Minimaks optimalno upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima

Milić, Vladimir

Doctoral thesis / Disertacija

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:830309

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Vladimir Milić

MINIMAKS OPTIMALNO UPRAVLJANJE NELINEARNIM DINAMIČKIM SUSTAVIMA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2015.



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Vladimir Milić

MINIMAKS OPTIMALNO UPRAVLJANJE NELINEARNIM DINAMIČKIM SUSTAVIMA

DOKTORSKI RAD

Mentor: Dr. sc. Josip Kasać, izvanredni profesor

Zagreb, 2015.



University of Zagreb

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Vladimir Milić

MINIMAX OPTIMAL CONTROL OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Josip Kasać, PhD, Associate Professor

Zagreb, 2015.

Podaci za bibliografsku karticu

UDK:	519.8
Ključne riječi:	$\mathscr{L}_2$ optimalno upravljanje, minimaks optimizacija, afini nelinearni dinamički sustavi, rekurzivne matrične relacije, Ljapunovljeva analiza stabilnosti, elektrohidraulički sustavi.
Znanstveno područje:	tehničke znanosti
Znanstveno polje:	strojarstvo
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu
Mentor:	Dr. sc. Josip Kasać, izv. prof.
Broj stranica:	185
Broj slika:	41
Broj tablica:	3
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	143
Datum obrane:	5. svibnja 2015.
Povjerenstvo:	Dr. sc. Mario Essert, red. prof. - predsjednik Dr. sc. Josip Kasać, izv. prof. - mentor Dr. sc. Željko Šitum, red. prof. - član Dr. sc. Andrej Jokić, docent - član Dr. sc. Ivica Nakić, docent - član, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu

Sve jačim šumom javlja se iz peći.
I ko da znak mi daje, zapucketa.
To vatra hoće nešto reći.

Ali ja vatru samo slušat umijem,
I čudnovata spopada me sjeta,
Što njezin jezik ne razumijem.

D. Cesarić, iz *Sam sa vatrom*

Podaci o mentoru

Josip Kasać rođen je 31.07.1969. godine u Vinkovcima. Srednju školu elektrotehničkog usmjerenja završio je u Vinkovcima 1988. godine. Diplomirao je fiziku 1995. godine na Prirodoslovno matematičkom fakultetu, Sveučilišta u Zagrebu. Iste godine upisuje se na sveučilišni poslijediplomski studij „Vođenje i upravljanje pokretnim objektima" na kojem je magistrirao 1998. godine. Od 1999. do 2001. godine radi u Institutu za obrambene studije, istraživanje i razvoj. Od listopada 2001. godine zaposlen je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, na Zavodu za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava, gdje je trenutno u statusu izvanrednog profesora. Doktorsku disertaciju naslova „Analiza stabilnosti nelinearnih sustava vođenih analitičkim neizrazitim regulatorom", obranio je 2005. godine, pod mentorstvom prof. dr. sc. Branka Novakovića.

Na Zavodu za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu aktivno sudjeluje u izvođenju nastave. Nositelj je i sunositelj kolegija Opća teorija sustava, Neizrazita logika, Vođenje tehničkih sustava, Neizrazito i digitalno upravljanje te Upravljanje i regulacija.

Od 2001. godine sudjeluje na više projekata Ministarstva znanosti i tehnologije Republike Hrvatske vezanim uz primjenu umjetne inteligencije u robotici i proizvodnim sustavima. Od 2010. do 2014. godine voditelj je znanstvenog projekta br. 120–1201842–3048 „Umjetna inteligencija u upravljanju složenim nelinearnim dinamičkim sustavima". Nositelj je znanstvene potpore Sveučilišta u Zagrebu za 2014. godinu pod nazivom „Metode računalne inteligencije u upravljanju i nadzoru složenih dinamičkih sustava". Trenutno je uključen u istraživačke aktivnosti na projektu „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima" financiranim od strane Hrvatske zaklade za znanost. Sudjelovao je na više domaćih i međunarodnih stručnih projekata.

Autor je ili koautor 13 radova objavljenih u CC časopisima s međunarodnom recenzijom te 56 radova objavljenih u zbornicima međunarodnih i domaćih skupova. Znanstveno-istraživačka djelatnost vezana mu je uz metode regulacije nelinearnih mehaničkih sustava, numeričke metode optimalnog upravljanja složenim nelinearnim sustavima te upravljanje i identifikaciju sustava s distribuiranim parametrima.

Zahvala

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Josipu Kasaću na iskazanom povjerenju, vodstvu i korisnim diskusijama tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Željku Šitumu na korisnim sugestijama i ustupanju prijenosnog računala s potrebnom softverskom i hardverskom podrškom za izvođenje eksperimenta te za izradu shematskih dijagrama laboratorskih postava elektrohidrauličkih sustava.

Zahvaljujem se i ostalim članovima povjerenstva za ocjenu i obranu disertacije, prof. dr. sc. Mariu Essertu, doc. dr. sc. Andreju Jokiću i doc. dr. sc. Ivici Nakiću na strpljenju pri pregledu rada te na korisnim primjedbama koje su ga učinile boljim.

Na kraju, najviše bih se zahvalio svojoj obitelji na strpljenju i moralnoj podršci te povjerenju koje su mi ukazali.

$\mathscr{V}.\ \mathscr{M}.$

Sadržaj

Sadržaj viii

Predgovor xi

Sažetak xii

Extended summary xiv

Ključne riječi (Keywords) xix

Popis oznaka xx

Popis slika xxiv

Popis tablica xxvii

1 Uvod 1

1.1 Motivacija 1

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja 2

1.3 Cilj i hipoteza rada 5

1.4 Metodologija istraživanja 6

1.5 Doprinos i prikaz sadržaja disertacije 8

2 Matematičke preliminarije i notacija 11

2.1 Definicije i svojstva vektorskih i funkcijskih normi . . . 12
2.2 Kroneckerov produkt i vektorizacija matrice . . . 14
2.3 Vektorske i matrične derivacije . . . 17
2.4 Konveksne i konkavne funkcije i skupovi . . . 19
2.5 Aproksimacija . . . 21

3 $\mathscr{L}_2$ upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima 23
3.1 Afini nelinearni dinamički sustavi . . . 23
3.2 Formulacija upravljačkog problema i uvjeti optimalnosti . . . 26
3.3 Pristup na principu diferencijalnih igara . . . 27

4 Sinteza algoritma za minimaks optimalno upravljanje 30
4.1 Formulacija optimizacijskog problema . . . 30
4.2 Minimizacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja i računanje sedlaste točke . . . 33
4.3 Računanje derivacija funkcije cilja . . . 44
4.3.1 Vremenska diskretizacija . . . 45
4.3.2 Rekurzivne matrične relacije . . . 48
4.3.3 Diskusija o pozitivnoj definitnosti Hessijana funkcije cilja . . . 54
4.3.4 Računanje osnovnih Jacobijana i Hessijana . . . 55
4.4 Analitičke neizrazite bazne funkcije . . . 62
4.5 Primjeri . . . 67

5 Analiza stabilnosti predloženog zakona upravljanja s primjenom na Euler-Lagrangeove sustave 78
5.1 Euler-Lagrangeovi sustavi . . . 79
5.2 Konstrukcija Ljapunovljeve funkcije . . . 81
5.3 Uvjeti stabilnosti . . . 84

6 Sinteza regulatora elektrohidrauličkih sustava 89
6.1 Opis laboratorijskih postava . . . 90
6.1.1 Modul za upravljanje rotacijskim gibanjem . . . 92
6.1.2 Modul za upravljanje translacijskim gibanjem . . . 94

6.1.3 Modul za upravljanje silom 97
6.2 Matematički modeli 99
6.2.1 Matematički model rotacijskog sustava 99
6.2.2 Matematički model translacijskog sustava 104
6.2.3 Matematički model elektrohidrauličke preše 106
6.3 Identifikacija parametara 108
6.4 Simulacijski i eksperimentalni rezultati 114
6.4.1 Upravljanje rotacijskim gibanjem 114
6.4.2 Upravljanje translacijskim gibanjem 119
6.4.3 Upravljanje silom 124

7 Zaključak **130**

A Osnovni pojmovi iz analize stabilnosti **133**

Literatura **137**

Životopis **151**

Biography **153**

Popis radova **155**

Predgovor

U procesima upravljanja koji se javljaju u inženjerskim primjenama ne može se očekivati da su vrijednosti parametara sustava potpuno točne nego je moguće samo pretpostaviti granice u kojima se te vrijednosti nalaze. Nadalje, prisutni su također i vanjski poremećaji koji na neželjeni način utječu na ponašanje sustava. Nužan preduvjet za praktičnu implementaciju upravljačkih sustava je robusnost s obzirom na neodređenosti u sustavu koje nastaju zbog nepoznavanja parametara i/ili prisustva vanjskih poremećaja. Budući da su uvjeti pod kojima je moguće u potpunosti otkloniti neodređenosti rijetko zadovoljeni nastoji se ograničiti njihov utjecaj.

Jedna grana teorije upravljanja koja se bavi smanjenjem utjecaja neodređenosti na dinamiku sustava je optimalno robusno upravljanje. Cilj optimalnog robusnog upravljanja je pronaći zakon upravljanja koji minimizira funkciju kriterija optimalnosti u slučaju djelovanja ograničene neodređenosti. Kod većine se poznatih pristupa raznim metodama pokušava riješiti pripadajuća Hamilton-Jacobi-Isaacsova jednadžba ili nejednadžba. Unatoč intenzivnim istraživanjima još uvijek ne postoji jedan zadovoljavajući općeniti pristup za njezino rješavanje.

Navedeni problem je osnovna motivacija rada na ovoj doktorskoj disertaciji gdje se sinteza optimalnog robusnog zakona upravljanja zasniva na direktnoj minimaks optimizaciji bez rješavanja Hamilton-Jacobi-Isaacsove jednadžbe. Prema dosadašnjim spoznajama autora, relativno je mali broj znanstvenih radova koji obrađuju optimalno robusno upravljanje na navedeni način.

U Zagrebu, svibnja, 2015. $\mathscr{V}.\ \mathscr{M}.$

Sažetak

Tema ove disertacije je sinteza zakona upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima kojim se utjecaj vanjskih i/ili unutarnjih neodređenosti zadržava ispod dozvoljene granice i osigurava stabilnost zatvorenog sustava. Kao mjeru utjecaja neodređenosti razmatra se $\mathscr{L}_2$ pojačanje sustava. Problem pripada području robusne optimizacije, tj. klasi matematičkih problema kod kojih je potrebno istovremeno provesti minimizaciju i maksimizaciju iste funkcije cilja – minimaks optimizacija.

U disertaciji se predlaže direktna optimizacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja bez rješavanja pripadajuće Hamilton-Jacobi-Isaacsove jednadžbe. Provedena je transformacija optimizacije $\mathscr{L}_2$ pojačanja iz razlomačkog optimizacijskog problema u parametarski koji uključuje minimaks optimizacijski potproblem, a čije se rješavanje svodi na traženje sedlaste točke diferencijalne igre. Pristup rješavanju problema temelji se na zamjeni komponenata vektora upravljanja i neodređenosti aproksimacijskim funkcijama s linearnom ovisnošću o konačnom broju konstantnih parametara. Parametri aproksimacijskih funkcija upravljačkih varijabli minimiziraju $\mathscr{L}_2$ pojačanje, dok parametri aproksimacijskih funkcija neodređenosti maksimiziraju $\mathscr{L}_2$ pojačanje. Za računanje ovih parametara predlaže se integracija subgradijentne metode, Newtonove metode, Adamsove metode te automatskog diferenciranja u jedan algoritam.

Provedenim numeričkim simulacijama na nelinearnim dinamičkim sustavima kod kojih je moguće analitički riješiti Hamilton-Jacobi-Isaacsovu jednadžbu te time egzaktno odrediti vektore upravljanja i neodređenosti, pokazane su verzije algoritma koje daju najbolju efikasnost i točnost. Uvjeti stabilnosti za jednu klasu problema izvedeni su primjenom Ljapunovljeve

izravne metode. Na kraju je predloženi algoritam primijenjen za sintezu regulatora elektrohidrauličkih sustava. Simulacijskim i eksperimentalnim usporedbama s najčešćim strukturama konvencionalnih regulatora pokazano je da se predloženom strategijom upravljanja mogu ostvariti bolja željena ponašanja.

Extended summary

This thesis is concerned with the control law synthesis for nonlinear dynamical systems that guarantees that the effect of the external and/or internal uncertainty of the system is kept under permissible level and ensures the stability of the closed-loop system. As a measure of the uncertainty effect, the $\mathscr{L}_2$-gain of the system is considered. The problem belongs to the field of robust optimisation, i.e. a class of mathematical problems in which minimisation and maximisation of the same performance criterion are simultaneously carried out – minimax optimisation.

As it is well known, the $\mathscr{L}_2$-gain optimal control problem requires solving a Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) equation. In the nonlinear case HJI partial differential equation is difficult or impossible to solve, and can not have a global analytical solution even in very simple cases, for an example in some scalar systems. Therefore, many approximation methods have been developed to solve the so-called sub-optimal problem in which locally $\mathscr{L}_2$-gain is less than or equal to some prescribed number, see for example [1, 2, 3, 4, 5, 6] to name a few. From the differential game [7] point of view, $\mathscr{L}_2$-gain optimal control can be considered as a problem in which the control vector is "player" that minimises the optimality criterion, while the uncertainty vector is "player" that maximises the optimality criterion. Therefore, problem is also known as minimax optimal control [8].

In order to avoid solving the corresponding HJI equation for $\mathscr{L}_2$-gain optimisation, in this thesis we propose an algorithm for direct minimisation of the performance criterion with respect to the control input, with simultaneous maximisation of the same performance criterion

with respect to the uncertainty. The proposed algorithm uses: combination of subgradient and Newton's method for optimisation; recursive calculation of derivatives; Adams method for the time discretisation and automatic differentiation, in order to achieve numerical robustness, stability and fast convergence. The version of the algorithm which gives the best efficiency and accuracy is determined by numerical simulations. The stability conditions are established by Lyapunov direct method. The developed algorithm is experimentally compared with the conventional approaches on the electrohydraulic systems.

This thesis is organized in seven chapters, as follows:

Chapter 1: *Introduction.* This chapter presents the relevance of the research. It reviews the literature related to the topic of the thesis and explains the research scope. The first chapter is divided into five sections which includes: motivation, overview of the previous research, research goals and hypotheses, methodology and plan of the research within this thesis, contributions and outline of the thesis.

Chapter 2: *Mathematical preliminaries and notation.* The fundamental mathematical background, results and notation that are critical to the development of later chapters are collected and summarised in the Chapter 2. This chapter gives some basic concepts such as definitions and properties of the gradient of a vector, Jacobian matrix, Hessian matrix, vector and function norms, vectorisation of a matrix, Kronecker product, convexity and etc.

Chapter 3: $\mathscr{L}_2$ *control of nonlinear dynamical systems.* This chapter is mainly designed to recall the main concepts and results from the $\mathscr{L}_2$-gain control theory in order to understand the contributions of this thesis. It is mostly based on the references that deal with: analysis of nonlinear control systems [9, 10, 11], $\mathscr{H}_\infty$ control and related minimax problems, [8, 12, 13, 14, 15], differential games theory [7, 16].

Chapter 4: *Synthesis of the algorithm for the minimax optimal control.* This chapter is concerned with derivation of the algorithm for $\mathscr{L}_2$-gain optimisation of input-affine nonlinear systems. Chapter presents a more detailed version of the results published in authors previous works [17, 18, 19, 20].

In contrast to [1, 2, 3, 4, 5, 6], the aim is to avoid solving the HJI equation. The feedback control and the uncertainty variables are formulated as a linear combinations of approximation functions. It is well known that the problem of $\mathscr{L}_2$-gain optimisation is equivalent to

the minimax fractional optimisation problem. Therefore, in order to solve this problem, we propose the algorithm which uses relationship between two-player zero-sum differential game with fractional cost function and two-player zero-sum differential game with the cost function including a parameter.

Since the control, uncertainty and state variables are coupled via system dynamics in an input-affine form, the Newton-type optimisation algorithm with recursive calculation of the performance criterion gradients and Hessians with respect to the weights of the approximation functions is proposed. The methodology of recursive computation is based on the results of previous studies published in [17, 19, 21]. The algorithm presented in this thesis is an extension toward second order partial derivatives calculation. This recursive computation requires time discretisation of the overall problem, and for this purpose multistep Adams method is used. By using the Newton's method the faster convergence to a solution than in the case of the conjugate gradient algorithm in [17, 19, 21] is achieved. While in our previous works sub-optimal problem is considered, in this thesis, an algorithm which finds optimal $\mathscr{L}_2$-gain solution is developed. We show that the solution corresponds to a particular value of single parameter which can be found by subgradient method. Jacobian and Hessian matrices of the nonlinear dynamics with respect to the state vector are calculated using automatic differentiation (AD). Application of AD provides significant reduction of the algorithm computational time and improved accuracy than numerical differentiation applied in [21].

We develop an algorithm such that system dynamics are not included in the performance criterion as equality constraints, but rather included directly through derivation of gradients and Hessians that appear in the Newton-type minimax optimal computation of the approximation functions weights. Hence, in comparison with the common nonlinear programming-based algorithms that use penalty function method or method of Lagrange multipliers in order to get unconstrained reformulations, the proposed algorithm has no high-dimensional sparse structure.

Since the performance criterion is nondifferentiable due to min max operator, the subgradient method is used. The subgradient method is known to be simple algorithm because of its low computational cost. The Newton's method with line search strategy satisfying the Wolfe

conditions is employed. A line search method satisfying the Wolfe conditions is introduce in order to globalize the Newton's method, i.e. to insure the convergence from any starting point.

In order to recursively calculate the first and the second order derivatives that appear in the Newton's method, the time discretisation of system dynamics based on multistep Adams method is carried out. It is shown that Adams method can be transformed into causal state-space form and this fact, in comparison with popular Runge-Kutta method, significantly simplifies the calculation of derivatives. More specifically, the k-th order Runge-Kutta method requires the k computations in a sampling time, while Adams method requires only one computation. Discrete-time results converge towards continuous-time by decreasing the step size and by increasing the order of Adams method. In this way we are able to calculate the gradients and Hessians of the performance criterion with respect to the approximation functions weights. A solution to this problem is obtained by performing some elementary chain rule arithmetic, which results in recursive adjustment of the constant approximation functions weights. Therefore, the proposed algorithm provides the minimax optimal computation of the constants, so that we have continuous-time nonlinear controller which guarantee the best performance in the presence of the continuous-time uncertainty.

Furthermore, Chapter 4 is also concerned with $\mathscr{L}_2$-gain optimisation of input-affine nonlinear systems controlled by analytic fuzzy logic system. Unlike the conventional fuzzy-based strategies, the nonconventional analytic fuzzy control method does not require an explicit fuzzy rule base. The presented approach is based on the fuzzy basis function expansion as an approximate realisation of the control and uncertainty variables. Instead of using conventional linguistic fuzzy IF-THEN rules, we use an analytical determination of the positions of the centres of the output fuzzy sets suggested in [22, 23]. In this thesis we prove that the fuzzy system without rule base has universal approximation property.

Chapter 5: *Stability analysis of the proposed control law with application to Euler-Lagrange systems.* The subject of this chapter is the Lyapunov-based $\mathscr{L}_2$ stability analysis of nonlinear Euler-Lagrange systems in closed-loop with proposed form of the control law. Since, in the general case of nonlinear dynamical systems the construction of Lyapunov function is not easy, in this chapter we consider the control law with certain properties that make

construction of Lyapunov function much easier, and thus the determination of $\mathscr{L}_2$ stability conditions.

Chapter 6: *Controller synthesis of the electrohydraulic systems.* The main objective of this chapter is to apply an approach of the $\mathscr{L}_2$-gain performance criterion gradients and Hessians calculation, which is presented in Chapter 4, for controller synthesis of electro-hydraulic servo-systems (EHSS), both in simulations and experiments. Regarding the controlled output variable, three major types of EHSS have been investigated: the rotational motion control system, the linear motion control system and the force control system.

Classical approaches, like PID regulators and linear static state feedback controllers for hydraulic drives, do not give satisfactory performance. Due to the existing limitations of such approaches various feedback linearisation, adaptive, backstepping and intelligent control algorithms have emerged. However, to the knowledge of the author, the problem of a nonlinear $\mathscr{L}_2$-gain optimal control of hydraulic actuator has not been investigated yet.

Chapter 7: *Conclusion.* This chapter summarises the main contributions of the dissertation and presents several recommendations for future research.

Ključne riječi (Keywords)

Ključne riječi:

- $\mathscr{L}_2$ optimalno upravljanje
- Minimaks optimizacija
- Afini nelinearni dinamički sustavi
- Rekurzivne matrične relacije
- Ljapunovljeva analiza stabilnosti
- Elektrohidraulički sustavi

Keywords:

- $\mathscr{L}_2$ optimal control
- Minimax optimisation
- Affine nonlinear dynamical systems
- Recursive matrix relations
- Lyapunov stability analysis
- Electrohydraulic systems

Popis oznaka

Oznaka	Opis
$\mathbf{d}$	Vektor neodređenosti koje djeluju na sustav
t	Vrijeme, [s]
$\mathbf{u}$	Vektor upravljanja
$\mathbf{x}$	Vektor stanja sustava
$\mathbf{y}$	Vektor mjerenih izlaza sustava
$\mathbf{z}$	Vektor izlaza sustava kojima se želi upravljati
$\mathbf{0}$	Nul matrica
$\mathbf{1}$	Matrica jedinica
$\mathbf{I}$	Jedinična matrica
$\mathbf{e}_i$	Jedinični vektor
$C^{(\cdot)}$	Klase funkcija koje imaju neprekidne derivacije do reda $(\cdot)$ uključivo
$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva
$\overline{\mathbb{R}}$	Komplement skupa realnih brojeva
$\mathbb{R}^n$	n-dimenzionalni vektorski prostor
$\mathbb{R}_+$	Skup nenegativnih realnih brojeva
$\mathscr{H}_{(\cdot)}$	Hardyjevi prostori

$\mathscr{L}_{(\cdot)}$	Lebesguevi prostori
$\mathrm{vec}(\cdot)$	Operator vektorizacije
$\otimes$	Kroneckerov produkt
$\oplus$	Kroneckerova suma
$\odot$	Hadamardov produkt
$\nabla_{(\cdot)}$	Diferencijalni operator
$\|\cdot\|_{\mathscr{L}_2}$	$\mathscr{L}_2$ norma
$\|\cdot\|$	Euklidska norma
$\|\cdot\|$	Apsolutna vrijednost
$(\cdot)_0$	Početna vrijednost
$(\cdot)^*$	Optimalna vrijednost
$\hat{(\cdot)}$	Aproksimacijska vrijednost
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Coriolisova matrica, [N m/s], [N s]
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$	Vektor gravitacijskog djelovanja, [N], [N m]
$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangeova funkcija, [J]
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	Matrica inercije, [kg], [kg m^2]
$\mathbf{q}$	Vektor poopćenih (upravljanih) koordinata, [rad], [m]
$\dot{\mathbf{q}}$	Poopćena brzina, [rad/s], [m/s]
$\ddot{\mathbf{q}}$	Poopćeno ubrzanje, [rad/s^2], [m/s^2]
$R(\dot{\mathbf{q}})$	Rayleighova disipacijska funkcija, [J/s]
$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Kinetička energija, [J]
$U(\mathbf{q})$	Potencijalna energija, [J]
τ	Vektor sila/momenata u upravljanim koordinatama, [N], [N m]
A_1	Površina hidrauličkog cilindra na strani klipa, [m^2]
A_2	Površina hidrauličkog cilindra na strani klipnjače, [m^2]
A_v	Površina otvora servo razvodnika, [m^2]
B	Koeficijent viskoznog prigušenja hidromotora, [N m s]

b	Koeficijent viskoznog prigušenja mehaničkog dijela elektrohidrauličkog sustava, [N s/m]
C_d	Koeficijent istjecanja proporcionalnog ventila
C_L	Koeficijent istjecanja hidromotora, [m^3/s/Pa]
c	Koeficijent krutosti mehaničkog dijela elektrohidrauličkog sustava, [N/m]
D_m	Specifični radni volumen hidromotora, [m^3/rad]
F	Sila na klipnjači cilindra, [N]
F_f	Sila Coulombovog trenja, [N]
F_L	Vanjska opteretna sila koja djeluje kao poremećaj, [N]
f_v	Pilasta funkcija volumena u svakoj komori hidromotora, [m^3]
J_t	Moment inercije hidromotora, [kg m^2]
k_v	Koeficijent pojačanja proporcionalnog ventila, [m^2/V]
l	Maksimalni hod klipa cilindra, [m]
m	Ukupna masa pomičnog dijela elektrohidrauličkog sustava, [kg]
$p_1,\ p_2$	Tlakovi u komorama cilindra/hidromotora, [Pa]
p_L	Tlak opterećenja, [Pa]
p_s	Tlak napajanja, [Pa]
p_a	Tlak spremnika, [Pa]
$Q_1,\ Q_2$	Protočni volumeni kroz komore cilindra/hidromotora, [m^3/s]
Q_L	Protočni volumen opterećenja kao srednji protok u komore cilindra/hidromotora, [m^3/s]
Q_{max}	Maksimalna dobava crpke, [m^3/s]
T_L	Moment opterećenja koji djeluje kao poremećaj, [N m]
u	Ulazni napon proporcionalnog ventila, [V]
u_{max}	Maksimalni ulazni napon proporcionalnog ventila, [V]
V_0	Prosječni volumen tekućine sadržane u svakoj komori hidromotora, [m^3]
$V_1,\ V_2$	Volumeni komora cilindra/hidromotora, [m^3]
$V_{01},\ V_{02}$	Poluvolumeni komora cilindra, [m^3]
w	Gradijent površine otvora proporcionalnog ventila, [m^2/m]
x_p	Pomak klipa cilindra, [m]

y_v	Pomak klipa proporcionalnog ventila, [m]
β	Modul stišljivosti hidrauličkog ulja, [N/m^2]
θ	Kutni pomak vratila hidromotora, [rad]
$\dot{\theta}$	Kutna brzina vratila hidromotora, [rad/s]
$\dot{\theta}_{max}$	Maksimalna kutna brzina vratila hidromotora, [rad/s]
ρ	Gustoća hidrauličkog ulja, [kg/m^3]

Napomena: Sve gore navedene oznake, kao i preostale, objašnjene su detaljnije u tekstu na mjestu pojavljivanja.

Popis slika

4.1 Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o varijabli stanja (primjer 4.1). . . 70
4.2 Varijabla stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.1). 71
4.3 Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.1). 71
4.4 Norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija (primjer 4.1). 71
4.5 Varijable stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.2). 74
4.6 Upravljačke varijable i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.2). 74
4.7 Norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija (primjer 4.2). 75
4.8 Varijable stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.3). 77
4.9 Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.3). 77
4.10 Ilustracija sedlaste točke (primjer 4.3). 77

6.1 Shematski prikaz rotacijskog elektrohidrauličkog sustava. 93
6.2 Fotografija eksperimentalnog postava rotacijskog elektrohidrauličkog servo sustava. 94
6.3 Shematski prikaz translacijskog elektrohidrauličkog sustava. 95
6.4 Fotografija eksperimentalnog postava translacijskog elektrohidrauličkog servo sustava. 95
6.5 Shematski prikaz elektrohidrauličke preše. 97
6.6 Fotografija eksperimentalnog postava elektrohidrauličke preše. 98
6.7 Shematski dijagram rotacijskog elektrohidrauličkog sustava za izvod matematičkog modela. 100

6.8 Shematski dijagram translacijskog elektrohidrauličkog sustava za izvod matematičkog modela. . . . 104
6.9 Shematski dijagram elektrohidrauličke preše za izvod matematičkog modela. . . . 107
6.10 Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara rotacijskog elektrohidrauličkog sustava. . . . 111
6.11 Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara translacijskog elektrohidrauličkog sustava. . . . 112
6.12 Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara elektrohidrauličke preše. . . . 113
6.13 Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. . . . 116
6.14 Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: odstupanje od željene brzine. . . . 116
6.15 Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu. . . . 117
6.16 Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija. . . . 117
6.17 Eksperimentalni rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. . . . 118
6.18 Eksperimentalni rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: upravljački napon u ovisnosti o vremenu. . . . 118
6.19 Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. . . . 121
6.20 Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu. . . . 122
6.21 Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: odstupanje od željene pozicije. . . . 122
6.22 Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija. . . . 122

6.23 Eksperimentalni rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. 123
6.24 Eksperimentalni rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: upravljački napon u ovisnosti o vremenu. 124
6.25 Simulacijski rezultati upravljanja silom: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. . . 126
6.26 Simulacijski rezultati upravljanja silom: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu. . 127
6.27 Simulacijski rezultati upravljanja silom: odstupanje od željene sile. 127
6.28 Simulacijski rezultati upravljanja silom: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija. 127
6.29 Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom predloženog algoritma: varijable stanja u ovisnosti o vremenu. 128
6.30 Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom predloženog algoritma: upravljački napon u ovisnosti o vremenu. 129
6.31 Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom PI regulatora: varijable stanja i upravljački napon u ovisnosti o vremenu. 129

Popis tablica

6.1 Vrijednosti parametara rotacijskog elektrohidrauličkog sustava. 111
6.2 Vrijednosti parametara translacijskog elektrohidrauličkog sustava. 112
6.3 Vrijednosti parametara elektrohidrauličke preše. 113

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Motivacija

Kod većine realnih dinamičkih sustava u procesu upravljanja javljaju se različite vrste neodređenosti koje su u općem slučaju nepoznate. Osim vanjskih utjecaja, neodređenosti u sustavu predstavljaju još nemodelirana dinamika, promjenjivi parametri i sl.

Idealni upravljački zakon bi trebao postići neosjetljivost sustava na neodređenosti. Međutim, pokazalo se da su uvjeti pod kojima se to može postići rijetko zadovoljeni. Zbog toga je cilj projektirati upravljački zakon koji će jamčiti zadržavanje utjecaja neodređenosti ispod dozvoljene granice i asimptotski stabilizirati zatvoreni sustav. Pitanje koje se ovdje nameće je: kako matematički definirati mjeru (normu) utjecaja neodređenosti na dinamiku sustava?

Ako se razmatra kauzalni[1] afini dinamički nelinearni sustav, tj. nelinearni sustav s linearnom ovisnošću o vektorima upravljanja i neodređenosti, u prostoru stanja, tada se kao mjeru izabire $\mathscr{L}_2$-norma. U kontekstu upravljanja dinamičkim sustavima, važno je razmatrati najmanju gornju među (supremum) omjera $\mathscr{L}_2$-norme vektora izlaznih signala kojima se želi upravljati i $\mathscr{L}_2$-norme vektora neodređenosti, tj. $\mathscr{L}_2$ pojačanje (engl. $\mathscr{L}_2$ *gain*) sustava. Dakle, problem se sastoji od određivanja zakona upravljanja koji interno stabilizira zatvoreni sustav i minimizira $\mathscr{L}_2$ pojačanje od neodređenosti prema izlazu sustava. Problem je najprije bio postavljen za linearne sustave, gdje je potrebno minimizirati $\mathscr{H}_\infty$-normu matrice prijenosnih funkcija, pa je zbog toga poznat kao $\mathscr{H}_\infty$ upravljanje.

[1] Sustav je kauzalan ako vrijednost izlaza u nekom trenutku t ovisi jedino o vrijednostima ulaza do trenutka t.

Rješavanje $\mathscr{H}_\infty$ problema temelji se na Hamilton-Jacobi-Isaacsovoj (HJI) jednadžbi (ili nejednadžbi). U slučaju linearnih dinamičkih sustava problem se svodi na rješavanje matrične algebarske Riccatijeve jednadžbe vrlo dobro poznatim metodama.

U nelinearnom slučaju HJI parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda vrlo je teško ili nemoguće riješiti, a ne može imati globalno analitičko rješenje čak niti u vrlo jednostavnim slučajevima, na primjer nekim skalarnim sustavima.

1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

U posljednja dva desetljeća robusnost upravljačkih zakona predstavlja jedan od najintenzivnije istraživanih problema iz teorije upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima te je tretirana u velikom broju znanstvenih radova. Matematička formulacija robusne optimizacije, a time i robusnog optimalnog upravljanja, temelji se na uvođenju različitih pretpostavki o neodređenostima u sustavu. Prema tome, modeliranje neodređenosti jednako je važno kao i modeliranje samog dinamičkog procesa. Jedan pristup je modelirati neodređenosti kao slučajne varijable s pripadajućom distribucijom vjerojatnosti [24, 25, 26, 27]. Međutim, u fokusu ove disertacije je deterministički pristup.

Povijesno gledajući, glavna motivacija razvoja teorije robusnog upravljanja bila je prevladavanje nerobusnosti Kalmanovog linearnog kvadratičnog Gaussovog regulatora koja je pokazana u [28]. Značajan broj radova obrađuje $\mathscr{H}_\infty$ kriterij robusnosti. Glavni razlog leži u činjenici da se time ostvaruje optimalna robusnost upravljačkog sustava što je nužan preduvjet za njegovu praktičnu implementaciju. Elegantni prikaz rješenja u prostoru stanja standardnog linearnog $\mathscr{H}_\infty$ problema u [29] omogućio je aktivnosti i u području upravljanja nelinearnim sustavima.

Matematička formulacija standardnog problema nelinearnog $\mathscr{H}_\infty$ upravljanja može se pronaći u [8, 12, 13, 14, 15]. Umjesto termina „nelinearno $\mathscr{H}_\infty$ upravljanje" u nekim radovima, na primjer [12, 13], koristi se „nelinearno $\mathscr{L}_2$ upravljanje", budući da u vremenskoj domeni $\mathscr{H}_\infty$-norma nije ništa drugo nego inducirana $\mathscr{L}_2$-norma nelinearnog sustava. U [12, 13], primjenom teorije disipativnosti dinamičkih sustava [30, 31], razmatrani su uvjeti egzistencije glatkog rješenja HJI jednadžbe preko invarijantnih mnogostrukosti Hamiltonijanovih vekto-

rskih polja za slučaj upravljanja u povratnoj vezi po svim varijablama stanja. Pokazana je veza tog rješenja s Hamiltonijanima pripadajuće Riccatijeve jednadžbe lineariziranog problema. Također, dokazana je stabilnost zatvorenog sustava. Egzistencija slabog rješenja HJI parcijalne diferencijalne jednadžbe razmatrana je u [32].

U radovima [33, 34] razmatrana je analiza i sinteza nelinearnog $\mathscr{H}_\infty$ upravljanja u smislu algebarskih nelinearnih matričnih nejednadžbi (engl. *Nonlinear Matrix Inequalities* - NLMI). NLMI imaju oblik dobro poznatih linearnih matričnih nejednadžbi (engl. *Linear Matrix Inequalities* - LMI) ovisnih o varijablama stanja, pa je zbog toga za njihovo rješavanje moguće primijeniti metode konveksne optimizacije. Nažalost, za razliku od linearnog slučaja, rješenje NLMI samo po sebi nije dovoljna garancija egzistencije željenog regulatora.

Sa stanovišta teorije diferencijalnih igara [7], sinteza upravljačkog zakona prema $\mathscr{H}_\infty$ kriteriju može se promatrati kao problem u kojem je vektor upravljanja varijabla koja minimizira kriterij optimalnosti, dok je vektor neodređenosti varijabla koja maksimizira kriterij optimalnosti. Zbog toga se ovaj problem naziva minimaks optimalno upravljanje [8].

Nemogućnost općenitog analitičkog rješavanja HJI jednadžbe rezultiralo je mnogim aproksimacijskim metodama kojima se rješava takozvani sub-optimalni $\mathscr{H}_\infty$ problem kod kojeg je iznos $\mathscr{L}_2$ pojačanja sustava unaprijed zadan. U nastavku se daje pregled novijih radova iz ovog područja istraživanja.

Kod pristupa predloženog u [35] pokazano je da se HJI jednadžba može riješiti inverznom metodom analogno skalarnoj kvadratnoj jednadžbi s gradijentom glatke skalarne funkcije kao nepoznanicom. Problem je sveden na faktorizaciju vektorske algebarske jednadžbe koju autori nazivaju *jednadžba diskriminante*. Glavni nedostatak ovog pristupa je taj što nakon rješavanja jednadžbe diskriminante dobiveni vektor gradijenata ne mora predstavljati i simetrično rješenje HJI jednadžbe i ne može se jamčiti pozitivna definitnost dobivenoga rješenja, a što su uvjeti asimptotske stabilnosti zatvorenog sustava.

U [36] je dokazano da je za određenu klasu nelinearnih sustava (one koje je moguće eksterno linearizirati i potpuno pogonjene mehaničke sustave) moguće odrediti $\mathscr{H}_\infty$ zakon upravljanja bez rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Izvedivost metodologije ovisi o dodatnim algebarskim nejednadžbama koje moraju biti lokalno zadovoljene u proširenom prostoru stanja.

Osnovna ideja pristupa predloženog u [1] sastoji se u rastavljanju HJI jednadžbe u niz linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i primjene Galerkinove metode s baznim funkcijama globalno definiranim na kompaktnom skupu. Kako bi se pokazala općenitost, metoda je ilustrirana na četiri simulacijska primjera fizikalnih sustava.

U [2] i [3] je razmatran problem s uključenim ograničenjima na upravljačku varijablu. Primijenjene su neuronske mreže s konstantnim težinama aktivacijskih funkcija. Vremenski promjenjive težine korištene su u [4]. U oba slučaja su dokazane uniformna konvergencija aproksimacije neuronskim mrežama prema rješenju HJI jednadžbe i stabilnost zatvorenog sustava.

Glavni nedostatak primjene Galerkinove metode [1, 37] i neuronskih mreža [2, 3, 4, 38] je taj što složenost rješavanja raste eksponencijalno s dimenzijom prostora stanja. Povećanjem broja baznih funkcija, povećava se potrebna memorija za pohranu parametara aproksimacije, uzrokujući porast vremena izvršavanja algoritma. Kako bi se izbjegao ovaj problem izbor baznih funkcija zahtijeva dublji uvid u dinamiku sustava kojim se želi upravljati. Drugi nedostatak je odabir polaznog vektora upravljanja koji stabilizira sustav, a što je u mnogim situacijama vrlo složeno.

U [39] je algoritam iz [40] poopćen na nelinearne sustave. Pokazano je da se pod određenim pretpostavkama, rješavanje HJI jednadžbe, kao poopćenja algebarske Riccatijeve jednadžbe s nedefinitnim kvadratnim članom, može zamijeniti problemom rješavanja niza Hamilton-Jacobi-Bellmanovih (HJB) jednadžbi, kao poopćenja algebarske Riccatijeve jednadžbe s negativno semidefinitnim kvadratnim članom. Rješenja niza HJB jednadžbi se rekurzivno aproksimiraju već postojećim metodama. Za razliku od primjene neuronskih mreža, kod izvedenog algoritma moguće je polazno rješenje HJI jednadžbe, a time i polazni vektor upravljanja izabrati na puno jednostavniji način, na primjer jednak nuli. Međutim, glavni nedostatak predloženog algoritma su dvije iteracijske petlje, unutarnja petlja za rješavanje HJB jednadžbe i vanjska petlja za rješavanje HJI jednadžbe nizom HJB jednadžbi. Takav postupak dovodi do suvišnih rješenja, a time trošenja resursa što rezultira niskom efikasnošću.

Svi prethodno navedeni algoritmi izvode se bez istovremene interakcije s objektom upravljanja. To znači da se najprije računaju fiksni parametri zakona upravljanja koji se zatim implementiraju na stvarnim regulatorima. Jedan oblik adaptivnog algoritma koji se temelji

na tehnikama učenja pojačavanjem predložen je u [5] i [6]. Upravljačke i poremećajne varijable se aproksimiraju neuronskim mrežama čiji se optimalni parametri računaju u realnom vremenu, tj. istovremeno s odvijanjem procesa upravljanja.

Inverzno optimalno robusno upravljanje [41, 42, 43, 44] je jedan od alternativnih pristupa za analitičko određivanje $\mathscr{H}_\infty$ zakona upravljanja bez rješavanja HJI jednadžbe. Glavna ideja je projektirati regulator koji je optimalan s obzirom na funkcional performansi izveden na osnovu Ljapunovljeve analize stabilnosti. U ovom pristupu lokalna funkcija cilja je *a posteriori* određena, dok je kod ostalih pristupa funkcija cilja *a priori* zadana.

Iako su objavljeni mnogi znanstveni radovi koji se bave teorijskim razmatranjima $\mathscr{H}_\infty$ problema upravljanja i njegovom praktičnom implementacijom ovo je i dalje vrlo aktivno područje istraživanja. Još uvijek ne postoji jedan zadovoljavajući općeniti pristup. Svi pristupi imaju svoje prednosti i nedostatke.

1.3 Cilj i hipoteza rada

Glavni cilj istraživanja je izvod algoritma za rješavanje problema minimaks optimalnog upravljanja afinim nelinearnim dinamičkim sustavima pri čemu se direktno optimira iznos pripadajućeg $\mathscr{L}_2$ pojačanja. Strukturu algoritma čine unazadno računanje ulančanih derivacija, subgradijentna metoda, Newtonov algoritam, višekoračna Adamsova metoda i automatsko diferenciranje. Pri tome je važno:

- dobro definirati područje u prostoru stanja gdje će aproksimacijske funkcije komponenata vektora upravljanja i neodređenosti biti zadovoljavajuće;
- unatoč greškama odbacivanja aproksimacije komponenata vektora upravljanja i neodređenosti, osigurati stabilnost zatvorenog sustava u smislu Ljapunova;
- učinkovito riješiti problem povećanja složenosti algoritma s obzirom na povećanje dimenzije prostora stanja;
- relativno brzo izvršavati algoritam na računalu uz niske memorijske zahtjeve;
- ostvariti laku praktičnu implementaciju dobivenih rješenja.

Iz prethodno izloženog može se postaviti temeljna hipoteza ove disertacije: moguće je izvesti algoritam za sintezu zakona upravljanja afinim nelinearnim dinamičkim sustavima direktnim rješavanjem problema minimaks optimizacije pripadajućeg $\mathscr{L}_2$ pojačanja, koji nije zasnovan na rješavanju Hamilton-Jacobi-Isaacsove parcijalne diferencijalne jednadžbe. Nadalje, adekvatnom analizom moguće je postavljanje dodatnih uvjeta na parametre aproksimacijskih funkcija koji će osigurati stabilnost zatvorenog sustava u smislu Ljapunova. Također, primjenom predloženog algoritma moguća je takva sinteza nelinearnih regulatora elektrohidrauličkih sustava kojima se ostvaruje veća robusnost upravljačkog sustava nego s konvencionalnim regulatorima.

1.4 Metodologija istraživanja

Metodologija izvoda algoritma najvećim dijelom je temeljena na rezultatima dosadašnjih istraživanja autora publiciranih u radovima [17, 18, 19]. Navedeni radovi su nastali kao proširenje pristupa unazadnog računanja gradijenata iz [21], gdje je predloženi algoritam namijenjen za računanje optimalnih upravljačkih varijabli u otvorenom krugu bez prisustva neodređenosti. U [17] je razmatran problem optimalnog upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima u konačnom vremenskom intervalu s minimaks kriterijem optimalnosti. Upravljačke varijable su tretirane kao jednoslojna neuronska mreža sa saturacijskom aktivacijskom funkcijom ovisnom o varijablama stanja sustava. Komponente vektora neodređenosti su tretirane kao proizvoljne vremenske funkcije. Predloženi algoritam ima strukturu sličnu BPTT (engl. *Back Propagation Through Time*) algoritmu i za minimaks optimizaciju koristi metodu konjugiranog gradijenta. Efikasnost algoritma ilustrirana je na robotskom sustavu s dva stupnja slobode gibanja. U [18] je izveden numerički algoritam za $\mathscr{H}_\infty$ upravljanje, pri čemu su komponente vektora upravljanja i neodređenosti definirane kao aproksimacijske funkcije s linearnom ovisnošću o vremenski invarijantnim parametrima koji se trebaju odrediti. Parametri se optimiraju prema minimaks kriteriju optimalnosti. Vrlo dobra točnost i numerička stabilnost algoritma pokazana je na dva standardna primjera s analitičkim rješenjima. Modifikacija u smislu vremenski varijabilnih parametara aproksimacijskih funkcija, algoritma iz [18] predložena je u [19]. Razmatran je slučaj stabilizacije dinamike vozila primjenom dife-

rencijalnog kočenja i aktivnog prednjeg upravljanja. Neodređenost je dodana u nelinearne karakteristike sile na prednjim i stražnjim kotačima. To je razumljiva neodređenost budući da se koeficijent trenja na cesti razlikuje u prisutnosti na primjer leda, snijega ili šljunka. Provedene su računalne simulacije, a dobiveni rezultati mogu se primijeniti i na realnim automobilskim sustavima.

U ovoj disertaciji razmatraju se komponente vektora upravljanja i neodređenosti u obliku aproksimacijskih funkcija s linearnom ovisnošću o parametrima. Određuju se parametri aproksimacijskih funkcija takvi da $\mathscr{L}_2$ pojačanje zatvorenog sustava bude minimalno. Drugim riječima, rješava se minimaks optimizacijski problem pri čemu parametri aproksimacijskih funkcija upravljačkih varijabli minimiziraju $\mathscr{L}_2$ pojačanje, dok istovremeno parametri aproksimacijskih funkcija neodređenosti maksimiziraju $\mathscr{L}_2$ pojačanje. Ograničenja ovog optimizacijskog problema predstavlja nelinearna dinamika sustava.

Za iterativno određivanje parametara primjenjuje se Newtonova metoda. Budući da je Newtonova metoda algoritam kod kojeg se u okolici optimalnog rješenja broj točnih decimalnih mjesta udvostručuje nakon svake iteracije, postiže se brža konvergencija prema rješenju nego u slučaju gradijentnog algoritma primjenjenog u radovima [17, 18, 19].

Kod Newtonovog algoritma javlja se potreba za računanjem parcijalnih derivacija prvog i drugog reda kriterija optimalnosti s obzirom na parametre aproksimacijskih funkcija. Budući da se vektori upravljanja i neodređenosti (time implicitno i parametri aproksimacijskih funkcija) tretiraju kao nezavisne varijable povezane jednadžbama dinamike sustava, koristi se rekurzivno ulančano deriviranje. Ovo zahtijeva vremensku diskretizaciju ukupnog problema i pri tome se koristi višekoračna Adamsova metoda.

Jacobijani i Hessijani nelinearnih funkcija dinamike sustava s obzirom na stanja sustava računaju se metodom automatskog diferenciranja (AD). AD podrazumijeva da je diferencijabilnu funkciju, zadanu računalnim kodom, moguće rastaviti na niz elementarnih funkcija jednog argumenta (trigonometrijske, eksponencijalne, logaritamske) i niz osnovnih operacija s dva argumenta (zbrajanje, množenje, dijeljenje, potenciranje). Osnovna ideja AD je primjena lančanoga deriviranja elementarnih funkcija.

