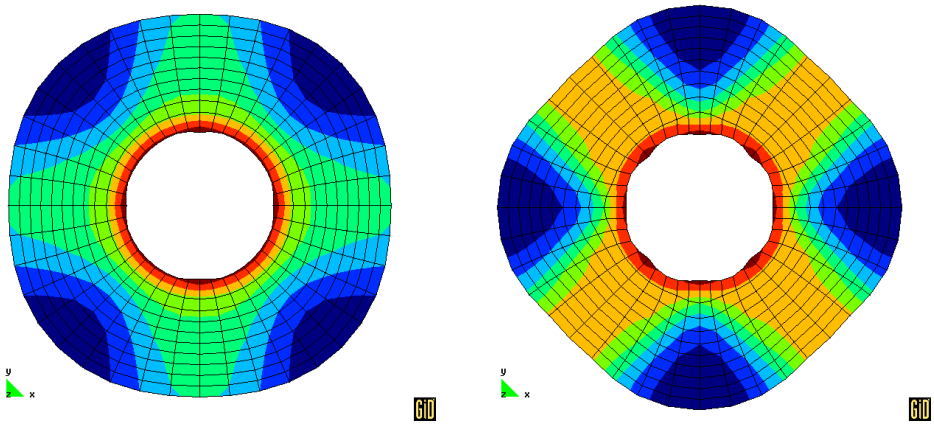
(a) (b)

Slika 7.47: RADIJALNO OPTEREĆENA PLOČA: deformirani oblik pri pomaku točke T od 20 mm za a) materijal A i b) materijal C



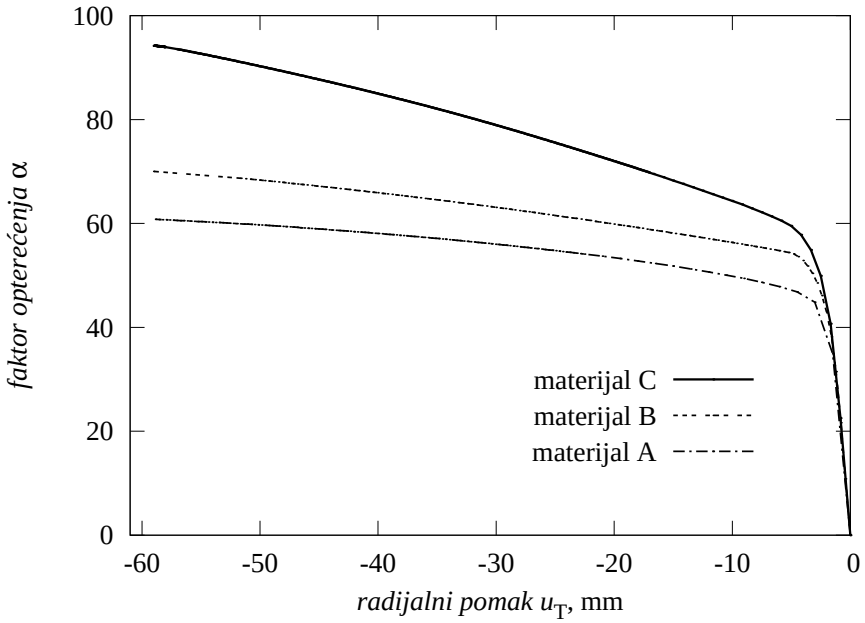
(a) (b)

Slika 7.48: RADIJALNO OPTEREĆENA PLOČA: deformirani oblik pri pomaku točke T od 40 mm za a) materijal A i b) materijal C



(a) (b)

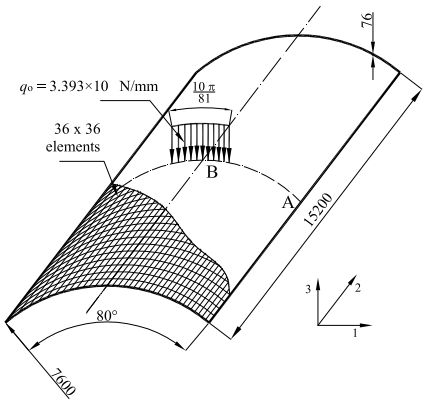
Slika 7.49: RADIJALNO OPTEREĆENA PLOČA: deformirani oblik pri pomaku točke T od 59 mm za a) materijal A i b) materijal C



Slika 7.50: RADIJALNO OPTEREĆENA PLOČA: dijagram ovisnosti faktora opterećenja o radijalnom pomaku točke T za materijale A, B i C

7.2.6 Cilindrični krov opterećen linijskim opterećenjem

Izvedeni algoritam za elastično i neelastično ortotropno ponašanje materijala testiran je na primjeru cilindrične ljuske. Istražen je utjecaj zakreta materijalnih osi na deformirani oblik.

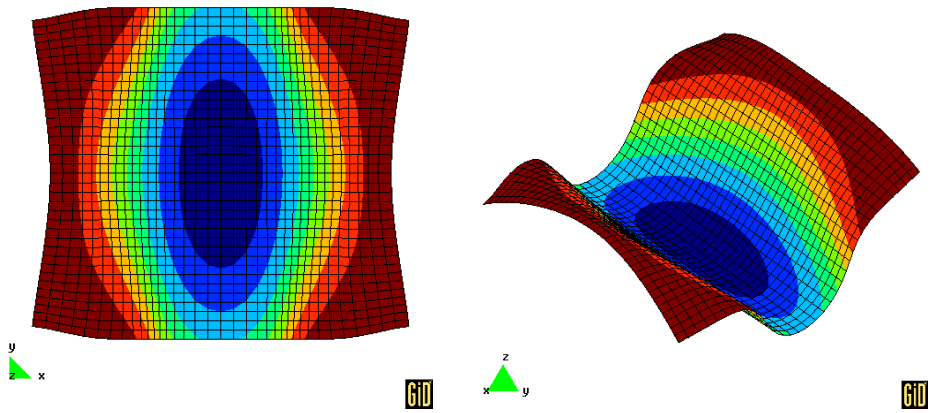


Materijalni parametri:

$E_1 = 48042,7$, $E_2 = E_3 = 11800$ MPa
$\nu_{12} = 0,2355$, $\nu_{13} = 0,058$, $\nu_{23} = 0,34$,
$G_{12} = 4214$, $G_{13} = G_{23} = 4804$ MPa,
$\sigma^{\mathrm{y}}_{11} = \sigma^{\mathrm{y}}_{22} = \sigma^{\mathrm{y}}_{33} = 220$ MPa,
$\sigma^{\mathrm{y}}_{12} = \sigma^{\mathrm{y}}_{13} = \sigma^{\mathrm{y}}_{23} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma^{\mathrm{y}}_{11}}{\sqrt{3}}$,
$H = 800$ MPa,
$q_\circ = 3,393 \times 10^{-4}$ N/mm.

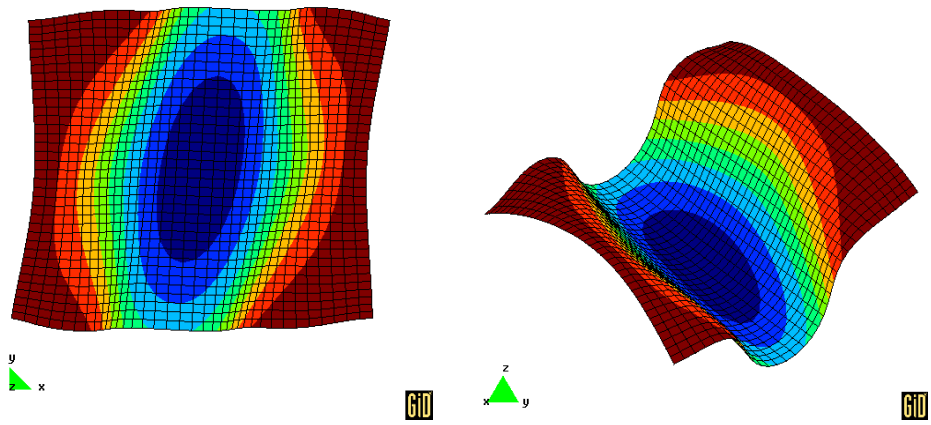
Slika 7.51: Cilindrični krov: geometrija i materijalni parametri

Cilindrični krov zadan slikom 7.51 opterećen je linijskom opterećenjem na duljini $\frac{10}{81}\pi$ referentnog iznosa $q_\circ = 3,393 \times 10^{-4}$. Primjer je preuzet iz rada Sansour & Kollmann [79]. Prednja i stražnja strana cilindra poduprte su krutim dijafragmama koje sprječavaju pomake u smjerovima *1* i *3*. Posebno se promatraju vertikalni pomaci točaka A i B. Na cilindru se razlikuju glavne osi *1*, *2* i *3* i materijalne osi koje se zakreću u odnosu na njih za kuteve 0°, 30°, 45° i 60°. Bitno je naglasiti da se materijalne osi zadaju u lokalnom koordinatnom sustavu koji prati zakrivljenost cilindra. Cilindar je diskretiziran mrežom od 1296 konačnih elemenata (36×36). U proračunu se koristi i elastično i neelastično ortotropan materijal čiji su materijalni parametri prikazani na slici 7.51.



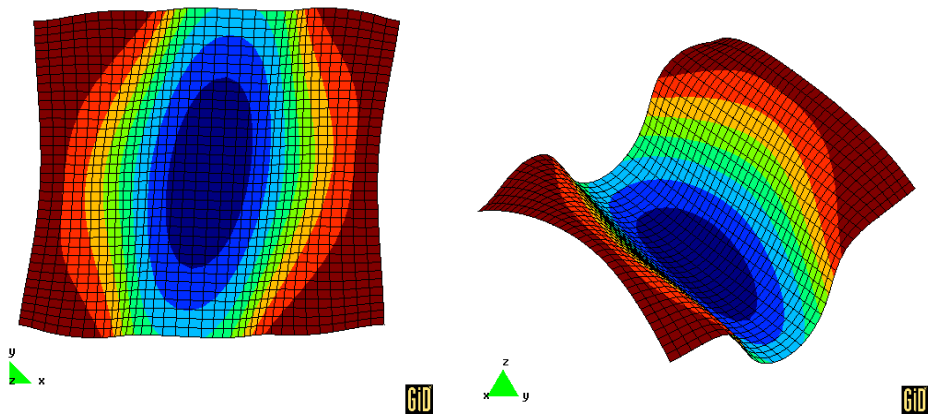
(a) (b)

Slika 7.52: CILINDRIČNI KROV: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 0° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz



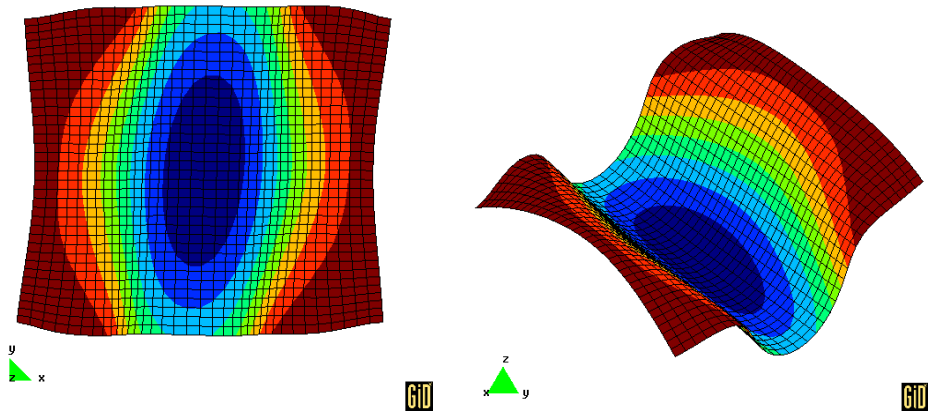
(a) (b)