Nadalje, izravnom Ljapunovljevom metodom provedena je analiza stabilnosti koja omogućuje postavljanje dodatnih uvjeta na parametre aproksimacijskih funkcija komponenata

vektora upravljanja i neodređenosti. Ovi uvjeti se u cjelokupnom procesu optimizacije mogu tretirati kao skup ograničenja tipa nejednakosti ili se mogu iskoristiti za odgovarajuće početno postavljanje parametara optimizacijskog algoritma.

Efikasnost algoritma testirana je na primjerima nelinearnih sustava kod kojih je moguće analitički riješiti HJI jednadžbe te time egzaktno odrediti komponente vektora upravljanja i neodređenosti. Time se direktno ocjenjuje izračunava li predloženi algoritam traženo rješenje problema s dovoljnom točnošću.

U okviru rada na ovoj disertaciji ostvarena je primjena algoritma na elektrohidrauličkim sustavima (EHS) razvijenim u okviru projekta Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta, Republike Hrvatske *Optimalno upravljanje energijom u fluidnoj tehnici i elektromehaničkim sustavima*. Eksperimentalna provjera provedena je na tri postava i to: modulu za upravljanje rotacijskim gibanjem [45], modulu za upravljanje translacijskim gibanjem [46] i modulu za upravljanje silom [47].

1.5 Doprinos i prikaz sadržaja disertacije

Očekivani znanstveni doprinos disertacije sadrži sljedeće:

- novi algoritam za sintezu zakona upravljanja kojim se optimira $\mathscr{L}_2$ pojačanje nelinearnih dinamičkih sustava bez rješavanja Hamilton-Jacobi-Isaacsove jednadžbe;
- integracija subgradijentne metode, Newtonove metode, Adamsove metode te automatskog diferenciranja u jedan algoritam, s ciljem poboljšanja točnosti rješenja uz kraće vrijeme računanja;
- postavljanje dodatnih uvjeta na upravljačke varijable Ljapunovljevom analizom stabilnosti;
- eksperimentalna provjera predložene strategije na elektrohidrauličkim sustavima i usporedba s konvencionalnim metodama.

Tekst disertacije izložen je u sedam poglavlja uključujući uvod i zaključak. Sažeti prikaz poglavlja disertacije dan je u nastavku.

Drugo poglavlje: *Matematičke preliminarije i notacija.* Nakon uvodnih razmatranja u prvom poglavlju, u drugom poglavlju objašnjena je notacija koja se koristi u ovoj disertaciji. Također, iznesene su definicije i osnovna svojstva matematičkih pojmova kao što su: gradijent, Jacobijan, Hessijan, norme vektora i funkcija, operator vektorizacije, Kroneckerovi produkt i suma, konveksnost i sl.

Treće poglavlje: $\mathscr{L}_2$ *upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima.* Razmatra se nelinearna $\mathscr{H}_\infty$ teorija kauzalnih vremenski kontinuiranih dinamičkih sustava u prostoru stanja. Izvedeni su dovoljni uvjeti rješivosti sub-optimalnog problema $\mathscr{L}_2$ upravljanja po varijablama stanja sa stanovišta koncepta disipativnosti te također i sa stanovišta teorije diferencijalnih igara. Iako je iznesena teorija vrlo dobro poznata, ovdje se izlaže jer je potrebna kako bi se razumjeli doprinosi disertacije sadržani u sljedećim poglavljima.

Četvrto poglavlje: *Sinteza algoritma za minimaks optimalno upravljanje.* Prikazuje se cjeloviti okvir izvoda novog algoritma za sintezu zakona upravljanja kojim se optimira $\mathscr{L}_2$ pojačanje nelinearnih dinamičkih sustava bez rješavanja HJI parcijalne diferencijalne jednadžbe. Poglavlje predstavlja detaljniju inačicu izvoda temeljenog na rezultatima dosadašnjih istraživanja autora publiciranih u radovima [17, 18, 19, 20].

Peto poglavlje: *Analiza stabilnosti predloženog zakona upravljanja s primjenom na Euler-Lagrangeove sustave.* Ljapunovljevim pristupom izvedeni su uvjeti $\mathscr{L}_2$ stabilnosti predloženog oblika zakona upravljanja s primjenom na nelinearne sustave čija se dinamika može opisati Euler-Lagrangeovim jednadžbama. Budući da, u općenitom slučaju nelinearnih dinamičkih sustava postavljanje Ljapunovljeve funkcije nije nimalo jednostavno, u ovom poglavlju razmatramo jedan zakon upravljanja s određenim svojstvima koja olakšavaju postavljanje Ljapunovljeve funkcije, a time i izvod uvjeta $\mathscr{L}_2$ stabilnosti.

Šesto poglavlje: *Sinteza regulatora elektrohidrauličkih sustava.* Daje se opis eksperimentalnih postava elektrohidrauličkih sustava koji su razvijeni u okviru znanstvenog projekta *Optimalno upravljanje energijom u fluidnoj tehnici i elektromehaničkim sustavima* i korišteni u ovoj disertaciji za potrebe praktične implementacije regulatora projektiranog izvedenim algoritmom. Postavljaju se nelinearni matematički modeli navedenih sustava. Nadalje, kako bi se izbjegli mogući numerički problemi provodi se normiranje varijabli stanja. Prikazuju se postupci i rezultati eksperimentalne identifikacije parametara postavljenih fizikalnih mo-

dela. Djelovanje projektiranog regulatora uspoređuje se s konvencionalnim regulatorom u simulacijama kao i eksperimentalnim putem.

Sedmo poglavlje: *Zaključak.* Na temelju rezultata prikazanih u prethodnim poglavljima, u sedmom poglavlju sažeti su zaključci i predložene smjernice daljnjeg istraživanja.

Poglavlje 2

Matematičke preliminarije i notacija

U ovoj disertaciji koristi se notacija koja je prilično standardna. Matrice su predstavljene velikim, masnim slovima. Svi vektori su stupčani, osim gradijenta koji je retčani, i predstavljeni su malim masnim slovima. Skalarne veličine su predstavljene malim kosim slovima. Komponente vektora i matrica su realni brojevi. Prostor realnih vektora duljine n je označen s $\mathbb{R}^n$, dok je prostor realnih matrica dimenzije $m \times n$ označen s $\mathbb{R}^{m\times n}$. Komponente matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ označavamo s a_{ij} za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$.

Simbol $^{\mathrm{T}}$ označava transponiranje matrice ili vektora. $\mathbf{I}_n$ je jedinična matrica dimenzije $n \times n$, $\mathbf{1}_{m\times n}$ je matrica kojoj su svi elementi jednaki jedinici i $\mathbf{0}_{m\times n}$ je nul-matrica dimenzije $m \times n$, ili jednostavnije $\mathbf{I}$, $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ ako se dimenzije mogu trivijalno odrediti iz konteksta. $\mathbf{e}_i$ je vektor odgovarajuće dimenzije kojemu je i-ti element jednak 1 dok su mu svi ostali elementi 0 i naziva se jedinični vektor.

Simbol $\frac{\partial}{\partial x_i}$ predstavlja parcijalnu derivaciju prvog reda po i-toj komponenti vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dok $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ predstavlja parcijalnu derivaciju drugog reda za $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Simbol $\nabla_{\mathbf{x}}$ označava gradijent po vektorskoj varijabli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tj. $\nabla_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Ako za neku funkciju postoje derivacije svakog reda do uključivo k i neprekidne su tada tu funkciju zovemo C^k-funkcija. U ovom radu uglavnom se spominju C^0, C^1 i C^2-funkcije.

U potpoglavljima koja slijede navest ćemo neke matematičke pojmove i standardne rezultate koji će se koristiti u daljnjem tekstu disertacije, prvenstveno kod samog izvoda algoritma. Izlaganja najvećim dijelom slijede reference: za definicije i svojstva vektorskih i funkcijskih normi [48, 49], za Kroneckerov produkt, vektorizaciju matrica, vektorske i matrične derivacije

[50, 51, 52, 53, 54, 55], za definicije i svojstva konveksnih funkcija i skupova [56, 57, 58], za aproksimaciju [59, 60].

2.1 Definicije i svojstva vektorskih i funkcijskih normi

Norma vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je funkcija koja preslikava vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ u prostor nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_+$, odnosno $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Funkcija $\|\cdot\|$ je norma vektora ako vrijede sljedeća svojstva:

- $\|\mathbf{x}\|_p \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$
- $\|\mathbf{x}\|_p = 0$ ako i samo ako $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $\|\alpha\mathbf{x}\|_p = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|_p, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p, \quad \forall \mathbf{x}, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ - nejednakost trokuta.

U ovom radu koriste se tzv. p-norme vektora koje se definiraju izrazom

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

Ako je $p = 1$ imamo l^1-normu vektora

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{2.2}$$

Ako je $p = 2$ imamo Euklidsku normu vektora

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}, \tag{2.3}$$

koja se najčešće koristi pa se označava bez indeksa, odnosno $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|$. Ako je $p = \infty$ tada imamo l^∞ normu vektora definiranu na sljedeći način

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|. \tag{2.4}$$

Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i simetričnu matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ skalarna funkcija definirana sa

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \tag{2.5}$$

naziva se *kvadratna forma*. Realna kvadratna forma $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ je:

- pozitivno definitna ako i samo ako je $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- negativno definitna ako i samo ako je $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- negativno semidefinitna ako i samo ako je $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Realna simetrična matrica $\mathbf{A}$ je:

- pozitivno definitna (negativno definitna) ako i samo ako su sve vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ pozitivne (negativne),
- pozitivno semidefinitna (negativno semidefinitna) ako i samo ako su sve vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ nenegativne (nepozitivne).

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vlastite vrijednosti realne simetrične matrice $\mathbf{A}$ i

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\} = \min_i \lambda_i, \quad \lambda_{\max}\{\mathbf{A}\} = \max_i \lambda_i, \tag{2.6}$$

tada za svaki realni vektor $\mathbf{x}$ vrijedi

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}\|\mathbf{x}\|^2. \tag{2.7}$$

Funkcijski prostor ili *vektorski prostor funkcija*, za razliku od klasičnih vektorskih prostora gdje vektori predstavljaju orijentirane duljine unutar n-dimenzionalnog prostora, je skup funkcija koje zadovoljavaju određena svojstva.

Za n-dimenzionalne vremenske funkcije $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, definiramo prostor integrabilnih (engl. *integrable*) funkcija $\mathscr{L}_p$, gdje je norma funkcije jednaka

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathscr{L}_p} = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \geq 1. \tag{2.8}$$

U oznaci $\mathscr{L}_p$ indeks p odnosi se na p-normu kojom definiramo funkcijski prostor. Vektorska norma $\|\mathbf{f}(t)\|$ u izrazu (2.8) može biti bilo koja vektorska norma. Kao i kod vektorskih normi načešće se koriste $\mathscr{L}_2$ i $\mathscr{L}_\infty$ funkcijske norme.

$\mathscr{L}_2$ norma funkcije definirana je sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathscr{L}_2} = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{f}(t)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(t) dt}. \tag{2.9}$$

Ako neki signal $\mathbf{f}(t)$ ima konačnu $\mathscr{L}_2$ normu, $\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathscr{L}_2} < \infty$, kažemo da je $\mathbf{f}(t) \in \mathscr{L}_2$, iz čega proizlazi fizikalno značenje da $\mathbf{f}(t)$ ima konačnu energiju.

$\mathscr{L}_\infty$ norma funkcije definirana je sljedećim izrazom

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathscr{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}(t)\|. \tag{2.10}$$

Ako neki signal $\mathbf{f}(t)$ ima konačnu $\mathscr{L}_\infty$ normu, $\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathscr{L}_\infty} < \infty$, kažemo da je $\mathbf{f}(t) \in \mathscr{L}_\infty$, iz čega proizlazi fizikalno značenje da $\mathbf{f}(t)$ ima konačnu amplitudu za sve $t \geq 0$.

2.2 Kroneckerov produkt i vektorizacija matrice

Definicija 2.1 (Kroneckerov produkt)**.** *Kroneckerov produkt matrica* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *i* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ *definiran je s*

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}]_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

gdje je $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$.

Za Kroneckerov produkt vrijede sljedeća svojstva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} &\neq \mathbf{B}\otimes\mathbf{A},\\
\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\otimes\mathbf{B}+\mathbf{A}\otimes\mathbf{C},\\
(\mathbf{B}+\mathbf{C})\otimes\mathbf{A} &= \mathbf{B}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{A},\\
(k\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} &= \mathbf{A}\otimes(k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}),\\
\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})\otimes\mathbf{C},\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}) &= \mathbf{AC}\otimes\mathbf{BD},\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

U slučaju kvadratnih matrica, $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, vrijede sljedeća svojstva

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B}),\\
\det(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{A})^n\det(\mathbf{B})^m,\\
\mathrm{rank}(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) &= \mathrm{rank}(\mathbf{A})\mathrm{rank}(\mathbf{B}),\\
(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{B}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Definicija 2.2 (Kroneckerova suma)**.** *Ako su* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$*,* $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m\times m}$*, tada je Kroneckerova suma matrica definirana s*

$$\mathbf{A}\oplus\mathbf{B} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{I}_m + \mathbf{I}_n\otimes\mathbf{B}. \tag{2.14}$$

Ako su $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$*, tada je Kroneckerova suma matrica definirana s*

$$\mathbf{a}\oplus\mathbf{b} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n\otimes\mathbf{b}. \tag{2.15}$$

Definicija 2.3 (Vektorizacija matrice)**.** *Vektorizacija matrice je transformacija matrice* $\mathbf{A}\in$

$\mathbb{R}^{m\times n}$ *u vektor* $\mathrm{vec}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^k$, $k = m \cdot n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{12} & \dots & a_{m2} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Operator vektorizacije je linearan operator, tj. vrijedi

$$\mathrm{vec}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathrm{vec}(\mathbf{A}) + \beta\mathrm{vec}(\mathbf{B}). \tag{2.17}$$

Vrijede sljedeća svojstva operatora vektorizacije matrice i Kroneckerovog produkta matrica:

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}(\mathbf{AX}) &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X}), \\ \mathrm{vec}(\mathbf{XB}) &= (\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_m)\mathrm{vec}(\mathbf{X}), \\ \mathrm{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) &= (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_m)\mathrm{vec}(\mathbf{X}), \\ \mathrm{vec}(\mathbf{AXB}) &= (\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{X}).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Definicija 2.4 (Hadamardov produkt)**.** *Za dvije matrice istih dimenzija* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *Hadamardov produkt definiran je s*

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [a_{ij}b_{ij}]_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

gdje je $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Kao izravnu posljedicu prethodne definicije imamo sljedeća svojstva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \odot \mathbf{A}, \\
(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} &= \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \odot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \\
(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3 Vektorske i matrične derivacije

Neka je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ skalarna funkcija n nezavisnih varijabli. Uobičajeno je da se varijable smatraju elementima vektora $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^{\mathrm{T}}$. Funkcija f je diferencijabilna u $\mathbf{x}$ ako postoji vektor $\mathbf{g}$ dimenzije $1 \times n$ takav da je

$$\lim_{\mathbf{y} \to 0} \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \mathbf{g} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = 0, \tag{2.21}$$

gdje je $\mathbf{g} \cdot \mathbf{y}$ skalarni produkt, a $\| \cdot \|$ je bilo koja vektorska norma od $\mathbf{y}$.

Definicija 2.5 (Gradijent)**.** *Ako postoji* $\mathbf{g}$ *koji zadovoljava* (2.21)*, tada se taj vektor naziva gradijent funkcije* $f(\mathbf{x})$ *po vektorskoj varijabli* $\mathbf{x}$ *čiji su elementi* $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$*,* $i = 1, \ldots, n$*, tj.*

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Definicija 2.6 (Hessijan skalarne funkcije)**.** *Hessijan skalarne funkcije* $f(\mathbf{x})$ *je matrica čiji su elementi* $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$*,* $i,\, j = 1, 2, \ldots, n$*, tj.*

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Funkcija $f(\mathbf{x})$ je diferencijabilna na domeni S ako $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ postoji za svaki $\mathbf{x} \in S$ i neprekidno diferencijabilna ako je $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ neprekidna funkcija od $\mathbf{x}$, što označavamo s $f \in C^1(S)$. Slično, $f(\mathbf{x})$ je dvaput difrencijabilna na S ako $\nabla^2_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ postoji za svaki $\mathbf{x} \in S$ i dvaput

neprekidno difrencijabilna ako je $\nabla^2_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ neprekidna na S, što označavamo s $f \in C^2(S)$. Kada je $f(\mathbf{x})$ dvaput neprekidno diferencijabilna, Hessijan je simetrična matrica, odnosno

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \ \ \forall i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{2.24}$$

Neka je sada $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $S \subset \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija s varijablama $\mathbf{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^{\mathrm{T}}$.

Definicija 2.7 (Jacobijan vektorske funkcije)**.** *Jacobijan vektorske funkcije* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *je matrica čiji su elementi* $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, *tj.*

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Definicija 2.8 (Hessijan vektorske funkcije)**.** *Hessijan vektorske funkcije* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *je matrica drugih parcijalnih derivacija po vektorskoj varijabli* $\mathbf{x}$ *i dan je izrazom*

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \\ \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Očito je da Hessijan vektorske funkcije po vektorskoj varijabli u općem slučaju, tj. za $m \geq 2$, nije kvadratna matrica, pa prema tome nije niti simetrična matrica. Međutim, za

matricu definiranu s (2.26) kažemo da je retčano simetrična (engl. *row symmetric*). U daljnim izlaganjima, u izrazima gdje se pojavljuju Hessijani vektorske (ili matrične) funkcije znak za transponiranje Jacobijana unutar vec(·) operacije ćemo izostavljati.

Primjenom operacije vektorizacije, proširenje prethodnih pojmova na matrične funkcije je jednostavno. Neka je $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^{m\times p}$ matrična funkcija definirana na skupu $S \subset \mathbb{R}^n$. Za matričnu funkciju $\mathbf{F}$ možemo definirati odgovarajuću vektorsku funkciju $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^{mp}$ kao $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{vec}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$, pa je Jacobijan i Hessijan matrične funkcije po vektorskoj varijabli lako dobiti na osnovu Definicija 2.7 i 2.8.

Ako je $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ diferencijabilna funkcija od $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{y}$ je diferencijabilna funkcija od $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tada je, prema pravilu ulančanog deriviranja, Jacobijan od funkcije $\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ po vektoru $\mathbf{x}$ jednak

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \tag{2.27}$$

Ako je $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ diferencijabilna funkcija od $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{y}$ je diferencijabilna funkcija od $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tada je, na osnovu izraza (2.27) te primjenom pravila Kroneckerovog produkta iz Potpoglavlja 2.2, Hessijan od funkcije $\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$ po vektoru $\mathbf{x}$ jednak

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\mathbf{x}}\mathbf{z}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) &= \nabla_{\mathbf{x}}\,\text{vec}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{z}) = \nabla_{\mathbf{x}}\,\text{vec}(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{x}}\left[(\mathbf{I}_n \otimes \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z})\cdot\text{vec}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y})\right] = \nabla_{\mathbf{x}}\left[\left(\nabla^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}\otimes\mathbf{I}_p\right)\cdot\text{vec}(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z})\right] = \\ &= (\mathbf{I}_n\otimes\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z})\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\,\text{vec}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}) + \left(\nabla^{\mathrm{T}}_{\mathbf{x}}\mathbf{y}\otimes\mathbf{I}_p\right)\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\,\text{vec}(\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{z})\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.4 Konveksne i konkavne funkcije i skupovi

Definicija 2.9 (Konveksna funkcija)**.** *Funkcija* $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je konveksna ako za svaki par točaka* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ *i svaki* $0 \le \alpha \le 1$ *vrijedi*

$$f\left(\alpha\mathbf{x}_2 + (1-\alpha)\mathbf{x}_1\right) \le \alpha f(\mathbf{x}_2) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}_1), \tag{2.29}$$

tj. ako odjeljak pravca koji spaja dvije točke potpuno leži iznad ili na grafu funkcije $f(\mathbf{x})$*.*

Definicija 2.10 (Konkavna funkcija)**.** *Funkcija* $f(\mathbf{x})$ *je konkavna ako za svaki par točaka*

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ *i svaki* $0 \leq \alpha \leq 1$ *vrijedi*

$$f\left(\alpha\mathbf{x}_2 + (1-\alpha)\mathbf{x}_1\right) \geq \alpha f(\mathbf{x}_2) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}_1), \tag{2.30}$$

tj. ako odjeljak pravca koji spaja dvije točke potpuno leži ispod grafa funkcije $f(\mathbf{x})$.

Definicija 2.11 (Konveksni skup)**.** *Skup* $\mathfrak{X}$ *je konveksan ako i samo ako za sve* $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{X}$ *i svaki* $0 \leq \alpha \leq 1$ *vrijedi*

$$\alpha\mathbf{x}_2 + (1-\alpha)\mathbf{x}_1 \in \mathfrak{X}, \tag{2.31}$$

tj. ako sve točke na odjeljku pravca koji spaja $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{X}$ *pripadaju skupu* $\mathfrak{X}$.

Ako se u Definicije 2.9 i 2.10 postave stroge nejednakosti ($<$, odnosno $>$), tada se radi o strogoj konveksnosti, odnosno strogoj konkavnosti funkcija. Iz (2.29) i (2.30) se može zaključiti da je negativna konveksna funkcija konkavna funkcija i obrnuto. Također, suma konveksnih (konkavnih) funkcija je opet konveksna (konkavna) funkcija.

Kao dodatak gornjim definicijama sljedeći teoremi se mogu koristiti kao test konveksnosti (konkavnosti) pojedinih funkcija.

Teorem 2.1. *Funkcija* $f(\mathbf{x}) \in C^1$ *je konveksna ako za svaki par točaka* $\mathbf{x}_1$ *i* $\mathbf{x}_2$ *imamo*

$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1). \tag{2.32}$$

Dokaz. Vidjeti na primjer u [58, Poglavlje 3.1.3]. ■

Teorem 2.2. *Funkcija* $f(\mathbf{x}) \in C^2$ *je konveksna ako je Hessijan* $\nabla^2_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ *pozitivno semidefinitna matrica.*

Dokaz. Vidjeti na primjer u [57, Poglavlje 4.3]. ■

Pretpostavimo da za konveksnu funkciju $f(\mathbf{x})$ postoje dva lokalna minimuma $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ te neka je $f(\mathbf{x}_2) < f(\mathbf{x}_1)$. Budući da je $f(\mathbf{x})$ konveksna funkcija, $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ moraju zadovoljiti relaciju (2.32) iz koje proizlazi

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{s} \leq 0, \tag{2.33}$$

gdje je $\mathbf{s} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Prethodni izraz pokazuje da vrijednost funkcije $f(\mathbf{x})$ može i dalje biti smanjena u smjeru $\mathbf{s}$ iz točke $\mathbf{x}_1$. Ovo je u kontradikciji s polaznom pretpostavkom da je $\mathbf{x}_1$ lokalni minimum. Prema tome, ne može postojati više od jednog minimuma konveksne funkcije, tj. lokalni minimum konveksne funkcije je globalni minimum.

Definicija 2.12 (Subgradijent konveksne funkcije)**.** *Subgradijent konveksne funkcije* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *u točki* $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^n$ *je svaki vektor* $\boldsymbol{g}$ *koji zadovoljava*

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_c) + \boldsymbol{g}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.34}$$

Skup svih subgradijenata konveksne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ u točki $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^n$ zovemo subdiferencijal i označavamo ga s $\partial f(\mathbf{x}_c)$. Skup $\partial f(\mathbf{x}_c)$ je neprazan ograničen, konveksan i zatvoren, vidjeti na primjer [61, Poglavlje 2.5], [62, Poglavlje 1.2], [63, Poglavlje 1.2].

Ako je f diferencijabilna u $\mathbf{x}_c$, onda je $\partial f(\mathbf{x}_c) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_c)$. Stoga je subgradijent poopćenje gradijenta na konveksne nediferencijabilne funkcije.

2.5 Aproksimacija

Teorija aproksimacije je područje matematike koje se bavi problemima približne reprezentacije neke funkcije $f(x)$, definirane na nekom skupu S (najčešće interval oblika $[a,\ b]$), drugom funkcijom $\hat{f}(x)$ koja ovisi o nekim parametrima $c_1,\ c_2, \ldots, c_m$ koje treba odrediti, tj.

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(x;\ c_1, c_2, \ldots, c_m). \tag{2.35}$$

Određivanje parametara aproksimacijske funkcije obično se svodi na problem minimizacije norme pogreške $f(x) - \hat{f}(x)$ u nekom odabranom vektorskom prostoru funkcija definiranih na domeni S.

Aproksimacijske funkcije mogu biti linearne ili nelinearne, pri čemu se (ne)linearnost ne odnosi na oblik funkcije $\hat{f}$ nego na njenu ovisnost o parametrima c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. U ovoj disertaciji ćemo koristiti linearne aproksimacijske funkcije.

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \hat{f}_i(x), \tag{2.36}$$

gdje su $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_m$ poznate funkcije. Polinomi su najčešće korištene baze linearnih aproksimacijskih funkcija. U tom slučaju $\hat{f}(x)$ se može zapisati u sljedećem obliku

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} c_{i+1} x^{m-i}. \tag{2.37}$$

Nadalje, važni su sljedeći teoremi o uniformnoj aproksimaciji funkcije čiji se dokazi mogu pronaći na primjer u [59, Poglavlje 6.], [60, Poglavlje 2.] i [64, Poglavlje 7.].

Teorem 2.3 (Weierstraßov teorem)**.** *Neka je f neprekidna realna funkcija na realnom intervalu $[a, b]$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom p tako da za svaki x u $[a, b]$ vrijedi*

$$\sup_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| \le \varepsilon. \tag{2.38}$$

Skup $C[a, b]$ realnih neprekidnih funkcija na intervalu $[a, b]$ s normom $\|f\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ je Banachova algebra (tj. asocijativna algebra i Banachov prostor[1] tako da je $\|f\, g\| \le \|f\| \cdot \|g\|$ za sve f i g). Skup svih polinomnih funkcija formira podalgebru od $C[a, b]$ (tj. vektorski potprostor od $C[a, b]$ koji je zatvoren u odnosu na množenje funkcija), pa Weierstraßov teorem ustvari kaže da je skup svih polinoma gust u $C[a, b]$, vidjeti na primjer [60, Teorem 6., str. 7].

Teorem 2.4 (Stone-Weierstraßov teorem)**.** *Neka je X kompaktni Hausdorffov prostor[2], neka je $C(X)$ algebra realnih neprekidnih funkcija na X i neka je A podalgebra od $C(X)$ koja sadrži konstantnu funkciju. Tada, A je gust u $C(X)$ ako i samo ako razdvaja točke u X, tj. za različite točke $x, y \in X$ postoji funkcija $f \in A$ takva da je $f(x) \neq f(y)$.*

[1] Za detalje vidjeti na primjer [65, Prva glava: Poglavlje 4. i Treća glava: Poglavlje 1.8].
[2] Za detalje vidjeti na primjer [65, str. 726]

Poglavlje 3

$\mathscr{L}_2$ upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima

U ovom poglavlju izlažu se osnovni pojmovi iz teorije upravljanja koji uključuju $\mathscr{L}_2$ pojačanje nelinearnih dinamičkih sustava, odnosno, kako je prije navedeno, problem negdje poznat kao nelinearno $\mathscr{H}_\infty$ upravljanje. Izlaganja se najvećim dijelom temelje na referencama koje se bave: analizom nelinearnih sustava upravljanja [9, 10, 11]; $\mathscr{H}_\infty$ upravljanjem i srodnim minimaks problemima [8, 12, 13, 14, 15]; teorijom diferencijalnih igara [7, 16].

3.1 Afini nelinearni dinamički sustavi

Razmatra se kauzalni afini nelinearni sustav u prostoru stanja definiran na glatkoj mnogostrukosti[1] (engl. *manifold*) $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ u sljedećem obliku

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{d}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}, \\ \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \end{cases} \tag{3.1}$$

[1] Definicija glatke mnogostrukosti može se pronaći na primjer u [10, Dodatak A.3].

gdje su $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ vektor stanja, $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja koji pripada skupu $\mathcal{U}$ dozvoljenih upravljačkih ulaza, $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ vektor neodređenosti koji pripada skupu $\mathcal{D} \subset \mathscr{L}_2([t_0,\ t_f],\ \mathbb{R}^s)$[2] dozvoljenih neodređenosti. Vektor izlaza $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sadrži sva direktno mjerena stanja sustava Σ. Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$ je vektor izlaza kojima se želi upravljati. Nadalje, funkcije $\mathbf{f} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathbf{G}_1 : \mathcal{X} \to \mathscr{M}^{n\times m}(\mathcal{X})$, $\mathbf{G}_2 : \mathcal{X} \to \mathscr{M}^{n\times s}(\mathcal{X})$, $\mathbf{h} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^q$, $\mathbf{L} : \mathcal{X} \to \mathscr{M}^{q\times m}(\mathcal{X})$ su realne C^1-funkcije od $\mathbf{x}$.

Kako bi se olakšalo daljnja razmatranja uvode se sljedeće pretpostavke:

Pretpostavka 3.1. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *je jedinstvena ravnotežna točka, uz* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *i* $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ *sustava* Σ *te vrijedi* $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Pretpostavka 3.2. *Vektor* $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ *i matrica* $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ *su takvi da vrijedi* $\mathbf{h}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *i* $\mathbf{L}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ *za svaki* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Na osnovu Pretpostavke 3.2 imamo

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \Longrightarrow \|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2. \tag{3.2}$$

Uvođenjem Pretpostavke 3.2 izbjegli smo takozvani singularni problem. Više o rješavanju singularnog problema publicirano je u radovima [66] i [67].

Pretpostavka 3.3. *Početno stanje* $\mathbf{x}_0$ *je a-priori poznato.*

Također, važne su i sljedeće definicije:

Definicija 3.1 (Opazivost u nultom stanju)**.** *Sustav* Σ, *uz* $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ *za svaki* $t \geq 0$ *i izlaz* $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ *je opaziv u nultom stanju (engl. zero-state detectable), ako* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *i* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *za svaki* $t \geq 0$ *implicira* $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x} = 0$.

Definicija 3.2 (Osmotrivost u nultom stanju)**.** *Sustav* Σ, *uz* $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, *je osmotriv u nultom stanju (engl. zero-state observable), ako* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *i* $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ *za svaki* $t \geq 0$ *implicira* $\mathbf{x}(t) \equiv 0$.

[2]Ovdje $\mathscr{L}_2([t_0,\ t_f],\ \mathbb{R}^s)$ označava standardni Lebesgueov prostor vektorskih kvadratno-integrabilnih i ograničenih funkcija koje preslikavaju $[t_0,\ t_f] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$.

Definicija 3.3 (Ustaljivost)**.** *Sustav* Σ *je lokalno ustaljiv (engl. locally stabilizable), tj. postoji* C^0*-funkcija* $\boldsymbol{\mu} : U \subset \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *takva da je sustav* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ *lokalno asimptotski stabilan*[3]*. Sustav* Σ *je ustaljiv ako je* $U = \mathfrak{X}$*.*

Poznato je iz teorije disipativnosti [31, 68, 69] da je sustav (3.1) $\mathscr{L}_2$ stabilan, ako za sve početne uvjete $\mathbf{x}_0$, sve neodređenosti $\mathbf{d}$ i sve $t_f \geq t_0$ postoji funkcija akumulirane energije (engl. *storage function*) $V(\mathbf{x}) > 0$, koja je ujedno i Ljapunovljeva funkcija[4], takva da vrijedi nejednakost

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq \gamma^2 \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} - \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}, \quad \gamma > 0. \tag{3.3}$$

Ako izraz (3.3) integriramo u intervalu od t_0 do t_f dobit ćemo

$$V(\mathbf{x}(t_f)) - V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} - \gamma^2 \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\right) dt \leq 0, \tag{3.4}$$

a budući da je $V(\mathbf{x}(t_f)) \geq 0$ slijedi

$$\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} dt + 2V(\mathbf{x}(t_0)). \tag{3.5}$$

Prema tome možemo uvesti sljedeću definiciju:

Definicija 3.4 ($\mathscr{L}_2$ pojačanje)**.** $\mathscr{L}_2$ *pojačanje od* $\mathbf{d}$ *prema* $\mathbf{z}$ *sustava* Σ *je najmanja gornja međa (supremum) od* $\gamma > 0$ *koji zadovoljava*

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \leq \gamma^2 \|\mathbf{d}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \beta(\mathbf{x}_0), \tag{3.6}$$

za neku ograničenu C^0*-funkciju* $\beta : U \subset \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ *takvu da je* $\beta(\mathbf{0}) = 0$*.*

[3] Za definiciju lokalne asimptotske stabilnosti vidjeti Dodatak A.
[4] Za definiciju Ljapunovljeve funkcije vidjeti Dodatak A.

3.2 Formulacija upravljačkog problema i uvjeti optimalnosti

Općenito, problem optimalnog $\mathscr{L}_2$ upravljanja dinamičkim sustavima kod kojih su sve varijable stanja dostupne (mjerljive ili se mogu rekonstruirati) može se formulirati na sljedeći način:

Problem 3.1 (Optimalno $\mathscr{L}_2$ upravljanje po varijablama stanja)**.** *Problem optimalnog $\mathscr{L}_2$ upravljanja po varijablama stanja interno stabilnog sustava*[5] Σ *je odrediti zakon upravljanja* $\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t)$ *i „najgori slučaj"* $\mathbf{d}^* = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t)$ *tako da* $\gamma > 0$ *bude minimalan.*

Pretpostavka 3.4. *Funkcije* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, t)$ *i* $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}, t)$ *su* $\boldsymbol{\mu} \in C^1(\mathfrak{X})$, $\boldsymbol{\nu} \in C^1(\mathfrak{X})$.

Kako bi izveli uvjete optimalnosti, razmatrat ćemo rješavanje takozvanog sub-optimalnog $\mathscr{L}_2$ (ili nelinearnog $\mathscr{H}_\infty$) problema. Neka za sustav Σ postoji neki $\gamma \geq \gamma^*$ koji zadovoljava (3.6). Tada možemo formulirati problem minimaks optimalnog upravljanja na sljedeći način

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{d}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) = \int_{t_0}^{t_f} \left(\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2 \right) dt, \tag{3.7}$$

uz dinamička ograničenja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{d}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3.8}$$

na konačnom vremenskom horizontu $t_f > t_0$.

Definirajmo Hamiltonijan

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{d} \right) + \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{d}\|^2. \tag{3.9}$$

Ako odaberemo $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} V(\mathbf{x}, t)$ tada nužni uvjeti optimalnosti slijede iz principa minimuma,

[5] Ovdje pod pojmom interne ili unutarnje stabilnosti sustava podrazumijevamo da su svi unutarnji signali sustava (ili trajektorije sustava) ograničene, a što je ekvivalent asimptotskoj stabilnosti zatvorenog sustava uz $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

odnosno maksimuma, a oblika su (vidjeti na primjer [12, 13, 15])

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} H = 0 &\Longrightarrow \mathbf{u}^*(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2}\mathbf{G}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} V(\mathbf{x},t),\\ \nabla_{\mathbf{d}} H = 0 &\Longrightarrow \mathbf{d}^*(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\gamma^2}\mathbf{G}_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} V(\mathbf{x},t),\end{aligned} \tag{3.10}$$

gdje je V glatko pozitivno semidefinitno rješenje HJI jednadžbe

$$\begin{aligned}&\nabla_t V(\mathbf{x},t) + \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x},t)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4}\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x},t)\left[\frac{1}{\gamma^2}\mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{G}_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) - \right.\\ &\left. - \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{G}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]\nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} V(\mathbf{x},t) + \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \quad V(\mathbf{x}(t_f),t_f) = 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

HJI jednadžba može imati više od jednog pozitivno semidefinitnog glatkog rješenja. Minimalno nenegativno rješenje $V_a(\mathbf{x})$ je takvo da ne postoji drugo pozitivno semidefinitno rješenje $V(\mathbf{x})$ tako da je $V_a(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}) \geq 0$. U [12] je pokazano da je Hessijan od $V_a(\mathbf{x})$ rješenje opće algebarske Riccatijeve jednadžbe (engl. *General Algebraic Riccati Equation* - GARE). Ovo znači da je sustav Σ potrebno linearizirati oko ishodišta kako bi se dobilo GARE jednadžbu, a zatim od svih nenegativnih rješenja GARE jednadžbe izabrati ono koje odgovara stabilnoj invarijantnoj mnogostrukosti Hamiltonove matrice.

Nadalje, u [12] je također pokazano:

- ako je sustav Σ osmotriv u nultom stanju (Definicija 3.2), za zadani $\gamma > 0$, $V(\mathbf{x}) \geq 0$ je glatko rješenje HJI jednadžbe, tada sustav Σ ima $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\leq \gamma$ te je (uz $\mathbf{d} = \mathbf{0}$) lokalno asimptotski stabilan;

- ako je sustav Σ opaziv u nultom stanju (Definicija 3.1) i postoji $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ takav da je $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\leq \gamma$ i sustav je lokalno asimptotski stabilan tada postoji lokalno glatko rješenje $V(\mathbf{x}) \geq 0$ HJI jednadžbe.

3.3 Pristup na principu diferencijalnih igara

Najprije ćemo objasniti pojmove konveks-konkavna funkcija i sedlasta točka. Neka su $\mathscr{W} \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathscr{Z} \subset \mathbb{R}^m$ ograničeni i zatvoreni skupovi i neka je $f(\mathbf{w},\mathbf{z})$ neprekidna funkcija

definirana na $\mathscr{W} \times \mathscr{Z}$. Funkcija $f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ je konveks-konkavna ako je konveksna u $\mathbf{w} \in \mathscr{W}$ za svaki $\mathbf{z} \in \mathscr{Z}$ i konkavna u $\mathbf{z} \in \mathscr{Z}$ za svaki $\mathbf{w} \in \mathscr{W}$. Za vektorski par $(\mathbf{w}^*,\ \mathbf{z}^*) \in \mathscr{W} \times \mathscr{Z}$ kaže se da je sedlasta točka od $f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ na $\mathscr{W} \times \mathscr{Z}$ ako

$$f(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}) \leq f(\mathbf{w}^*, \mathbf{z}^*) \leq f(\mathbf{w}, \mathbf{z}^*), \tag{3.12}$$

za svaki $\mathbf{w} \in \mathscr{W}$, $\mathbf{z} \in \mathscr{Z}$.

Lema 3.1. *Neka je funkcija $f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ neprekidna na $\mathscr{W} \times \mathscr{Z}$ i neka su $\mathscr{W}$, $\mathscr{Z}$ ograničeni i zatvoreni skupovi. Tada, $f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ ima sedlastu točku na $\mathscr{W} \times \mathscr{Z}$ ako i samo ako*

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathscr{W}} \max_{\mathbf{z} \in \mathscr{Z}} f(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \max_{\mathbf{z} \in \mathscr{Z}} \min_{\mathbf{w} \in \mathscr{W}} f(\mathbf{w}, \mathbf{z}). \tag{3.13}$$

Dokaz. Vidjeti na primjer u [70, Lema 6.1]. ■

Maksimum i minimum u (3.13) su postignuti budući da je $f(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ neprekidna i $\mathscr{W}$, $\mathscr{Z}$ su zatvoreni i ograničeni.

Problem $\mathscr{L}_2$ optimalnog upravljanja (Problem 3.1) može se razmatrati kao diferencijalna igra, vidjeti na primjer [8, 16]. U tom slučaju vektor upravljanja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ je „igrač" koji minimizira (3.7) dok je vektor neodređenosti $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^s$ „igrač" koji maksimizira (3.7). Prema tome, možemo definirati diferencijalnu igru nulte sume (engl. *zero-sum differential game*) čija je optimalna vrijednost dana sljedećim izrazom

$$V^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{d}} J(\mathbf{x},\ \mathbf{u}, \mathbf{d}), \tag{3.14}$$

uz dinamička ograničenja (3.1).

Diferencijalna igra (3.14) ima jedinstveno rješenje ako je ispunjen Nashov uvjet [71]

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{d}} J(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{d}) = \max_{\mathbf{d}} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{d}). \tag{3.15}$$

Nužan uvjet za to je Isaacsov uvjet [7]

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{d}} H(\mathbf{x},\ \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}),\ \mathbf{u},\ \mathbf{d}) = \max_{\mathbf{d}} \min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x},\ \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}),\ \mathbf{u},\ \mathbf{d}), \tag{3.16}$$

gdje je $H(\mathbf{x},\, \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}),\, \mathbf{u},\, \mathbf{d})$ Hamiltonijan (3.9) pri čemu je $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} V(\mathbf{x})$. Lako se može vidjeti da su Hessijani od Hamiltonijana

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}}^2 H &= 2\,\mathbf{I} > \mathbf{0}, \\ \nabla_{\mathbf{d}}^2 H &= -2\gamma^2\,\mathbf{I} < \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

što znači da je Hamiltonijan (3.9) konveks-konkavna funkcija.

Prema tome, vektorski par $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$ iz (3.10) ostvaruje jedinstvenu sedlastu točku diferencijalne igre (3.14) tako da je

$$H(\mathbf{x},\, \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x})\mathbf{u}^*, \mathbf{d}) \leq H(\mathbf{x},\, \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}),\, \mathbf{u}^*,\, \mathbf{d}^*) \leq H(\mathbf{x},\, \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}),\, \mathbf{u},\, \mathbf{d}^*), \tag{3.18}$$

ili ekvivalentno

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{d}) \leq J(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*) \leq J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}^*). \tag{3.19}$$

Očito je s diferencijalnom igrom (3.14) povezana HJI jednadžba (3.11). U [8] je pokazano da ako je vrijednost igre (3.14) glatko minimalno pozitivno semidefinitno rješenje HJI jednadžbe (3.11) i sustav Σ je opaziv u nultom stanju (Definicija 3.1), tada je sustav u Nashovoj ravnoteži i vektorski par $(\mathbf{u}^*, \mathbf{d}^*)$ definiran izrazima (3.10) je sedlasta točka.

Dakle, na osnovu razmatranja u kontekstu teorije diferencijalnih igara može se zaključiti da $\mathscr{L}_2$ optimalno upravljanje pripada klasi minimaks optimizacijskih problema.

Poglavlje 4

Sinteza algoritma za minimaks optimalno upravljanje

U ovom poglavlju predlaže se jedan način određivanja upravljačkih varijabli i varijabli neodređenosti za optimalno $\mathscr{L}_2$ upravljanje (Problem 3.1) nelinearnim dinamičkim sustavima koji ne zahtjeva rješavanja Hamilton-Jacobi-Isaacsove jednadžbe (3.11). Budući da minimizacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja pripada klasi razlomačkih optimizacijskih problema, provedena je transformacija u parametarski optimizacijski problem koji uključuje minimaks optimizacijski potproblem, a čije se rješavanje svodi na traženje sedlaste točke diferencijalne igre.

Upravljačke varijable i varijable neodređenosti aproksimiraju se funkcijama s linearnom ovisnošću o konačnom broju konstantnih parametara. Za računanje ovih parametara predlaže se pristup koji se zasniva na integraciji subgradijentne metode, Newtonove metode, Adamsove metode te automatskog diferenciranja u jedan algoritam.

Poglavlje predstavlja proširenje pristupa temeljenog na rezultatima dosadašnjih istraživanja autora publiciranih u radovima [17, 18, 19, 20].

4.1 Formulacija optimizacijskog problema

Pristup rješavanju problema optimizacije $\mathscr{L}_2$ pojačanja u ovoj disertaciji temelji se na zamjeni komponenata vektora upravljanja i neodređenosti aproksimacijskim funkcijama s linearnom ovisnošću o konačnom broju vremenski invarijantnih parametara koje treba odre-

diti. Cilj nam je da upravljačke varijable eksplicitno ovise o varijablama stanja te u tom obliku budu jednostavne za praktičnu implementaciju. Također, želimo postići da numeričko rješenje uniformno konvergira prema optimalnom rješenju povećanjem reda kompleksnosti aproksimacije, tj. povećanjem broja parametara.

Budući da smo u prethodnom poglavlju uveli Pretpostavku 3.4, na osnovu Weierstraßovog teorema [72, str. 65] (koji se odnosi na polinomne aproksimacijske funkcije) te njegovih poopćenja [73, 74, 75, 76] (koja se odnose na nepolinomne oblike nelinearnih aproksimacijskih funkcija) o uniformnoj aproksimaciji glatkih funkcija, postoje konstante $p_j^i, r_j^i \in \mathbb{R}$ takve da i-tu komponentu vektora upravljanja i neodređenosti možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\hat{u}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_j^i \theta_j^i(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

$$\hat{d}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_\psi} r_j^i \psi_j^i(\mathbf{x}), \tag{4.2}$$

gdje su $\theta_j^i(\mathbf{x}) \in C^1(\mathfrak{X})$, $\psi_j^i(\mathbf{x}) \in C^1(\mathfrak{X})$ za koje vrijedi $\theta_j^i(\mathbf{0}) = 0$, $\psi_j^i(\mathbf{0}) = 0$. Linearni potprostori koje stvaraju skupovi $\{\theta_j^i(\mathbf{x})\}$ i $\{\psi_j^i(\mathbf{x})\}$ su gusti u normi Soboljeva $W^{1,\infty}$ [49].

Za dobro izabrane funkcije $\theta_j^i(\mathbf{x})$ i $\psi_j^i(\mathbf{x})$ imamo

$$|\hat{u}_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x})| < \varepsilon_{u_i}(\mathbf{x}), \tag{4.3}$$

$$|\hat{d}_i(\mathbf{x}) - d_i(\mathbf{x})| < \varepsilon_{d_i}(\mathbf{x}), \tag{4.4}$$

gdje su $\varepsilon_{u_i}(\mathbf{x})$ i $\varepsilon_{d_i}(\mathbf{x})$ pogreške aproksimacije. Vrijedi $\varepsilon_{u_i}(\mathbf{x}) \to 0$, $\varepsilon_{d_i}(\mathbf{x}) \to 0$ kada $n_\theta \to \infty$, $n_\psi \to \infty$, respektivno, dok za fiksne n_θ i n_ψ pogreške aproksimacije su ograničene konstantama na kompaktnom skupu. Dobro je poznato iz teorije aproksimacije (npr. [59, 60]), da je vrlo često moguće unaprijed naći koliko članova razvoja treba uzeti za zadanu točnost.