Slika 7.53: CILINDRIČNI KROV: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 30° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz



(a) (b)

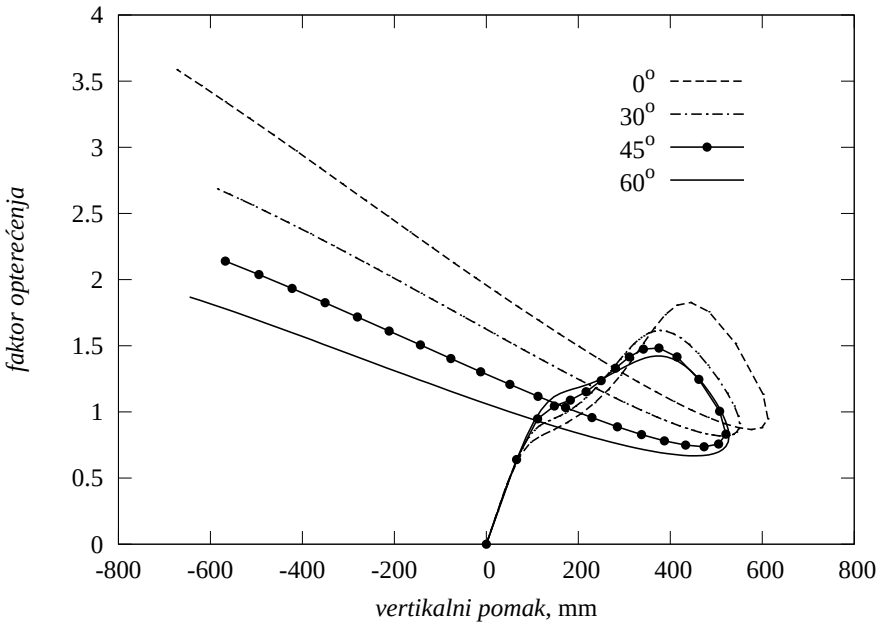
Slika 7.54: CILINDRIČNI KROV: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 45° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz



(a) (b)

Slika 7.55: CILINDRIČNI KROV: deformirani oblik pri zakretu materijalnih osi za 60° a) prikaz u ravnini *12* i b) izometrijski prikaz

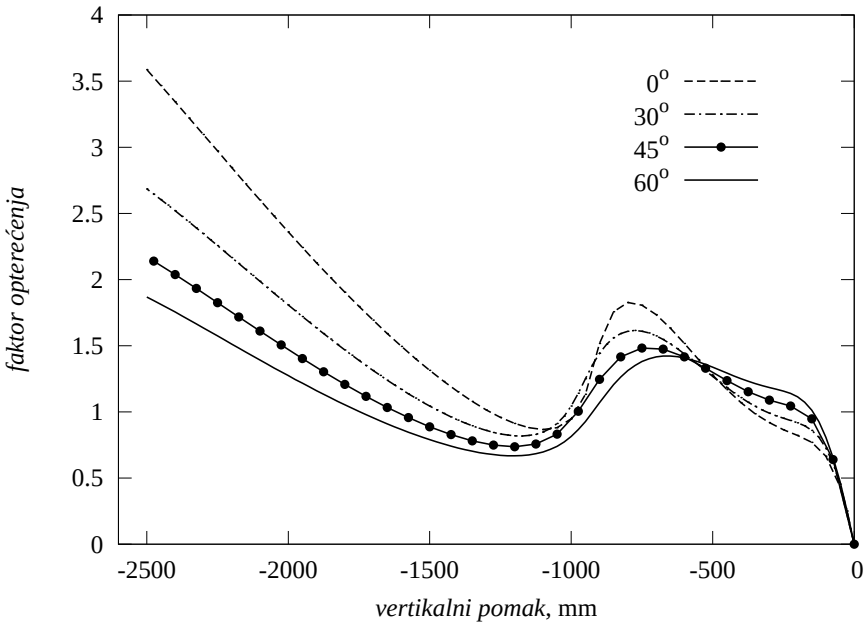
Na slikama 7.52 - 7.55 mogu se vidjeti deformirani oblici u ravnini *12* kao i izometrijska projekcija za različite kuteve zakreta. Zamjetan je znatan utjecaj orijentacije materijalnih osi na pomake različitih dijelova cilindra. Na prikazanim slikama ista boja predstavlja linije istog pomaka. Tako se može zamijetiti da su na slici 7.52 pomaci usmjereni okomito na os cilindra što je bilo i za očekivati s obzirom na položaj materijalnih osi. U skladu s tim mijenja se i deformirani oblik i na slikama 7.53, 7.54 i 7.55. Položaj materijalnih osi znatno utječe i na položaj krivulja odnosa faktora opterećenja o vertikalnom pomaku točaka A i B kao što se može vidjeti na slikama 7.56 i 7.57. Na dijagramima se može uočiti da prvo dolazi do pojave plastičnih deformacija pri poklapanju materijalnih osi s geometrijom cilindra, a s povećanjem kuta zakreta one se pojavljuju pri većem opterećenju. Iz dijagrama na slici



Slika 7.56: CILINDRIČNI KROV: krivulje ovisnosti opterećenja o vertikalnom pomaku točke A

7.57 vidi se da se konstrukcija nalazi u potkritičnom području sve do pojave granične točke (*limit point*). Za razmatrane slučajeve, granična točka se može odrediti za različite iznose vertikalnih pomaka i to od 655 mm pri zakretu materijalnih osi za 60° do 790 mm pri zakretu od 0°. Lako se može uočiti da je za dosezanje granične točke potrebno uložiti najveće opterećenje pri položaju materijalnih osi koje se poklapaju s početnim koordinatnim sustavom *123* dok se ono smanjuje s povećanjem kuta zakreta. U skladu s tim može se zaključiti da za promatrani slučaj ova konstrukcija ima najveću nosivost pri poklapanju materijalnih osi s koordinatnim sustavom *123*.

KRITIČKI OSVRT: Prvi primjer, 7.2.1, pokazao je da u ovom radu modelirana granica tečenja vjerno prikazuje rezultate dobivene eksperimentom. Iz toga se može zaključiti da se koristi realno modelirano ortotropno neelastično



Slika 7.57: CILINDRIČNI KROV: krivulje ovisnosti opterećenja o vertikalnom pomaku točke B

ponašanje materijala i da su materijalni parametri ortotropne granice tečenja u odjeljku 5.6.2 pravilno određeni. *Isoerror* postupkom 7.2.2 kontrolirana je greška numeričkog algoritma za lokalnu iteraciju. Dobivene greške su male što pokazuje točnost primijenjenog numeričkog postupka. Na primjerima kvadratne ploče 7.2.3, kružne ploče 7.2.4, 7.2.5 i cilindričnog krova 7.2.6 pokazan je utjecaj ortotropnog ponašanja materijala na elastoplastično deformiranje ljuskastih konstrukcija. U primjerima 7.2.3 i 7.2.5 posebno je istražen je utjecaj i elastičnog i neelastičnog ortotropnog ponašanja materijala za različite položaje materijalnih osi. Iz dobivenih deformiranih oblika može se zaključiti da je izvedenim numeričkim algoritmom moguće dovoljno točno modelirati realne procese elastoplastičnog deformiranja anizotropnih materijala.

Poglavlje 8

Zaključak

U ovom radu izvedeni su materijalni modeli za opisivanje izotropnog i anizotropnog ponašanja materijala pri velikim elastoplastičnim deformacijama. Za svaki model detaljno je napravljen izvod evolucijskih jednadžbi kao i izraza potrebnih za numeričku formulaciju.

U dijelu koji se odnosi na izotropni materijalni model težište je stavljeno na modeliranje novog oblika kinematičkog očvršćenja. Uvodi se prošireni izraz za slobodnu energiju zadan u trenutnoj konfiguraciji i *back stress* tenzor se dobiva njenim deriviranjem. Unutarnja varijabla kinematičkog očvršćenja, energijski konjugirana *back stress* tenzoru, zadana je preko neelastičnog dijela gradijenta deformiranja u trenutnoj konfiguraciji. Pokazano je da se simetričan *back stress* tenzor u trenutnoj konfiguraciji može dobiti samo ako se u obzir uzme njegova ovisnost o gradijentu deformiranja $\mathbf{F}$ što se razlikuje od dosadašnjeg shvaćanja *back stress* tenzora kao neovisnog o rasterećenju. Bitno je naglasiti da ovdje ovisnost nije samo o $\mathbf{F}$ nego je to miješano varijantni *push forward* pomoću $\mathbf{F}$ i njegove inverzne veličine $\mathbf{F}^{-1}$. Povlačenjem jednadžbi i veličina iz trenutne u referentnu konfiguraciju vidi se da *back stress* ovisi i o veličinama $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}^{-1}$ koje se inače nalaze u strukturi tenzora

naprezanja kada se radi s Eshelbyjevim tenzorom. Ta struktura direktna je posljedica simetričnosti Kirchhoffova tenzora prilikom miješano varijantnog povlačenja u referentnu konfiguraciju. Za razliku od izraza za kinematičko očvršćenje koji se mogu naći u literaturi, gdje se *back stress* tenzor dobije integriranjem evolucijskih jednadžbi, ovdje on slijedi direktno iz disipacijske funkcije bez potrebe daljnjeg integriranja. Dokazana je objektivnost unutarnje varijable kinematičkog očvršćenja što predstavlja jedan od osnovnih preduvjeta za točno modeliranje *back stress* tenzora u trenutnoj konfiguraciji. Materijalni model ima također ugrađeno nelinearno izotropno očvršćenje i koristi se von Misesov kriterij tečenja. U numeričkom algoritmu koristi se eksponencijalno preslikavanje kako bi se osigurala nestlačivost materijala i omogućilo obnavljanje varijabli u ovisnosti o vremenu. Sve konstitutivne jednadžbe izvedene su pomoću veličina zadanih u trenutnoj konfiguraciji dok su integracijski algoritam i konzistentni elastoplastični tangentni modul napravljeni u referentnoj konfiguraciji. Izvedeni konzistentni tangentni modul osigurava kvadratičnu konvergenciju u globalnom iteracijskom postupku i znatno utječe na smanjenje vremena računanja. Numerički primjeri pokazuju stabilnost i učinkovitost izvedenog algoritma.

Materijalni model izveden za izotropne materijale proširen je za opisivanje anizotropnog ponašanja materijala. Model se temelji na multiplikativnom razlaganju gradijenta deformiranja i pretpostavci da se neelastični dio gradijenta deformiranja može smatrati nepromjenjivim prilikom gibanja krutog tijela. Da bi se opisalo elastično ponašanje formulirana je slobodna energija ψ. Ona je određena kao izotropna funkcija dvaju argumenata: elastičnog dijela desnog Cauchy-Greenova tenzora $\mathbf{C_e}$ i materijalnih strukturnih tenzora ${}_i\mathbf{M_e}$. Potpuni prikaz izotropne funkcije postignut je ovisnošću o tzv. nezavisnim invarijantama (*integrity basis*). Ovisnost slobodne energije o invari-