Jednadžbe (4.1) i (4.2) se mogu zapisati u sljedećem matričnom obliku

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\pi}, \tag{4.5}$$

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\rho}, \tag{4.6}$$

gdje su

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}^2(\mathbf{x}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\theta}^m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\psi}^2(\mathbf{x}) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\psi}^s(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta}^i(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \theta^i_1(\mathbf{x}) & \theta^i_2(\mathbf{x}) & \cdots & \theta^i_{n_\theta}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}^i(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \psi^i_1(\mathbf{x}) & \psi^i_2(\mathbf{x}) & \cdots & \psi^i_{n_\psi}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}^1 \\ \mathbf{r}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^i \equiv \begin{bmatrix} p^i_1 \\ p^i_2 \\ \vdots \\ p^i_{n_\theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^i \equiv \begin{bmatrix} r^i_1 \\ r^i_2 \\ \vdots \\ r^i_{n_\psi} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu prethodnog razmatranja problem koji je ovdje potrebno riješiti možemo formulirati na sljedeći način:

Problem 4.1 (Minimaks optimalno upravljanje)**.** *Potrebno je odrediti parametre $\boldsymbol{\pi}$ i $\boldsymbol{\rho}$ takve da $\mathscr{L}_2$ pojačanje zatvorenog kruga bude minimalno. Drugim riječima, prema Definiciji 3.4 potrebno je riješiti sljedeći minimaks optimizacijski problem:*

$$\lambda^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2_{\mathscr{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|^2_{\mathscr{L}_2} - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathscr{L}_2}} \right\}, \tag{4.8}$$

uz ograničenja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}, \tag{4.9}$$

pri čemu je minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje jednako $\gamma^* = \sqrt{\lambda^*(\mathbf{x}_0)}$.

U izrazu (4.8), u općenitom slučaju kada početni uvjeti $\mathbf{x}_0$ nisu poznati, $\beta(\mathbf{x}_0)$ predstavlja ograničenu C^0-funkciju za koju vrijedi $\beta(\mathbf{0}) = 0$ (vidjeti izraz (3.6)). Međutim, u ovoj disertaciji uveli smo pretpostavku da su početni uvjeti $\mathbf{x}_0$ *a-priori* poznati (vidjeti Pretpostavku 3.3). To znači da je $\beta(\mathbf{x}_0)$ ustvari konstantna vrijednost za izabrane početne uvjete i obično se u literaturi naziva *bias*, vidjeti na primjer [9, Poglavlje 5.].

Slučajem kada početni uvjeti $\mathbf{x}_0$ nisu poznati bave se, na primjer, radovi [77, 78, 79, 80]. Glavna ideja temeljena je na formulaciji problema u kojem se početni uvjeti također tretiraju kao neodređenosti, tj. varijable koje makasimiziraju kriterij optimalnosti. Pristup koji se predlaže u ovoj disertaciji mogao bi se proširiti na taj slučaj, a što će biti predmet budućih istraživanja.

Očito, Problem 4.1 pripada klasi razlomačkih optimizacijskih problema (engl. *fractional programming*). Standardna matematička formulacija ove klase problema, analiza i sinteza osnovnih algoritama za njihovo rješavanje te glavna područja primjene dani su u [81, 82].

4.2 Minimizacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja i računanje sedlaste točke

Za rješavanje Problema 4.1 mogu se koristiti metoda kaznenih funkcija ili metoda Lagrangeovih množitelja [83, Poglavlje 17., str. 497] kako bi se dinamika sustava (4.9) uključila u funkciju cilja (4.8). Time bi se dobio optimizacijski problem bez ograničenja koji se može riješiti uobičajenim algoritmima nelinearnog programiranja [84, 85, 86].

Kao što je pokazano u Potpoglavlju 3.3, $\mathscr{L}_2$ optimalno upravljanje dinamičkim sustavom ustvari se svodi na traženje sedlaste točke diferencijalne igre. U ovom potpoglavlju ćemo izvesti jedan oblik kombinacije subgradijentne metode za minimizaciju $\mathscr{L}_2$ pojačanja i Newtonovog algoritma za računanje sedlaste točke. Za razliku od nelinearnog programiranja, dinamika sustava nije uključena u funkciju cilja, nego se za rekurzivno računanje gradijenata i Hessijana koristi činjenica da su parametri $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\rho}$ i stanje sustava $\mathbf{x}$ povezani upravo preko dinamike sustava (4.9).

Za minimizaciju $\mathscr{L}_2$ pojačanja predlažemo Algoritam 1. Važno je primijetiti da u drugom koraku Algoritma 1, za razliku od drugih direktnih metoda optimalnog upravljanja, dinamika sustava nije uključena u funkciju cilja (4.10). Drugi korak Algoritma 1 bit će detaljnije objašnjen kasnije u radu.

Algoritam 1 Minimizacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja

Ulaz: $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Izlaz: μ^*.

1: Postaviti $k \leftarrow 0$.

2: Riješiti minimaks optimizacijski problem

$$J^*_{\mu_k} = \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2_{\mathscr{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|^2_{\mathscr{L}_2} - \mu_k \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathscr{L}_2} \right\}, \tag{4.10}$$

gdje su $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\pi}$ i $\boldsymbol{\rho}$ povezani dinamikom sustava (4.9).

3: Izračunati

$$\mu_{k+1} = \mu_k - c_k \, g_k, \tag{4.11}$$

gdje je g_k subgradijent od $J^*_{\mu_k}$ u μ_k, tj. $g_k \in \partial J^*_{\mu_k}$, dok je c_k korak minimizacije.

4: Ako je $|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq \varepsilon$ tada završiti proces, inače postaviti $k \leftarrow k+1$ i vratiti se na korak 2.

Treba primijetiti da u drugom koraku Algoritma 1 ustvari imamo $J^*_{\mu_k} = \beta_{\mu_k}(\mathbf{x}_0)$, gdje β predstavlja *bias* iz izraza (4.8). Ovo će biti jasnije objašnjeno u daljnjem izlaganju Propozicijom 4.1 i Korolarom 4.1. Također treba primijetiti da je J_μ univarijantna funkcija po parametru μ.

U drugom koraku Algoritma 1 primijenili smo transformaciju izraza (4.8) iz klase razlomačkih minimaks optimizacijskih problema u klasu parametarskih optimizacijskih problema. Vezu između ove dvije klase problema daje sljedeća propozicija:

Propozicija 4.1. *Algoritam 1 generira par* $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$ *koji je sedlasta točka problema* (4.8)*, tj. vrijedi*

a) za bilo koji $\varepsilon > 0$, $\mu^* \leq \lambda^*(\mathbf{x}_0) < \mu^* + \varepsilon$;

b) $\lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) \leq \mu^* \leq \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*)$.

Dokaz.

a) Budući da je $\mu^* > 0$, na osnovu [87, Teorem 4.1 i Teorem 4.4. (točka (1))] slijedi da postoji $\boldsymbol{\rho}^*$ takav da je

$$\min_{\boldsymbol{\pi}} J_{\mu^*}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*) \geq \beta_{\mu^*}(\mathbf{x}_0). \tag{4.12}$$

Iz (4.12) slijedi $J_{\mu^*}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*) \geq \beta_{\mu^*}(\mathbf{x}_0)$, tj. za svaki $\boldsymbol{\pi}$

$$\mu^* \leq \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*). \tag{4.13}$$

S druge strane, budući da je $\min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}) < \mu^* + \varepsilon$, iz [87, Propozicija 3.1 (točka (1))] slijedi

$$\min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} J_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}) < \beta_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0), \tag{4.14}$$

što pokazuje da postoji $\boldsymbol{\pi}^*$ takav da je $\max_{\boldsymbol{\rho}} J_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) < \beta_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$.

Dakle, za svaki $\boldsymbol{\rho}$, $J_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) < \beta_{\mu^*+\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$, tj. za svaki $\boldsymbol{\rho}$

$$\lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) < \mu^* + \varepsilon. \tag{4.15}$$

Prema tome, za $\boldsymbol{\rho}^*$ koji zadovoljava (4.13) proizlazi

$$\lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*) < \mu^* + \varepsilon. \tag{4.16}$$

Kombiniranjem (4.13) i (4.16) pokazuje se tvrdnja

$$\mu^* \leq \lambda^*(\mathbf{x}_0) < \mu^* + \varepsilon. \tag{4.17}$$

b) Na osnovu [87, Teorem 4.4. (točka (2))] slijedi da postoji $\boldsymbol{\pi}^*$ takav da je

$$\max_{\boldsymbol{\rho}} J_{\mu^*}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) \leq \beta_{\mu^*}(\mathbf{x}_0). \tag{4.18}$$

Iz (4.18) slijedi $J_{\mu^*}(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) \leq \beta_{\mu^*}(\mathbf{x}_0)$, tj. za svaki $\boldsymbol{\rho}$

$$\mu^* \geq \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}). \tag{4.19}$$

Kombiniranjem (4.19) i (4.13) pokazuje se tvrdnja

$$\lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) \leq \mu^* \leq \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*). \tag{4.20}$$

■

Iz prethodne propozicije, na osnovu rezultata iz [88], uz određene modifikacije možemo dokazati sljedeći korolar:

Korolar 4.1. *Vrijedi*

$$\mu^* = \lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*), \tag{4.21}$$

ako i samo ako

$$J_{\mu^*} = \beta(\mathbf{x}_0). \tag{4.22}$$

Dokaz. Neka su $\boldsymbol{\pi}^*$ i $\boldsymbol{\rho}^*$ rješenja problema (4.8). Tada imamo

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{\rho}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2} \leq \mu^* \leq \\ &\leq \min_{\boldsymbol{\pi}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

što implicira

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \leq \beta(\mathbf{x}_0) \leq \\ &\leq \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2, \end{aligned} \tag{4.24}$$

odakle slijedi

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathscr{L}_2}^2 = \beta(\mathbf{x}_0). \tag{4.25}$$

Iz (4.24) imamo $J_{\mu^*} = \beta(\mathbf{x}_0)$, dok iz (4.25) vidimo da je optimum postignut, na primjer, u $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$.

Neka su sada $\boldsymbol{\pi}^*$ i $\boldsymbol{\rho}^*$ rješenja problema (4.10) takvi da je

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \\
&\leq \beta(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \\
&\leq \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Iz gornjeg izraza dobivamo

$$\frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2} = \mu^*, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{\rho}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \leq \mu^* \leq \\
&\leq \min_{\boldsymbol{\pi}} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|_{\mathcal{L}_2}^2}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Iz (4.28) vidimo da je $\lambda(\mathbf{x}_0; \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*) = \mu^*$, dok iz (4.27) vidimo da je optimum postignut, na primjer, u $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$. ■

Budući da je funkcija J_μ općenito nediferencijabilna, u trećem koraku Algoritma 1 koristi se subgradijentna metoda koja je poznata kao relativno jednostavan algoritam i za koju je, u slučaju konveksnih problema, dokazana konvergencija. Također, za razliku od većine drugih algoritama nediferencijabilne optimizacije, subgradijentna metoda ne zahtijeva rješavanje dodatnih problema određivanja smjera traženja ili koraka konvergencije.

Kako bi osigurali konvergenciju subgradijentne metode potrebno je unaprijed odrediti niz $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ tako da bude zadovoljeno

$$c_k > 0, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty. \tag{4.29}$$

Konstantan korak minimizacije c_k bio bi neodgovarajući budući da funkcija kriterija optimalnosti može biti nediferencijabilna u optimalnoj točki, pa $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ nužno ne teži prema nuli, iako $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergira u optimalnu vrijednost.

Iako za subgradijentnu metodu ne postoji dovoljno dobar kriterij zaustavljanja, u četvrtom

koraku Algoritma 1 računanje se zaustavlja u iteraciji k^* tako da je $|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq \varepsilon$ te se $\mu_{k^*} = \mu^* = (\gamma^*)^2$ uzima kao dovoljno dobra aproksimacija $\mathscr{L}_2$ pojačanja dinamičkog sustava. O kriteriju zaustavljanja bit će govora i u Potpoglavlju 4.3.3. Više detalja o subgradijentnoj metodi može se naći u [61], [63] i [84, Poglavlje 6.3].

Sljedeća lema pokazuje svojstvo konkavnosti (vidjeti Definiciju 2.10) funkcije J_μ:

Lema 4.1. *Funkcija J_μ je konkavna s obzirom na parametar μ.*

Dokaz. Neka su proizvoljno izabrani μ_1 i μ_2, $\mu_1 \neq \mu_2$ i neka su definirani

$$\boldsymbol{\pi}_i \in \arg\min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_i \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}, \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{\rho}_i \in \arg\max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_i \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}, \tag{4.31}$$

za $i = 1, 2$. Tada za svaki $0 \leq \alpha \leq 1$ imamo

$$\begin{aligned}
&\alpha J_\mu(\mu_2) + (1-\alpha)\, J_\mu(\mu_1) = \\
&= \alpha \left(\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \\
&+ (1-\alpha) \left(\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_1\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_1 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_1\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \leq \\
&\leq \alpha \left(\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \\
&+ (1-\alpha) \left(\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_1 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) = \\
&= \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - (\alpha\mu_2 + (1-\alpha)\mu_1) \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

odakle slijedi

$$\alpha J_\mu(\mu_2) + (1-\alpha)\, J_\mu(\mu_1) \leq J_\mu(\alpha\mu_2 + (1-\alpha)\mu_1). \tag{4.33}$$

■

Lema 4.2. *Funkcija J_μ je nerastuća.*

Dokaz. Neka su izabrani μ_1 i μ_2 tako da je $\mu_1 > \mu_2$ i neka su definirani

$$\boldsymbol{\pi}_2 \in \arg\min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}, \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{\rho}_2 \in \arg\max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}. \tag{4.35}$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} J_\mu(\mu_2) &= \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} = \\ &= \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_2 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 > \\ &> \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_1 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_2\|_{\mathscr{L}_2}^2 \geq \\ &\geq \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_1 \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} = J_\mu(\mu_1). \end{aligned} \tag{4.36}$$

■

Na osnovu prethodnih rezultata, subgradijent (vidjeti Definiciju 2.12) od funkcije J_μ s obzirom na parametar μ se dobiva iz sljedeće propozicije:

Propozicija 4.2. *Subgradijent od $J_{\mu_k}^*$ s obzirom na μ_k je $-\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_k\|_{\mathscr{L}_2}^2$.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g = -J_\mu$. Iz Leme 4.1 i Leme 4.2 slijedi da je g konveksna u parametru μ i nepadajuća. Za bilo koji $\mu \in \mathbb{R}$, neka su $\boldsymbol{\pi}_\mu$ i $\boldsymbol{\rho}_\mu$ definirani sa

$$\boldsymbol{\pi}_\mu \in \arg\max_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \min_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ -\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}, \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\mu \in \arg\min_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \max_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ -\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}. \tag{4.38}$$

Tada, za fiksni μ i proizvoljni μ' imamo

$$\begin{aligned} g(\mu') - g(\mu) &= \max_{\boldsymbol{\pi}} \min_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ -\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu' \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \\ &\quad - \max_{\boldsymbol{\pi}} \min_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ -\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} = \\ &= \left(-\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_{\mu'}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu' \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu'}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \\ &\quad - \left(-\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \geq \\ &\geq \left(-\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu' \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) \\ &\quad - \left(-\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right) = \\ &= (\mu' - \mu) \, \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Iz prethodnog izraza proizlazi da je $\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_{\mu}\|_{\mathscr{L}_2}^2$ subgradijent od konveksne funkcije g po μ, tj. subgradijent od $J_{\mu_k}^*$ je $-\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}_k\|_{\mathscr{L}_2}^2$ uz

$$\boldsymbol{\pi}_k \in \arg\min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_k \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}, \tag{4.40}$$

$$\boldsymbol{\rho}_k \in \arg\max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \min_{\boldsymbol{\pi}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \mu_k \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \right\}. \tag{4.41}$$

■

Napomena 4.1. *Slično kao i u dokazu Propozicije 4.1 na osnovu rezultata iz [87] imamo*

$$\max_{\boldsymbol{\pi}} \min_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ -\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathscr{L}_2}^2 - \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathscr{L}_2}^2 + \mu' \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathscr{L}_2}^2 \right\} \geq \beta_{\mu'}(\mathbf{x}_0), \tag{4.42}$$

a slično kao i u dokazu Korolara 4.1 na osnovu rezultata iz [88] imamo

$$\beta_{\mu'}(\mathbf{x}_0) = g(\mu'), \tag{4.43}$$

iz čega slijedi nejednakost u izrazu (4.39).

Za rješavanje potproblema u drugom koraku Algoritma 1 koristimo Newtonovu metodu

kao što je opisano u Algoritmu 2.

Algoritam 2 Newtonova metoda za računanje sedlaste točke

Ulaz: $\boldsymbol{\xi}_0 \equiv \left[\boldsymbol{\pi}_0^{\mathrm{T}} \;\; \boldsymbol{\rho}_0^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

Izlaz: $\boldsymbol{\pi}^*$, $\boldsymbol{\rho}^*$.

1: Postaviti $j \leftarrow 0$.

2: Odrediti vektor smjera traženja $\mathbf{s}_j$ rješavanjem sustava linearnih jednadžbi

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)\, \mathbf{s}_j = -\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j). \tag{4.44}$$

3: Odrediti korak konvergencije $\eta_j > 0$ primjenom strategije pretraživanja po pravcu koja zadovoljava Wolfeove uvjete (vidjeti Algoritam 3).

4: Izračunati

$$\boldsymbol{\xi}_{j+1} = \boldsymbol{\xi}_j + \eta_j\, \mathbf{s}_j. \tag{4.45}$$

5: Ako je kriterij $\|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)\|_\infty \leq \epsilon$ ispunjen tada završiti proces, inače postaviti $j \leftarrow j+1$ i vratiti se na korak 2.

U izrazu (4.44) imamo:

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\pi}} J & -\nabla_{\boldsymbol{\rho}} J \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \begin{bmatrix} \nabla^2_{\boldsymbol{\pi}} J & \nabla^2_{\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\rho}} J \\ -\nabla^2_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi}} J & -\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J \end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

$$J = \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|^2_{\mathcal{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|^2_{\mathcal{L}_2} - \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathcal{L}_2}, \tag{4.47}$$

pri čemu su: $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} J \in \mathbb{R}^{n_\pi}$, $\nabla_{\boldsymbol{\rho}} J \in \mathbb{R}^{n_\rho}$, $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}} J \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$, $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$, $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\rho}} J \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\rho}$, $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi}} J \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\pi}$, $n_\pi = m \cdot n_\theta$, $n_\rho = s \cdot n_\psi$.

Maksimizacija funkcije cilja postigla se dodavanjem znaka minus ispred gradijenta $\nabla_{\boldsymbol{\rho}} J$ i Hessijana $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi}} J$ i $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J$. Budući da je $J \in C^2(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^{n_\xi}$, $n_\xi = n_\pi + n_\rho$, slijedi da je $\frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{\rho} \partial \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}}$, što znači da su $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}} J$ i $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J$ simetrične matrice te vrijedi $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\pi}} J = \left[\nabla^2_{\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\rho}} J\right]^{\mathrm{T}}$, što nadalje implicira da je $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ bisimetrična matrica, a to znači da vrijedi

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \left[\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})\right]^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})\, \mathcal{J} = \mathcal{J}\, \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.48}$$

gdje je $\mathcal{I}$ obrnuta jedinična matrica čiji su elementi dani s

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & j = n_\xi - i + 1, \\ 0, & j \neq n_\xi - i + 1. \end{cases} \tag{4.49}$$

Poznato je da na svakom mjestu minimuma ili maksimuma gradijent mora iščezavati. Dakle, računanje sedlaste točke funkcije J iz (4.47) ekvivalentno je rješavanju jednadžbe

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}, \tag{4.50}$$

odnosno rješavanju optimizacijskog problema

$$\min_{\boldsymbol{\xi}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})\|^2 \right\}. \tag{4.51}$$

Za numeričko rješavanje problema (4.51) koristi se iterativni proces (4.45) pri čemu se smjer traženja ili silaska izabire rješavanjem jednadžbe (4.44) – Newtonov algoritam (uz $\eta_j = 1$). Kao što je poznato, konvergencija Newtonove metode ovisi o izboru početne točke $\boldsymbol{\xi}_0$ koja mora biti dovoljno blizu točki optimuma $\boldsymbol{\xi}^*$. Lokalna svojstva Algoritma 2 dana su sljedećim propozicijama:

Propozicija 4.3. *U okolini točke optimuma linearni sustav* (4.44) *je dobro definiran.*

Dokaz. Budući da je u okolini točke optimuma funkcija J konveksna s obzirom na vektor $\boldsymbol{\pi}$ te za odgovarajući parametar μ konkavna s obzirom na vektor $\boldsymbol{\rho}$, slijedi da su Hessijani $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}} J$ i $-\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J$ pozitivno definitne matrice. Ovo implicira da je matrica $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)$ asimetrična pozitivno definitna, pa prema tome linearni sustav (4.44) je dobro definiran. ■

Propozicija 4.4. *Neka je $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)$ nesingularna matrica, a što je zadovoljeno budući da je u okolini točke optimuma pozitivno definitna. Tada Algoritam 2 ima sljedeća svojstva:*

a) završava s konačnim brojem iteracija;

b) niz iteracija $(\boldsymbol{\pi}_j, \boldsymbol{\rho}_j)$ konvergira prema rješenju $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$.

Dokaz.

a) Dokaz slijedi na osnovu [89, Teorem 4.4] uz očite modifikacije za slučaj maksimizacije.

b) Na osnovu [83, Teorem 3.5], dokaz slijedi iz činjenice da u četvrtom koraku Algoritma 2 možemo izabrati jedinični korak te iz činjenice da je funkcija kriterija optimalnosti J dvostruko diferencijabilna i da je $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)$ neprekidna Lipschitzova funkcija[1].

■

Napomena 4.2. *U dokazu Propozicije 4.3 se pod pojmom „odgovarajući parametar μ" podrazumijeva da parametar μ mora biti takav da član $-\mu\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathcal{L}_2}$ u izrazu (4.47) bude dominantan u odnosu na ostale članove koji implicitno ovise o $\boldsymbol{\rho}$ preko dinamike sustava. Drugim riječima, parametar μ mora biti dovoljno veliki da bi se osigurala lokalna konkavnost funkcije J s obzirom na $\boldsymbol{\rho}$.*

Kako bi se osigurala konvergencija metode iz bilo koje početne točke uobičajeno je koristiti korak konvergencije tako da su zadovoljeni dovoljni uvjet silaska (engl. *sufficient decrease condition*) i uvjet zakrivljenosti (engl. *curvature condition*) poznati pod zajedničkim imenom kao Wolfeovi uvjeti. Uvođenjem koraka konvergencije η_j u trećem koraku Algoritma 2 definirali smo tzv. modificiranu (s regulacijom koraka) Newtonovu metodu.

Za određivanje koraka konvergencije koristimo metodu pretraživanja po pravcu (engl. *line search method*) uz ispunjavanje Wolfeovih uvjeta kao što je opisano u Algoritmu 3. Detalji vezani za metodu pretraživanja po pravcu i Wolfeove uvjete mogu se naći u [83, Poglavlje 3.].

[1]Za funkciju $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^m$, gdje je $S \subset \mathbb{R}^n$, kaže se da je neprekidna Lipschitzova funkcija na nekom skupu $A \subset S$ ako postoji konstanta $L > 0$ tako da je $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$ za svaki $\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 \in A$ [83].

Algoritam 3 Pretraživanje po pravcu uz Wolfeove uvjete

Ulaz: $\boldsymbol{\xi}_j$, $\mathbf{s}_j$, $J(\boldsymbol{\xi}_j)$, $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)$, $0 < c_1 < c_2 < 1$, $\beta \in (0,\, 1)$.

Izlaz: η_j.

1: Izabrati početni η_0 i postaviti $l \leftarrow 0$.

2: Sve dok η_l ispunjava Wolfeove uvjete

$$J(\boldsymbol{\xi}_j + \eta_l \mathbf{s}_j) \leq J(\boldsymbol{\xi}_j) + c_1 \eta_l \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)\mathbf{s}_j, \tag{4.52}$$

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j + \eta_l \mathbf{s}_j)\mathbf{s}_j \geq c_2 \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)\mathbf{s}_j, \tag{4.53}$$

računati

(i) $\eta_{l+1} = \beta \eta_l$,

(ii) $l \leftarrow l + 1$.

3: Postaviti $\eta_j = \eta_l$.

Treba primijetiti da strategija za rješavanje Problema 4.1 predložena Algoritmima 1, 2 i 3 zahtjeva odgovarajuću inicijalizaciju, tj. odgovarajući izbor aproksimacijskih funkcija i početnih parametara $\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\rho}_0$ i μ_0. Ukoliko su oni neodgovarajući ne može se garantirati da je zakon upravljanja dobiven za „najgori slučaj" (engl. *worst case*) neodređenosti. Da li je i u tom slučaju rješenje dobiveno za „najgori slučaj" neodređenosti trebalo bi provjeriti primjenom koncepta inverznog minimaks optimalnog upravljanja. Izvod uvjeta kojim bi se mogle dati preporuke za inicijalizaciju predloženog algoritma rješavanjem problema inverznog minimaks optimalnog upravljanja prelaze okvire istraživanja provedenih radom na ovoj disertaciji te će biti dio budućeg istraživanja. Pretpostavlja se da će pri tome biti moguće koristiti metodologiju kao na primjer u radovima [42], [43] ili na primjer u [90] i [91].

4.3 Računanje derivacija funkcije cilja

U ovom potpoglavlju izvest će se matrične rekurzivne relacije za računanje gradijenata i Hessijana koji se pojavljuju u jednadžbi (4.44). Kako bi se provelo rekurzivno ulančano

deriviranje potrebno je sustav (3.1) vremenski diskretizirati. S tom svrhom, u ovoj disertaciji koristi se višekoračna Adamsova metoda. U odnosu na najpopularniju Runge-Kuttovu metodu s četiri stadija koja zahtjeva rješavanje problema četiri puta u svakom koraku, Adamsova metoda zahtjeva rješavanje samo jednom. Kao što je poznato, postoje primjeri dinamičkih sustava kod kojih je potrebno dublje poznavanje samog problema kako bi se procijenilo koju od navedenih metoda upotrijebiti. U primjerima dinamičkih sustava[2] koji su razmatrani u okviru rada na ovoj disertaciji Adamsova metoda pokazala se dobra u smislu da daje zadovoljavajuće točna rješenja.

Radi jednostavnosti zapisa izraza koji slijede u ovom potpoglavlju, uvedimo matrice:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}).$$

4.3.1 Vremenska diskretizacija

Neka je vremenski interval $[t_0,\ t_f]$ podijeljen na N jednakih podintervala. Tada imamo $t_i = t_0 + i\tau$ za $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, pri čemu je $\tau = \frac{t_f - t_0}{N}$.

Adamsova aproksimacija k-tog reda sustava (3.1) ima sljedeći oblik

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{x}(i) + \tau \sum_{j=1}^{k} a_j^{(k)} \boldsymbol{\phi}(i-j+1), \tag{4.54}$$

za $i = k-1,\ k,\ k+1,\ \ldots$ i početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_1$, $\ldots$, $\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{x}_{k-1}$, pri čemu je

$$\boldsymbol{\phi}(\cdot) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\cdot)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(\cdot))\boldsymbol{\pi} + \mathbf{D}(\mathbf{x}(\cdot))\boldsymbol{\rho}. \tag{4.55}$$

Koeficijenti a_j računaju se pomoću relacije [93, str. 358]

$$a_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds, \tag{4.56}$$

gdje izraz unutar integrala predstavlja binomni koeficijent.

[2] Vidjeti kasnije Potpoglavlje 4.5 i Poglavlje 6 ili na primjer radove [17, 19, 92].

Izraz (4.54) može se transformirati u standardni oblik prostora stanja

$$\hat{\mathbf{x}}(i+1) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\hat{\mathbf{x}}(i),\, \boldsymbol{\pi},\, \boldsymbol{\rho}\right), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \tag{4.57}$$

gdje je $\hat{\mathbf{x}}(i)$ $(n_a = n \cdot k)$-dimenzionalni vektor stanja

$$\hat{\mathbf{x}}(i) = \left[\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}(i) \quad \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}(i) \quad \ldots \quad \mathbf{x}_k^{\mathrm{T}}(i)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{4.58}$$

$$\mathbf{x}_j(i) = \left[x_{(j-1)n+r}\right], \ j = 1, 2, \ldots, k, \ r = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.59}$$

dok je

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\hat{\mathbf{x}}(i),\, \boldsymbol{\pi},\, \boldsymbol{\rho}\right) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i)) + \mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\pi} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\rho}, \tag{4.60}$$

gdje su

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(i) + \tau a_j^{(1)} \mathbf{f}(\mathbf{x}(i)) + \tau \mathbf{x}_2(i) \\ a_j^{(2)} \mathbf{f}(\mathbf{x}(i)) + \mathbf{x}_3(i) \\ \vdots \\ a_j^{(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x}(i)) \end{bmatrix}, \ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \tau a_j^{(1)} \\ a_j^{(2)} \\ \vdots \\ a_j^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

Za konvergenciju Adamsove metode k točnom rješenju trebaju biti zadovoljeni uvjeti konzistentnosti i stabilnosti. Kako bi se povećala točnost parametar τ treba biti mali, tj. broj vremenskih podintervala N treba biti veliki, ali kao što je poznato postoji minimalna vrijednost τ koja garantira numeričku stabilnost. Navedeni uvjeti konzistentnosti i stabilnosti s dokazima mogu se pronaći u [93, str. 392] te se ovdje neće dodatno analizirati.

Iz izraza (4.54) do (4.61) se može vidjeti da Adamsova metoda, kao višekoračna metoda, zahtijeva poznavanje k početnih uvjeta. Kako bi se odredili ti uvjeti, ovdje će se koristiti metoda Runge-Kutta četvrtog reda koja za sustav (3.1) ima sljedeći oblik

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right), \tag{4.62}$$

gdje su

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(i)) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x}(i))\hat{\mathbf{u}}(t_i) + \mathbf{G}_2(\mathbf{x}(i))\hat{\mathbf{d}}(t_i), \tag{4.63}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_1\right) + \mathbf{G}_1\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_1\right)\hat{\mathbf{u}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) + \mathbf{G}_2\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_1\right)\hat{\mathbf{d}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right), \tag{4.64}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_2\right) + \mathbf{G}_1\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_2\right)\hat{\mathbf{u}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) + \mathbf{G}_2\left(\mathbf{x}(i) + \frac{\tau}{2}\mathbf{k}_2\right)\hat{\mathbf{d}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right), \tag{4.65}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(i) + \tau\mathbf{k}_3\right) + \mathbf{G}_1\left(\mathbf{x}(i) + \tau\mathbf{k}_3\right)\hat{\mathbf{u}}\left(t_i + \tau\right) + \mathbf{G}_2\left(\mathbf{x}(i) + \tau\mathbf{k}_3\right)\hat{\mathbf{d}}\left(t_i + \tau\right). \tag{4.66}$$

Iz izraza (4.63)-(4.66) vidi se da je potrebno računati vrijednosti vektora upravljanja $\hat{\mathbf{u}}$ i vektora neodređenosti $\hat{\mathbf{d}}$ u točki $(t_i + \frac{\tau}{2})$, za što se dobrom pokazala sljedeća aproksimacija

$$\hat{\mathbf{u}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) \approx \frac{\hat{\mathbf{u}}(i) + \hat{\mathbf{u}}(i+1)}{2}, \tag{4.67}$$

$$\hat{\mathbf{d}}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) \approx \frac{\hat{\mathbf{d}}(i) + \hat{\mathbf{d}}(i+1)}{2}. \tag{4.68}$$

Nadalje, može se uočiti prednost Adamsove metode prema odgovarajućoj Runge-Kutta metodi. Naime, izrazima (4.54) do (4.61) je pokazano da se Adamsova metoda vrlo lako može zapisati u obliku kauzalnog prostora stanja te je potrebno samo jedno računanje funkcije (4.55) po koraku (jednu funkcijsku vrijednost može se iskoristiti iz prethodnog koraka), dok metoda Runge-Kutta (izrazi (4.62)-(4.66)) zahtjeva računanje navedene funkcije četiri puta po koraku. Drugim riječima, Adamsova metoda značajno pojednostavljuje računanje derivacija potrebnih u (4.44).

Diskretni oblik kriterija optimalnosti iz izraza (4.47) je

$$J(\mathbf{x}(i), \mu, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}) = \tau \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}(i))\mathbf{h}(\mathbf{x}(i)) + \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\pi} - \mu\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\rho}\right), \tag{4.69}$$

gdje su $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\pi}$ i $\boldsymbol{\rho}$ povezani dinamikom sustava (4.57).

4.3.2 Rekurzivne matrične relacije

Najprije će se prikazati izvod rekurzivnih matričnih relacija za računanje $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} J$. Relacije za računanje $\nabla_{\boldsymbol{\rho}} J$ dobivaju se na analogan način.

Osim osnovnih svojstava Kroneckerovog produkta i matrične diferencijalne algebre danih u Potpoglavljima 2.2 i 2.3 za izvod su nam važne i sljedeće relacije.

Neka je skalar α definiran izrazom

$$\alpha = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{v}, \tag{4.70}$$

pri čemu je $\mathbf{v}$ dimenzije $n \times 1$ i $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$. Primijenimo na izraz (4.70) vec operator

$$\alpha = \mathrm{vec}(\alpha) = \mathrm{vec}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}(\mathbf{y}) \mathbf{v}\right) = \left[\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right] \cdot \mathrm{vec}(\mathbf{M}) = \left[\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\right]^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{vec}(\mathbf{M}). \tag{4.71}$$

Ako sada nad izrazom (4.71) provedemo operaciju parcijalnog deriviranja po vektoru $\mathbf{v}$, primjenjujući pravilo deriviranja umnoška i pravilo ulančanog deriviranja, dobivamo

$$\nabla_{\mathbf{v}} \alpha = \left[\mathrm{vec}(\mathbf{M})\right]^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \left[\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\right] + \left[\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\right]^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \, \mathrm{vec}(\mathbf{M}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{y}, \tag{4.72}$$

gdje je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left[\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\right] = \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{I} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{v}. \tag{4.73}$$

Neka su zadani vektor $\mathbf{v}$ dimenzije $n \times 1$, vektor $\mathbf{w}$ dimenzije $p \times 1$ i matrica $\mathbf{M}$ dimenzije $m \times p$. Vrijedi sljedeća jednakost

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}\left(\mathbf{v} \otimes \mathbf{M}\mathbf{w}\right) &= \mathbf{v} \otimes \mathbf{M}\mathbf{w} = \mathrm{vec}(\mathbf{v}) \otimes \mathrm{vec}\left(\mathbf{M}\mathbf{w}\right) = \\ &= \mathbf{v} \otimes \mathrm{vec}\left(\mathbf{M}\mathbf{w}\right) = \mathbf{v} \otimes \mathrm{vec}\left(\mathbf{I}_m \mathbf{M}\mathbf{w}\right) = \\ &= \mathbf{v} \otimes \left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_m\right) \mathrm{vec}(\mathbf{M}). \end{aligned} \tag{4.74}$$

Gradijent funkcije kriterija optimalnosti (4.69) po vektoru $\boldsymbol{\pi}$ jednak je

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} J = \tau \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial F(i)}{\partial \boldsymbol{\pi}}, \tag{4.75}$$

gdje je

$$F(i) = \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}(i))\mathbf{h}(\mathbf{x}(i)) + \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\pi} - \mu\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{x}(i))\boldsymbol{\rho}. \tag{4.76}$$

Kada nad izrazom (4.76) provedemo operaciju parcijalnog deriviranja po vektoru $\boldsymbol{\pi}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\pi}}F(i) &= 2\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}(i)) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x}(i)) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i) - \mu\left[\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}\right]^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\operatorname{vec}(\mathbf{R}(\mathbf{x}(i))) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i) \\ &+ \left[\operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x}(i)))\right]^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x}(i))) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i).\end{aligned} \tag{4.77}$$

U (4.77) potrebno je računati $\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i)$, što dobivamo na osnovu izraza (4.57)-(4.60) kako slijedi:

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1)) + \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1) \\ &+ \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1)) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1) + \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1).\end{aligned} \tag{4.78}$$

Prethodni izraz predstavlja rekurzivne matrične relacije za $i = 1, 2, \ldots, N-1$ s početnim uvjetima

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}. \tag{4.79}$$

Zatim, na osnovu oblika funkcije $\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i))$ iz izraza (4.61), dobivamo:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1)) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \tau a_j^{(1)}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1)) & \tau\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_j^{(2)}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1)) & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_j^{(k-1)}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ a_j^{(k)}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{4.80}$$

dok, primjenom izraza (4.74) dobiva se:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right] = \mathbf{a} \otimes \left(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\operatorname{vec}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\right), \tag{4.81}$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right] = \mathbf{a} \otimes \left(\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\operatorname{vec}\left(\mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\right). \tag{4.82}$$

U izrazima (4.77), (4.78), (4.81) i (4.82) imamo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{0}_{q\times(n_a-n)}\right], \\
\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) &= \left[\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{0}_{n_\pi^2\times(n_a-n)}\right], \\
\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{R}(\mathbf{x})) &= \left[\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{R}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{0}_{n_\rho^2\times(n_a-n)}\right], \\
\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= \left[\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{0}_{nn_\pi\times(n_a-n)}\right], \\
\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) &= \left[\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{0}_{nn_\rho\times(n_a-n)}\right],
\end{aligned} \tag{4.83}$$

pri čemu su oblici funkcija $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ poznati iz dinamike sustava i unaprijed određenih oblika aproksimacijskih funkcija te se njihove parcijalne derivacije po vektoru $\mathbf{x}$ mogu lako izračunati na jedan od načina opisanih u Potpoglavlju 4.3.4.

Nadalje, prikazat će se izvod rekurzivnih matričnih relacija za računanje $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}}J$. Relacije za računanje $\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}}J$ i $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\rho}}J$ dobivaju se na analogan način.

Hessijan funkcije kriterija optimalnosti (4.69) po vektoru $\boldsymbol{\pi}$ jednak je

$$\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}}J = \tau\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\partial^2 F(i)}{\partial\boldsymbol{\pi}\partial\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}}. \tag{4.84}$$

Ako izraz (4.77) još jednom deriviramo po vektoru $\boldsymbol{\pi}$ tada na lijevoj strani jednakosti imamo Hessijan podintegralne funkcije $F(i)$ po vektoru $\boldsymbol{\pi}$, tj. $\nabla^2_{\boldsymbol{\pi}}F(i)$, dok na desnoj strani dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\left[\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}\right] = \\
&= \nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}\cdot\nabla^{\mathrm{T}}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}} + \nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{\pi}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)\cdot\left(\mathbf{h}(\mathbf{x})\otimes\mathbf{I}_{n_a}\right)\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}} \\
&+ \nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{\pi}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}\right)\cdot\left(\mathbf{I}_{n_\pi}\otimes\left(\nabla^{\mathrm{T}}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}(\mathbf{x})\right)\right),
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
&\mu \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \left[(\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}(\mathbf{R}(\mathbf{x})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \right] = \\
&= \mu \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \right) \right) \cdot (\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho} \otimes \mathbf{I}_{n_a}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \\
&+ \mu \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \right) \cdot \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \right) \cdot (\boldsymbol{\rho} \otimes \boldsymbol{\rho}) \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \left[(\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \right] = \\
&= (\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi})^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} + \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) \right) \cdot (\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi} \otimes \mathbf{I}_{n_a}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \\
&+ \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}} \right) \cdot \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) \cdot (\boldsymbol{\pi} \otimes \boldsymbol{\pi}) \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \left[[\operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x}))]^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi}) \right] = \\
&= \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \cdot (\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi}) + \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}} \operatorname{vec} \left(\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi} \right) \cdot \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \operatorname{vec}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) \right).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

U prethodnim izrazima imamo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}}, \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \right) \right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{R}(\mathbf{x}) \right) \right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}}, \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) \right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) \right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}}, \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec} \left(\mathbf{P}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \hat{\mathbf{x}}, \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec} \left(\boldsymbol{\pi} \oplus \boldsymbol{\pi} \right) &= \mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \operatorname{vec} \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \right) + \operatorname{vec} \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \right) \otimes \mathbf{I}_{n_\pi}.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

U izrazima (4.89) su

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\right) & \mathbf{0}_{qn\times(n_a-n)} \\ \mathbf{0}_{q(n_a-n)\times n} & \mathbf{0}_{q(n_a-n)\times(n_a-n)} \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{P}(\mathbf{x})\right)\right) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{P}(\mathbf{x})\right)\right) & \mathbf{0}_{n_\pi^2 n\times(n_a-n)} \\ \mathbf{0}_{n_\pi^2(n_a-n)\times n} & \mathbf{0}_{n_\pi^2(n_a-n)\times(n_a-n)} \end{bmatrix}, \tag{4.90}$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}(\mathbf{x})\right)\right) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{R}(\mathbf{x})\right)\right) & \mathbf{0}_{n_\rho^2 n\times(n_a-n)} \\ \mathbf{0}_{n_\rho^2(n_a-n)\times n} & \mathbf{0}_{n_\rho^2(n_a-n)\times(n_a-n)} \end{bmatrix},$$

pri čemu se parcijalne derivacije drugog reda po vektoru $\mathbf{x}$ poznatih funkcija $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ mogu izračunati na jedan od načina opisanih u Potpoglavlju 4.3.4.

Sada vidimo da je u izrazima (4.85)-(4.87) potrebno izračunati $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}\right)$. U tu svrhu najprije primijenimo na izraz (4.78) vec operator

$$\begin{aligned} &\operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i)\right) = \operatorname{vec}\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\right) + \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right) \\ &+ \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right) + \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right). \end{aligned} \tag{4.91}$$

Ako izraz (4.91) deriviramo po vektoru $\boldsymbol{\pi}$ tada na lijevoj strani jednakosti imamo $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}\right)$, dok na desnoj strani dobivamo sljedeće:

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\right) = \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\right)\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1). \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned} &\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right) = \\ &= \left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\otimes\mathbf{I}_{n_a}\right)\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\right) \\ &+ \left(\mathbf{I}_{n_\pi}\otimes\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a}\otimes\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\right)\cdot\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right), \end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1)) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right) = \\
&= \left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}(i-1) \otimes \mathbf{I}_{n_a}\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\right) \\
&+ \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right),
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right] \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right) = \\
&= \left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}(i-1) \otimes \mathbf{I}_{n_a}\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\right) \\
&+ \left(\mathbf{I}_{n_\pi} \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1)\right).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Slično kao i prije, prethodni izrazi predstavljaju rekurzivne matrične relacije za $i = 1, 2, \ldots, N-1$ s početnim uvjetima jednakim nuli. Zatim, u prethodnim izrazima imamo i:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1), \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1), \\
\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\right) &= \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\right) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}}\hat{\mathbf{x}}(i-1),
\end{aligned} \tag{4.96}$$

te nadalje na osnovu izraza (4.80), (4.81) i (4.82)

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(i-1))\right) = \begin{bmatrix}
\tau a_j^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1))\right) & \mathbf{0}_{n^2 \times (n_a - n)} \\
a_j^{(2)} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1))\right) & \mathbf{0}_{n^2 \times (n_a - n)} \\
\vdots & \vdots \\
\tau a_j^{(k)} \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(i-1))\right) & \mathbf{0}_{n^2 \times (n_a - n)} \\
\mathbf{0}_{(n_a^2 - n^2 k) \times n} & \mathbf{0}_{(n_a^2 - n^2 k) \times (n_a - n)}
\end{bmatrix}, \tag{4.97}$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\pi}\right]\right) = \mathbf{a} \otimes \left(\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_{nn_a}\right) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}(i-1))\right)\right),$$

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\left[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\boldsymbol{\rho}\right]\right) = \mathbf{a} \otimes \left(\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_{nn_a}\right) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \operatorname{vec}\left(\mathbf{D}(\mathbf{x}(i-1))\right)\right),$$

gdje su

$$\begin{aligned}\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)\right) &= \begin{bmatrix}\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\left(\mathbf{B}(\mathbf{x})\right)\right) & \mathbf{0}_{n^2 n_\pi \times (n_a-n)} \\ \mathbf{0}_{n n_\pi (n_a-n)\times n} & \mathbf{0}_{n n_\pi (n_a-n)\times (n_a-n)}\end{bmatrix}, \\ \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{vec}\left(\mathbf{D}(\mathbf{x})\right)\right) &= \begin{bmatrix}\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\left(\mathbf{D}(\mathbf{x})\right)\right) & \mathbf{0}_{n^2 n_\rho \times (n_a-n)} \\ \mathbf{0}_{n n_\rho (n_a-n)\times n} & \mathbf{0}_{n n_\rho (n_a-n)\times (n_a-n)}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Parcijalne derivacije drugog reda po vektoru $\mathbf{x}$ poznatih funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ također se mogu izračunati na jedan od načina opisanih u Potpoglavlju 4.3.4.

4.3.3 Diskusija o pozitivnoj definitnosti Hessijana funkcije cilja

Kao što smo ranije pokazali u Propoziciji 4.3 i Propoziciji 4.4 za rješavanje problema (4.44), odnosno konvergenciju Algoritma 2, mora biti zadovoljeno

$$-\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J > \mathbf{0}. \tag{4.99}$$

Ovo nam sugerira da za rješavanje problema (4.44) možemo koristiti, na primjer MATLAB-ovu funkciju `chol()`, koja koristi faktorizaciju Choleskog i ujedno daje informaciju o pozitivnoj definitnosti matrice.

Pozitivnu definitnost matrice $-\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J$ određuje konkavnost funkcije J s obzirom na parametar $\boldsymbol{\rho}$. Konkavnost će biti osigurana za odgovarajući (dovoljno veliki) parametar μ. Ovo znači da informaciju o pozitivnoj definitnosti koji dobivamo iz funkcije `chol()` možemo koristiti i kao kriterij zaustavljanja subgradijentne metode u Algoritmu 1. Ako je pozitivna definitnost matrice $-\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} J$, a time i matrice $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ iz (4.44), narušena, proces (4.11) se završava.

Naredbom u MATLAB-u `[R, p] = chol(H)`, gdje je `H` matrica $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ iz izraza (4.46), ako je `p = 0` znači da je `H` pozitivno definitna i dobiva se faktor Choleskog `R`. Onda sustav (4.44) u MATLAB-u rješavamo sljedećim naredbama: `s = R'\DJ; s = R\s;`, gdje je `s` smjer traženja, a `DJ` je $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ iz izraza (4.46). Ako je `p` različito od 0, onda je narušena pozitivna definitnost i treba završiti proces.

4.3.4 Računanje osnovnih Jacobijana i Hessijana

Ovdje se pod osnovne Jacobijane smatraju matrice

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{P}(\mathbf{x}))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{R}(\mathbf{x}))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{B}(\mathbf{x}))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{D}(\mathbf{x}))\,,$$

koje se pojavljuju u izrazu (4.83), dok se pod osnovne Hessijane smatraju matrice

$$\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{P}(\mathbf{x})))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{R}(\mathbf{x})))\,,$$

koje se pojavljuju u izrazu (4.90) te matrice

$$\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{B}(\mathbf{x})))\,,\ \nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\mathbf{D}(\mathbf{x})))\,.$$

koje se pojavljuju u izrazima (4.97) i (4.98).