jantama može biti općenita, ali u ovom slučaju je ograničena tako da ona bude kvadratna funkcija elastičnog dijela desnog Cauchy-Greenova tenzora. Iz disipacijske funkcije, određene oblikom slobodne energije, proizlaze konstitutivne jednadžbe. Za modeliranje anizotropnog zakona tečenja uzet je Eshelbyjev tenzor naprezanja. Pošto je Eshelbyjev tenzor naprezanja nesimetričan tenzor, u skladu s Zheng [113] određen je nezavisni skup invarijanti s nesimetričnim argumentima. Funkcija tečenja zapisana je kao kvadratna funkcija devijatora Eshelbyjeva tenzora i materijalnih strukturnih tenzora preko nezavisnog skupa invarijanti. Pokazano je da oblik koji zavisi samo o naprezanjima sadrži u sebi plastičnu vrtložnost (*plastic material spin*) tj. sadrži članove koji ne bi trebali utjecati na disipacijsku funkciju. Izveden je oblik materijalnih invarijanti da bi se ostvarila formulacija bez plastične vrtložnosti. U ovom radu korišten je oblik koji u sebi sadrži plastičnu vrtložnost jer je on s numeričkog stajališta značajno pogodniji, a pri tom nastaje zanemariva greška. Integriranje evolucijskih jednadžbi napravljeno je prediktor-korektor metodom uz pomoć eksponencijalnog preslikavanja. Po prvi put je izveden konzistentni elastoplastični tangentni modul za multiplikativnu neelastičnost anizotropnih materijala. Numeričkim primjerima pokazana je točnost i učinkovitost formulacije. Istražen je utjecaj ortotropnih materijalnih svojstava na elastoplastično deformiranje kao i utjecaj položaja glavnih osi ortotropije. Numerički algoritmi su pravilno izvedeni, ali još uvijek postoje veliki numerički zahtjevi zbog vrlo složenih izraza potrebnih da bi se opisala ortotropna struktura materijala. Sam tangentni operator je vrlo složen i uz to nesimetričan tako da zahtjeva duže vrijeme računanja nego za izotropni materijalni model. U daljnjem istraživanju potrebno je razmotriti razvoj novog algoritma koji će ostvariti simetričan tangentni modul.

Korisno je još jednom istaknuti znanstveni doprinos disertacije:

- Predložen je novi oblik multiplikativnog razlaganja gradijenta deformiranja, $\mathbf{F} = \mathbf{f_p f_e}$, u trenutnoj konfiguraciji koji je pokazao znatne prednosti u odnosu na postojeće formulacije.

- Razvijen je novi numerički algoritam za modeliranje kinematičkog očvršćenja definiranog preko proširenog izraza za slobodnu energiju. Slobodna energija je funkcija veličine $\mathbf{f_p}$ koja slijedi iz novog razlaganja gradijenta deformiranja. Formulacija daje simetričan *back stress* tenzor u trenutnoj konfiguraciji. Takav oblik, uz simetričnost, daje i objektivan *back stress* tenzor što se danas u literaturi javlja kao veliki problem pri modeliranju kinematičkog očvršćenja.

- Proširen je izotropni materijalni model na anizotropno područje. Materijalni model vrijedi generalno za anizotropne materijale, ali je zbog jednostavnosti opisano samo ortotropno ponašanje materijala. Elastično anizotropno ponašanje određeno je preko slobodne energije zapisane u invarijantnom obliku. Također se uvodi anizotropna granica tečenja prema Hillu. U osnovi ona je dana za modele temeljene na malim deformacijama, ali sada je proširena na područje velikih deformacija uz upotrebu strukturalnih tenzora. Ostvaren je oblik koji vrijedi i za nesimetrične argumente.

- U potpunosti je razvijen konzistentni elastoplastični tangentni modul kod anizotropnih materijala uz korištenje multiplikativne dekompozicije gradijenta deformiranja. To omogućuje kvadratičnu konvergenciju globalnog iteracijskog postupka u formulaciji konačnih elemenata, što znatno doprinosi smanjenju vremena računanja.

Bibliografija

[1] Bruhns, O., Xiao, H., & Meyers, A. Large simple shear and torsion problems in kinematic hardening elasto-plasticity with logarithmic rate. *Int. J. Solids Structures*, 38:8701–8722, 2001.

[2] Klinkel, S. Theorie und numerik eines volumen-elementes bei finiten elastischen und plastischen verzerrungen. *Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik*, 2000.

[3] Roehl, D. & Ramm, E. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Solids Structures*, 33:3215–3237, 1996.

[4] Sorić, J., Montag, U., & B.Krätzig, W. An efficient formulation of integration algorithms for elastoplastic shell analyses based on layered finite element approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 148: 315–328, 1997.

[5] Tonković, Z., Sorić, J., & Krätzig, W. B. On nonisothermal elastoplastic analysis of shell-components employing realistic hardening responses. *International Journal of Solids and Structures*, 38:5019–5039, 2001.

[6] Lademo, O. G., Hopperstadt, O. S., & Langseth, M. An evaluation of yield criteria and flow rules for aluminium alloys. *Int. J. Plasticity*, 15:191–208, 1999.

[7] Simo, J. C. & Taylor, R. L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:649–670, 1986.

[8] Prager, W. A new method of analysing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 23: 493–496, 1956.

[9] Bathe, K.-J. & Montans, F. J. On modeling mixed hardening in computational plasticity. *Computers and Structures*, 82:535–539, 2004.

[10] Armstrong, P. J. & Frederick, C. O. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. *General Electricity Generating Board Report No.* $RD - B_N - 731$, 1966.

[11] Yaguchi, M., Yamamoto, M., & Ogata, T. A viscoplastic constitutive model for nickel-base superalloy, Part 1: Kinematic hardening rule of anisotropic dynamic recovery. *Int. J. Plasticity*, 18:1083–1109, 2002.

[12] Wang, C. H., Hu, W., & Sawyer, J. P. G. Explicit numerical integration algorithm for a class of non-linear kinematic hardening model. *Computational Mechanics*, 26:140–147, 2000.

[13] Chaboche, J. L. & Nouailhas, D. Constitutive modelling of ratchetting effects - Part 2: Possibilities of some additional kinematic rules. *ASME J. Eng. Mat. Tech.*, 111:409–416, 1989.

[14] Lehmann, T. On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-plasticity and thermo- viscoplasticity. *C.S. Desai, et al. (Eds.), Constitutive laws for engineering materials, Theory and Applications, Elsevier, New York*, pages 173–184, 1987.

[15] Ziegler, H. An introduction to thermomechanics. *Second Ed., North Holland, Amsterdam.*, 1983.

[16] Martin, J. & Nappi, A. An internal variable formulation for perfectly plastic and linear hardening relations in palsticity. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9:107–131, 1990.

[17] Reddy, B. D. & Martin, J. B. Internal variable formulations of problems in elastoplasticity: constitutive and algorithmic aspects. *Appl. Mech. Rev.*, 47:429–456, 1994.

[18] Nguyen, Q. S. Bifurcation and stability of time-independent standard dissipative systems. *In Q.S. Nguyen, editor, CISM Courses and Lectures No. 327 : Bifurcation and Stability of Dissipative Systems, Springer-Verlag*, 1993.

[19] Puzrin, A. M. & Houlsby, G. T. Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 38:3771–3794, 2001.

[20] Eterovic, A. L. & Bathe, K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logaritmic stress and strain measures. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 30:1099–1114, 1990.

[21] Perić, D., Owen, D. R. J., & Honnor, M. E. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 94:35–61, 1992.

[22] Rouainia, M. & Perić, D. A computational model for elasto-viscoplastic solids at finite strain with reference to thin shell applications. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 42:289–311, 1998.

[23] Sansour, C. & Kollmann, F. G. Large viscoplastic deformation of shells. Theory and finite element formulation. *Computational Mechanics*, 21:512–525, 1998.

[24] Sansour, C. & Wagner, W. Viscoplasticity based on additive decomposition of logaritmic strain and unified constitutive equations. Theoretical and computational considerations with reference to shell applications. *Computers and Structures*, 81:1583–1594, 2003.

[25] Svendsen, B. A thermodynamical formulation of finite-deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism. *Int. Journal of Plasticity*, 14:473–488, 1998.

[26] Sansour, C. & Wagner, W. A model of finite strain viscoplasticity based on unified constitutive equations. Theoretical and computational considerations with applications to shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191:423–450, 2001.

[27] Wallin, M., Ristinmaa, M., & Ottosen, N. S. An kinematic hardening in large strain plasticity. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 22:341–356, 2003.

[28] Tsakmakis, C. Kinematic hardening rules in finite plasticity. Part I: A constitutive approach. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:215–231, 1996.

[29] Menzel, A., Ekh, M., Runesson, K., & Steinmann, P. A framework for multiplicative elastoplasticity with kinematic hardening co-

upled to anisotropic damage. *Int. Journal of Plasticity*, 21:397–434, 2005.

[30] Dogui, A. & Sidoroff, F. Kinematic hardening in large elastoplastic strain. *Engineering Fracture Mechanics*, 21:685–695, 1985.

[31] Başar, Y. & Itskov, M. Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shells. *Computational Mechanics*, 23:466–481, 1999.

[32] Sorić, J., Skoko, J., & Eckstein, A. On numerical modeling of combined isotropic-kinematic hardening at large strain elastoplasticity. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), Vienna University of Technology*, 2002.

[33] Maugin, G. A. Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture. *Int. Journal of Plasticity*, 10:393–408, 1994.

[34] Simo, J. C. & Hughes, T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.

[35] Reed, K. W. & Atluri, S. N. Constitutive modeling and computational implementation in finite strain plasticity. *International Journal of Plasticity*, 1:63–87, 1985.

[36] Im, S. & Atluri, S. N. A study of two finite strain plasticity models: an internal time theory using Mandel's director concept and combined isotropic-kinematic hardening theory. *Int. J. Plasticity*, 3:163–191, 1987.

[37] Johnson, G. & Bammann, D. A discussion of stress rates in finite deformation problems. *Int. J. Solids Structures*, 20:725–737, 1984.

[38] Fish, J. & Shek, K. Computational aspects of incrementally objective algorithms for large deformation plasticity. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 44:839–851, 1999.

[39] Bruhns, O., Xiao, H., & Meyers, A. Self-consistent Eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate. *International Journal of Plasticity*, 15:479–520, 1999.

[40] Xiao, H., Bruhns, O. T., & Meyers, A. Large strain responses of elastic-perfect plasticity and kinematic hardening plasticity with the logarithmic rate: Swift effect in torsion. *Int. J. Plasticity*, 17:211–235, 2001.

[41] Gomaa, S., Sham, T.-L., & Krempl, E. Finite element formulation for finite deformation, isotropic viscoplasticity theory based on overstress. *Int. J. Solids Structures*, 41:3607–3624, 2004.

[42] Naghdabadi, R., Yeganeh, M., & Saidi, A. Application of corotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations. *Int. Journal of Plasticity*, 21:1546–1567, 2005.

[43] Tsakmakis, C. & Willuweit, A. A comparative study of kinematic hardening rules at finite deformations. *Int. J. of Non-linear Mech.*, 39: 539–554, 2004.

[44] Häusler, O., Schick, D., & Tsakmakis, C. Description of plastic anisotropy effects at large deformations: Part II: The case of transverse isotropy. *International Journal of Plasticity*, 20:199–223, 2004.

[45] Papadopoulos, P. & Lu, J. A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 159:1–18, 1997.

[46] Schieck, B. & Stumpf, H. The appropriate corotational rate, exact formulation for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 32:3643–3667, 1995.

[47] Ekh, M. & Runesson, K. Modeling and numerical issues in hyperelasto-plasticity with anisotropy. *ASME J. Eng. Mat. Tech.*, 38: 9461–9478, 2001.

[48] van der Giessen, E. Continuum models of large deformation plasticity - Part II: A kinematic hardening model and the concept of a plastically induced orientational structure. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 8:89–108, 1989.

[49] Ortiz, M. & Stainier, L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 171:419–444, 1999.

[50] Simo, J. C. & Ortiz, M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 49:221–245, 1985.

[51] Weber, G. & Anand, L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic - viscoplastic solids. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 79:173 – 202, 1990.

[52] Miehe, C. A formulation of finite elastoplasticity based on dual co- and contra-variant eigenvector triads normalized with respect to a plastic metric. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 159:223–260, 1998.

[53] Meschke, G. & Liu, W. Re-formulation of the exponential algorithm for finite strain plasticity in terms of cauchy stresses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 173:167–187, 1999.