Osim analitičkim putem, prethodno navedene matrice mogu se računati i na sljedeće načine: numerički primjenom formula konačnih diferencija, primjenom metode kompleksne varijable ili metodom automatskog diferenciranja. Primjenu sve tri metode pokazat ćemo na primjeru računanja elemenata matrica $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ u i-tom vremenskom trenutku

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x}(i))}{\partial x_j(i)} = \nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j,\quad j,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \tag{4.100}$$

gdje je $\mathbf{e}_j$ jedinični vektor, i za računanje elemenata matrice $\nabla_{\mathbf{x}}\,\mathrm{vec}\,(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ u i-tom vremenskom trenutku

$$\frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x}(i))}{\partial x_j(i)\partial x_l(i)} = \frac{\partial}{\partial x_j(i)}\left[f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i))\right],\quad j,\, k,\, l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n, \tag{4.101}$$

gdje smo zbog jednostavnosti uveli oznaku $f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i)) = \frac{\partial f_k(\mathbf{x}(i))}{\partial x_l(i)}$.

Formule konačnih diferencija

Izvod formule za računanje prve derivacije (4.100) primjenom metode konačnih diferencija temelji se na unaprijednom i unazadnom Taylorovom razvoju funkcije $f_k(\mathbf{x}(i))$ oko $x_j(i)$:

$$f_k(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j) = f_k(\mathbf{x}(i)) + h\,\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j + \frac{h^2}{2!}\,\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j + \ldots, \tag{4.102}$$

$$f_k(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j) = f_k(\mathbf{x}(i)) - h\,\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j + \frac{h^2}{2!}\,\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j - \ldots, \tag{4.103}$$

iz kojih slijedi

$$f_k(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j) - f_k(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j) = 2h\,\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.104}$$

Rješenje jednadžbe (4.104) za $\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j$ je

$$\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{f_k(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j) - f_k(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j)}{2h} - \mathcal{O}(h^2), \tag{4.105}$$

što predstavlja formulu centralne diferencije za aproksimaciju derivacije prvog reda. $\mathcal{O}(h^2)$ je *greška odsijecanja* (engl. *truncation error*).

Nadalje, formulu za računanje druge derivacije (4.101) možemo dobiti iz izraza (4.105) kako slijedi: za $j \neq l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j(i)}\,[f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i))] &= \frac{f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j) - f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{f_k\left(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j + h\,\mathbf{e}_l\right) - f_k\left(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j - h\,\mathbf{e}_l\right)}{4h^2} \\ &+ \frac{f_k\left(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j - h\,\mathbf{e}_l\right) - f_k\left(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j + h\,\mathbf{e}_l\right)}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \tag{4.106}$$

dok za $j = l$

$$\frac{\partial}{\partial x_j(i)}\,[f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i))] = \frac{f_k(\mathbf{x}(i) + h\,\mathbf{e}_j) - 2f_k(\mathbf{x}(i)) + f_k(\mathbf{x}(i) - h\,\mathbf{e}_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.107}$$

Izrazi (4.106) i (4.107) predstavljaju formule centralnih diferencija za aproksimaciju derivacije

drugog reda.

Metoda konačnih diferencija je jednostavan i intuitivan pristup te se zbog toga naširoko koristi u različitim numeričkim algoritmima za aproksimaciju derivacija.

Red točnosti metode konačnih diferencija je povezan s brojem diferencijalnih koraka koji se uzimaju. U (4.105), (4.106) i (4.107) smo uzeli jedan korak unaprijed i jedan korak unatrag, što su dva koraka, pa prema tome formule centralne diferencije pripadaju metodama drugog reda točnosti. Izvodi formula višeg reda točnosti također se baziraju na Taylorovom razvoju i metodi neodređenih koeficijenata [94, 95]. Naravno povećanje reda točnosti podrazumijeva i povećanje računalnih resursa.

Bez obzira na red točnosti, formule konačnih diferencija uključuju i greške ovisne o veličini koraka h. Može se očekivati točnija aproksimacija što je korak h manji. Međutim, postavljanje proizvoljno malog koraka h nije izvedivo na računalu, budući da za jako mali h članovi u brojnicima izraza (4.105), (4.106) i (4.107) postaju takvi da računalo ne prepoznaje razliku između dva približno jednaka broja (problem kraćenja, engl. *cancellation*). Ovaj problem nas tjera na konzervativan izbor koraka h na štetu točnosti algoritma.

Koračna kompleksna metoda

Manje intuitivan pristup je primjena kompleksnih brojeva za računanje derivacija realnih funkcija. Primjenom kompleksne varijable uklanja se problem kraćenja, pa samim time aproksimacija derivacije je točnija. Ova ideja u obliku računalnog programa prvi puta se pojavljuje u [96]. Nakon toga autori u [97] metodu formalno nazivaju koračna kompleksna metoda (engl. *complex step method*) gdje koriste imaginarni broj i ($i^2 = -1$) za računanje prve i druge derivacije realnih funkcija. U novije vrijeme metoda je dobila mnoga proširenja kao na primjer u [98, 99, 100].

Razvojem $f_k(\mathbf{x} + i\,h\,\mathbf{e}_j)$ u Taylorov niz

$$f_k(\mathbf{x} + i\,h\,\mathbf{e}_j) = f_k(\mathbf{x}) + i\,h\,\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j + \frac{(i\,h)^2}{2!}\,\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 f_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j + \ldots, \tag{4.108}$$

dobiva se

$$\nabla_{\mathbf{x}} f_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\mathcal{I}m\,\{f_k(\mathbf{x} + i\,h\,\mathbf{e}_j)\}}{h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.109}$$

U gornjim izrazima i predstavlja imaginarni broj ($i^2 = -1$), dok smo prije s i označili $i-$ti vremenski trenutak. Zbog toga su u ovim izrazima izostavljene oznake $\mathbf{x}(i)$, ali se to podrazumijeva.

Vidimo da se u brojniku izraza (4.109) ne pojavljuje oduzimanje, tj. uklonjen je problem kraćenja. To znači da korak h može biti izuzetno mali (npr. $h = 10^{-100}$), pa se tako derivacija može izračunati do strojne preciznosti.

Nadalje, iz (4.108) također slijedi

$$\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^2 f_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{2\left(f_k(\mathbf{x}) - \mathcal{R}e\left\{f_k(\mathbf{x} + i\,h\,\mathbf{e}_j)\right\}\right)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \tag{4.110}$$

koja omogućava računanje aproksimacije druge derivacije u jednom koraku, a što se ne može postići formulama konačne diferencije. Međutim, kao što je očito u (4.110) također se pojavljuje problem kraćenja, pa se niti u ovom slučaju ne može korak h postaviti proizvoljno mali. Modifikacije formule (4.110) s ciljem smanjenja greške aproksimacije mogu se pronaći u [98, 100, 101].

Implementacija kompleksne metode može biti vrlo jednostavno ostvarena primjenom nekog višeg programskog jezika[3] koji ne zahtijeva prethodno definiranje tipa varijabli, nego je moguće automatski primjenom ugrađenih funkcija definirati kompleksne varijable. U tom slučaju kompleksna metoda se može zapisati u obliku sljedećeg algoritma:

[3]Na primjer MATLAB ima ugrađene funkcije `complex()`, `imag()`, `real()` itd. za rad s kompleksnim varijablama.

Algoritam 4 Računanje Jacobijana $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ u i-tom vremenskom trenutku primjenom kompleksne metode

Ulaz: n, h, $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$

Izlaz: $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$

1: $\mathbf{x}1 \leftarrow \mathbf{x}$

2: **for** $j = 1$ to n **do**

3: $\quad x1_j \leftarrow complex(x_j, h)$

4: $\quad \mathbf{f}1 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}1)$

5: $\quad$ **for** $k = 1$ to n **do**

6: $\quad\quad \dfrac{\partial f_k(x_j)}{\partial x_j} \leftarrow \dfrac{imag(f1_k)}{h}$

7: $\quad$ **end for**

8: $\quad \mathbf{x}1 \leftarrow \mathbf{x}$

9: **end for**

Automatsko diferenciranje

U ovoj disertaciji za računanje osnovnih Jacobijana i Hessijana koristi se automatsko ili algoritamsko diferenciranje (engl. *Automatic Differentiation* - AD). Glavni razlog je taj što je primjenom AD moguće izračunati derivacije prvog i drugog reda do strojne preciznosti.

Automatsko diferenciranje je široko primjenjivani alat u znanstvenom računarstvu za računanje derivacija. AD se odnosi na matematički i softverski proces promatranja računalnog koda koji računa neki izlaz s obzirom na neki ulaz kroz djelovanje određene funkcije i računa derivaciju te funkcije (npr. Jacobijevu matricu). Standardna referenca je knjiga [102].

AD podrazumijevaju da je funkcija definirana računalnim kodom koji se naziva izvorni kod. Pri tome se smatra da je računalni kod za računanje funkcije, bez obzira kako ona kompliciranа bila, moguće „razbiti" u kompoziciju elementarnih aritmetičkih operacija jednog ili dva argumenta. Operacije dva argumenta su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i potenciranje, dok su operacije jednog argumenta trigonometrijske, eksponencijalne i logaritamske funkcije. Druga važna značajka AD je korištenje lančanog pravila deriviranja.

Intenzivne istraživačke aktivnosti u posljednja dva desetljeća rezultirale su razvojem dva osnovna moda: unaprijedni i unazadni mod. U ovom radu koristi se unaprijedni mod.

Kako bi objasnili koncept unaprijednog automatskog diferenciranja, neka je funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sastavljena od m elementarnih aritmetičkih operacija φ_i. Najprije uvedimo sljedeće vektore

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \tag{4.111}$$

te također $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+i+1}$, $\tilde{\mathbf{x}}_i \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, gdje je

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+i} \\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad i = 0, \ldots, m-1. \tag{4.112}$$

Dok su ulazi (varijable stanja) x_1, x_2, …, x_n prethodno zadani, svaka elementarna aritmetička operacija φ_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ generira novu međuvarijablu x_{n+i+1}. Neke od međuvarijabli su izlaz računalnog koda, označimo ih na primjer s $\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Vektor $\boldsymbol{\chi}$ može se dobiti iz $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{x}}_m$, gdje je $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$ matrica odabira željenog izlaza koja u svakom retku ima samo jednu jedinicu, a ostali elementi su joj nule. Ovakav način razmatranja funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ilustriran je u Algoritmu 5.

Algoritam 5 Rastavljanje funkcije na elementarne operacije

Ulaz: $x_1, \ldots, x_n$

Izlaz: $\chi_1, \ldots, \chi_n$

1: **for** $i = 0$ to $m-1$ **do**
2: $\quad x_{n+i+1} \leftarrow \varphi_i(x_1, \ldots x_{n+1})$
3: **end for**
4: **for** $j = 0$ to n **do**
5: $\quad \chi_j = \sum_{i=1}^{n+m} C_{ji}\, x_i$
6: **end for**

Važno je primijetiti da svaka elementarna operacija ovisi samo od jedne ili dvije varijable stanja.

Originalnu funkciju možemo sažeti u

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{m-1}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{m-2}(\cdots \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}))), \tag{4.113}$$

gdje pomoću matrice $\mathbf{C}$ odabiremo iz $\tilde{\mathbf{x}}_m$ željeni izlaz iz računalnog koda. Ukupni Jacobijan $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ primjenom pravila ulančanog deriviranja jednak je produktu Jacobijana elementarnih funkcija $\tilde{\mathbf{J}}_i = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i}$ kako slijedi

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{m-1} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{m-2} \cdots \tilde{\mathbf{J}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{J}}_0. \tag{4.114}$$

Primijetimo da je

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}. \tag{4.115}$$

Ako uvedemo tzv. *seed* vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tada imamo relaciju za usmjerenu derivaciju kako slijedi

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{p} = \mathbf{C} \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_{m-1} \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_{m-2} \cdots (\tilde{\mathbf{J}}_1 \cdot (\tilde{\mathbf{J}}_0\,\mathbf{p})))). \tag{4.116}$$

Nadalje, uobičajeno je u literaturi iz AD uvesti $\dot{x}_i \equiv \dfrac{dx_i}{d\mathbf{x}}\mathbf{p}$. To znači da u proširenoj notaciji direktno imamo inicijalne vrijednosti $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{p}$ te rekurzivnu relaciju

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{J}}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i, \quad i = 0, \ldots, m-1. \tag{4.117}$$

Zadnji element od $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{i+1}$ je $\dot{x}_{n+i+1}$, prema tome ako se najprije odabere $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ unaprijedno automatsko diferenciranje se može implementirati na sljedeći način

Algoritam 6 Unaprijedno automatsko diferenciranje

Ulaz: $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ i sve derivacije $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$

Izlaz: $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n+m}$

1: **for** $i = 0$ to $m - 1$ **do**

2: $\quad \dot{x}_{n+i+1} \leftarrow \sum_{j=1}^{n+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \dot{x}_j$

3: **end for**

Za dobivanje Jacobijana $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ potrebno je Algoritam 6 izvršiti n puta, svaki put postavljajući za vektor $\mathbf{p}$ odgovarajući jedinični vektor.

Prethodna razmatranja računanja Jacobijana slična su onima u [83, Poglavlje 8.2] gdje se mogu pronaći i objašnjenja za računanje Hessijana.

Razvijeni su mnogi alati za računanje derivacija primjenom AD u gotovo svim programskim jezicima. Važno je naglasiti da svi alati ne zahtijevaju od korisnika da rastavi funkciju na elementarne aritmetičke operacije, već se to provodi eksplicitno ili implicitno od strane programskog alata. Prema dostupnoj literaturi [103, 104] trenutna generacija programskih alata za AD pokazala je svoju vrijednost kroz uspješnu primjenu na široku klasu optimizacijskih (i ostalih sličnih) problema.

Za potrebe algoritma predstavljenog u ovoj disertaciji koristi se alat ADiMat [105, 106] koji je hibrid transformacije izvornog koda (engl. *source transformation*) i tehnike preopterećivanja operatora (engl. *operator overloading*) za računanje prve i druge derivacije funkcije zadane u MATLAB-u.

4.4 Analitičke neizrazite bazne funkcije

U području upravljanja dinamičkim sustavima značajno mjesto zauzima neizrazito upravljanje (engl. *fuzzy control*), odnosno neizraziti sustavi. Neizraziti sustavi temelje se na neizrazitoj logici koja se poopćeno može opisati kao računanje s lingvističkim varijablama [107]. Poznato je da se neizraziti sustavi mogu razviti u seriju neizrazitih baznih funkcija (engl. *fuzzy basis functions*) za koje je dokazano da su, ako postoji dovoljan broj AKO-ONDA pravila ponašanja, univerzalni aproksimatori, vidjeti na primjer [108, 109, 110].

Glavni problem kod konvencionalnih neizrazitih baznih funkcija predstavlja određivanje broja AKO-ONDA pravila ponašanja i njihov raspored, jer još uvijek ne postoji općenita preporuka. Zbog toga, primjena konvencionalnih neizrazitih baznih funkcija za sintezu upravljanja multivarijabilnim dinamičkim sustavima, u uvjetima upravljanja u realnom vremenu, postaje vrlo zahtjevna zbog eksponencijalnog porasta broja pravila ponašanja s porastom broja ulaznih i izlaznih varijabli sustava. Jedan od načina uklanjanja računske kompleksnosti konvencionalnih neizrazitih baznih funkcija je primjena analitičkih neizrazitih baznih funkcija (engl. *analytical fuzzy basis functions*) predloženih u [22] i [23].

U ovom potpoglavlju razmatramo primjenu predloženog algoritma na sintezu zakona upravljanja s analitičkim neizrazitim baznim funkcijama, tj. komponente vektora upravljanja i neodređenosti pretpostavljamo u sljedećem obliku

$$\hat{u}_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_k^i \zeta_{\hat{u}_k}^i(x_i), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m, \tag{4.118}$$

$$\hat{d}_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} r_l^i \zeta_{\hat{d}_l}^i(x_i), \quad l = 1,\, 2,\, \ldots,\, s, \tag{4.119}$$

gdje su $\zeta_{\hat{u}_k}^i(\mathbf{x})$ i $\zeta_{\hat{d}_l}^i(\mathbf{x})$ analitičke neizrazite bazne funkcije definirane s

$$\zeta_{(\cdot)}^i(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)\, y_{Ci}(x_i)\, A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(x_i) A_i}, \tag{4.120}$$

pri čemu su varijable stanja ulazi, a varijable upravljanja i neodređenosti izlazi neizrazitog sustava, dok su $\omega_i(x_i)$ aktivacijska funkcija, $y_{Ci}(x_i)$ pozicija centra izlaznog neizrazitog skupa, A_i površina izlaznog neizrazitog skupa.

Glavna ideja analitičkih neizrazitih sustava sadržana je u sljedećem:

(i) formulirati analitičku aktivacijsku funkciju;

(ii) umjesto konvencionalne baze pravila ponašanja (AKO-ONDA pravila) analitički odrediti poziciju centara izlaznih skupova;

(iii) primijeniti analitičku formulu izoštravanja.

Sinteza analitičkog neizrazitog sustava koja uključuje postupak omekšavanja (engl. *fuzzyfication*) ulaznih varijabli, odlučivanje (engl. *inference*) i postupak izoštravanja (engl. *defuzzyfication*) izlaznih varijabli, a izostavlja konvencionalni proces definiranja baze pravila ponašanja, dana je sljedećom lemom:

Lema 4.3. *Neka su* $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^{\mathrm{T}}$ *ulazne varijable neizrazitog sustava. Neka je* $\omega_i(x_i)$ *aktivacijska funkcija i-tog izlaznog neizrazitog skupa definirana u analitičkom obliku*

$$\omega_i(x_i) = \sum_{j=1}^{M} s_i^j(x_i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots, n, \tag{4.121}$$

gdje su $s_i^j(x_i)$ *funkcija pripadnosti neizrazitog skupa i* M *broj neizrazitih skupova koji pripadaju i-toj ulaznoj varijabli. Neka je* $y_{Ci}(x_i)$ *normirana pozicija centara izlaznih neizrazitih skupova dana s*

$$y_{Ci}(x_i) = K_{Ci}\delta_i \left(1 - \frac{\omega_i(x_i)}{M}\right) \operatorname{sign}(x_i), \tag{4.122}$$

gdje su K_{Ci} *pojačanje centara izlaznih neizrazitih skupova i* δ_i *faktor normalizacije koji osigurava da je* $-K_{Ci} \leq y_{Ci}(x_i) \leq K_{Ci}$. *Tada se, izlaz neizrazitog skupa u postupku izoštravanja može računati primjenom metode težišta u sljedećem analitičkom obliku*

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i) y_{Ci}(x_i) A_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i) A_i}, \tag{4.123}$$

gdje je A_i *površina i-tog izlaznog neizrazitog skupa.*

Dokaz. Vidjeti u [22] i [23]. ■

U ovom radu koristimo modificiranu Gaussovu funkciju pripadnosti oblika sličnog kao u [111]

$$s_i^j(x_i) = \alpha_i^j + \left(1 - \alpha_i^j\right) \exp\left(-\beta_i^j x_i^2 - \sigma_i^j |x_i|\right), \tag{4.124}$$

gdje su $0 \leq \alpha_i^j < 1$, β_i^j, σ_i^j slobodni parametri.

Izraz (4.123) možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{x}) &= \frac{\omega_1 y_{C1} A_1 + \omega_2 y_{C2} A_2 + \cdots + \omega_n y_{Cn} A_n}{\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \cdots + \omega_n A_n} = \\ &= \frac{\mathbf{A}\left[\boldsymbol{\omega} \odot \mathbf{y}\right]}{\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}},\end{aligned} \tag{4.125}$$

gdje su $\mathbf{A} = [A_1\ A_2\ \ldots\ A_n]$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \ldots\ \omega_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y_{C1}\ y_{C2}\ \ldots\ y_{Cn}]^{\mathrm{T}}$.

Ostalo je neodgovoreno pitanje u radovima [22] i [23] da li analitički neizraziti sustavi posjeduju univerzalno aproksimacijsko svojstvo? Rezultati publicirani u [20] nastalom u okviru rada na ovoj disertaciji, daju odgovor na ovo neodgovoreno pitanje.

Neka je Y skup svih realnih funkcija (4.123). Dokaz sljedeće propozicije pokazuje da je Y gust u $C(U)$, gdje je $C(U)$ algebra realnih neprekidnih funkcija definiranih na kompaktnom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$.

Propozicija 4.5. *Neizraziti sustav opisan jednadžbama* (4.121)-(4.124) *može aproksimirati bilo koju realnu neprekidnu funkciju na kompaktnom skupu s proizvoljnim stupnjem točnosti. Odnosno, za danu realnu neprekidnu funkciju f na kompaktnom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ i proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $\zeta \in Y$ (izraz* (4.123)*) tako da*

$$\sup_{\mathbf{x} \in U} |f(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x})| < \varepsilon. \tag{4.126}$$

Dokaz Propozicije 4.5 slijedi sličnu metodu kao dokaz u [108, Teorem 9.1] koji se temelji na Stone-Weierstraßovom teoremu 2.4. Potrebno je pokazati sljedeće:

(i) Y je podalgebra od $C(U)$, tj. skup Y je zatvoren za operacije iz $C(U)$;

(ii) Y razdvaja točke od U, tj. za svaki $\mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o \in U$, $\mathbf{x}_1^o \neq \mathbf{x}_2^o$, postoji $\zeta \in Y$ takav da $\zeta(\mathbf{x}_1^o) \neq \zeta(\mathbf{x}_2^o)$;

(iii) Y neiščezava u točkama U, tj. za svaki $\mathbf{x} \in U$ postoji neki $\zeta \in Y$ tako da je $\zeta(\mathbf{x}) \neq 0$.

Dokaz. *(i)* Neka su $\zeta_1,\, \zeta_2 \in Y$

$$\zeta_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{A}1\,[\boldsymbol{\omega}1 \odot \mathbf{y}1]}{\mathbf{A}1\,\boldsymbol{\omega}1}, \tag{4.127}$$

$$\zeta_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{A}2\,[\boldsymbol{\omega}2 \odot \mathbf{y}2]}{\mathbf{A}2\,\boldsymbol{\omega}2}, \tag{4.128}$$

gdje su

$$\mathbf{A}1 = [A1_1\ A1_2\ \ldots\ A1_n]\,,\ \mathbf{A}2 = [A2_1\ A2_2\ \ldots\ A2_n]\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}1 = [\omega1_1\ \omega1_2\ \ldots\ \omega1_n]^{\mathrm{T}},\ \ \boldsymbol{\omega}2 = [\omega2_1\ \omega2_2\ \ldots\ \omega2_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{y}1 = [y1_{C1}\ y1_{C2}\ \ldots\ y1_{Cn}]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{y}2 = [y2_{C1}\ y2_{C2}\ \ldots\ y2_{Cn}]^{\mathrm{T}},$$

gdje su, za $j = 1, 2, \ldots, n$, $A1_j$, $A2_j$, $\omega1_j$, $\omega2_j$, $y1_{Cj}$ i $y2_{Cj}$ parametri neizrazitih sustava ζ_1 i ζ_2 koji su definirani u Lemi 4.3 kao površina, aktivacijska funkcija i pozicija centra izlaznog neizrazitog skupa, respektivno.

Algebarske operacije $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ i $c \cdot \zeta_1$ su dane s

$$\begin{aligned}\zeta_1(\mathbf{x}) + \zeta_2(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i y1_{Ci} A1_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega2_i A2_i + \sum_{i=1}^{n} \omega2_i y2_{Ci} A2_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega1_i A1_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i A1_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega2_i A2_i} = \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{A}}\,[\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot (\mathbf{y}1 \otimes \mathbf{1}_{n\times1} + \mathbf{1}_{n\times1} \otimes \mathbf{y}2)]}{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}},\end{aligned} \tag{4.129}$$

$$\zeta_1(\mathbf{x}) \cdot \zeta_2(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i y1_{Ci} A1_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega2_i y2_{Ci} A2_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i A1_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega2_i A2_i} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}\,[\tilde{\boldsymbol{\omega}} \odot \tilde{\mathbf{y}}]}{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}}, \tag{4.130}$$

$$c \cdot \zeta_1(\mathbf{x}) = c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i y1_{Ci} A1_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega1_i A1_i} = \frac{(c \cdot \mathbf{A}1)\,[\boldsymbol{\omega}1 \odot \mathbf{y}1]}{\mathbf{A}1\,\boldsymbol{\omega}1}, \tag{4.131}$$

gdje su $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}1 \otimes \mathbf{A}2$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}1 \otimes \boldsymbol{\omega}2$, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}1 \otimes \mathbf{y}2$.

Budući da su funkcije pripadnosti oblika (4.124), njihovi produkti su također u obliku

(4.124), pa prema tome elementi od $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ su oblika (4.121). Nadalje, $\mathbf{y}1 \otimes \mathbf{1}_{n\times 1} + \mathbf{1}_{n\times 1} \otimes \mathbf{y}2$ može se promatrati kao pozicija centra izlaznog skupa u obliku (4.122). Dakle, (4.129) je u istom obliku kao (4.125). Slično, budući da se $\mathbf{y}1 \otimes \mathbf{y}2$ može promatrati kao pozicija centra izlaznog skupa u obliku (4.122) znači da je (4.130) također u istom obliku kao (4.125). Za $c \in \mathbb{R}$, (4.131) je također u obliku (4.125). Stoga, $\zeta_1 + \zeta_2 \in Y$, $\zeta_1 \cdot \zeta_2 \in Y$ i $c \cdot \zeta_1 \in Y$. Dakle, Y je zatvoren za operacije iz $C(U)$.

(ii) Budući da je pozicija centara izlaznih neizrazitih skupova u svakom procesu preslikavanja (4.122) striktno monotono rastuća funkcija, za svaki različit $\mathbf{x}_1^o$, $\mathbf{x}_2^o \in U$ očito možemo potvrditi $\zeta(\mathbf{x}_1^o) \neq \zeta(\mathbf{x}_2^o)$. Dakle, uvjet razdvajanja je zadovoljen.

(iii) Promatrajući (4.122) i (4.124) svaki $\zeta \in Y$ sa $y_{Ci} > 0$ je također $\zeta(\mathbf{x}) > 0$. Dakle, Y neiščezava u točkama U.

Prema tome, Stone-Weierstraßovim teoremom uz *(i)*, *(ii)*, *(iii)* dokaz je završen. ■

U neizrazitom sustavu (4.125) postoji pet slobodnih parametara: α_i^j, β_i^j, σ_i^j, A_i i K_{Ci}. Jedna metoda optimalnog podešavanja parametra σ_i^j je prezentirana u [23]. Ako se parametri α_i^j, β_i^j i A_i fiksiraju na samom početku, tj. ako se koriste kao konstante prethodno dobivene računalnim simulacijama, tada u tom slučaju, jedini slobodni parametar je K_{Ci} kojeg možemo smatrati sadržanim u parametrima p_k^i, $r_l^i \in \mathbb{R}$ iz izraza (4.118) i (4.119). Nadalje, izraze od (4.118) do (4.120) možemo lako zapisati u obliku od (4.5) do (4.7). Prema tome, za sintezu zakona upravljanja s analitičkim neizrazitim baznim funkcijama, tj. za određivanje parametara p_k^i, $r_l^i \in \mathbb{R}$ iz izraza (4.118) i (4.119) možemo koristiti Algoritam 1.

Napomena 4.3. *Kako bi se izbjegli problemi zbog nediferencijabilnosti funkcije signum u izrazu* (4.122) *i apsolutne vrijednosti u izrazu* (4.124) *potrebno je primijeniti odgovarajuće glatke aproksimacije.*

4.5 Primjeri

Ovdje ćemo algoritam opisan u Potpoglavljima od 4.1 do 4.4 provjeriti na primjerima nelinearnih sustava kod kojih je moguće analitički riješiti HJI (ne)jednadžbu te time egzaktno odrediti vektore upravljanja i neodređenosti. Na taj način može se direktno ocijeniti izraču-

nava li predloženi algoritam traženo rješenje problema s dovoljnom numeričkom efikasnošću u smislu konvergencije i točnosti. Algoritam je napisan i realiziran u programskom paketu MATLAB.

Prilikom rješavanja pojedinog problema potrebno je na odgovarajući način provesti inicijalizaciju algoritma. Pri tome se misli na sljedeće:

- dobro izabrati baze aproksimacijskih funkcija $\theta_j^i(\mathbf{x})$ i $\psi_j^i(\mathbf{x})$ u izrazima (4.1) i (4.2);
- diskretizirati vremenski interval $[t_0,\ t_f]$ na N jednakih podintervala, pri čemu je korak diskretizacije $\tau = \frac{t_f - t_0}{N}$ te odrediti red $(1., \ldots, 4.)$ Adamsove metode, tj. parametar k u izrazu (4.54);
- izabrati: vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0$, početnu vrijednost parametra μ_0 koji predstavlja kvadrat početnog $\mathscr{L}_2$ pojačanja γ_0^2, korak konvergencije subgradijentne metode c_k koji zadovoljava (4.29), kriterij zaustavljanja subgradijentne metode ε u 4. koraku Algoritma 1, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija $\boldsymbol{\pi}_0$ i $\boldsymbol{\rho}_0$, kriterij zaustavljanja Newtonove metode ϵ u 5. koraku Algoritma 2, koeficijente c_1, c_2 i β metode pretraživanja po pravcu uz Wolfeove uvjete (4.52) i (4.53).

Vrijednost prethodno navedenih parametara treba birati tako da postignemo što je moguće bolju točnost i brzinu konvergencije, a da pri tom ne narušimo numeričku stabilnost algoritma.

Primjer 4.1 (Primjer 6.1.7 iz [13, str. 98])**.** Razmatramo skalarni nelinearni sustav opisan sljedećom jednadžbom

$$\dot{x} = u + \operatorname{arctg}(x) \cdot d, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \tag{4.132}$$

Pripadajuća HJI nejednadžba je

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dV}{dx}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\operatorname{arctg}^2(x)\right) \geq x^2, \tag{4.133}$$

koja ima rješenje $V \geq 0$ za svaki γ takav da je

$$|\operatorname{arctg}(x)| < \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{4.134}$$

tj., za svaki $\gamma > \frac{\pi}{2}$. Iz nejednadžbe (4.133) lako možemo vidjeti da je

$$\frac{dV}{dx} \geq 2x \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\text{arctg}^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.135}$$

pa prema izrazima (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned} u^* &= -x \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\text{arctg}^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ d^* &= \frac{1}{\gamma^2} x \,\text{arctg}(x) \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\text{arctg}^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Odaberimo aproksimacijske funkcije varijabli upravljanja i neodređenosti u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= p_1 x + p_2 x^3 + p_3 x^5 + p_4 x^7 + p_5 x^9, \\ \hat{d}(x) &= r_1 x + r_2 x^3 + r_3 x^5 + r_4 x^7 + r_5 x^9, \end{aligned} \tag{4.137}$$

tj. zapisano u obliku (4.5) i (4.6) imamo

$$\boldsymbol{\Theta}(x) = \boldsymbol{\Psi}(x) = \begin{bmatrix} x & x^3 & x^5 & x^7 & x^9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}. \tag{4.138}$$

U ovom primjeru postavili smo sljedeće vrijednosti parametara algoritma:

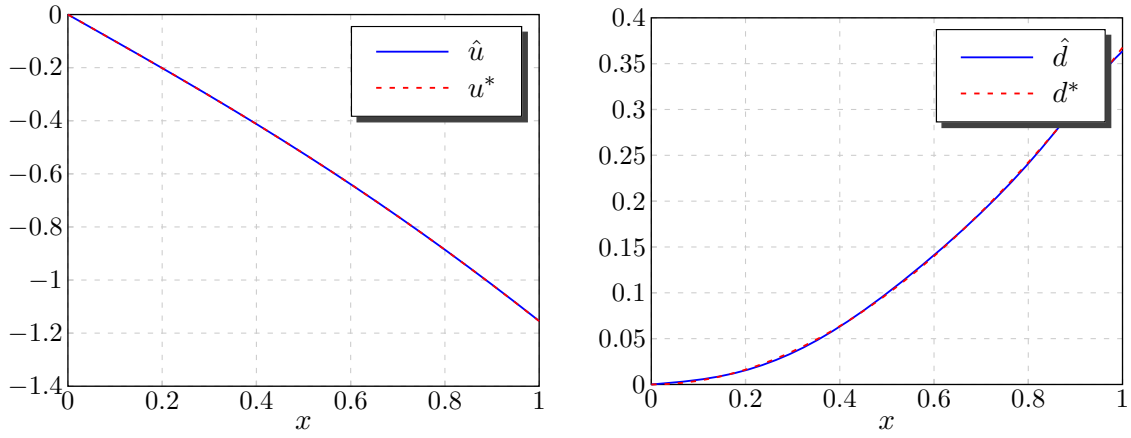
- vremenski interval od $t_0 = 0$, do $t_f = 10$ [s] smo podijelili na $N = 100000$ jednakih podintervala, tj. korak diskretizacije je $\tau = 10^{-4}$ [s] te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;
- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = [1]$, početnu vrijednost parametra $\mu_0 = \gamma_0^2 = 5$, korak konvergencije subgradijentne metode $c_k = 0.1/\sqrt{k}$, kriterij zaustavljanja subgradijentne metode $\varepsilon = 10^{-3}$, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$,

kriterij zaustavljanja Newtonove metode $\epsilon = 10^{-6}$, koeficijente $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 0.9$ i $\beta = 0.8$.

Dobivamo sljedeće rezultate

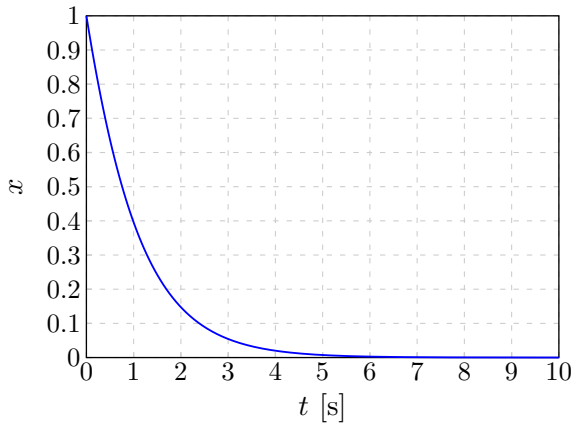
$$\mu^* = 2.4667, \quad \boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} -0.9999 \\ -0.2045 \\ 0.0781 \\ -0.0391 \\ 0.0112 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} 0.0414 \\ 0.9638 \\ -1.7517 \\ 1.8462 \\ -0.7361 \end{bmatrix}. \tag{4.139}$$

Upravljačka i poremećajna varijabla dobivene izvedenim algoritmom iz izraza (4.137) s parametrima iz (4.139) u usporedbi s analitičkim rješenjima iz izraza (4.136) u ovisnosti o varijabli stanja prikazani su na slici 4.1. Na slici 4.2 prikazana je vremenska ovisnost varijable stanja, tj. odziv sustava (4.132) na početni uvjet $x_0 = 1$, pri čemu su upravljačka varijabla i varijabla neodređenosti oblika (4.137) s parametrima (4.139). Na slici 4.3 prikazana su rješenja dobivena izvedenim algoritmom u usporedbi s analitičkim rješenjima (4.136) u ovisnosti o vremenu. Na slici 4.4 prikazana je posljednja (274-ta) iteracija subgradijentne metode (Algoritam 1), odnosno prikazana je konvergencija Newtonove metode (Algoritam 2) uz parametar $\mu^* = 2.4667$, tj. minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} = 1.5706$.

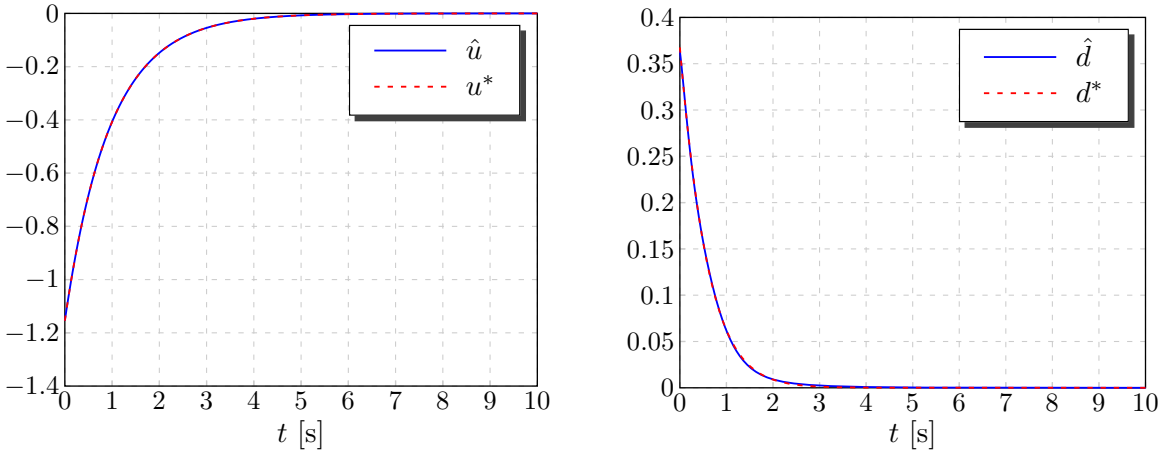


(a) (b)

Slika 4.1: Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o varijabli stanja (primjer 4.1).

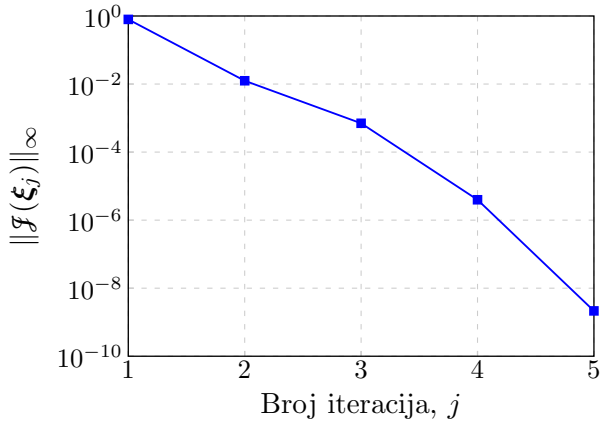


Slika 4.2: Varijabla stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.1).



(a) (b)

Slika 4.3: Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.1).



Slika 4.4: Norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija (primjer 4.1).

Primjer 4.2 (Primjer iz [112])**.** Razmatramo nelinearni sustav drugog reda opisan sljedećim

jednadžbama

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{1}{8}\left(29x_1 + 87x_1x_2^2\right) - \frac{1}{4}\left(2x_2 + 3x_2x_1^2\right) + u_1 + \frac{1}{2}d, \\
\dot{x}_2 &= -\frac{1}{4}\left(x_1 + 3x_1x_2^2\right) + 3u_2 + d, \\
\mathbf{z} &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}\left(2x_1 + 6x_1x_2^2\right) \\ \sqrt{2}\left(4x_2 + 6x_1^2x_2\right) \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Dinamika (4.140) je dobivena pomoću metode obrnutog optimalnog upravljanja (engl. *converse optimal control method*) iz [113]. Ova metoda polazi od konstrukcije funkcije $V(\mathbf{x}) \geq 0$ kao rješenja HJI jednadžbe, iz koje se onda obrnutim algebarskim postupcima određuje dinamika sustava.

U ovom primjeru je, za slučaj $\gamma^* = 1$, postavljena $V(\mathbf{x})$ sljedećeg oblika

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1^2x_2^2, \tag{4.141}$$

pa prema izrazima (3.10) dobivamo

$$\begin{aligned}
u_1^*(\mathbf{x}) &= -x_1 - 3x_1x_2^2, \\
u_2^*(\mathbf{x}) &= -6x_2 - 9x_1^2x_2, \\
d^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + 3x_1^2x_2 + \frac{3}{2}x_1x_2^2.
\end{aligned} \tag{4.142}$$

Odaberimo komponente vektora upravljanja i neodređenosti u sljedećem obliku

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1(\mathbf{x}) &= p_1^1x_1 + p_2^1x_2 + p_3^1x_1x_2 + p_4^1x_1^2x_2 + p_5^1x_1x_2^2 + p_6^1x_1^2x_2^2 + p_7^1x_1^2 + p_8^1x_2^2, \\
\hat{u}_2(\mathbf{x}) &= p_1^2x_1 + p_2^2x_2 + p_3^2x_1x_2 + p_4^2x_1^2x_2 + p_5^2x_1x_2^2 + p_6^2x_1^2x_2^2 + p_7^2x_1^2 + p_8^2x_2^2, \\
\hat{d}(\mathbf{x}) &= r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_1x_2 + r_4x_1^2x_2 + r_5x_1x_2^2 + r_6x_1^2x_2^2 + r_7x_1^2 + r_8x_2^2,
\end{aligned} \tag{4.143}$$

tj. zapisano u obliku (4.5) i (4.6) imamo

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta}^1(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1x_2 & x_1^2x_2 & x_1x_2^2 & x_1^2x_2^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{bmatrix}, \\
&\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\theta}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \\
&\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ \vdots \\ p_8^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ \vdots \\ p_8^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_8 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.144}$$

U ovom primjeru postavili smo sljedeće vrijednosti parametara algoritma:

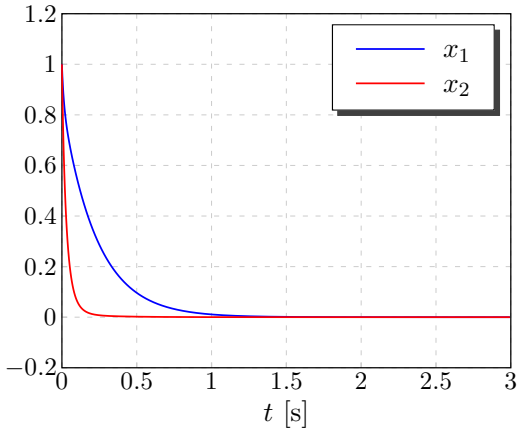
- vremenski interval od $t_0 = 0$, do $t_f = 3$ [s] smo podijelili na $N = 5000$ jednakih podintervala, tj. korak diskretizacije je $\tau = 6 \cdot 10^{-4}$ [s] te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;
- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = [1 \ 1]^{\mathrm{T}}$, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{1}$, kriterij zaustavljanja Newtonove metode $\epsilon = 10^{-6}$, koeficijente $c_1 = 10^{-4}$, $c_2 = 0.9$ i $\beta = 0.6$.

Dobivamo sljedeće rezultate

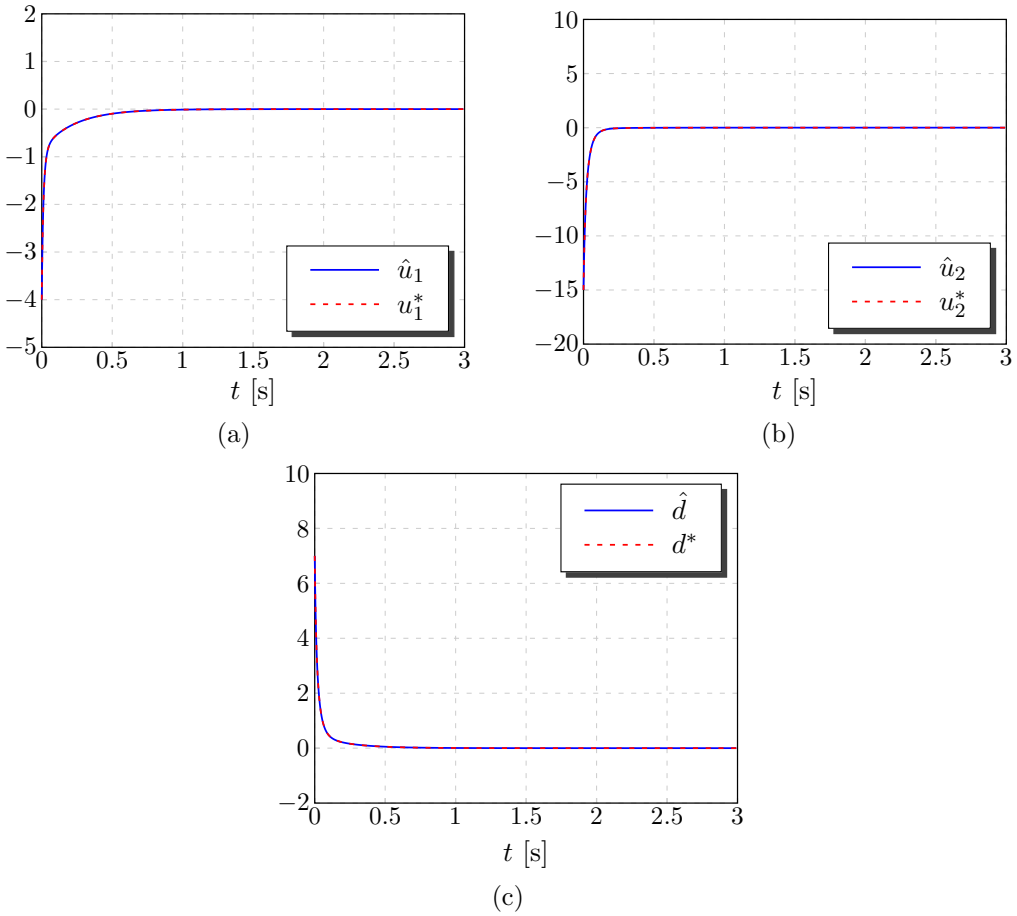
$$\mathbf{p}^{1^*} = \begin{bmatrix} -0.9997 \\ -0.0241 \\ 0.0785 \\ -0.0676 \\ -3.0576 \\ 0.0422 \\ -0.0003 \\ 0.0287 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{2^*} = \begin{bmatrix} 0.0004 \\ -6.0319 \\ 0.1224 \\ -9.1208 \\ -0.1533 \\ 0.1016 \\ -0.0009 \\ 0.0825 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} 0.4995 \\ 2.0478 \\ -0.1576 \\ 3.1370 \\ 1.6151 \\ -0.0847 \\ 0.0007 \\ -0.0579 \end{bmatrix} \tag{4.145}$$

Na slici 4.5 prikazana je vremenska ovisnost varijabli stanja, tj. odziv sustava (4.140) na

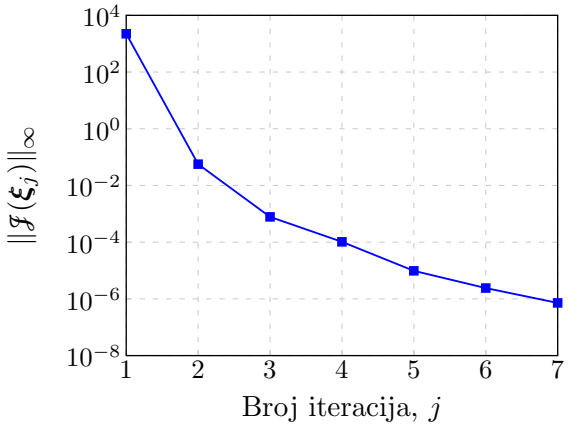
početne uvjet $\mathbf{x}_0 = [1 \;\; 1]^{\mathrm{T}}$, pri čemu su upravljačke varijable i varijabla neodređenosti oblika (4.143) s parametrima (4.145). Na slici 4.6 prikazana su rješenja dobivena izvedenim algoritmom u usporedbi s analitičkim rješenjima (4.142). Na slici 4.7 prikazana je konvergencija Newtonove metode (Algoritam 2) uz sub-optimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^* = 1$.



Slika 4.5: Varijable stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.2).



Slika 4.6: Upravljačke varijable i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.2).



Slika 4.7: Norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija (primjer 4.2).

U sljedećem primjeru prikazat ćemo simulacijske rezultate primjene izvedenog algoritma na sintezu zakona upravljanja s analitičkim neizrazitim baznim funkcijama čije smo univerzalno aproksimacijsko svojstvo pokazali u Potpoglavlju 4.4.

Primjer 4.3 (Primjer iz [20])**.** Razmatramo nelinearni sustav s jednim stupnjem slobode gibanja čiji je dinamički model opisan sljedećom jednadžbom [111]

$$m\left(2+\sin(q)\right)\ddot{q}+\frac{1}{2}m\cos(q)\dot{q}^2+gl\sin(q)=u+w, \tag{4.146}$$

gdje su $q,\dot{q},\ddot{q}\in\mathbb{R}$ pozicija, brzina i akceleracija, respektivno, u upravljački ulaz i w vanjski poremećaj ili nemodelirani dinamički efekt. Numeričke vrijednosti parametara su: $m=0.5\,[\mathrm{kg}]$, $gl=10\,[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]$.

Definiranjem varijabli stanja $x_1=q$, $x_2=\dot{q}$ jednadžbu (4.146) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2,\\ \dot{x}_2&=-\frac{\frac{1}{2}m\cos(x_1)x_2^2+gl\sin(x_1)}{m\left(2+\sin(x_1)\right)}+\frac{1}{m\left(2+\sin(x_1)\right)}u+d,\end{aligned} \tag{4.147}$$

pri čemu je $d=\dfrac{1}{m\left(2+\sin(x_1)\right)}w$.

Kako bi postigli željeno ponašanje (stabilnost i minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje) sustava (4.146), odabiremo

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} & u\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4.148}$$

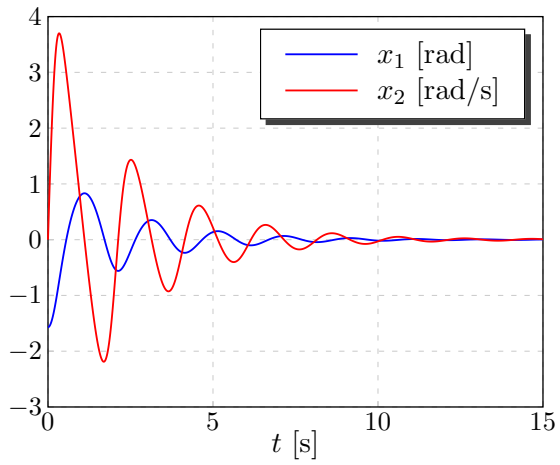
U ovom primjeru postavljamo sljedeće:

- konačno vrijeme je $t_f = 15\,[\mathrm{s}]$, broj vremenskih intervala $N = 15000$, pa je trajanje intervala $\tau = 10^{-3}\,[\mathrm{s}]$ te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;;
- definiramo pet neizrazitih skupova, tj. u izrazu (4.121) $M = 5$, s parametrima funkcije pripadnosti (4.124) kao: $\alpha_i^j = 0$, $\beta_i^j = \sigma_i^j = 1.5$, površina i-tog izlaznog neizrazitog skupa je $A_i = 1$;
- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = [-\pi/2 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$, početne vrijednosti parametara aproksimacijskih funkcija su: $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = [5 \;\; 5]^{\mathrm{T}}$, početna vrijednost skalara μ_0 postavljena je na 5, korak konvergencije subgradijentne metode $c_k = 0.5/\sqrt{k}$, koeficijenti kriterija zaustavljanja su postavljeni na $\varepsilon = \epsilon = 10^{-4}$, koeficijente $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 0.8$ i $\beta = 0.8$.

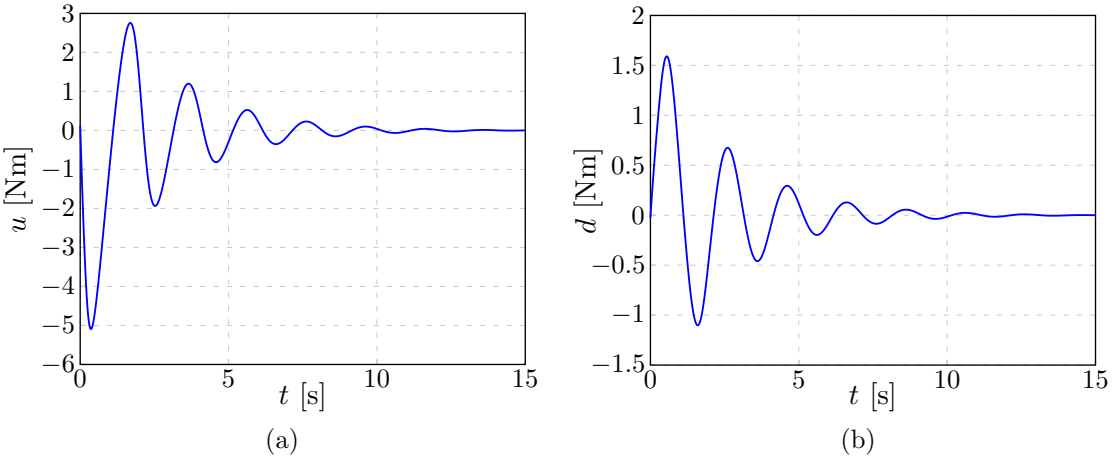
Dobivamo sljedeće

$$\mu^* = 2.7031, \quad \boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} 10.1950 \\ -6.5261 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} -1.8392 \\ 1.1938 \end{bmatrix}. \tag{4.149}$$

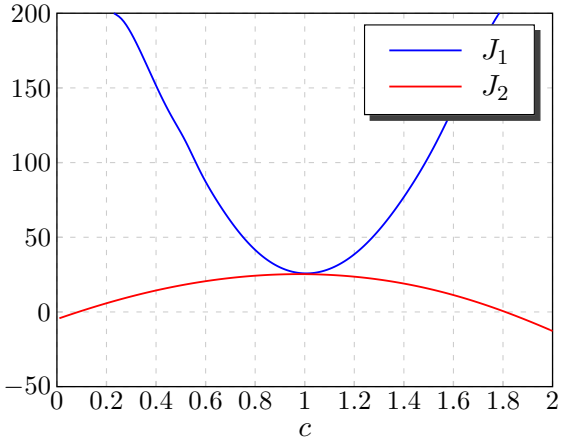
Simulacijski rezultati su prikazani na slikama od 4.8 do 4.10. Iz slike 4.8 se može vidjeti da je stabilizacija sustava iz početnih uvjeta ostvarena. Slika 4.9 pokazuje vremenske ovisnosti ulaznih varijabli (upravljačka i neodređenosti) koje su u obliku izraza (4.118) i (4.119) uz (4.120) s parametrima (4.149). Na slici 4.10 su prikazani $J_1 = \|\mathbf{x}\|^2_{\mathscr{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|^2_{\mathscr{L}_2} - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|^2_{\mathscr{L}_2}$ i $J_2 = \|\mathbf{x}\|^2_{\mathscr{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|^2_{\mathscr{L}_2} - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|^2_{\mathscr{L}_2}$, tako da se vektori $\boldsymbol{\pi}$ i $\boldsymbol{\rho}$ množe s faktorom $c \in [0,\; 2]$, tj. najprije imamo $\boldsymbol{\pi} = c \cdot \boldsymbol{\pi}^*$ uz fiksni $\boldsymbol{\rho}^*$, a zatim $\boldsymbol{\rho} = c \cdot \boldsymbol{\rho}^*$ uz fiksni $\boldsymbol{\pi}^*$. Iz ovog prikaza možemo vidjeti da je par $(\boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*)$ ravnotežna sedlasta točka funkcije cilja $J = \|\mathbf{x}\|^2_{\mathscr{L}_2} + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}^*\|^2_{\mathscr{L}_2} - \mu^*\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}^*\|^2_{\mathscr{L}_2}$, tj. vrijedi $J(\mathbf{x}, \mu^*, \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}) \leq J(\mathbf{x}, \mu^*, \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\rho}^*) \leq J(\mathbf{x}, \mu^*, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}^*)$.



Slika 4.8: Varijable stanja u ovisnosti o vremenu (primjer 4.3).



Slika 4.9: Upravljačka i poremećajna varijabla u ovisnosti o vremenu (primjer 4.3).



Slika 4.10: Ilustracija sedlaste točke (primjer 4.3).

Poglavlje 5

Analiza stabilnosti predloženog zakona upravljanja s primjenom na Euler-Lagrangeove sustave

U ovom poglavlju izvest ćemo uvjete stabilnosti predloženog oblika zakona upravljanja s primjenom na nelinearne sustave čija se dinamika može opisati Euler-Lagrangeovim jednadžbama. Izvedeni uvjeti se u cjelokupnom procesu optimizacije mogu iskoristiti za odgovarajuće početno postavljanje parametara optimizacijskog algoritma ili se mogu tretirati kao skup ograničenja tipa nejednakosti. Izlaganja u ovom poglavlju se ustvari mogu shvatiti kao rješavanje problema inverznog optimalnog upravljanja. Glavna ideja je projektirati regulator koji će, uz djelovanje neodređenosti, biti optimalan s obzirom na funkcional performansi izveden na osnovu Ljapunovljeve analize stabilnosti, tj. ovakvim pristupom lokalna funkcija cilja se *a posteriori* određuje.

Ljapunovljeva analiza stabilnosti zahtijeva postavljanje pozitivno definitne funkcije koja ima svojstva funkcije energije, a čija je vremenska derivacija negativno definitna. Naravno, u općenitom slučaju nelinearnih dinamičkih sustava postavljanje takve funkcije nije nimalo jednostavno. Zbog tog razloga, u ovoj disertaciji razmatramo jednu klasu nelinearnih sustava s određenim svojstvima koja olakšavaju postavljanje Ljapunovljeve funkcije, a time i uvjeta stabilnosti.

5.1 Euler-Lagrangeovi sustavi

Pod pojmom Euler-Lagrangeovi (EL) sustavi podrazumijevat ćemo sustave čija je dinamika opisana Euler-Lagrangeovim jednadžbama, tj. skupom običnih diferencijalnih jednadžbi specifične strukture. Diferencijalne jednadžbe gibanja bilo kojeg mehaničkog sustava mogu se izvesti navedenom metodom pri čemu je prikladno da se položaj i gibanje pojedine čestice u sustavu opisuje pomoću poopćenih koordinata i brzina. Pojam poopćenih koordinata ili generaliziranih koordinata uveo je Lagrange kao temelj svoje analitičke mehanike, a mogu se definirati kao skup međusobno nezavisnih parametara koji jednoznačno definira položaj sustava u bilo kojem vremenskom trenutku. Sa stanovišta upravljanja, poopćene koordinate u literaturi se nazivaju upravljane koordinate.

Prema [114], postavljamo sljedeću definiciju:

Definicija 5.1 (Euler-Lagrangeov sustav)**.** *Euler-Lagrangeove jednadžbe gibanja*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathscr{M}\boldsymbol{\tau}, \tag{5.1}$$

definiraju Euler-Lagrangeov sustav koji ima s stupnjeva slobode s upravljanim (poopćenim) koordinatama $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^s$, gdje su: $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$ Lagrangeova funkcija, $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ kinetička energija, $U(\mathbf{q})$ potencijalna energija, $R(\dot{\mathbf{q}})$ Rayleighova disipacijska funkcija, $\mathscr{M} \in \mathbb{R}^{s\times n_u}$ matrica konstanti i $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n_u}$ je vektor vanjskih (ulaznih) sila i/ili momenata.

Ako je broj ulaza jednak broju stupnjeva slobode EL sustava tada kažemo da je takav sustav potpuno pogonjen (engl. *fully actuated*). To znači da je $n_u = s$, tj.

$$\mathscr{M} = \mathbf{I}_s. \tag{5.2}$$

Inače, ako je $n_u < s$ kažemo da sustav nepotpuno pogonjen (engl. *underactuated*) i tada je

$$\mathscr{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_u}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.3}$$

U ovoj disertaciji razmatramo potpuno pogonjene sustave.

Ako pretpostavimo da je potencijalna energija U prouzrokovana samo konzervativnim silama, kakva je gravitacijska sila, tada su Lagrangeove jednadžbe za sustav sa s stupnjeva slobode gibanja dane s

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right] - \frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \tag{5.4}$$

Kinetička energija dinamičkog sustava definirana je sljedećim izrazom

$$T\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \tag{5.5}$$

gdje je $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$ matrica inercija koja je simetrična i pozitivno definitna za svaki $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^s$, tj. vrijedi $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\mathbf{q}) > \mathbf{0}$. Za potencijalnu energiju znamo da je funkcija vektora položaja upravljanih koordinata $\mathbf{q}$, pa je Lagrangeova funkcija jednaka

$$L\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}). \tag{5.6}$$

Ako izraz (5.6) uvrstimo u (5.4) dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right]\right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right] + \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} &= \boldsymbol{\tau}, \\
\frac{d}{dt}\left[\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right] + \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} &= \boldsymbol{\tau}, \\
\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right] + \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} &= \boldsymbol{\tau},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

iz čega slijedi

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \tag{5.8}$$

gdje su: vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja dimenzije $s \times 1$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left[\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\right], \tag{5.9}$$

elementi matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\dot{q}_k, \tag{5.10}$$

Christoffelov simbol prve vrste

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right), \tag{5.11}$$

vektor gravitacijskog djelovanja dimenzije $s \times 1$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{5.12}$$

Važno svojstvo sustava opisanog s (5.8) je to da je matrica $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ antisimetrična, tj. vrijedi

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^s. \tag{5.13}$$

Za dokaz pogledati [115]. Kao posljedica antisimetričnosti matrice $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ proizlazi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\left[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right]^{\mathrm{T}}, \\ \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^{\mathrm{T}}, \\ 2\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) &= 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

odnosno,

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^{\mathrm{T}}. \tag{5.15}$$

U ovoj disertaciji razmatramo EL sustave s prisutnim neodređenostima u obliku vanjskih poremećajnih sila i/ili momenata, nemodeliranih nelinearnosti i sl. U tom kontekstu izraz (5.8) postaje

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{w}, \tag{5.16}$$

gdje je $\mathbf{w}$ vektor neodređenosti.

5.2 Konstrukcija Ljapunovljeve funkcije

Kako bi sustav (5.16) prikazali u standardnom obliku afinih nelinearnih dinamičkih sustava u prostoru stanja (3.1), odabiremo vektor varijabli stanja u obliku $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$

$\left[\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \;\; \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ i vektor upravljanja $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}$.

Radi jednostavnosti, razmatrat ćemo problem regulacije oko ravnotežnog stanja $\mathbf{x}_d = 0$, što znači da je odstupanje od željenog stanja

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_1, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 &= \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Budući da je ravnotežno stanje $\mathbf{x}_d = 0$ slijedi da je $\mathbf{g}(\mathbf{x}_d) = \mathbf{0}$, što znači da vektor gravitacijskog djelovanja možemo smatrati sadržanim u vektor neodređenosti, tj.

$$\mathbf{d} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\,\left(\mathbf{w} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\right), \tag{5.18}$$

koji pripada skupu $\mathscr{L}_2\left([t_0,\ t_f]\,,\ \mathbb{R}^s\right)$. Tako da sada imamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{u} + \mathbf{d}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Prema tome matrice sustava su oblika

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1)\,\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Svojstvo disipativnosti, ili rasipanja energija, predstavlja osnovni koncept u proučavanju dinamičkih sustava općenito, a naročito EL sustava. Uz koncept disipativnosti usko je vezan pojam pasivnosti. Kod pasivnih sustava stupanj primljene energije iz okoline nije manji od porasta akumulirane energije. Drugim riječima, pasivni sustav ne može akumulirati više energije nego što je dobavljeno iz okoline, gdje razlika nastaje uslijed disipacije energije. Jasno je da je pasivnost usko vezana za svojstvo stabilnosti. Standardne reference iz teorije disipativnosti i pasivnosti su [13, 31, 68, 69]. Pasivnost je povezana s pojmom ulazno/izlazne stabilnosti sustava. U [114, 116] je pokazano da EL sustavi imaju svojstvo izlazne striktne pasivnosti.

Iz izraza (3.3) vidimo da derivacija Ljapunovljeve funkcije $\dot{V}(\mathbf{x})$ ne mora biti strogo ne-

gativno definitna, već može biti negativno semidefinitna, što znači da ako postoji nemjerljivi nestabilni dio sustava, tada i $\mathbf{x} = 0$ može biti nestabilno stanje sustava. Da bi disipativnost podrazumijevala i Ljapunovljevu stabilnost, moramo isključiti ovakve situacije. Ako su ispunjena svojstva opazivosti i osmotrivosti u nultom stanju (Definicija 3.1 i Definicija 3.2) tada je sustav koji je izlazno striktno pasivan, a time i $\mathscr{L}_2$ stabilan, također i interno stabilan, odnosno stabilan u smislu Ljapunova.

Važno je uočiti da neodređenosti u sustavu (5.19) ispunjavaju uvjet sparivanja (engl. *matching condition*), tj. vektor neodređenosti $\mathbf{d}$ ulazi u sustav kroz isti kanal kao i vektor upravljanja $\mathbf{u}$. U [41, Poglavlje 5.1] je pokazano da ako je ispunjen uvjet sparivanja, Ljapunovljevu funkciju sustava bez neodređenosti $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ možemo uzeti i kao Ljapunovljevu funkciju kojom ćemo garantirati robusnu stabilnost s obzirom na neodređenosti.

Budući da smo vektor gravitacijskog djelovanja pretpostavili sadržanim u vektoru neodređenosti kojeg dobivamo iz predloženog algoritma (Poglavlje 4), možemo EL sustav napisati kao

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 = \mathbf{u} + \overline{\mathbf{d}}, \tag{5.21}$$

gdje je $\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{w} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)$, tj. uz (5.18) imamo $\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}$.

Poznato je da se regulacija oko ravnotežnog stanja $\mathbf{x}_d = 0$ može ostvariti linearnim zakonom upravljanja oblika

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1 - \mathbf{K}_D\mathbf{x}_2, \tag{5.22}$$

gdje su $\mathbf{K}_P$ i $\mathbf{K}_D$ dijagonalne pozitivno definitne matrice.

Slijedeći metodologiju iz [115], kao prvi korak u konstrukciji Ljapunovljeve funkcije nominalnog sustava ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$) potrebno je izraz (5.21) s lijeve strane pomnožiti s $\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}$ čime se dobiva

$$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2 = 0. \tag{5.23}$$

U izrazu (5.23) zbog simetričnosti matrica $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)$ i $\mathbf{K}_P$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\dot{\mathbf{x}}_2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2\right) - \frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2, \\ \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sada izraz (5.23) postaje

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2+\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\right)-\frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\left(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1)-2\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right)\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2=0, \tag{5.25}$$

te konačno zbog antisimetričnosti matrice $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_1)-2\mathbf{C}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2+\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\right)=-\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2, \tag{5.26}$$

gdje izraz u zagradi na lijevoj strani predstavlja Ljapunovljevu funkciju

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2+\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1, \tag{5.27}$$

a izraz na desnoj strani njezinu vremensku derivaciju

$$\dot{V}(\mathbf{x})=-\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2. \tag{5.28}$$

5.3 Uvjeti stabilnosti

Uvjeti $\mathscr{L}_2$ stabilnosti sustava (5.19) slijede iz sljedećih nejednadžbi

$$V(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)>0, \tag{5.29}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\leq\mu\|\overline{\mathbf{d}}\|^2-\|\mathbf{z}\|^2, \tag{5.30}$$

pri čemu je konačno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^2=\mu>0$, a vektor neodređenosti je

$$\overline{\mathbf{d}}=\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\mathbf{d}=\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\,\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\,\boldsymbol{\rho}\ \text{ (vidjeti izraz (4.6))}, \tag{5.31}$$

uz pretpostavku da je

$$\|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\|^2\leq c\left(\|\mathbf{x}_1\|^2+\|\mathbf{x}_2\|^2+2\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|\right), \tag{5.32}$$

gdje je c pozitivna konstanta, dok vektor izlaza kojim se želi upravljati $\mathbf{z}$, odabiremo takav da vrijedi

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2. \tag{5.33}$$

Lako se može vidjeti da je uvjet (5.29) ispunjen, budući da su $\mathbf{M}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_1) > \mathbf{0}$ i $\mathbf{K}_P = \mathbf{K}_P^{\mathrm{T}} > \mathbf{0}$. Ostaje izvesti uvjete pod kojima će vrijediti nejednakost (5.30).

Uvrštavanjem (5.22), (5.28) i (5.33) u (5.30) dobiva se

$$-\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2 - \mu\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\rho}\|^2 + \|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\|^2 + \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 \leq 0, \tag{5.34}$$

gdje je $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$. Članove u prethodnom izrazu možemo ocijeniti na sljedeći način

$$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_2\|^2 \leq \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2 \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_2\|^2, \tag{5.35}$$

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\rho}\|^2 \leq \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\}\cdot c\cdot\left(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + 2\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|\right)\cdot\|\boldsymbol{\rho}\|^2, \tag{5.36}$$

zatim

$$\|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\|^2 \leq \|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\|^2 + 2\|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\| + \|\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\|^2, \tag{5.37}$$

te nadalje

$$\lambda_{\min}^2\{\mathbf{K}_P\}\cdot\|\mathbf{x}_1\|^2 \leq \|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\|^2 \leq \lambda_{\max}^2\{\mathbf{K}_P\}\cdot\|\mathbf{x}_1\|^2, \tag{5.38}$$

$$\lambda_{\min}^2\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_2\|^2 \leq \|\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\|^2 \leq \lambda_{\max}^2\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_2\|^2, \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\| &\geq \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_P\}\cdot\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|,\\ \|\mathbf{K}_P\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{K}_D\mathbf{x}_2\| &\leq \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_P\}\cdot\lambda_{\max}\{\mathbf{K}_D\}\cdot\|\mathbf{x}_1\|\cdot\|\mathbf{x}_2\|,\end{aligned} \tag{5.40}$$

gdje su $\lambda_{\min}\{\cdot\}$ i $\lambda_{\max}\{\cdot\}$ minimalna i maksimalna svojstvene vrijednost. Sada izraz (5.34) postaje

$$-a_1\|\mathbf{x}_1\|^2 + \begin{bmatrix}\|\mathbf{x}_1\| & \|\mathbf{x}_2\|\end{bmatrix}\cdot\mathbf{R}\cdot\begin{bmatrix}\|\mathbf{x}_1\|\\ \|\mathbf{x}_2\|\end{bmatrix} \leq 0, \tag{5.41}$$

gdje su

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mu\overline{c} + a_2 + 1 & a_4 - \mu\overline{c} \\ a_4 - \mu\overline{c} & -\mu\overline{c} + a_3 + 1 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_D\}, \quad a_2 = \lambda^2_{\min}\{\mathbf{K}_P\}, \tag{5.42}$$

$$a_3 = \lambda^2_{\min}\{\mathbf{K}_D\}, \quad a_4 = \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_P\} \cdot \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_D\},$$

$$\overline{c} = c \cdot \lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{x}_1)\} \cdot \|\boldsymbol{\rho}\|^2.$$

Važno je uočiti da su $\overline{c}$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$.

Sada uvjete stabilnosti možemo sažeti u sljedeći korolar:

Korolar 5.1. *Neka je $a_2 > a_3$, tada je sustav (5.19) uz zakon upravljanja (5.22) $\mathscr{L}_2$ stabilan od neodređenosti (5.31) prema izlazu (5.33) ako je*

$$\frac{1 + a_2}{\overline{c}} \leq \mu \leq \frac{a_2 + a_3 + 1}{\overline{c}(a_2 + a_3 - 2a_4 + 2)}, \qquad a_4 < \frac{a_2 + a_3 + 2}{2}, \tag{5.43}$$

gdje su a_2, a_3, a_4 i $\overline{c}$ iz izraza (5.42).

Dokaz. Poznato je da je simetrična matrica pozitivno semidefinitna ako i samo ako su joj sve glavne minore ≥ 0 (pogledati na primjer u [117, Poglavlje 6.]), iz čega slijedi da je simetrična matrica $\mathbf{R}$ iz izraza (5.42) negativno semidefinitna ako i samo ako su glavne minore prvog reda negativno semidefinitne, tj.

$$-\mu\overline{c} + a_2 + 1 \leq 0 \implies \mu \geq \frac{a_2 + 1}{\overline{c}}, \tag{5.44}$$

$$-\mu\overline{c} + a_3 + 1 \leq 0 \implies \mu \geq \frac{a_3 + 1}{\overline{c}}, \tag{5.45}$$

a glavna minora drugog reda pozitivno semidefinitna, tj.

$$\begin{vmatrix} -\mu\overline{c} + a_2 + 1 & a_4 - \mu\overline{c} \\ a_4 - \mu\overline{c} & -\mu\overline{c} + a_3 + 1 \end{vmatrix} \geq 0 \implies \mu \leq \frac{a_2 + a_3 + 1}{\overline{c}(a_2 + a_3 - 2a_4 + 2)}. \tag{5.46}$$

Iz gornjih izraza, uz $a_2 > a_3$, proizlazi prvi uvjet iz (5.43), dok drugi uvjet iz (5.43) slijedi iz činjenice da je $\mu > 0$. ■

U kontekstu algoritma izvedenog u Poglavlju 4 zakon upravljanja (5.22) može se zapisati u obliku

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\, \boldsymbol{\pi}, \tag{5.47}$$

pri čemu su

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1(\mathbf{x}_1) & \boldsymbol{\Theta}_2(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P \cdot \mathbf{1}_{s\times 1} \\ \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{1}_{s\times 1} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Theta}_1(\mathbf{x}_1) = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{s} \mathbf{E}_i\, \mathbf{x}_1\, \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2(\mathbf{x}_2) = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{s} \mathbf{E}_i\, \mathbf{x}_2\, \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{5.48}$$

Na osnovu prethodnog razmatranja, uvjeti stabilnosti koji bi se uključili u predloženi algoritam glasili bi

$$\begin{aligned} \pi_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2s, \\ \mu\overline{c} - \alpha_2 - 1 \geq 0, \\ -\mu\overline{c}(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 + 2) + \alpha_2 + \alpha_3 + 1 \geq 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 + 2 > 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 > 0, \end{aligned} \tag{5.49}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \left(\min\left\{[\mathbf{I}_{s\times s} \;\; \mathbf{0}_{s\times s}] \cdot \boldsymbol{\pi}\right\}\right)^2, \quad \alpha_3 = \left(\min\left\{[\mathbf{0}_{s\times s} \;\; \mathbf{I}_{s\times s}] \cdot \boldsymbol{\pi}\right\}\right)^2, \\ \alpha_4 = \min\left\{[\mathbf{I}_{s\times s} \;\; \mathbf{0}_{s\times s}] \cdot \boldsymbol{\pi}\right\} \cdot \min\left\{[\mathbf{0}_{s\times s} \;\; \mathbf{I}_{s\times s}] \cdot \boldsymbol{\pi}\right\}, \end{aligned} \tag{5.50}$$

a $\overline{c}$ je iz (5.42). U izrazu (5.50) $\max\{\cdot\}$ i $\min\{\cdot\}$ označavaju najveći i najmanji, respektivno, element vektora unutar zagrada $\{\cdot\}$.

Uvjeti (5.49) mogu se u predloženom algoritmu iskoristiti prilikom odabiranja početne vrijednosti μ_0 u Algoritmu 1 i početnih iznosa parametara $\boldsymbol{\pi}_0$ i $\boldsymbol{\rho}_0$ u Algoritmu 2 te na taj

način dobro usmjeriti konvergenciju Newtonove metode. Nadalje, uvjeti (5.49) mogu se u optimizacijski problem iz Poglavlja 4 uključiti primjenom metode kaznenih funkcija. To bi značilo da je u funkciju cilja (4.47), tj. (4.69) potrebno dodati još jedan član koji bi bio oblika

$$\sum_{k=1}^{2s+3} K_{g,k} g_k^2 H^-(g_k), \tag{5.51}$$

pri čemu g_k predstavljaju lijeve strane nejednadžbi iz izraza (5.49), a $K_{g,k}$ su težinski koeficijenti. U (5.51) $H^-(z)$ predstavlja Heavisideovu funkciju definiranu kao

$$H^-(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \geq 0, \\ 1 & \text{if } z < 0. \end{cases} \tag{5.52}$$

Vidljivo je da bi u ovom slučaju trebalo računati subgradijent izraza (5.51) budući da se u njemu pojavljuju min odnosno max operatori. Ovdje također treba napomenuti da bi prethodno dokazane rezultate u Propozicijama 4.2 do 4.4 trebalo proširiti na slučaj minimaks optimizacijskog problema s ograničenjima tipa nejednakosti.

U ovom poglavlju smo pokazali izvod uvjeta $\mathscr{L}_2$ stabilnosti EL sustava s jednom jednostavnom klasom upravljačkog zakona. Slijedeći istu metodologiju, moguće je izvesti i uvjete za neku složeniju klasu problema vodeći računa o obliku aproksimacijskih funkcija vektora upravljanja. Na primjer, u radu [115] je provedena analiza stabilnosti nelinearnih EL sustava vođenih analitičkim neizrazitim regulatorom. U ovoj disertaciji, u Potpoglavlju 4.4, smo dokazali da analitičke neizrazite bazne funkcije mogu aproksimirati bilo koju funkciju na kompaktnom skupu s proizvoljnim stupnjem točnosti. Prema tome, rezultate analize stabilnosti iz [115] trebalo bi sagledati u kontekstu $\mathscr{L}_2$ pojačanja, a to nije ništa drugo nego izvesti uvjete pod kojima će vrijediti nejednakost (5.30).

Poglavlje 6

Sinteza regulatora elektrohidrauličkih sustava

Tijekom posljednja dva desetljeća, kao jedan od najčešćih pogona u različitim područjima automatskog upravljanja, primjenjuju se elektrohidraulički sustavi. Na primjer, takve primjene uključuju upravljanje letom zrakoplova [118], injekcijsko modeliranje [119], paralelne manipulatore [120], sprečavanje blokiranja kotača prilikom kočenja vozila [121], dinamičku stabilnost vozila [122] itd. Primjena elektrohidrauličkih sustava postala je raširena zbog prednosti koje posjeduju kao što su visoka kompaktnost i krutost, prijenos velikih snaga, samohlađenje, brzi odziv i visoka točnost.

Dobro je poznata činjenica da elektrohidraulički sustavi pokazuju izrazito nelinearno ponašanje koje je posljedica fenomena koji se očituju u karakteristici tlak-protok, histerezi u karakteristici protok-pojačanje, karakteristici razvodnika u okolini nule, istjecanju tekućine, varijaciji temperature [123, 124, 125, 126].

Tri su osnovna modela elektrohidrauličkih sustava predmet istraživanja u znanstvenim i stručnim radovima: sustav za upravljanje linearnim gibanjem [46, 127], sustav za upravljanje rotacijskim gibanjem [128, 129] i sustav za upravljanje silom [130, 131]. Pokazalo se da klasični pristupi kao što su PID regulator i linearni statički regulator stanja ne ostvaruju zadovoljavajuće performanse elektrohidrauličkih sustava. Zbog ograničenja takvih pristupa primjenjuju se razne metode nelinearnog upravljanja: eksterna linearizacija (engl. *feedback linearziation*), klizni režim upravljanja (engl. *sliding mode control*), tzv. *backstepping* upra-

vljanje, podesivo upravljanje (engl. *adaptive control*), umjetna inteligencija i sl.

U [132] je predloženo u kliznom režimu podesivo upravljanje elektrohidrauličkim sustavom s parametarskim nelinearnostima. Izvedena je specijalna Ljapunovljeva funkcija za dobivanje regulatora koji osigurava robusnu stabilnost s obzirom na neodređenosti u parametrima. Metoda eksterne linearizacije za praćenje željenih pomaka, brzine i tlaka elektrohidrauličkih sustava primijenjena je u [128]. Eksperimentalni rezultati su pokazali da se eksternom linearizacijom, očekivano ostvaruju bolje performanse sustava od uobičajenih PID regulatora. Međutim, poznato je da metoda eksterne linearizacije ne može garantirati robusnost u prisustvu parametarskih neodređenosti i nemodelirane dinamike. Modeliranje, identifikacija i nelinearno *backstepping* upravljanje elektrohidrauličkim sustavima publicirani su u [129]. *Backstepping* pristup je korišten za praćenje željenog pomaka, a naglasak je na konstrukciji odgovarajuće Ljapunovljeve funkcije. Pristup koji koristi prednosti *backstepping* strategije uzimajući u obzir varijacije parametara sustava, a autori ga nazivaju podesivi *backstepping* predložen je u [133]. Rezultati primjene metoda umjetne inteligencije za upravljanje elektrohidrauličkim sustavima publicirani su u radovima [134, 135, 136]. Iako su simulacijski i eksperimentalni rezultati pokazali dobra dinamička ponašanja zatvorenih sustava, vrlo je teško ili nemoguće garantirati njihovu stabilnost. Sve prethodno navedene metode zahtijevaju da su sve varijable stanja sustava praktički mjerljive. U [137] je predložena metoda nelinearnog upravljanja po vektoru izlaza koja se sastoji od observera s visokim pojačanjem i regulatora zasnovanog na svojstvu pasivnosti.

U ovom poglavlju će se algoritam upravljanja, prethodno izveden u Poglavlju 4, provjeriti na laboratorijskim modelima elektrohidrauličkih sustava, koji su u svrhu istraživanja različitih koncepata upravljanja razvijeni na Katedri za strojarsku automatiku, Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu.

6.1 Opis laboratorijskih postava

Modeli se uglavnom sastoje od standardnih industrijskih elemenata te elemenata ručne izrade, a to su:

- Hidraulička crpka je uređaj koji dovedenu mehaničku energiju pretvara u hidrauličku

energiju radne tekućine. Hidraulička crpka je volumenska crpka jer hidrauličku energiju predaje zahvaćenom volumenu tekućine.

- Pogon hidrauličkog sustava postiže se motorima. Kod stacionarne hidraulike dobavljaju mehaničku energiju za crpku pretežno elektromotori.

- Hidraulički cilindar pretvara hidrauličku energiju u pravocrtno gibanje klipnjače. Konstrukcijski se izvode kao jednoradni ili jednosmjerni te dvoradni ili dvosmjerni. Kod jednoradnih cilindara radni tlak djeluje s jedne strane klipa, a kod dvoradnih s obje.

- Hidromotor pretvara hidrauličku energiju u rotacijsko gibanje na izlaznom vratilu. Konstrukcija im je u osnovi identična konstrukciji hidrauličke crpke. Mogu se izvesti s konstantnim i/ili promjenljivim radnim volumenom.

- Uređaji za upravljanje hidrauličkom energijom u toku procesa prijenosa od hidrauličke crpke do hidrauličkog cilindra/motora. Oni omogućuju pokretanje, zaustavljanje, promjenu brzine i smjera kretanja hidrauličkog cilindra/motora te njegovo efikasno osiguranje od preopterećenja. Uređaji za upravljanje su: prigušni elementi, ventili za upravljanje tlakom, ventili za upravljanje protokom, jednosmjerni (nepovratni) ventili, razvodnici. Prigušni elementi ili prigušnici imaju ulogu aktivnih hidrauličkih otpora u hidrauličkom sustavu. Osnovni element prigušnika je odgovarajuća površina strujanja koju formira prigušni otvor. Ventili za upravljanje tlakom omogućuju ograničenje tlaka, sniženje tlaka i efikasnu zaštitu hidrauličkih sustava od preopterećenja. Ventili za upravljanje protokom omogućuju promjenu brzine izvršnih elemenata u hidrauličkom sustavu. Osnovna im je funkcija upravljanje protokom i njegova regulacija. Jednosmjerni ventili omogućuju protjecanje radne tekućine u jednom smjeru, dakle djeluju kao nepovratni. Hidraulički razvodnici omogućuju start, promjenu smjera i zaustavljanje hidrauličkog cilindra. Funkcija razvodnika je usmjeravanje i prekidanje struje radne tekućine. Osnovne karakteristike razvodnika su: broj radnih položaja, broj hidrauličkih priključaka na razvodniku, funkcija radnih položaja, način aktiviranja razvodnika, nazivna veličina priključnih otvora.

- Hidraulički akumulator akumulira hidrauličku energiju (radna tekućina pod tlakom) i predaje je hidrauličkom sustavu prema potrebi. Hidraulička energija se akumulira u periodima kada nema potrošnje u hidrauličkom sustavu ili kada je ona smanjena. Hidraulički akumulator omogućava da se snaga pogonske hidrauličke crpke ograniči na veličinu srednje snage potrošača hidrauličke energije u sustavu. On može u vrlo kratkom vremenu predati akumuliranu energiju i kratkotrajno pokriti višak potrošnje. Ugradnjom hidrauličkog akumulatora u sustav moguće je filtrirati oscilacije tlaka i protoka. To je naročito važno ako se mora osigurati stabilno napajanje i rad s minimalnom bukom.

- Senzori tlaka, sile, linearnog pomaka i brzine vrtnje koji mehaničke veličine pretvaraju u električni signal.

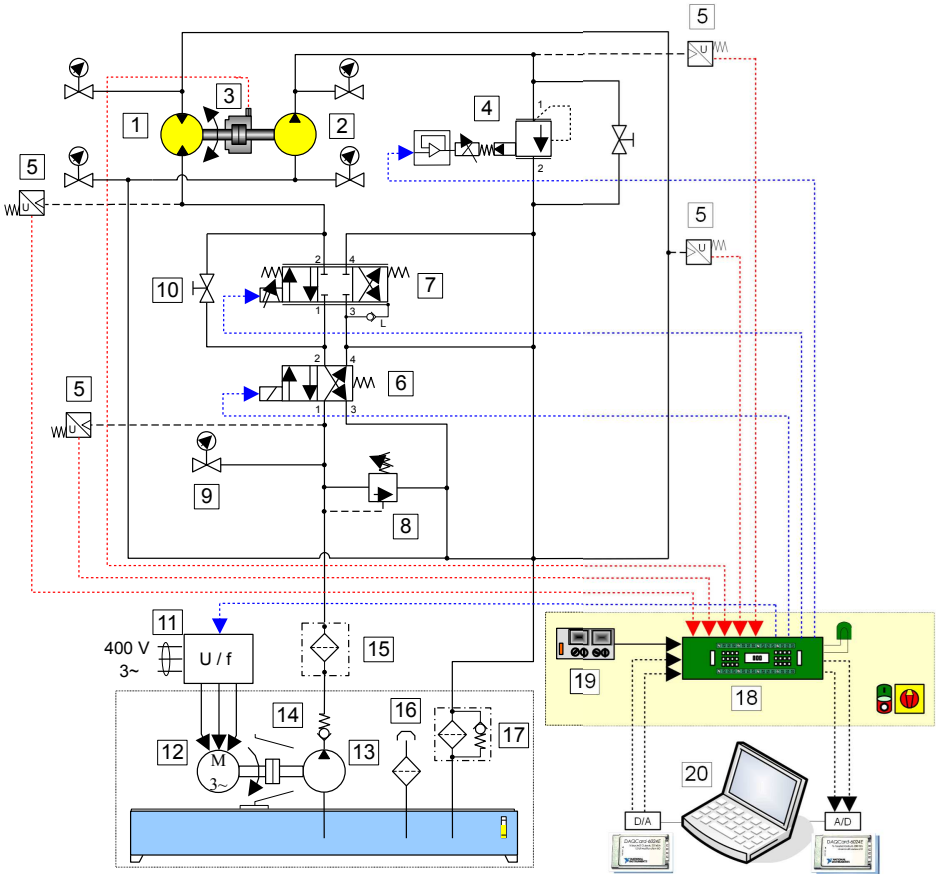
Shematski prikaz elektrohidrauličkih sustava koji su predmeti razmatranja u ovom radu prikazani su na slikama 6.1,6.3 i 6.5, a njihovi najvažniji elementi su opisani u daljnjem tekstu.

6.1.1 Modul za upravljanje rotacijskim gibanjem

Eksperimentalni postav koji se sastoji od hidrauličkog motora, kojemu se upravlja brzinom vrtnje, i hidrauličke crpke, kojom se simulira moment opterećenja, prikazan je shematski na slici 6.1. Fotografija eksperimentalnog postava elektrohidrauličkog servo sustava za upravljanje rotacijskim gibanjem prikazana je na slici 6.2.

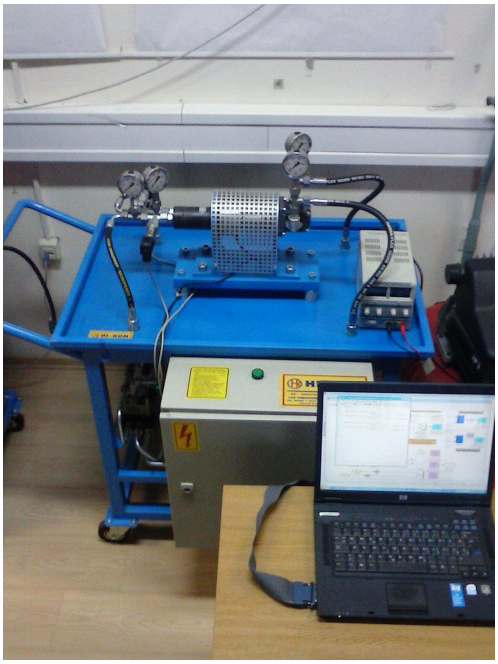
Hidromotor (1) (proizvođač Hansa Flex, model HK-EPMM 008C) ima specifični radni volumen 8.2 [cm^3/okr], dok crpka (2) (proizvođač VIVOIL, model XV-1P-D) ima 2.6 [cm^3/okr]. Izlazni tlak crpke, a time i iznos momenta opterećenja, generira se pomoću proporcionalnog tlačnog ventila (4) (proizvođač Atos, model RZ MO-AE-030/210) s integriranom upravljačkom elektronikom i analognim ulaznim signalom od 0 do 10 [V]. Crpka za terećenje radi u otvorenom krugu, pri čemu je moment opterećenja proporcionalan ulaznom naponu tlačnog ventila.

Hidromotor i crpka za terećenje su povezani krutim vratilom na kojeg je montiran inkrementalni enkoder (3) (proizvođač Heidenhain, model ERN 120, 1024 ppr). Izlazni signal sa enkodera se koristi za računanje brzine vrtnje hidromotora.



Slika 6.1: Shematski prikaz rotacijskog elektrohidrauličkog sustava: 1 hidraulički motor; 2 crpka za terećenje; 3 inkrementalni enkoder; 4 proporcionalni tlačni ventil; 5 mjerni pretvornik tlaka; 6 elektromagnetski razvodnik; 7 servo razvodnik; 8 sigurnosni ventil; 9 manometar; 10 cijevni zatvarač; 11 frekvencijski pretvarač; 12 elektromotor; 13 zupčasta crpka; 14 jednosmjerni ventil s oprugom; 15 tlačni filter; 16 uljevnik; 17 povratni filter; 18 elektroničko sučelje; 19 električni ispravljač; 20 upravljačko računalo.

Brzinom vrtnje hidromotora može se upravljati servo razvodnikom kojim se regulira protok hidrauličke tekućine prema hidromotoru (prigušni način rada) ili regulacijom brzine vrtnje asinkronog motora i pogonske zupčaste crpke pomoću frekvencijskog pretvarača (volumenski način rada). U prvom načinu rada koristi se servo razvodnik (7) (proizvođač Schneider Kreuznach, model HVM 061-005-1200-0C-E1) s integriranom elektronikom koji prema hidromotoru može dostaviti 5 [l/min] hidrauličke tekućine pri padu tlaka od 7 [MPa]. U drugom načinu rada zupčasta pumpa (13) (proizvođač VIVOIL) specifičnog radnog volumena 4.9 [cm^3/okr] i maksimalnog nominalnog tlaka 25 [MPa] pogoni se trofaznim asinkronim motorom (12) (proizvođač Siemens, model 1LA7106-4AA11, 2.2 [kW]) upravljanim frekvencijskim pretvaračem (11) (proizvođač Siemens, model SINAMICS G110). U prvom načinu rada cijevni zatvarač



Slika 6.2: Fotografija eksperimentalnog postava rotacijskog elektrohidrauličkog servo sustava.

(10) treba biti zatvoren, dok u drugom načinu treba biti otvoren.

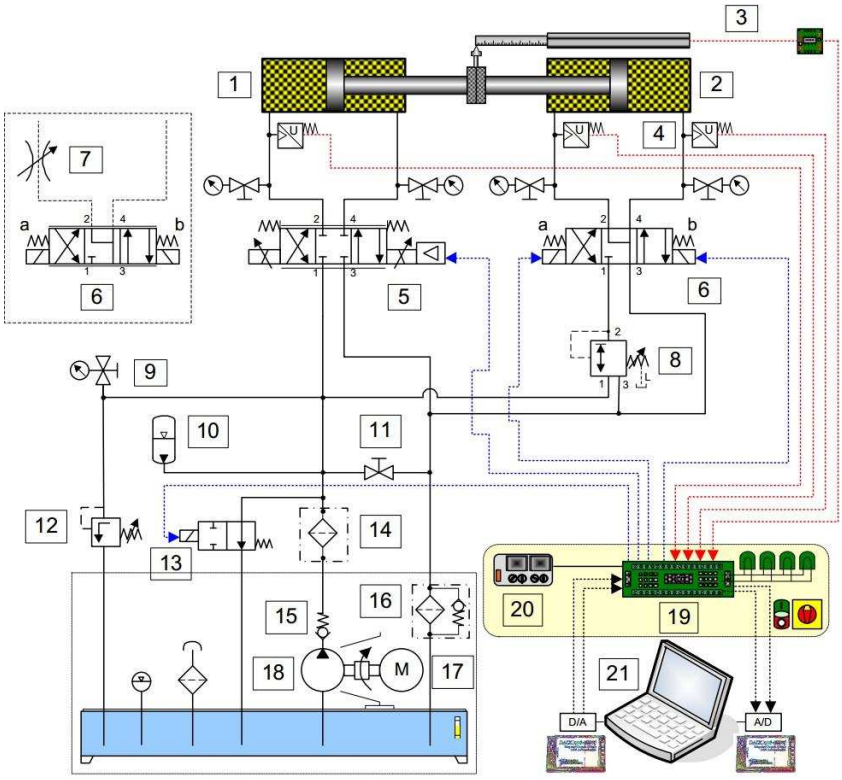
Ostali važniji dijelovi eksperimentalnog postava su: dva mjerna pretvornika tlaka (5) (proizvođač Siemens, model 7MF1564) s izlaznim signalom od 0 do 10 [V] koji odgovara rasponu tlaka od 0 do 25 [MPa], sigurnosni ventil (8) i elektromagnetski razvodnik (6) (proizvođač Atos, model DHI-0631/2/A 23).