[54] Simo, J. C. A frame work for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 68:1–31, 1988.

[55] Hull, D. & Clyne, T. W. An introduction to composite materials. *Cambridge University Press*, 1996.

[56] Kocks, U. F., Tome, C. N., & Wenk, H.-R. Texture and anisotropy. *Cambridge University Press*, 1998.

[57] Phillips, R. Crystals, defects, and microstructures-modelling across scales. *Cambridge University Press*, 2001.

[58] Miastkowski, J. & Szczepinski, W. An experimental study of yield surfaces of pre-strained brass. *Int. J. Solids Structures*, 1:189–194, 1965.

[59] Phillips, A. & Moon, H. An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces. *Acta Mechanica*, 27:91–102, 1977.

[60] Ikegami, K. Experimental plasticity on the anisotropy of metals. *In: J.P. Boehler (Ed.), Proceedings of the Euromech Colloquium 115. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris*, pages 201–227, 1982.

[61] Helling, D. E., Miller, A. K., & Stout, M. G. An experimental investigation of the yield loci of 1100-0 aluminum, 70:30 brass and

an overaged 2024 aluminum alloy after various prestrain. *J. Engrg. Materials Technology, ASME*, 108:313–320, 1986.

[62] Khan, A. S. & Wang, X. An experimental study on subsequent yield surface after finite shear prestraining. *Int. J. Plasticity*, 9:889–905, 1993.

[63] Qui, H. P. T. & Lippmann, H. Plastic spin and evaluation of an anisotropic yield condition. *Int. J. Mechanical Sciences*, 43:1969–1983, 2001.

[64] Ishikawa, H. Subsequent yield surface probed from its current center. *Int. J. Plasticity*, 13:533–549, 1997.

[65] Hill, R. *The mathematical theory of plasticity.* Oxford University Press, London, 1950.

[66] Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J. C., Hayashida, Y., Lege, D. J., Matsui, K., Murtha, S. J., Hattori, S., Becker, R. C., & Makosey, S. Yield function development for aluminum alloy sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 45:1727–1763, 1997.

[67] Bron, F. & Besson, J. A yield function for anisotropic materials application to aluminum alloys. *Int. J. Plasticity*, 20:937–963, 2004.

[68] Stoughton, T. B. & Yoon, J. W. A pressure-sensitive yield criterion under a non-associated floe rule for sheet metal forming. *Int. J. Plasticity*, 20:705–731, 2004.

[69] Banabic, D., Aretz, H., Comsa, D. S., & Paraianu, L. An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets. *Int. J. Plasticity*, 21:493–512, 2005.

[70] Darrieulat, M. & Montheillet, F. A texture based continuum approach for predicting the plastic behaviour of rolled sheet. *Int. J. Plasticity*, 19:517–546, 2003.

[71] Karafillis, A. P. & Boyce, M. C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 41:1859–1886, 1993.

[72] Mollica, F. & Srinivasa, A. R. A general framework for generating convex yield surfaces for anisotropic metals. *Acta Mechanica.*, 154:61–84, 2002.

[73] Oller, S., Car, E., & Lubliner, J. Definition of a general implicit othotropic yield criterion. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192: 895–912, 2003.

[74] Wu, W. An orthotropic yield criterion in a 3-D general stress state. *Int. J. Plasticity*, 21:1771–1796, 2005.

[75] Papadopoulos, P. & Lu, J. On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:4889–4910, 2001.

[76] Schroeder, J., Gruttmann, F., & Löblein, J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures. *Comput. Mech.*, 30:38–64, 2002.

[77] Miehe, C., Apel, N., & Lambrecht, M. Anisotropic additive plasticity in the logaritmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:5383–5425, 2002.

[78] Itskov, M. On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity. *Mechanics research communications*, 31:507–517, 2004.

[79] Sansour, C. & Kollmann, F. G. On the formulation of anisotropic elastic laws within multiplicative finite strain viscoplasticity. *preprint.*

[80] Sansour, C. & Bocko, J. On the numerical implications of multiplicative inelasticity with an anisotropic elastic constitutive law. *Int. J. Num. Methods Engrg.*, 58:2131–2160, 2003.

[81] Svendsen, B. On the modelling of anisotropic elastic and inelastic material behaviour at large strain. *Int. J. Solids and Structures*, 38: 9579–9599, 2001.

[82] Menzel, A. & Steinmann, P. On the spatial formulation of anisotropic multiplicative elasto-plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192:3431–3470, 2003.

[83] Eidel, B. & Gruttmann, F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation. *Computational Materials Science*, 28:732–742, 2003.

[84] Gruttmann, F. & Eidel, B. On the implementation of anisotropic finite strain plasticity. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria*, July 7-12 2002.

[85] Haupt, P. & Kersten, T. On the modelling of anisotropic material behaviour in viscoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 19:1885–1915, 2003.

[86] Tsakmakis, C. Description of plastic anisotropy effects at large deformations - Part I: Restrictions imposed by the second law and the postulate of Il'iushin. *Int. J. Plasticity*, 20:167–198, 2004.

[87] Bucher, A., Goerke, U.-J., & Kreissig, R. A material model for finite elasto-plastic deformations considering a substructure. *Int. J. Plasticity*, 20:619–642, 2004.

[88] Kuroda, M. Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations: Comparison of macroscopic predictions to physically based prediction. *Int. J. Plasticity*, 15:1217–1236, 1999.

[89] Dafalias, Y. Orientational evolution of plastic orthotropy in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 48:2231–2255, 2000.

[90] Kowalczyk, K. & Gambin, W. Model of plastic anisotropy evolution with texture-dependent yield surface . *Int. J. Plasticity*, 20:19–54, 2004.

[91] Tugcu, P., Neale, K. W., Wu, P. D., & Inal, K. Crystal plasticity simulation of the hydrostatic bulge test . *Int. J. Plasticity*, 20: 1603–1653, 2004.