6.1.2 Modul za upravljanje translacijskim gibanjem

Eksperimentalni model za upravljanje translacijskim gibanjem shematski je prikazan na slici 6.3. Fotografija eksperimentalnog postava elektrohidrauličkog servo sustava za upravljanje translacijskim gibanjem prikazana je na slici 6.4.

Na mjestu glavnog radnog cilindra (1) i na mjestu cilindra kojim se simulira sila opterećenja (2) postavljen je dvoradni cilindar promjera klipa 50 [mm] s klipnjačom promjera 36 [mm] te maksimalnog hoda 300 [mm]. Kod dvoradnog cilindra mogu se obje strane klipnih ploha dovesti pod tlak, pa je rad moguće obavljati u dva smjera.

Na strani glavnog cilindra postavljen je elektrohidraulički proporcionalni razvodnik (5) (proizvođač BOSCH REXROTH, model 4WRA-E-6-07). Radi se o proporcionalnom direktno upravljanom razvodniku sa četiri priključka i tri radna položaja s integriranom upravljačkom



Slika 6.3: Shematski prikaz translacijskog elektrohidrauličkog sustava: 1 glavni cilindar; 2 cilindar za terećenje; 3 linearni enkoder; 4 senzor tlaka; 5 proporcionalni ventil; 6 elektromagnetski razvodnik; 7 promjenljivi prigušnik; 8 regulator tlaka; 9 manometar; 10 hidraulički akumulator; 11 cijevni zatvarač; 12 ventil za ograničenje tlaka; 13 postavni ventil; 14 tlačni filter; 15 jednosmjerni ventil s oprugom; 16 povratni filter; 17 elektromotor; 18 zupčasta crpka; 19 elektroničko sučelje; 20 električni ispravljač; 21 upravljačko računalo.



Slika 6.4: Fotografija eksperimentalnog postava translacijskog elektrohidrauličkog servo sustava.

elektronikom. Nazivni protok iznosi 7 [l/min] pri padu tlaka od 10 [bar], maksimalni radni tlak je 315 [bar], a upravljački signali koje prima kreću se u intervalu od -10 [V] do +10 [V]. Na strani cilindra za terećenje postavljen je elektromagnetski 4/3 razvodnik (6) (proizvođač ATOS, model DHI-0 71 3 23), maksimalnog protoka 60 [l/min] i maksimalnog tlaka 350 [bar].

Za potrebe mjerenja tlaka koristi se senzor (4) u komori cilindra (proizvođač SIEMENS, model 7MF1564-3DD10-1AC1) koji ima sljedeće karakteristike: mjerno područje od 0 do 250 [bar], maksimalni tlak 500 [bar], izlazni signal od 0 do 10 [V], napajanje od 15 [V] do 36 [V]. Unutar ovog senzora nalazi se keramička pločica na koju je naparen Wheatstonov most. Deformiranjem pločice mijenja se otpor mosta, a taj signal se dalje pretvara u naponski koji se preko A/D kartice može čitati u računalu.

Za mjerenje pozicije tereta ugrađen je linearni enkoder (3) (proizvođač FESTO, model MLO-POT-300LWG) koji je konstrukcijski izveden u obliku malog cilindra s pomičnom klipnjačom koja se veže za klipnjaču hidrauličkog cilindra. Njegovi osnovni tehnički podaci su: rezolucija 0.01 [mm], maksimalna brzina kretanja 5 [m/s], maksimalno ubrzanje 200 [m/s^2], hod 300 [mm]. Ovakvi senzori linearnog pomaka zbog jednostavnosti i dobrih karakteristika često se primjenjuju u tehničkoj praksi.

Koristi se zupčasta crpka (18) konstantne dobave (proizvođač VIVOIL, model KV-1P 2.7 [cm^3/okr]) koja ima sljedeće karakteristike: maksimalna dobava pri pogonu sa elektromotorom brzine 1380 [min^{-1}] od $Q = 3.7$ [l/min], maksimalni tlak od $p = 250$ [bar]. Zupčasti par obavlja funkciju tlačnog mehanizma, stvarajući protok kojemu je suprotstavljen hidraulički otpor sustava.

Crpka se pogoni jednofaznim kaveznim asinkronim motorom (17) s pogonskim i zaletnim kondenzatorom (proizvođač KONČAR, model 5AZCD90SB-4). Nazivna brzina mu je 1380 [min^{-1}], a snaga $P = 1.1$ [kW]. Izrađen je za napon 230 [V] i frekvenciju 50 [Hz].

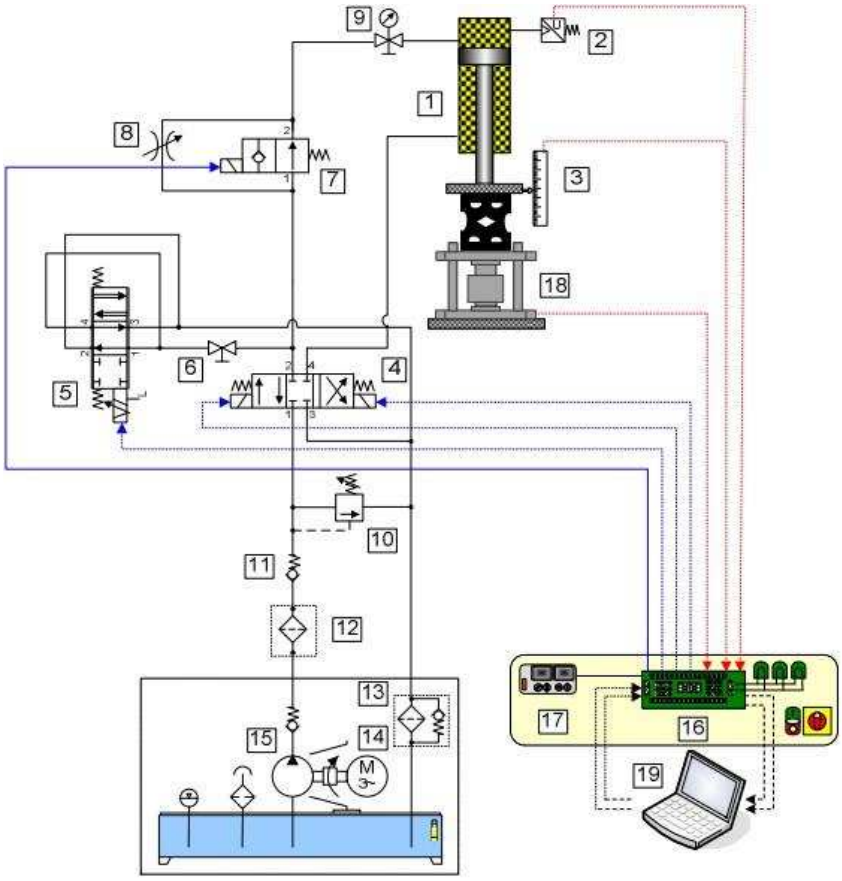
Ugrađen je membranski akumulator (10) (proizvođač HYDAC, model SBO140-1.4E1/112U-140AB), a njegove osnovne karakteristike su maksimalni tlak od 140 [bar] i volumen od 1.4 [l].

Kako bi vizualno mogli u svakom trenutku i na željenom mjestu očitati iznos tlaka u sustav su ugrađeni manometri (9). Oni u sebi imaju Bourdonovu cijev posebnog profila, na jednom kraju zatvorenu, a čvrsto uklještenu na drugom kraju. Prednji dio manometra ispunjen je

glicerinom koji eliminira titranje kazaljke. Mjerno područje ugrađenih manometara je od 0 do 160 [bar].

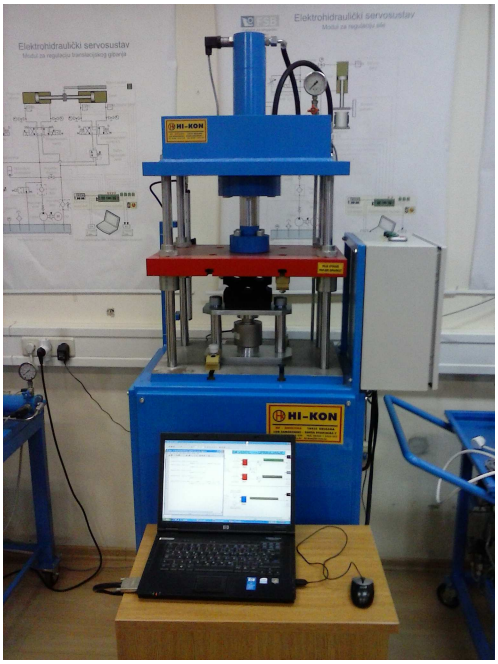
6.1.3 Modul za upravljanje silom

Shematski dijagram eksperimentalnog postava elektrohidrauličkog sustava za upravljanje silom, tj. elektrohidrauličke preše, prikazan je na slici 6.5. Fotografija eksperimentalnog postava elektrohidrauličke preše prikazana je na slici 6.6.



Slika 6.5: Shematski prikaz elektrohidrauličke preše: 1 hidraulički cilindar; 2 senzor tlaka; 3 linearni mjerni pretvornik; 4 elektromagnetski razvodnik; 5 servo ventil; 6 cijevni zatvarač; 7 elektromagnetski ventil; 8 prigušni ventil; 9 manometar; 10 ventil za ograničenje tlaka; 11 jednosmjerni ventil s oprugom; 12 tlačni filter; 13 povratni filter; 14 trofazni elektromotor; 15 zupčasta crpka; 16 elektroničko sučelje; 17 električni ispravljač; 18 senzor sile; 19 upravljačko računalo.

U postavu se koristi dvoradni hidraulički cilindar (1) duljine hoda (izvlačenja) klipnjače 300 [mm], unutrašnjeg promjera 80 [mm] i promjera klipnjače 60 [mm]. Pomičnim dijelom



Slika 6.6: Fotografija eksperimentalnog postava elektrohidrauličke preše.

preše upravlja se pomoću elektrohidrauličkog servo razvodnika (5) (proizvođač Schneider Kreuznach, model HVM 025-005-1200-0) konstruiranim za premosni (engl. *bypass*) način rada s integriranim *chopperskim* pojačalom i analognog ulaznog signala od -10 [V] do +10 [V]. Budući da je maksimalni tlak u sustavu ograničen na vrijednost ostvarenu pomoću ventila za ograničavanje tlaka (10), servo ventil zapravo smanjuje vrijednost tlaka u komorama cilindra. Servo ventil je postavljen za premosni način rada i u skladu s upravljačkim signalom omogućuje potrebni protok tekućine u spremnik kako bi se tlak u komorama cilindra održao na željenoj razini.

Sila na klipnjači cilindra proporcionalna je s aktivnom površinom klipa i raspoloživim padom tlaka, a direktno se mjeri senzorom sile (18) (proizvođač Siemens, model SIWAREX WL270 CP-S SA 10T C3). Tlak unutar komore cilindra mjeri se pretvornikom (2) (proizvođač Siemens, model 7MF1564) mjernog raspona od 0 do 250 [bar] i izlaznog signala od 0 do 10 [V]. U ovom postavu također je moguće mjeriti linearni pomak preše s pretvornikom (3) (proizvođač Balluff, model BTL5-A11-M0300-PS32) izlaznog napona od 0 do 10 [V] i rezolucije 20 [μm]. Ugradnjom ovog senzora pomaka ostvarena je mogućnost provedbe tzv. hibridnog sila/pozicija algoritma upravljanja.

Ako je cijevni zatvarač (6) zatvoren tada je servo ventil isključen, pa se gibanjem preše

upravlja klasičnim elektromagnetskim 4/3 razvodnikom (4). Također, ako je elektromagnetski 2/2 ventil (7) zatvoren, tada je protok tekućine usmjeren na prigušni ventil (8) i time se utječe na promjenu brzine klipnjače cilindra.

Budući da je u sustav ugrađen servo ventil, posebna pozornost se mora posvetiti čistoći tekućine. Zbog toga su u sustav ugrađeni visoko tlačni filter (12) i filter u povratnom vodu (13).

U sustav je ugrađena zupčasta crpka (15) (proizvođač VIVOIL, model KV-1P) specifičnog radnog volumena 2.6 [cm^3/okr] i maksimalnog tlaka 25 [MPa]. Crpku pogoni trofazni električni motor (14) koji ima snagu 2.2 [kW] pri 980 [min^{-1}].

6.2 Matematički modeli

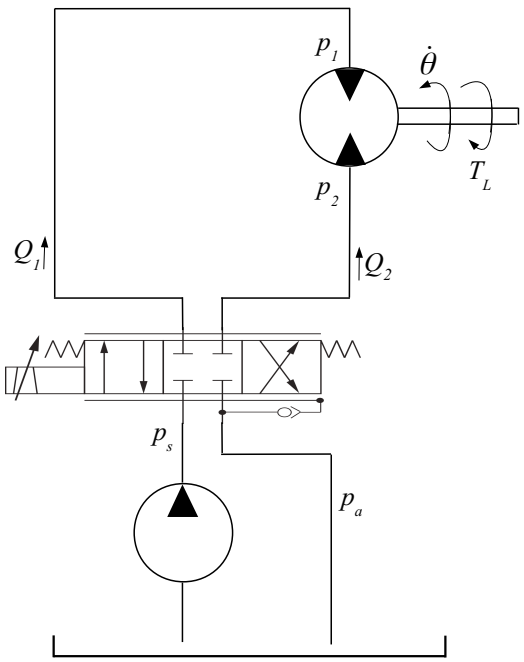
Za postavljanje odgovarajućeg matematičkog modela za neku dinamičku komponentu realnog sustava primjenjuju se osnovni fizikalni zakoni. Prilikom analize i sinteze sustava upravljanja moramo biti svjesni da niti jedan matematički model ne može u potpunosti opisati ponašanje sustava u svim njegovim mogućim radnim točkama. Kako bi se matematički model mogao upotrijebiti u sintezi algoritama upravljanja sustavom nije potrebno opisivati sve fizikalne pojave koje se u komponenti mogu odigrati, jer bi takav sustav postao presložen.

Kod matematičkog modeliranja dinamike hidrauličkih sustava važni su zakoni održanja energije i materije. Fizikalni zakoni potrebni za postavljanje jednadžbi dinamike pojedinih komponenata hidrauličkih sustava detaljno su obrađeni u referencama [123, 124, 138].

6.2.1 Matematički model rotacijskog sustava

Na slici 6.7 je prikazan shematski dijagram rotacijskog elektrohidrauličkog sustava za izvod matematičkog modela. Označeni su tlak napajanja p_s [Pa], tlak spremnika p_a [Pa], tlakovi u komorama hidromotora p_1 [Pa] i p_2 [Pa], protoci u tlačnom i povratnom vodu Q_1 [m^3/s] i Q_2 [m^3/s], respektivno, kutna brzina $\dot{\theta}$ [rad/s], moment opterećenja T_L [N m].

Dinamika servo razvodnika se zanemaruje, tj. odnos između površine otvora klipa servo razvodnika $A_v = wy_v$ [m^2], pri čemu su w [m] gradijent površine otvora i y_v [m] pomak klipa



Slika 6.7: Shematski dijagram rotacijskog elektrohidrauličkog sustava za izvod matematičkog modela.

te ulaznog napona u [V] definira sljedeća jednadžba

$$A_v = k_v u, \tag{6.1}$$

gdje je k_v [m^2/V] koeficijent pojačanja razvodnika. U nekim radovima, npr. [128, 129], dinamika razvodnika se opisuje linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda. To bi značilo, sa stajališta upravljanja svim varijablama stanja, da je u sustav potrebno ugraditi precizni senzor za mjerenje pomaka klipa razvodnika. Međutim, u razmatranom sustavu, aproksimacijski model (6.1) je opravdan budući da je dinamika razvodnika puno brža od ukupne dinamike sustava. Iz istog razloga drugi autori također zanemaruju dinamiku razvodnika, na primjer u radovima [132, 139].

Pretpostavljajući da su tlak napajanja p_s konstantan, tlak spremnika p_a puno manji od drugih tlakova u sustavu i otvori razvodnika simetrični, tada su protoci definirani sljedećim jednadžbama

$$Q_1 = \begin{cases} C_d\, A_v \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_s - p_1)}, & y_v \geq 0, \\ C_d\, A_v \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1}, & y_v < 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$Q_2 = \begin{cases} C_d\, A_v \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2}, & y_v \geq 0, \\ C_d\, A_v \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_s - p_2)}, & y_v < 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

gdje su C_d koeficijent istjecanja razvodnika i ρ [kg/m^3] gustoća hidrauličke tekućine.

Nadalje, uz pretpostavku da su vanjska istjecanja jednaka nuli, definirajmo protok kroz opterećeni razvodnik Q_L [m^3/s] kao srednji protok u komore hidromotora

$$Q_L = \frac{Q_1 + Q_2}{2}. \tag{6.4}$$

Uvrštavanjem jednadžbi (6.2) i (6.3) u jednadžbu (6.4) dobiva se

$$Q_L = \begin{cases} C_d\, A_v \sqrt{\frac{p_s - p_L}{\rho}}, & y_v \geq 0, \\ C_d\, A_v \sqrt{\frac{p_s + p_L}{\rho}}, & y_v < 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

što je ekvivalentno

$$Q_L = C_d\, A_v \sqrt{\frac{p_s - \mathrm{sgn}(y_v) p_L}{\rho}}, \tag{6.6}$$

gdje su $p_L = p_1 - p_2$ pad tlaka i $\mathrm{sgn}(\cdot)$ signum funkcija koja predstavlja promjenu smjera protoka kroz servo razvodnik.

Primjena jednadžbe kontinuiteta (vidjeti jednadžbu (3-53) u [123]) na obje komore hidromotora rezultira sljedećim izrazima

$$Q_1 - C_L(p_1 - p_2) = \dot{V}_1 + \frac{V_1}{\beta}\dot{p}_1, \tag{6.7}$$

$$C_L(p_1 - p_2) - Q_2 = \dot{V}_2 + \frac{V_2}{\beta}\dot{p}_2, \tag{6.8}$$

gdje su C_L [m^3/s/Pa] koeficijent istjecanja hidromotora, β [N/m^2] modul stišljivosti hidrauličke tekućine, V_1 [m^3] i V_2 [m^3] volumeni u tlačnoj i povratnoj komori hidromotora, respektivno. Jednadžbe (6.7) i (6.8) su postavljene na osnovu sljedećih pretpostavki: tlak u svakoj komori hidromotora je svugdje isti, ne postoji nelinearnost zasićenja niti kavitacija, brzine tekućine u komorama su male, temperatura i gustoća su konstantne.

Volumeni tekućine u komorama hidromotora mogu se izraziti kao funkcije kutnog pomaka vratila motora

$$V_1(\theta) = V_0 + f_v(\theta), \tag{6.9}$$

$$V_2(\theta) = V_0 - f_v(\theta), \tag{6.10}$$

gdje su V_0 [m^3] prosječni volumen tekućine sadržane u svakoj komori hidromotora, f_v [m^3] pilasta funkcija volumena u svakoj komori hidromotora, θ [rad] kutni pomak vratila hidromotora i D_m [m^3/rad] specifični radni volumen hidromotora.

Vremenske derivacije izraza (6.9) i (6.10) su

$$\dot{V}_1 = \dot{f}_v = D_m\,\dot{\theta}, \tag{6.11}$$

$$\dot{V}_2 = -\dot{f}_v = -D_m\,\dot{\theta}. \tag{6.12}$$

Supstitucijom izraza od (6.9) do (6.12) u izraze (6.7) i (6.8), zatim njihovim oduzimanjem uzimajući u obzir da je $\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0$ dobiva se

$$\dot{p}_L = \frac{2\beta}{V_0}\left(Q_L - D_m\dot{\theta} - C_L p_L\right). \tag{6.13}$$

Primjenom Newtonovog drugog zakona, uz zanemarivanje momenta koji nastaje zbog suhog (Coulombovog) trenja, jednadžba ravnoteže momenata na vratilu hidromotora glasi

$$J_t\ddot{\theta} = D_m p_L - B\dot{\theta} - T_L, \tag{6.14}$$

gdje su J_t [kg m^2] moment inercije motora i B [N m s] koeficijent viskoznog prigušenja.

Uvođenjem varijabli stanja $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}} = \left[\dot{\theta}\ p_L\right]^{\mathrm{T}}$, upravljanja $\mathbf{u} = [u]$ i neodređenosti $\mathbf{d} = [d] = [T_L]$ te uzimajući u obzir da se vratilo hidromotora modela opisanog u Potpoglavlju 6.1.1 može okretati samo u pozitivnom smjeru, tj. $y_v \geq 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}(y_v) = 1$, dobivamo zapis

rotacijskog elektrohidrauličkog sustava u obliku prostora stanja kako slijedi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J_t}x_1 + \frac{D_m}{J_t}x_2 \\ -\frac{2\beta D_m}{V_0}x_1 - \frac{2\beta C_L}{V_0}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2\beta C_d k_v}{V_0\sqrt{\rho}}\sqrt{p_s - x_2} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_t} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \tag{6.15}$$

Uslijed velikih razlika u brojčanim vrijednostima elemenata matrica koje nastaju kao posljedica fizikalnih jedinica parametara elektrohidrauličkih sustava mogući su određeni numerički problemi. Zbog toga je potrebno normirati varijable stanja dijeljenjem s njihovim maksimalnim vrijednostima.

Normiranjem varijabli stanja rotacijskog sustava opisanog s (6.15) dobivamo sljedeće

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}}_1 \\ \underline{\dot{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Pi_1\underline{x}_1 + \Pi_2\underline{x}_2 \\ -\Pi_3\underline{x}_1 - \Pi_4\underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_3\sqrt{1 - \underline{x}_2} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} -\Pi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{d}}, \tag{6.16}$$

gdje su

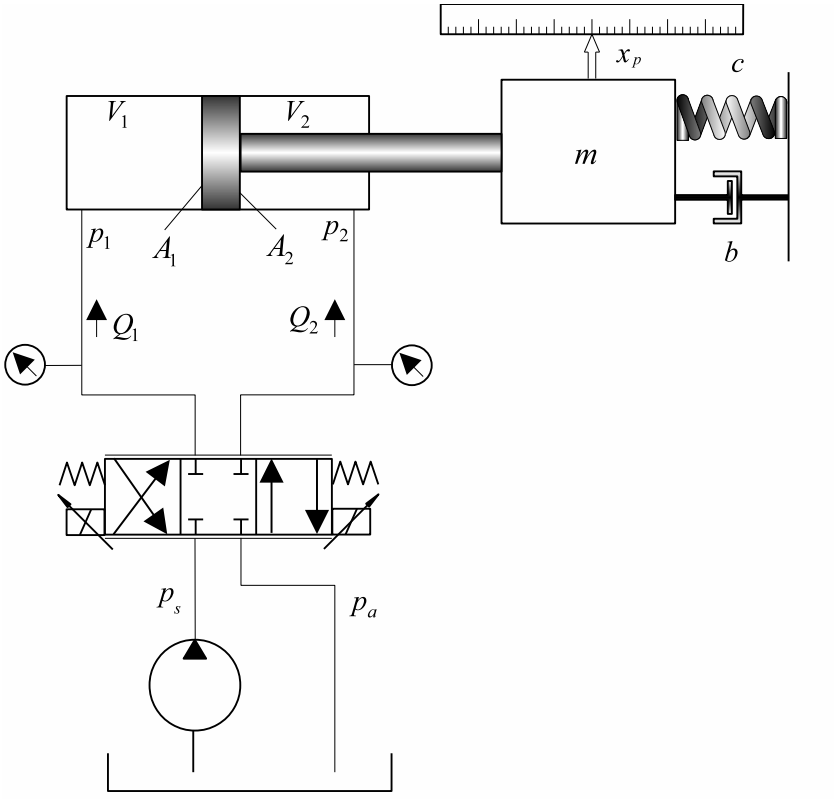
$$\underline{x}_1 = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_{max}},\ \underline{x}_2 = \frac{p_L}{p_s},\ \underline{u} = \frac{u}{u_{max}},\ \underline{d} = \frac{T_L}{D_m\, p_s}, \tag{6.17}$$

te nadalje

$$\Pi_1 = \frac{BD_m\dot{\theta}_{max}}{k_v u_{max} C_d J_t\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}},\ \Pi_2 = \frac{D_m^2\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}\rho}{k_v u_{max} C_d J_t},\ \Pi_3 = \frac{2k_v u_{max}\beta C_d\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}}{p_s V_0},\ \Pi_4 = \frac{2\beta C_L}{V_0}. \tag{6.18}$$

Slično normiranje varijabli stanja je provedeno u [128].

Za izvod matematičkog modela translacijskog elektrohidrauličkog sustava (slika 6.8) i elektrohidrauličke preše (slika 6.9) primjenjuju se isti fizikalni zakoni opisani jednadžbama od (6.1) do (6.13).



Slika 6.8: Shematski dijagram translacijskog elektrohidrauličkog sustava za izvod matematičkog modela.

6.2.2 Matematički model translacijskog sustava

Ukoliko se zanemare interna i eksterna curenja translacijskog elektrohidrauličkog sustava, za cilindar vrijedi sljedeća hidrodinamička jednadžba [123, 138]

$$Q_1 = A_1\dot{x}_p + \frac{V_1(x_p)}{\beta}\dot{p}_1, \tag{6.19}$$

$$Q_2 = A_2\dot{x}_p - \frac{V_2(x_p)}{\beta}\dot{p}_2, \tag{6.20}$$

gdje je x_p [m] pomak klipa cilindra. Volumeni dviju komora cilindra mijenjaju se s pomakom klipa cilindra x_p na sljedeći način

$$V_1(x_p) = V_{01} + A_1x_p, \tag{6.21}$$

$$V_2(x_p) = V_{02} - A_2x_p, \tag{6.22}$$

gdje su A_1 [m^2] i A_2 [m^2] površine poprečnih presjeka cilindra, a V_{0i}, $i = 1, 2$ je takozvani poluvolumen cilindra. Nadalje, uvodimo sljedeću pretpostavku [46, 140]

$$\frac{V_1(x_p)}{\beta} \approx \frac{V_2(x_p)}{\beta} \approx \frac{V_{01} + V_{02}}{2\beta} = C. \tag{6.23}$$

Ponašanje tlakova unutar dviju komora slijedi iz (6.19) i (6.20)

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{C}(Q_1 - A_1\,\dot{x}_p), \tag{6.24}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{1}{C}(-Q_2 + A_2\,\dot{x}_p), \tag{6.25}$$

gdje su protoci Q_1 i Q_2 definirani izrazima (6.2) i (6.3), a zbog jednostavnosti promatrat ćemo slučaj $y_v \geq 0$. Iz prethodnih jednadžbi dobivamo

$$\dot{p}_L = \frac{1}{C}\left[2Q_L - (A_1 + A_2)\dot{x}_p\right], \tag{6.26}$$

gdje je $p_L = p_1 - p_2$, dok je Q_L definiran izrazom (6.6).

Mehanički dio sustava, uz zanemarenje trenja, može se opisati dinamičkom jednadžbom

$$\ddot{x}_p = \frac{1}{m}(p_1\,A_1 - p_2\,A_2 - b\,\dot{x}_p - c\,x_p - F_L), \tag{6.27}$$

gdje su m [kg] ukupna masa pomičnog dijela, b [Ns/m] i c [N/m] viskoznost i krutost mehaničkog dijela, respektivno dok sila F_L [N] predstavlja vanjsko opterećenje cilindra. Nadalje, vrijedi

$$p_1\,A_1 - p_2\,A_2 = \frac{A_1 + A_2}{2}p_L + \frac{A_1 - A_2}{2}p_s, \tag{6.28}$$

pri čemu je tlak napajanja $p_s = p_1 + p_2$.

Definiranjem varijabli stanja $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^{\mathrm{T}} = [x_p\ \ \dot{x}_p\ \ p_L]^{\mathrm{T}}$, upravljanja $\mathbf{u} = [u]$ i neodređenosti $\mathbf{d} = [d] = [F_L]$ dobivamo zapis translacijskog elektrohidrauličkog sustava u obliku

prostora stanja kako slijedi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{A_1+A_2}{2m}x_3 + \frac{A_1-A_2}{2m}p_s \\ -\frac{A_1+A_2}{C}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2C_d k_v}{C\sqrt{\rho}}\sqrt{p_s - x_3} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \tag{6.29}$$

Normiranjem varijabli stanja translacijskog sustava opisanog s (6.29) dobivamo sljedeće

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \\ \dot{\underline{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \underline{x}_2 \\ -\Pi_2 \underline{x}_1 - \Pi_3 \underline{x}_2 + \Pi_4 \underline{x}_3 + \Pi_5 \\ -\Pi_7 \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Pi_7\sqrt{1 - \underline{x}_3} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Pi_6 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{d}}, \tag{6.30}$$

gdje su

$$\underline{x}_1 = \frac{x_p}{l},\ \underline{x}_2 = \frac{A_1 \dot{x}_p}{Q_{max}},\ \underline{x}_3 = \frac{p_L}{p_s},\ \underline{u} = \frac{u}{u_{max}},\ \underline{d} = \frac{F_L}{A_1 p_s}, \tag{6.31}$$

pri čemu su l [m] maksimalni hod klipa cilindra u pozitivnom smjeru i Q_{max} [m^3/s] maksimalna dobava crpke. Nadalje,

$$\begin{aligned} &\Pi_1 = \frac{Q_{max}}{A_1 l},\ \Pi_2 = \frac{cA_1 l}{k_v u_{max} C_d m\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}},\ \Pi_3 = \frac{bQ_{max}}{k_v u_{max} C_d m\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}},\ \Pi_4 = \frac{(A_1+A_2)^2\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}\rho}{2k_v u_{max} C_d m}, \\ &\Pi_5 = \frac{(A_1-A_2)^2\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}\rho}{2k_v u_{max} C_d m},\ \Pi_6 = \frac{A_1^2\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}\rho}{k_v u_{max} C_d m},\ \Pi_7 = \frac{k_v u_{max} C_d\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}}{p_s C}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

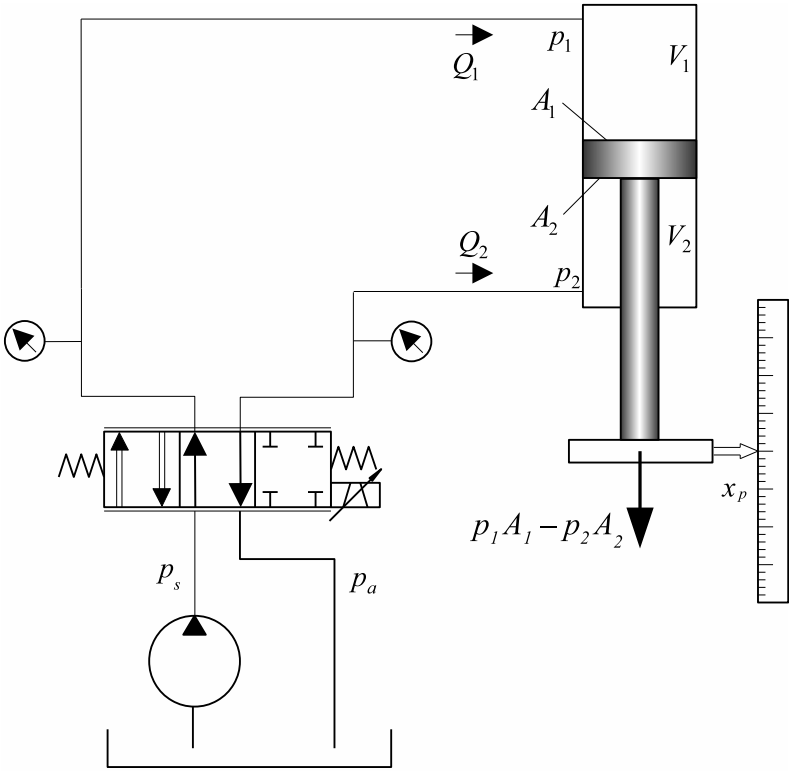
6.2.3 Matematički model elektrohidrauličke preše

Izvod matematičkog modela elektrohidrauličke preše vrlo je sličan izvodu modela translacijskog sustava. Jednadžba ravnoteže sila je slična jednadžbi (6.27)

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 = m\,\ddot{x}_p + b\,\dot{x}_p + F - F_f, \tag{6.33}$$

gdje su x_p [m] pomak klipa cilindra, F [N] sila na klipnjači cilindra, $F_f = f_c \mathrm{sgn}(\dot{x}_p)$ [N] sila Coulombovog trenja, m [kg] i b [Ns/m] su masa pomičnog dijela i pripadajući koeficijent

viskoznog prigušenja, respektivno. Tlakovi p_1 i p_2 su definirani izrazima (6.24) i (6.25).



Slika 6.9: Shematski dijagram elektrohidrauličke preše za izvod matematičkog modela.

Ovdje ćemo koristiti najjednostavniji model sile $F = c\,x_p$ pri čemu je c [N/m] koeficijent krutosti mehaničkog dijela sustava, pa prema tome možemo pisati

$$x_p = \frac{1}{c}\,F, \quad \dot{x}_p = \frac{1}{c}\,\dot{F}, \quad \ddot{x}_p = \frac{1}{c}\,\ddot{F}. \tag{6.34}$$

Supstitucijom (6.34) u (6.33) dobivamo

$$p_1\,A_1 - p_2\,A_2 = \frac{m}{c}\,\ddot{F} + \frac{b}{c}\,\dot{F} + F - F_f. \tag{6.35}$$

Također vrijedi izraz (6.28).

Definiranjem varijabli stanja $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^{\mathrm{T}} = \left[F\ \dot{F}\ p_L\right]^{\mathrm{T}}$, upravljanja $\mathbf{u} = [u]$ i neodređenosti $\mathbf{d} = [d] = [F_f]$ dobivamo zapis elektrohidrauličke preše u obliku prostora stanja kako

slijedi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{c(A_1+A_2)}{2m}x_3 + \frac{c(A_1-A_2)}{2m}p_s \\ -\frac{A_1+A_2}{C}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2C_d k_v}{C\sqrt{\rho}}\sqrt{p_s - x_3} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}. \quad (6.36)$$

Normiranjem varijabli stanja elektrohidrauličke preše opisane s (6.36) dobivamo sljedeće

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \\ \dot{\underline{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \underline{x}_2 \\ -\Pi_2 \underline{x}_1 - \Pi_3 \underline{x}_2 + \Pi_4 \underline{x}_3 + \Pi_5 \\ -\Pi_7 \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Pi_7\sqrt{1 - \underline{x}_3} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi_6 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{d}}, \quad (6.37)$$

gdje su

$$\underline{x}_1 = \frac{F}{cl},\ \underline{x}_2 = \frac{A_1\dot{F}}{cQ_{max}},\ \underline{x}_3 = \frac{p_L}{p_s},\ \underline{u} = \frac{u}{u_{max}},\ \underline{d} = \frac{F_f}{A_1 p_s}, \quad (6.38)$$

a parametri $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ \Pi_5,\ \Pi_6,\ \Pi_7$ su jednaki onima iz izraza (6.32).

6.3 Identifikacija parametara

Pretpostavimo da je vremenski interval $[t_0,\ t_f]$ podijeljen u N podintervala jednake duljine, pa imamo: $t_i = t_0 + i\tau$ za $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, $\tau = (t_f - t_0)/N$. Pretpostavljajući da na sustav ne djeluje vanjski moment tereta, tj. $\underline{d} = 0$, sustav (6.16) se može svesti na linearni regresijski model oblika

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\,\boldsymbol{\Pi}, \quad (6.39)$$

gdje su

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}_1(t_N) \\ \dot{\underline{x}}_2(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\underline{x}}_2(t_N) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Pi} \equiv \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_{22} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Phi}_{11} \equiv \begin{bmatrix} -\underline{x}_1(t_0) & \underline{x}_2(t_0) \\ \vdots & \vdots \\ -\underline{x}_1(t_N) & \underline{x}_2(t_N) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{22} \equiv \begin{bmatrix} -\underline{x}_1(t_0) + u(t_0)\sqrt{1-\underline{x}_2(t_0)} & -\underline{x}_2(t_0) \\ \vdots & \vdots \\ -\underline{x}_1(t_N) + u(t_N)\sqrt{1-\underline{x}_2(t_N)} & -\underline{x}_2(t_N) \end{bmatrix}. \tag{6.40}$$

Vektor parametara $\boldsymbol{\Pi}$ treba odrediti tako da funkcija

$$E(\boldsymbol{\Pi}) = \|\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Pi}\|^2 = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Pi} - \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Pi}, \tag{6.41}$$

poprima minimum (vidjeti [141, Poglavlje 2.2]). Funkcija (6.41) lokalno poprima minimum ako vrijedi

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{\Pi})}{\partial \boldsymbol{\Pi}} = 2\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Pi} - 2\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{0}. \tag{6.42}$$

Ako je matrica $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$ nesigularna[1], minimum je jedinstven i dan s

$$\boldsymbol{\Pi} = \left[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}. \tag{6.43}$$

Identifikacija parametara translacijskog elektrohidrauličkog sustava i elektrohidrauličke preše također se svodi na rješavanje problema (6.43), naravno s odgovarajućim matricama $\boldsymbol{\Pi}$, $\boldsymbol{\Phi}$ i $\mathbf{Y}$ koje se formiraju u skladu s izrazima (6.30) i (6.37), respektivno.

Kako bi se postigla zadovoljavajuća točnost identifikacije parametara sustava, ulazni napon servo razvodnika mora sadržavati adekvatni frekvencijski spektar. U ovom radu se koristi ulazni napon u obliku sinusnog vala kojemu se frekvencija povećava linearno s vremenom

[1]Matrica $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$ je nesingularna ako je ispunjen uvjet perzistentne pobude (engl. *persistent excitation condition*), vidjeti na primjer u [141, Napomena 2 (str. 44.), Definicija 2.1].

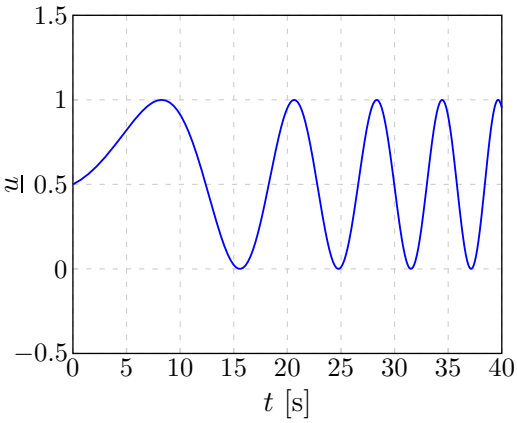
(engl. *chirp signal*). Nadalje, kako bi se reducirao utjecaj šuma u signalima mjerenim inkrementalnim i linearnim enkoderom, senzorom sile te senzorima tlaka koriste se niskopropusni filteri prvog reda. Komponente vektora $\mathbf{Y}$ se dobivaju numeričkim deriviranjem tako filtriranih signala.

Prilikom identifikacije parametara sva tri elektrohidraulička sustava postavljeno je konačno vrijeme $t_f = 40$ s, dok je trajanje vremenskih podintervala postavljeno na $\tau = 0.01$ s. Na slikama 6.10, 6.11 i 6.12 prikazani su odzivi varijabli stanja (normirani mjereni signali) svakog pojedinog elektrohidrauličkog sustava na ulazni napon u obliku tzv. *chirp* signala. Dobivene numeričke vrijednosti mjernih signala su zatim uvrštene u jednadžbu (6.43) kao odgovarajuće komponente matrice $\mathbf{\Phi}$ i vektora $\mathbf{Y}$. Za rješavanje problema (6.43) korištena je MATLAB-ova ugrađena optimirana funkcija \.

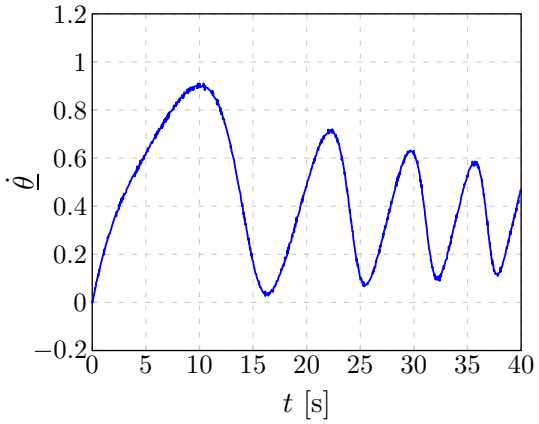
Kod rotacijskog sustava identificirane su sljedeće vrijednosti: $\Pi_1 = 0.0033$ [1/s], $\Pi_2 = 0.2576$ [1/s], $\Pi_3 = 85.9955$ [1/s], $\Pi_4 = 15.9557$ [1/s]. Parametri $\dot{\theta}_{max}$, u_{max}, D_m, C_d, i k_v mogu se lako očitati iz specifikacija u katalozima proizvođača. Gustoća ρ i modul stišljivosti β su standardna svojstva hidrauličke tekućine. Prema tome, ostali parametri B, J_t, C_L i V_0 mogu se jednostavno izračunati na osnovu relacija (6.18). Parametri rotacijskog sustava korišteni u simulacijama i eksperimentu navedeni su u tablici 6.1.

Kod translacijskog sustava identificirane su sljedeće vrijednosti: $\Pi_1 = 0.2094$ [1/s], $\Pi_2 = 0.3879$ [1/s], $\Pi_3 = 8.4663 \cdot 10^{-4}$ [1/s], $\Pi_4 = 1.0742$ [1/s], $\Pi_5 = 0.2630$ [1/s], $\Pi_6 = 0.9787$ [1/s], $\Pi_7 = 126.3818$ [1/s]. Parametri Q_{max}, u_{max}, l, A_1, A_2, p_s, m, ρ, C_d, i k_v mogu se lako očitati iz specifikacija u katalozima proizvođača, dok se b, c i C mogu izračunati na osnovu izraza (6.32). Numeričke vrijednosti parametra translacijskog sustava navedene su u tablici 6.2.

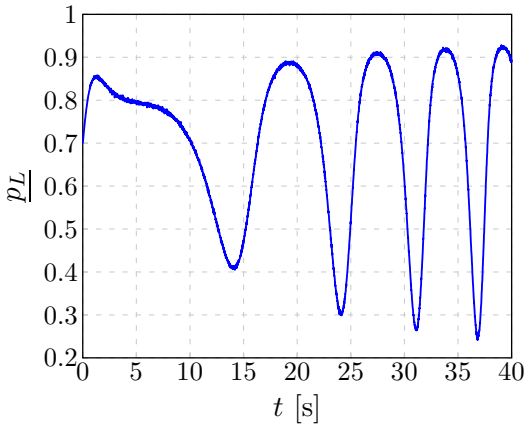
Kod elektrohidrauličke preše identificirane su sljedeće vrijednosti: $\Pi_1 = 0.0818$ [1/s], $\Pi_2 = 5.3491$ [1/s], $\Pi_3 = 3.8938 \cdot 10^{-4}$ [1/s], $\Pi_4 = 3.2466$ [1/s], $\Pi_5 = 0.9942$ [1/s], $\Pi_6 = 3.1422$ [1/s], $\Pi_7 = 314.8272$ [1/s]. Numeričke vrijednosti parametra elektrohidrauličke preše navedene su u tablici 6.3.



(a) Normirani ulazni napon



(b) Normirana kutna brzina

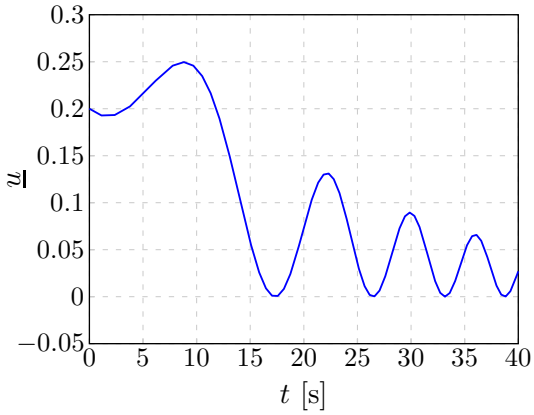


(c) Normirani pad tlak

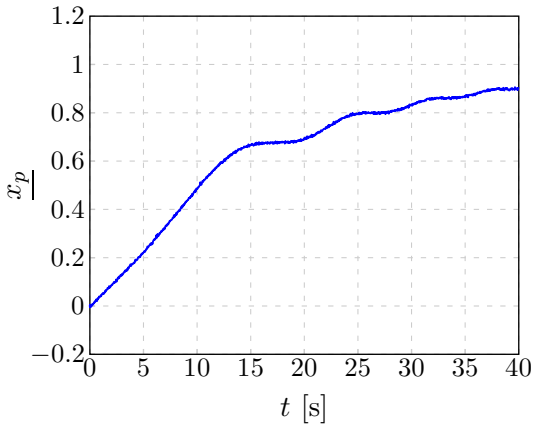
Slika 6.10: Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara rotacijskog elektrohidrauličkog sustava.

Tablica 6.1: Vrijednosti parametara rotacijskog elektrohidrauličkog sustava.

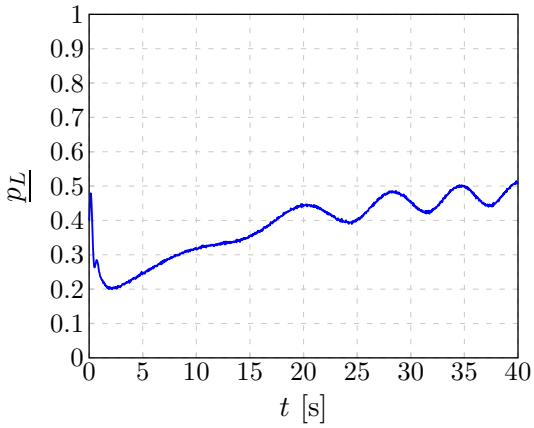
Parametar	**Vrijednost**	**Jedinica**
$\dot{\theta}_{max}$	104.7198	rad/s
u_{max}	10	V
p_s	$200 \cdot 10^5$	Pa
D_m	$1.3051 \cdot 10^{-6}$	m^3/rad
C_d	0.6	–
k_v	$6.43 \cdot 10^{-7}$	m^2/V
ρ	870	kg/m^3
β	$0.7 \cdot 10^9$	N/m^2
B	0.0032	N m s
J_t	0.2261	kg m^2
C_L	$5.4266 \cdot 10^{-12}$	m^3/s/Pa
V_0	$476.1455 \cdot 10^{-6}$	m^3



(a) Normirani ulazni napon



(b) Normirana pozicija

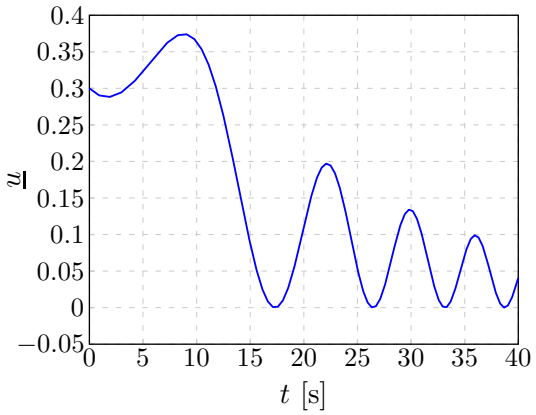


(c) Normirani pad tlak

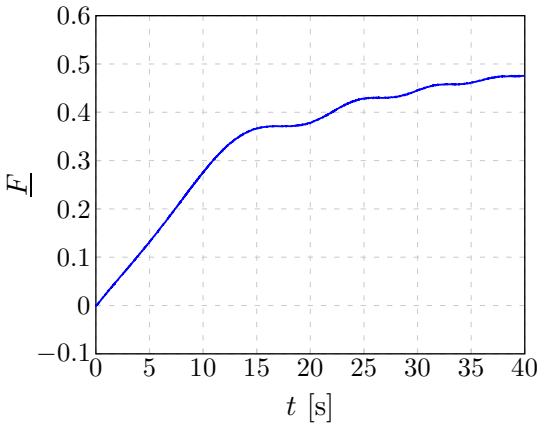
Slika 6.11: Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara translacijskog elektrohidrauličkog sustava.

Tablica 6.2: Vrijednosti parametara translacijskog elektrohidrauličkog sustava.

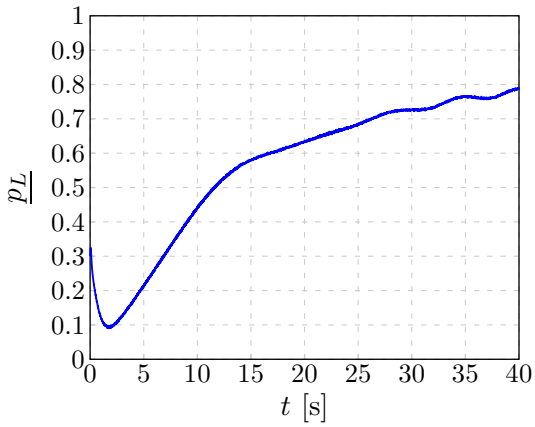
Parametar	**Vrijednost**	**Jedinica**
Q_{max}	$6.1670 \cdot 10^{-5}$	m^3/s
u_{max}	10	V
l	0.15	m
A_1	$\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}$	m^2
A_2	$A_1 - \pi \cdot 18 \cdot 10^{-6}$	m^2
p_s	$150 \cdot 10^5$	Pa
m	100	kg
C_d	0.6	–
k_v	$7.5 \cdot 10^{-4}$	m^2/V
ρ	870	kg/m^3
b	811.1862	Ns/m
c	$77.8153 \cdot 10^3$	N/m
C	$3.1169 \cdot 10^{-10}$	m^5/N



(a) Normirani ulazni napon



(b) Normirana sila



(c) Normirani pad tlak

Slika 6.12: Normirani mjereni signali prilikom identifikacije parametara elektrohidrauličke preše.

Tablica 6.3: Vrijednosti parametara elektrohidrauličke preše.

Parametar	**Vrijednost**	**Jedinica**
Q_{max}	$6.1670 \cdot 10^{-5}$	m^3/s
u_{max}	10	V
l	0.15	m
A_1	$\pi \cdot 40 \cdot 10^{-6}$	m^2
A_2	$A_1 - \pi \cdot 30 \cdot 10^{-6}$	m^2
p_s	$100 \cdot 10^5$	Pa
m	50	kg
C_d	0.6	–
k_v	$2.5 \cdot 10^{-3}$	m^2/V
ρ	870	kg/m^3
b	507.6971	Ns/m
c	$57.0460 \cdot 10^4$	N/m
C	$5.1081 \cdot 10^{-10}$	m^5/N

6.4 Simulacijski i eksperimentalni rezultati

U svrhu sinteze upravljanja prethodno opisanim elektrohidrauličkim sustavima predloženi algoritam (Poglavlje 4) je napisan i realiziran u programskom paketu MATLAB. Numeričke simulacije su provedene na normiranim matematičkim modelima (6.16), (6.30) i (6.37).

Za izvršavanje upravljačkog algoritma na eksperimentalnim postavima elektrohidrauličkih sustava koristi se prijenosno računalo, s aplikacijama MATLAB + Real Time Workshop + SIMULINK. Analogni signali napona dobiveni iz procesa sa senzora, dovode se preko A/D pretvornika u računalo gdje se obavlja njihovo procesiranje te se upravljački signal preko D/A pretvornika šalje na elektrohidraulički ventil. A/D i D/A pretvorba signala vrši se pomoću PCMCIA kartice proizvođača NATIONAL INSTRUMENTS oznake NI DAQCard-6024E.

6.4.1 Upravljanje rotacijskim gibanjem

Simulacijski i eksperimentalni rezultati koji će se ovdje pokazati publicirani su u [92], nastalim u okviru rada na ovoj disertaciji.

Simulacijski rezultati

Kako bi postigli željenu brzinu hidromotora i minimizaciju $\mathscr{L}_2$ pojačanja, postavili smo vektor izlaza kojim želimo upravljati u sljedećem obliku

$$\|\mathbf{z}\|^2_{\mathscr{L}_2} = k_1\|\underline{x}_1 - \underline{x}_r\|^2_{\mathscr{L}_2} + k_2\|\underline{u}\|^2_{\mathscr{L}_2}, \tag{6.44}$$

gdje je $\underline{x}_r$ normirana referentna brzina, a k_1 i k_2 su težinski faktori.

Baze aproksimacijskih funkcija upravljačke varijable i varijable neodređenosti izabrane su u sljedećem obliku

$$\mathbf{\Theta}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{\Psi}(\underline{\mathbf{x}}) = \left[\underline{x}_2 \quad \underline{x}_2^2 \quad \underline{x}_1 \quad \underline{x}_1\underline{x}_2 \quad \underline{x}_1\underline{x}_2^2 \quad \underline{x}_1^2 \quad \underline{x}_1^2\underline{x}_2 \quad \underline{x}_1^2\underline{x}_2^2\right]. \tag{6.45}$$

Parametre algoritma smo postavili kako slijedi:

- vremenski interval od $t_0 = 0$, do $t_f = 10$ [s] smo podijelili na $N = 10000$ jednakih

podintervala, tj. korak diskretizacije je $\tau = 10^{-3}$ [s] te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;

- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, početnu vrijednost parametra $\mu_0 = \gamma_0^2 = 10$, korak konvergencije subgradijentne metode $c_k = 2/\sqrt{k}$, kriterij zaustavljanja subgradijentne metode $\varepsilon = 10^{-2}$, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$, kriterij zaustavljanja Newtonove metode $\epsilon = 10^{-6}$, koeficijente $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 0.9$ i $\beta = 0.8$.

Izvršavanjem algoritma za težinske faktore iz (6.44) $k_1 = 0.5$ i $k_2 = 0.01$ dobivamo kvadrat $\mathscr{L}_2$ pojačanja iznosa $\mu^* = (\gamma^*)^2 = 6.8742$ i normirane parametre aproksimacijskih funkcija

$$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} 10.3468 \\ -9.9417 \\ 0.7192 \\ -33.4556 \\ 32.6850 \\ 0.1889 \\ 28.1765 \\ -26.2041 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} 0.1452 \\ -0.0977 \\ -0.0028 \\ -0.4703 \\ 0.3190 \\ 0.0082 \\ 0.3871 \\ -0.2444 \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

Simulacijski rezultati su prikazani na slikama od 6.13 do 6.16 iz kojih se vidi da se predloženom strategijom upravljanja može ostvariti željena brzina hidromotora uz djelovanje vanjskog poremećaja u obliku momenta tereta prikazanog na slici 6.15 (b).

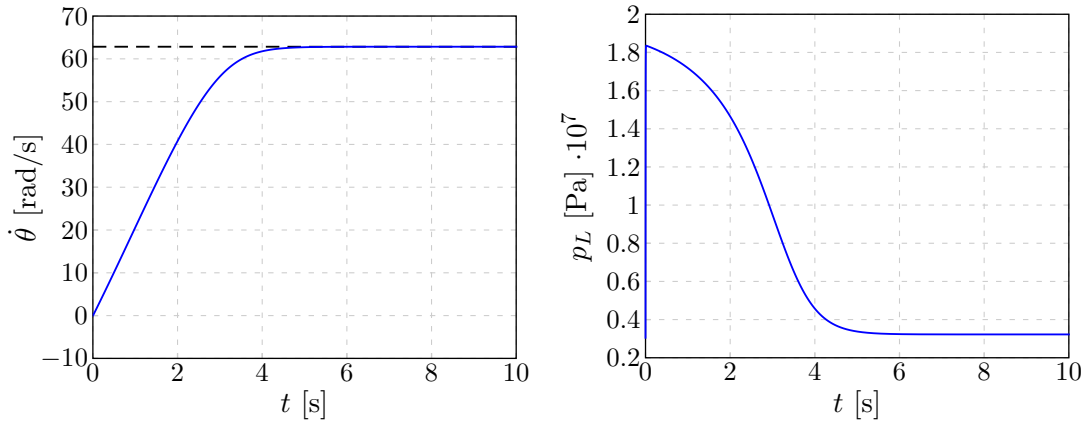
Na slici 6.13 prikazani su vremenski dijagrami kutne brzine hidromotora $\dot{\theta}$ i razlika tlakova u njegovim komorama p_L. Prikazan je slučaj ubrzanja iz početnog stanja 0 [rad/s] do željene brzine $\dot{\theta}_r = 62.8319$ [rad/s] (ili 600 [okr/min]). Iz odziva vidimo da imamo unutar 5 [s] ostvarivanje željene brzine bez prebačaja.

Na osnovu logaritma pogreške prikazanog na slici 6.14, možemo zaključiti da postoji trajno regulacijsko odstupanje reda veličine 10^{-3} [rad/s]. Međutim, poznato je da se kod svih robusnih zakona upravljanja, bez obzira radi li se o vanjskim ili unutarnjim neodređenostima u sustavu, gubi asimptotska konvergencija pogreške, odnosno postoji trajno regulacijsko odstu-

panje. Regulacijsko odstupanje možemo smanjiti povećanjem težinskog faktora k_1 u (6.44), što za posljedicu ima velike iznose upravljačkog napona u trenutku $t = 0$.

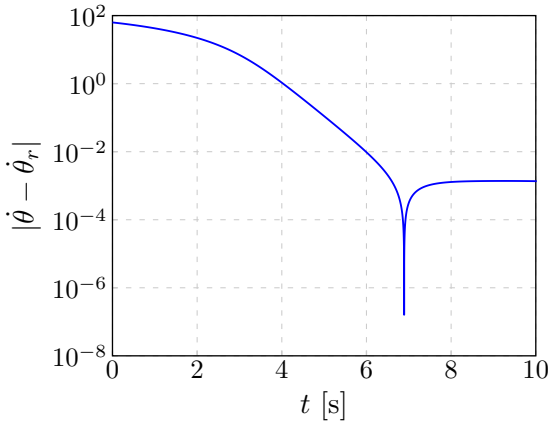
Na slici 6.15 (a) vidimo da upravljački napon ne ulazi u zasićenje, tj. u cijelom vremenskom intervalu imamo $u < u_{max}$. Izborom težinskih faktora k_1 i k_2 u (6.44) treba tražiti kompromis između vremena potrebnog za ostvarivanje željene brzine i iznosa upravljačkog napona.

Na slici 6.16 prikazana je konvergencija Newtonove metode (Algoritam 2) za minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} = 2.6219$, tj. prikazana je zadnja iteracija subgradijentne metode (Algoritam 1).

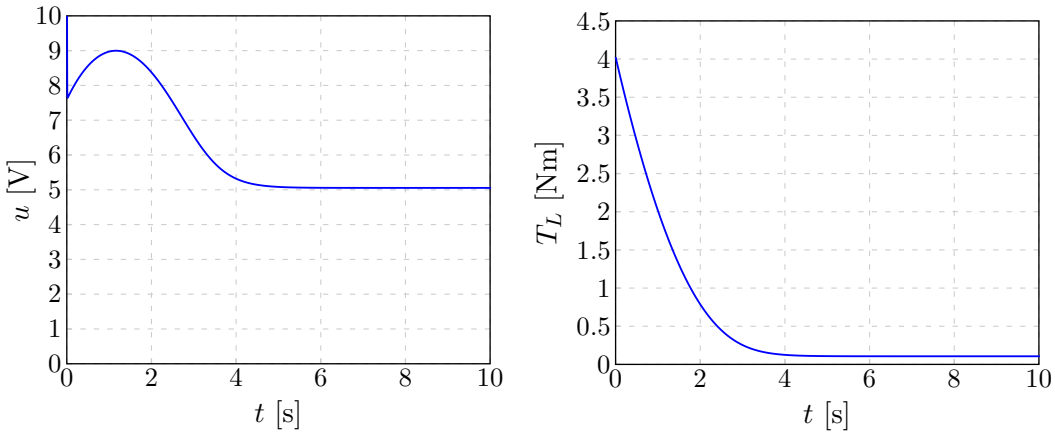


(a) Kutna brzina (b) Pad tlaka

Slika 6.13: Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.

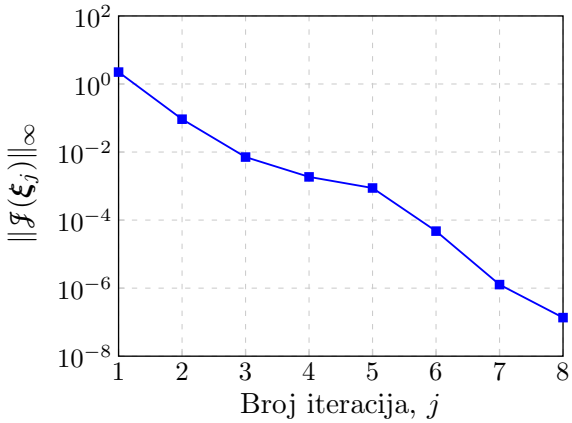


Slika 6.14: Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: odstupanje od željene brzine.



(a) Upravljački napon (b) Moment opterećenja

Slika 6.15: Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu.



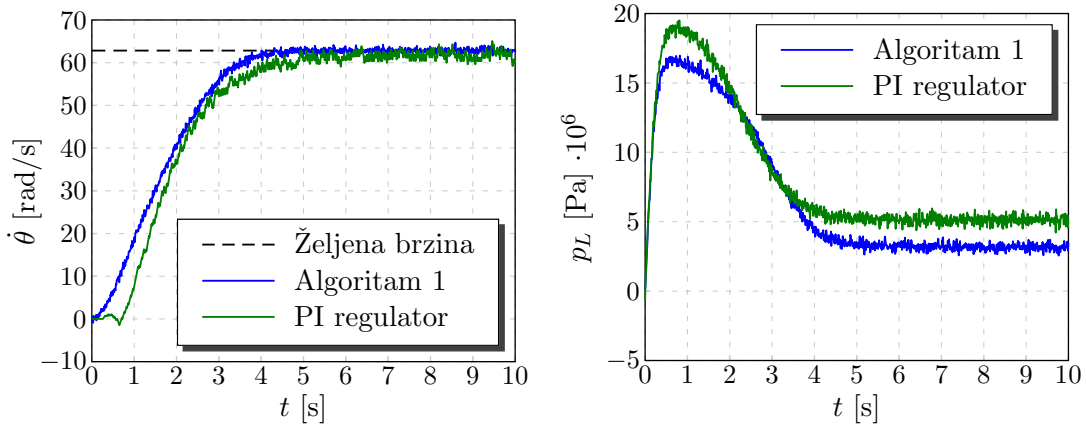
Slika 6.16: Simulacijski rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija.

Eksperimentalni rezultati

Kako bi upravljački zakon dobiven prethodnim simulacijama primijenili na eksperimentalni postav elektrohidrauličkog sustava za upravljanje rotacijskim gibanjem, numeričke vrijednosti parametara (6.46) potrebno je pomnožiti s odgovarajućim faktorima (prema izrazima (6.17) i (6.18)) kako bi se dobile veličine u pripadajućim fizikalnim jedinicama.

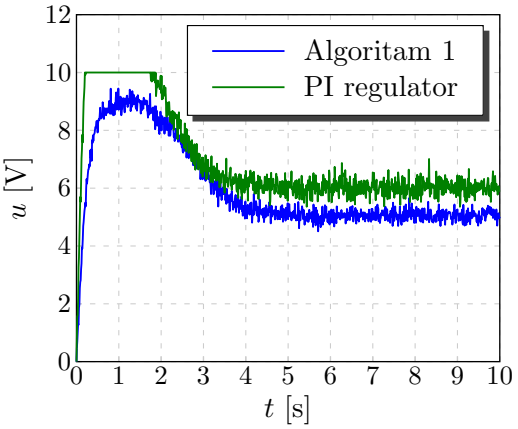
Eksperimentalni rezultati su prikazani na slikama 6.17 i 6.18. Može se vidjeti da su eksperimentalni rezultati slični prethodno prikazanim simulacijskim rezultatima. Razlike koje se ipak pojavljuju između eksperimenta i simulacija posljedica su određenih pretpostavki i zanemarivanja prilikom izvoda matematičkog modela (Potpoglavlje 6.2 izrazi od (6.1) do (6.18)).

Parametri PI regulatora, s kojim se predložena strategija uspoređuje, podešeni su prema optimumu dvostrukog odnosa (engl. *double ratios optimum, damping optimum*) kako je opisano u [45]. Na slici 6.17 (a) može se vidjeti da u slučaju PI regulatora sustav ima sporiji odziv, dok je na slici 6.17 (b) vidljivo da je pad tlaka veći. Razlog ovome prikazan je na slici 6.18 gdje se može vidjeti da upravljački napon u slučaju PI regulatora ulazi u zasićenje, a također i njegov iznos u stacionarnom stanju je veći od onog dobivenog predloženim algoritmom.



(a) Kutna brzina (b) Pad tlaka

Slika 6.17: Eksperimentalni rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.



Slika 6.18: Eksperimentalni rezultati upravljanja rotacijskim gibanjem: upravljački napon u ovisnosti o vremenu.

6.4.2 Upravljanje translacijskim gibanjem

Postupak provedbe simulacije i eksperimenta upravljanja translacijskim gibanjem sličan je prethodno provedenom postupku upravljanja rotacijskim gibanjem.

Simulacijski rezultati

Kako bi ostvarili željenu poziciju klipa hidrauličkog cilindra i minimizaciju $\mathscr{L}_2$ pojačanja, postavili smo vektor izlaza kojim želimo upravljati u sljedećem obliku

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{L}_2}^2 = k_1\|\underline{x}_1 - \underline{x}_r\|_{\mathscr{L}_2}^2 + k_2\|\underline{u}\|_{\mathscr{L}_2}^2, \tag{6.47}$$

gdje je $\underline{x}_r$ normirana referentna pozicija, a k_1 i k_2 su težinski faktori.

Baze aproksimacijskih funkcija upravljačke varijable i varijable neodređenosti izabrane su u sljedećem obliku

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}(\underline{\mathbf{x}}) &= \left(\begin{bmatrix}1 & \underline{x}_1 & \underline{x}_1^2 & \underline{x}_1^3\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1 & \underline{x}_3 & \underline{x}_3^2 & \underline{x}_3^3\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{1\times 15} \\ \mathbf{I}_{15}\end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\Psi}(\underline{\mathbf{x}}) &= \left(\begin{bmatrix}1 & \underline{x}_1 & \underline{x}_1^2 & \underline{x}_1^3\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_2^2 & \underline{x}_2^3\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{1\times 15} \\ \mathbf{I}_{15}\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Za gore navedene oblike baza aproksimacijskih funkcija nizom simulacija utvrđeno je da daju najbolje rezultate te su kao takve u konačnici usvojene.

Parametre algoritma smo postavili kako slijedi:

- vremenski interval od $t_0 = 0$, do $t_f = 10$ [s] smo podijelili na $N = 10000$ jednakih podintervala, tj. korak diskretizacije je $\tau = 10^{-3}$ [s] te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;
- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}0.075 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, početnu vrijednost parametra $\mu_0 = \gamma_0^2 = 2$, korak konvergencije subgradijentne metode $c_k = 5/\sqrt{k}$, kriterij zaustavljanja subgradijentne metode $\varepsilon = 10^{-2}$, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija

$\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$, kriterij zaustavljanja Newtonove metode $\epsilon = 10^{-6}$, koeficijente $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 0.9$ i $\beta = 0.8$.

Izvršavanjem algoritma za težinske faktore iz (6.47) $k_1 = 0.3$ i $k_2 = 0.01$ dobivamo kvadrat $\mathscr{L}_2$ pojačanja iznosa $\mu^* = (\gamma^*)^2 = 0.0855$ i normirane parametre aproksimacijskih funkcija

$$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} -79.0799 \\ 483.5501 \\ -270.7502 \\ 26.2212 \\ 297.6336 \\ -1944.02754 \\ 961.8087 \\ -54.6048 \\ -376.1119 \\ 2528.3336 \\ -1055.6982 \\ 28.4993 \\ 157.5305 \\ -1069.8971 \\ 365.5905 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} 1367.4334 \\ 604.4525 \\ 509.9779 \\ 41.8845 \\ -5572.6291 \\ -2420.9615 \\ -278.7036 \\ -83.5452 \\ 7043.5037 \\ 3233.8786 \\ -794.7833 \\ 41.6607 \\ -2838.3890 \\ -1415.7809 \\ 555.0387 \end{bmatrix}. \tag{6.49}$$

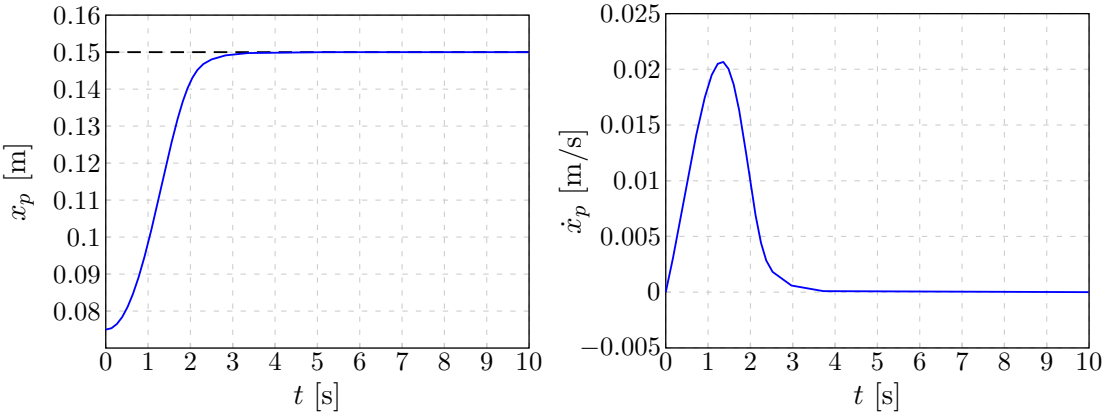
Simulacijski rezultati upravljanja pozicijom klipa hidrauličkog cilindra su prikazani na slikama od 6.19 do 6.22.

Prema odzivu pozicije klipa cilindra x_p na slici 6.19 (a) vidimo da imamo ostvareno željeno pozicioniranje iz početnog stanja $x_{p0} = 0.075$ [m] u referentno $x_r = 0.15$ [m] bez prebačaja u vremenu od približno 3 [s]. Na slici 6.20 su prikazani upravljački napon i sila opterećenja, dobiveni iz aproksimacijskih funkcija (6.48) s parametrima (6.49), kojima se ostvaruje minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje iznosa 0.2924.

Iz prikaza odstupanja od željene pozicije na slici 6.21 možemo zaključiti da postoji trajno regulacijsko odstupanje reda veličine 10^{-6} [m]. Kao u slučaju upravljanja rotacijskim giba-

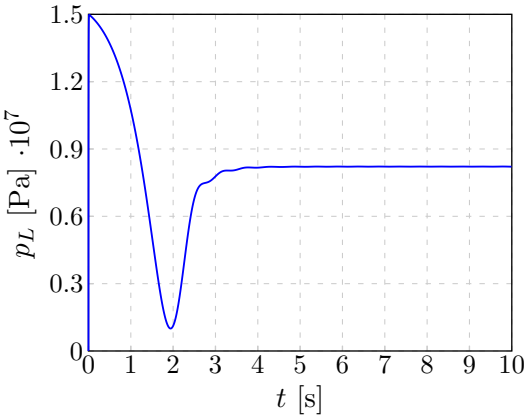
njem, ovdje također treba tražiti kompromis između iznosa upravljačkog napona (ulaska u zasićenje) i vremena ostavarivanja željene pozicije izborom faktora k_1 i k_2 u izrazu (6.47).

Na slici 6.22 prikazana je posljednja iteracija subgradijentne metode (Algoritam 1), odnosno prikazana je konvergencija Newtonove metode (Algoritam 2) uz minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} = 0.2924$.



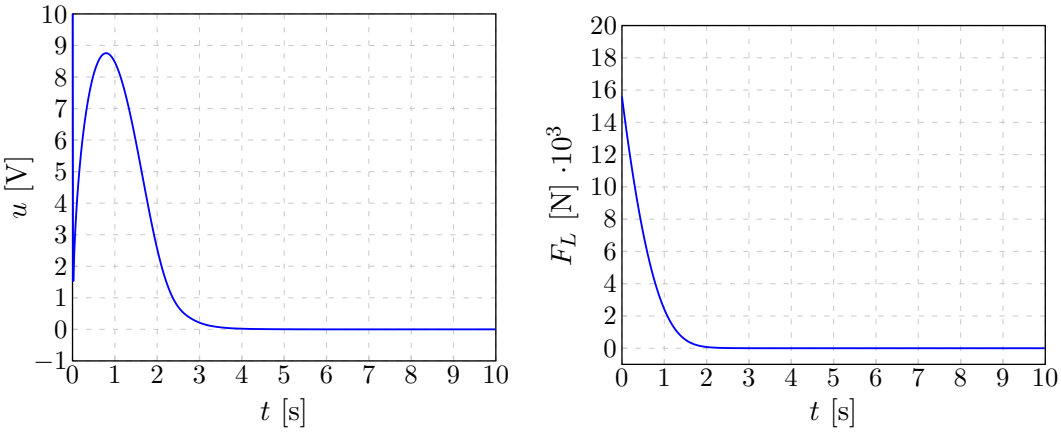
(a) Pozicija

(b) Brzina



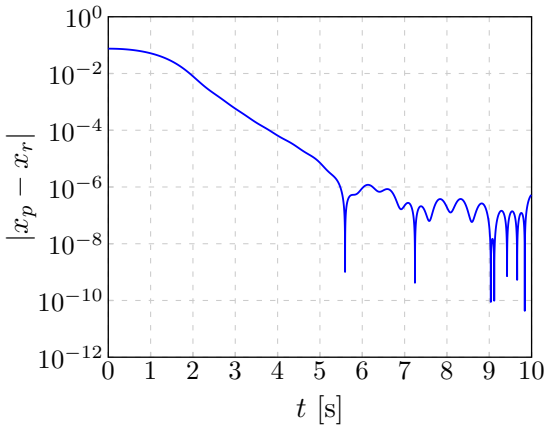
(c) Pad tlaka

Slika 6.19: Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.

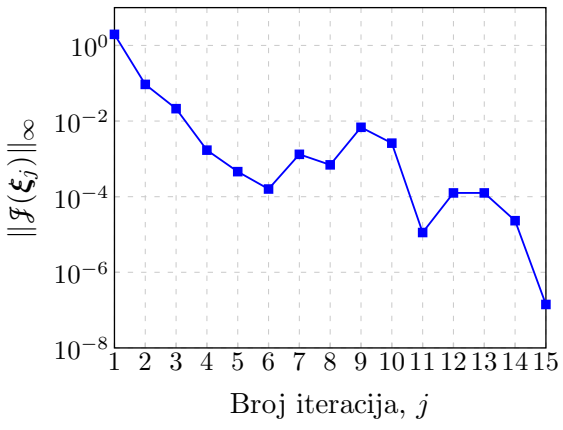


(a) Upravljački napon (b) Sila opterećenja

Slika 6.20: Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu.



Slika 6.21: Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: odstupanje od željene pozicije.



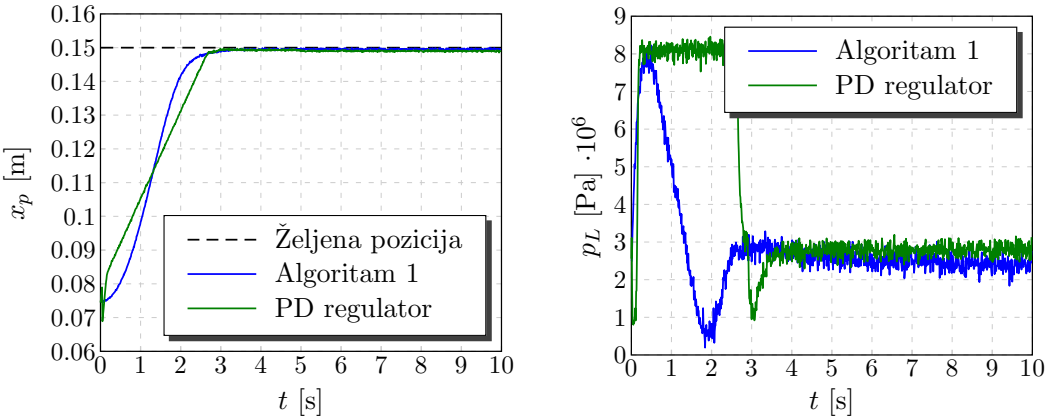
Slika 6.22: Simulacijski rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija.

Eksperimentalni rezultati

Kako bi upravljački zakon dobiven prethodnim simulacijama primijenili na eksperimentalni postav elektrohidrauličkog sustava za upravljanje pozicijom klipa cilindra, numeričke vrijednosti parametara (6.49) potrebno je pomnožiti s odgovarajućim faktorima (prema izrazima (6.31) i (6.32)) kako bi se dobile veličine u pripadajućim fizikalnim jedinicama.

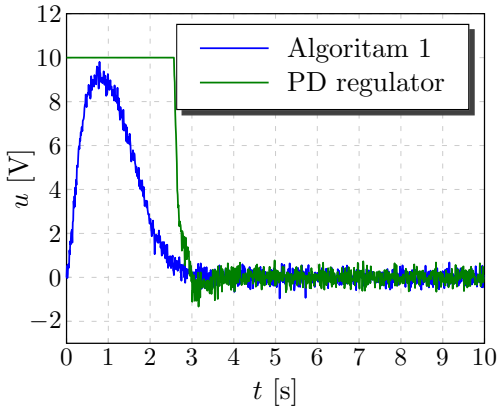
Eksperimentalni rezultati su prikazani na slikama 6.23 i 6.24. Ilustrirani su odzivi translacijskog elektrohidrauličkog sustava s regulatorom dobivenim primjenom predloženog algoritma u usporedbi s PD regulatorom proporcionalnog pojačanja $K_P = 80$ i derivacijskog pojačanja $K_D = 0.1$.

Na slici 6.23 (a) može se vidjeti da se u oba slučaja postiže stabilno i prigušeno pozicioniranje u približno jednakom vremenu. Međutim, na slici 6.24 se vidi da u slučaju PD regulatora upravljački napon ulazi u zasićenje što nastaje zbog uvođenja nula regulatora u prijenosnu funkciju zatvorenog kruga. Ovo za posljedicu može imati smanjenje vijeka trajanja upravljačkih komponenti, a također je i nepovoljno ponašanje sa stanovišta potrošnje energije.



(a) Pozicija (b) Pad tlaka

Slika 6.23: Eksperimentalni rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.



Slika 6.24: Eksperimentalni rezultati upravljanja translacijskim gibanjem: upravljački napon u ovisnosti o vremenu.

6.4.3 Upravljanje silom

Kod elektrohidrauličke preše razmatra se slučaj u kojem je potrebno da sila na klipnjači cilindra prati željenu, vremenski promjenjivu trajektoriju.

Simulacijski rezultati

Kako bi ostvarili željenu trajektoriju i minimizaciju $\mathscr{L}_2$ pojačanja, postavili smo vektor izlaza kojim želimo upravljati u sljedećem obliku

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathscr{L}_2}^2 = k_1 \|\underline{x}_1 - \underline{x}_r\|_{\mathscr{L}_2}^2 + k_2 \|\underline{u}\|_{\mathscr{L}_2}^2, \tag{6.50}$$

gdje je $\underline{x}_r$ normirana referentna trajektorija oblika

$$\underline{x}_r = \frac{1}{c\,l}\left[3500\,\sin(0.16\pi t) + 6000\right], \tag{6.51}$$

a k_1 i k_2 su težinski faktori.

Baze aproksimacijskih funkcija upravljačke varijable i varijable neodređenosti izabrane su u sljedećem obliku

$$\boldsymbol{\Theta}(\underline{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\Psi}(\underline{\mathbf{x}}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_2^2 & \underline{x}_2^3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \underline{x}_3 & \underline{x}_3^2 & \underline{x}_3^3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times 15} \\ \mathbf{I}_{15} \end{bmatrix}. \tag{6.52}$$

Parametre algoritma smo postavili kako slijedi:

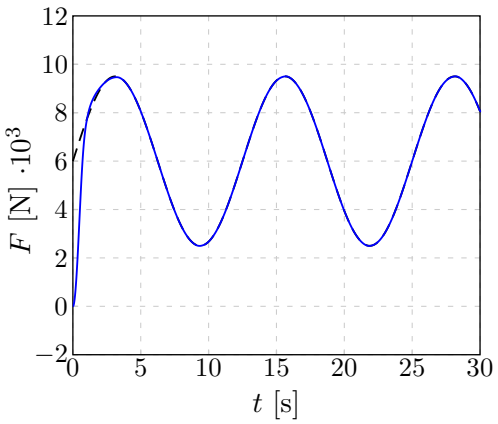
- vremenski interval od $t_0 = 0$, do $t_f = 30$ [s] smo podijelili na $N = 30000$ jednakih podintervala, tj. korak diskretizacije je $\tau = 10^{-3}$ [s] te smo izabrali Adamsovu metodu 4. reda;
- vektor početnih uvjeta $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, početnu vrijednost parametra $\mu_0 = \gamma_0^2 = 5$, korak konvergencije subgradijentne metode $c_k = 5/\sqrt{k}$, kriterij zaustavljanja subgradijentne metode $\varepsilon = 10^{-2}$, vektore početnih parametara aproksimacijskih funkcija $\boldsymbol{\pi}_0 = \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$, kriterij zaustavljanja Newtonove metode $\epsilon = 10^{-3}$, koeficijente $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 0.9$ i $\beta = 0.8$.

Izvršavanjem algoritma za težinske faktore iz (6.50) $k_1 = 2$ i $k_2 = 10^{-5}$ dobivamo kvadrat $\mathscr{L}_2$ pojačanja iznosa $\mu^* = (\gamma^*)^2 = 1.2711$ i normirane parametre aproksimacijskih funkcija

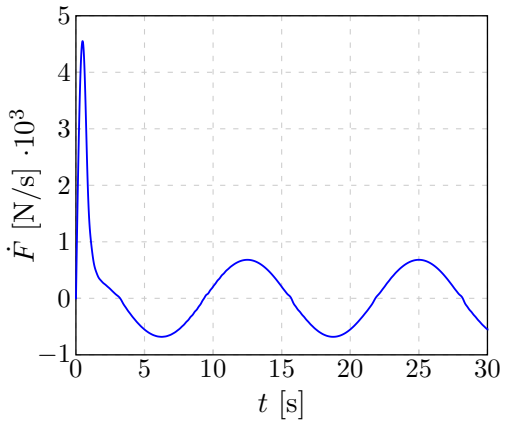
$$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} 0.3928 \\ -1.8954 \\ 2.3194 \\ 3.4551 \\ -18.2173 \\ 44.6032 \\ -34.7382 \\ -11.3148 \\ 78.1199 \\ -162.0255 \\ 126.5000 \\ 12.9516 \\ -91.7545 \\ 195.4350 \\ -161.1991 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^* = \begin{bmatrix} -0.0037 \\ 0.0178 \\ -0.0213 \\ -0.0077 \\ 0.0567 \\ -0.1318 \\ 0.0970 \\ 0.0374 \\ -0.1759 \\ 0.2735 \\ -0.1836 \\ -0.0450 \\ 0.1941 \\ -0.2986 \\ 0.2272 \end{bmatrix}. \tag{6.53}$$

Simulacijski rezultati upravljanja elektrohidrauličkom prešom prikazani su na slikama od 6.25 do 6.28. Iz slike 6.25 (a) vidimo da je primjenom dobivenog regulatora moguće praćenje željene trajektorije uz zadovoljavajuću pogrešku od približno 1 [N] (slika 6.27). Na

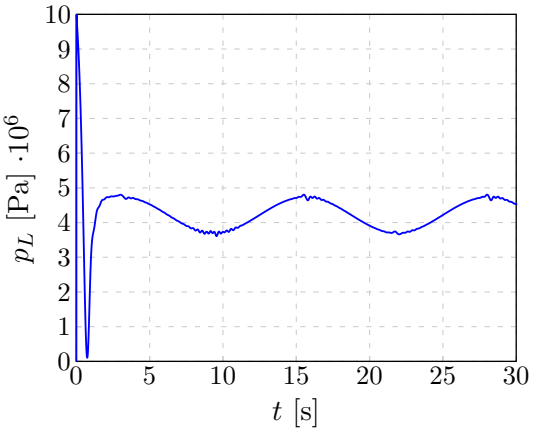
slici 6.26 su prikazani upravljački napon i sila trenja, dobiveni iz aproksimacijskih funkcija (6.52) s parametrima (6.53), kojima se ostvaruje minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje iznosa 1.1274. Na slici 6.28 prikazana je posljednja iteracija subgradijentne metode (Algoritam 1), odnosno prikazana je konvergencija Newtonove metode (Algoritam 2) uz minimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje $\gamma^* = \sqrt{\mu^*} = 1.1274$.



(a) Sila

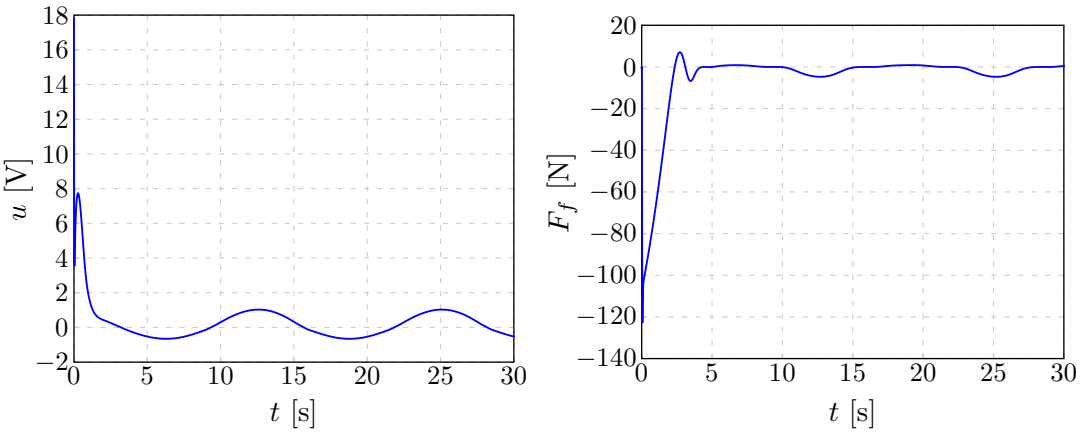


(b) Prva derivacija sile (trzaj, engl. *yank*)



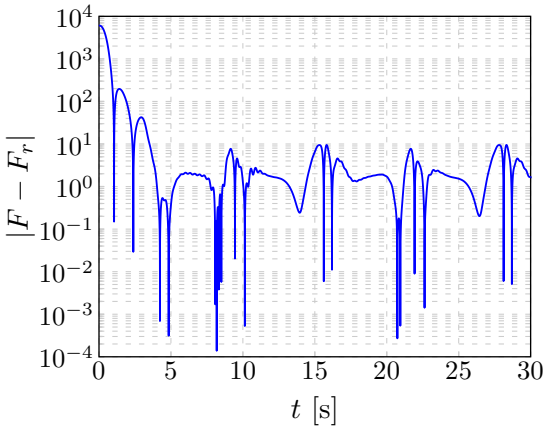
(c) Pad tlaka

Slika 6.25: Simulacijski rezultati upravljanja silom: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.

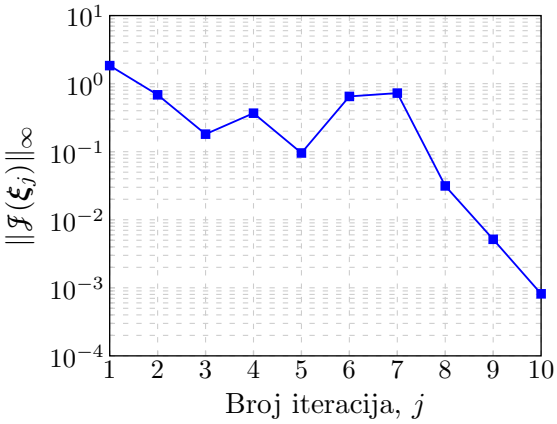


(a) Upravljački napon (b) Sila trenja

Slika 6.26: Simulacijski rezultati upravljanja silom: ulazne varijable u ovisnosti o vremenu.



Slika 6.27: Simulacijski rezultati upravljanja silom: odstupanje od željene sile.

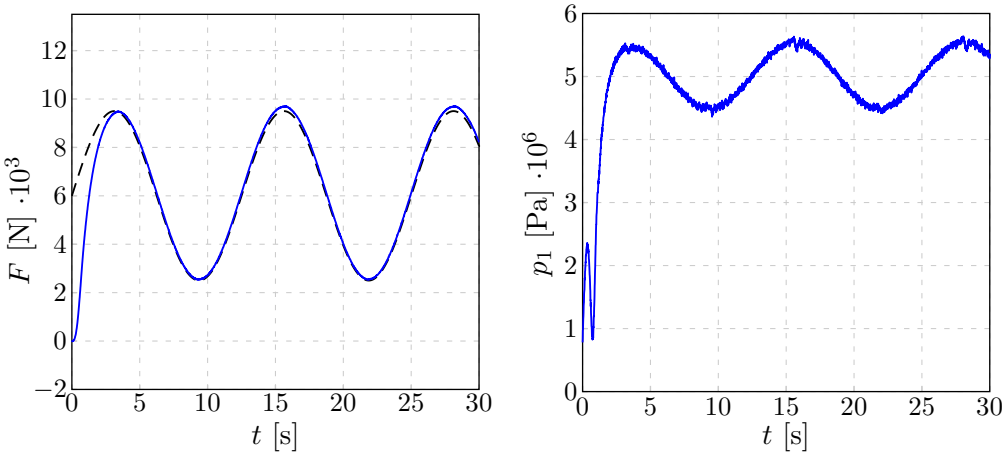


Slika 6.28: Simulacijski rezultati upravljanja silom: norma gradijenta funkcije cilja u ovisnosti o broju iteracija.

Eksperimentalni rezultati

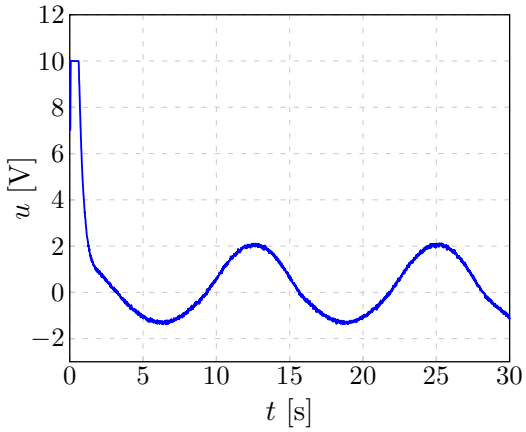
Kako bi upravljački zakon dobiven prethodnim simulacijama primijenili na eksperimentalni postav elektrohidrauličke preše, numeričke vrijednosti parametara (6.53) potrebno je pomnožiti s odgovarajućim faktorima (prema izrazima (6.38) i (6.32)) kako bi se dobile veličine u pripadajućim fizikalnim jedinicama.

Eksperimentalni rezultati upravljanja elektrohidrauličkom prešom primjenom regulatora dobivenog predloženim algoritmom prikazani su na slikama 6.29 i 6.30. Na slici 6.31 prikazani su eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom PI regulatora, s uključenim tzv. *anti-windup*-om integratora, a čija su pojačanja $K_P = 6$ i $K_I = 2$ kao u [142]. PI regulator je najčešća struktura regulatora za upravljanje silom elektrohidrauličkih sustava u industrijskim primjenama. Kao što se može vidjeti iz prikazanih vremenskih dijagrama, kada je potrebno da sila na klipnjači cilindra prati vremenski promjenjivu trajektoriju, regulator dobiven predloženim algoritmom daje puno bolje rezultate u usporedbi s PI regulatorom.