[92] Başar, Y. & Weichert, D. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Fundamental mathematical and physical concepts.* Springer, 2000.

[93] Alfirević, I. *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma.* Golden Marketing, Zagreb, 2003.

[94] Holzapfel, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering.* John Wiley & sons, LTD, 2001.

[95] Fung, Y. C. & Tong, P. *Classical and Computational Solid Mechanics.* World Scientific, Singapore, 2001.

[96] Belytschko, T., Liu, W. K., & Moran, B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* Wiley, Chicester, England, 2000.

[97] Lemaitre, J. & Chaboche, J.-L. *Mechanics of solid materials.* Cambridge University Press, London, 1990.

[98] Khan, A. S. & Huang, S. *Continuum Theory of Plasticity.* John Wiley & sons, LTD, New York, 1995.

[99] Lubliner, J. *Plasticity Theory.* Macmillan Publishing Company, New York, 1990.

[100] Maugin, G. & Epstein, M. Geometrical material structure of elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 14:109–115, 1998.

[101] Alfirević, I. *Tenzorski račun i tenzorska mehanika.* U tisku.

[102] Hall, B. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* Springer, New York, 2003.

[103] Rossman, W. *Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[104] Maugin, G. A. The thermomechanics of plasticity and fracture. *Cambridge University Press, Cambridge, U.K.*, 1992.

[105] Simo, J. C. A frame work for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition: Part I.

Continuum formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 66:199–219, 1988.

[106] Sorić, J., Montag, U., & B.Krätzig, W. On increase of efficiency of computational algorithms for elastoplastic shell analysis. *Engng. Comp.*, 14:75–97, 1997.

[107] Sansour, C. On the dual variable of the logarithmic strain tensor, the dual variable of the Cauchy stress tensor, and related issues. *Int. J. Solids and Structures*, 38:9221–9232, 2001.

[108] Bamberg, P. & Sternberg, S. *A Course in Mathematics for Students of Physics*. Cambridge University Press, Melbourne, 1991.

[109] Spencer, A. Theory of invariants. *in: Continuum Physics, Vol.I, Eringen, C. (Ed.)*, pages 239–353, 1971.

[110] Smith, G. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int. J. Engrg. Sci.*, 9:899–916, 1971.

[111] Boehler, J. P. *Applications of tensor functions in solid mechanics*. Springer Verlag, Wien, 1987.

[112] Scheidler, M. & Wright, T. W. A continuum framework for finite viscoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 17:1033–1085, 2001.

[113] Zheng, Q.-S. Theory of representation for tensor functions - A unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mechanics Reviews*, 47:545–587, 1994.

[114] Dafalias, Y. Plastic spin: Necessity or redundancy? *Int. J. Plasticity*, 14:909–931, 1998.

[115] Sansour, C. A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: circumventing the use of a rotation tensor. *Arch. Apll. Mech.*, 65:194–216, 1995.

[116] Eckstein, A. Zur theorie und finite-element-simulation von schalen mit grossen inelastischen dehnungen und duktilen schädigungen. *Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen*, 1998.

[117] Simo, J. C. & Rifai, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 29:1595–1638, 1990.

[118] Ibrahimbegović, A. & Chorfi, L. Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening. *Computers and Structures*, 77:509–525, 2000.

[119] ABAQUS. User's guide and theoretical manual. *Version 6.5-3, Hibbitt, Karlsson and Serensen, Inc.,*, www.hks.com, 2005.

[120] Betsch, P. & Stein, E. Numerical implementation of multiplicative elastoplasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 179:215–245, 1999.

Životopis

Ime i prezime:	Igor Karšaj
E-mail:	igor.karsaj@fsb.hr
URL:	http://www.fsb.hr/lnm/Karsaj.htm
Datum rođenja:	22. prosinca 1975.
Mjesto rođenja:	Virovitica, Hrvatska
Školovanje:	**1982. – 1991.** osnovna škola u Zdencima
	1991. – 1994. matematička gimnazija u Našicama
	1994. – 1999. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje (FSB)
	2001. – 2006. poslijediplomski studij strojarstva na FSB
Namještenja:	**2000.- 2001.** inženjer u "Petrokov" Zagreb
	2001. – znanstveni novak na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku
Znanje jezika:	Engleski
	Njemački
Članstva:	Hrvatsko društvo za mehaniku
Stipendije	**veljača 2001. – lipanj 2001.**
	na Institutu za statiku, Sveučilišta Karlsruhe, Njemačka u okviru stipendije zaklade "Alexander von Humboldt" iz SR Njemačke
	lipanj 2005.
	nagrada "The Young Researcher Fellowship Award for exemplary research in computational mechanics", M.I.T. Cambridge, SAD
Nagrade	**1996.** - Nagrada "Davorin Bazjanac" za uspjeh na 2. godini studija
	1999. - Medalja Fakulteta strojarstva i brodogradnje

Biography

Name and surname:	Igor Karšaj
E-mail:	igor.karsaj@fsb.hr
URL:	http://www.fsb.hr/lnm/Karsaj.htm
Date of birth:	22nd December 1975.
Place of birth:	Virovitica, Croatia
Education:	**1982 – 1991** primary school in Zdenci
	1991 – 1994 Gymnasium in Našice
	1994 – 1999 Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture (FMENA), University of Zagreb
	2001 – 2006 PhD study at FMENA, University of Zagreb
Professional:	**2000 – 2001** Engineer at "Petrokov" Zagreb
	2001 – Research assistant at FMENA, Department of Engineering Mechanics
Foreign languages:	English,
	German
Membership:	Croatian Society of Mechanics (CSM)
Scholarships:	**February 2001 – June 2001**
	University Karlsruhe, Germany, Scholarship of "Alexander von Humboldt" foundation, Germany
	June 2005
	Fellowship "The Young Researcher Fellowship Award for exemplary research in computational mechanics", M.I.T. Cambridge, USA
Awards:	**1996** - Award "Davorin Bazjanac" as the best student at the 2. year of a study
	1999 - "Medal of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture" for the best students