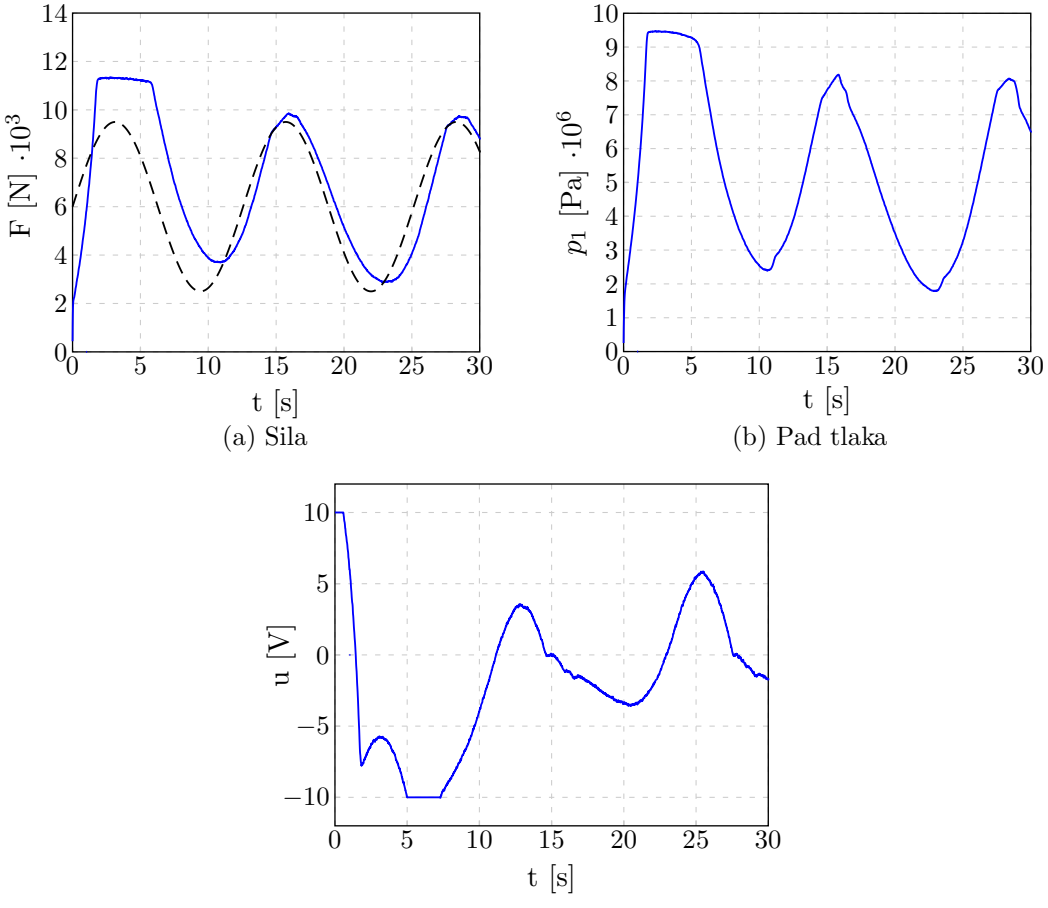


(a) Sila (b) Pad tlaka

Slika 6.29: Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom predloženog algoritma: varijable stanja u ovisnosti o vremenu.



Slika 6.30: Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom predloženog algoritma: upravljački napon u ovisnosti o vremenu.



(a) Sila

(b) Pad tlaka

(c) Upravljački napon

Slika 6.31: Eksperimentalni rezultati upravljanja silom primjenom PI regulatora: varijable stanja i upravljački napon u ovisnosti o vremenu.

Poglavlje 7

Zaključak

U ovoj disertaciji razmatran je problem sinteze zakona upravljanja afinim nelinearnim dinamičkim sustavima u kojem su prisutne neodređenosti, a sve varijable stanja su dostupne, tj. mogu se izravno mjeriti ili rekonstruirati. Predložen je pristup kojim se optimira $\mathscr{L}_2$ pojačanje sustava, kao mjera (norma) utjecaja neodređenosti, bez rješavanja Hamilton-Jacobi-Isaacsove jednadžbe. Pri tome se upravljačke varijable i varijable neodređenosti aproksimiraju funkcijama s linearnom ovisnošću o konačnom broju konstantnih parametara za čije je računanje izveden novi numerički algoritam.

Vidjeli smo da $\mathscr{L}_2$ optimalno upravljanje, u kontekstu teorije diferencijalnih igara nulte sume, ustvari pripada klasi razlomačkih minimaks optimizacijskih problema. Kod algoritma predloženog u ovoj disertaciji, razlomački optimizacijski problem je transformiran u parametarski optimizacijski problem, gdje parametar koji se minimizira predstavlja kvadrat $\mathscr{L}_2$ pojačanja sustava. Ekvivalentnost rješenja ove dvije klase problema, u predloženom algoritmu, dokazane su Propozicijom 4.1 i Korolarom 4.1. Budući da je funkcija cilja konkavna s obzirom na parametar koji se minimizira, a također i nedifrencijabilna zbog min max operatora u predloženom algoritmu je korištena subgradijentna metoda. Subgradijent funkcije cilja s obzirom na traženi parametar dan je Propozicijom 4.2.

Nadalje, predloženi algoritam za računanje parametara aproksimacijskih funkcija varijabli upravljanja i neodređenosti, kojima se ostvaruje optimalno $\mathscr{L}_2$ pojačanje, svodi se na traženje sedlaste točke diferencijalne igre. Za računanje tih parametara primijenjena je Newtonova metoda s regulacijom koraka konvergencije. Glavna prednost pristupa u ovoj disertaciji, u

usporedbi sa standardnim metodama nelinearnog programiranja, je ta što dinamika sustava, koja predstavlja ograničenja optimizacijskog problema tipa jednakosti, nije uključena u funkciju cilja, nego se za računanje gradijenata i Hessijana, koji se pojavljuju u Newtonovoj metodi, koristi činjenica da su parametri aproksimacijskih funkcija i varijable stanja povezani upravo preko dinamike sustava. Glavna svojstva algoritma za računanje sedlaste točke, jedinstvenost rješenja i konvergencija, dana su u Propozicijama 4.3 i 4.4.

Vidjeli smo da je u Newtonovoj metodi potrebno računati derivacije prvog i drugog reda. Budući da je derivacija mjera osjetljivosti funkcije na infinitezimalne promjene vrijednosti varijable, pristup u ovoj disertaciji temeljen je na vremenskoj diskretizaciji dinamike sustava pomoću eksplicitne Adamsove aproksimacije s malim vremenskim korakom diskretizacije. Rezultat vremenske diskretizacije konvergira prema kontinuiranom smanjenjem koraka diskretizacije i povećanjem reda Adamsove aproksimacije. Na ovaj način je omogućeno rekurzivno računanje, uz primjenu pravila lančanog deriviranja, gradijenata i Hessijana funkcije cilja s obzirom na parametre aproksimacijskih funkcija upravljanja i neodređenosti. Dakle, Newtonovom metodom dobivamo konstantne vrijednosti parametara, što u konačnici znači da dobivamo vremenski kontinuirani zakon upravljanja koji daje optimalne performanse u prisutnosti vremenski kontinuiranih neodređenosti.

U radu je također pokazano kako se na sintezu zakona upravljanja s analitičkim neizrazitim baznim funkcijama, kod kojih se izostavlja konvencionalni proces neizrazitih sustava definiranja baze pravila ponašanja, može primijeniti predloženi algoritam. Propozicijom 4.5 je pokazano da se analitičkim neizrazitim baznim funkcijama može aproksimirati bilo koju funkciju na kompaktnom skupu s proizvoljnim stupnjem točnosti.

Algoritam je napisan i realiziran u programskom paketu MATLAB te je numerički provjeren na primjerima nelinearnih sustava kod kojih je moguće analitički riješiti Hamilton-Jacobi-Isaacsovu jednadžbu. Ovim primjerima je pokazano da predloženi algoritam izračunava traženo rješenje problema s dovoljnom numeričkom efikasnošću u smislu konvergencije i točnosti.

Također, u ovoj disertaciji je provedena analiza stabilnosti predloženog sustava upravljanja primjenom Ljapunovljeve teorije stabilnosti. Razmatrani su nelinearni Euler-Lagrangeovi sustavi s prisutnim neodređenostima u obliku vanjskih poremećajnih sila (i/ili momenata),

nemodeliranih nelinearnosti i sl. Radi jednostavnosti, razmatran je problem regulacije oko ravnotežnog stanja primjenom jedne klase linearnog zakona upravljanja. Izvedeni uvjeti $\mathscr{L}_2$ stabilnosti mogu se iskoristiti prilikom inicijalizacije optimizacijskog procesa ili se u predloženi algoritam mogu uključiti primjenom metode kaznenih funkcija.

Na kraju, predloženi algoritam je primijenjen na sintezu regulatora elektrohidrauličkih sustava. Predmet istraživanja su bila tri osnovna modela elektrohidrauličkih sustava: sustav za upravljanje rotacijskim gibanjem, sustav za upravljanje linearnim gibanjem i sustav za upravljanje silom. Simulacijskim i eksperimentalnim rezultatima je pokazano da se predloženom strategijom upravljanja mogu ostvariti željena ponašanja uz djelovanje vanjskih poremećaja. Projektirani regulatori su u sva tri modela sustava dali bolje rezultate u usporedbi s najčešćim strukturama konvencionalnih regulatora koji se pojavljuju u industrijskim primjenama.

Osim već u ranijim poglavljima spomenutog slučaja kada početni uvjeti dinamike sustava nisu poznati i problema inverznog minimaks optimalnog upravljanja, u budućem istraživanju, koncepti izneseni u ovoj disertaciji, razmatrat će se za slučaj kada sve varijable stanja nelinearnog dinamičkog sustava nisu dostupne. To znači da će se izvedeni algoritam proširiti s dinamičkim observerom stanja, tj. razmatrat će se problem $\mathscr{L}_2$ optimalnog upravljanja po vektoru izlaza (engl. $\mathscr{L}_2$-*gain optimal output feedback control*).

Nadalje, razmotrit će se mogućnost izvoda, na osnovu izraza za gradijente i Hessijane funkcije cilja u Potpoglavlju 4.3.2, eksplicitnih formula za računanje parametara aproksimacijskih funkcija varijabli upravljanja i neodređenosti za slučaj linearnih dinamičkih sustava. Pretpostavlja se da je dobivanje tih formula moguće, budući da su aproksimacijske funkcije linearne, pa samim time postaju egzaktne, a matrice dinamike sustava su konstantne što pojednostavljuje izraze za gradijente i Hessijane funkcije cilja. Izvod bi se temeljio na zadovoljavanju uvjeta sedlene točke – gradijenti funkcije cilja su jednaki nuli, a Hessijani funkcije cilja su pozitivno, odnosno negativno definitne matrice.

Također, razmatrat će se mogućnosti proširenja algoritma za minimaks optimizaciju na sintezu zakona upravljanja prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima.

DODATAK **A**

Osnovni pojmovi iz analize stabilnosti

Ovdje ćemo navesti neke od osnovnih pojmova i definicija vezanih uz stabilnost kontinuiranih nepobuđenih i autonomnih nelinearnih dinamičkih sustava. Izlaganja uglavnom slijede standardne reference, kao što su na primjer [9, 10, 11, 143].

Kontinuirani sustav je nepobuđen ako na njega ne djeluje nikakva pobuda, odnosno ako je prepušten sam sebi te se može opisati s

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t)\right), \quad \forall t \geq 0, \tag{A.1}$$

gdje su $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sustava, $t \in \mathbb{R}_+$ vrijeme, $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nelinearna neprekidna funkcija.

Definicija A.1 (Ravnotežno stanje)**.** *Ravnotežno stanje je stanje koje sustav zadržava, ako na njega ne djeluje vanjska pobuda. Ravnotežno stanje dinamičkog sustava izražava se vektorom* $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$*, u kojem sustav ostaje, ako je u početnom trenutku zatečeno stanje bilo ravnotežno;* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$.

Definicija A.2 (Trajektorija stanja ili rješenje sustava)**.** *Nepobuđeni sustav opisan s vektorskom diferencijalnom jednadžbom* (A.1) *ima jednoznačnu trajektoriju stanja (rješenje), za svaki pojedini početni uvjet* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$*, gdje je* $\mathbf{x}_e \neq \mathbf{x}_0$*. Rješenje, odnosno stanje sustava od trenutka* t_0 *moguće je opisati sa:*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{A.2}$$

gdje je funkcija $\mathbf{s} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Trajektorija stanja (rješenje), ako je rješenje, morat će zadovoljiti svoju diferencijalnu jednadžbu:*

$$\dot{\mathbf{s}}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\right), \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{s}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \tag{A.3}$$

Trajektorija stanja (rješenje) ima sljedeća svojstva:

1. $\mathbf{s}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,
2. $\mathbf{s}\left(t, t_1, \mathbf{s}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)\right) = \mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \geq t_1 \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Nadalje, razmatra se ponašanje rješenja sustava kada njegovo početno stanje nije ravnotežno, odnosno kada je u okolini ravntežnog stanja.

Definicija A.3 (Stabilnost)**.** *Ravnotežno stanje je stabilno ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *i svaki* $t \in \mathbb{R}_+$ *postoji pozitivni broj* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *takav da vrijedi:*

$$\|\mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon. \tag{A.4}$$

Definicija A.4 (Asimptotska stabilnost)**.** *Ravnotežno stanje asimptotski je stabilno ako je:*

1. *stabilno u smislu Definicije A.3 te ako,*
2. *postoji pozitivni broj* $\delta = \delta(t_0) > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, *takav da kad god:*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(t_0) \Rightarrow \|\mathbf{s}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \to 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{A.5}$$

Odnosno, stanje sustava teži ravnotežnom stanju iz kojeg je bilo poremećeno kada $t \to \infty$. *Za asimptotsku stabilnost, prema tome vrijedi:*

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{x}_e = 0. \tag{A.6}$$

Dobro je poznato da direktna Ljapunovljeva metoda ima glavnu ulogu u analizi stabilnosti dinamičkih sustava. Prema ovoj metodi promatra se asimptotsko ponašanje stanja autonomnog sustava, tj. dinamičkog sustava koji je nepobuđen i eksplicitno ne ovisi o vremenu te

se može opisati s

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{A.7}$$

gdje su $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sustava, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nelinearna neprekidna funkcija.

Prije definicije stabilnosti u smislu Ljapunova potrebno je uvesti pojmove pozitivno (negativno) definitne i pozitivno (negativno) semidefinitne funkcije.

Za skalarnu funkciju više varijabli

$$V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{A.8}$$

koja ima neprekidne parcijalne derivacije kaže se da je *pozitivno definitna* u nekom području Ω oko ishodišta prostora stanja, ako u svim točkama tog područja zadržava pozitivni predznak i ako ima vrijednost nula samo u ishodištu prostora stanja, odnosno

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \text{ako } \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ = 0 & \text{ako } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \tag{A.9}$$

Funkcija $V(\mathbf{x})$ je *pozitivno semidefinitna*, ako u određenom području Ω oko ishodišta prostora stanja u svim točkama zadržava pozitivan predznak i ako ima vrijednost nula, osim u ishodištu prostora stanja, i u nekim drugim točkama tog područja, odnosno

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq 0 & \text{ako } \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ = 0 & \text{ako } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \tag{A.10}$$

Funkcija $V(\mathbf{x})$ je *negativno definitna*, ako je $-V(\mathbf{x})$ pozitivno definitna, a *negativno semidefinitna* ako je $-V(\mathbf{x})$ pozitivno semidefinitna.

Definicija A.5 (Ljapunovljeva funkcija)**.** *Ako je unutar nekog područja funkcija $V(\mathbf{x})$ pozitivno definitna i ima neprekidne parcijalne derivacije te ako je njena vremenska derivacija $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativno semidefinitna, tada je $V(\mathbf{x})$* Ljapunovljeva funkcija *sustava* (A.7).

Teoremi stabilnosti u smislu Ljapunova dat će se bez dokaza, koji se mogu naći na primjer u [9, 143].

Teorem A.1 (Globalna stabilnost u smislu Ljapunova)**.** *Ako je moguće naći takvu neprekidnu skalarnu funkciju* $V(\mathbf{x})$ *koja ima neprekidne prve derivacije i koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. $V(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$ *(pozitivno definitna),*
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ *(negativno semidefinitna),*
3. $V(\mathbf{x}) \to \infty$ *kako* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ *(radijalno neograničena),*

tada je ravnotežno stanje globalno stabilno u smislu Ljapunova.

Uvjeti 1. i 2. su uvjeti lokalne stabilnosti u okolini ishodišta u smislu Ljapunova. Ako je $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ (negativno definitna) tada je ravnotežno stanje *globalno asimptotski stabilno.*

Ljapunovljeva teorija stabilnosti za autonomne sustave (A.7) može se proširiti na nepobuđene sustave (A.1), vidjeti na primjer [9, Poglavlje 4.5].

Literatura

[1] R. W. Beard and T. W. McLain. Successive Galerkin approximation algorithms for nonlinear optimal and robust control. *International Journal of Control*, 71(5):717–743, 1998.

[2] M. Abu-Khalaf, F. L. Lewis, and J. Huang. Policy iterations on the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation for $\mathscr{H}_\infty$ state feedback control with input saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(12):1989–1995, 2006.

[3] M. Abu-Khalaf, F. L. Lewis, and J. Huang. Neurodynamic programming and zero-sum games for constrained control systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(7):1243–1252, 2008.

[4] T. Cheng, F. L. Lewis, and M. Abu-Khalaf. Neural network solution for finite-horizon $\mathscr{H}_\infty$ state feedback control of nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 38(12):1029–1041, 2007.

[5] K. G. Vamvoudakis and F. L. Lewis. Multi-player non-zero-sum games: Online adaptive learning solution of coupled Hamilton–Jacobi equations. *Automatica*, 47(8):1556–1569, 2011.

[6] K. G. Vamvoudakis and F. L. Lewis. Online solution of nonlinear two-player zero-sum games using synchronous policy iteration. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(13):1460–1483, 2012.

[7] R. Isaacs. *Differential Games. A Mathematical Theory with Application to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.

[8] T. Basar and P. Bernard. $\mathscr{H}_\infty$ *Optimal Control and Related Minimax Design Problems, Second Edition*. Birkhuser, Boston, MA, 1995.

[9] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall Inc., 2002.

[10] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*, volume 1. Springer-Verlag, London, 1995.

[11] A. Isidori. *Nonlinear control systems*, volume 2. Springer-Verlag, London, 1999.

[12] A. Van Der Schaft. $\mathscr{L}_2$-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback $\mathscr{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):770–784, 1992.

[13] A. Van Der Schaft. $\mathscr{L}_2$*-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 1996.

[14] J. W. Helton and M. R. James. *Extending* $\mathscr{H}_\infty$ *Control to Nonlinear Systems*. SIAM, Philadelphia, 1999.

[15] M. D. S. Aliyu. *Nonlinear* $\mathscr{H}_\infty$*-Control, Hamiltonian Systems and Hamilton-Jacobi Equations*. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, Florida, 2011.

[16] T. Basar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, Philadelphia, 1999.

[17] V. Milić, J. Kasać, and D. Majetić. A back propagation through time-like min-max optimal control algorithm for nonlinear systems. *Optimal control applications and methods*, 34(3):364–378, 2013.

[18] V. Milić, A. Bemporad, J. Kasać, and Ž. Šitum. Numerical algorithm for nonlinear state feedback $\mathscr{H}_\infty$ optimal control problem. In *Proceedings of The 20th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1247–1252, Barcelona, Spain, July 2012.

[19] V. Milić, S. Di Cairano, J. Kasać, A. Bemporad, and Ž. Šitum. A numerical algorithm for nonlinear $\mathscr{L}_2$-gain optimal control with application to vehicle yaw stability control.

In *Proceedings of The 51st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5040–5045, Maui, HI, USA, December 2012.

[20] V. Milić, J. Kasać, and B. Novaković. An analytical fuzzy-based approach to $\mathscr{L}_2$-gain optimal control of input-affine nonlinear systems using Newton-type algorithm. *Prihvaćeno za objavljivanje u International Journal of Systems Science*, 2013, DOI: 10.1080/00207721.2013.860640.

[21] J. Kasać, J. Deur, B. Novaković, I. Kolmanovsky, and F. Assadian. A conjugate gradient-based BPTT-like optimal control algorithm with vehicle dynamics control application. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(6):1587–1595, 2011.

[22] B.M. Novaković. Fuzzy logic control synthesis without any rule base. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 29(3):459–466, 1999.

[23] B. Novaković, D. Ščap, and D. Novaković. An analytic approach to fuzzy robot control synthesis. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 13(1):71–83, 2000.

[24] N. Berman and U. Shaked. $\mathscr{H}_\infty$-like control for nonlinear stochastic systems. *Systems & Control Letters*, 55(3):247–257, 2006.

[25] W. Zhang and B. Chen. State feedback $\mathscr{H}_\infty$ control for a class of nonlinear stochastic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(6):1973–1991, 2006.

[26] M. D. S. Aliyu and E. K. Boukas. Finite and infinite horizon $\mathscr{H}_\infty$ control for stochastic nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 17(3):265–279, 2000.

[27] I. R. Petersen, M. R. James, and P. Dupuis. Minimax optimal control of stochastic uncertain systems with relative entropy constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):398–412, 2000.

[28] J. C. Doyle. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(4):756–757, 1978.

[29] J. C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.

[30] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(5):321–351, 1972.

[31] D. Hill and P. Moylan. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5):708–711, 1976.

[32] J. A. Ball and J. W. Helton. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations arising in nonlinear $\mathscr{H}_\infty$-control. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 6(1):1–22, 1996.

[33] W.-M. Lu and J. C. Doyle. $\mathscr{H}_\infty$-control of nonlinear systems: A convex characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1668–1675, 1995.

[34] W.-M. Lu and J. C. Doyle. Robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(12):1654–1666, 1997.

[35] M. D. S. Aliyu. An approach for solving the Hamilton-Jacobi-Isaacs equation (HJIE) in nonlinear $\mathscr{H}_\infty$ control. *Automatica*, 39(5):877–884, 2003.

[36] M. Sassano and A. Astolfi. Dynamic approximate solutions of the HJ inequality and of the HJB equation for input-affine nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(10):2490–2503, 2012.

[37] B. Luo and H.-N. Wu. Computationally efficient simultaneous policy update algorithm for nonlinear $\mathscr{H}_\infty$ state feedback control with Galerkin's method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(9):991–1012, 2013.

[38] H.-N. Wu and B. Luo. Neural network based online simultaneous policy update algorithm for solving the HJI equation in nonlinear $\mathscr{H}_\infty$ control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 23(12):1884–1895, 2012.

[39] Y. Feng, B. D. O. Anderson, and M. Rotkowitz. A game theoretic algorithm to compute local stabilizing solutions to HJBI equations in nonlinear $\mathscr{H}_\infty$ control. *Automatica*, 45(4):881–888, 2009.

[40] A. Lanzon, Y. Feng, B. D. O. Anderson, and M. Rotkowitz. Computing the positive stabilizing solution to algebraic Riccati equations with an indefinite quadratic term via a recursive method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2280–2291, 2008.

[41] R. A. Freeman and P. V. Kokotović. *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques*. Birkhäuser, Boston, 2008.

[42] R. A. Freeman and P. V. Kokotović. Inverse optimality in robust stabilization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(4):1365–1391, 1996.

[43] N. H. El-Farra and P. D. Christofides. Robust inverse optimal control laws for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(15):1371–1388, 2003.

[44] L. Mo. Finite-time $\mathscr{H}_\infty$ inverse optimal control of affine nonlinear systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 32(1):47–60, 2013.

[45] Ž. Šitum, V. Milić, and M. Essert. Throttling and volumetric control principle to an electrohydraulic velocity servomechanism. In *Workshop Proceedings of the 7th International Fluid Power Conference Aachen, Efficiency through Fluid Power*, pages 379–390, Aachen, Germany, March 2010.

[46] V. Milić, Ž. Šitum, and M. Essert. Robust $\mathscr{H}_\infty$ position control synthesis of an electrohydraulic servo system. *ISA Transactions*, 49(4):535–542, 2010.

[47] Ž. Šitum, V. Milić, T. Žilić, and M. Essert. Design, construction and computer control of a hydraulic press. In *Proceedings of the 12th Scandinavian International Conference on Fluid Power*, pages 93–103, Tampere, Finland, May 2011.

[48] K.M. Abadir and J.R. Magnus. *Matrix Algebra*. Cambridge University Press, New York, 2005.

[49] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, Amsterdam, 2003.

[50] J.R. Magnus and H. Neudecker. *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1988.

[51] J. R. Magnus and H. Neudecker. Matrix differential calculus with applications to simple, Hadamard, and Kronecker products. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):474–492, 1985.

[52] A. Graham. *Kronecker products and matrix calculus: With applications*. Ellis Horwood Limited, West Sussex, 1981.

[53] J. W. Brewer. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(9):772–781, 1978.

[54] W. Vetter. Matrix calculus operations and Taylor expansions. *SIAM Review*, 15(2):352–369, 1973.

[55] W. Vetter. Derivative operations on matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(2):241–244, 1970.

[56] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.

[57] J.B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[58] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, 2004.

[59] P. J. Davis. *Interpolation and approximation*. Dover Publications Inc., New York, 1975.

[60] G. Meinardus. *Approximation of functions: theory and numerical methods. Translated by Larry L. Schumaker*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[61] A. Ruszcayǹski. *Nonlinear Optimization*. Princeton University Press, New Jersey, USA, 2006.

[62] N. Z. Shor. *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*. Springer Science and Business Media, Dordrecht, 1998.

[63] N. Z. Shor, K. C. Kiwiel, and A. Ruszcayǹski. *Minimization Methods for Non-differentiable Functions*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, 1985.

[64] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, New York, 1976.

[65] S. Kurepa. *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[66] A. Astolfi. Singular $\mathscr{H}_\infty$ control for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 7:727–740, 1997.

[67] W. C. A. Maas and A. J. Van der Schaft. Singular nonlinear $\mathscr{H}_\infty$ optimal control by state feedback. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, 1994*, volume 2, pages 1415–1420, Lake Buena Vista, Florida, December 1994.

[68] S. Yuliar, M. R. James, and J. W. Helton. Dissipative control systems synthesis with full state feedback. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 11:335–356, 1998.

[69] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45:321–351, 1972.

[70] V. F. Demyanov and V. N. Malozemov. *Introduction to Minimax (Translated by D. Louvish)*. Courier Corporation, 2014.

[71] J. F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

[72] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics: Volume 1*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1966.

[73] G. Cybenko. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 2(4):303–314, 1989.

[74] A. R. Barron. Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39(3):930–945, 1993.

[75] I. W. Sandberg. Notes on uniform approximation of time-varying systems on finite time intervals. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 45(8):863–865, 1998.

[76] I. W. Sandberg. Uniform approximation of periodically-varying systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 51(8):1631–1638, 2004.

[77] P. P. Khargonekar, K. M. Nagpal, and K. R. Poolla. $\mathscr{H}_\infty$ control with transients. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(6):1373–1393, 1991.

[78] W. W. Lu, G. J. Balas, and E. B. Lee. A variational approach to $\mathscr{H}_\infty$ control with transients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10):1875–1879, 1999.

[79] Y. K. Foo. $\mathscr{H}_\infty$ control with initial conditions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 53(9):867–871, 2006.

[80] D. V. Balandin and M. M. Kogan. LMI-based $\mathscr{H}_\infty$-optimal control with transients. *International Journal of Control*, 83(8):1664–1673, 2010.

[81] J. B. G. Frenk and S. Schaible. Fractional programming. In N. Hadjisavvas, S. Komlósi, and S.S. Schaible, editors, *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, chapter 8, pages 335–386. Springer Science + Business Media, Inc., Boston, 2005.

[82] I. M. Stancu-Minasian. *Fractional Programming: Theory, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[83] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Science + Business Media, LLC, New York, 2006.

[84] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA, USA, 1999.

[85] J. T. Betts. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2001.

[86] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory And Algorithms*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, USA, 2006.

[87] H. C. Lai. On a dynamic fractional game. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 294(2):644–654, 2004.

[88] W. Dinkelbach. On nonlinear fractional programming. *Management Science*, 13(7):492–498, 1967.

[89] B. Chen and M. C. Pinar. On Newton's method for Huber's robust M-estimation problems in linear regression. *BIT Numerical Mathematics*, 38(4):674–684, 1998.

[90] M. M. Kogan. A local approach to solving the inverse minimax control problem for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 68(6):1437–1448, 1997.

[91] M. M. Kogan. Solution to the inverse problem of minimax control and worst case disturbance for linear continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):670–674, 1998.

[92] V. Milić, J. Kasać, and Ž. Šitum. A Newton-like algorithm for $\mathscr{L}_2$-gain optimal control of an electro-hydraulic servo-system. In *Proceedings of The 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 574–579, Palermo, Italy, June 2014.

[93] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I - Nonstiff Problems, Second Revised Edition*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[94] B. Fornberg. Classroom note: Calculation of weights in finite difference formulas. *SIAM Review*, 40(3):685–691, 1998.

[95] B. Fornberg. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of Computation*, 51(184):699–706, 1988.

[96] B. Fornberg. Numerical differentiation of analytic functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7(4):512–526, 1981.

[97] W. Squire and G. Trapp. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Review*, 40(1):110–112, 1998.

[98] K.-L. Lai and J. L. Crassidis. Extensions of the first and second complex-step derivative approximations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219(1):276–293, 2008.

[99] G. Lantoine, R. P. Russell, and T. Dargent. Using multicomplex variables for automatic computation of high-order derivatives. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 38(3):16:1–16:21, 2012.

[100] R. Abreu, D. Stich, and J. Morales. On the generalization of the complex step method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 241(0):84–102, 2013.

[101] A. A. Abokhodair. Numerical tools for geoscience computations: Semiautomatic differentiation. *Computational Geosciences*, 11(4):283–296, 2007.

[102] A. Griewank and A. Walther. *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation, Second Edition*. SIAM, Philadelphia, USA, 2008.

[103] S. Forth, P. Hovland, E. Phipps, J. Utke, and A. Walther, editors. *Recent Advances in Algorithmic Differentiation*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, Berlin, 2012.

[104] C. H. Bischof, M. H. Bücker, P. D. Hovland, U. Naumann, and J. Utke, editors. *Advances in Automatic Differentiation*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, Berlin, 2008.

[105] J. Willkomm, C. H. Bischof, and H. M. Bücker. A new user interface for ADiMat: Toward accurate and efficient derivatives of MATLAB programmes with ease of use. *International Journal of Computational Science and Engineering*, 9(5/6):408–415, 2014.

[106] C. H. Bischof, H. M. Bucker, B. Lang, A. Rasch, and A. Vehreschild. Combining source transformation and operator overloading techniques to compute derivatives for MATLAB programs. In *Proceedings of the 2nd IEEE International Workshop on Source Code Analysis and Manipulation*, pages 65–72, Montreal, Canada, October 2002.

[107] L. A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.

[108] L. X. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[109] L.-X. Wang and J. M. Mendel. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(5):807–814, 1992.

[110] B. Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, 43(11):13291333, 1994.

[111] J. Kasać, B. Novaković, D. Majetić, and D. Brezak. Stability analysis of fuzzy robot control without fuzzy rule base. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, pages 310–315, Portland, Oregon, USA, July 2003.

[112] T. Dierks and S. Jagannathan. Optimal control of affine nonlinear continuous-time systems using an online Hamilton-Jacobi-Isaacs formulation. In *Proceedings of The 49th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3048–3053, Atlanta, GA, USA, December 2010.

[113] J. Doyle, J. A. Primbs, B. Shapiro, and V. Nevistic. Nonlinear games: examples and counterexamples. In *Proceedings of The 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3915–3920, December 1996.

[114] R. Ortega, A. Loría, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramírez. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer-Verlag, London, 1998.

[115] J. Kasać. *Analiza stabilnosti nelinearnih sustava vođenih analitičkim neizrazitim regulatorom*. PhD thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2005.

[116] R. Ortega, A. Loria, R. Kelly, and L. Praly. On passivity-based output feedback global stabilization of Euler-Lagrange systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(4):313–323, 1995.

[117] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole, 2006.

[118] M. Karpenko and N. Sepehri. Hardware-in-the-loop simulator for research on fault tolerant control of electrohydraulic actuators in a flight control application. *Mechatronics*, 19(7):1067–1077, 2009.

[119] S. Engleder. Time-optimal motion planning and control of an electrohydraulically actuated toggle mechanism. *Mechatronics*, 17(8):448–456, 2007.

[120] C. Yang, Q. Huang, and J. Han. Computed force and velocity control for spatial multi-DOF electro-hydraulic parallel manipulator. *Mechatronics*, 22(6):715–722, 2012.

[121] M. Wu and M. Shih. Simulated and experimental study of hydraulic anti-lock braking system using sliding-mode PWM control. *Mechatronics*, 13(4):331–351, 2003.

[122] S.-H. You, J.-O. Hahn, Y. M. Cho, and K. I. Lee. Modeling and control of a hydraulic unit for direct yaw moment control in an automobile. *Control Engineering Practice*, 14(9):1011–1022, 2006.

[123] H. E. Merritt. *Hydraulic Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1967.

[124] A. Akers, M. Gassman, and R. Smith. *Hydraulic Power System Analysis*. Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006.

[125] M. Kalyoncu and M. Haydim. Mathematical modelling and fuzzy logic based position control of an electrohydraulic servosystem with internal leakage. *Mechatronics*, 19(6):847–858, 2009.

[126] A. Mohanty and B. Yao. Integrated direct/indirect adaptive robust control of hydraulic manipulators with valve deadband. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 16(4):707–715, 2011.

[127] H. Khan, S. C. Abou, and N. Sepehri. Nonlinear observer-based fault detection technique for electro-hydraulic servo-positioning systems. *Mechatronics*, 15(9):1037–1059, 2005.

[128] J. Seo, R. Venugopal, and J.-P. Kenne. Feedback linearization based control of a rotational hydraulic drive. *Control Engineering Practice*, 15(12):1495–1507, 2007.

[129] C. Kaddissi, J.-P. Kenne, and M. Saad. Identification and real-time control of an electrohydraulic servo system based on nonlinear backstepping. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12(1):12–22, 2007.

[130] A. Alleyne and R. Liu. A simplified approach to force control for electro-hydraulic systems. *Control Engineering Practice*, 8(12):1347–1356, 2000.

[131] P. M. Marusak and S. Kuntanapreeda. Constrained model predictive force control of an electrohydraulic actuator. *Control Engineering Practice*, 19(1):62–73, 2011.

[132] C. Guan and S. Pan. Adaptive sliding mode control of electro-hydraulic system with nonlinear unknown parameters. *Control Engineering Practice*, 16(11):1275–1284, 2008.

[133] C. Kaddissi, J.-P. Kenne, and M. Saad. Indirect adaptive control of an electrohydraulic servo system based on nonlinear backstepping. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 16(6):1171–1177, 2011.

[134] T. Knohl and H. Unbehauen. Adaptive position control of electrohydraulic servo systems using ANN. *Mechatronics*, 10(1-2):127–143, 2000.

[135] D. Q. Truong and K. K. Ahn. Force control for hydraulic load simulator using self-tuning grey predictor – fuzzy PID. *Mechatronics*, 19(2):233–246, 2009.

[136] A. Sadeghieh, H. Sazgar, K. Goodarzi, and C. Lucas. Identification and real-time position control of a servo-hydraulic rotary actuator by means of a neurobiologically motivated algorithm. *ISA Transactions*, 51(1):208–219, 2012.

[137] W. Kim, D. Won, D. Shin, and C. C. Chung. Output feedback nonlinear control for electro-hydraulic systems. *Mechatronics*, 22(6):766–777, 2012.

[138] J. Watton. *Fluid Power Systems: Modeling, Simulation, Analog and Microcomputer Control*. Prentice-Hall Inc., 1989.

[139] D. Garagic and K. Srinivasan. Application of nonlinear adaptive control techniques to an electrohydraulic velocity servomechanism. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(2):303–314, 2004.

[140] N. Niksefat and N. Sepehri. Designing robust force control of hydraulic actuators despite system and environmental uncertainties. *IEEE Control Systems*, 21(2):66–77, 2001.

[141] K. J. Astrom and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2nd edition, 1994.

[142] Ž. Šitum, V. Milić, and T. Žilić. Improving performance of a hydraulic press with real-time nonlinear control. In *Proceedings of the 9th International Fluid Power Conference, 9. IFK*, volume 2, pages 158–163, Aachen, Germany, March 2014.

[143] A. M. Lyapunov. *The General Problem of the Stability Of Motion (Translated from French into English by A. T. Fuller)*. Taylor & Francis Group, 1992.

Životopis

Vladimir Milić je rođen 5. rujna 1984. godine u Tuzli, Bosna i Hercegovina. Osnovnu i srednju školu završio je u Zagrebu, Hrvatska. Godine 2003. upisuje studij na Fakultetu strojarstva i brodogradnje (FSB), Sveučilišta u Zagrebu. Godine 2007. završava preddiplomski studij i stječe akademski naziv sveučilišni prvostupnik inženjer strojarstva, a 2008. godine završava diplomski studij i stječe akademski naziv magistar inženjer strojarstva. Nagrađen je Medaljom Fakulteta za izvrstan uspjeh na studiju.

Od prosinca 2008. godine zaposlen je na Zavodu za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava FSB-a kao znanstveni novak i asistent u nastavi. Na istom Zavodu, 2009. godine upisuje poslijediplomski doktorski studij. Vladimir Milić je sudjelovao na dva znanstvena projekta „Optimalno upravljanje energijom u fluidnoj tehnici i elektromehaničkim sustavima" (br. 120-1201842-1839) i „Umjetna inteligencija u upravljanju složenim nelinearnim dinamičkim sustavima" (br. 120-1201842-3048) podržanim od strane Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta, Republike Hrvatske. Vladimir Milić je trenutno uključen u istraživačke aktivnosti na projektu „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima" (br. 9354) financiranim od strane Hrvatske zaklade za znanost. Također, angažiran je u preddiplomskoj nastavi na kolegijima: Automatika, Računalna matematika i Objektno programiranje.

U razdoblju od svibnja 2011. godine do studenog 2011. godine boravio je na Sveučilištu u Trentu, Italija i Institutu za napredne studije IMT Lucca, Italija. Znanstveni boravak je financiran iz programa „Stipendije za doktorande" Hrvatske zaklade za znanost u okviru

istraživačkog projekta „Numerički algoritam za robusno optimalno upravljanje elektromehaničkim sustavima" (br. 03.01/170). Projekt se provodio u istraživačkoj grupi koju vodi prof. Alberto Bemporad.

Vladimir Milić je autor ili koautor 4 znanstvena rada u međunarodnim CC časopisima i 14 radova u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom. Trenutačna istraživačka aktivnost usmjerena mu je prema numeričkim algoritmima za optimalno upravljanje, $\mathscr{H}_\infty$ upravljanje i distribuirano upravljanje.

Biography

Vladimir Milić was born on September 5, 1984 in Tuzla, Bosnia and Herzegovina. He finished elementary and high school in Zagreb, Croatia. In the year 2003 he enrolled to study at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb. He received his B. E. and M. E. in Mechanical Engineering from University of Zagreb in 2007 and 2008, respectively. He was awarded the "Medal of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture" for excellent achievements during the course of study (corresponds to cum laude honors).

Since December 2008, Vladimir Milić has been working at the Department of Robotics and Automation of Manufacturing Systems, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, as a research and teaching assistant. In the year 2009 he enrolled at the postgraduate doctoral study at the same Department. Vladimir Milić participated in two projects "Energy optimal control of fluid power and electromechanical systems" (No. 120-1201842-1839) and "Artificial intelligence in control of complex nonlinear dynamic systems" (No. 120-1201842-3048), supported by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia. Vladimir Milić is currently involved in research activities at the project Control of Spatially Distributed Dynamical Systems (No. 9354), supported by the Croatian Science Foundation. Also, he is involved in teaching activities at undergraduate courses: Automatic Control, Computer Mathematics and Object-oriented programming.

From June 2011 to November 2011 Vladimir Milić was visiting scholar at the University of Trento, Italy and Institute of Advanced Studies IMT Lucca, Italy where he collaborated

with the research group of Prof. Alberto Bemporad on project "Numerical algorithm for optimal robust control of electromechanical systems". The project was financed by Croatian Science Foundation (grant number 03.01/170, program "Scholarships for doctoral students").

Vladimir Milić is the author/co-author of 4 papers in internationally recognized CC scientific journals and 14 papers in conference proceedings with international review. His current research interests include numerical algorithms for optimal control, $\mathscr{H}_\infty$ control and distributed control.

Popis radova

Izvorni znanstveni i pregledni radovi u CC časopisima:

1. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Majetić, Dubravko. A back propagation through time-like min–max optimal control algorithm for nonlinear systems. // *Optimal control applications and methods*. 34 (2013), 3; 364-378 (članak, znanstveni).

2. Kasać, Josip; Novaković, Branko; **Milić, Vladimir**. On Equivalence Between Internal and External Model-Based Repetitive Learning Controllers for Nonlinear Passive Systems. // *Asian Journal of Control*. 13 (2011), 1; 15-24 (članak, znanstveni).

3. **Milić, Vladimir**; Šitum, Željko; Essert, Mario. Robust $\mathscr{H}_\infty$ Position Control Synthesis of an Electro-hydraulic Servo System. // *ISA transactions*. 49 (2010), 4; 535-542 (članak, znanstveni).

Radovi prihvaćeni za objavljivanje u CC časopisima:

4. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Novaković, Branko. An analytical fuzzy-based approach to $\mathscr{L}_2$-gain optimal control of input-affine nonlinear systems using Newton-type algorithm. // *International Journal of Systems Science*. (2013) (prihvaćen za objavljivanje, DOI: 10.1080/00207721.2013.860640).

Znanstveni radovi u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom:

5. Kasać, Josip; **Milić, Vladimir**; Stepanić, Josip; Mester, Gyula. A Computational Approach to Parameter Identification of Spatially Distributed Nonlinear Systems with Unknown Initial Conditions // 2014 IEEE *Symposium Series on Computational Intelligence, IEEE SSCI 2014, Symposium on Robotic Intelligence in Informationally Structured Space* / Orlando, Florida, 2014. (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

6. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Šitum, Željko. A Newton-Like Algorithm for $\mathscr{L}_2$-Gain Optimal Control of an Electro-Hydraulic Servo-System // *Proceedings of the 22th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)* / Fagiolini, Adriano (ur.). Palermo : IEEE Mediterranean Control Association, 2014. 574-579 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

7. Novaković, Branko; Majetić, Dubravko; Kasać, Josip; Brezak, Danko; **Milić, Vladimir**. Application of Control Terms P1 and P2 to Estimation of Rotation Curve of Stars // *TMT 2014 - Proceedings. 18th International Research/Expert Conference "Trends in the Development of Machinery and Associated Technology"*, Budapest, Hungary 10-12 September, 2014. / Ekinović, Sabahudin ; Yalcin, Senay ; Vivancos, Joan Calvet . (ur.).
   Zenica : Faculty of Mechanical Engineering in Zenica, B&H, 2014. 373-376 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

8. Šitum, Željko; Žilić, Tihomir; **Milić, Vladimir**. Improving performance of a hydraulic press with real-time nonlinear control // *Conference Proceedings, 9th International Fluid Power Conference Aachen* / Hubertus Murrenhoff, Dirk Schulze Schencking (ur.). Aachen : IFAS, RWTH Aachen University, 2014. 317-327 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

9. Kasać, Josip; **Milić, Vladimir**; Novaković, Branko; Majetić, Dubravko; Brezak, Danko. Initial Conditions Optimization of Nonlinear Dynamic Systems with Applications to Output Identification and Control // *Proceedings of the 20th Mediterranean Confe-*

rence on Control & Automation (MED) / Bernardo Morcego, Fatiha Nejjari, Ramon Pérez, Joseba Quevedo, Ramon Sarrate and Sebastian Tornil. (ur.). Barcelona : IEEE Mediterranean Control Association, 2012. 1241-1246 (predavanje,međunarodna recenzija,objavljeni rad,znanstveni).

10. **Milić, Vladimir**; Bemporad, Alberto; Kasać, Josip; Šitum, Željko. Numerical Algorithm for Nonlinear State Feedback $\mathscr{H}_\infty$ Optimal Control Problem // *Proceedings of the 20th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)* / Bernardo Morcego, Fatiha Nejjari, Ramon Pérez, Joseba Quevedo, Ramon Sarrate and Sebastian Tornil. (ur.). Barcelona : IEEE Mediterranean Control Association, 2012. 1247-1252 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

11. **Milić, Vladimir**; Di Cairano, Stefano; Kasać, Josip; Bemporad, Alberto; Šitum, Željko. A numerical algorithm for nonlinear $\mathscr{L}_2$-gain optimal control with application to vehicle yaw stability control // *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (IEEE CDC)* / Astolfi, Alessandro (ur.). Maui Hawaii : IEEE Control Systems Society and Omnipress, 2012. 5040-5045 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

12. Šitum, Željko; **Milić, Vladimir**; Žilić, Tihomir; Essert, Mario. Design, Construction and Computer Control of a Hydraulic Press // *Proceedings of the Conference: The 12th Scandinavian International Conference on Fluid Power, SICFP'11* / Harri Sairiala & Kari T. Koskinen (ur.). Tampere : Tampere University of Technology, 2011. 93-103 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

13. Tomić, Teodor; Kasać, Josip; **Milić, Vladimir**. Rigid body attitude control with complete rejection of unknown external disturbances // Proccedings of the 22nd International DAAAM Symposium / Katalinić, Branko (ur.). Beč : DAAAM International Vienna, 2011. (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

14. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Majetić, Dubravko; Šitum, Željko. A BPTT-like Min-Max Optimal Control Algorithm for Nonlinear Systems // *Numerical Analysis and Applied Mathematics* / Theodore E. Simos, George Psihoyios, Ch. Tsitouras (ur.).

Melville, New York : American Institute of Physics, 2010. 539-542 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

15. Šitum, Željko; **Milić, Vladimir**; Essert, Mario. Throttling and Volumetric Control Principle to an Electrohydraulic Velocity Servomechanism // *Workshop Proceedings, 7th International Fluid Power Conference Aachen, Efficiency through Fluid Power*, Volume 2 / Murrenhoff, Hubertus (ur.). Aachen, Germany : Apprimus Verlag, Aachen, 2010. 379-390 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

16. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Essert, Mario. A Potential Field Method Approach to Robotic Convoy Obstacle Avoidance // *Annals of DAAAM for 2009 and Proccedings of the 20th International DAAAM Symposium* / Katalinić, Branko (ur.). Vienna : DAAAM International, 2009. 1601-1602 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

17. **Milić, Vladimir**; Kasać, Josip; Šitum, Željko. Positioning a Multi-Robot System Formation Using Potential Field Method // *Annals of DAAAM for 2009 and Proccedings of the 20th International DAAAM Symposium* / Katalinić, Branko (ur.). Vienna : DAAAM International, 2009. 1599-1600 (predavanje, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).

18. Šitum, Željko; Essert, Mario; Žilić, Tihomir; **Milić, Vladimir**. Design and Construction of Hydraulic Servomechanisms for Position, Velocity and Force Control // *CD-ROM Proceedings of the 8th ASEE Global Colloquium on Engineering Education* / Budapest, Hungary, 2009. (poster, međunarodna recenzija, objavljeni rad, znanstveni).